Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje

Investigación durante las prácticas de enseñanza

Pablo Flores Martínez

colección

Pablo Flores Martínez

CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES SOBRE LAS MATEMÁTICAS, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE.

Investigación durante las prácticas de enseñanza

Granada, 1998

colección

Asesor para este volumen:
Juan Díaz Godino

Este libro se ha editado con la colaboración del
Departamento de Didáctica de la Matemática de la
Universidad de Granada

Editorial COMARES
Polígono Juncaril, Condominio Recife,
parcela 121, nave 11
Tlf. (958) 46 53 82 • Fax (958) 46 53 83
18210 Peligros (Granada)
ISBN: 84-8151-612-0 • Depósito Legal: GR. 236/1998

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES, S.L.

CONCEPCIONES Y CREENCIAS DE LOS FUTUROS PROFESORES SOBRE LAS MATEMÁTICAS, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE. EVOLUCIÓN DURANTE LAS PRÁCTICAS DE ENSEÑANZA

Pablo Flores Martínez

Granada 1995

ÍNDICE

Parte I: Análisis teórico y estudio piloto

II Parte: Evolución de las creencias y concepciones

Capítulo 3: Metodología de la segunda parte de la investigación

Capítulo 4: Evolución de las creencias y concepciones del grupo de estudiantes

Capítulo 5: Estudios de casos de dos estudiantes

Introducción

Esta publicación tiene como origen la Memoria de Tesis Doctoral, presentada por el autor para optar a grado de doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada, dentro del Programa de Doctorado en Didáctica de la Matemática correspondiente al bienio 90-92. La defensa del trabajo tuvo lugar en la Facultad de Ciencias de la Educación el día 17 de Octubre de 1995 ante el tribunal formado por los siguientes profesores: Dr. LUIS RICO (Universidad de Granada), Dra. CAMINO CAÑÓN (Universidad Pontificia de Comillas), Dr. JOAO PEDRO PONTE (Universidad de Lisboa), Dr. SALVADOR LLINARES (Universidad de Sevilla) y Dra. MARÍA LUISA OLIVERAS (Universidad de Granada).

La investigación ha sido dirigida por el Dr. JUAN DÍAZ GODINO y se encuadra dentro del Grupo de Investigación de la Junta de Andalucía: Teoría y Métodos de Investigación en Educación Matemática, FQM0126, dirigido por él mismo.

Han participado en el estudio los alumnos de 5º curso de la Sección de Metodología de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, del curso 1993-94. Nos ha sido muy provechosa la orientación y ayuda de los profesores de Didáctica de la Matemática Dra. CARMEN BATANERO, Dr. LUIS RICO, Dr. SALVADOR LLINARES, Dra. ISABEL ROMERO y Dr. MOISÉS CORIAT, así como por las profesoras de Lengua Española Dña. MARÍA DE LOS ÁNGELES LAMOLDA y Dña. MARÍA VICTORIA GONZÁLEZ.

La investigación que presentamos se sitúa en la formación inicial de profesores de Matemáticas de Bachillerato durante el desarrollo de la asignatura «Prácticas de Enseñanza», que se imparte en 5º curso de la Licenciatura de Matemáticas. En este contexto nos hemos planteado las siguientes preguntas de investigación:

.- ¿Qué contenido tienen las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje de los estudiantes para profesor de matemáticas de Bachillerato de nuestro contexto académico y socio-cultural?

.- ¿Cómo evolucionan estas concepciones y creencias tras el "primer encuentro con la práctica docente"?

El informe de investigación se organiza en dos partes. La primera incluye el análisis previo de carácter teórico y experimental. En la segunda se presenta el estudio de la evolución de las concepciones y creencias sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, de futuros profesores, empleando los referentes metodológicos y teóricos obtenidos en la primera parte.

La primera parte se encuentra dividida en dos capítulos. El primero describe los fundamentos teóricos en los que se sitúa nuestra investigación. Comienza por delimitar la forma en que se ha contemplado la formación de profesores en la Educación Matemática en los últimos años, presenta un amplio abanico de creencias y concepciones sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje, que hemos obtenido de la revisión bibliográfica, y finalmente, intenta concretar los constructos *concepciones y creencias* que serán objeto de la investigación. El segundo capítulo define el problema de investigación y el estado de la cuestión, y presenta un estudio piloto, en el que se ha utilizado el comentario de textos con el fin de detectar creencias y concepciones.

La segunda parte del libro se encuentra dividida en tres capítulos. El capítulo tercero presenta la metodología de investigación, haciendo especial énfasis en la operativización de las variables de la investigación y del sistema de categorías que servirá para identificar esas variables. La parte empírica se inicia en el capítulo cuarto, en la que se estudia el cambio en las creencias y concepciones del grupo de los estudiantes de la asignatura *Prácticas de Enseñanza*, durante el curso 1993-1994, empleando para ello los instrumentos obtenidos en la fase teórica de la investigación. El capítulo quinto emplea estos instrumentos para definir con más precisión, mediante dos estudios de casos, los perfiles de creencias y concepciones de dos estudiantes de este grupo: Luis y Eva.

Por último, se describen las conclusiones y las perspectivas que se abren tras la realización de nuestra investigación.

A mi padre A Pablo y Marta

Parte I: Análisis teórico y Estudio Piloto

> *¿Se entreve ya el enorme error cometido al querer aclarar la vida de un hombre o una época por su ideario, esto es, por sus pensamientos especiales, en lugar de penetrar más hondo, hasta el estrato de sus creencias más o menos inexpresas, de las cosas con que contaba? Hacer esto, fijar el inventario de las cosas con que se cuenta, sería de verdad, construir la historia, esclarecer la vida desde su subsuelo.*
>
> *Ortega y Gasset,* ***Ideas y Creencias***

Capítulo 1 Fundamentación teórica

1.1. Introducción. Cambios en la enseñanza de las matemáticas. Relación con la forma de concebir las matemáticas

Los cambios en la organización social y el crecimiento cuantitativo y cualitativo de la tecnología han repercutido en la educación matemática. La reforma de la enseñanza de la matemática que está en curso (Carl, 1989; NCTN, 1991; MEC, 1992) aboga por una matemática abierta a todos los alumnos y por un método más participativo de enseñanza, con mayor protagonismo del alumno, ya que se pone el énfasis en el "proceso" de hacer matemáticas, más que considerar el conocimiento matemático como un "producto" acabado.

Esta nueva perspectiva en la enseñanza de las matemáticas se fundamenta en una consideración epistemológica particular de la propia matemática. Así por ejemplo, en el Curriculum de Educación Secundaria de Andalucía se indica:

> *"El Curriculum del Área de Matemáticas (..) quiere partir de una concepción de este Área integradora y cultural, superadora de la visión academicista, encerrada en sí misma y principalmente basada en la deducción que con frecuencia la ha caracterizado*" (Curriculum de la Educación Secundaria Obligatoria, Área de Matemáticas, BOJA, 1992, p. 4188)

Rico y Sierra (1994), resumen en diez puntos la filosofía de los documentos oficiales publicados en España, en relación a la reforma educativa en curso. Entre ellos destacamos los siguientes:

1. *1. Las matemáticas evolucionan continuamente, y están relacionadas con otros conocimientos. Esto implica que no convenga presentarlas como un producto cerrado y que los problemas de otras áreas proporcionen terreno para nuevos conocimientos matemáticos.(..)*
2. *4. Plantea la distinción entre cómo se presentan las matemáticas y cómo se transmiten y adquieren. Afirma que la construcción del conocimiento matemático es inseparable de la actividad sobre los objetos.*
3. *5. Enfatiza el carácter constructivo del conocimiento matemático*. (Rico y Sierra, 1994, pp. 197-198)

Steiner (1987) resume en seis tesis su postura respecto a la epistemología que debe regir la educación matemática. Según estas *tesis epistemológicas,* la filosofía de las matemáticas se proyecta en una forma de concebir la enseñanza, y a la vez, la forma de concebir la enseñanza lleva implícita una visión epistemológica particular y filosófica de la matemática (tesis 1 y 2, p. 8).

> *Tesis 1: De manera general, toda concepción, toda epistemología, toda metodología y filosofía de las matemáticas contiene -a menudo de una manera implícita- ideas, orientaciones o gérmenes de teorías de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas" (p. 8)*
>
> *Tesis 2: La forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas más específicamente: los fines y objetivos (taxonomías), los programas, libros de texto, curricula, metodologías de enseñanza, principios didácticos, teorías de aprendizaje, diseños de investigación en educación matemática (modelos, paradigmas, teorías, etc.), e igualmente las concepciones de los profesores sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas, así como las percepciones de los estudiantes sobre las matemáticas- llevan con ellos o descansan sobre una visión particular epistemológica y filosófica de las matemáticas, aunque sea de manera implícita". (p. 8)*

La investigación en formación de profesores de matemáticas parte, en la actualidad, de una consideración epistemológica de las matemáticas que se incluye en el constructivismo (Ponte, 1994a y b). Esta postura no es independiente de la concepción constructivista del aprendizaje (von Glasersfeld, 1989; Vergnaud, 1990; Ernest, 1994; Lerman, 1994a), según la cual el propio alumno construye el conocimiento, a partir de sus estructuras cognitivas anteriores.

Se considera, pues, que el estudiante (profesor en formación, en nuestros cursos) tiene unas estructuras de partida que hay que tomar en consideración en su formación. Estas estructuras y representaciones se componen de concepciones y creencias sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje (Llinares, 1989).

Sumergidos en un contexto de formación de profesores, nos interesamos en las creencias y concepciones de los estudiantes para profesor teniendo en cuenta la importancia de las mismas en los procesos de formación. Tanto el curriculum de los cursos de formación, como el proceso de interacción formador-estudiantes, deben tomar en consideración las creencias y concepciones de los estudiantes, sobre las matemáticas, y su enseñanza y aprendizaje (Rico y Gutiérrez, 1994).

Por estas razones hemos emprendido una investigación interesada en detectar las creencias y concepciones de nuestros estudiantes.

En este capítulo tratamos de delimitar el campo de nuestra investigación. Para ello comenzaremos por mostrar el peso que las concepciones y creencias están adquiriendo en la formación de profesores (sección 1.2). Para precisar las variables de investigación, necesitamos clarificar el significado de los términos concepción y creencia empleados (sección 1.3). Posteriormente estudiaremos catálogos de creencias y concepciones sobre el conocimiento matemático y la enseñanza y aprendizaje, con objeto de tener un inventario en el que situar a los profesores en formación estudiados en nuestra investigación (sección 1.4). De esta forma, los apartados 1.2 y 1.3 nos suministran fundamentos teóricos que sustentan la investigación, mientras que el apartado 1.4 supone un primer paso en la investigación, derivando del mismo un mapa en el que podremos situar las creencias y concepciones de nuestros estudiantes.

Con objeto de clarificar y no confundir los sujetos a que nos referimos, en esta memoria vamos a emplear los siguientes términos: Hablaremos de ***estudiantes*** para referirnos a estudiantes para profesor, o profesores en formación inicial, inscritos en cursos de formación de profesores. Llamaremos ***alumnos*** a los adolescentes que se encuentran cursando la enseñanza primaria o secundaria, futuros y presentes "clientes" de los estudiantes para profesor. Llamaremos ***profesores*** a los sujetos que tienen a su cargo la enseñanza de un curso, o a los estudiantes cuando, durante las prácticas, tienen un curso a su cargo. Nosotros hemos actuado de ***profesores*** de los ***estudiantes*** objeto de esta investigación, en la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos*.

1.2. Importancia de las creencias y concepciones de los profesores en la formación de profesores de matemáticas

Fruto del auge de las psicologías constructivistas (Vergnaud, 1990) y de la tendencia a la democratización educativa, están surgiendo cambios curriculares importantes en la enseñanza (Román y Diez, 1989). La enseñanza de las matemáticas no es ajena a estas reformas. La edición del Informe Cockcroft (1985) en Gran Bretaña, y la posterior publicación de los estándares profesionales, por el NCTM, en los Estados Unidos (1991), ha supuesto el comienzo de la actual reforma en educación matemática.

La formación de profesores de matemáticas afronta el reto de preparar al profesor para estas reformas. Ello hace que la formación de profesores esté cobrando auge en los congresos y en la literatura referida a educación matemática. En la formación inicial y permanente del profesor, se han proyectado los paradigmas que interpretan la enseñanza y el aprendizaje. En la actualidad se extiende la idea de que interesa más lo que piensa el profesor que el trasmitirle destrezas estandarizadas. Esto lleva a dirigir la investigación sobre la formación de profesores de matemáticas hacia paradigmas interpretativos, en los que interesa el pensamiento del profesor, como variable que controla su acción.

Tanto la formación de profesores como la investigación educativa sobre profesores situada en estos paradigmas, están tomando en consideración el pensamiento de los profesores y de los estudiantes para profesor, preocupándose tanto por lo que piensan sobre la enseñanza como por la forma en que se representan la formación en que están inmersos, en un proceso que llega a ser recursivo. Las representaciones del profesor en formación constituyen a la vez referentes teóricos de su actuación como profesor y componentes prácticos de su actuación como alumno en los cursos de formación. Para delimitar de manera más precisa la importancia de las representaciones de los profesores en formación sobre su actuación como profesores, vamos a articular este apartado en tres partes. La primera delimita el paradigma de investigación y de formación de profesores en que nos situamos, y describe el interés creciente en investigar las creencias y concepciones de los profesores. La segunda describe la evolución que, en el seno de los congresos en educación matemática, especialmente el *International Congress in Mathematics Education (ICME)*, ha tenido este interés por concepciones y creencias, en el marco de la formación de profesores de matemáticas. Completa esta visión, un recorrido por los resúmenes de investigaciones sobre formación de profesores, relacionadas con el estudio de concepciones y creencias.

1.2.1. Interés de las creencias y concepciones de los profesores en investigación educativa

En relación a la investigación en educación, nos situamos en el paradigma basado en el *pensamiento del profesor* (Shavelson y Stern, 1983; Clark y Peterson, 1986; Shulman, 1986; Marcelo, 1987), que enfatiza dos características del proceso docente: la importancia en la enseñanza de las representaciones del profesor (componente teórica) y la repercusión de la actuación del alumno (componente práctica), por un lado, y la relación de interdependencia de ambos aspectos (Clark y Peterson, 1986).

Desde este paradigma basado en el *pensamiento del profesor*, se considera, pues, que la conducta cognitiva del profesor está guiada por el sistema personal de creencias y valores, que le confieren sentido a dicha conducta. Por su carácter inconsciente e impreciso, Clark y Peterson (1986), entre otros, dicen que hay que ayudar al docente a describir explícitamente el marco de referencia constituido por sus concepciones y creencias sobre la enseñanza y aprendizaje. Thompson (1992) y Ernest (1989a) destacan la importancia que tienen además las creencias sobre las matemáticas para los profesores de matemáticas, y junto con Cooney y Shealy (1994) y Ponte (1992), indican que la formación de profesores debe tomar en consideración la explicitación y cambio de concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas.

Durante los cursos de formación inicial, los futuros profesores no tienen un referente ***práctico*** con el que confrontar sus creencias sobre la enseñanza de las matemáticas (Cooney y Shealy, 1994), por lo que no necesitan explicitar y reflexionar sobre esas creencias hasta que no perciban la aparición de dilemas profesionales que deben explicar y resolver. Sin embargo, consideramos que la formación de profesores puede actuar como *agente externo* que haga que el futuro profesor reflexione sobre su papel como alumno y del que tendrá como profesor, sobre el significado de la enseñanza que recibe y que impartirá, y sobre la naturaleza del contenido matemático que está aprendiendo y que enseñará en un futuro (Ernest, 1989a, Thompson, 1992). Las creencias y concepciones de los profesores se constituyen, pues, en aspectos centrales de la formación de profesores.

Es decir, partimos de una interpretación contextual de la formación de profesores, desde una postura epistemológica constructivista, con lo que adoptamos una perspectiva situacional, según la terminología de Ferry (1987). En relación a la formación de profesores, nos situaremos en el cuadrante *(problemático, reflexivo)* de Zeichner (1983), quien clasifica los paradigmas de formación del profesorado en relación a un sistema de ejes que encierran dos continuos: *grado en que la formación del profesorado entiende los contextos sociales e institucionales como ciertos o válidos, o como problemáticos o discutibles,* por un lado, y *grado en que el curriculum de formación del profesorado es o no establecido de antemano*, por el otro.

En esta situación y desde el paradigma del pensamiento del profesor, consideramos muy importantes las teorías y creencias de los docentes, ya que forman parte de los procesos de pensamiento de los mismos. Este paradigma se completa con la metáfora del profesor como investigador (Stenhouse 1987; Elliot 1991) y las aportaciones de Schön (1992 y 1993) sobre el profesor como *profesional reflexivo.*

1.2.2. La formación de profesores de matemáticas en los congresos de educación matemática

La formación de profesores de matemáticas se ha constituido en un tema de interés creciente a lo largo de los congresos sobre educación matemática. Dentro de los *International Congress in Mathematics Education* (ICME), se empezó a dedicar un grupo específico en el III, celebrado en Karlrühe en 1976 (Otte 1979). En este grupo se sugiere que el tema de la formación de profesores sea un tema permanente en los futuros Congresos (p. 120). En él se estudia el rol que debe desempeñar la matemática en la formación del profesor, y aparecen algunos dilemas que, a juicio de Otte, van a encontrarse en los análisis de la formación, como la dialéctica teoría-práctica, o la profesionalización docente del profesor frente a la comunidad matemática. Como consecuencia de este primer grupo de trabajo se llevó a cabo el Symposium de Helsinki, en 1978, sobre "la formación del profesor de matemáticas".

En Berkeley, 1980, el ICME IV, afrontó la profesionalización del profesor de matemáticas (Zweng y cols. 1983). Tal como señala Llinares (1993), las dicotomías fundamentales de este Congreso se refieren a la oposición componentes matemáticos / componentes pedagógicos y psicológicos de la formación, y formación práctica / formación teórica. El grupo de trabajo que trató la formación de profesores en este congreso es el origen del grupo BACOMET (Basic Components, of Mathematics Education for Teacher).

El ICME V, celebrado en Adelaida en 1984 presentó varios grupos de trabajo centrados en la formación de profesores. El grupo de trabajo dedicado específicamente a la formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria (Dörfler y cols., 1986) apoya una formación holística, en la que los componentes de la formación estén integrados y, entre los métodos de formación de profesores, se recomienda la observación de clases. El grupo 2, dedicado a la profesionalización del profesor, reconoce el papel determinante de las creencias de los profesores en su proceso de formación (Cooney y cols., 1986).

Ya en los "preproceedings" del grupo 6 del ICME VI, celebrado en 1988 en Budapest, (Dörfler y cols., 1990), se plantean fines de la formación inicial. Entre estos fines destacamos los siguientes:

> *. Cambiar las actitudes de los futuros profesores hacía las matemáticas, reconociendo el rango completo de las actividades matemáticas y teniendo una actitud más positiva hacía las aplicaciones de las matemáticas. . **Extender las concepciones de los futuros profesores sobre la naturaleza de las matemáticas y sus concepciones sobre el papel de los profesores** en la promoción del aprendizaje de las matemáticas. [El realzado es nuestro]*
> (Dörfler y cols., 1990).

Entre las conclusiones de este congreso, destacamos:

> *"Las matemáticas no deben ser vistas como un descubrimiento sino como una invención y, para los alumnos, una re-invención. Para muchos profesores esto encierra un cambio sustancial de ideas, **especialmente para aquellos que no son conscientes de sus creencias o actitudes. Básicamente se requiere un proceso de deshacerse de sus propias ideas sobre los fines, métodos y la naturaleza de las matemáticas**.* (Dörfler y cols., p. 183, el realzado es nuestro).

Dentro del subgrupo dedicado a la *investigación y formación de profesores*, coordinado por Cooney y Dossey, se insiste en la importancia de las creencias de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, y la importancia de tomarlas en consideración en los cursos de formación de profesores. Ernest, por su parte, relaciona la enseñanza de las matemáticas con los esquemas de los profesores, el contexto social de enseñanza y el nivel de los profesores en relación con la reflexión y el proceso de pensamiento. El autor destaca los efectos del conocimiento de matemáticas de los profesores y sus creencias sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. También Kuendiger informa sobre la relación entre las creencias que los profesores en formación tienen como aprendices de matemáticas y su propia enseñanza de las matemáticas (p. 185).

El ICME VII, celebrado en Quebec en 1992, se cuestiona sobre la repercusión que tiene en formación de profesores la reforma en educación matemática en curso. En esta edición se enfatiza el papel profesional del profesor. Las creencias epistemológicas de los profesores se colocan, junto con el conocimiento práctico personal y los conocimientos expertos, como variables mediadoras en el desarrollo profesional (Dossey y cols., 1994).

Se proponen cambios en la formación de profesores que permitan la aplicación de los estándares profesionales redactados por el NCTM (1991). Estos cambios tienden a dar mayor protagonismo a los profesores para tomar decisiones sobre lo que se va a enseñar en la escuela y para cambiar la forma en que se enseña. Se enfatiza el peso de la forma de enseñar, y se relaciona esta forma con un cambio en las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas. Este cambio introduce la idea de romper con las matemáticas como asignatura de élite.

Uno de los tópicos del grupo se refiere a las creencias de los profesores en formación. Al destacar la importancia de la formación escolar del futuro profesor, se analiza la naturaleza cíclica del cambio en la práctica de la enseñanza, ya que: 1, los estudiantes tienen experiencia de instrucción **directa** (transmisión directa) en la escuela; 2, los programas de formación inicial intentan planteamientos mas abiertos de enseñanza y aprendizaje; 3, sin embargo, cuando el profesor novato llega a la escuela entra en una situación en la que se tiende a la instrucción **directa** (transmisión directa).

Ante este círculo vicioso, se proponen 8 objetivos de los programas de formación de profesores, entre los que destacamos:

> *5)(..) desarrollar la habilidad del futuro profesor para que introduzca el aprendizaje cooperativo en su clase, y para diseñar e implementar investigaciones activas que conecten el estudio escolar de las matemáticas con los usos reales en el mundo de las mismas matemáticas. Para ello se destaca:* ***Debe constituir un rasgo característica de los profesores en formación, la identificación de sus creencias y una reflexión sobre ellas****. Sólo a través de actividades que promuevan tal instrospección se podrá ayudar a los profesores a alcanzar su potencial y ayudar a sus estudiantes a alcanzarlo. Para reflexionar sobre las creencias se sugiere la interpretación de viñetas, la discusión sobre el contenido de clases grabadas en vídeo, escribir un diario en el que se describan las creencias base sobre la enseñanza, y discusiones sobre la influencia del género, carácter étnico, y otros aspectos relacionados con la edad, en discusiones abiertas sobre la manera de hacer cambiar las creencias y mejorar la enseñanza y el curriculum. Es necesario que los educadores matemáticos elaboren materiales específicos para apoyar estas actividades, trabajando con profesores de todos los niveles.*

Lappan y Theule-Lubienski (1992), en su conferencia en el mismo ICME, describen tres ámbitos de preparación de profesores, tanto en formación inicial como en formación permanente. Partiendo de que lo que los estudiantes aprenden está conectado con el cómo aprenden, dicen que el entorno en el que los estudiantes aprenden afecta su punto de vista de lo qué son las matemáticas, de cómo se aprenden, y, quizás lo más importante, su punto de vista de si mismos como aprendices de matemáticas.

Las autoras reflejan que la reflexión sobre la formación de profesores es de segunda especie. Si en un primer análisis se está apoyando que los alumnos exploren en matemáticas, con objeto de superar el mero ámbito de transmisión en clase, no podemos caer en la ilusión de considerar que los futuros profesores van a aprender el razonamiento pedagógico mediante una simple transmisión.

Destacan tres campos de *conocimientos y de creencias*, que son: conocimiento y creencias sobre las matemáticas, conocimiento y creencias sobre la pedagogía de las matemáticas y conocimiento y creencias sobre los estudiantes.

1.2.3. Investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas

Los resúmenes de investigaciones que han aparecido durante los últimos años (Cooney, 1980; Houston, 1990; Grouws, 1992; Bazzini, 1994) nos muestran la evolución que ha sufrido la investigación en el campo de la formación de profesores. En estos documentos podemos apreciar un paralelismo entre los paradigmas empleados para investigar la enseñanza y los utilizados en las investigaciones referidas a formación de profesores de matemáticas (Brown y cols., 1990). Este paralelismo se manifiesta en los siguientes hechos: a) El aumento en el número de investigaciones referidas al campo de la formación de profesores de matemáticas; b) La creciente importancia que ha tomado el paradigma cualitativo en investigación en formación de profesores de matemáticas; c) El interés en investigar la formación de profesores de enseñanza secundaria; d) La preocupación por investigar la formación de profesores en el contexto que se realiza, mediante investigaciones de carácter etnográfico; e) El empleo de los procesos de pensamiento, representación, asignación de significados, creencias y concepciones, etc. de los profesores en formación, como variables en las investigaciones dedicadas a formación de profesores; f) La repercusión que sobre la enseñanza y sobre la formación de profesores tienen las epistemologías que conciben el conocimiento matemático como un proceso (Dossey, 1992), más que como un producto; g) La implicación del proceso de investigar la formación de profesores con los propios cursos de formación de profesores. Esta incidencia se manifiesta en la metáfora del profesor investigador (Stenhouse, 1987), que lleva a incluir la investigación dentro del proceso de formación. Pero además, el objetivo de la investigación en formación de profesores es la elaboración de curricula de formación. Y, por último, se constata que los investigadores en formación de profesores son fundamentalmente formadores de profesores implicados en cursos de formación (Brown y cols. 1990)

En el texto editado por el NCTM (Shumway, 1980), Cooney (1980) nos presenta un panorama de la investigación en enseñanza de las matemáticas y la referida a la formación de profesores. Constata que no ha encontrado investigaciones referentes a formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. Las investigaciones referenciadas en su artículo parten de la búsqueda de una enseñanza eficaz, generalmente medida en términos de logros de los alumnos. Las variables de contenido para las investigaciones sobre la formación de profesores las sitúa Cooney en lo que llama "conocimiento pedagógico". Sin embargo, Cooney se interesa por la formación del profesor reflexivo cuando dice:

> *Yo creo que los profesores de cualquier nivel están mejor preparados si tienen conceptos básicos que permiten reflexionar sobre su enseñanza y si están mejor preparados para identificar las distintas alternativas antes de tomar decisiones instruccionales* (Cooney, 1980. p. 464.)

Brown, Cooney y Jones (1990), en el Manual de Investigación en Educación (Houston, 1990), clasifican las investigaciones en dos perspectivas de investigación, una basada en métodos cuantitativos, que generalmente arrancan del positivismo, y la otra orientada hacia métodos cualitativos, en el que la interpretación y el significado son muy importantes (p. 659). Destacan cinco etapas en la educación matemática, que dan lugar a tres momentos en la formación de profesores. En el primer momento, que llega hasta la década de los 70, se considera que la formación de profesores debe basarse en aumentar el conocimiento matemático de los profesores. El segundo momento se relaciona con el auge de la teoría de los estadios de desarrollo de Piaget. El tercer momento se sitúa alrededor de los 70, y en él la formación de profesores se basa en la creación de competencias, con raíz en el conductismo.

Son de esta etapa las investigaciones basadas en el profesor eficaz. Los autores consideran que los importantes cambios que ha habido con posterioridad a esta década en los curricula de matemáticas escolares, no se han visto reflejados en la formación de profesores ni en la investigación en formación de profesores de matemáticas. Desde perspectivas investigadoras de carácter analítico los investigadores se plantean la descripción del *profesor eficaz* . Pero, según los autores, este constructo

> *no ha proporcionado una base para desarrollar programas de formación de profesores que puedan producir profesores competentes, que puedan asegurar que sus alumnos aprendan. Sin embargo, ha generado información útil sobre métodos de enseñanza eficaz y puede producir eventualmente una base para la formación de profesores*. (p. 464)

Desde la perspectiva interpretativa, que los autores llaman humanística, se abren dos vías de investigación. En la primera las investigaciones están destinadas a estudiar los significados atribuidos por los profesores a las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje. La segunda abarca las investigaciones que se ocupan de la influencia de las condiciones sociales en la asignación de significados y en la actuación de los futuros profesores y profesores en ejercicio. Resumen las investigaciones basadas en esta perspectiva diciendo:

> *Nuestra revisión de las investigaciones llevadas a cabo en la tradición humanística muestran que estamos llegando a conocer más sobre como los profesores construyen el significado, y ven su vida profesional. Pero también hemos detectado lo poco que esta información puede afectar a los programas de formación de profesores.*

Sin embargo, reconocen que

> *los investigadores que han llevado a cabo estudios basados en dotar de significado, y los profesores que trabajan con ellos están de acuerdo en que las investigaciones no son sólo una forma de investigación sino también una manera de formar profesores* (p. 650, 651)

En el artículo, que tiene un carácter crítico, Brown, Cooney y Jones estudian limitaciones de los dos paradigmas de investigación, empezando por relativizar el dualismo que significa una separación tan radical como la enunciada. La perspectiva analítica encierra una consideración de la matemática como cuerpo externo al investigador, lo que genera la *falacia naturalista*. Es decir, da lugar a circularidad en sus apreciaciones, como la derivada de una validación que sólo es

posible desde criterios de valor de la enseñanza relacionados con el rendimiento de los alumnos,

es decir, de su propio paradigma. Pero la perspectiva humanística no está exenta de lagunas. El

peso concedido a las creencias puede verse relativizado, a juicio de los autores, por las

condiciones del entorno, creando una *falacia naturalista revisada*. Además, el sistema de

creencias puede presentar estructuras incompatibles sin que la alteración de uno revierta en el

otro.

Como en el artículo de Cooney (1980) antes reseñado, concluyen los autores indicando

que:

> *"los profesores que han sido tratados en las investigaciones basadas en la asignación de significados encuentran que no sólo han sido reactivados por el dialogo, sino que también han sido transformados por éste. El investigador, así, no sólo investiga sino que llega a formar profesores. Esto nos suministra una concepción nueva de la formación de profesores.* (..) *los profesores no son enseñados en metodologías, sino que son animados a considerar que sus creencias son importantes, que presentan conflictos y que constituyen elementos esenciales de su propio conocimiento matemático, tanto como las de sus estudiantes*". (..) *"debemos adoptar una metáfora que no ha sido adecuadamente explotada en la agenda de investigación sobre formación de profesores: la metáfora del profesor como investigador"*

Más recientemente, Cooney y colaboradores (Cooney y Shealy, 1994; Cooney, 1994a y

b) hacen una recopilación de sus propios resúmenes de investigación, mostrando cómo cambia el

punto de partida de estos resúmenes. Mientras que en el de 1980, Cooney, recogía las

investigaciones basadas en la instrucción de profesores, suministrándole conocimientos

matemáticos especialmente, ya que se suponía que la preparación necesaria es la matemática, en

el de 1990, Brown, Cooney, y Jones, presentan un estado de la cuestión derivado de las teorías

de Khun (1990), que dan lugar a una nueva visión de la ciencia, en la que se establece mayor relación con el sujeto. En esta última perspectiva, se conjugan la consideración humanística de la

ciencia con la visión epistemológica, basada en el constructivismo social. Como resume el autor

(Cooney, 1994b)

> *Tal como hemos descrito, las orientaciones de la profesión durante 30 años partieron de que los problemas de la formación de profesores consistían primordialmente en poner al día el conocimiento matemático de los profesores. Los progresos en formación de profesores se contemplaban como una cuestión de trasladar la investigación en enseñanza a los principios para entrenar a los profesores. Esta investigación en enseñanza se focalizaba en las conexiones entre los logros de los estudiantes y las características de los profesores, los comportamientos de los profesores y las decisiones de los mismos.*
> *Posteriormente fueron descartadas estas propuestas. Se focalizó entonces, la investigación en lo que cree el profesor y se dirigió hacia estudios interpretativos que describan las experiencias de dar significado de los profesores*" (Cooney, 1994, p. 631)

Brown y Borko (1992), en el *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (Grouws, 1992) diferencian tres *tradiciones investigadoras* en formación de profesores. Una primera, en el campo de la psicología cognitiva, se basa en el aprender a enseñar, para lo que trata de identificar una *buena* enseñanza de las matemáticas, y plantea la preparación del profesor en un proceso a largo plazo, que comienza en su experiencia discente. En esta corriente surgen, entre otras, las investigaciones centradas en el profesor eficaz, y en la comparación profesor experto / profesor novato. Una segunda línea de investigación se refiere a la socialización del profesor, en la que se examina *el proceso de entrada del futuro profesor en la sociedad de profesores de matemáticas*. Y una tercera que se ocupa del desarrollo del profesor, entendido como *crecimiento profesional de los profesores*.

Zeichner y Gore (1990) distinguen tres líneas de investigación, dentro de la segunda línea de investigación descrita por Brown y Borko (1992): la primera se sitúa en una perspectiva funcionalista (partiendo de vías predictivas y generalizables, el profesor es pasivo); la segunda es la perspectiva interpretativa; y la tercera la perspectiva crítica (en relación con el contexto social). La perspectiva interpretativa se ocupa de la forma en que el profesor en formación *interpreta* el proceso formativo. En esta línea se inscriben las investigaciones relacionadas con las creencias y concepciones de los profesores.

Por su relación con la investigación interpretativa, destacamos de la tercera línea de investigación analizada por Brown y Borko (1992) las investigaciones que emplean el esquema de Perry (Copes, 1982; Perry, 1988) para describir las etapas evolutivas del desarrollo del profesor en su carrera profesional (Mayerson, 1977; McGalliard, 1983)

Como vemos, en la investigación en formación de profesores de matemáticas, va aumentando el interés por las creencias y concepciones de los profesores. Este interés hace que en el *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grouws, 1992) aparezca un artículo dedicado específicamente a las *Creencias y concepciones de los profesores* (Thompson, 1992). Independientemente de que este artículo nos suministre un estado de la cuestión que describiremos más adelante, nos interesa destacar aquí el peso que se reconoce al estudio de las creencias y concepciones de los profesores en la investigación sobre formación de profesores, en el que aporta una reflexión sobre la importancia de los paradigmas basados en el pensamiento del profesor. Y aunque no dé resultados definitivos, las investigaciones sobre concepciones y creencias del profesor permiten, por una parte, combatir el uso de las concepciones derivadas de experiencias discentes, por otra reconocer que muchas de las creencias derivan de la manera en que se realiza la formación, y por último permiten reflexionar sobre el papel de los formadores de profesores.

Igualmente, Thompson (1992) reconoce que la reconceptualización que significa ocuparse de las teorías personales del profesor, manifestadas en sus concepciones y creencias, ayuda las restantes investigaciones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por otra parte, la preocupación por el pensamiento del profesor ha mostrado las limitaciones de la idea de eficacia docente, la influencia que tiene el contexto social, que actúa de filtro entre las creencias y la práctica, y ha abierto una línea basada en la reflexión de profesores sobre sus teorías y su relación con la práctica.

Antes de abordar nuestro estudio vamos a clarificar el sentido en que usamos los términos "concepciones" y "creencias".

1.3 Naturaleza de los constructos *concepciones* y *creencias*

En el apartado anterior hemos descrito la importancia que se le concede en la investigación en formación de profesores de matemáticas a las concepciones y creencias de los estudiantes para profesor, sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Antes de plantear el problema específico de investigación vamos a intentar precisar el alcance de las nociones que estudiaremos en nuestra investigación: *concepciones* y *creencias* de los estudiantes para profesor.

El Diccionario de la Real Academia (Real Academia Española, 1984) los define:

> ***Creencia****: Firme asentimiento y conformidad con alguna cosa. Completo crédito que se presta a un hecho o noticia como seguros o ciertos.* (p. 394)
>
> ***Concepción****: Acción y efecto de concebir.*
>
> ***Concebir****: Formar idea, hacer concepto de una cosa, comprenderla* (p. 351)

En el diccionario etimológico, aparece *creencia* como "dar fe", mientras que *concepción* aparece como afirmación racional, de acuerdo con criterios explícitos. En el Diccionario de términos filosóficos de Ferrater Mora (1994) no aparece la palabra *concepción*, y le da un matiz teológico al término *creencias*, de manera que cuando discute el significado que atribuyen algunos autores a éste término, indica en todos ellos una raíz religiosa.

Thompson (1992) y Pajares (1992) consideran que no se ha descrito con precisión en la literatura de investigación, el concepto de *creencia*, y su relación con el conocimiento, pese a la popularidad que esta línea investigadora ha alcanzado recientemente. Pajares achaca a esta falta de precisión la dificultad para comunicar resultados de investigaciones.

1.3.1 Caracterización de *creencia*

Vicente (1995), en un estudio sobre el peso y significado de la información que percibimos, recorre sistemáticamente el sentido que se le atribuye al término creencias. Tomando las creencias como *hecho humano*, la primera distinción que se establece tiene un alcance popular y consiste en diferenciar el conocimiento por sus fuentes: fuentes propias del sujeto y fuentes externas.

*Las primeras son la propia experiencia de la vida y también la capacidad intelectual de cada uno; por las que llegamos a obtener determinados conocimientos: esto es lo que propiamente **sabemos**. A esto se añade lo que conocemos por medio del testimonio o de la información procedente de otras personas; pero que nosotros no hemos podido comprobar o de hecho no hemos comprobado personalmente: esto es lo que, propiamente hablando, **creemos***
(Vicente, 1995, p. 13)

Para este autor, lo que los psicólogos sociales llaman *sistemas de creencias* tienen una estructura jerárquica. Las creencias centrales serían las que se refieren a la identidad personal, rodeadas de las concernientes al mundo exterior, desde el más inmediato al más lejano, en las que se incluirían las creencias relacionadas con el ambiente cultural y social. Un nuevo círculo estaría formado por las creencias sobre el pasado, en cuanto determinan e influyen sobre nuestro presente. En el siguiente círculo aparecerían las creencias que se refieren a los ideales humanos y los valores de la vida. Y en el círculo final aparecerían los conocimientos científicos

*que si bien, como ya hemos anotado, de suyo son algo verificable o comprobable -bajo este aspecto pertenecen al **saber**-, de hecho y para la mayoría de las personas y en un elevado porcentaje pertenecen a lo que se acepta **credencialmente**, es decir, por la confianza en los investigadores, testigos o maestros.* (Vicente, 1995; p. 18)

Por encima de este círculo de creencias científicas (que constituyen el objeto de nuestra investigación), se situaría el círculo de conocimientos de los que sí tenemos una evidencia personal.

El uso lingüístico del término creencias se puede reducir a tres significados principales, según Vicente, cada uno de los cuales precisa más el campo de uso.

a) Está en primer lugar el uso en sentido amplio, impreciso, que incluye a cualquier tipo de conocimientos o noticias. En lugar de "yo pienso" decimos frecuentemente "yo creo".

b) Luego vendría un sentido un poco más preciso. Se trataría de un conocimiento del que no tenemos plena evidencia ni certeza; pero que es compatible con un saber probable, basado en algunos indicios o pruebas razonables. En este caso, "creer" equivale a "tener opinión" sobre algo; es decir, poseer un conocimiento basado en algunas pruebas, datos o comprobaciones. (..) Aquí se distingue ya mejor entre "saber" y "creer",

como entre conocimiento cierto y conocimiento solamente probable.
c) Finalmente, cabría un significado de "creer" todavía más estricto, como ***confiar*** *en alguien; prestar nuestro crédito a otras personas "a las que creemos". En este sentido "creer significa* ***asentir, aceptar como verdadero*** *aquello que se nos comunica. (..) De esta forma el "creer" se diferencia netamente del "saber", si por esto entendemos el conocimiento de algo bajo una verificación y comprobación personal.* (Vicente, 1995, pp. 37-38)

Esta caracterización gradual lleva a Vicente a delimitar el sentido de "creencia" al *asentimiento o aceptación de una comunicación de otras personas*. Esta restricción de creencias a lo que proviene de la comunicación no deja de lado el uso que se hace de creencia en las ciencias, ya que, como dice el autor:

de hecho en la mayoría de los casos se trata de creencias en el sentido estricto. Son, en efecto, ideas u opiniones que la gente tiene en la cabeza, pero sin haber comprobado ni haberse detenido a examinar si se trata de algo fundado o sin fundamento; simplemente se limita a "creerlo" por haberlo recibido de los mayores, del ambiente cultural o social, porque "siempre se ha entendido así" o "todo el mundo lo dice". Como decía Ortega, no son propiamente ***ideas****, sino "algo en lo que se está" y de lo que ni siquiera nos permitimos dudar..* (Vicente, 1995, p. 39)

Ortega y Gasset (1986 /1934) añade una caracterización más ontológica de las creencias basada en la relación al sujeto. Para Ortega *se tienen* ideas, mientras que:

esas ideas que son de verdad "creencias" constituyen el continente de nuestra vida (..). Cabe decir que no son ideas que tenemos, sino ideas que somos. (p. 24)

En el campo de la educación, Marcelo (1987) recoge la definición de creencias de Fishbein y Ajzen (1989):

Información que tiene una persona enlazando un objeto con algún atributo esperado; las creencias están normalmente en interrelación con una dimensión de probabilidad subjetiva y conocimiento.

Esta definición vuelve sobre la idea de contraponer creer a conocer por la verificabilidad del conocimiento, prescindiendo de lo que Vicente llama *actitud de creencia*.

Thompson, en el campo concreto de la investigación en educación matemática (Thompson, 1992) caracteriza de alguna forma las *creencias* cuando las diferencia de conocimiento:

Una característica de las creencias es que ***pueden ser sostenidas con varios grados de convicción****.*

(..) *Otro rasgo distintivo de las creencias es que* ***no son consensuales****.*

(..) Las creencias, por otra parte, son a menudo mantenidas o justificadas por razones que no cumplen estos criterios, y, por tanto, son caracterizadas por una falta de acuerdo sobre cómo tienen que ser evaluadas o juzgadas.

(p. 129-130, el realzado es nuestro)

Thompson destaca también, siguiendo a Green (1971), que las *creencias* **se presentan en grupos, formando sistemas de creencias**. Green (1971) distingue **tres dimensiones en el sistema de creencias**: una **relación cuasi-lógica** (que diferencia, creencias primarias y creencias derivadas); una **dimensión espacial**, según la fuerza psicológica con que se mantienen (que diferencia entre creencia central y periférica); y un agrupamiento o aislamiento de los grupos (clusters) caracterizado por la **forma de relación entre agrupamientos**. Cada una de estas dimensiones tiene que ver con la forma en que se cree, no con el contenido de las creencias, es decir, Green (1971), siguiendo a Russell (1983), **diferencia el contenido de la creencia de la fuerza con que se mantiene esa convicción**.

Pajares (1992), tras presentar definiciones o caracterizaciones que algunos autores hacen de *creencia*, destaca **tres componentes** de la *creencia*: un componente **cognitivo**, que representa conocimiento; un componente **afectivo**, capaz de provocar emoción; y un componente **conductual**, activado cuando lo requiere la acción.

Ernest (1989a), habla de *creencias*, y las sitúa en relación al conocimiento y las actitudes. Llega a establecer un modelo de *conocimiento, creencias y actitudes de los* *profesores* (Ernest, 1989b) que describe "*la estructura del pensamiento de los profesores"*.

Ponte (1994b) toma las *creencias*, *en el sentido de proposiciones no demostradas*. Distingue tres tipos de conocimiento, **científico**, **actividad profesional**, y **conocimiento vulgar** y establece la repercusión que tiene cada uno sobre las **creencias**. Posteriormente diferencia entre *creencias* y *conocimiento*:

> *Podemos ver las creencias como una parte del conocimiento relativamente "poco elaborado", en vez de verlos (*conocimientos y creencias) *como dos dominios distintos. En las creencias predominaría la elaboración, más o menos fantástica y no confrontada con la realidad empírica. En el conocimiento mas elaborado de naturaleza práctica, predominarían los aspectos experienciales. En el conocimiento de naturaleza teórica predominaría la argumentación racional.*
>
> (p. 125)

Ponte (1994b) considera que el sistema de *creencias* **no requiere un consensus social relativo a su validez o adecuación**. Las creencias personales **no requieren, incluso, consistencia interna**. Esto implica que las creencias son a menudo discutibles, más inflexibles y menos dinámicas que otros aspectos del conocimiento (Pajares 1992). Las creencias juegan un papel más importante en aquellos dominios del conocimiento en los que la verificación es difícil o imposible. Aunque no podemos vivir y actuar sin creencias, uno de los más importantes fines de la educación es discutir y promover la toma de conciencia de ellas. Llinares y Sánchez (1987) al caracterizar el desarrollo del conocimiento del profesor, sitúan las *creencias* como generadoras de conflictos.

De estas primeras definiciones podríamos concluir aceptando que el término **creencia** se atribuye a una actitud y a un contenido. La actitud se encierra tanto en el grado de probabilidad de certeza como en la predisposición a la acción, lo que le confiere un carácter emotivo, no explícito. El contenido encierra un conocimiento que no necesita formularse en términos de modelos compartidos, y que se caracteriza por no haber sido contrastado. De hecho, en algunos textos aparecen dos acepciones de creencias, el primero con este matiz de convicción con base emocional, y un segundo que hace alusión a la no certeza.

1.3.2 Caracterización de las *concepciones* y su relación con las *creencias*

Para caracterizar la idea de concepción recurrimos a la descripción que realiza Ruiz (1994). Siguiendo a Artigue (1989), El Bouazoui (1988) y Vergnaud (1990), establece dos dimensiones para situar las concepciones. Por una parte se diferencian las concepciones subjetivas o cognitivas de las epistemológicas, y por otra las concepciones locales de las globales. Las concepciones subjetivas se refieren al conocimiento y creencias de los sujetos. Las concepciones epistemológicas se refieren a tipologías de conocimiento existente en un cierto período histórico, o circunscrito a los textos o programas de cierto nivel de enseñanza.

"Las concepciones globales describen holisticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto, y las locales tienen en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores". (Ruiz, 1994, p. 45).

Las concepciones subjetivas son mantenidas por cada sujeto, de manera individual. En nuestra investigación, estas concepciones serán las que mantengan los estudiantes para profesor. El campo de problemas a que se refieren puede ser el ámbito matemático (concepciones sobre la matemática), la forma de enseñar o aprender (concepciones sobre la enseñanza y el aprendizaje), situaciones de la vida cotidiana (concepciones sobre la utilidad de la matemática), o su propia formación como profesores (concepciones sobre el conocimiento didáctico, y sobre la didáctica de las matemáticas). Las concepciones epistemológicas se sostienen por la comunidad matemática a lo largo de la historia, y se refieren a los problemas que se plantea la propia comunidad dentro del ámbito de la disciplina (concepciones sobre la matemática), a la forma en que se accede a este conocimiento (concepciones gnoseológicas sobre el conocimiento matemático), o a problemas de otras disciplinas que son susceptibles de resolución mediante los conocimientos matemáticos (concepciones sobre la utilidad de las matemáticas).

Tras hacer un recorrido por diversos autores y posturas, Ruiz operativiza el término concepciones a partir de la caracterización que Vergnaud (1990) hace de la idea de concepto, interpretada desde la teoría del objeto y sus significados de Godino y Batanero (1995 y 1994). Con ello, la concepción se caracteriza por:

- *Los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que*

determinan el objeto;
-El conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;
- El conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta

(Ruiz, 1994, pp. 71-72)

Indica Ruiz que los autores consultados reconocen que antes de la instrucción, existen en el sujeto, concepciones sobre el objeto. También reconocen los autores el carácter resistente y la relación con las situaciones que le dan sentido al objeto. Entre los tipos de concepciones, Ruiz distingue concepciones espontáneas y concepciones inducidas, accidentales o provisionalmente estables, y relaciona el término concepciones con la idea de obstáculo (Brousseau, 1983).

En la literatura que hemos consultado, la diferenciación entre concepción y creencia no es siempre clara. Pajares (1992) caracteriza las *creencias* distinguiéndolas de una manera muy sutil de las *concepciones.* Thompson (1992), diferencia en principio explícitamente **concepciones**, compuestas de **creencias** y otras representaciones:

"*Además de la noción de sistema de creencias, este capítulo se referirá a las "**concepciones**" de los profesores, vistas como una estructura más general, incluyendo creencias, significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales, preferencias y similares. Aunque puede que la distinción no tenga una gran importancia, en ocasiones será más natural referirse a las concepciones de los profesores sobre las matemáticas como disciplina, que hablar simplemente de las creencias de los profesores sobre las matemáticas"* (p. 130).

"*Una concepción del profesor sobre la naturaleza de las matemáticas puede verse como creencia, concepto, significado, regla, imagen mental y preferencia,consciente o inconsciente del profesor en relación a las matemáticas. Éstas creencias, conceptos, puntos de vista y preferencias, constituyen los rudimentos de una filosofía de las matemáticas*" (Thompson, 1992; p. 132)

Sin embargo, al tratar las investigaciones, Thompson (1992) emplea indistintamente el término creencias (*beliefs*) y el término concepciones (*conceptions*). Aunque aparece con más frecuencia la palabra creencias que la palabra concepciones, cuando se refiere a las investigaciones emplea los dos términos: concepciones y creencias de los profesores sobre las matemáticas. Su intento de hacer una consideración diferenciada se rompe además al aparecer los términos concepciones y creencias como sinónimos cuando presenta las investigaciones realizadas en este campo. Por ejemplo, habla Thompson (1992) de que las investigaciones de Ernest (1989) se refieren a *concepciones,* pero al trascribir el texto de éste autor no aparece el término *concepciones*, sino que se citan como *puntos de vista* sobre las matemáticas. Igualmente, las investigaciones de Lerman son presentadas como concepciones, aunque en la descripción de categorías se hable de *creencias*.

También Dossey (1992), que habla sólo de *concepciones*, cita las investigaciones del grupo de Cooney en Georgia, y las investigaciones de este autor se refieren siempre, a *creencias (*beliefs).

Llinares (1991c) reconoce que entre *conocimiento*, *creencias* y *concepciones* existen diferencias sutiles. Las *creencias* son como el "contexto psicológico" en el que se produce el aprendizaje en los cursos de formación; las *concepciones* constituyen sistemas cognitivos interrelacionados de *creencias* y *conocimientos* que influyen en lo que se percibe y en los procesos de razonamiento que se realizan.

Ponte (1992) hace una distinción específica entre *creencias* y *concepciones* más próxima a la postura de Ortega y Gasset (1986). Esta diferenciación se ve refrendada en el artículo de Guimaraes (1992), quien indica que el término *concepciones* aparece en la literatura inglesa de investigación menos frecuentemente que el término *creencias*.

Ponte (1992) indica que las *creencias* y *concepciones* tienen una función cognitiva; aunque las *creencias* (de carácter no racional) constituyen una base en que se apoya el conocimiento. Para este autor las *concepciones* son organizadoras de nuestro conocimiento, formando un "substrato conceptual" anterior a los conceptos. Funcionan como filtros, es decir, son simultáneamente condición y límite de nuestro conocimiento de la realidad. Pero además permiten interpretar esta realidad a la vez que son elementos bloqueadores de esta interpretación,
luego distorsionan lo que se nos presenta.

Más recientemente, Ponte (1994b) caracteriza las *concepciones* de manera más precisa:

(..) Las ***concepciones*** *pueden ser vistas en este contexto como el* ***plano de***

fondo organizador de los conceptos*. Ellas constituyen como "miniteorias", o sea cuadros conceptuales que desempeñan un papel semejante a los presupuestos teóricos de los científicos. Las concepciones condicionan la forma de abordar las tareas, (..) Estrechamente ligadas a las concepciones están las actitudes, las expectativas y el entendimiento que cada uno tiene de lo que constituye su papel en una situación dada*" (Ponte 1994b, p. 195 y 196).

(..) Empleo conocimiento para referirme a un gran campo de conceptos, imágenes y habilidades inteligentes poseídas por los seres humanos. ***Creencias*** *son las "verdades" personales indiscutibles llevadas por cada uno, derivadas de la experiencia o de la fantasía, teniendo una fuerte componente evaluativa y afectiva (Pajares 1992).* ***Concepciones*** *son los marcos organizadores implícitos de conceptos, con una naturaleza esencialmente cognitiva. Ambos,* ***creencias*** *y* ***concepciones*** *forman parte del conocimiento. Las* ***concepciones****, como marcos organizativos implícitos condicionan la forma en que afrontamos las tareas, frecuentemente por vías que otros encuentran menos apropiadas. El interés del estudio de las* ***concepciones*** *se encuentra en la aceptación de que, como un substrato conceptual, ellas juegan un papel esencial en el pensamiento y la acción. En vez de referirse a conceptos específicos, constituyen una forma de ver el mundo y organizar el pensamiento. Sin embargo, no pueden ser reducidas a los aspectos más inmediatamente observables de conducta y no se revelan fácilmente a si mismos - tanto a los otros como a nosotros mismos.*(Ponte, 1994b, pp. 199)

Artigues (1989) alude a la diferenciación entre concepciones globales y locales. Otros investigadores franceses dan un aspecto mas conceptual al término *concepción*. Así, El Bouazzoui (1988), tras recoger definiciones de Brousseau y Balacheff, da dos características de las concepciones: son psicológicas, es decir ocurren *"en la cabeza"* del individuo, sólo existen concepciones individuales; y se diferencian según el sujeto que se considere en la situación didáctica (alumnos, profesores, instrumentos y evolución del saber). Sin embargo, en su tesis, El Bouazzoui (1988) describe las *concepciones sobre la continuidad*, de manera que se aproxima a los conceptos de continuidad, empleando el sentido de *concepciones objetivas* de Ruiz (1994).

Sfard (1991) delimita la idea de *concepción* indicando que cada vez que una idea matemática es considerada en su forma "oficial", hablamos de **concepto** - como un constructo teórico dentro del "universo formal del conocimiento ideal" -. **La Concepción** es el racimo (cluster) completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto - el compañero del concepto en el "universo del conocimiento humano" *subjetivo e interno* -.

Furinghetti (1994), presenta una jerarquía de creencias sobre las matemáticas, que empieza en las creencias inconscientes (imágenes de las matemáticas), se continua en las concepciones de las matemáticas, caracterizadas como conjuntos de creencias conscientes, y termina en la *filosofía interna de las matemáticas*, o conjunto de creencias formalizadas. Con ello, las concepciones las define como *"un conjunto de creencias relativas a la forma de enseñar las matemáticas, basadas en consideraciones de la naturaleza de los aprendices, la naturaleza de las matemáticas, las expectativas de la sociedad y la forma adecuada de la pedagogía*" (p. 82). Destaca que las concepciones sufren una influencia social, por adaptación de las creencias a las necesidades y limitaciones del entorno. Son, pues, creencias conscientes y se convierten en creencias formalizadas con ayuda de la reflexión sobre filosofía de las matemáticas.

1.3.3 Otros constructos relacionados con las concepciones y creencias

En la literatura de investigación reciente sobre los procesos de cognición humana se aprecia un esfuerzo por discernir entre los aspectos lógico-formales del conocimiento y los psicológicos. Para diferenciarlo de concepto, se emplea el término especializado «concepción», que da cuenta de los procesos mentales (subjetivos) en la formación de los conceptos, con lo que el carácter extremadamente vago y general de la noción de concepto, quedaría reservado, al menos en una parte de las tradiciones investigadoras, a la dimensión objetiva, lógico-formal del conocimiento.

La noción de concepto conlleva, en consecuencia, un carácter objetivo, universal y absoluto que no permite dar cuenta de algunos fenómenos cognitivos, particularmente los relativos a su génesis histórico-cultural (institucional). Por ejemplo, el concepto matemático de función (o de tangente, etc) ha ido evolucionando en distintos momentos históricos, y opera de manera diferenciada en el seno de distintas instituciones (Ruiz, 1994). Interesa reconocer distintas «formaciones epistemológicas» asociadas a los objetos matemáticos, o como proponen Godino y Batanero (1994), postular una diversidad de objetos matemáticos (personales e institucionales) allá donde una concepción absolutista de las matemáticas reconoce un único objeto.

Como hemos visto anteriormente, se están haciendo esfuerzos en la literatura psicológica y didáctica por distinguir entre concepciones y creencias. Ello es así ya que en los procesos de cognición humana interviene también la esfera de lo afectivo. Incluso hay aspectos, como los actitudinales y axiológicos, que también deben ser tenidos en cuenta. Asimismo, en algunas líneas de investigación didáctica, se reconoce que no parece adecuado circunscribir exclusivamente el estudio de la cognición a los procesos mentales, puesto que tienen lugar en el seno de una trama de relaciones contextuales e institucionales que los condicionan. Como consecuencia, se considera que los constructos concepciones y creencias deben ser complementados por entidades teóricas más comprensivas y operatorias que permitan desplazar el centro de interés de los fenómenos de comprensión y significado desde la cabeza de los sujetos hacia el complejo de relaciones institucionales en que éstos procesos tienen lugar.

En esta problemática hay que entender las propuestas que hacen Chevallard (1992) y Godino y Batanero (1994) de las entidades teóricas que denominan "relación al objeto" y «significado del objeto», en sus dimensiones personales e institucionales.

La noción clave de la teoría del conocimiento de Chevallard (1992), o más bien, la antropología cognitiva en la que éste autor sitúa la Didáctica, es la de «relación al objeto»:

> *"un objeto existe desde que una persona X o una institución I reconoce este objeto como un existente (para ella). Más precisamente, se dirá que el objeto O existe para X (respc., para I) si existe un objeto, que represento por R(X,O) (resp., R(O)) que llamo relación personal de X a O (resp., relación institucional de I a O)"* (pag. 9).

Esta noción de "relación personal a un objeto" (concepto, teorema, ..., cualquier saber) tiene la ventaja, según Chevallard, de englobar en una única entidad teórica, una diversidad de aspectos que son tratados en las ciencias y tecnologías de la cognición de manera fragmentaria: representaciones, concepciones, imágenes mentales, aptitudes, competencias, actitudes, valores, etc. Al mismo tiempo, la noción "relación institucional al objeto", tendría en cuenta el carácter contextual, situado, de los fenómenos cognitivos, entendidos éstos en su sentido más amplio. Este cambio de perspectiva es reclamado, por otra parte, por diversas corrientes de pensamiento como la "psicología cultural" (Bruner, 1991), "cognición situada" (Brown y cols, 1989), "etnomatemática" (D'Ambrosio, 1994), etc.

El reconocimiento del carácter inobservable de los constructos "concepción" y "relación al objeto", y la ausencia de una teoría explícita sobre la naturaleza y génesis de los objetos conceptuales, realizada desde una perspectiva de la didáctica, lleva a Godino y Batanero (1994) a elaborar una teoría sobre la noción de objeto y a definir el constructo "significado de un objeto". Los autores expresan su estrecha inspiración en la noción de "relación al objeto" de Chevallard, aunque adoptan la idea de "situación-problema" como primitiva, de la cual derivan las nociones de "práctica significativa", "objeto" y "significado". Asimismo, adoptan una posición pragmática para su noción de significado en la línea marcada por Wittgenstein (1988/1953).

Para estos autores, las abstracciones o generalizaciones, tanto en su faceta psicológica como epistemológica (objetos personales e institucionales), son consideradas como emergentes de los sistemas de prácticas (personales, respectivamente, institucionales) realizadas por una persona (o en el seno de una institución) ante cierta clase de situaciones-problemas o disposiciones del entorno.

Definen la noción de "prácticas significativas" como *formas expresivas, situadas e intencionales*, las cuales involucran, por tanto, un contexto institucional, una persona y unas herramientas semiótico-instrumentales que mediatizan la acción. Los sistemas de prácticas prototípicas significativas son consideradas como el origen genético de los distintos "objetos personales" (invariantes operatorios de índole psicomotriz, conceptos y teoremas en acto, conceptos y proposiciones formalizadas, etc).

La especificidad de tales sistemas de prácticas respecto a los contextos institucionales particulares determina, asimismo, la emergencia de objetos personales e institucionales específicos. Se postula, por tanto, un relativismo socio-epistémico intrínseco, incluso para los objetos matemáticos, como consecuencia de la diversidad de herramientas semiótico-instrumentales usadas en los distintos contextos históricos o institucionales.

Godino y Batanero atribuyen un carácter componencial y sistémico al constructo que denominan "significado de un objeto" (conceptos, proposiciones, teorías, ...) con el fin de que pueda servir de "universo de referencia" en los procesos de selección muestral de las situaciones de enseñanza y de evaluación de los *relaciones personales* de los sujetos a los objetos. Asimismo, esta noción les permite derivar una noción de *comprensión* que no la reduce a un fenómeno puramente mental, sino que tiene en cuenta también los procesos contextuales e institucionales.

El sistema teórico propuesto por estos autores trata, por tanto, de articular distintas aproximaciones epistemológicas y cognitivas mediante la elaboración de un eslabón ontosemántico, pragmático y relativista, que podría ser compartido por las mismas.

1.3.4 Delimitación de los constructos *concepciones* y *creencias* en nuestra investigación

La revisión bibliográfica realizada nos lleva a las siguientes conclusiones que permiten caracterizar los constructos que emplearemos en nuestra investigación.

Nuestra investigación se sitúa en un contexto preciso: licenciatura de matemáticas, formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Según la primera coordenada, el contacto de los estudiantes con el conocimiento matemático es como alumnos, no como investigadores. Según la segunda coordenada (formación inicial de profesores), el contacto de los estudiantes con la enseñanza es discente, no docente. En esta situación, los estudiantes carecen de referentes que le permitan contrastar sus representaciones sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza de las matemáticas. Esto hace que estas representaciones pertenezcan al terreno de las creencias de los estudiantes para profesor.

El objetivo de la formación de profesores es la creación de una actitud reflexiva sobre su práctica profesional (Smyth, 1991), pero sin necesidad de esperar a que existan referentes de los que pueda emerger el conocimiento, que en este caso y sin el hábito de reflexionar sobre la práctica, podría limitarse a un conocimiento rutinario para resolver dilemas puntuales. Luego los cursos de formación tienen que afrontar las creencias de los estudiantes para profesor, tratando de explicitarlas y de confrontarlas con sus fundamentos. Esto hace que nuestra investigación considere las ***creencias*** como un constructo prioritario de atención.

Pero no queremos limitarnos a los aspectos emotivos que encierran las creencias, sino que, siguiendo a Thompson (1992) nos interesan las ***concepciones*** como *rudimentos de la filosofía de las matemáticas de los estudiantes*. Ya que estos rudimentos serán los organizadores explícitos de los conocimientos. El hábito de reflexión debe estar fundamentado y puede basarse en modelos como el que presenta Smyth (1991), que le hace explicitarse y desarrollar un proceso elaborado y compartido.

Vamos a referir nuestra investigación a ***creencias y concepciones***. Hablaremos de creencias por que nos interesan los aspectos emotivos, implícitos, de las representaciones de los estudiantes. Pero también hablaremos de concepciones para tomar en consideración el aspecto cognitivo, conceptual, consciente, que organiza el pensamiento. Nuestro constructo se referirá, pues, tanto al aspecto emotivo como conceptual, tanto al sujeto particular (estudiante para profesor), como a la institución (en matemáticas). Tanto a los problemas escolares, como a los cotidianos. Tanto a las situaciones ligadas al contenido a enseñar/aprender, como a los problemas ligados a la enseñanza y el aprendizaje.

Utilizaremos, pues los constructos concepciones y creencias, en el sentido que en la teoría de Godino y Batanero se llamaría significados que atribuyen los estudiantes para profesor a la propia matemática, y a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, consideradas como objetos, esto es, entidades emergentes de ciertos sistemas de prácticas.

1.4 Formas de concebir el conocimiento matemático y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Con objeto de poder situar las concepciones y creencias de los estudiantes sobre el conocimiento matemático y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, vamos a presentar en este apartado una panorámica general sobre las cuestiones más importantes que se plantea la epistemología de las matemáticas, así como las posturas más significativas en la enseñanza de las matemáticas. Para ello vamos a emplear varios textos principales, que se completarán con otros que tratan alguna cuestión en particular.

Como cabría esperar todos estos textos parten de una forma particular de concebir el conocimiento matemático y la enseñanza y aprendizaje. Pero el fin pretendido en cada uno es diferente. Mientras alguno trata de presentar un recorrido más amplio por las diferentes posturas epistemológicas, otros se orientan a defender posiciones concretas. El texto de Cañón (1993), por ejemplo, se plantea si el conocimiento matemático se descubre o se inventa, y para contestar esta pregunta realiza un recorrido por las posturas más importantes, a lo largo de la historia de las matemáticas para concluir con una posición precisa de la autora. También los textos de Kline (1985), Davis y Hersh (1989) y Dou (1970) se plantean preguntas cruciales de la epistemología de las matemáticas y desarrollan las respuestas dadas por diferentes escuelas. Sin embargo, tal como reconoce el autor, el libro de Tymoczko (1986) se destina a defender una postura falibilista de la filosofía de las matemáticas, y los autores que en él aparecen describen aspectos de esta postura (Lakatos, 1986; Hersh, 1986). Otro texto similar es el de Ernest (1991), en el que el autor defiende el *constructivismo social*, tras hacer una presentación de las cuestiones que le separan de otras posturas epistemológicas.

Para estudiar la filosofía de la educación matemática, Paul Ernest (1991), establece dos niveles de análisis; el primero es de carácter epistemológico, filosófico y moral, desembocando en la descripción del *constructivismo social,* como modelo epistemológico de filosofía de las matemáticas, con repercusión en la educación matemática; el segundo análisis se refiere específicamente a la educación matemática, y en él llega a establecer los fines de la educación matemática y demanda teorías concernientes al aprendizaje y enseñanza de las matemáticas más acordes con la visión constructivista social. En otro análisis, Ernest (1994) articula el conocimiento individual con el conocimiento social, por lo que son de capital importancia la actitud, creencias y conocimientos de los individuos sobre las matemáticas. Estos aspectos se organizan en un modelo (Ernest, 1989b) que sintetiza el peso relativo de cada componente en el conocimiento individual.

El libro de Tymoczko (1986) presenta aportaciones generales, pero sobre todo, caracterizaciones del constructivismo matemático, en los artículos de Hersh, Lakatos y el mismo Tymoczko. El autor reconoce que el texto proviene de la frustración que un grupo de interesados en filosofía de las matemáticas ha sentido ante la dificultad de explicar las prácticas matemáticas por medio de las filosofías tradicionales en matemáticas. El libro está dividido en dos secciones; en la primera se recogen algunas de las críticas más agudas y estimulantes al fundacionalismo; la segunda explora las respuestas a la pregunta ¿en qué nueva dirección debe dirigirse la filosofía de las matemáticas al abandonar las búsquedas fundacionales?, para lo que examina las prácticas reales de los matemáticos y de quienes las usan.

Pero más que caracterizar cada corriente, nuestro interés es destacar las cuestiones más importantes que se plantea la epistemología de las matemáticas. Hemos encontrado una síntesis muy fundamentada en el texto de Cañón (1993). En este libro la autora hace un recorrido por la consideración histórica de la naturaleza de las matemáticas, deteniéndose en criterios que han marcado las diferentes posturas. Para discutir sobre la gnoseología del conocimiento matemático (*Matemáticas ¿creación o descubrimiento?*), establece tres niveles de análisis: ontológico, cognoscitivo y lingüístico-formal y cruza estos tres criterios con aspectos referentes a: historicidad o a-historicidad del conocimiento matemático, verdad-certeza (como coherencia, correspondencia y pragmática), y el propio origen del conocimiento. La autora concluye este análisis indicando que "*Los tres niveles de análisis muestran cómo la verdad evoluciona, desde una basada en la teoría de la correspondencia (ontológica) a una basada en la coherencia (lenguaje formal) al nivel 3, pasando por una basada en la utilidad pragmática (nivel cognoscitivo)*".

Cañón no se limita a presentar su análisis, sino que toma posición, expresando sus concepciones sobre el conocimiento matemático. Para ello plantea una caracterización del conocimiento matemático basada en diez puntos. Para cada punto, la autora traza un eje que viene definido por posturas extremas. En un extremo aparece lo que la autora llama postura historicista y en otro la postura a-historicista. Incluiremos estos puntos en el lugar del esquema que corresponda.

Para sistematizar la información vamos a utilizar en este apartado el esquema que presenta Vergnaud (1990), en el que las preguntas epistemológicas, referentes a las representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza, se plantean en dos planos diferentes: la epistemología de las matemáticas, y la visión epistemológica de la educación (de la psicología para Vergnaud). Esta última se concretará en una visión epistemológica de la educación matemática.

El texto de Ernest (1991) también nos permite situar las distintas posturas en cada uno de los apartados que vamos a destacar en este recorrido sintético. Ahora bien, como el fin de Ernest es presentar *Un modelo de ideología educativa para las matemáticas*, esta autor recurre a los siguientes elementos de su *modelo de ideología educativa*:

Elementos primarios (Epistemología, Filosofía de las matemáticas, Conjunto de valores morales, Teoría sobre el niño, Teoría de la sociedad, Fines de la educación,

Elementos secundarios (Fines de la educación matemática, Teoría del conocimiento matemático escolar, Teoría del aprendizaje matemático, Teoría de
la enseñanza de las matemáticas, Teoría de la evaluación del aprendizaje matemático, Teoría de recursos para la educación matemática, Teoría de habilidades matemáticas, Teoría de la diversidad social en educación matemática)
(Ernest, 1991, p. 134)

Un objetivo de nuestra investigación es caracterizar las creencias y concepciones que tienen los futuros profesores de matemáticas sobre el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para ello nos interesa hacer una descripción, aunque sea somera, de las grandes corrientes de pensamiento en aquellos elementos del modelo de Ernest que se relacionan más directamente con la naturaleza del conocimiento matemático y con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Por ello, y sin quitar valor a los otros elementos del modelo, nos ocuparemos especialmente de los elementos primarios relacionados con la filosofía de las matemáticas (entendida como epistemología y ontología), y con los fines de la educación. Igualmente nos interesa hacer el inventario de posturas ante las grandes preguntas que se suscitan en relación a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Pero no vamos a hacer un barrido exhaustivo de todos los elementos que señala Ernest, ya que sería demasiado extenso y se saldría de la utilidad que pretendemos darle en este capítulo

De acuerdo con Vergnaud (1990), vamos a emplear los títulos *epistemología de las matemáticas* para referirnos a los que Ernest sitúa en los elementos primarios. Los elementos secundarios de Ernest vamos a tratarlos en el segundo epígrafe, que titulamos *visión epistemológica de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*, ya que en este epígrafe se intentarán situar algunas reflexiones relacionadas con el acceso y la caracterización de las actividades de enseñar y aprender matemáticas.

1.4.1 Epistemología de las matemáticas: Conocimiento matemático

La epistemología de las matemáticas, dice Vergnaud, se pregunta *¿Qué tipo de objeto es la matemática?, ¿Qué clases de objetos matemáticos existen?, ¿Qué relación existe entre las matemáticas y otras ciencias?.*

Ernest (1991) plantea los siguientes criterios para diferenciar posturas epistemológicas: 1) La consideración del conocimiento: naturaleza, justificación y génesis del conocimiento matemático; 2) Las características de los objetos: naturaleza y origen de los objetos matemáticos; 3) El significado de las aplicaciones: eficacia de las matemáticas en la ciencia, en la tecnología, etc.; 4) Las características de la práctica: características y tipos de actividades de las matemáticas.

Con objeto de sistematizar el estudio vamos a considerar siguiendo, a Ernest (1994), dos apartados dentro de la epistemología de las matemáticas: la *ontología de las matemáticas* (que nos aproxime al estudio de la naturaleza del objeto matemático) y la *gnoseología* (que se ocupe de la actividad matemática, de la acción sobre los objetos).

El estudio ontológico nos permitirá discutir sobre la dialéctica descubrimiento / creación, la consideración matemática producto / matemática proceso, la relación entre el sujeto y el objeto de conocimiento, la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo, la relación entre el conocimiento matemático y la naturaleza material, el valor de verdad de los conocimientos matemáticos y la utilidad y/o belleza de las matemáticas.

El estudio gnoseológico contempla la discusión de la forma de acceso al conocimiento: *por los sentidos* / *por la razón*; como consecuencia vuelve sobre la dialéctica *descubrimiento* / *creación* y de las relaciones de la matemática con la lógica. Con ello nos introducimos en los métodos de *hacer matemáticas*: *deducción* / *intuición*, o *razonamiento demostrativo* / *razonamiento plausible*, y en formas de avance en las ciencias: *modelos globales* / *de etapas*; incidimos también en el valor de verdad: *absolutismo* / *falibilismo*; relación entre el conocimiento matemático y la historia; y mediante el análisis del lenguaje de las matemáticas, *abstracto* / *no único*, entramos en el análisis gnoseológico de la forma del conocimiento: *resultados generales* / *resultados particulares* y volvemos a la reflexión sobre la forma de acceso y validación del conocimiento: *realista* / *constructivista*, y a analizar diversas posturas constructivistas.

1.4.1.1. Ontología del conocimiento matemático

Desde el punto de vista ontológico, las preguntas que se suscitan son, entre otras: *¿Qué son los objetos matemáticos? ¿Qué existencia tienen los objetos matemáticos? ¿Qué relación tienen los objetos matemáticos con la naturaleza?*

a) **Naturaleza del conocimiento matemático**

Kline (1985) esquematiza las respuestas a las preguntas que se refieren a la naturaleza del conocimiento matemático estableciendo dos posturas extremas:

1) Las matemáticas constituyen un ***cuerpo único de conocimientos***, correcto y eterno, independientemente de que se puedan aplicar al mundo físico. Las verdades matemáticas son, entonces, ***descubiertas***, no inventadas. El hombre al descubrirlas no desarrolla las matemáticas sino el conocimiento que tiene de ellas. Este *corpus matemático* está situado, para Hermite, Hardy, Hadamard, Gödel, etc, en un mundo fuera del hombre, mientras que otros matemáticos (Hamilton, Cayley, etc) lo consideran incrustado en la razón humana (racionalismo metafísico, tal como lo define Ferrater, 1994, es decir, considerando que la realidad es en último término de carácter racional, oponiéndose al realismo).

Se suele identificar esta primera postura con el **platonismo**, dada la consideración de Platón de un *mundo de las ideas* ajeno al hombre, aunque la acepción de Hamilton y Cayley se aproxima más al racionalismo europeo de Descartes, Leibniz y Spinoza, quienes, aunque creen en verdades innatas a priori, consideran que se llega a ellas por el ejercicio de la razón.

2) Las matemáticas son por entero un ***producto del pensamiento humano***. Kline sitúa a Aristóteles como iniciador de esta postura, seguida, más adelante por las corrientes **intuicionistas** y **formalistas**. La veracidad de los asertos matemáticos, al no existir un corpus externo de referencia, debe estar en la razón (según Ferrater, 1994, el racionalismo epistemológico o gnoseológico argumenta que el único órgano adecuado o completo de conocimiento es la razón, luego todo conocimiento verdadero tiene origen racional, con lo que se opone al empirismo y, en cierto sentido, al intuicionismo). Kline diferencia dos posturas en esta corriente: "*mientras que algunos afirman que la verdad está garantizada por la mente, otros mantienen que las matemáticas son una creación de mentes humanas falibles, más que un cuerpo fijo de conocimientos*".

El continuo destacado por Kline estaría entre los extremos: Las matemáticas ***se descubren*** / Matemáticas son una ***creación humana***. En el primer extremo se encuentra la postura platónica, que considera las matemáticas como un cuerpo fijo, objetivo y único, de conocimientos, que es externo al hombre. En el extremo opuesto se encontraría la postura que relativiza el conocimiento, al considerarlo generado por la mente humana falible.

Tymoczko (1986) identifica esta postura platónica con la **realista**, y la postura contraria con la **constructivista**. Pero como la oposición entre estas dos posturas se refiere a la forma de acceso al conocimiento, las trataremos más detenidamente en el análisis gnoseológico.

Davis y Hersh (1989/1982), partiendo del continuo **platonismo -formalismo**, añaden una nueva dimensión a esa supuesta ordenación ontológica unidimensional. Según su interpretación, los formalistas consideran que ***no hay objetos matemáticos***, sino que las matemáticas son un conjunto de fórmulas de valor sintáctico. Consideran pues que platonismo y formalismo son opuestos en existencia y realidad de los objetos matemáticos, coincidiendo en los principios de razonamiento autorizados en la práctica de las matemáticas (en oposición al constructivismo, como veremos en el apartado dedicado a la gnoseología)

Cañón (1993) recoge esta multidimensionalidad para describir su postura en el conflicto *descubrimiento/creación*. Para esta autora el conocimiento es simultáneamente descubrimiento y creación; es creación ya que los conceptos sólo existen cuando se formulan; es descubrimiento en base a que esa creación no puede ser arbitraria, sino que obedece a una cierta necesidad que está en función del grado de desarrollo adquirido hasta el momento en que se produce.

Dossey (1992) realiza una separación más radical en las concepciones sobre las matemáticas, considerando que desde la matemática griega a la actualidad las matemáticas han constituido un **producto**, pero está surgiendo una nueva filosofía de las matemáticas que considera las matemáticas como **práctica.** Para Dossey la dicotomía conceptual de base en el período de la *matemática como producto,* está centrada en la distinción epistemológica protagonizada por Platón y Aristóteles; el platonismo considera los objetos matemáticos en un cuerpo externo, mientras que Aristóteles considera las matemáticas como una idealización que resulta de experiencias con objetos. La consideración de la matemática como *práctica* sigue la idea de Hersh (1986), según la cual la nueva matemática se caracteriza por considerar que los objetos matemáticos son inventados, creados a partir de actividades con los objetos matemáticos que han surgido de las necesidades de la ciencia y de la vida. Estos conocimientos tienen propiedades bien determinadas, pero que no están implícitos en la definición que se ha hecho de ellos.

La teoría del *significado institucional de los objetos matemáticos,* que parte de una "*ontología de los objetos matemáticos que tiene en cuenta el triple aspectos de la matemática como actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, como lenguaje simbólico y*

sistema conceptual lógicamente organizado" (p. 333) lleva a Godino y Batanero (1994) a considerar el objeto matemático como emergente de la acción del hombre ante un campo de problemas. De esta forma, los autores no se contentan con identificar la matemática con la práctica, sino que contextualizan esta práctica en una institución y en un momento histórico.

Con esta diferenciación entre matemática producto / matemática proceso nos introducimos en otras cuestiones relativas a la ontología del conocimiento matemático.

b) Valor de verdad del conocimiento matemático

Copes (1979, 1982) pone en paralelo los niveles de desarrollo del conocimiento de Perry (Perry, 1970, 1988) (absolutismo, multiplicismo, relativismo, dinamismo, personalismo) con la forma en que es concebido el conocimiento matemático a través de la historia. El absolutismo empieza en los Babilónicos y Egipcios, para los que las matemáticas eran un montón de hechos relacionados con el mundo real. Se mantiene con los griegos, aunque en Grecia se empieza a cuestionar la correspondencia entre las matemáticas y el mundo real, pero se sigue considerando que los resultados matemáticos son absolutamente verdaderas. Hasta que no se discute el quinto postulado de Euclides, en el siglo XIX, en el conocimiento occidental domina una concepción absoluta del conocimiento matemático. Con la aparición de las geometrías no euclidianas y los intentos de formalización se asienta una concepción relativista. Las posturas falibilistas dan lugar a posiciones de compromiso que rompen el relativismo.

White (1983) adopta una ***postura antropológica*** para marcar el "*locus*" de realidad de las verdades matemáticas. Para esta autora las verdades matemáticas existen en la tradición cultural dentro de la que ha nacido el individuo y de esa manera penetran en su mente desde afuera. Pero, aparte de la tradición cultural, los conceptos matemáticos no tienen existencia ni significado. Las realidades matemáticas tienen así una existencia independiente de la mente individual, pero dependen por completo de la mente de la especie. Son el producto de la mente de la especie humana. Pero son halladas o descubiertas por cada individuo en la cultura matemática dentro de la cual se formó. El locus o lugar de la realidad matemática es la tradición cultural, es decir, el continuo de conductas expresadas con símbolos.

Como se observa, el valor de verdad del conocimiento matemático nos introduce de nuevo en la relación entre el sujeto epistémico y el conocimiento, que para White, están íntimamente relacionados.

Godino y Batanero (1994) contextualizan la idea de validación de los significados de los objetos haciendo referencia a un consenso institucional sobre la adecuación de las prácticas para la resolución de los problemas de los que emergen los objetos.

Ernest (1991) hace un recorrido por la postura que adoptan diversas escuelas frente al objeto matemático. Las escuelas que llama *absolutistas* se ocupan de la coherencia del objeto; el *platonismo* plantea una existencia del objeto independientemente del sujeto, pero deja sin explicar la forma en que el sujeto interacciona con el objeto; el *convencionalismo* (Wittgenstein, 1988) sitúa en la práctica lingüística el locus de realidad de los objetos, con lo que el conocimiento matemático depende de las convenciones socialmente aceptadas acerca de nuestras prácticas lingüísticas; el *empirismo clásico* considera los objetos matemáticos como generalizaciones empíricas; el *cuasi-empirismo* de Lakatos (1976) establece una conexión entre el conocimiento y el sujeto, al plantear una teoría de creación del conocimiento que se basa en la actuación del sujeto. Finalmente, el *constructivismo social* del propio Ernest (1991) considera que los objetos matemáticos son construcciones sociales que existen objetivamente, son públicos, al haberse logrado un acuerdo entre los sujetos acerca de su existencia y propiedades.

La teoría del objeto y significado en matemáticas de Godino y Batanero (1994) hace un análisis fenomenológico de la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo (institucional), lo que les permite llegar a relativizar la verdad del conocimiento individual en relación a una institución. Tanto en el conocimiento individual como en el institucional el objeto emerge de sus prácticas referidas a un campo de problemas. El sujeto individual hará emerger un *objeto personal* de sus prácticas, mientras que la institución hará surgir un objeto institucional de las prácticas significativas para la institución. "*La intersección de estos dos sistemas de prácticas es lo que desde el punto de vista de la institución se consideran manifestaciones correctas, esto es, lo que la persona 'conoce' o 'comprende' del objeto institucional. El resto de prácticas personales serían consideradas 'erroneas' desde el punto de vista de la institución*" (p. 342).

c) Matemáticas y realidad

Algunas posturas han basado la verdad de las proposiciones matemáticas en función de la correspondencia entre el conocimiento matemático y la naturaleza sensible. Un análisis de esta relación nos permitirá afrontar la idea de verdad de una manera más completa.

La forma en que se concibe la relación entre los objetos matemáticos y la naturaleza está íntimamente ligada a la consideración de los objetos matemáticos. Copleston (1960) señala que la postura ontológica de los racionalistas europeos del renacimiento (Descartes, Spinoza, Leibniz), a los que se añade el *dogma de Galileo* (la naturaleza es de estructura matemática), hace que la ciencia renacentista considere que mediante la matemática se logra información sobre el mundo. Las creencias ligadas a que las matemáticas se descubren o se construyen suponen representaciones sobre la "realidad", pero también sobre la acción sobre los objetos. Será preciso, pues, recurrir al aspecto gnoseológico para establecer con más claridad esta relación matemática-naturaleza.

Cañón (1993) identifica dos posturas extremas. Una de ellas considera que la realidad está escrita en lenguaje matemático, con lo que el estudio de las matemáticas es clave para el estudio del cosmos. En el otro extremo se considera que la matemática resulta de idealizar los procesos de abstracción que se han realizado con objetos y problemas relacionados con la naturaleza y la experiencia. Esta cuestión vuelve sobre la relación entre el sujeto epistémico y el objeto matemático. La autora considera que la naturaleza adquiere significado en cuanto la mente humana interactúa con ella, de manera que el conocimiento matemático se constituye en una sucesión cambiante de modelos intermediarios entre la naturaleza percibida y el individuo.

La coherencia entre el conocimiento matemático y la realidad es una de las formas posibles de validar el conocimiento, a la que Cañón (1993) llama teoría de las correspondencia. Han aparecido otras formas de verdad a lo largo de la historia de las matemáticas. Cañón analiza la idea de verdad relacionándola con la forma en que se concibe que se accede al conocimiento. En primer lugar destaca las ideas de verdad ligadas a la consideración de que el conocimiento matemático es descubierto, como por ejemplo las ideas de los platónicos, quienes se basan en aceptar la existencia de un mundo subsistente de objetos propios y no reducibles al mundo de los sentidos, o los pitagóricos, que la fundamentan en la existencia de un mundo único, y Leibniz, que basa la verdad en la existencia de ideas innatas. Por otra parte estarían las posturas que parten de que el conocimiento matemático es creado, como los empiristas, quienes consideran que el conocimiento es cierto si se ha creado a partir de experiencias con objetos sensibles, mientras que la crítica kantiana considera que las verdades son creación de la razón. En sus conclusiones, Cañón indica varias cuestiones relacionadas con la verdad matemática. La necesidad del conocimiento matemático se sitúa entre dos posturas extremas, la primera de las cuales considera que la matemática proporciona proposiciones necesarias y ciertas, frente a la que considera que las matemáticas proporcionan conocimientos contingentes y falibles. La autora se posiciona estableciendo tres niveles de análisis:

> *N1. Caracterización de objetos matemáticos como creación histórica de la racionalidad humana ligadas entre si en un horizonte de necesidad. N2. El conocimiento matemático es histórico y está socialmente enrraizado, falible y perfectible. N3. La complejidad matemática se expresa en sistemas formales que reflejan la necesidad del nivel 1.*

Con ello, la autora considera que el conocimiento matemático es necesario por estar encerrado en los propios objetos, es histórico y falible en su quehacer (Lakatos, 1978, Polya, 1966) y válido en un sentido de consistencia, al estar formulado en lenguaje formal.

También Ernest (1991) relaciona la construcción del conocimiento matemático con la verdad de sus afirmaciones. Las escuelas absolutistas, representadas en este caso por el logicismo de Russell y el formalismo de Hilbert, apoyan un concepto de verdad como coherencia. De esta forma para los logicistas la verdad matemática se puede reducir a la certeza de la lógica, mientras que para el formalismo, el sistema formal de la matemática debe ser consistente. Frente a estas dos escuelas, el constructivismo niega la verdad absoluta, abogando por una base en creencias subjetivas. Para apoyar esta última postura, Ernest recuerda que las escuelas absolutistas incurren en un círculo vicioso de verdad que ya había detectado Lakatos (1978).

d) Otros aspectos ontológicos de la matemática

Otros aspectos que se relacionan con la verdad del conocimiento matemático son los referentes al **rigor**, como una característica del método matemático. El formalismo parte de un lenguaje formalizado, y considera que el rigor es inherente al método matemático. En el otro extremo se desprecia el rigor por considerar que reduce las proposiciones matemáticas a proposiciones lógicas. Cañón (1993) intenta situarse entre estos extremos. Para ello parte de que la matemática trata de modelizar los procesos constructivos, con lo que el rigor es necesario en los procesos deductivos modelizadores.

Las relaciones de la matemática con el mundo físico nos llevan a discutir sobre la **utilidad del conocimiento matemático** para las otras ciencias. Una postura que ha estado ligada a escuelas formalistas considera que la belleza de la matemática es la razón de su estudio, y que su utilidad es secundaria. Las posturas utilitaristas (Ernest, 1989a) abogan por una matemática basada en las otras ciencias, rechazando el juego de los resultados de la matemática especulativa. Blanche (1973) pone de evidencia la dificultad de encajar una consideración especulativa del conocimiento matemático con la constatación de que las ciencias positivas emplean con éxito sus resultados. Esta constatación le hace a Cañón (1993) considerar que la belleza y la utilidad de las matemáticas no pueden separarse entre sí, ni separarlos del conocimiento matemático.

Una cuestión metafísica típica que destaca Tymoczko (1986) se plantea: *¿hay objetos abstractos o todos los objetos particulares concretos existen en el espacio y tiempo?*. Obviamente, para los defensores de las posturas formalistas, en las matemáticas *existen* objetos abstractos. Una defensa del fisicalismo o de la visión de que todos los objetos son objetos espacio-temporales, podría encerrar mas naturalmente una interpretación **constructiva** de las matemáticas.

1.4.1.2 Gnoseología del conocimiento matemático

Introduciremos en este apartado las cuestiones referentes a la **actividad matemática** y a la forma de encontrar el conocimiento matemático (los objetos, conceptos, proposiciones, teorías). Las preguntas que se suscitan son: *¿Cómo se llega a los objetos matemáticos? ¿Qué es hacer matemáticas? ¿Qué son las actividades matemáticas? ¿Cómo se emplean las matemáticas?*

a) ¿Cómo se llega a adquirir el conocimiento matemático?

Si nos situamos en la posición de la ciencia renacentista (Copleston, 1960), según la cual las matemáticas suministran información sobre el mundo, surge la cuestión de cómo se llega a adquirir esa información. Al responder a esta pregunta se suscita la dialéctica **empirismoracionalismo.** Los empiristas defienden que el conocimiento se justifica por los sentidos. Los racionalistas epistemológicos sitúan en la razón el único órgano de conocimiento.

Davis y Hersh (1989/1982) destacan el papel que desempeñan las matemáticas en la dialéctica empirismo-racionalismo: para los empiristas clásicos, la matemática es una "excepción embarazosa" a la forma de adquisición del conocimiento, ya que constituye un conocimiento adquirido por medios no sensibles; para los racionalistas, las matemáticas son un ejemplo que confirma su concepción del conocimiento, ya que la razón, sin necesidad de conocimiento sensible, determina la captación de las verdades matemáticas. Ambos puntos de vista parten de una estrecha relación entre la naturaleza y las matemáticas, establecida a partir del Mito de Euclides (los libros de Euclides contienen verdades claras e indudables que conciernen al universo, obtenidas por razonamiento axiomático). Desde esta hipótesis, la actividad matemática es a la vez ejercicio de la razón y contraste con la naturaleza. Ambas posturas epistemológicas evolucionarán a posiciones que distancian el conocimiento matemático de la naturaleza; así el Empirismo o Positivismo Lógico (Escuela de Viena), llega a considerar las matemáticas como un lenguaje para las otras ciencias.

Lakatos (1981) establece la oposición racionalismo / cuasi-empirismo. Las que antes se han citado entrarían en las que Lakatos llama *salidas racionalistas al problema de establecer la verdad*, que toman tres formas distintas: 1ª) *el programa euclídeo*, en el que los axiomas constan de términos perfectamente conocidos que inducen el valor de verdad en los teoremas; 2ª) *el programa empirista*, en el que los enunciados de la base constan de términos bien conocidos, que pueden ser falseados si los resultados lo son; y 3ª) *el programa inductivista*, como esfuerzo por transmitir la verdad desde los enunciados básicos hacia arriba. Señala Lakatos los fracasos del programa inductivista, y el abandono del euclídeo, desde el siglo XVII hasta el XX, ante la crítica escéptica que se encierra dentro de los propios dogmáticos. Frente a ellos, Lakatos (1981) presenta su postura cuasi-empirista.

Dou (1973) delimita el intuicionismo mediante el *principio de construcción* (el trabajo del intuicionista consiste en desarrollar la construcción mental que es la matemática, discutirla, suscitarla en otros, incluso estructurarla y formalizarla lo mejor posible, pero a sabiendas de que todo no es más que un proceso de aproximación) y el *principio de intuición matemática*. Este sentido intuicionista de construcción está relacionado con las posturas intuicionistas de Brouwer, supone una construcción externa y tiene un sentido matemático. No lo podemos confundir con la idea constructivista de raíz psicológica que encierra una construcción mental interna (Ernest, 1994).

El peso actual del intuicionismo clásico es escaso, con lo que se contempla esta dialéctica más como una controversia histórica, que como posturas epistemológicas actuales. Así Kline (1985), citando a Wilder, reclama el peso de la intuición en toda construcción matemática, señalando que la demostración es un paso posterior, "una comprobación que aplicamos a lo que la intuición nos sugiere". Dou (1973) indica que el intuicionista aplica su intuición, elabora la noción y finalmente empieza su actividad matemática, con lo que se presenta un límite difuso entre lo prematemático y lo matemático. Con ello considera que no está claro que intuicionismo y formalismo sean incompatibles, sino que pueden integrarse considerando el formalismo como un estadio posterior, después de que el intuicionismo haya elaborado un sistema de axiomas. Con ello, empleamos el término intuición en un sentido psicológico, no matemático.

Ponte (1992) presenta la clasificación de Saxe de las teorías del saber en las que se emplean como criterios de diferenciación la forma en que se accede al conocimiento. El empirismo, presentado por la filosofía de Locke y por la pedagogía de Gagné, considera que el mundo exterior es la fuente del conocimiento que se va formando a través de la experiencia; se plantea dilemas al intentar explicar las deducciones lógicas. Las posturas innatista, cuyos orígenes filosóficos se sitúan en Platón, y actualmente la considera Ponte en las teorías de Chomsky y Fodor, reconocen la necesidad de estructuras fundamentadas de conocimiento para organizar la experiencia en categorías o sistemas lógicos, y afirman que se trata de estructuras genéticamente preprogramadas. El inconveniente de estas posturas es que no permiten comprender la variabilidad de las formas cognitivas en diferentes culturas. Por último, la postura constructivista que tiene a Kant como referente filosófico, y resulta de los trabajos de Piaget, popularizado en círculos de educación matemática por von Glaserfeld, considera que los aspectos fundamentales del conocimiento no están preformados en los genes ni son directamente adquiridos del mundo exterior, sino que son construidos por el propio individuo. El individuo construye su conocimiento en interacción con el medio, en actividades orientadas por objetivos formulados por sí mismo. Estas posturas han sido criticadas por su falta de claridad en aspectos filosóficos, y por su dogmatismo e intolerancia, además por tomar poco en consideración los factores sociales.

Entramos con ello en la discusión sobre la forma en que se desarrollan los conocimientos matemáticos. Los conocimientos aparecidos en el curso del desarrollo tienen que ser sancionados con un valor de verdad.

b) Formas de desarrollar el conocimiento matemático

Ernest (1991) diferencia lo que él llama **visión absolutista,** que se caracteriza por considerar que el conocimiento matemático está compuesto de verdades absolutas, de la visión **falibilista**, según la cual la verdad matemática es falible y corregible y no puede verse como absoluta. Argumenta que las escuelas absolutistas (entre las que introduce el logicismo de Russell y el formalismo de Hilbert) caen en un círculo vicioso al tratar de establecer la verdad de las proposiciones matemáticas, ya que cualquier sistema matemático depende de un conjunto de supuestos, y al intentar establecer la verdad de estos supuestos se llega a una regresión infinita.

La postura falibilista de Ernest está basada en las **matemáticas informales de Lakatos,** quien proyecta en las matemáticas las teorías científicas de Popper. Lakatos (1978) plantea el "descubrimiento" matemático según un proceso que resume en los siguientes pasos:

1) Conjetura primitiva; 2) Prueba; 3) Contraejemplos globales; 4) Nuevo examen de la prueba (Lakatos, p. 127)

En consonancia con el planteamiento de Lakatos, Douady (1986) identifica "hacer matemáticas" con resolver problemas, adaptar lo que conocemos al contexto, hacer conjeturas e intentar validarlas o refutarlas. Polya (1966) diferencia entre razonamiento demostrativo y razonamiento plausible, diciendo "*El resultado de la labor demostrativa del matemático es el razonamiento demostrativo, la prueba, pero ésta a su vez es descubierta mediante el razonamiento plausible, mediante la intuición*" (p. 14).

Cañón recoge de Kuhn (1975) una pregunta más genérica: *¿Cómo avanzan las ciencias?* Resume Cañón (1993) dos tipos de respuestas a esta última pregunta. La que dan los modelos globales, como los de Wilder (modelo global evolutivo, para el que la cultura crece por varios formas de presión) y el de Kitcher (modelo global acumulativo, que caracteriza la práctica matemática como una quintupla ordenada: lenguaje, proposiciones matemáticas, formas de razonamiento, cuestiones, puntos de vista metamatemáticos, y en la que los pasos de una quintupla a otra se detectan por cambio en alguna componente), y el modelo de las etapas de génesis, de Lakatos.

Cañón se sitúa en una postura intermedia a las descritas en la oposición deducción - razonamiento plausible (Polya, 1966) que hemos presentado a partir de las escuelas logicista-formalista y falibilista. Para ella, la racionalidad matemática busca reducir la complejidad de la naturaleza, para lo que emplea la lógica como un instrumento necesario, que por si solo no cubre todo el significado de la aceptación del conocimiento matemático. Respecto a la otra oposición formalismo-cuasi-empirismo, sobre el proceso de hacer matemáticas, Cañón aboga por la contextualización histórica del conocimiento, en un proceso que recuerda las etapas de Kuhn (1975/1962), en el que hay que distinguir diversos momentos en la evolución de las teorías; cuando las teorías se consideran suficientemente maduras pueden constituirse en axiomas de los que partir, por procesos que pueden ser de conjeturas y falseamiento de nuevas hipótesis.

El acceso al conocimiento y el avance a partir de conocimientos anteriores tiene que verse refrendado por una valoración que lo convierta e introduzca en el corpus admitido. La forma de validación es también sujeto de discordia.

c) Forma de validación del conocimiento matemático

La postura antropológica de White marca el proceso de institucionalización de los conceptos matemáticos, como forma de integración en la cultura social. Es de destacar que White considera inevitables las invenciones matemáticas culturales en unas condiciones sociohistóricas determinadas, lo que coincide con la idea de necesidad defendida por Cañón (1993).

El constructivismo social de Ernest (1991 y 1994a y b) sitúa en la sanción social la forma de validación del conocimiento. Pero además, Ernest destaca la importancia de la intervención de los iguales en la gestación del conocimiento, lo que le hace destacar el papel del debate en la construcción del conocimiento individual.

Ponte (1992), resume su postura epistemológica dando unas características fundamentales del saber matemático. Para Ponte, el saber matemático, en primer lugar está en permanente evolución. En segundo lugar, puede ser concebido como producto (conjunto de teorías bien determinadas) y como proceso (como una actitud). Además es un saber científico, esto es: formalizado, es decir, sigue una lógica bien definida, verificable, ya que permite establecer consensos acerca de la validez de cada resultado, universal, por tener un carácter transcultural, y ser aplicable a variedad de contextos y situaciones, y generativo, ya que permite llevar al descubrimiento de cosas nuevas.

Lerman (1994a) apunta otro aspecto relacionado con la forma de validación del conocimiento. Para el constructivismo social, el sujeto adjudica al objeto significados que están implícitos en la cultura, producidos por acuerdo social. Para el constructivismo radical, el significado importante para cada sujeto es el que él mismo le asigna en función de su experiencia y esquemas previos.

d) Otros aspectos de la gnoseología de las matemáticas

El conocimiento cultural que contemplan las diversas escuelas deriva de un proceso histórico. En consonancia con el análisis sociológico aparece, pues, la **relación entre el conocimiento matemático y el proceso histórico**. Cañón (1993) diferencia varios aspectos relacionados con la historia, alguno de los cuales los hemos presentado ya en este resumen.

Un estudio diacrónico de la cultura no puede prescindir de un estudio sincrónico. Así, otro aspecto importante que resalta Cañón, es la relación que existe entre el conocimiento matemático y el contexto cultural. Las posiciones extremas que esta autora reconoce serían aquellas que consideran que las matemáticas proporcionan proposiciones universalmente verdaderas, independientemente de la cultura, y las que niegan certeza de conocimiento matemático y ponen en cuestión el hablar de verdades necesarias y universales. Las primeras implican que la historia y el quehacer concreto es irrelevante, mientras que las segundas implican que la matemática es ciencia empírica. En su propuesta Cañón parte de que la matemática es creación de la mente humana, que surge en contacto con lo empírico, aunque el acceso al conocimiento no está en continuidad con lo empírico. Cañón apoya la postura relativista cultural de Bishop, al considerar que las proposiciones matemáticas son producciones culturales, ya que resultan del quehacer humano, que aparece en una cultura determinada, pero tienen la particularidad de ser susceptibles de expresarse en un lenguaje independiente de la cultura. Ernest (1991) se sitúa más próximo del polo historicista al destacar el desarrollo en el tiempo y la cultura del conocimiento matemático. Godino y Batanero (1994) contextualizan históricamente el conocimiento por medio de la relación a la institución, quien establece un conjunto de prácticas en cada momento histórico.

El vehículo de evolución del conocimiento matemático a través de la historia y la cultura es el lenguaje. Por tanto, otro elemento contextualizador que ha sido tratado por los estudiosos es el **lenguaje matemático y sus características**. Cañón (1993) distingue dos polos extremos, en el primero de los cuales se considera que el lenguaje matemático debe ser abstracto, y en el segundo se considera que el lenguaje matemático no debe de ser único, sino que hay que familiarizarse con lenguajes empleados históricamente. Esta cuestión está ligada al origen del conocimiento. Los defensores de la primera postura parecen quedarse con el concepto final, mientras que los defensores de la postura historicista abogan por contextualizar el conocimiento matemático situándolo en relación a los problemas que los suscitaron. Cañón se distancia de los segundos al considerar que no es necesario hacer el recorrido histórico completo para comprender el problema, pero también se distancia de los primeros cuando indica que la expresión formal por si sola no puede dar idea de la complejidad del problema.

Relacionado con el lenguaje están las cuestiones ligadas al **rigor**, que ya hemos tratado, y la relación de las matemáticas con la lógica. Los **logicistas,** consideran la lógica como anterior o más fundamental que la matemática y efectúa la reducción de los conceptos y métodos de inferencia matemática a los correspondientes de la lógica, concluyendo consiguientemente que la matemática no es más que una rama de la lógica (Dou, 1973). Pero la posterior consideración kantiana de la geometría y la aritmética como *a priori* sintéticos, complementarios de los *a priori analíticos*, que constituyen las leyes de razonamiento, elimina la inclusión de la matemática en la lógica, ya que estos objetos aritméticos y geométricos son algo más que meros juicios tautológicos. El formalismo kantiano rechaza pues el logicismo. También los intuicionistas rechazan el logicismo al considerar que la lógica es fruto de una especulación de tipo matemático en un segundo nivel, en el que sus objetos de análisis son los razonamientos matemáticos mismos, la expresión oral o escrita de estos juicios, con lo que anteponen la intuición en la construcción de la matemática gracias a un apriorismo temporal.

Los resultados matemáticos pueden tener un carácter **general**, resumen de casos particulares, o atender a los **resultados particulares**. Cañón destaca la a-historicidad de quienes se basan en conocimientos finales como únicos conocimientos matemáticos. Para posicionarse diferencia los aspectos ontológicos de los argumentos historicistas y a-historicistas, de lo que tienen de gnoseología. Ontológicamente, la autora considera que toda proposición general debe responder a un conglomerado de problemas particulares, sin los cuales estaría vacía. Pero para que el conocimiento avance necesita establecer casos generales. Con esta segunda apreciación conecta con la teoría economicista de la ciencia de Mach (1969).

Observamos, pues, que las posturas por las que se definen los autores que hemos consultado se aproximan a una concepción del conocimiento matemático relacionado con el sujeto, con su historia, con el contexto. Con ello nos aproximamos a las posturas constructivistas defendidas por Ernest.

Dada la importancia actual del constructivismo, hemos querido resumir los principios del **constructivismo social** de Ernest. Esta posición se fundamenta en tres aspectos: a) existen planteamientos filosóficos paralelos, como el escepticismo (Lakatos, 1981), la discusión del problema del lenguaje privado, las teorías de desarrollo del conocimiento, las divisiones del conocimiento y la propia filosofía de las matemáticas; b) parte de una perspectiva sociológica, con lo que concibe al conocimiento como construcción social; c) de planteamientos psicológicos paralelos, como el constructivismo psicológico de Piaget y su teoría de las estructuras mentales, y la importancia concedida a la negociación social como regulador del pensamiento. Los dos primeros muestran la importancia del tiempo y la cultura en la historia del conocimiento. Los pensamientos psicológicos paralelos han dado lugar a una psicología de las matemáticas, en la que se estudia cómo se aprende y se crea el conocimiento matemático.

En esta postura constructivista social, el conocimiento subjetivo que surge de la interacción del individuo con el mundo físico y social en forma de teorías o conjeturas privadas, pasa a constituirse en conocimiento objetivo mediante un proceso de negociación social que se manifiesta en una puesta en común pública y en una codificación que genera una re-creación. Para esta negociación se produce un escrutinio público en base a criterios u objetivos aceptados socialmente mediante un modelo similar a la heurística de Lakatos (1978). De esta negociación surgen los objetos matemáticos, cuya necesidad está basada también en convenciones lingüísticas que determinan la validez de reglas y la necesidad de proposiciones primitivas. Su aplicabilidad deriva del propio proceso de creación del conocimiento, ya que surgen en construcción social con el propósito de explicar la experiencia humana en el contexto físico y social.

1.4.2 Visión epistemológica de la educación matemática.

Vergnaud (1990) dice que esta rama hereda las cuestiones de las epistemologías de la matemática y de la psicología, añadiendo otras cuestiones tales como: "*¿Cuál es la relación entre nuevas competencias y concepciones matemáticas y los problemas teóricos o prácticos que las hacen útiles y significativas?" ¿Qué relación existe entre conocimiento y problemas?*

Desde el punto de vista del profesor, las preguntas que nos planteamos son más abiertas, referidas a la enseñanza y el aprendizaje. Entre las correspondientes al aprendizaje:

¿Qué es saber matemáticas? ¿Qué es comprender matemáticas?¿Cómo se

aprender?

Desde la enseñanza:

¿Qué es enseñar matemáticas? ¿Cómo se enseñan? ¿Qué matemáticas enseñar?

Los elementos del segundo nivel del modelo de ideología de Ernest (1991) están relacionados con la enseñanza y el aprendizaje. Ernest indica que la distinción con los elementos del primer nivel no es absoluta, sino que se diferencian por la especialización que suponen para la educación matemática. Entre estos elementos aparecen concreciones de los elementos del primer nivel a la educación matemática, como una **teoría del conocimiento matemático escolar** y **los objetivos de la educación matemática**. Otros elementos se refieren a teorías para analizar el proceso de enseñanza y aprendizaje, como la **teoría de la enseñanza de las matemáticas** y **la teoría de recursos para la educación matemática**. Partiendo de la base de que "*la enseñanza es sólo un instrumento para el aprendizaje*", Ernest demanda una **teoría del aprendizaje de las matemáticas**. También una **teoría de la evaluación del aprendizaje matemático**. La raíz social de su modelo le hace requerir una **teoría de la habilidad matemática** y **una teoría de la diversidad social en educación matemática**.

Como en los aspectos de epistemología de las matemáticas, separamos los aspectos referentes a aprendizaje de aquellos referentes a la enseñanza, aun reconociendo la interferencia existente entre las creencias de profesores y alumnos referidas a ambos campos.

1.4.2.1 Formas de concebir el aprendizaje de las matemáticas

La primera pregunta que afrontamos se refiere a la esencia del aprendizaje: *¿Qué es aprender? ¿Cómo se contempla el aprendizaje desde diversas posturas?* **a) ¿Qué es aprender?**

La primera respuesta a estas preguntas puede establecerse desde las teorías psicológicas del aprendizaje. Pozo (1989) distingue dos grandes corrientes en la interpretación del aprendizaje: las teorías asociacionistas y las teorías estructuralistas. Mientras que las asociacionistas parten de una actitud analítica, que les hace descomponer los procesos psicológicos en unidades elementales, las estructuralistas consideran que las unidades de estudio de la psicología son globalidades que no pueden reducirse atomísticamente.

La postura conductista es la que ha tenido más auge en la corriente asociacionista que tiene su origen en el empirismo inglés, según el cual el conocimiento se alcanza mediante la asociación de ideas siguiendo ciertos principios (semejanza contigüidad espacial y temporal y causalidad). Este asociacionismo se complementa con otras características, que no son compartidas por todos los conductistas. El más conocido es lo que Pozo llama *reduccionismo antimentalista*, *es decir, la negación de los estados y procesos mentales* (p. 26). Otros rasgos que se han aplicado al conductismo son la *teoría estímulo-respuesta*, con lo que se parte de una consideración atomista y elementalista *derivada directamente del núcleo asociacionista, por el que toda conducta, por compleja que sea, es reducible a una serie de asociaciones entre elementos simples, en este caso, estímulos y respuestas* (Pozo, p. 28). También se asocia al conductismo la idea de *ambientalismo*, y la de *equipotencialidad*, *siguiendo la cual las leyes del aprendizaje son igualmente aplicables a todos los ambientes, especies e individuos* (p. 29). El siguiente paso en la psicología del aprendizaje lo constituye el procesamiento de la información, que parte de la metáfora de la mente como un ordenador. Los rasgos característicos del procesamiento de la información son: a) la descomposición recursiva de los procesos cognitivos; b) el funcionamiento cognitivo humano, al igual que el ordenador, están definido por leyes exclusivamente sintácticas, que se ocupan de determinar las reglas mediante las que esas actividades se agregan para constituir procesos complejos; c) irrelevancia de los contextos culturales y la afectividad.

Las teorías estructuralistas parten de una idea del sujeto como un organismo cambiante, que modifica la realidad al conocerla, con lo que su papel es activo. Esto obliga a estudiar los procesos de cambio del organismo y los fenómenos que los posibilitan. Para Piaget este cambio es un proceso dialéctico de asimilación y acomodación, mediante el cual el sujeto comienza por alterar la realidad para encajar en sus estructuras mentales, y posteriormente altera sus estructuras para adaptarlas a la forma en que percibe los fenómenos. Se produce así un proceso de equilibración continuo a lo largo del desarrollo del individuo. Vygotskii, también desde una postura estructuralista, introduce en el esquema Estímulo - Respuesta un mediador, que está constituido por el signo. Ello le lleva a distinguir el aprendizaje espontáneo del aprendizaje científico. El primero puede explicarse en términos asociacionistas, mientras que para que se produzca el segundo exige una reestructuración basada en un sistema de signos que median nuestras acciones, a la vez que modifica la persona que interactúa con su entorno. Estos signos son proporcionados por la cultura, el medio social, con lo que el proceso de desarrollo del aprendizaje iría del exterior al interior mediante un proceso de internalización o *transformación de las acciones externas, sociales, en acciones internas, psicológicas. La ley fundamental de la adquisición del conocimiento para Vygotskii afirmaría que éste comienza siendo objeto de intercambio social, es decir, comienza siendo interpersonal para, a continuación, internalizarse o hacerse intrapersonal* (Pozo, 1989, p. 196).

También Farnham-Diggory (1994), nos permite resumir las posturas expuestas para responder a la primera pregunta planteada en relación al aprendizaje, aunque encierra también aspectos de competencia que serán contemplados en el apartado relativo a *¿Qué es saber matemáticas?*. Farnham-Diggory, que habla de paradigmas educativos, diferencia los paradigmas en función de dos factores. El primero es la forma en que cada paradigma concibe que el sujeto "sabe", "ha aprendido", o, empleando sus términos, "*que el alumno es experto*". El segundo se refiere a la forma de concebir las actividades que debe hacer el alumno para saber, "*para pasar de ser novato a ser experto*". Surgen así tres paradigmas, que según Farnham-Diggory, son excluyentes: el modelo conductista, el modelo de desarrollo y el modelo de aprendizaje. En el modelo conductista, aprender (ser experto) es alcanzar una posición dentro de una escala; en el modelo de desarrollo, aprender es alcanzar un modelo cualitativamente diferente al que se poseía antes de ese aprendizaje (cuando se era novato); para el modelo de aprendizaje aprender es alcanzar un mundo social diferente en cultura y práctica del mundo del novato. El segundo factor de diferencia entre estas conceptualizaciones del aprendizaje se refiere a la forma en que se adquiere el aprendizaje.

Tymoczko (1986) estudia la relación que existe entre la postura filosófica sobre las matemáticas y la filosofía de la mente, que obviamente se relaciona con los procesos para aprender. Empleando la dicotomía **constructivismo -realismo**, Tymoczko argumenta que si aceptamos una visión **constructivista** de las matemáticas, entonces concebimos la matemática como una actividad mental, que encajará en una cierta teoría de la mente en la que se aceptaría que todos nacemos con la posibilidad de hacer matemáticas. Por otra parte, si nos situamos en la postura **realista,** la filosofía de la mente consiguiente, aceptaría que la mente está dotada de una facultad primitiva de intuición matemática o percepción del reino de las matemáticas.

También Vergnaud, que habla del **constructivismo** psicológico, postura en la que reconoce que se encuentran la mayoría de los psicólogos interesados en educación matemática, considera que las competencias y concepciones son construidas por los estudiantes. Aprender matemáticas es construirlas, hacer. Esta construcción es planteada como respuesta a un conflicto cognitivo por los psicólogos constructivistas sociales, tal como veremos mas adelante.

Las posturas **constructivistas** difieren en la forma de concebir el aprendizaje como construcción. Como señala Ernest (1994c), el principio constructivista puede ser un mito ingenuo. Lerman (1994) diferencia entre posturas constructivistas sociales, representadas por Gergen en educación matemática y por la psicología cultural de Vygotskii, y las constructivistas radicales, basadas en los principios de von Glasersfeld (1995/1981) en educación matemática y por la psicología individual de Piaget. Lerman emplea metáforas para referirse a la forma de concebir el aprendizaje en cada postura. En el constructivismo social la metáfora de aprendizaje es la *apropiación*, mientras que en el constructivismo radical, la metáfora es *construcción* propiamente dicha. Con ello el autor quiere diferenciar el papel individual de la construcción y del constructivismo radical, de la actuación compartida social del aprendizaje apropiación. Ernest (1994c) indica las dificultades que encuentra en el constructivismo radical en relación al aprendizaje, al indicar que en esta teoría no se indica la forma en que aparece el conocimiento comunicable. También Kilpatrick (1983) llama la atención sobre el fanatismo que puede llevar a apoyar radicalmente el constructivismo.

Como vemos, los elementos de la epistemología de las matemáticas inciden en estas posturas de la educación matemática. ¿Qué es construir matemáticas? ¿Cuáles son los conflictos cognitivos concernientes a las matemáticas? Para responder a estas preguntas hay que volver a las posturas ontológicas y gnoseológicas de la epistemología de las matemáticas.

Vergnaud (1990) considera que la postura formalista para la educación matemática da preponderancia al estado final del conocimiento de un estudiante, enfatizando lo explícito de dicho conocimiento, ya que sólo desde el conocimiento declarado puede contrastarse la coherencia sintáctica del mismo. Es decir, el objeto del aprendizaje de las matemáticas sería el sistema formal, explícito y consistente. Señala Vergnaud (1990) que esta concepción olvida dos aspectos importantes: la forma de acceso del estudiante a este conocimiento, sin tomar en consideración que durante el desarrollo evolutivo del sujeto se adolece del rigor exigido; el conocimiento implícito del sujeto durante su aprendizaje.

En contraposición, la postura **intuicionista** en educación matemática, que Vergnaud (1990) la sitúa en Fishbein, afirma que el pensamiento sería imposible si no pudiéramos apoyarnos en intuiciones inmediatas, auto-evidentes. Desde esta postura, el acceso al conocimiento deberá ser gradual, en consonancia con las intuiciones inmediatas de cada sujeto, que cambian a lo largo de su desarrollo, pero sin un desarrollo prefijado, ya que dependen del conocimiento implícito de cada sujeto.

El **procesamiento-de-la-información** realiza una consideración formal del conocimiento implícito. En este enfoque se han estudiado teorías implícitas del sujeto en la realización de tareas matemáticas, aunque su aportación principal se ha referido a las conductas de elección, como las concernientes al cálculo aritmético, siendo menor en campos más complejos, ya que, como dice Vergnaud, no aporta una teoría sobre lo que es un concepto, ni sobre la parte que juega el lenguaje y el símbolo en el razonamiento. Ernest (1994a y b) considera que el procesamiento de la información se ocupa de procesos cognitivos individuales de adquisición de un *conocimiento externo establecido*, situado en el *espacio absoluto newtoniano*. Desde la perspectiva de Ernest (1994a y b), el procesamiento de la información es una forma de *realismo científico ingenuo*, que sin embargo contempla la metáfora de la construcción del conocimiento y el romanticismo de centrarse en el niño, pero sin profundizar epistemológicamente en la ontología de las matemáticas.

b) ¿Qué es saber matemáticas?

Douady (1986), en consonancia con las posturas eclécticas epistemológicas de Dou (1973) y Kline (1985), identifica "saber matemáticas" con ser capaces de usarlas en diferentes situaciones. Distingue dos posibles actitudes del alumno a instancia del profesor: si se dice qué hay que hacer, siendo posible comprender el enunciado del problema pero sin sugerir el método de solución, estamos considerando principalmente la matemática como herramienta;

si se trata de conocer cómo las nociones están relacionadas desde un punto de vista científico cultural estamos considerando principalmente las matemáticas como objeto. Más adelante concreta "tener algún conocimiento de matemáticas" es ser capaz de implementar su empleo como una herramienta explícita en problemas a resolver.

Ponte (1992) utiliza metáforas para diferenciar las formas del aprendizaje y del saber. La metáfora del jardinero contempla el saber como preexistente e independiente de la maduración ("planta" por la que cuida el profesor jardinero). Según la metáfora del "aprendiz", la maduración deriva de la observación y acompañamiento al maestro, viendo cómo este lo hace; en esta metáfora, el saber adquiere una forma algo difusa, siendo especialmente práctico, tácito, difícil de formular. En la metáfora de la enseñanza de las matemáticas de la "escuela de samba" (Papert, 1981), todos son maestros y aprendices al mismo tiempo, y se produce la expresión de un ambiente de vocación para estimular la creatividad. La metáfora del matemático "creativo" contempla que el alumno debe investigar situaciones, resolver problemas formulados por sí mismo e incluso inventar conceptos y notaciones. La metáfora del "ingeniero" ve al alumno como una persona situada delante de una situación compleja que procura poner en juego diferentes métodos de resolución a su alcance, modificándolos eventualmente o combinándolos para llegar a la solución (Flores, 1997).

c) Forma en que se adquiere el aprendizaje. ¿Cómo aprender?

Siguiendo a Brousseau (1989), Robert y Robinet (1989) sitúan las actividades para aprender entre los tres polos siguientes: se aprende por la escucha e imitación / únicamente por actividades / por una dialéctica actividades bien elegidas - intervenciones magistrales.

Peterson y cols. (1989) formulan una oposición entre los términos: los alumnos construyen activamente su propio conocimiento / reciben pasivamente el conocimiento matemático del profesor u otro. En la concepción interna aristotélica, que señala Dossey (1992), aprender matemáticas es equiparado con *hacer matemáticas*.

Los tres paradigmas educativos indicados por Farnham-Diggory (1994), también marcan formas de llegar al aprendizaje: el modelo conductista plantea el aprendizaje a través del aumento de destrezas; el modelo de desarrollo considera que se llega a aprender proporcionando a los estudiantes teorías personales, para lo cual se debe perturbar al estudiante cuestionando, contradiciendo y cambiando estas teorías; por último el modelo de aprendizaje considera el aprender como un proceso de enculturación.

El resultado del aprendizaje es el conocimiento, tal como lo concibe Farnham-Diggory (1994). Este autor diferencia cinco formas de conocimiento: el declarativo (que acepta el lenguaje como vehículo de comunicación y validación); conocimiento procedimental (en forma de secuencias de acción); conocimiento conceptual (de categorías -listas de atributos-, y esquemas -añaden atributos espacio temporales-); conocimiento analógico (conserva la correspondencia entre el mundo exterior y el interior); y conocimiento lógico (sistemas de implicaciones causales).

Para caracterizar el conocimiento/aprendizaje, Ponte (1992) establece cuatro niveles de competencia. Las competencias elementales son procesos de simple memorización y ejecución. Las competencias intermedias, o procesos con cierto grado de complejidad pero que no exigen mucha creatividad. Las competencias complejas suponen capacidad significativa de tratar con situaciones nuevas. Y, por último, los saberes de orden general, que tienen componentes metacognitivas, en los que el aprendiz tiene conciencia de su saber (metasaber). Estos saberes tienen influencia en las propias concepciones del aprendiz. Cada uno de estos tres primeros niveles supone un dominio del anterior, mientras que el cuarto nivel, tiene un papel regulador. La manifestación del aprendizaje en cualquiera de estos niveles, se realiza en dos tipos de actividades, según Ponte: actividades de acción, en las que se manipulan objetos y representaciones; y actividades de reflexión, en las que se piensa sobre la acción. Estas actividades de reflexión son estimuladas por la explicación y la discusión.

d) Otras cuestiones referentes al aprendizaje

¿En qué orden se deben secuenciar los contenidos para el aprendizaje? Perterson y cols. (1987) diferencian las posturas entre los polos siguientes: la estructura de las matemáticas debe proporcionar la base para secuenciar las nociones durante la instrucción / el desarrollo de las ideas matemáticas en los alumnos debe proporcionar la base para secuenciar.

Por último, una cuestión que ha dado lugar a diferentes respuestas se refiere a los ***sujetos que intervienen en el aprendizaje***. Robert y Robinet (1989) llaman a esta cuestión "articulación cognitivo (individual)/social" y la sitúan entre los dos polos siguientes: el aprendizaje es un fenómeno individual / el aprendizaje de las matemáticas tiene que tener una fase colectiva.

1.4.2.2 Formas de concebir la enseñanza de las matemáticas a) ¿Qué es enseñar?

Esta primera pregunta incide en la esencia de la enseñanza. Las respuestas a esta pregunta se relacionan con las formas de concebir el paso de novato a experto, en la terminología de Farnham-Diggory. También se relacionan con la concepción epistemológica de las matemáticas, por ejemplo en lo que concierne a la relación entre el enseñante y el saber. Robert y Robinet (1989) indican dos extremos en la concepción de esta relación: el profesor es el único y verdadero poseedor del saber en clase / muchas cosas pueden ser descubiertas por los alumnos solos, incluso por procedimientos que el profesor no ha previsto.

Joyce y Weil (1985) diferencian familias de modelos de enseñanza, en los que implícita o explícitamente hay una forma de concebir la enseñanza. Estos modelos están relacionados con los modelos de aprendizaje ya citados. Para el modelo de procesamiento de la información, enseñar es mejorar la capacidad de procesar la información de los alumnos, entendido como incrementar el manejo de estímulos del medio, afianzar datos, generar conceptos y soluciones y utilizar símbolos verbales y no verbales. Los modelos personales orientados hacia el desarrollo del yo individual, consideran enseñar como ayudar al individuo a desarrollarse, con lo que se mejorarán las relaciones personales y la capacidad de procesar información. Para los modelos de interacción social la enseñanza se interesa en las relaciones entre el individuo y otras personas, dando prioridad al proceso democrático y al trabajo social productivo. Por último, en los modelos conductistas enseñar es cambiar el comportamiento visible del sujeto más que la estructura psicológica y la conducta no observable, lo que les hace basarse en principios de control de estímulos y refuerzos, fraccionando el comportamiento en pequeños segmentos de conducta. Según Joyce y Weil, estos modelos se diferencian en la sintaxis (secuencia de actividades para enseñar, el cómo enseñar), la organización del sistema social (papel de los sujetos implicados en la enseñanza), los principios de reacción (estrategias y reglas que se emplean para sintonizar con el alumno y responder a lo que hace), los sistemas de apoyo (condiciones que necesitan) e importancia concedida a los efectos didácticos y educativos (prioridades y deseabilidad de los efectos instruccionales y educativos).

La sintaxis de los modelos nos sitúan frente a la cuestión del *cómo enseñar, qué actividades hay que realizar para enseñar, cómo organizar la secuencia de actividades para enseñar*.

b) Cómo enseñar

Farnham-Diggory (1994) indican cuatro *tácticas de enseñanza*, que responden a la sintaxis de la enseñanza: hablar o leer; exponer; entender; organizar el entorno del aprendizaje. Según el autor, estas cuatro tácticas aparecen en diferentes grados en todos los tipos de enseñanza que hemos citado anteriormente.

Robert y Robinet (1989) analizan *el papel del profesor* en la clase de matemáticas, estableciendo el continuo comprendido entre la clase magistral (explicar, repetir, repetir variando las explicaciones, realizar ejercicio de aplicación después de la clase) y la actuación del profesor como organizador de las actividades del alumno en clase, pasando una parte del tiempo supervisando el aprendizaje que se realiza por la acción. Peterson y cols. (1989) formulan la oposición entre organizar la instrucción para facilitar la clara presentación del contenido por parte del profesor / para facilitar la construcción del conocimiento de los alumnos.

Ernest ha realizado varios análisis en relación con el papel del profesor. En 1985, Ernest establecía un continuo entre formas autoritarias y formas democráticas de enseñanza. Los puntos de conflicto entre estos polos son los siguientes: a) Caminos mediante los que se presenta la materia (características de las definiciones, aproximación a las pruebas y demostraciones - formas estilizadas "mitificadas" o emplearlas para estimular el razonamiento plausible-, actitud del profesor hacia las técnicas y algoritmos -métodos "oficiales" o estimular los métodos de los alumnos-). b) Formas de intervenir en el trabajo de los estudiantes (formas de control, cómo se tratan los errores, el control de las respuestas, etc.) . c) Organización de la clase (colocación y distribución de los alumnos -separados, en grupo-, acceso al material, vía de selección de tareas para los alumnos, tipo de preguntas que hace el profesor, etc.). d) Relaciones que se permiten o se estimulan y relaciones que se evitan (competición individual o en colaboración, trabajando en grupos). e) El curriculum, (como se dirige el profesor a los alumnos -clase expositiva y magistral o mediante proyectos y grupos de trabajo individualizado- , forma en que las diferentes partes se conectan -predeterminados los contenido y secuencia o abrir una consulta, elección y negociación entre el profesor y los alumnos- , a quién se dirige el profesor -a la experiencia o a los intereses de los alumnos-).

En otro momento, Ernest (1989) relacionó la forma de enseñanza con la forma en que el profesor concibe la matemática, clasificando en tres posturas: utilitarista, platónica y constructiva. Los criterios para clasificar los modelos de aprendizaje son dos. El primero está relacionado con la concepción del aprendizaje, que puede extenderse de considerar el aprender como construcción activa del conocimiento como un cuerpo significativamente conectado (constructivismo), a considerarlo como recepción pasiva de conocimiento (platonismo). El segundo se refiere a la autonomía del alumno, y se extiende entre enfatizar el desarrollo de la autonomía y los propios intereses del niño en Matemáticas (constructivismo), o considerar al aprendiz como sumiso y complaciente (platonismo). Los criterios para diferenciar la enseñanza son tres. El primero se refiere al tipo de las tareas, que pueden ser concebidas con carácter instrumental y básicas, frente a una forma de concebirlas más creativas y con fines exploratorios. El segundo se refiere a la forma de considerar el cuerpo de conocimientos que se tratan en la enseñanza: desde hechos y dominios de tareas centradas en el éxito y la respuesta correcta, hasta conocimientos significativos, comprendidos y unificados. El tercero está ligado a la forma en que se concibe el uso del material curricular: la matemática basada en seguir estrictamente un texto o un esquema, frente a la postura en que el profesor o la escuela construyen virtualmente todos los materiales curriculares de matemáticas, pasando por a un punto de vista en que el profesor enriquece el texto con problemas y actividades adicionales.

Ernest (1989a) utiliza un paralelismo similar al realizado por Copes (1982), entre los niveles del desarrollo de Perry (1970), y posibles posturas del profesor de matemáticas frente a la filosofía de las matemáticas. También, como Copes, señala cinco posturas, las cuatro primeras absolutistas y la quinta falibilista: absolutista dualista, absolutista multiplicista, absolutista relativista separado, absolutista relativista concentrado y falibilista relativista. A estas cinco posturas epistemológicas y éticas que puede adoptar el profesor les asocia Ernest cinco grupos sociales que se corresponden con actitudes ante la educación matemática, respectivamente: entrenador industrial, viejo humanista, educador progresista, pragmático tecnológico y educador público. Con estos cinco grupos, Ernest contempla la diferencia entre la visión absolutista del mundo en que ha sido basada habitualmente la educación matemática, y la visión basada en el constructivismo social.

Ernest diferencia el educador progresista del educador público en que el primero enfatiza lo individual y el segundo lo social. Pero, como Steffe (1992) indica, la postura falibilista del educador público no toma en consideración los aspectos psicológicos de la construcción del conocimiento matemático subjetivo; a su vez, el educador progresista necesita expandir sus supuestos para incluir la teoría de la sociedad (Steffe, 1992)

Douady(1986) categoriza el trabajo del profesor y de los alumnos en el continuo cerrado entre dos posturas extremas. En la primera el profesor presenta los objetos de manera adaptada al contenido y a sus alumnos. Para ello presenta definiciones, ejemplos y teoremas, si es posible, demostrándolos; los alumnos deben dar sentido a las ideas y utilizarlas como herramientas; o bien muestra algunos prototipos y desarrolla usos familiares; el profesor se inclina por reducir el contenido a los algoritmos; los alumnos son enfrentados a objetos y debe usarlos como herramientas. En la segunda, el profesor contextualiza el contenido en situaciones variadas y, para darles significado, organiza estas situaciones de manera dinámica. El contenido es supuesto como herramienta, y al cambiarlo es descontextualizado para alcanzar el estado de objeto. Los alumnos deben comprender el problema, establecer relaciones para hacer conjeturas y examinar consecuencias. El alumno se enfrenta a herramientas y debe transformarlas en objetos (todos o una parte de ellas).

Skemp (1978) señala otras forma de diferenciar las matemáticas enseñadas, relacionada con la concepción de las matemáticas, ya que, como dice Skemp *lo que caracteriza el conocimiento es la forma de conocerlo* (p. 14). Distingue Skemp entre matemáticas relacionales y matemáticas instrumentales. Estas matemáticas están ligadas a dos formas de comprensión: relacional e instrumental.

Dentro de la postura constructivista, que tiene muchos puntos de contacto con la postura democrática (Ernest 1986), con la concepción del profesor como organizador (Robert y Robinet, 1989), con el fin de la enseñanza en organizar los entornos de aprendizaje, con el *educador progresista y el educador público* (Ernest, 1994) y con la segunda postura de Duady (1986), diferencia Lerman (1994) dos formas de afrontar la tarea del profesor. En el *constructivismo social,* que Lerman sitúa en Gergen, la metáfora que define al profesor es la de *mediador.* En el *constructivismo radical*, contextualizado en los principios de von Glasersfeld, el papel del profesor se encierra en la metáfora de *facilitador*. Las aportaciones de Vergnaud (1990), nos permiten desarrollar estas metáforas. Para él, el **constructivismo radical** minimiza el papel de los profesores al negar que la mente llegue a reflejar aspectos objetivos de la realidad, con lo que enfatiza la construcción personal del aprendiz. El **constructivismo social** (Ernest, 1992) enfatiza el conflicto cognitivo en la construcción de la objetividad, con lo que considera que la enseñanza de las matemáticas se realiza creando conflictos cognitivos.

c) Otras cuestiones relacionadas con la enseñanza

Tratadas las cuestiones ontológica y gnoseológica esenciales (el qué es enseñar y el cómo se enseña), aparecen otras cuestiones relacionadas con ellas, que las particularizan o complementan. Robert y Robinet diferencian la forma particular de **enseñanza** que tiene por objeto **ayudar a los alumnos con dificultades** en matemáticas. Los autores indican dos posturas extremas para esta actuación propedeutica: simplificar, descomponer y no mezclar tareas y aplicaciones, llegando a darles recetas en caso de dificultad extrema / llevar a los alumnos al corazón de los obstáculos por problemas apropiados y no privándolos de una visión global que haga que los contenidos pierdan sentido. También se interesan en las **prioridades sociales que afronta el enseñante**, una de las cuales se debate entre detectar y formar prioritariamente los buenos alumnos de matemáticas o, por el contrario, favorecer el aprendizaje de toda la clase (NCTM, 1991; Informe Cockcroft, 1985)

El **qué matemáticas se enseñan** es planteado por Robert y Robinet (1989) en el continuo: las matemáticas que se deben enseñar se componen de teoremas, procedimientos, recetas de cálculo / matemáticas para resolver problemas y plantear cuestiones. Concretan la oposición diciendo que la idea de que es necesario enseñar técnicas ante todo, en cualquier condición, se opone a aquella según la cual no se puede pretender que los alumnos utilicen una técnica antes de que sea percibido el sentido del concepto que subyace a esta técnica. Peterson y cols. (1987) lo formulan más precisamente: las destrezas matemáticas deberían ser enseñadas como componentes discretas aisladas de la comprensión y de la resolución de problemas / en relación a la comprensión y resolución de problemas.

1.4.3 Articulación entre epistemología e instrucción matemática

Las cuestiones sobre la naturaleza y origen del conocimiento matemático, y sobre los procesos de comunicación de los mismos en el seno de distintas instituciones, son objeto de estudio de diversas disciplinas: filosofía de las matemáticas, sociología del conocimiento, psicología, etc. La complejidad de estas cuestiones hace que las respuestas que se dan se refieran a aspectos parciales, siendo no obstante necesario, para la educación matemática, realizar esfuerzos de articulación entre los distintos componentes del problema.

Un autor que desde la didáctica de las matemáticas ha intentado proponer una teoría de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas consecuente con unos planteamientos epistemológicos explícitos es G. Brousseau (Brousseau, 1986; 1989). Su *teoría de las situaciones didácticas* se basa en un análisis previo de la actividad matemática, de la reflexión sobre papel que juega en ella la organización axiomática y deductiva, así como de los inconvenientes de usar tal organización como modelo para la enseñanza.

Según Brousseau (1986), la presentación axiomática supone virtudes para la propia ciencia matemática e incluso parece maravillosamente adaptada para la enseñanza. Permite en cada instante definir los objetos que se estudian con ayuda de nociones introducidas anteriormente y, organizar la adquisición de nuevos saberes apoyándose en las adquisiciones anteriores. Cuando se trata de aplicar en la enseñanza, la presentación axiomática parece proporcionar al estudiante y al profesor un medio de ordenar su actividad y de acumular en un mínimo de tiempo un máximo de "saberes", bastante próximos al "saber sabio".

Pero esta presentación borra completamente la historia de los saberes, es decir, la sucesión de las dificultades y de las cuestiones que han provocado la aparición de los conceptos fundamentales, su uso para plantear nuevos problemas, la introducción de técnicas y de cuestiones nacidas del progreso en otros sectores, el rechazo de ciertos puntos de vista que han resultado falsos o ineficaces, y las innumerables discusiones sobre el tema. La presentación axiomática enmascara, por tanto, el "verdadero" funcionamiento de la ciencia, imposible de comunicar y de describir fielmente desde el exterior, para poner en su lugar una génesis ficticia.

Tras el análisis crítico del modelo instruccional que podemos describir como "teoría-aplicación", Brousseau, como Hersh (1986) analiza el trabajo del matemático cuyo origen sitúa en su interacción con situaciones-problemas, bien del mundo físico, social o de la propia matemática. Pero parte integrante del quehacer matemático son también los procesos de comunicación de las soluciones encontradas. Para ello, antes de comunicar a otros lo que piensa haber encontrado, un investigador debe precisarlo: no es fácil distinguir, en el laberinto de reflexiones, las que son susceptibles de llegar a ser un saber nuevo e interesante para los demás; las demostraciones obtenidas pocas veces coinciden con las conjeturas previas; debe hacer toda una reorganización de los conocimientos y los procesos. Es necesario también suprimir todas las reflexiones inútiles, la traza de los errores cometidos y de las direcciones erróneas, ... Así, el productor del saber *despersonaliza, descontextualiza, destemporaliza, generaliza, lo más posible sus resultados.*

Este trabajo es indispensable para que el lector pueda conocer estos resultados y se convenza de su validez sin que tenga que recorrer el mismo camino para descubrirlo. Otros autores transforman, a su vez, estos resultados, los reformulan, los aplican, los generalizan, si tales son sus necesidades. En otras ocasiones los destruyen si lo identifican como un saber ya conocido, o mostrando que son falsos. Se observa, por tanto, que la organización de los conocimientos depende, en su origen, de exigencias impuestas al autor para su comunicación.

Este análisis del quehacer matemático es aplicado por Brousseau a la formulación de una hipótesis educativa fuerte: El trabajo intelectual del alumno debe ser en ciertos momentos comparable a esta actividad científica. Saber matemáticas no es solamente aprender definiciones y teoremas para reconocer la ocasión de utilizarlos o aplicarlos; sabemos que hacer matemáticas implica ocuparse de problemas, y que encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones.

Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que actúe, formule, pruebe, construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que intercambie con otros sus ideas, que reconozca las que son conformes con la cultura (matemática), que adopte las que le sean útiles, etc.

Para hacer posible tal actividad, el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que puedan vivir y en las cuales los conocimientos van a aparecer como la solución óptima a los problemas planteados, solución que el alumno puede reinventar. El trabajo del profesor de matemáticas es equiparable, en ciertos aspectos, al del investigador matemático, aunque la relación que debe mantener entre la teoría matemática y las aplicaciones se produce en sentido inverso a la de aquél. El investigador parte de problemas de la vida real o de la propia matemática; por medio de un proceso de descontextualización y despersonalización de las soluciones informales que encuentra a los mismos, elabora nuevos conceptos y procedimientos matemáticos, extendiendo y generalizando al máximo estas soluciones a los problemas particulares.

Para Brousseau, las matemáticas constituyen, además, un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemáticas y las soluciones encontradas; por tanto, postula que se deben organizar también situaciones didácticas en las que se ofrezca al alumno la oportunidad de practicar este discurso matemático. Asimismo, para que el alumno pueda compartir su conocimiento con los demás compañeros y se sienta integrado con la cultura matemática generada a lo largo del tiempo, el proceso de enseñanza-aprendizaje tiene que completarse mediante la organización de situaciones didácticas de institucionalización, en las que el profesor ayude a fijar el significado colectivo de los objetos y el lenguaje matemático. En esta fase se tiene que producir, por tanto, un nuevo proceso de descontextualización y despersonalización de los conocimientos: los conocimientos personales de los alumnos se extienden, generalizan y comparten.

Observamos cómo en esta visión de las matemáticas que defiende Brousseau se enfatiza el carácter de éstas como actividad o quehacer humano, en la línea sostenida por Lakatos, pero también se tiene en cuenta su condición de lenguaje simbólico, de sistema conceptual y procedimental, así como su naturaleza social y cultural. La instrucción matemática, entendida como el proceso de enseñanza y aprendizaje organizado en instituciones educativas, debe ser consecuente con esta caracterización y a ello responde la tipología de situaciones propuesta por Brousseau.

Capítulo 2

Definición del problema de investigación. Estudio piloto

2.1. Área problemática de estudio

Nuestra investigación se sitúa en un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. Vamos a delimitar el área problemática situándola en relación a tres aspectos. El primero se refiere al paradigma de investigación en educación en el que nos situamos: *el pensamiento del profesor*; el segundo precisa el ciclo educativo: *formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria*, y el tercero sitúa los constructos que vamos a investigar: *creencias y concepciones de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.*

2.1.1 El paradigma de investigación: El pensamiento del profesor

Tanto para el diseño e implementación de los cursos de formación de profesores, como en la investigación que realizamos, nos interesa la forma en que los profesores se representan su tarea profesional. Nos situamos en un paradigma de formación de profesores que recibe el nombre de *"pensamiento del profesor"* (Shulman, 1986; Clark, Peterson, 1983), desde el que atendemos a las *creencias y concepciones* de los estudiantes para profesor, sobre el conocimiento matemático (epistemológicas), y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como organizadoras de su experiencia (Cooney, 1994b; Clark, Peterson, 1983, Ponte, 1994).

El paradigma del Pensamiento del Profesor rompe con la concepción de otros paradigmas, según los cuales el profesor es un sujeto receptor y transmisor de la información en un proceso unidireccional. Desde el *pensamiento del profesor*, se considera al profesor como un *agente que procesa la información* en relación a unas circunstancias externas e internas. Estas circunstancias influyen en la actuación práctica en clase, pero, a su vez, la actuación práctica influye en los pensamientos del profesor en un proceso circular (Shulman, 1986). Este paradigma enfatiza, pues, dos características del proceso de enseñanza-aprendizaje: por un lado la importancia en el mismo de las representaciones del profesor (componente teórica) y la repercusión de la actuación del alumno (componente práctica), y por otro la relación de interdependencia entre ambos aspectos.

2.1.2 Nivel educativo: Formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria

Nuestros estudiantes son alumnos de 5º curso de la Licenciatura de Matemáticas, de la Universidad de Granada, sección de Metodología. Están inmersos en un proceso de formación *concurrente* (Taylor, 1980), en el que se simultanea la formación matemática con asignaturas de carácter didáctico. La formación didáctica-profesional ocupa aproximadamente un 20 % del horario total de la formación en el segundo ciclo de la licenciatura de Matemáticas.

La especialidad de Metodología de la Sección de Matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada procede del Plan de Estudios de 1975, pero funciona como tal especialidad desde 1965. El plan de formación profesional que afronta esta especialidad se centra en cuatro asignaturas. *Supuestos de la Educación* (3 horas semanales en 4º curso), *Métodos Estadísticos aplicados a la Educación* (5 horas semanales, 3 de teoría y 2 de práctica, en 4º curso), *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* (3 horas semanales, en 5º curso) y *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos* (3 horas semanales, en 5º). Estas asignaturas se imparten simultáneamente con otras asignaturas de contenido matemático. Rico (1992) resume el "componente diferenciado" que aporta cada una de ellas:

> *"La asignatura Supuestos de la Educación proporciona la base teórica que incluye componentes axiológicos, reflexiones filosóficas, planteamientos epistemológicos e información sobre el desarrollo histórico de la educación. También informa sobre movimientos educativos, sus fundamentaciones, los modelos existentes en nuestra sociedad y los esquemas de su organización y desarrollo. (..) La asignatura Métodos Estadísticos aplicados a la Educación aporta conocimientos necesarios para el estudio e investigación en Educación Matemática, así como el fundamento de tales conocimientos. (..) La asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato proporciona al Profesor en formación un conocimiento sobre la enseñanza de las Matemáticas dentro del Sistema Educativo en sus etapas Obligatorias y Postobligatorias, sobre la transmisión y aprendizaje de conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas, sobre la detección y tratamiento de errores, organización de contenidos, alternativas metodológicas, evaluación de los aprendizajes y, en general, sobre los sistemas conceptuales construidos para el estudio de los problemas derivados de la enseñanza/aprendizaje de las Matemáticas. (..) La Asignatura Prácticas de Enseñanza en Instituto*

aporta el contacto con el aula y con los alumnos, permite controlar y valorar la utilidad de los planteamientos teóricos, aporta la dimensión del conocimiento directo y las limitaciones de la realización de los programas; (..) ofrece un espacio para la puesta en práctica de las Programaciones y Diseños de Unidades Didácticas y para el análisis y revisión de las actuaciones del Profesor en el aula."

2.1.3 Creencias y concepciones de los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje

En un contexto de formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza primaria, Llinares (1992) considera como variables importantes en el proceso de *aprender a enseñar* las siguientes: las concepciones que tienen los estudiantes sobre el papel del profesor y los ideales personales respecto a la enseñanza, forjados en su experiencia como alumnos; la forma en que los estudiantes comprenden los contenidos matemáticos escolares y las concepciones sobre lo que es aprender y cómo se produce, así como la imagen de si mismos como profesores en formación (destrezas metacognitivas). En la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria siguen vigentes estas variables, pero, en este modelo de formación en que nos situamos, el conocimiento matemático tiene un peso mucho mayor, por lo que nos parece interesante tomar en consideración la forma en que los estudiantes conciben el propio conocimiento matemático, y cómo sitúan el conocimiento sobre aprender a enseñar en relación a este conocimiento matemático.

Para el estudio de las concepciones y creencias, partimos de que estas dimensiones del pensamiento del estudiante para profesor aparecen entrelazadas con creencias y actitudes heredadas y no reflexionadas (Furinghetti, 1994, Green, 1971). Además las creencias tienen un carácter de conocimiento subjetivo, fruto de la interacción del sujeto con el conocimiento matemático y de su paso por la comunidad educativa. El cambio de estas creencias es un cambio de segunda especie (Watzlawick, Weakland y Fisch, 1976), que exige un proceso de interiorización que no se consigue sólo mediante un proceso instructor. Un primer paso para el cambio de creencias y concepciones consiste en hacerlas explícitas, con lo que se prestan a su debate y confrontación con los demás miembros de la comunidad educativa (Schram y cols., 1988).

Para hacerlas explícitas es preciso que el estudiante se enfrente a reactivos que pongan en tela de juicio estas concepciones y creencias. Estos reactivos deben crear dilemas (Elbaz, 1983; Yinger y Clarck, 1988; Llinares y Sánchez, 1987) que provoquen que los estudiantes lleguen a reflexionar sobre la naturaleza del conocimiento matemático, a partir de sus creencias sobre la enseñanza. Para ello, estos reactivos deben suministrar nuevos argumentos que eviten la circularidad de los argumentos de reafirmación, evitando también, una confrontación directa, que dejaría la reflexión en el nivel superficial (Thompson, 1992, Hersh, 1986, Watzlawick y otros, 1976).

Todas estas razones nos han movido a estudiar la evolución de las creencias y concepciones de los estudiantes sobre el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Para ello vamos a partir del análisis de los trabajos realizados durante el curso 1993-1994 por 25 estudiantes durante su actuación en la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos.

2.2 Antecedentes. Estado de la cuestión. Investigaciones sobre creencias y concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas

Para situar el área problemática hemos realizado una revisión de la literatura de investigación. Nuestro principal foco de atención ha sido la literatura relacionada con investigaciones sobre formación de profesores, con lo que este ha constituido el primer descriptor. Dentro de la formación de profesores, hemos buscado investigaciones relacionadas con los siguientes descriptores: *creencias y concepciones de los profesores o estudiantes para profesor*, *representaciones (imágenes, metáforas, etc.) de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje*. En el área específica de la investigación en educación matemática, nuestro interés se ha centrado en investigaciones referidas a la forma de concebir el conocimiento matemático.

Estos descriptores nos han llevado a dos clases de textos. En la literatura dedicada a la investigación en educación matemática hemos comenzado con dos resúmenes de investigaciones del campo de las concepciones y creencias de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. El primero de ellos es la tesis doctoral de Salvador Llinares, de 1989, en la que se realiza un estudio sistemático de las investigaciones relacionadas con creencias y concepciones de profesores de matemáticas. El segundo es de 1992, de Alba G. Thompson, aparecido en el *Handbook on Mathematics Teaching and Learning*, en el que se recogen las investigaciones más importantes en lengua inglesa hasta ese momento, referidas a creencias y concepciones de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. La exhaustividad y sistematización de estos textos nos ha permitido reducir las revisiones en el área de educación matemática (especialmente en lengua inglesa) a las producciones aparecidas a partir de 1992.

La segunda clase de textos se refiere a literatura relacionada con la formación de profesores, y dentro de ella, con creencias y concepciones de los profesores. Para comenzar esta revisión hemos partido de dos textos generales. En el libro dedicado a describir el paradigma del Pensamiento del Profesor, Marcelo (1987) hace un recorrido por líneas de investigación relacionadas con las creencias y concepciones, a la vez que sitúa estas investigaciones en relación al paradigma. Por otra parte, Pajares (1992) presenta un estado de la cuestión hasta la fecha en el campo de la investigación sobre las creencias y concepciones de los profesores. Estos dos documentos nos han servido como indicadores del estado de la cuestión hasta el año 1992, tal como ocurrió con el texto de Thompson. Por ello hemos emprendido una revisión de las revistas dedicadas principalmente a investigar la formación de profesores, o de los anuarios de investigación en educación, comenzando en el año 1992.

Vamos a presentar los hallazgos más importantes encontrados en esta revisión, atendiendo a las dos etapas marcadas. En primer lugar presentaremos las conclusiones que emiten los artículos que resumen las investigaciones obtenidas hasta 1992, comenzando por los textos pedagógicos generales y continuando con los referidos a la educación matemática. Posteriormente se presentarán las investigaciones más significativas encontradas, referentes a la investigación en formación de profesores y en educación matemática, atendiendo a otros criterios que explicitaremos más adelante.

2.2.1 Recopilaciones de investigaciones sobre creencias y concepciones de los profesores

En el campo de la educación, Pajares (1992) hace una síntesis de investigaciones sobre creencias de los profesores. Para este autor, los profesores en formación están encarcelados, ya que no cambian de situación al pasar del ambiente de preparación al ambiente profesional. Con ello, la realidad de su vida cotidiana puede continuar sin verse afectada por la formación que reciben, y ocurre otro tanto con sus creencias. Como encarcelados, tienen más dificultades para concebir un cambio en la enseñanza. Esta situación particular de no cambiar de contexto al pasar desde la vida discente a la vida profesional docente hace que las creencias sobre la enseñanza arranquen de las experiencias como alumnos cuando los estudiantes están en la universidad.

Pajares resume las conclusiones afianzadas de las investigaciones sobre creencias de los profesores en los 16 puntos de los que destacamos el siguiente:

> *11) El cambio de creencias durante el estado adulto es un fenómeno relativamente raro, la causa más corriente es una conversión desde una autoridad a otra o a un cambio de marco. Los individuos tienden a mantenerse en creencias basadas en conocimiento incompleto o incorrecto, incluso cuando se presenten explicaciones científicamente correctas.* (Pajares, 1992, p. 325) Nos dice este autor que las investigaciones realizadas en el campo de las creencias se han

basado en una gran variedad de métodos. Aboga por el empleo de entrevistas abiertas, reactivos como viñetas y dilemas, así como la observación de la conducta. Coincidiendo con Mumby (1982) sugiere métodos cualitativos de investigación.

Pajares reconoce la dificultad de investigar sobre las creencias de los profesores en formación, ya que es difícil estudiar sobre actuaciones prácticas que los estudiantes para profesor no han asumido aun. Sin embargo, reconoce la importancia de comprender las creencias de los estudiantes para profesor durante los cursos de formación, ya que

> *"los investigadores han demostrado que las creencias influyen en la adquisición e interpretación del conocimiento, la definición y selección de tareas, la interpretación de los contenidos del curso, y la comprensión de la dirección del curso.*
> (..) *La investigación sobre las creencias de los futuros profesores al entrar (en los cursos de formación) puede proporcionar a los formadores de profesores una importante información para ayudarles a determinar los curricula y direcciones de los programas.*(Pajares, pp. 327-329)

Marcelo (1987) presentando la línea del pensamiento del profesor, resume las conclusiones en torno a las investigaciones sobre creencias, principios, constructos personales y conocimiento práctico de los profesores indicando la diversidad de creencias y su influencia en la clase.

Llinares (1989), presenta un estado de la cuestión sobre investigación en creencias de los profesores. Distingue dos grandes campos de interés de las investigaciones: 1) describir las creencias de los profesores en relación a las matemáticas y a la enseñanza y aprendizaje de las mismas, y 2) estudiar la repercusión que tienen las creencias en la formación de profesores. Dentro de la primera línea de investigación diferencia, por sus objetivos, cuatro campos de investigación. El primero (1.1) se ocupa de la relación entre las creencias y la conducta docente, en el que distingue Llinares las investigaciones que se dirigen a profesores en formación de las que tienen como sujetos a los profesores con experiencia, destacando las investigaciones de Cooney (1984b), Thompson (1984), Peterson, Fenema, Carpenter y Loef (1987) y Waxman y Zelman (1987). La línea 1.2 de investigación, dentro del primer campo de interés, se refiere a la forma en que ven los conocimientos matemáticos los profesores sin formación matemática, en el que destacan las investigaciones de Ferrini-Mundi (1985) y Rector y Ferrini-Mundi (1986). La
1.3 se refiere al papel que juegan las concepciones en la resolución de problemas, en investigaciones como las de Cooney (1984a) y Mark (1987). La 1.4 reúne aquellas investigaciones que emplean la Teoría de los Constructos personales de Kelly para describir las creencias, como las de MacQualter y Warren (1983a, 1986a) y Owens (1987, 1988).

El segundo campo está constituido por las investigaciones que se ocupan de las creencias en relación con la formación de profesores de matemáticas. Las investigaciones más importantes destacadas por Llinares son las de Dionne (1985, 1987), Borasi (1985, 1987), Schram. Wilcox, Lappan y Even (1988) y Schram y Wilcox (1988).

Thompson (1992) hace una descripción de la historia de la investigación sobre las creencias de los profesores. Considera que en los años veinte hubo una preocupación por la naturaleza de las creencias del profesor y la influencia que estas creencias tienen en la actuación en clase. Este interés por las creencias decayó con la llegada del asociacionismo y el desprecio relativo a la investigación que no comportara conducta observable. Los psicólogos vuelven a interesarse en las creencias en la década de los sesenta y se amplia el número de investigadores interesados por efectos de la perspectiva cognitiva, en los años setenta. A partir de los ochenta vivimos un resurgimiento de las investigaciones sobre creencias de los profesores, que en el campo de la educación matemática se ocupan principalmente de las creencias sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, con una metodología preferentemente interpretativa y con diseños variados, que comprenden desde estudios etnográficos a inventarios de creencias.

Thompson (1992) agrupa las investigaciones sobre creencias de los profesores en cuatro líneas. La primera se ocupa de las concepciones de los profesores sobre el conocimiento matemático, como las de Ernest (1988), Thompson (1984), Lerman (1983), Copes (1979), Skemp (1978) y Stonewater y Oprea (1988). La segunda se interesa por buscar relaciones entre las concepciones sobre las matemáticas de los profesores y su práctica instruccional, como las investigaciones de Stiemborg y cols. (1985), Thompson (1984), Grossman y cols. (1989), Kesler (1985) y McGalliard (1983). La tercera se dirige a describir las creencias de los profesores sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas entre las que destacan las de Kuhs y Ball (1986), que se refiere a modelos de la enseñanza y aprendizaje, y las de Shirk (1973), Brown (1985) y Cooney (1985), que estudian la relación entre creencias sobre enseñanza-aprendizaje y práctica instruccional. Por último, la cuarta estudia el cambio de concepciones y creencias de los profesores, como las de Collier (1972), Shirk (1973), Meyerson (1978), Schram, Wilcox, Lanier y Lappan (1988), Schram y Wilcox (1988), Lerman (1987), Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef (1989), y Cobb, Wood y Yackel (1990).

Estos tres artículos nos suministran una primera visión de la investigación relativa a las creencias de los profesores. Nuestra investigación se situaría en el campo segundo del análisis de Llinares (1989), *creencias y formación de profesores*, y en la primera línea del primer campo, *descripción de las creencias de los profesores en formación*. En relación al análisis de Thompson, nuestra investigación se sitúa en el campo 4 *cambios en creencias y concepciones de los profesores*, pero debe tener en cuenta los apartados 1 *descripción de las creencias sobre las matemáticas*, y 3.1 *descripción de las concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, modelos de enseñanza*. Los análisis de las creencias sobre el conocimiento matemático y sobre los modelos de enseñanza y aprendizaje nos permiten situar las creencias de los estudiantes para profesor de matemáticas, y con ello tener referentes analíticos para estudiar el cambio de creencias y concepciones.

2.2.2 Investigaciones particulares sobre creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de los estudiantes para profesor

La mayoría de las investigaciones encontradas en nuestra revisión bibliográfica, emplean cuestionarios, entrevistas, observación durante las clases impartidas o recibidas por los estudiantes para profesor o por los profesores en formación permanente, y otras técnicas de registro directo, como inventarios de actitudes o de creencias. Algunas emplean instrumentos indirectos de recogida de datos, basadas en técnicas proyectivas; es el caso de las investigaciones basadas en la Teoría de los Constructos Personales, de Kelly, o en el uso de metáforas, imágenes, caricaturas, etc. que permitan la puesta en común entre investigadores e investigados de los términos empleados.

Hemos destacado también ciertas investigaciones, que aunque no afrontan las *creencias y concepciones de los profesores* entre sus variables a considerar, acaban por informar sobre aspectos que podrían relacionarse de una forma más o menos directa con el constructo que corresponde a nuestra investigación.

Para la presentación de las investigaciones revisadas vamos a adoptar los siguientes criterios. El primer criterio se refiere al objetivo de la investigación. Presentaremos, en primer lugar, aquellas que se plantean como objetivo la descripción de las creencias y concepciones (y de las representaciones, las actitudes, etc) del profesor o del estudiante para profesor. Posteriormente presentaremos las que explícitamente se plantean como problema de investigación el indagar sobre los cambios de las creencias, concepciones, representaciones, etc. de los profesores o estudiantes, provocadas por algún tipo de intervención formadora (en formación inicial o permanente).

El segundo criterio se refiere a los sujetos de la investigación: profesores en activo (formación permanente), y estudiantes para profesor (formación inicial).

Dentro de estas clasificaciones, distinguiremos aquellas investigaciones que se refieren explícitamente a creencias y concepciones de los sujetos, de las que tratan indirectamente, bien en variables próximas o en sus conclusiones o desarrollo, con creencias y concepciones, con lo que el tercer criterio está constituido por *las variables* que interesan *en la investigación*.

El último criterio que emplearemos en la clasificación de las investigaciones se refiere a los instrumentos empleados. Diferenciaremos aquellas investigaciones que emplean cuestionarios, observación, entrevistas, inventarios, etc. de las que emplean, entre otros, instrumentos indirectos, como la citada Rejilla de Kelly, y las metáforas e imágenes que el sujeto se hace sobre el conocimiento matemático, o sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

2.2.2.1. Investigaciones encaminadas a *describir las creencias y concepciones*.

La mayoría de estas investigaciones emplean métodos estándares de recogida de datos: cuestionarios, inventarios, observación, entrevistas, etc. Vamos a distinguir las que se refieren a profesores en activo de las que se refieren a estudiantes para profesor.

Entre las referentes a **formación permanente**, empleando métodos directos, distinguimos las realizadas por el grupo de Cooney, en la Universidad de Georgia (Cooney, 1984a y b; Jones, Henderson y Cooney, 1986; Brown y Cooney, 1985; Wilson, 1994). Estas investigaciones observaron y entrevistaron a los sujetos varias veces a lo largo de un período. Consideran como variable la actividad del profesor (Cooney, 1984a), para inferir las creencias en la acción. Las investigaciones se completan con estudios de casos.

Ligados de alguna manera a Cooney, las investigaciones llevadas a cabo en la Universidad de Lisboa (Ponte, Matos, Guimaraes, Canavarro, 1994; Ponte, 1994b) observan a los profesores y entrevistan tanto a los profesores como a algunos de sus alumnos, en el marco de la aplicación de la reforma de la enseñanza de la matemática en Portugal. En estas investigaciones se completa la descripción de las creencias y concepciones de los profesores con la forma en que los alumnos ven a estos profesores, con lo que se confrontan las visiones de los profesores con el efecto que estos causan en las creencias de los alumnos.

Otro núcleo importante en la investigación directa es la que llevan a cabo Peterson, Fennema y col. de las Universidades de Wisconsin, Michigan y Madison. Estos autores han generado un cuestionario sobre creencias de los profesores en relación a problemas aditivos y sustractivos, con lo que particularizan las concepciones y creencias a dominios matemáticos precisos. (Peterson, Fennema, Carpenter y Loef, 1987; Carpenter, Fennema, Peterson, Chiang y Loef, 1989).

Una investigación especialmente significativa, por la relevancia de la investigadora en el dominio de las creencias de los profesores sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje, es la de Thompson (1984), que analiza las creencias de tres profesores de matemáticas de enseñanza secundaria mediante estudios de casos. Utiliza dos constructos para organizar las conclusiones: el grado de integración de las creencias entre si y el grado en que se relacionan con acciones.

Otras investigaciones directamente relacionadas con las creencias de los profesores en ejercicio sobre las matemáticas son las siguientes: Waxman y Zelman (1987) estudian las diferencias entre los profesores expertos y principiantes; Ferrini-Mundy (1986) y Rector y Ferrini-Mundy (1986) analizan las creencias de profesores sin formación matemática. Furinghetti (1994) emplea un cuestionario para detectar la forma en que contemplan las matemáticas, el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, 100 profesores italianos en ejercicio, para compararlas con las de los profesores de otros países. El análisis de las respuestas muestra cómo las creencias declaradas que surgen de las cuestiones cerradas del cuestionario presentan incongruencias con las inferidas a partir de las respuestas abiertas.

En la Universidad de Huelva, Carrillo y Contreras (1993, 1994, y Carrillo, 1996) han llevado a cabo una investigación para detectar las creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza, de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria. Para ello han construido un cuestionario tomando como punto de referencia la investigación llevada a cabo en Francia, a principios de siglo (Enseignement Mathématique, 1902 y ss). La respuesta de una muestra amplia de profesores les permitió obtener categorías para situar las creencias de los profesores sobre el conocimiento matemático y sobre la educación matemática. La investigación se continua con seis estudios de casos.

En la Universidad de Granada, Rico y cols. (1995) han llevado a cabo una investigación tendente a describir los conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre la evaluación. Para ello comienzan por elaborar un cuestionario de 11 preguntas abiertas, clasificadas en tres apartados: el primero se refiere a la evaluación en general (5 preguntas), el segundo a la evaluación en matemáticas (preguntas 6 a 10), y el tercero demanda al profesor aspectos no considerados en el cuestionario que le parezcan importantes en relación a la evaluación. Han pasado este cuestionario (EMCE) a 35 profesores de matemáticas de enseñanza secundaria y universidad en ejercicio, y a 24 estudiantes para profesor de matemáticas, alumnos de 5º curso de la licenciatura de matemáticas. La categorización de las respuestas les lleva a definir 41 variables. Para sistematizar estas variables las someten a un primer análisis factorial del que surgen 15 factores, y a estos les aplican un análisis factorial de segundo orden, gracias al cual reducen a 7. Estos siete factores se refieren al concepto y modo de evaluar (3 factores), y a los agentes del proceso. Las 41 categorías le permiten elaborar una nueva versión de la Encuesta sobre Marco Conceptual para la Evaluación (EMCE-2) para valorar las opiniones y conceptos sobre evaluación de los profesores de matemáticas. El estudio de las respuestas dadas a la primera versión del cuestionario les lleva a establecer agrupaciones de creencias que aparecen regularmente en el mismo sujeto.

En el ámbito francés de la investigación en educación matemática nos han interesado las investigaciones que se refieren a *representaciones sobre las matemáticas y su enseñanza*. (Robert y Robinet, 1989; Colomb, Guillaume y Charnay, 1987). Los primeros comenzaron por revisar las revistas del AMEP, para estudiar las alusiones que se hacían al conocimiento matemático, y a la enseñanza y el aprendizaje matemático. Posteriormente elaboran un cuestionario que pasan a 26 enseñantes de matemáticas de secundaria y universidad. Colomb, Guillaume y Charnay emplearon una encuesta para detectar las representaciones de los profesores. En ambos casos toman en consideración aspectos que están relacionados de una manera indirecta con las creencias y concepciones de los profesores.

Borasi (1986) emplea los errores que los alumnos cometen en las tareas matemáticas como reactivos que permiten la explicitación de concepciones sobre las matemáticas. Stonewater y Oprea (1988, Oprea y Stonewater, 1987) se interesan en el desarrollo cognitivo de tres profesores de secundaria, y lo relacionan con las creencias acerca de las matemáticas. Para ello emplean el esquema de Perry, y eligen a los profesores de manera que se encuentren en niveles distintos. El uso de entrevistas les lleva a detectar diferencias en las creencias sobre la naturaleza de la verdad matemática y el papel de la autoridad, apareciendo una alta consistencia con los niveles del esquema de Perry en el que habían situado a los profesores. Pese a esta consistencia, los autores reconocen que esta clasificación no debe ser utilizada como predictor de las creencias de los profesores.

Blanco (1991) compara las estrategias de enseñanza y de resolución de problemas de dos estudiantes para profesor y dos profesores de primaria en ejercicio, y describe estas diferencias en términos de concepciones sobre la enseñanza de las matemáticas.

Como reconocen Stonewater y Oprea (1988), las investigaciones que se limitan a detectar creencias parecen destinadas a encasillar a los profesores en estándares de creencias y concepciones, sin avanzar demasiado en el empleo de estas creencias. Estas investigaciones se plantean la necesidad de tomar en consideración el máximo de variables posibles. Los instrumentos empleados se encuadran en métodos cualitativos basados en entrevistas y observaciones durante la práctica docente y discente, o métodos cuantitativos centrados en cuestionarios, inventarios de creencias y clasificaciones de creencias y concepciones.

Las investigaciones referidas a **formación inicial** de profesores se sitúan en cursos de formación de estos **estudiantes para profesor**, empleando, la mayoría de ellas, una combinación de métodos directos e indirectos.

Los métodos directos son la observación de su actuación en el curso de formación y en el practicum, análisis de los trabajos elaborados en estos cursos, análisis de los diarios, test, entrevistas (Crawford, 1992; Santos y Lambdin, 1992).

En la Universidad de Sevilla, Llinares y Sánchez han llevado a cabo diversas investigaciones para detectar las creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, de estudiantes para profesor de enseñanza primaria, o de estudiantes de primeros cursos de magisterio. Llinares (1989) estudia las creencias de dos estudiantes para profesor sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza, sobre la preparación de clases, la clase de matemáticas (como ven la relación profesor-alumno, valoración del aprendizaje), y la formación recibida por los estudiantes (formación como profesores y formación matemática). Para ello observó a los dos estudiantes durante las prácticas de enseñanza y las entrevistó antes, durante y después de las prácticas. El análisis de las entrevistas, junto con los análisis de los diarios de los estudiantes y las observaciones realizadas durante las prácticas le permitieron elaborar mapas conceptuales que caracterizan las creencias de los dos estudiantes. En estos mapas se muestra que una estudiante, Mª Carmen, adopta un punto de vista heurístico, mientras que Nieves adopta un planteamiento algorítmico, desde una idea núcleo común basada en la búsqueda de la utilidad de las matemáticas. Esta coincidencia en la idea núcleo de las dos estudiantes lleva al autor a reclamar un análisis más profundo de los procesos de interpretación, ya que aparentemente las estudiantes se sitúan en posiciones muy diferentes. Concluye el autor confirmando que las creencias epistemológicas influyen en la enseñanza. Llinares aboga por tomar en cuenta las condiciones en las que se realiza la investigación, dado que observa que las concepciones sobre matemáticas se condicionan por el contexto y las concepciones sobre la educación se relacionan con las materias académicas. Metodológicamente, Llinares aboga por un proceso interpretativo para determinar las creencias epistemológicas, y apoya como procedimiento interesante el empleo de los dilemas que percibe el profesor durante las situaciones de enseñanza.

Sánchez se ha ocupado preferentemente de la socialización de los profesores. En colaboración con Llinares ha llevado a cabo nuevas investigaciones en las que emplea métodos interpretativos, tal como abogaba Llinares en su tesis. Así en Sánchez y Llinares (1990) se emplearon rejillas de Kelly, para detectar las concepciones de los estudiantes para profesor de primaria sobre las matemáticas y su enseñanza, durante la fase de prácticas de enseñanza. Posteriormente llevaron a cabo dos estudios de casos, mediante entrevistas. Las investigaciones posteriores de este grupo (Escudero, García, Llinares, Sánchez, 1993; Llinares, Sánchez, García, Escudero, 1995) aportan un mayor apoyo cuantitativo, mediante el empleo de un cuestionario, elaborado por los investigadores, para detectar las creencias de 159 estudiantes de 2º curso de magisterio, sobre la naturaleza de las matemáticas escolares, la enseñanza de las matemáticas, el aprendizaje de las matemáticas y el papel del profesor en el aula. El análisis factorial de las respuestas al cuestionario permite obtener 5 factores, relacionados con el papel del profesor, la visión de las matemáticas escolares, la actuación del profesor, la disciplina en la clase y el papel de las demostraciones formales en clase de matemáticas. Concluyen los autores indicando que las creencias no están fuertemente estructuradas, guardando poca relación entre las creencias sobre las matemáticas y las creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje (débil estructura cuasilógica, en términos de Green, 1971), ni existe un posicionamiento claro de los estudiantes (débil fuerza psicológica, Green, 1971). Señalan las limitaciones del cuestionario, que no permite la negociación de significados de los términos. Ello les hace abogar por métodos indirectos para describir las creencias en un doble sentido: por una parte, para superar problemas semánticos, se plantean emplear informes del propio sujeto, entrevistas sobre la práctica de enseñar; por otra, para ahondar en las creencias que fundamentan la práctica, se deberían analizar situaciones prácticas, lo que pondría en evidencia el peso de las variables contextuales.

Vamos a destacar algunas de las investigaciones que emplean métodos indirectos. MacQualter y Warren (1983) estudian las concepciones de los estudiantes sobre le papel del profesor, y la postura ante la enseñanza de las matemáticas. Para ello emplea rejillas de Kelly con 30 constructos sobre la enseñanza de las matemáticas y 8 sobre el profesor. También Owens (1987) emplea la rejilla de Kelly para estudiar la naturaleza e importancia relativa que, para estudiantes para profesor, tienen constructos como la concepción sobre la matemática, la visión de su papel como matemático, el curriculum matemático escolar y el aprendizaje de las matemáticas. Las rejillas se completan con entrevistas en las que se emplean otros reactivos, como viñetas, y en registros durante las sesiones dedicadas a resolver problemas.

Gattuso (1992) y Gattuso y Mailloux (1993) emplean el inventario de concepciones de Gattuso, en el que aparecen 50 formas explícitas de considerar la enseñanza de las matemáticas. En la investigación del 1992, Gattuso realiza una investigación de sí mismo como profesora, mediante el registro, en audio y vídeo, de sus clases y un análisis de su diario. En Gattuso y Mailloux se comparan las concepciones declaradas sobre la enseñanza de estudiantes para profesor de primaria y secundaria.

Moreira (1994) estudia la forma de incluir un curso sobre epistemología de las matemáticas en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria. Para ello plantea un proceso de investigación-acción, con 48 estudiantes para profesor en Oporto. Como veremos más adelante, esta investigadora introduce métodos contextualizadores en las investigaciones y en los cursos de formación.

Sue Johnston (1992) estudia la forma en que 25 estudiantes para profesor de primaria, de diferentes especialidades, piensan en si mismos como profesores, y la relación que existe entre este autoconcepto y la práctica. Para ello emplea *imágenes* de los estudiantes, definidas como organizadores personales de los conceptos en el conocimiento práctico, en el que se engloba la experiencia personal y encuentra expresión la práctica. Lleva a cabo dos estudios de casos a partir de entrevistas sobre las imágenes empleadas por los estudiantes.

2.2.2.2 Investigaciones sobre *cambios en las creencias* con motivo de cursos de formación

La revisión bibliográfica nos ha llevado a catorce investigaciones que nos han parecido especialmente significativas. Cinco de ellas se refieren a formación permanente y nueve a formación inicial.

En la Universidad de Londres, el grupo dirigido por Noss ha llevado a cabo investigaciones que tienden a **situar** las creencias de los profesores, esto es, referirlas a contextos específicos, de modo explícito. Para ello han recurrido a un entorno informático, que permite seguir el curso de los razonamientos realizados por los profesores durante su formación permanente. Hoyles (1992) emplea *caricaturas* para sintetizar las visiones, actitudes y prácticas de diversos sujetos de los que ha realizado estudios de casos, lo que le permite identificar la posición de 5 profesores en formación permanente, cuando se emplea el ordenador. Con estas caricaturas la autora pretende hacer transmisibles los estudios de casos, mediante el empleo de imágenes que nos hagan significativas las posturas de los profesores investigados. Desde la perspectiva etnográfica, Hoyles llega a afirmar que el formador no debe intentar que las creencias de los estudiantes cambien hacia unas creencias «correctas», sino que debe buscar un modo de aclarar las creencias, de reflejar las creencias en la práctica y en la misma innovación, ya que todas las creencias son situadas.

Moreira y Noss (1995), también en este grupo, se ocupan de las actitudes de los profesores ante las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas, y de la forma en que 10 profesores portugueses de enseñanza primaria afrontan las actividades de un curso basado en LOGO. Mediante entrevistas, cuestionarios de actitudes y análisis de los registros de las interacciones de los participantes con el programa, tratan de describir las actitudes, la relación entre las actitudes y las actividades, e investigar qué clase de influencia tienen las actitudes. Se describen dos estudios de casos. Como a Hoyles, el entorno informático les permite contextualizar las actitudes. Con ello se sitúan en la visión etnográfica que considera las creencias situadas, tanto en un contexto educativo, como en el contexto temporal. Así, los autores parten de que las actitudes sólo pueden ser entendidas como la historia de las actitudes, y el cambio sólo puede ser entendido como la historia del cambio. En sus conclusiones indican que ningún caso muestra un sistema integrado de creencias (en el sentido que utilizaba Thompson, 1984), con los dominios considerados (matemáticas, enseñanza de las matemáticas, computadores, etc). Posteriormente interpretan los datos a partir de la dialéctica entre creencias y práctica, tal como propone Thompson (1992). Abogan por las creencias situadas de Hoyles (1992), aunque esta influencia del contexto podría ser menos importante en un curso más largo. Por otra parte el ser nuevo el entorno LOGO para los profesores investigados, puede interactuar con la actitud radical que alumnos, e incluso profesores, adoptan respecto a las tecnologías informáticas innovadoras.

Marilyn Johnston, (1994), en la Universidad de Ohio, estudia las características personales e instituticionales y los contextos presentes e históricos de tres profesores canadienses de clases elementales, durante un curso de formación permanente de dos años. La autora se sitúa en el paradigma del profesor reflexivo, y se pregunta ¿Cómo se hacen más reflexivos los profesores? ¿Cómo interactúa el aumento en la reflexión de los profesores y los cambios en la creencias y las prácticas de enseñanza de los profesores?. Mediante métodos directos (entrevistas, entrevistas de estimulación del recuerdo, observación de clases, diarios y trabajos de curso), organiza la información en tres secciones: las metáforas con las que el profesor caracteriza la enseñanza (preguntando directamente en la entrevista inicial y final), el proceso de llegar a ser más reflexivo y la influencia de la reflexión en el cambio. El estudio le lleva a decir que el curso ha hecho que los tres profesores analizados se hayan hecho más reflexivos, aunque hay diferencias significativas entre ellos. Según la autora, los estudios de casos muestran cómo el conjunto de las experiencias individuales, las creencias y la influencia de la personalidad, influyen en el programa de estudio.

Dionne (1987) utilizó un diseño con pre-test y post-test, con un grupo de control. En su investigación trató de estudiar el efecto de un curso de formación permanente. Mediante un cuestionario y un test seleccionó dos grupos equivalentes de seis profesores. Con el grupo experimental empleó un proceso de formación basado en analizar los conceptos matemáticos, dentro del marco de un modelo de comprensión de estos conceptos. Durante el tratamiento se aplicó el test de corrección que él mismo había elaborado en una investigación anterior. Además empleó un cuestionario, en el que se interrogaba sobre la forma en que percibían la matemática escolar, y largas entrevistas. Las respuestas al test inicial y al cuestionario le permitieron establecer tres categorías en la forma de percibir las matemáticas escolares por los profesores: tradicional, formalista y constructivista. El análisis de los resultados llevó a ver que de los profesores del grupo de control, 5 se sentían muy implicados con la forma en que los alumnos razonan, mostraban percepciones constructivistas y no cambiaban mucho entre el pre y el post. Las creencias de los profesores del grupo experimental, sin embargo, cambiaron de manera más notable y coherente. Estos cambios se manifiestan en la forma en que valoraron la intuición de los alumnos durante el aprendizaje, que coincidía con apoyar un aprendizaje por descubrimiento. Los profesores del grupo experimental manifestaron que el curso fue la oportunidad de aprender algo nuevo y estructurar sus creencias. En las conclusiones, Dione destaca la coherencia entre los resultados obtenidos pese a emplear instrumentos diversos. También resalta la importancia de conjugar, en los cursos de formación de profesores, los conceptos matemáticos con sus respectivas epistemología y psicopedagogía.

Otro estudio realizado en los Estados Unidos, intentó analizar la influencia del proyecto de formación de profesores, Ford Foundation Urban Mathematics Collaborative Project (UMC), basado en la colaboración entre los profesores asistentes al curso. Middleton y Romberg (1993) describen esta investigación que alcanza a 490 profesores en activo. Comienzan por establecer seis concepciones de las matemáticas: como un proceso en el que se aplican las ideas abstractas a la resolución de problemas del mundo real; como un lenguaje, empleado para representar y comunicar ideas; como una colección de conceptos y destrezas; como un pensamiento científico, ordenado lógicamente, usado para desarrollar la comprensión como hechos, destrezas, reglas y conceptos aprendidos, formando una secuencia, y aplicables en trabajos y estudios futuros y como sistema lógico interconectado, dinámico y cambiante, formado por pensamiento sobre acciones y experiencias. Estas concepciones van a servir de referentes y ayudan en la elaboración de un cuestionario tipo Lickert, que se compone de cinco categorías de preguntas: a) naturaleza de las matemáticas, b) enseñanza de las matemáticas, c) cambios recomendados en el curriculum matemático, d) educación matemática, e) concepción de la escolarización. Para confirmar los resultados obtenidos en la aplicación del cuestionario, pidieron a un grupo de profesores que participaban en el UMC que realizaran un *Diario de Relaciones Profesionales*, que tenía dos partes: la primera descriptiva, relativa a como combinan su forma de ver las matemáticas y las recomendaciones para cambiar la enseñanza, y la segunda valorativa, en la que se demandaba su opinión sobre la práctica individual y la influencia que para su práctica docente estaba teniendo la colaboración con otros compañeros durante el curso UMC.

De la aplicación del cuestionario extrajeron cuatro tipos de profesores que llaman profesores tradicionales, profesores reformados, profesores no discriminadores y profesores en transición. Estudiaron también la influencia que sobre estas concepciones tiene el haber participado en el UMC, para lo que dividieron a los profesores en tres categorías: los que participaron frecuentemente, los que lo hicieron ocasionalmente y los que no participaron. Observaron que los que participaron mas asiduamente tenían más disposición a introducir nuevos métodos y tecnologías en la enseñanza, así como a considerar destrezas no tradicionales (estimación, resolución de problemas, etc.). También estudiaron la importancia del factor *lugar* en el que se encuentran los profesores, y observaron que, por ejemplo, diferencias en disponibilidad de material, repercutían en su actitud ante la introducción de estos materiales en el aula, pero sin embargo, en todos los lugares aparecieron los cuatro grupos encontrados en el total de la población. Concluyen los autores resaltando la importancia de la actuación colaboradora de los profesores en los cursos de formación.

Entre las investigaciones referidas a **formación inicial** de profesores, destacamos las llevadas a cabo por Schram, Wilcox, Lanier, Lappan y Even, (Schram, Wilcox, Lanier, Lappan y Even, 1988; Schram y Wilcox, 1988; Wilcox, Schram, Lappan y Lanier, 1991). La primera investigación tuvo lugar durante diez semanas del primer curso de un programa de preparación de profesores elementales de matemáticas. El curso se programó a base de situaciones problema, en las que se planteaba la situación y se pedía, a todos los participantes, que la resolvieran trabajando en grupo. Se tomaron notas durante estas diez semanas, se entrevistaron a seis estudiantes, y se pasó un cuestionario al comienzo y al final del curso. Las autoras concluyen que ha habido variación en las concepciones que tienen los estudiantes sobre las matemáticas, y en cómo conciben el aprendizaje de las matemáticas. Argumentan este cambio en las siguientes observaciones: 1) Los estudiantes que hablaban de las matemáticas "básicas", en la que hacer matemáticas es resolver ecuaciones, pasan a hablar de patrones matemáticos, y dicen haber comprendido ideas que empleaban antes sin reflexionar sobre ellas. 2) Los estudiantes esperaban clases típicas, rutinarias (basadas en lectura y demostraciones), pasaron a cuestionar la rutina típica. 3) Los estudiantes que veían los grupos de trabajo como un puzle, en el que existen estrategias diferentes, y podían perder el tiempo, o aprovecharse unos de los avances de los otros, pasaron a aceptar la responsabilidad del aprendizaje de los otros, y fue creciendo la creencia en que el trabajo de grupo debe ser una práctica común en matemáticas. 4) Se valoró positivamente la oportunidad que daba la realización del trabajo en grupos para hablar sobre matemáticas. Para las autoras los factores que influyeron en estos avances fueron: 1) El marco de organización del curso, con énfasis en las relaciones entre las ideas matemáticas y las representaciones múltiples de los conceptos matemáticos; 2) La introducción de nuevos tópicos, basados en las situaciones problema; 3) La riqueza de las matemáticas implicadas en las situaciones problema; 4) El entorno cooperativo de aprendizaje, para darle sentido a las matemáticas e inventar estrategias para resolver nuevos problemas y construir modelos para comprender los conceptos matemáticos. Sin embargo, consideran que no ha tenido influencia sobre la forma en que conciben el curriculum de la matemática elemental.

Una parte de este trabajo es reflejado en Schram y Wilcox (1988) en el que las autoras se centran en como responden las concepciones de los estudiantes a dos cuestiones: ¿Qué significa saber matemáticas?, y ¿Cómo aprender matemáticas?. Para interpretar los resultados establecen tres niveles que se proyectan en la forma de responder a estas preguntas. Cada nivel se diferencia de los otros en la forma en que responden a estas preguntas y en el lugar en que sitúan la autoridad los estudiantes que se encuentran en ese nivel, con lo que recuerda la visión derivada del esquema de Perry.

Empleando grabaciones de las clases en vídeo, cuestionarios y entrevistas grabadas, así como análisis de los escritos producidos durante el curso y de los exámenes, estudian en profundidad a 5 de los sujetos. De ellos, en el artículo (Schran y Wilcox, 1988) se presentan dos: Allison y Denisse. Aparentemente, basándose sólo en las opiniones, ambos estudiantes empiezan el curso en una posición intermedia entre los niveles 1 y 2 y acaban en el 3. Pero en el análisis de los restantes trabajos se muestra que la variación es diferente. Allison pasa de concebir los conocimientos matemáticos como compartamentalizados a integrarlos y considerar que el empleo de problemas en la enseñanza puede tener un fin amplio y permitir que los alumnos conecten sus ideas. Sin embargo Denisse apenas cambia su idea de cómo se aprende, y su mayor satisfacción es haber aprendido muchas formas de enseñar el mismo concepto. Los autores concluyen proponiendo ampliar el estudio mediante el análisis de la conducta docente, de los estudiantes investigados, durante los primeros años de docencia, y detectar la repercusión que esta conducta tendrá sobre las creencias de los estudiantes.

En Wilcox y cols. (1991) las autoras parten de dos tipos de supuestos. Los primeros se refieren a que el aprendizaje en comunidad de los futuros profesores permite cambiar las creencias de los estudiantes para profesor de enseñanza elemental de matemáticas. Los segundos, parten del supuesto de que no basta con la transmisión hablada, sino que la clave está en construir significado por los propios estudiantes, favorecer la duda. Estos dos supuestos se concretan en las siguientes hipótesis: 1) La selección de contenidos matemáticos debe hacerse según ciertos criterios. 2) El contenido y las oportunidades de aprendizaje deben requerir que los estudiantes comuniquen su comprensión de muchas formas: implicándose en un discurso matemático entre ellos mismos y con los formadores, usando un lenguaje natural y simbólico, escribiendo sobre sus reflexiones en enseñanza y aprendizaje matemático, y usando múltiples representaciones. 3) La comunidad de aprendices se contempla como una cohorte estable de estudiantes que se implican en un estudio y experiencias comunes durante un período de dos años. Aunque las dimensiones que se contemplan se refieren al empleo de un proceso colaborativo de enseñanza y aprendizaje y a las diferentes formas de resolver problemas, también se contemplan variables interpretativas como donde sitúan los estudiantes la responsabilidad para comprender. La investigación tiene lugar en la Universidad de Michigan, con 23 estudiantes para profesor, implicados en el *Elementary Mathematics Project*, del programa de aprendizaje académico de esta universidad. Mediante la observación en clase, cuestionarios, análisis de trabajos de los estudiantes, entrevistas y observaciones de las enseñanzas durante su actuación en el practicum del programa de formación y durante el primer año de experiencia, se realizaron cuatro estudios de casos. Los autores concluyen diciendo:

> *Nuestro análisis sugiere que la intervención produce cambios significativos en las creencias de los estudiantes sobre ellos mismos como aprendices de matemáticas, sobre lo que significa conocer matemática y sobre la forma de aprender matemáticas. Creemos que nuestros datos apoyan la afirmación de que crear una comunidad de aprendices implicados en hacer matemáticas puede tener poderosas influencias que aumenten la autoconfianza de los*

futuros profesores para resolver problemas. También creemos que crear una comunidad de estudiantes requiere tiempo y exige crear un entorno total en el que los estudiantes tomen riesgos y hagan conjeturas, ofrezcan argumentos para apoyar sus afirmaciones y asuman la autoridad para decidir sobre la coherencia entre las representaciones matemáticas y las soluciones. (pp. 38)

Consideran que cuando los estudiantes toman conciencia de la validez del trabajo en grupo van ganando confianza en su propia autoridad, con lo que, de manera indirecta, influyen en sus creencias sobre las matemáticas. Sin embargo entienden que no está suficientemente demostrado que el trabajar en grupos pequeños durante los cursos de formación favorezca el que luego, en sus clases, promuevan el que sus alumnos trabajen en grupos.

Swinson y Shield (1994) también se ocupan del trabajo en grupo, como reactivo para cambiar las creencias sobre las matemáticas de los estudiantes para profesor, durante un curso de formación. Los sujetos investigados son estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria, aunque su formación no es fundamentalmente matemática, sino que las matemáticas constituyen su segunda disciplina. El curso se planteó como objetivos el que los estudiantes reflexionaran y describieran la comprensión conceptual de las matemáticas que ellos quieren enseñar. Para ello se trabajó en pequeños grupos, empleando materiales para ayudarse en la construcción activa de la comprensión conceptual, discutiendo y reflexionando sobre cómo los alumnos aprenden matemáticas. Con ello se pretendía que los estudiantes reflexionaran sobre sus experiencias para ganar conciencia de su comprensión de las dificultades experimentadas con alumnos aprendiendo matemáticas. En la investigación y durante el curso se pasó un cuestionario, desarrollado a partir del de Schoenfeld (1989), y Pehkonen (1992), compuesto por 64 cuestiones cerradas y 3 problemas para resolver. Una semana después se seleccionaron tres estudiantes (Jan, Ann e Ida). Se analizó la forma en que resolvían los problemas, y los trabajos realizados durante el curso, y se volvió a pasar el cuestionario. Los estudios de casos se basaron en entrevistas sobre los problemas, sobre sus experiencias escolares, los procesos metacognitivos y sus resoluciones de los dos problemas. Otros datos se obtuvieron de los diarios, trabajos escritos, observación y discusión de la práctica de enseñanza y observación durante el trabajo. Aunque, para los autores, un semestre es poco tiempo para apreciar cambios importantes, entre sus conclusiones indican que los tres estudiantes empezaron su programa con la concepción de que el aprendizaje matemático no necesita ayuda de materiales ni discusiones, y considerando que una buena forma de enseñar consiste en que el profesor demuestre, mediante métodos expositivos, los teoremas y propiedades. Sin embargo, An y Jan pasaron a apreciar la importancia del trabajo en grupo con materiales para el aprendizaje de las matemáticas. También Ida se planteó emplear materiales y juegos en su enseñanza. Sin embargo, los trabajos durante el curso mostraron un pobre desarrollo de los conceptos matemáticos.

Sánchez y Llinares (1988) estudiaron el efecto que tienen las prácticas de enseñanza (practicum), durante la formación de ocho estudiantes de segundo curso de la Escuela de Magisterio, sobre las creencias de estos estudiantes en relación a las matemáticas. Para ello emplearon la rejilla de Kelly, entrevistas para discutir los elementos que forman la rejilla e hicieron que los estudiantes cumplimentaran la rejilla en cuatro ocasiones durante el curso, especialmente antes y después de las prácticas. Posteriormente hubo una entrevista final con cinco de los participantes. Concluyen los autores reconociendo que cambiaron las creencias hacia las matemáticas de algunos estudiantes, mientras que en otros se confirmaban y reforzaban como consecuencia de las prácticas.

También en el terreno de la formación inicial de profesores de primaria, Bright y Vacc (1994) estudiaron el efecto de aplicar el programa de formación de Carpenter y cols. (1989), llamado "Investigación guiada cognitivamente" (CGI) sobre las creencias y concepciones de los estudiantes. Este programa, que fue diseñado para formación permanente, parte de la base de para que el profesor pueda tomar decisiones es fundamental que tenga conocimientos de didáctica de las matemáticas en relación a los alumnos. Durante el curso, los estudiantes emplean resultados de investigaciones sobre el pensamiento matemático de los alumnos para ayudarlos en el aprendizaje de conceptos específicos. Se trata de un conjunto de procedimientos no prescriptivos, en los que se ayuda al profesor a establecer su propio estilo, adquirir un conocimiento de base, y a conformar sus creencias. Los alumnos que asisten a las prácticas de enseñanza de estos cursos dedican las clases a resolver problemas, buscando soluciones personales, y debatiendo sobre las estrategias empleadas. En la investigación, Bright y Vacc emplearon 34 sujetos de un grupo experimental, que siguieron el CGI durante uno de los semestres, mientras otros 34 estudiantes seguían el curso de formación habitual. Durante los dos años que duró el curso, aplicaron en cuatro ocasiones un inventario de creencias, dos de ellas antes y después del semestre CGI, y las otras dos a comienzos y final del curso anterior. El inventario consta de cuatro partes: papel del aprendiz, relación entre destrezas y comprensión, secuencia de tópicos y papel del profesor, mediante una escala tipo Lickert, en la que los valores altos se aproximan al constructivismo. Con esta escala realizaron un estudio cualitativo del grupo. Además, entrevistaron a una muestra de estudiantes, preguntándoles sobre qué papel tiene el profesor en la educación matemática, dando lugar a un estudio cualitativo de los sujetos. No aparecieron diferencias en los estudios cuantitativos entre los grupos. Para completar el estudio cualitativo se realizaron doce estudios de casos de sujetos que habían seguido el curso CGI, y se observaron diferencias de grado en la forma de poner en práctica el modelo CGI en sus propias clases, y en la manera en que cambian sus creencias a lo largo del programa de estudios. En el artículo se presentan los casos de Cindy y Marsha.

En el estudio de los grupos, los investigadores llegan a la conclusión de que gracias a la formación, ambos grupos de estudiantes tienden a sostener creencias con orientación más constructivista, lo que les lleva a decir que estos cursos hacen que los estudiantes aprecien la existencia de otros métodos de enseñanza además del tradicional dictado por el profesor. Han encontrado una variación más alta entre grupos en el período que se aplicó el modelo de formación CGI, lo que les hace inferir que el método de los cursos influye en la forma en que los estudiantes consideran la enseñanza y el aprendizaje matemático. Este cambio y la diferencia de comportamiento y representación, se vio confirmado en los primeros años de actuación docente de los estudiantes, lo que les lleva a considerar el CGI como un catalizador del cambio continuo.

En los estudios de caso los autores aprecian que los estudiantes pueden desarrollar un conocimiento frágil que produce respuestas válidas en algunos contextos, pero no son capaces de transferir a otros contextos. Esto parece explicar las discrepancias aparecidas entre los resultados obtenidos con el inventario y lo observado en los estudios de caso. Por otra parte, las creencias derivadas del curso CGI parecen proyectarse en la forma en que los estudiantes llevan a cabo sus clases, pero se necesitan muchas reflexiones sobre creencias y conducta para hacer que estas creencias influyan en el desarrollo profesional, con lo que los investigadores abogan por introducir en el programa de formación reflexiones sobre los acontecimientos. Concluyen Bright y Vacc indicando que es posible cambiar las concepciones y creencias durante un curso de dos años, aunque no se puede asegurar si estos cambios son superficiales o profundos. Para los autores hay evidencia de que los estudiantes para profesor llegan a considerar el programa basado en la Instrucción guiada cognitivamente (CGI) como un marco constructivista para su enseñanza.

A la vista de que las investigaciones emplean en general métodos cuantitativos y cualitativos para detectar las creencias y concepciones, Foss y Kleinsasser (1994) trataron de comparar los datos obtenidos por uno y otro procedimiento. Para ello afrontan una investigación sobre la evolución de las creencias y concepciones de los profesores durante un curso de formación inicial de profesores de primaria. La investigación encierra pues un aspecto cuantitativo, que consiste en medir las creencias de los estudiantes, mediante un inventario de creencias. Por otra parte estudian la ansiedad de los estudiantes ante situaciones relacionadas con la educación matemática, mediante una escala de ansiedad (MARS), compuesta por 98 items tipo lickert, para calificar el grado de ansiedad. El MARS es utilizado como test, antes y después del curso de formación, con lo que es el principal instrumento para la investigación cuantitativa. Estos instrumentos le permiten comparar la ansiedad de los profesores de matemáticas y sus creencias y prácticas durante un curso semestral de formación de profesores. Finalmente, la realización de entrevistas sobre las concepciones matemáticas, y concepciones sobre enseñanza y aprendizaje matemático, de 22 estudiantes, y la observación de estos estudiantes durante sus prácticas de enseñanza, les permiten realizar una investigación cualitativa. En la investigación cuantitativa observan como el MARS refleja que el curso ha provocado una reducción significativa del nivel de ansiedad; que los estudiantes conciben las matemáticas como centradas en aplicaciones computacionales para resolver actividades cotidianas, y esta forma de concebirlas permanece constante a lo largo del curso; la buena enseñanza de las matemáticas para estos estudiantes se basa en desarrollar tanto una ética como atributos como profesores que sean apropiados para la clase; los métodos de enseñanza que proponían se reducían a planificar juegos, de una manera pobre, a memorizar o a la práctica aritmética. El contexto social del curso no pareció afectar las creencias o prácticas manifestadas por los estudiantes. De hecho, existió una relación simbiótica entre las concepciones de los estudiantes para profesor y su práctica instruccional.

Posteriormente, Foss y Kleinsasser estudiaron los efectos de la triangulación, mediante el análisis de la convergencia entre resultados obtenidos por métodos cuantitativos y cualitativos. Detectaron inconsistencias entre el apoyo mostrado por los estudiantes a los métodos de enseñanza empleados durante el curso y cómo los aplican en su enseñanza. El estudio cuantitativo muestra que más de la mitad de los estudiantes pensaba que la matemática es el estudio de relaciones y métodos de razonamiento, mientras que en las entrevistas, sólo un estudiante definió la matemática como un proceso de razonamiento. Parece que los estudiantes se encuentran más relajados (con menor grado de ansiedad) al considerar la enseñanza de manera simple, completada con la realización de juegos y actividades, que realizando una enseñanza más problematizadora. Para los autores la triangulación de datos proporciona un retrato más completo de los efectos del curso de formación.

En otras investigaciones aparecen las creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje de manera implícita, o sin figurar en los fines de la investigación. Así Bullough y Stokes (1994), se basaron en las historia de vida, los escritos sobre metáforas y entrevistas con 22 estudiantes para profesor de secundaria de diversas áreas, en la universidad de Utah. Sus fines eran ilustrar el empleo de las metáforas como un medio para la exploración de los profesores por ellos mismos, identificar la fuerza y debilidad de los modelos de enseñanza de estos estudiantes, así como explorar la potencia de emplear las metáforas del estudiante en los cursos de formación de profesores. Para estos investigadores, la identificación y exploración de metáforas personales sobre la enseñanza es un medio para ayudar al estudiante a reflexionar sobre él mismo como profesor. Pero además, la formación de profesores puede ayudar a los estudiantes a desarrollar metáforas creativas que lo capaciten para pensar sobre su propia enseñanza. Con ello, el proceso de formar en el estudiante la identidad de profesor encierra una negociación de significados entre personas y contextos.

Relich y Way (1994), estudiaron la actitud hacia las matemáticas de 564 estudiantes de educación de la universidad de Sidney, empleando la escala de actitudes matemáticas de

Fenema y Sherman (1976), una escala paralela de actitudes hacia la enseñanza de las matemáticas y el cuestionario de enseñanza de las matemáticas de March (1988). Los investigadores observan que la actitud de los estudiantes hacia la enseñanza de las matemáticas progresa con la realización del curso, pero su autoconcepto en matemáticas permanece sin cambios. Detectan diferencias significativas en actitud hacia la enseñanza de las matemáticas y en autoconcepto, según el género, y nivel de enseñanza que los estudiantes atenderán como profesores. Los hombres desarrollan más alto nivel de autoconcepto y actitudes más positivas. Los estudiantes para profesor de secundaria obtuvieron mejores resultados que los estudiantes para profesor de primaria y estos mejores que los de infantil. Es decir, el cambio es más significativo en aquellos estudiantes que tienen mas altos niveles de conocimiento matemático.

Bramald, Hardman y Leat (1995) estudiaron los cambios en el pensamiento sobre la enseñanza y el aprendizaje de 162 estudiantes para profesor de secundaria, mientras realizaban estudios para alcanzar un certificado en un departamento de educación. Emplearon un cuestionario para identificar el pensamiento individual, dividido en tres sub-escalas: enseñanza, aprendizaje y preparación profesional. Además, entrevistaron a 10 estudiantes. Los estudiantes respondieron al cuestionario en tres ocasiones, al principio de curso, después de la primera experiencia escolar y al final del curso. Se analizaron los items cuya puntuación cambió en más de tres puntos, los cuestionarios cuya puntuación varió en medio punto, y aquellos otros cuestionarios cuya media cambió de orden respecto al grupo. Se identificaron tres grupos, según los cambios cuantitativos observados: los que salieron de los extremos para centrarse en los alumnos, los que se dirigían a apoyar una enseñanza tradicional y los que no se habían movido. Pese a que detectan una ganancia y un influjo del curso sobre la visión que tienen los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza, surgieron diferencias entre los grupos individuales y sociales. Con ello concluyen los autores indicando que el contenido del curso debe considerarse como una variable. También recalcan el interés de las investigaciones sobre creencias y su relación con la práctica, ya que sin ello, *los estudiantes probablemente adoptarán prácticas que deriven de sus recuerdos como alumnos*.

En un contexto de investigación etnográfica, D'Ambrosio y Mendonça (1992) plantearon un curso de formación de profesores de matemáticas mediante micro-proyectos, estudiando los conflictos que encuentran los estudiantes durante este curso. En estos micro-proyectos se sitúan a los estudiantes en un contexto de investigación, en el que deben revisar literatura de investigación sobre cómo se produce el aprendizaje de las fracciones. Con ello, los estudiantes eran a la vez sujetos del macro-estudio investigador y miembros de un grupo de trabajo de micro-proyectos, interesados en analizar la comprensión de los alumnos del concepto de fracción. El análisis de los documentos escritos para los micro-proyectos, y las observaciones de los participantes, en vista a describir los conflictos y la forma de actuar ante ellos, permitió describir cuatro aspectos que resultaron conflictivos para los estudiantes: 1) Tomar conciencia de que no basta la comprensión conceptual para realizar con éxito las operaciones con fracciones; 2) Aceptar la inconsistencia de las respuestas de los alumnos; 3) Comprender la dificultad que encuentran los alumnos para representar una fracción en un objeto, pese a que se ha enfatizado en la instrucción sobre fracciones; 4) Comprender las dificultades que presentan los modelos de área para introducir el concepto de fracción. Las autoras consideran que el macro-estudio favoreció que los estudiantes se implicaran en la toma de decisiones. Los estudiantes llegaron a realizar conjeturas para explicar y debatir, se sintieron motivados para leer investigaciones, con lo que aceptaron sugerencias instruccionales venidas del análisis que realiza el investigador. Según las autoras, hubo cambios importantes en la enseñanza que practicaron los sujetos investigados, aunque, consideran que es difícil observar el cambio en creencias especialmente cuando ocurren simultáneamente con el proceso de maduración.

2.2.3 Conclusiones a las que nos lleva la revisión del estado de la cuestión

Explicitar y analizar las creencias y concepciones es un área de investigación que se inscribe en una perspectiva interpretativa de la educación. Su interés es creciente (Thompson, 1992). Para llegar a describir las creencias se emplea una variedad de técnicas, que encierran métodos cuantitativos (basadas en el uso de cuestionarios generales -Wilcox, Schram, Lappan, Lanier; Llinares, Sánchez y col.; Carrillo y Contreras; Rico y cols.; Swinson y Shield; Furinghetti, etc.-; cuestionarios sobre creencias en campos específicos -Carpenter, Fennema, Peterson y Loef-, inventarios de creencias -Gattuso, Porlan, etc.), y cualitativos (análisis de producciones de los sujetos, observación de su actuación durante la enseñanza, entrevistas sobre los documentos elaborados por el sujeto, entrevistas con reactivos específicos -de estimulación del recuerdo, empleando viñetas, etc.-). Parece que se tiende a emplear estudios de caso, pero completando estudios de grupo, partiendo de alguna técnica que permita estudios cuantitativos.

Entre los investigadores se va enfatizando la necesidad de emplear métodos indirectos para investigar las creencias (Pajares, Thompson, Hersh, Llinares y Sánchez, Ponte, etc.). Estos métodos indirectos se inscriben en teorías de la psicología social. Así, Robert y Robinet se basan en la teoría de Abric; Sánchez y Llinares, McQualter y Warren, Owens, se centran en la Teoría de los Constructos Personales, de Kelly; Coppes y Dione emplean la Teoría del desarrollo ético, de Perry; Hoyles, Moreira y Noss, Wilcox, Schram, Lappan y Lanier y, recientemente, Llinares, indican la importancia de situar las creencias y el conocimiento; Johnston, Swinson y Shield, se interesan en la caracterización de la epistemología de la práctica y el Profesional Reflexivo, de Schön; Cooney, Ponte, Furinghetti, se sitúan en la dialéctica teoría-práctica; etc.

Con objeto de poner en común el lenguaje empleado para la comunicación con los sujetos investigados, van aumentando las investigaciones que emplean imágenes y metáforas de los sujetos (Bullough y Stokes, Johnston, Relich y Way, Hoyles), como formas de hacer comunicativas las representaciones personales, y ampliando el sentido de creencias y concepciones tal como hacen Ponte (1992) y Llinares (1995).

La mayoría de las investigaciones revisadas están realizadas en un contexto de formación inicial o permanente de profesores. En todas ellas se enfatiza la importancia que, para los programas de formación de profesores, tiene el explicitar las concepciones y creencias de los profesores sobre el conocimiento, y sobre la enseñanza y aprendizaje.

Pese a que las creencias presentan una fuerza psicológica (Green, 1971) que las hace resistentes al cambio (Pajares, 1992), los investigadores han encontrado cambios significativos durante un tiempo adecuado, debidas a cursos de formación (Schram, Wilcox, Lanier y Even, 1988, Bramald, Hardman y Leat, 1995, Sánchez y Llinares 1988), aunque estos cambios son de matiz, y en muchos casos no suponen un cambio en su actitud de enseñanza (Wilcox, Schram, Lappan y Lanier, 1991; Schram, Wilcox, Lanier y Even, 1988), y es difícil detectarlos, por estar relacionados con procesos madurativos (D'Ambrosio, Mendonça, 1992).

2.2.4 Caracterización de nuestra investigación

Nuestra investigación se ha llevado a cabo en un contexto preciso e intenta tenerlo en cuenta en el proceso investigado, acercándonos con ello a la idea de creencia situada de Llinares (1995). En vista de ello debemos precisar que se refiere a estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas, de la Universidad de Granada. En esto se distancia de las investigaciones que estudian la formación inicial de profesores de primaria (Llinares y Sánchez), con un contexto de formación generalista, y de las referidas a formación permanente (Carrillo), con lo que los sujetos se encuentran en interacción con la práctica docente, lo que influye en sus concepciones y creencias.

a) Se refiere a formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, en el que los sujetos presentan características peculiares (Rico, 1992, Rico y Coriat, 1992). La investigación tiene lugar en un curso de formación, pero no pretende considerar como variable independiente ni el contenido ni el método de dicho curso. Nos interesa estudiar el cambio en las concepciones y creencias debido tanto a la maduración como a las intervenciones específicas de formación. En las asignaturas del curso considerado habrán aparecido algunos reactivos considerados como variables en las investigaciones revisadas (como la creación de dilemas, el trabajo en grupo, el debate entre estudiantes, etc.). Para nuestra investigación nos interesa la caracterización del cambio de las concepciones y creencias, su historia, tal como la interpreta Hoyles (1992). Con ello nos acercamos a investigaciones como la de Llinares (1989), pero estudiando las creencias y concepciones en un largo período de tiempo.

b) Como la mayoría de las investigaciones referenciadas, vamos a emplear una metodología en la que se combinan instrumentos que permiten un análisis cuantitativo de datos (comentario de textos), con instrumentos que permitan estudios en profundidad, mediante un análisis puramente interpretativo (entrevista y análisis de producciones de los sujetos). De esta forma vamos a compatibilizar un estudio del grupo con dos estudios de casos, que permitan situar a sujetos particulares.

c) Como instrumento fundamental para caracterizar las creencias y concepciones vamos a utilizar el comentario de texto. Se trata de un instrumento indirecto, elegido para enfatizar el carácter comunicativo del proceso de formación y de investigación.

d) Para interpretar los datos hemos empezado por establecer un mapa de concepciones y creencias sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tal como hace Porlan (1989). Este inventario (§1.4) nos permitirá sistematizar el registro y la comunicación de los resultados de la investigación.

e) El número de estudiantes investigados es inferior al empleado en la mayoría de las investigaciones que afrontan el estudio de los cambios en creencias y concepciones. Pero este número supone un 83,3% del total de asistentes a la modalidad de formación en que nos situamos en el curso 1993-1994.

2.3 Racionalidad del estudio

Una vez presentada el área problemática (§2.1), y los antecedentes del problema de investigación (§2.2), pasamos a estudiar la verosimilitud de abordar el estudio. Para ello vamos a situar el marco curricular en el que nos encontramos, a precisar el tipo de creencias y concepciones que esperamos encontrar y el procedimiento general que vamos a emplear.

2.3.1 Marco curricular: Formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria en la especialidad de Metodología de la Universidad de Granada

Tal como hemos indicado (§2.1), estamos inmersos en la formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, mediante un proceso concurrente (en el que se simultanea la formación profesional con la formación matemática). Este modelo tiene lugar en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, especialidad de Metodología. Nuestra investigación se sitúa en el quinto curso de la licenciatura, en el que los estudiantes afrontan dos asignaturas de formación profesional: la Didáctica de la Matemática en Bachillerato, y las Prácticas de Enseñanza en Institutos.

Para el diseño de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, Rico y Coriat (1992) indican que han partido de las necesidades actuales del Sistema Educativo derivadas de la LOGSE. Además toman en consideración "*el Plan de Estudios de la Licenciatura de Matemáticas, las carencias formativas e informativas de los alumnos, su* *experiencia profesional y el actual desarrollo de la comunidad de educadores matemáticos..*" (p. 4). El contenido de la asignatura se articula en los dos bloques siguientes: A. Fundamentación y Marco de referencia (en el que se fundamenta la didáctica de la matemática y se profundiza en los organizadores curriculares para la educación matemática), y B. Análisis didáctico y diseño de unidades (en el que se realiza un análisis didáctico de los temas correspondientes a los contenidos matemáticos que se imparten en el nivel secundario de educación, a la vez que se práctica la planificación de unidades correspondientes a esos temas y nivel). Se aprecia, pues, que esta asignatura afronta una reflexión sobre la enseñanza de las matemáticas, partiendo de un análisis de los marcos de referencia, entre los que aparecen cuestiones ligadas a los constructos que afrontamos en nuestra investigación. Los objetivos de esta asignatura muestran una preocupación curricular por las matemáticas. La metodología se basa en el debate sobre documentos y en la elaboración en equipo de materiales y diseño de unidades.

Nuestra investigación se sitúa especialmente en la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos. Esta asignatura se plantea como fin el que los futuros profesores acudan a las prácticas de enseñanza con una preparación que les haga más sensibles a los procesos de enseñanza-aprendizaje (Lansdheere 1977). Para ello el desarrollo de la asignatura **Prácticas de Enseñanza en Institutos** abarca tres fases: ***planificación*** (1er trimestre, 2 horas semanales, 20 horas en total); *realización o* ***fase práctica*** (4 semanas, Enero/Febrero, 60 horas); y ***evaluación*** (resto del curso, 2 horas semanales, 30 horas en total). La docencia de las restantes asignaturas se interrumpe durante las cuatro semanas de la fase de *realización*, de manera que los alumnos puedan asistir, en régimen de dedicación exclusiva, a las clases del Instituto. Las fases de *planificación* y *evaluación* suponen 2 horas semanales de clase en la Facultad (con una estructura básica de seminario), en las cuales se realizan actividades que parten de una reflexión sobre la tarea docente y la experiencia discente de los futuros profesores, con objeto de suministrar información necesaria para afrontar la fase de *realización de las prácticas*. Este modelo ofrece unas posibilidades de intervención pedagógica de gran interés por la vinculación estrecha que permite entre alumnos, profesores tutores y profesor responsable de la asignatura (Rico y Flores, 1997).

Los contenidos de esta asignatura encierran módulos de reflexión sobre aspectos prácticos de la enseñanza (en la fase de planificación: programación de unidades didácticas, organización de un centro docente, modelos de enseñanza), y módulos de reflexión a posteriori sobre las cuestiones y dilemas surgidos durante las prácticas (en la fase de evaluación: modelos de enseñanza observados, problemas concretos de la enseñanza, la programación de unidades, análisis de incidentes didácticos, elaboración de la memoria de prácticas). En los objetivos se encierra una preocupación por la reflexión epistemológica, partiendo de actividades prácticas concretas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas. El proceso de formación en esta asignatura sigue un modelo basado en las situaciones didácticas de Brousseau (1986). Cada módulo comienza con el planteamiento de una situación matemática o didáctica que deben realizar los estudiantes; posteriormente se debate sobre lo que aporta esta situación para la enseñanza de las matemáticas; y finalmente, se presentan unas lecturas para profundizar en el significado de la situación (situación de institucionalización). Con ello se pretende poner en práctica un modelo de diseño del proceso de enseñanza, basado en la teoría de las situaciones didácticas de Brousseau (1986), con objeto de que se adopte como modelo para que los estudiantes lleven a cabo la planificación de unidades didácticas en su actuación como profesores.

2.3.2 Creencias que se van a estudiar

La formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, tiene que afrontar la formación de educadores, ya que como los futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria son especialistas en matemáticas, están siendo preparados con una formación casi exclusiva en el conocimiento matemático, con lo que cabe esperar que estos estudiantes tiendan a sobrevalorar los contenidos matemáticos a enseñar, tal como indican Rico y Coriat (1992).

Dada la importancia que la comunidad científica y educativa concede al conocimiento matemático, es previsible esperar que, de manera natural, los estudiantes no pongan en cuestión la validez educativa del conocimiento matemático, y sólo busquen en los cursos de formación profesional, conocimiento instrumental para desenvolverse de manera adecuada como transmisores de ese conocimiento (Brousseau, 1989, Wilcox y cols., 1991). De esta forma se puede tener la ilusión de concebir el conocimiento matemático como algo acabado, a-histórico, absoluto, etc. Según esta visión, la enseñanza de la matemática es importante para estos estudiantes, como fuente de certeza y como instrumento para el resto del conocimiento científico. Se considera que su valor educativo es intrínseco al conocimiento (Porlan, 1989 y 1993).

Sin embargo, la propia comunidad matemática establece la historicidad del conocimiento, su validez relativa, la naturaleza abstracta de su concepto de verdad, etc (Dossey, 1992, Ernest, 1991, Cañón, 1993). Además estas cualidades redundan en el valor educativo de la matemática, ya que relacionan al sujeto con el conocimiento, dándole oportunidad de elaborar estrategias personales que le permitan resolver los problemas matemáticos que se encuentran en la vida cotidiana.

Bajo estas perspectivas, en los cursos de formación de profesores hemos intentado que los estudiantes cambien su foco de atención, pasando de preocuparse por el *cómo* enseñar, al *qué* enseñar, al *porqué* enseñar matemáticas y *cómo educar* en este proceso de enseñanza. Nuestra expectativa es que este cambio se vea reflejado en la forma en que conciben la enseñanza de las matemáticas.

En cursos anteriores habíamos iniciado investigaciones en las que pretendíamos que los propios estudiantes nos informaran de las *expectativas y necesidades formativas* que sentían cuando se enfrentaban a una actuación docente concreta, durante sus prácticas (Flores, 1993; Flores y Godino, 1992 y 1993). Estas investigaciones nos mostraron el peso que ejerce sobre los estudiantes su situación como alumnos (*laguna de los dos mundos*, Feiman-Nenser, y Buchman, 1988), que les lleva a adoptar un papel de "clientes" de los cursos de formación. El énfasis en el papel de subordinado que genera sobre los alumnos cualquier tipo enseñanza, parece constituirse en una variable interviniente importante sobre las perspectivas de los estudiantes ante los cursos de formación. Pero este papel proviene de la manera en que el estudiante concibe las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, con lo que nos reafirma en la necesidad de indagar sobre las creencias y concepciones del estudiante sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

Nuestra expectativa, como formadores de profesores, es que nuestros estudiantes que se enfrentan a una preparación específica sobre aspectos didácticos, van a cambiar sus concepciones y creencias sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Veamos de una manera resumida el contenido de estas creencias y concepciones y su repercusión en el proceso de formación de profesores.

Rico y Coriat (1992) precisan el siguiente perfil típico del estudiante para profesor de nuestros cursos:

"(1) considera que su nivel de formación matemática es más que suficiente para ser Profesor de Matemáticas; (2) desconoce la existencia de un campo de trabajo denominado Educación Matemática y de las actividades que en él se realizan; .(3) imagina los contenidos de la Didáctica de la Matemática como una colección de recomendaciones generales, trucos y reglas que permiten hacer las clases más activas y agradables; (4) carece de conocimientos en historia de las Matemáticas, lo que conlleva una concepción estática de las Matemáticas, poco adaptada a las distintas maneras de abordar y resolver problemas por parte de los matemáticos; (5) posee una visión estrictamente técnica de las Matemáticas, con la consiguiente ausencia de información acerca de: planteamientos epistemológicos, la integración de las Matemáticas en la cultura, en el pensamiento o en las ciencias, las aplicaciones prácticas de las Matemáticas, los modos de aprendizaje o la adquisición de los saberes matemáticos; (6) concibe la propia enseñanza como futuro profesor partiendo de esquemas `reproductores': si un profesor influyó positivamente en uno de estos alumnos, su `gestalt' se eleva inmediatamente a la categoría de `arquetipo'; (7) desconoce la situación actual en los niveles escolares (exceptuando referencias familiares, cuando las hay, y a pesar de que algunos dan clases particulares); (8) asigna inicialmente poco valor a esta asignatura [se refieren a Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, pero es generalizable a Prácticas de Enseñanza en los Institutos]*; (9) es muy receptivo a la información sistemática relativa a Educación Matemática; .(10) es capaz de utilizarla; (11) muestra un enorme interés por conseguir más y mejores conocimientos y por profundizar en ellos" (p. 3).*

Como vemos, cabe esperar que la gran mayoría de nuestros estudiantes crean que el conocimiento matemático constituye un cuerpo externo, ajeno al sujeto que lo *descubre.* Esto supone aceptar la existencia de un referente externo con el que validarlo. Una vez validado, sería aceptado como correcto y se podría transmitir a quien no lo conoce, mediante un procedimiento adecuado (Moreno y Waldegg, 1992). Los cambios en el contenido matemático consistirían en ampliaciones de los contenidos validados anteriormente.

Esta concepción contrasta con los hechos acaecidos en la historia del conocimiento matemático, en la que observamos que éste ha cambiado sustancialmente a lo largo de su historia, y no siempre en forma de ampliación de los anteriores, sino que ha llegado a contradecir los resultados aceptados por los matemáticos en otras épocas (Davis y Hersh, 1989). También los criterios de validación han sido objeto de continua controversia entre las escuelas matemáticas (Dou, 1970).

Esta relativización del conocimiento nos hace, por lo menos, relativizar al mismo tiempo la importancia de la transmisión de los contenidos. No podemos estar seguros de que los contenidos matemáticos que se intentan transmitir en el presente constituyan conocimiento matemático válido para los matemáticos venideros (NCTM, 1991a).

Por otra parte, la interpretación que hace la psicología cognitiva del aprendizaje nos lleva a pensar que el conocimiento no se puede transmitir de manera inequívoca, sino que el sujeto se proyecta, tanto en el proceso de interpretación de un fenómeno como en el de captación de un mensaje (Vergnaud, 1990, Lerman, 1994a, Ernest, 1994a y b). Esta visión de la relación del sujeto con el saber nos obliga a relacionar el conocimiento con el sujeto que conoce (Ponte, 1994b), con lo que la enseñanza de este objeto personalizado no podría plantearse en términos de transmisión inequívoca.

Estos breves apuntes nos muestran algunas de las posibles concepciones epistemológicas y psicológicas y como influyen en la forma en que se concibe la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Artigues, 1989). La importancia de esta implicación para la enseñanza de las matemáticas y para la formación de profesores nos han llevado a interesarnos en las creencias que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas de enseñanza secundaria, cuando se encuentran en un curso de formación inicial de profesores. Dado que dichos conjuntos de creencias están relacionados (Green, 1971), conviene estudiar cómo cambian las creencias y concepciones de los estudiantes para profesor, a lo largo de un curso académico en el que se enfrentan por primera vez a la actuación profesional, en el período de su formación práctica (practicum) (Thompson, 1992, Sánchez y Llinares, 1987). Esta importancia reconocida hace que en las asignaturas de formación didáctica se afronte una reflexión epistemológica sobre el conocimiento matemático, con la esperanza de influir sobre las creencias y concepciones epistemológicas de los estudiantes.

Nuestros primeros trabajos de investigación en este campo de concepciones y creencias se realizaron mediante cuestionarios, pero, como ocurrió en la investigación sobre expectativas y necesidades, las entrevistas posteriores nos mostraron la dificultad que sentían los estudiantes para explicitar sus propias concepciones (Hersh, 1986), a la vez que nos mostraron la diferencia de significado que atribuyen a términos básicos que se emplean en esta comunicación sobre concepciones y creencias: enseñanza, aprendizaje, etc. (Flores, 1993).

La necesidad de poner en común el significado de los términos que se emplean corrientemente en educación matemática (Mumby, 1988, Sánchez y Llinares, 1988), y de situar a los estudiantes ante el argumento que liga la forma de concebir el conocimiento matemático con la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje, nos ha llevado a pensar en otros métodos. Estos métodos de investigación deberían permitirnos delimitar los términos empleados en nuestra investigación, y a su vez, provocar el enfrentamiento de los estudiantes con argumentos explícitos que relacionen la enseñanza de las matemáticas con la naturaleza del conocimiento y la filosofía de la práctica. Nos planteamos entonces presentar a los estudiantes un texto, suficientemente explícito, y necesariamente sencillo, en el que se recogieran afirmaciones completas. El texto se constituiría en el reactivo que suscitaría su reacción ante los argumentos expuestos, y precisaría el sentido que se le dan a términos del lenguaje cotidiano y del argot específico. La respuesta ante dicho texto debería encerrar una parte de resumen, que obligue a los estudiantes a detectar las ideas más importantes, y una parte de opinión. Esto nos llevó al *comentario de textos*, en el que partimos de una huella escrita fija (el texto a comentar), para producir otra marca fija (el comentario de los estudiantes), que informa del contexto cognitivo y de la postura que adopta el estudiante ante las argumentaciones expuestas en el texto (Richardson, 1994). Para evitar la respuesta directa que podría mantener el nivel superficial (Fox, 1981), decidimos pedir a los estudiantes para profesor que analizaran el texto y, a partir de su lectura y análisis, opinaran sobre actividades de enseñanza. Desde la consideración del interaccionismo simbólico (Blumer, 1982), los estudiantes percibirán las partes del texto que le son significativas, y estas partes serán las que reflejen en sus comentarios.

Las investigaciones revisadas nos reafirmaron en el interés de emplear métodos indirectos para detectar las creencias y concepciones. Las investigaciones más recientes emplean imágenes, metáforas, caricaturas, etc. fruto de la interpretación semiótica postestructuralista de la comunicación (Richardson, 1994; Manning y Cullum-Swan, 1994). Estas imágenes, metáforas y caricaturas permiten poner en común las representaciones que se hacen los sujetos sobre el conocimiento y sobre la enseñanza y el aprendizaje. Pero no podemos esperar que los estudiantes recreen toda la trayectoria que ha cubierto la comunidad matemática para llegar a las posiciones epistemológicas que se discuten actualmente (Kilpatrick, 1987) por lo que nos hemos planteado la necesidad de presentar a los estudiantes los dilemas que aparecen en la comunidad matemática cuando reflexiona sobre la educación matemática. De esta forma, pensamos que los estudiantes reaccionarán ante aquellos argumentos y conflictos que no le sean completamente nuevos, sino que hayan empezado a forjarse a través de su experiencia discente y docente.

Con el fin de poner a punto el *comentario de textos* como instrumento de toma de datos, en el curso 1992-1993, emprendimos un estudio piloto, cuyo objetivo era caracterizar las concepciones y creencias de los estudiantes para profesor. En el punto siguiente presentamos este estudio.

Una vez puesto a punto el instrumento, el curso siguiente, 1993-1994, se planteó caracterizar las creencias y concepciones de nuestros estudiantes, y el cambio (entendida como historia del cambio, Hoyles, 1992) que se opera en estas creencias y concepciones. Para ello empleamos el comentario, puesto a punto en el estudio piloto, como instrumento de recogida de datos. El sujeto de la investigación va a ser el grupo de estudiantes de la asignatura Prácticas de Enseñanza en Institutos. Ahora bien, la forma en que cada estudiante realiza el comentario de textos puede estar influida por su capacidad para resumir, para captar lo esencial del texto, en función de los indicadores que contenga dicho texto. Además, la información indirecta escrita es, a veces, de difícil interpretación. Para profundizar en esta información, decidimos continuar el estudio realizado en el grupo de estudiantes, mediante estudios de caso, fundamentalmente basados en entrevistas sobre las respuestas de los estudiantes a los comentarios. El análisis de todas las producciones de los estudiantes nos permitirá extraer más partido a las huellas indirectas surgidas en el comentario de textos.

2.4. El comentario de textos como instrumento para detectar creencias y concepciones de los estudiantes

Vamos a precisar el instrumento principal de recogida de información: el comentario de texto. Para ello vamos a situar el instrumento y posteriormente veremos las racionalidad de su empleo.

2.4.1 Concepto de comentario de textos

Para Hernández y García (1995),

> *El comentario de textos consiste en la elaboración de un escrito de carácter crítico a partir de la lectura crítica de otro* (p. 11)

Marcos Marín (1988) indica que el comentario de textos surge en el período *textual* que aparece con la invención de la escritura, como una forma de recogida de datos. El fin del comentario en esta etapa es estudiar la humanidad. Con la aparición de técnicas que permiten conservar la palabra hablada (*tercera edad* de la humanidad), se mantiene y acrecienta el uso del comentario tanto del texto oral como del escrito. Considera *textos* como *todos los registros orales o escritos en sus muy diversas formas*.

Distingue Marcos tres etapas en la consideración del texto. En la primera etapa, clásica, el texto tiene como fines convencer, enseñar y conservar, y las ciencias que se ocupan de ello son la Retórica, la Didáctica y la Historia. La etapa filológica, que es la segunda, *se ocupa del estudio y análisis de los textos para fijar su correcta lectura, su fecha e interpretación*. En esta segunda etapa se estudian textos escritos, y el análisis filológico se extiende más allá de la lengua, para ocuparse de fines investigadores en áreas como la literatura, el derecho o la historia. La tercera etapa es la que llama *estructural*.

En esta tercera etapa las preocupaciones son más amplias y sistemáticas. Se parte de una concepción del texto de tipo comunicacional, con lo que se considera el texto en relación con otros sistemas de significación. Indica Marcos (1988) que el análisis del discurso que se realiza en esta tercera fase se interesa en lo que el texto dice, en cómo lo dice y la relación del texto con la cultura. De esta forma se produce la aparición de la gramática textual, que:

> *(..) enlaza preocupaciones tan típicas de la lingüística europea como el discurso en sí, o desde el punto de vista retórico (estructuralismo y formalismo), las relaciones de inferencia (Comte y Piaget) y la representación social en el lenguaje (Wittgenstein), con otras preocupaciones, típicas éstas de las escuelas americanas, como su punto de partida explícito, formal y transformatorio, su exigencia de un componente interpretativo en la*

gramática, o los problemas ligados a la representación semántica de los textos, que no se limitan a la simple suma de las oraciones que los integran (p. 16)

Negrín y Ossenbach (1986) por su parte, indican que la teoría del texto

pretende ser un marco integrado e interdisciplinario que amplíe el campo de la lingüística tradicional y analice los diversos textos tomando en consideración los contextos sociales y psicológicos en que se inscriben y asumiendo sus características no estrictamente lingüísticas (p. 12)

2.4.2 Usos del comentario de textos: didáctico e investigador

La revisión de la literatura de investigación sobre creencias y concepciones de los profesores nos muestra que los instrumentos de investigación principales son los trabajos de los profesores (Yinger y Clark, 1988), la observación durante su práctica docente y las entrevistas y respuestas a estímulos orales y escritos. Todos estos instrumentos suministran un registro escrito de los datos, cuyo análisis, en forma generalmente de análisis de contenido, permite la inducción de las creencias y concepciones de los sujetos investigados. Nosotros nos hemos planteado emplear el comentario de textos como un reactivo que provoque un trabajo del estudiante. Este trabajo será analizado posteriormente mediante un análisis de contenido. Distinguimos, pues, dos niveles de análisis, llevados a cabo por sujetos diferentes y con motivaciones y fines distintos.

El primer análisis lo lleva a cabo el estudiante, en un contexto de clase, durante su formación como profesor, pero adoptando un papel de alumno que resuelve una tarea. En este análisis, el estudiante se enfrenta al texto (que a su vez procede de unos autores), y a sus concepciones y creencias sobre el tema a que se refiere dicho texto. Las expectativas del estudiante son resumir las ideas del texto de la manera más precisa posible (aunque dichas expectativas estén influidas por su papel de alumno).

El segundo análisis lo lleva a cabo el investigador, partiendo del texto producido por el estudiante. El fin es inferir las concepciones y creencias del estudiante autor de este texto. Para Blumer (1982) la relación del sujeto con el texto está influenciada por su mundo de significados, entre los que contarán el que le asigna a la tarea que aborda. A través de este mundo seleccionará el contenido del texto para la tarea. Nuestra expectativa es pues que el comentario de textos realizado por el estudiante proyectará sus creencias y concepciones, en la selección de información del texto que realice, en la forma de ordenarlo y en la opinión que muestre respecto de las ideas del texto. Eco (1985, 1991) llama *intertextualidad* a esta idea según la cual "*los libros siempre hablan de otros libros y la historia cuenta una historia que ya se había contado"* (Eco, 1985, p. 26). También Barthes (citado por Selden, 1987) nos dice que el "yo" que lee « es ya en sí mismo una pluralidad de otros textos ». De este segundo análisis nos ocuparemos cuando presentemos la toma de datos y la interpretación de los mismos, en el capítulo 4.

Este esquema que hacemos de empleo del comentario de textos nos muestra la doble utilización que tradicionalmente se ha hecho de este instrumento. La investigación histórica, en campos como el derecho o la misma historia, han utilizado el análisis de textos para analizar los datos que suministraban las huellas obtenidas en forma de texto del proceso estudiado.

Pero además el comentario de textos es un medio de enseñanza, tal como indican Negrín y Ossenbach. La extensión del empleo didáctico del comentario de textos ha hecho que se establezcan cursos de entrenamiento específico para esta tarea. En estos cursos se han suministrado tanto esquemas de presentación de los comentarios como técnicas para su elaboración y eliminación de errores.

Nuestros estudiantes de matemáticas dejaron de realizar comentarios de texto una vez introducidos en la universidad. Sus trabajos habituales y las pruebas de evaluación tienen un carácter muy diferente. Pero además están influidos por sus "otros textos" (Eco, 1985). Igualmente, las estrategias de realización de un resumen no constituyen objeto de entrenamiento específico de los estudiantes de la licenciatura de matemáticas, con lo que estas variables intervinientes las hemos considerado menos importantes que su capacidad de interpretación de las ideas del texto, relacionada con sus posturas previas a la lectura del texto.

2.5. Estudio piloto: Descripción de las concepciones y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, y sobre la enseñanza y el aprendizaje, mediante el empleo de un comentario de textos

Con objeto de analizar la viabilidad de emplear el comentario de textos como instrumento de investigación, emprendimos en el curso 1992-1993 una investigación piloto, que se planteaba caracterizar las concepciones y creencias de los estudiantes de Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos (Flores y Godino, 1995). Vamos a describir sistemáticamente este estudio piloto, presentando, en primer lugar el texto seleccionado, después las variables de investigación, el desarrollo del estudio y los resultados y conclusiones.

2.5.1. Presentación del texto empleado para su comentario

Buscamos un texto que mostrara una variedad de posturas epistemológicas y sus repercusiones sobre la enseñanza de las matemáticas. Una primera selección nos llevó a los artículos de Davis y Hersh (1982), que resultaron ser excesivamente extensos y con un juego dialéctico demasiado sutil. Finalmente nos decidimos por un fragmento del artículo de Moreno y Waldegg (1992) titulado "Constructivismo y Educación Matemática", publicado en la revista "Educación Matemática". Este texto ha sido empleado tanto en el estudio piloto como en la investigación que presentamos en esta memoria.

Como el artículo era excesivamente extenso, destacamos un párrafo completo, de unas 1300 palabras, que encierra, a nuestro juicio, la esencia de dos posturas epistemológicas, las que los autores llaman realista y constructivista, así como su repercusión en la enseñanza. En este fragmento se aludía específicamente a la implicación entre la postura epistemológica y la postura didáctica. Naturalmente, el no haber considerado el artículo en su totalidad, nos ha hecho truncar el sentido del mismo, pero consideramos que era más adecuado para los estudiantes del último curso de la licenciatura de Matemáticas, poco acostumbrados a lecturas de carácter epistemológico, psicológico y didáctico. (En el anexo 1 figura el fragmento empleado, así como las consignas que se dieron a los estudiantes para realizar el comentario de textos).

Dado que nuestra hipótesis de partida es que cada estudiante reflejará en su comentario una interpretación personal del texto, filtrándolo a través de sus concepciones y creencias, y proyectando estas concepciones en la forma en que el estudiante elige la información que

encierra el texto (Blumer, 1982), nos ha parecido importante comenzar por estudiar el texto y las consignas. Dado que nuestra posición y la influencia de las lecturas y reflexiones, puede inducir

un sesgo importante en la expectativa que nos planteamos respecto del comentario de texto del

estudiante, hemos recurrido a un control externo que ha consistido en solicitar a dos profesoras

de Enseñanza Secundaria, de Lengua y Literatura Española que analicen el texto que hemos

empleado para el comentario. Presentamos a continuación una síntesis de estos análisis, ordenada

en forma de comentario de textos.

COMENTARIO DEL TEXTO PRESENTADO

1. Idea general:

El texto trata sobre el cambio que se produce en la concepción de la matemática y de su enseñanza en las últimas décadas del siglo XX desde una postura tradicional (realista-formalista) hacia los postulados constructivistas.

2. Análisis interno

2.1 Estructura general y recursos empleados

La primera impresión es que el texto está dividido en cuatro partes indicadas por títulos, aparentemente iguales desde el punto de vista jerárquico. Sin embargo, temáticamente, el texto se compone de dos apartados, a su vez subdivididos en otros dos. Entre estas dos partes hay un paralelismo: ***Las matemáticas como objeto de enseñanza / las matemáticas como objeto de aprendizaje****. La primera parte está tratada de forma más extensa que la segunda, y desde la primera lectura nos damos cuenta de que el autor se inclina personalmente hacia lo expuesto en esa segunda parte. Es un recurso utilizado en los textos informativos, desarrollar por extenso lo que se pretende refutar, o poner en evidencia su desacuerdo.*

El paralelismo señalado se complementa con una idea de oposición. Esta oposición se manifiesta entre los encabezamientos: ***enseñanza / aprendizaje****. Estos dos términos son antónimos recíprocos que destacan el protagonismo de uno de los elementos de la relación educativa: el que enseña o el que aprende. También se manifiesta en la acción respecto al conocimiento:* ***transmite / construye****, verbos que suponen un papel activo del que enseña o del que aprende.*

Junto a este recurso otro elemento que se utiliza para orientar la *postura del autor es la selección del léxico: profesor/ educador, pasividad/ actividad, creatividad. Los términos marcados positivamente son los utilizados para definir el constructivismo, ya sea en oposición al término marcado negativamente, o, como en el último caso, sin dicha oposición, con lo que el término queda marcado más positivamente.*

Aparecen otros recursos para mostrar su preferencia. Por ejemplo, los autores sitúan al constructivismo en la antítesis del realismo, como la solución a todos los problemas en la enseñanza de las matemáticas. También se aprecia el empleo de juicios absolutos de descalificación del realismo.

El título es muy significativo. La tematización del término "constructivismo" nos señala que es hacia él hacia donde se dirige la intención del autor y, por tanto, la del texto. El segundo término "educación matemática", matiza que es este aspecto el que se pretende analizar

2.2 Esquema del texto

Cuatro partes: I.-La matemática como objeto de enseñanza:

1.Concepción filosófica: El formalismo.

Tesis fundamentales:

*a) Matemáticas como **cuerpo estructurado de conocimiento**, formado por objetos matemáticos, sus **relaciones** y **criterios** para validar los resultados en un marco axiomático-deductivo.*

b) Objetos: vacíos de significado, puras formas.

1. *2. Epistemología: Realismo matemático Tesis fundamental:*

a) Separación del sujeto y el objeto

b) Los objetos matemáticos preexisten al sujeto

Base filosófica:

Teoría del conocimiento de Platón; Empirismo aristotélico.

2. *3. Consecuencias para la enseñanza:*

A. Proceso (al existir conocimiento externo, es transmisible)

B. Profesor: traspasa conocimiento; Alumno: decodifica.

C: Didáctica: optimiza tarea del profesor

D: Evaluación: respuestas universales

II. La matemática como objeto de aprendizaje

1. *1. Concepción filosófica: matemática es actividad*
2. *2. Epistemología: Epistemología genética Tesis fundamentales:*

a) Los objetos matemáticos no existen en un mundo externo al sujeto

b) son producidos por el sujeto en proceso de asimilación /

acomodación, en sus estructuras mentales
Base filosófica: Teoría del conocimiento de Piaget

3. *3. Consecuencias para la enseñanza: a) Proceso de conocimiento*
b) Tarea del profesor: diseñar-presentar situaciones; del alumno: asimilar-acomodar significados
c) Didáctica: fomentar actividad, favorecer creatividad.

2.3: Característica de la estructura del texto

Podríamos calificar la estructura global del texto como paralela (Marcos Marín; 1975), ya que las ideas que presenta, aunque relacionadas entre sí no podríamos calificar como dependientes unas de otras, sino más bien derivadas. Además la estructura es equivalente entre ambas partes: -Concepto del conocimiento; -Concepto de su enseñanza; -Elementos que intervienen en ella y su función.

La primera parte tiene las siguientes diferencias respecto de la segunda:
a) Hace una explicación histórica del concepto del conocimiento (1.2).
b) Habla de la evaluación, dentro de los elementos de la enseñanza (2.3).
c)Habla de los resultados de la concepción tradicional en la enseñanza y en la investigación científica (2.4).
d)Propone una revisión de los postulados tradicionales, con lo que pasa a enlazar con la segunda parte (2.5).
Además de estas diferencias en el contenido existe otra más evidente relativa a la disposición textual de dicho contenido. La primera parte es mucho más sistemática que la segunda.

3. Comentario externo y conclusiones:

El texto presenta una visión partidista de las dos corrientes que opone y que se verá potenciada en los lectores desde el momento en que se asocie constructivismo con la corriente de enseñanza que propone la LOGSE, que se supone que es un intento para mejorar y superar las deficiencias de la ley anterior. Además, los lectores tenderán a identificar el realismo matemático con el sistema vigente. Aparece así un maniqueismo favorecido por el texto y acentuado por la experiencia y por lo que creen los estudiantes que deben decir. Por otra parte, parece que el único medio de transmisión que tiene el profesor tradicional es la exposición magistral y, por tanto, ese método queda devaluado.

Una lectura simplificadora del texto puede partir también de la falta de equilibrio real de la información que se da en ambas corrientes. Parece que los autores tienen más estructurado todo lo que corresponde al realismo, *mientras que muchos de los aspectos tratados en la primera parte, o no aparecen, o apenas son aludidos en el constructivismo (evaluación, didáctica, base filosófica, etc.)*

Finalmente habría que destacar la dificultad que supone para los estudiantes de matemáticas la presencia en el texto de términos y teorías mas propias de las ciencias humanísticas (Filosofía y Pedagogía)

En el *Comentario de textos* presentado a los sujetos se requería de ellos dos tareas bien diferenciadas: 1) Explicar las princpipales ideas sobre el **Realismo matemático** y el **Constructivismo** expresadas en el texto, y su repercusión sobre la enseñanza de las matemáticas;

2) Hacer una valoración personal del texto.

Los comentarios realizados por las profesoras de Lengua y Literatura nos llevan a hacer las siguientes consideraciones:

ANÁLISIS DE LAS CONSIGNAS

La estructura de la primera pregunta puede llevar a dos posibles respuestas: o bien el estudiante sigue el desarrollo lineal de la pregunta y responde consecutivamente a los tres puntos planteados (Realismo, Constructivismo, repercusión en enseñanza), o bien la pregunta se focaliza en torno a los dos términos remarcados y el tercer punto se trata como parte de cada uno de los dos anteriores. El hecho de que estén remarcados los dos primeros, hace que en cualquiera de las dos formas, el tercero se pueda enfocar como un elemento secundario.

La segunda cuestión enfatiza de diversas formas la interpelación directa al estudiante. Mediante el empleo de comillas y negrilla se centra la atención en los términos "objeto de enseñanza" y "objeto de aprendizaje" tal y como aparecen formulados en el artículo, con lo que el comentario debe encaminarse en torno a la opinión personal que suscitan las definiciones dadas en el texto.

Como ya hemos indicado, considerábamos que el comentario de textos permitiría poner en común significados de términos, especialmente aquellos que se emplean en el lenguaje cotidiano, pero que desconocemos el sentido que le asignan los estudiantes. Este es el caso de conceptos como "enseñanza" y "aprendizaje". Realzamos, pues estos términos con el fin de precisar que pedimos al estudiante que valore los sentidos de objeto de aprendizaje y enseñanza que se le han asignado en el texto, y no lo que el pueda entender por enseñanza y aprendizaje. Los términos realismo y constructivismo no son tan corrientes, pero también han podido tener un tratamiento en otros contextos, por lo que intentábamos que los estudiantes se circunscribieran a la caracterización que de ellos se hace en el texto.

Pero además, los análisis realizados por las profesoras nos han aportado ciertas consideraciones que pueden influir en los estudiantes a la hora de realizar el comentario. Así, por ejemplo, los recursos de los autores de emplear valoraciones positivas, y asociar determinados términos a la postura que pretenden introducir (como se cita en el título: Constructivismo y Educación Matemática) debe influir en los estudiantes. De esta forma, no es de extrañar que los estudiantes se sientan en la obligación de alabar la postura constructivista, que los autores presentan de manera más positiva. La estructura paralela debe estar suficientemente clara, pero la mayor cantidad de texto dedicada al constructivismo también deberá aparecer reflejada en los resúmenes y valoraciones de los estudiantes.

2.5.2 Variables del estudio y presupuestos

El texto presentado debe servir como reactivo para que los estudiantes destaquen en sus textos algunos indicadores implícitos de sus concepciones y creencias. En concreto esperábamos que la implicación entre la postura epistemológica y la forma de enseñanza sería percibida por aquellos sujetos que fueran más sensibles, por acuerdo o por oposición, a los argumentos que del texto. De esta forma, el resumen de cada estudiante (primera parte del comentario) nos permitiría inferir el grado en que el sujeto ha sido sensible al argumento, junto con el aspecto que más le ha afectado en sus creencias, por acuerdo o desacuerdo. En la valoración personal debería aparecer, explícitamente, la posición que el sujeto adopta respecto a las ideas expuestas en el texto.

Como han destacado las profesoras que han realizado el comentario de forma paralela, las afirmaciones del texto sobre las corrientes epistemológicas encierran diversos elementos que consideramos posibles indicadores de grados de acuerdo del autor con las posturas correspondientes. Consideramos que dichos índices influirán en los estudiantes, pero a la vez los que ellos produzcan podrían ser empleados para detectar la posición de los estudiantes respecto a las corrientes.

Así, si el futuro profesor elige aquellas frases que suponen una valoración negativa de la corriente, podríamos inferir que está de acuerdo con esta valoración; si en el texto se imputa una acción a un *investigador* y el estudiante, en su resumen, la adscribe a un *profesor* o *alumno*, podríamos inferir que el estudiante no es sensible al aspecto epistemológico del argumento, y considera el texto -o la frase- con un carácter didáctico solamente, etc.

Se constituyen pues dos constructos: el *grado de sensibilidad a los argumentos* del texto y la *posición del sujeto respecto a las concepciones* sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Para estudiar estos constructos establecimos las siguientes variables operativas:

I. Variables referidas al grado de sensibilidad: V1: Precisión en la descripción de las posturas realista y constructivista. (Valorada de 0 a 6) V2: Valoración, explícita o implícita, que hacen de las corrientes presentadas en el resumen. (Positiva, negativa o neutra) V3: Sujeto en quien sitúan cada acción correspondiente a cada frase elegida del texto (Investigador, profesor, alumno)

II. Variables referidas a la posición personal respecto a las concepciones presentadas en el texto. V4: Valoración, explícita o implícita, de las matemáticas como objeto de enseñanza y como objeto de aprendizaje. V5: Significado que dan a *enseñanza*. (Un continuo entre *transmisión* y *presentación de situaciones*) V6: Significado que dan al *aprendizaje* (Un continuo entre *consecuencia de la enseñanza* y *cambio de estructuras*) V7: Argumento o sentido que dan para justificar las matemáticas como *objeto de enseñanza* (Una escala con 6 valores entre *existen conocimientos externos* y *el conocimiento se obtiene compartiendo y consensuando*) V8: Argumento que emplean para justificar las matemáticas como *objeto de aprendizaje* (Una escala con 5 valores entre *el conocimiento externo se aprende* y *el conocimiento sólo existe en la percepción del sujeto*) V9: Grado de acuerdo con la *presentación de tareas por el profesor*
(Acuerdo, desacuerdo).
V10: Grado de acuerdo con la *resolución de problemas por el propio alumno* (Acuerdo, desacuerdo).
V11: Grado de acuerdo con el *debate de ideas en clase* (Acuerdo, desacuerdo).
V12: Forma en que argumentan la valoración a esas actividades. (Escala con 3 valores, entre la justificación basada en las cualidades del

conocimiento matemático, y la justificación basada en la forma de construir y evolucionar el conocimiento)
V13: Significado que atribuyen a *resolución de problemas*

2.5.3 Valoración del texto por jueces

Para determinar la importancia de las frases elegidas (variable V1), y la precisión con la que dichas frases describen las corrientes y los argumentos del texto, nos dirigimos a 6 jueces, todos ellos profesores-investigadores en Didáctica de las Matemáticas, relacionados, en mayor o menor grado con la visión epistemológica que reflejaba el artículo. Se pidió a estos jueces que señalaran las frases del texto (previamente dividido en unidades de información) que, a su juicio, mejor caracterizaban el *realismo* y el *constructivismo*, en sus aspectos epistemológico y didáctico. Las respuestas de dichos jueces sirvieron para asignar un peso a las unidades que habían elegido los estudiantes.

2.5.4 Muestra de estudiantes y método de recogida y análisis de datos

El comentario de textos fue propuesto a 29 *futuros profesores de matemáticas de enseñanza secundaria*, estudiantes de 5º curso de la licenciatura de Matemáticas, en la Universidad de Granada, en una de las sesiones de clase de la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos*. Estos alumnos habían realizado tres semanas de prácticas de enseñanza en los centros de bachillerato.

Respondieron al comentario individualmente, por escrito, los 29 alumnos de la asignatura el curso 1992-1993.

Los protocolos de estos comentarios fueron sometidos a un análisis de contenido (Weber, 1985, Fox, 1981). Una vez dividido cada protocolo en unidades de información, separamos el resumen de la valoración. Confrontamos una a una las unidades del resumen con el texto, también dividido en unidades. Si la unidad de información coincidía en sus aspectos básicos con una unidad del texto, considerábamos que el estudiante había elegido dicha unidad para resumir el contenido del mismo, e inferimos que era sensible al segmento de información que encerraba dicha unidad. Hicmos esta confrontación separadamente para la caracterización del *realismo matemático* y del *constructivismo*, y distinguimos las que encerraban aspectos epistemológicos de las que se referían a la enseñanza.

Para hacer una valoración, en forma de índice, del grado en que cada estudiante había elegido las unidades más representativas de las que describen cada postura, se recurrió a las selecciones realizadas por los jueces. El peso asignado a la unidad **u** es el número de jueces que han elegido esta unidad como una de las que mejor caracterizaban la postura epistemológica o didáctica correspondiente. Estos pesos sirvieron para hacer una valoración cuantitativa del índice de representatividad de las respuestas dadas por los futuros profesores. (Variable V1).

2.5.5 Resultados del estudio piloto

2.5.5.1 Resumen: Descripción e inferencia de las posturas epistemológicas y didácticas

Una vez identificadas las unidades del texto que cada estudiante había elegido para describir las corrientes presentadas, calculamos el peso de cada una, utilizando para ello el número de jueces que habían elegido dicha unidad. La suma total de los pesos nos dio un número que hemos tomado como índice de la caracterización del *realismo* o del *constructivismo*. Como la cantidad de afirmaciones que cada estudiante empleaba en su resumen era variable, dividimos el peso total entre el número de unidades empleadas para caracterizar, con lo que obtuvimos un índice de coincidencia con los jueces. En la tabla 2.1 aparece el procedimiento de valoración y de obtención del índice de coincidencia con los jueces de la caracterización del *realismo* de uno de los estudiantes.

Tabla 2.1: Cálculo del índice de coincidencia con los jueces de las respuestas del estudiante 18

Unidades elegidas	Número de jueces	
111	5	Índice de coincidencia entre
114	5	las unidades elegidas por el
115	4	Estudiante 18 para carac
100	0	terizar el *realismo* y las
110	2	elegidas por los jueces:
112	3	
113	3	30/17 = 1,76

122	0		
116	1		
123	2		
124	1		
100	0		
127	2		

126
134
136
137

Número de unidades
17

1
1
0
0

Peso total de las unidades elegidas
30

Los valores medios de los índices de coincidencia, para el grupo de estudiantes, fueron 1,79 para el *realismo* y de 2,27 para el *constructivismo* (sobre puntuaciones máximas de 6), con desviaciones típicas respectivas de 0,81 y 0,57. En todos los estudiantes, los índices de coincidencia del *constructivismo* son más altas que las del *realismo*. (Aplicando a cada juez una medida de coincidencia con los demás jueces, sus índices alcanzan unas medias de 2,09 y 2,59, sobre puntuaciones máximas de 5, para *realismo* y *constructivismo*, respectivamente, con desviaciones típicas de 0,75 y 0,44).

Para detectar la valoración que hacen los estudiantes de cada corriente (Variable V2) hemos buscado, en las unidades de contenido elegidas en el resumen, términos que indiquen una valoración positiva o negativa de la corriente. En el texto aparecen 2 unidades que valoran positivamente al realismo ("*La actividad matemática producto de esta concepción ha sido sumamente fructífera*" [unidad 105], por ejemplo) y 4 que introducen alguna valoración negativa de esta corriente ("*el sentimiento de fracaso en profesores y alumnos parece ir en* *aumento*", [unidad 137]); el constructivismo no aparece valorado. Dieciocho estudiantes eligen unidades con una valoración negativa de la didáctica derivada del realismo, y seis, muestran valoraciones positivas del constructivismo (por ejemplo, el estudiante 3: "el alumno desarrolla bastante su espíritu crítico").

Hemos analizado otros indicadores ligados a observaciones particulares en el resumen de cada estudiante. Nos ha interesado detectar si había discrepancias con el texto en la *persona* a que se refiere la unidad (Por ejemplo, el estudiante 13, en su caracterización del realismo dice: *"Separación entre el alumno y las matemáticas",* mientras que en el texto aparece *"Separación entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento*"). También hemos explicitado las incongruencias entre la redacción de las unidades del texto elegidas y la forma en que aparece en el resumen de algún estudiante (por ejemplo, el estudiante 22, al caracterizar el *realismo*, dice "*Los contenidos se apoyan en preceptos universales*", mientras que en el texto aparece "*la didáctica ..., generalmente apoyada en preceptos universales..*"). Dada la distribución de unidades del texto, que es favorable a la postura constructivista, también nos hemos fijado en el número de unidades empleadas para la caracterización de cada corriente y el tipo de estas (epistemológicas, psicológicas o didácticas), etc.

2.5.5.2 Valoración que hacen los estudiantes del texto

Utilizando una técnica de *Análisis de Grupos* (Ghiglione y Matalón, 1991), hemos obtenido las categorías de respuestas del grupo lo que nos ha permitido situar las respuestas dadas por cada estudiante. El recuento de los valores de las variables de V4 a V13 empleadas en el estudio, nos permite apreciar que dichas categorías tienen unos extremos epistemológicos *realistas* y *constructivistas*, y valores intermedios de carácter didáctico o psicológico.

Dieciocho estudiantes para profesor afirman explícitamente que las matemáticas son un *objeto de enseñanza*, quince que son *objeto de aprendizaje* y diez que lo son ambas (sin que estas tres categorías sean excluyentes) (V4). Seis futuros profesores consideran explícitamente que las matemáticas son más bien *objeto de aprendizaje* que *objeto de enseñanza*. Ninguno dice considerarlas preponderantemente como *objeto de enseñanza*.

Las actividades de enseñanza planteadas en el texto son valoradas en general con adjetivos positivos (que van de la necesidad a la conveniencia), destacando la valoración de la *resolución de problemas por el propio alumno*, que es explícitamente calificada como positiva por 24 estudiantes, y ninguno la considera con apreciaciones negativas, mientras que sólo 9 estudiantes califican positiva la *presentación por el profesor* y 4 como negativa, 22 valoran positivo *el debate de ideas en clase* y sólo uno dice que no es importante.

2.5.5.3 Estudios de caso

Las categorías o valores de las variables V1 a V13, nos han permitido elaborar perfiles de los protocolos de los comentarios de texto de los estudiantes. A partir de estos perfiles hemos elaborado unas descripciones más exhaustivas de las creencias de los estudiantes para profesor, de las que presentamos dos a modo de ejemplo.

> **Estudiante 18**: Su índice de sensibilidad (V1) respecto al *realismo* es mediano en relación al grupo, y ocupa el percentil 18 respecto al *constructivismo*. El número de unidades empleadas para caracterizar las posturas es alto (17 para el realismo y 7 para constructivismo), lo que interpretamos como muestra de interés en la realización de la tarea. Elige la unidad del texto en que indica el *sentimiento de fracaso en profesores y estudiantes* ante la postura *realista* de enseñanza, lo que hemos interpretado como una cierta valoración negativa del realismo (V2). En la caracterización del *realismo* emplea 7 unidades de carácter epistemológico y 8 didáctico, mientras que en la caracterización del *constructivismo* sólo aparecen caracterizaciones didácticas, con una breve introducción referente a cómo *el alumno* adquiere el conocimiento; explícitamente alude a la repercusión en la enseñanza. Afirma que "*hay teorías difíciles, resultados a los que se ha llegado después de mucho tiempo de trabajo de mentes privilegiadas (Teoremas y proposiciones,..) que deben ser transmitidas como objeto de enseñanza*"; mientras que el aprendizaje lo considera como una reflexión posterior ("*a partir de ellos es cuando la matemática debe ser objeto de aprendizaje*") (V4 y V6), con lo que la enseñanza es transmisión, el aprendizaje, que por una parte es consecuencia de la enseñanza, lo considera un "*aprendizaje después del aprendizaje*", que es reflexión sobre *lo aprendido*. "*Es a veces imprescindible*" la presentación del profesor, aunque "*se puede llegar a ellos por el método constructivista*"; es fundamental la resolución de problemas por el alumno "*ya que así el alumno construirá y lo que construya nunca lo olvidará*"; también es importante el debate para "*asimilar*" y para que "*el profesor pueda detectar concepciones erróneas*". De estas caracterizaciones podemos concluir que el estudiante parte de una aceptación del conocimiento matemático exterior, sin plantearse su relación con la naturaleza ni la forma en que se genera, sino que sólo interesa cambiar los métodos de enseñanza. El estudiante no está satisfecho con la enseñanza tradicional, y justifica el

"fracaso" en términos de sanción *realista* (el alumno *"no asimila"* el conocimiento transmitido), o en términos psicológicos ("*el conocimiento se construye, y lo construye el que aprende. Es decir, el alumno puede ver de distintas formas el objeto de aprendizaje y sacar distintas conclusiones acerca de él*"), pero no llega a percibir las razones epistemológicas que se plantean en el texto.

Estudiante nº 24: Su índice de coincidencia con los jueces es bajo -percentil 55 en *realismo* y sólo 3 en *constructivismo*. Emplea muchas unidades para caracterizar el *constructivismo*, y bastantes para el *realismo*, lo que interpretamos como interés en responder al comentario. Valora negativamente el *realismo*, por *"presentar la matemática como ciencia lejana al individuo.... inútil*". Valora positivamente el *constructivismo*, por presentar "*matemáticas necesarias para la vida....El alumno puede construirlas*". En la caracterización del *realismo* emplea 6 unidades de carácter epistemológico y 4 relacionadas con la enseñanza, separadas explícitamente, y de las cuales 4 no aparecen en el texto, encerrando una idea de la enseñanza *realista* como *enseñanza tradicional*, *enseñanza alejada del individuo, etc*; en el *constructivismo* emplea 6 unidades epistemológicas, en las que insiste en que el sujeto conoce mediante la acción, y 9 relativas a la enseñanza o el aprendizaje. Las unidades de aportación personal insisten en el alejamiento de la matemática de la realidad, en la enseñanza *realista*, mientras que en el *constructivismo* insiste en que "*rompe con la idea de que las matemáticas no tienen nada que ver con el individuo*", aproximando las matemáticas a "*la vida*". No aparecen contradicciones con el texto. Dice que las matemáticas pueden considerarse como *objeto de enseñanza* y como *objeto de aprendizaje,* aunque son preferentemente *objeto de aprendizaje*. Justifica que son objeto de *enseñanza* en base a que "*están ahí una serie de contenidos*", y que son *objeto de aprendizaje* porque debe darse un papel primordial al alumno. No aparece ninguna idea de enseñanza ni de aprendizaje, ni tampoco una valoración explícita de las actividades de enseñanza. Describe que en la enseñanza tradicional se ha enfatizado la *presentación de conceptos y propiedades por el profesor*. Como contrapartida plantea que se deben utilizar, de "*manera conjunta*", las tres actividades de enseñanza propuestas. Emplea la expresión "*resolución de problemas*", en oposición a la "*repetición de los ejercicios*", como un nuevo método de enseñanza frente a la enseñanza tradicional. De estas caracterizaciones podemos concluir que este estudiante rechaza la que considera postura realista, que identifica con la enseñanza tradicional. Después de hacer una descripción de la postura platónica y aristotélica, se limita a tomar la idea de separación sujeto-objeto para distinguir dos tipos de enseñanza: la enseñanza tradicional, que aleja la matemática de la vida, se hace inútil, mientras que la enseñanza que este estudiante liga al constructivismo, da mayor protagonismo al alumno. En este último modelo de enseñanza, que no aparece descrito, el profesor trabaja con el alumno, y cada uno de ellos realiza una tarea más creativa y abierta. En resumen, el estudiante no se ha planteado la caracterización epistemológica de las matemáticas. Su interés es fundamentalmente didáctico, abogando por una enseñanza más abierta, con mayor participación de todos los implicados.

2.5.6 Conclusiones y perspectivas del estudio piloto

A la vista de lo expuesto, podemos concluir que el comentario de textos nos ha permitido aproximarnos a las concepciones de los estudiantes para profesor. Hemos podido caracterizar a cada estudiante en relación con el resto del grupo, y con las tareas realizadas por él mismo durante el curso.

Los dos análisis externos del texto (comentario de textos de las profesoras de Lengua Española, y valoración de los jueces) han presentado una coincidencia notable en cuanto a la estructura y distribución. Ello nos permite reafirmarnos en el significado del texto, y, posteriormente, interpretar con mayor fiabilidad las respuestas de los estudiantes.

Más concretamente, el comentario de texto ha hecho que los estudiantes se expresen sobre aspectos epistemológicos y didácticos relacionados con sus creencias y concepciones. Además, la naturaleza del texto les ha proporcionado un vocabulario y unas referencias que ha hecho que sus respuestas sean más ricas. No obstante, hemos detectado limitaciones en las respuestas, como las referentes al interés con que han afrontado la tarea, la posible aparición de efectos de *deseabilidad social* etc.

Como consecuencia del estudio piloto, mantenemos que el **comentario de textos** es un instrumento interesante para facilitar que el estudiante manifieste sus creencias y concepciones, aunque se debería triangular con otros instrumentos que nos permitieran profundizar sobre las huellas escritas aparecidas en el comentario.

Como además nos planteamos estudiar los cambios que se operan en concepciones y creencias durante un curso de formación, el comentario de textos deberemos aplicarlo en diferentes momentos a lo largo de la preparación de los estudiantes, para estudiar la variación en las respuestas.

2.6 Objetivos de la investigación

Una vez presentada el área problemática (formación inicial de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria, estudio de cambios en concepciones y creencias de los estudiantes para profesor, respecto a las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje), vistos los antecedentes, que nos han permitido precisar las coordenadas de nuestra investigación, estudiada la verosimilitud de emprender el estudio, y puesto a punto el instrumento de recogida de datos, podemos enunciar los objetivos de la investigación.

Estos objetivos se encaminan a explicitar las concepciones y creencias de los estudiantes, por lo que afrontan diversas estrategias para facilitar esta explicitación, y el estudio del cambio que sufren a lo largo de un curso de formación inicial de profesores.

Desde los presupuestos que hemos venido manifestando en este capítulo, nos planteamos los siguientes objetivos:

a) Plantear a los estudiantes dilemas epistemológicos y didácticos que les inciten a explicitar sus creencias y concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje

b) Emplear reactivos que estimulen la reflexión de los estudiantes sobre su forma de concebir las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje.

c) Caracterizar las concepciones y creencias epistemológicas y didácticas de los estudiantes.

d) Estudiar la evolución que sufren estas creencias y concepciones durante el curso en el que nos encontramos inmersos.

e) Profundizar, mediante los estudios de sujetos particulares, en la estructura del cambio de creencias y concepciones.

f) Poner a punto instrumentos que nos permitan realizar la recogida y el análisis de datos de manera sistemática y fiel, y que nos faciliten el tratamiento de estos datos.

Parte 2ª: Evolución de las creencias y concepciones tras el primer encuentro con la práctica docente

> ***Un objeto que atañe al espíritu, es decir, un objeto que tiene significación, es "significativo" precisamente porque rebasa su sentido inmediato, porque expresa y expone una cosa de un alcance espiritual más general, todo un mundo de sentimientos y de pensamientos que han hallado en él un símbolo más o menos perfecto, lo que da precisamente la medida de su significación. El mismo amor que se experimenta hacia tal objeto es, en sí mismo, "significativo". Nos informa sobre el que experimenta este sentimiento, caracteriza sus relaciones con las cosas esenciales, con ese mundo que el objeto simboliza y que, consciente o inconscientemente, es amado a través de él.***
>
> ***Thomas Mann, La montaña mágica, 1924.***

Capítulo 3 Metodología de la segunda parte de la investigación

3.1. Introducción

La continuación de nuestra investigación se dirige en dos direcciones complementarias. La primera intenta operativizar los constructos delimitados, mediante el diseño de una rejilla de creencias y concepciones, que permita organizar los datos obtenidos a partir del comentario de textos. La segunda aplicará el comentario de textos como instrumento de recogida de datos, y la rejilla, como instrumento de organización de las categorías de valores de los datos, para estudiar la evolución que sufren estos constructos, concepciones y creencias a lo largo de un curso académico, y especialmente, cuando los estudiantes se enfrentan por primera vez a la tarea docente, mediante su paso por los institutos en las prácticas de enseñanza (practicum)

En este capítulo vamos a presentar el instrumento de análisis de los datos, y describiremos la segunda fase de la investigación.

3.2. Sujetos de la investigación

Los sujetos sobre los que se centra esta segunda fase de nuestra investigación son estudiantes de 5º curso de la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada. En el curso 1993-1994 se matricularon 30 estudiantes de la especialidad de Metodología, en la asignatura Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos de Bachillerato.

Vamos a estudiar las creencias y concepciones sobre las matemáticas y sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que mantenían estos estudiantes durante el curso citado 1993-94, y la evolución que sufren estas concepciones y creencias a lo largo de este curso. Este estudio va a referirse a las concepciones y creencias que se manifiestan en sus producciones escritas, trabajos realizados durante el curso, y de forma oral cuando se les interroga sobre aspectos de las matemáticas y de la enseñanza de las matemáticas.

Esta segunda parte de la investigación se ha realizado en dos fases. En la primera hemos hecho un estudio global de todos los estudiantes del grupo, empleando el comentario de textos. La segunda consiste en dos estudios de caso. Para esta segunda fase emplearemos una entrevista en profundidad y otros trabajos escritos de los estudiantes en el marco de la asignatura Prácticas de enseñanza. Para elegir los dos estudiantes objeto de los estudios de caso nos hemos basado en las respuestas al primer comentario de textos, y a los análisis de los primeros trabajos entregados. Como se observa, el comentario de textos es el instrumento que articula la mayor parte de esta investigación.

3.3. Enfoque de la segunda fase de la investigación

Fox (1981) clasifica los enfoques de investigación en dos dimensiones: la intención y el tiempo. Nuestra investigación la situaríamos en las coordenadas *presente-descriptivo*. En este enfoque sitúa Fox el "estudio de caso", el "examen sencillo" y el "examen multigrupo".

El estudio del grupo que nosotros hemos realizado afronta dos fines fundamentales. En primer lugar nos va a dar una visión de conjunto de las respuestas de los estudiantes al comentario de texto, mostrándonos las características de estas respuestas en los dos momentos, pre y post, y permitiéndonos detectar si ha habido cambios en las creencias y concepciones del grupo, y en qué han consistido esos cambios. En segundo lugar nos va a permitir situar a los estudiantes de los estudios de casos en relación con las respuestas de sus compañeros.

Teniendo en cuenta que vamos a usar datos verbales, con variables preferentemente cualitativas, vamos a emplear el *análisis de contenido* como técnica de análisis. Define Fox (1981) el análisis de contenido como:

> *procedimiento para la categorización de datos verbales o de conducta, con fines de clasificación, resumen y tabulación.* (p. 709)

Manning y Cullum-Swan (1994) lo definen:

> *El análisis de contenido es una técnica orientada cuantitativamente por la que se le aplican medidas estandarizadas para definir métricamente unidades, y se emplea para caracterizar y comparar documentos* (p. 464)

Nosotros nos identificamos especialmente con la siguiente definición de Behar (1991) que indica:

> *Actualmente el análisis de contenido se utiliza para la descripción de las*

características de mensajes verbales con el fin de formular inferencias a partir del contenido de los mensajes verbales.. (p. 359)

Fox (1981) señala tres etapas en el análisis de contenido:

1) Decisión de cuál será la unidad de contenido que se analizará; 2) elaboración del conjunto de categorías; y 3) elaboración de un fundamento lógico que sirva de guía para colocar las respuestas en cada categoría (p. 712)

Behar (1991) indica tres clases de *unidades de análisis*:

Las unidades de muestreo son las partes de la realidad observada o del flujo verbal, consideradas independientemente(..)
Las unidades de registro corresponden a las partes de las unidades de muestreo que pueden analizarse separadamente y suponen el mínimo segmento de contenido que puede adscribirse a una categoría determinada (..)
La unidad de contexto es la porción de material simbólico que debe examinarse para poder caracterizar la unidad de registro (..) (p. 362-363)

El análisis de contenido que hemos realizado parte de las producciones escritas de los estudiantes (sólo resumen del comentario de textos, para el estudio del grupo, y todos los trabajos realizados durante el curso, y de la transcripción de las entrevistas, para los estudios de casos). Estas producciones serán divididas en unidades de análisis.

Vamos a considerar como unidades de registro todas las frases diferenciadas del texto redactado por cada estudiante para comentar el texto. Igualmente consideraremos como unidad de registro la respuesta completa a cada pregunta planteada durante la entrevista. Con ello nuestro muestreo se extiende a todos las unidades de registro de los documentos empleados.

En el comentario de texto, la unidad de contexto será, en primer lugar, la porción del texto dedicado a caracterizar el polo realista o el constructivista, de las matemáticas o de la enseñanza de las matemáticas, y en segundo lugar, el texto en su totalidad. En la entrevista, la unidad de contexto será cada una de las partes en que se dividirá la entrevista.

Posteriormente pasaremos a categorizar estas unidades, adoptando para ello un criterio que permita validar la clasificación. Con estas categorías podremos obtener tablas de contingencia en el estudio del grupo, a las que se les aplicarán análisis estadísticos apropiados.

En los estudios de casos, la categorización nos permitirá estudiar todas las unidades, de todos los trabajos analizados. De esta forma podremos elaborar el perfil de cada estudiante.

3.4. Formas de analizar las creencias y concepciones. La Rejilla

Una vez presentada la población y los instrumentos de recogida de datos, hay que precisar cómo vamos a clasificar e interpretar la información recogida en los trabajos. El análisis de contenido va a comenzar con la división de los textos en unidades de información, pero el siguiente paso es la categorización de estas unidades, en un proceso lógico que nos facilite la interpretación de los datos.

Las creencias y concepciones epistemológicas que estamos estudiando se sitúan en una serie de planos de reflexión que conviene diferenciar. Algunas de ellas se refieren al *conocimiento matemático*. Otras se refieren a la *práctica de enseñanza y aprendizaje* de las matemáticas. Finalmente, vamos a diferenciar aquellas que se refieren al *conocimiento en didáctica de las matemáticas*.

De manera esquemática podemos decir que el *conocimiento matemático* surge en la interacción que se produce entre la comunidad investigadora en matemáticas y el medio, concebido este medio como fuente de problemas (medio físico, social y cultural).

El conocimiento matemático, debidamente transformado, se constituye en contenido del proceso de enseñanza, junto con el profesor y el alumno, en un contexto determinado. En este *sistema didáctico-práctico* se lleva a cabo la enseñanza, en vistas a lograr aprendizajes matemáticos. Los educadores matemáticos, contemplan y reflexionan sobre este circuito didáctico-práctico, planteandose cuestiones sobre cómo enseñar/aprender matemáticas, qué es enseñar/aprender matemáticas, qué criterios validan la enseñanza/el aprendizaje de las matemáticas. Para responder a estas cuestiones surgirá el *conocimiento didáctico*. Vamos a llamar ***plano didáctico*** a este nivel de reflexión que se realiza sobre el sistema didáctico-práctico desde la didáctica de la matemática.

En relación al *conocimiento matemático* surgen cuestiones de carácter episemológico, llevadas a cabo por distintos sujetos. Los epistemólogos (filósofos, epistemólogos propiamente dichos, algunos matemáticos, historiadores, sociólogos y psicólogos cognitivos de la matemática) analizan la naturaleza del conocimiento matemático, llegando a cuestionarse sobre *cómo* se accede (o se ha accedido a lo largo de la historia) al conocimiento matemático (*gnoseología del conocimiento*), *qué características* tiene el conocimiento matemático (*ontología del conocimiento matemático*), y qué *criterios* se emplean para *validar* el conocimiento matemático (*validación del conocimiento matemático*). Llamaremos a este plano de reflexión ***plano epistemológico***.

Pero los didactas de la matemática (ayudados de los filósofos de la educación, los teóricos en cognición, los epistemólogos, etc.) también realizan una reflexión teórica sobre todo el proceso contemplado hasta ahora, dando lugar a una visión epistemológica del propio análisis didáctico. En esta reflexión podemos destacar preguntas similares a las destacadas en los planos anteriores: cómo se llega al conocimiento didáctico, qué es el conocimiento didáctico, qué criterios se emplean para validar el conocimiento didáctico. Vamos a llamar a este nivel de
reflexión ***plano epistemológico-didáctico***.

Tanto en la reflexión epistemológica sobre el conocimiento matemático, como en la reflexión didáctica o en la epistemológica sobre el conocimiento didáctico cabe diferenciar una **perspectiva cognitiva** que se ocupe de cómo la cognición del sujeto individual llega a interactuar con el medio del circuito correspondiente. Situándonos en una visión piagetiana del conocimiento, vamos a interesarnos en la forma en que el sujeto individual llega, caracteriza y valida su conocimiento, sea este del plano que sea. Así, en el plano epistemológico nos detendremos en los invariantes que determina formas de *conocer, relacionarse con los mecanismos simbólicos, las etapas que atraviesa el conocimiento del sujeto, etc*. En el plano referido al conocimiento didáctico-práctico, vamos a diferenciar la consideración cognitiva del proceso de enseñanza, que se centra en la caracterización cognitiva del aprendizaje.

La reflexión epistemológica sobre la didáctica nos interesa en tanto nos suministre datos sobre la práctica de formación de profesores de matemáticas. Desde esta perspectiva, no nos hemos detenido a destacar dimensiones cognitivas en este plano, y vamos a incluir en la visión cognitiva del plano epistemológico de las matemáticas la parte de invariantes que se refieren a la interacción del sujeto con el conocimiento.

Vamos, pues a considerar, cinco planos para clasificar las creencias y concepciones de los estudiantes. Los dos primeros corresponden a la reflexión epistemológica sobre el conocimiento matemático (***planos epistemológico*** y ***psicoepistemológico*** - *o cognitivo-epistemológico*). Los dos siguientes a la reflexión práctica sobre la enseñanza (***psicodidáctico*** *o didáctico-cognitivo y* ***didáctico***). El último, a la reflexión epistemológica sobre el conocimiento didáctico (***epistemología de la didáctica***).

3.4.1 Dimensiones y casillas de la Rejilla

De acuerdo con la teoría del significado de los objetos matemáticos de Godino y Batanero (1994), vamos a diferenciar los procesos indicados en el epígrafe anterior según la *institución* que actúa, el *tipo de problemas* que afronta y los *fines* que aborda.

En relación al circuito generador del conocimiento matemático, la institución "comunidad investigadora en matemáticas" acuerda que un campo de problemas es interesante para su desarrollo, y a partir de actuaciones de grupos de investigación, surgen una serie de prácticas. La puesta en común de estas prácticas y el consenso sobre su significación en relación a los problemas, genera objetos matemáticos que emergen de estas prácticas. La reflexión que realizan los epistemólogos de las matemáticas sobre esta emergencia da lugar a lo que llamamos gnoseología de los conocimientos matemáticos. Entre las prácticas que la comunidad investigadora ha acordado, se encuentran las destinadas a validar los objetos que serán considerados aptos para resolver los problemas del campo, que la reflexión epistemológica señala como criterios de validación del objeto. Otras prácticas se encargan de formular el objeto en lenguaje compartible y de relacionar esta formulación con la que se hizo de los problemas. Estas prácticas permiten abstraer lo que los epistemólogos interpretan como caracterización del objeto, u ontología del conocimiento matemático. Estas tres etapas no se desarrollan secuencialmente en el circuito, sino que están sujetas a la aparición de nuevos consensos y disensos entre los investigadores en relación a las prácticas de cada nivel. Igualmente, la reflexión epistemológica sobre este circuito no es unívoca, sino que se presta a diversas interpretaciones y formas de análisis entre los epistemólogos.

En el segundo circuito, la institución educativa asume algunos objetos que son significativos para la institución matemática, y afronta el problema de hacer significativos estos objetos para otros miembros de la misma institución. Esta tarea es asumida por los profesores, sujetos del circuito práctico-didáctico. La comunidad didacta comienza por trasponer (Chevallard, 1985) los campos de problemas y los objetos que de ellos emergen a campos de problemas de matemáticas escolares, generando los objetos de la matemática escolar. Entre las prácticas que tratan de resolver el problema de hacer significativos los objetos matemáticos a otros miembros de la comunidad educativa también aparecen unas prácticas validativas y otras comunicativas.

La división del fenómeno didáctico en los cinco planos señalados en el epígrafe anterior tiene un carácter analítico relacionado con la investigación, y no presupone una consideración de ellos como departamentos estancos. Nuestra visión de la didáctica de las matemáticas parte de reconocer la importancia de todos los elementos contemplados en los dos circuitos, como fuentes de problemas de la disciplina.

Consideramos que el estudiante afronta su preparación didáctica con una cierta concepción sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje. Estas concepciones se refieren a algunos de los circuitos descritos, con lo que su distinción nos facilita la interpretación y explicitación. Cabe pensar, por ejemplo, que un estudiante nos demande en el curso de formación, una preparación específica basada en la dimensión práctica del sistema didáctico. Pero esta expectativa estará influenciada por su forma de concebir el proceso didáctico. Tal como hemos mostrado, esta concepción interferirá con la forma de concebir el conocimiento matemático. Así, por ejemplo, si el estudiante concibe el conocimiento matemático como algo externo al investigador, le concederá una gran importancia a la transmisión a los aprendices, de manera que estos puedan entrar en la colectividad cultural. Si, por el contrario, concibe el conocimiento matemático en relación al sujeto, le concederá más importancia a la facilitación de la interacción del aprendiz con el medio, y se interesará por la representación que el alumno se hace del medio. También la forma de concebir la relación personal del sujeto con el medio influirá sobre la forma de concebir el aprendizaje. Por último, todas estas consideraciones influirán sobre sus creencias y concepciones sobre su formación como profesor y la de sus competencias profesionales, así como sobre el estatuto que le concederá al conocimiento didáctico.

Con vista a organizar estas creencias y concepciones hemos analizado en tres etapas de interacción del sujeto con los problemas las reflexiones que abordan cada uno de los planos. En primer lugar se ha presentado la *forma en que los sujetos interactúan con el conocimiento*, posteriormente hemos destacado la *caracterización del conocimiento* y, por último, la *forma en que se valida*. Con ello hemos considerado tres **etapas** dentro de cada plano: *gnoseológica*, *ontológica* y *validativa*. La división en etapas dentro de cada plano nos facilitará la comprensión de alguno de los argumentos que organiza el sistema de creencias del sujeto.

Usando estos análisis, hemos elaborado una tabla de doble entrada, en la que hemos considerado los planos junto con los procesos o etapas que se producen en cada uno de ellos. Precisemos operativamente cada plano y cada etapa.

(a) Planos: Constituyen diferentes niveles de reflexión sobre el proceso educativo. El primer nivel considerado es la reflexión epistemológica sobre el establecimiento del conocimiento matemático (objeto matemático emergente de problemas considerados por la institución de investigadores matemáticos) hasta el estudio del conocimiento didáctico (objeto didáctico emergente de las prácticas consensuadas por la comunidad de educadores matemáticos), pasando por el estudio de los significados de enseñanza y aprendizaje. Vamos a considerar los planos siguientes:

> a) **Plano Epistemológico**. Desde la perspectiva epistemológica, reflexiona sobre la relación entre el sujeto (que en este plano es el sujeto epistémico: el investigador y la comunidad que investiga en matemáticas), el mundo externo (matemático, científico, cultural y natural) como campo de problemas, y la comunidad (científica) que asume y acuerda que los problemas son interesantes, que el conocimiento propuesto resuelve estos problemas, y que tal resolución debe adquirir el estatuto de conocimiento (concebido en este plano como conocimiento matemático sabio)
>
> b) **Plano psicoepistemológico.** Desde la perspectiva de la ciencia cognitiva, considera las operaciones internas que ocurren en el sujeto al enfrentarse al medio para incrementar su conocimiento personal. El sujeto es el investigador

(como representante del sujeto epistémico) y el conocimiento es el conocimiento matemático.

c) **Plano Psicodidáctico**. También desde la perspectiva cognitiva, se ocupa de las
operaciones internas que se realizan en el alumno frente al conocimiento asumido
por la comunidad educativa, para incrementar su relación con ese conocimiento.

d) **Plano Didáctico**. La comunidad educativa convierte el conocimiento que ha asumido la comunidad científica, en un medio para ayudar a las nuevas generaciones a resolver problemas de relación con el medio y de supervivencia del grupo social. El grupo social decide ayudar al nuevo miembro a resolver esos problemas a la vez que asume como problema propio la permanencia del grupo, con lo que asume la enculturación de los miembros jóvenes. En este nivel los didactas contemplan las relaciones entre el conocimiento (conocimiento matemático escolar), los sujetos (profesor y estudiantes) y el grupo social (comunidad escolar).

e) **Plano epistemológico-didáctico**. Desde la perspectiva epistemológica, se contempla la reflexión que realizan los didactas de la matemática sobre la práctica educativa como campo de problemas, y sitúa a los sujetos que actúan en el proceso educativo (profesores y estudiantes) y a la comunidad (comunidad de educación matemática) frente a ese campo de problemas. Con ello se da lugar a un proceso similar al comprendido en el nivel **a)**, pero con vistas a generar conocimiento científico sobre la educación matemática.

(b) Etapas: Describen las fases que atraviesa el conocimiento hasta llegar a constituirse en tal.

Se diferencian en los fines perseguidos y en el grado de generalidad de esos fines. Vamos a

considerar las siguientes etapas.

1) Etapa gnoseológica. El fin de esta etapa es llegar al conocimiento. Consideraremos, pues, las actividades prácticas concretas que ocurren en el sujeto individual o colectivo del circuito que corresponda, cuando se enfrenta a un problema e intenta resolverlo.

2) Etapa ontológica. El fin de esta etapa es caracterizar la esencia del conocimiento científico y de las operaciones de captación y de apropiación del conocimiento por los sujetos, así como del hecho de facilitarlo a los demás. Las unidades de información que introduciremos en esta etapa se caracterizan por describir la esencia de las interacciones, es decir, aquellos aspectos de la interacción que no suponen una actuación deliberada de otros agentes. Describen las operaciones internas que se realizan durante la interacción. (Así, por ejemplo, consideraremos que la afirmación "enseñar es transmitir", es una caracterización de la esencia de la enseñanza, por tanto de la etapa ontológica, mientras que al afirmar que se enseña mediante un discurso adecuado, estamos describiendo aspectos de actuación deliberada de un agente, por lo tanto gnoseológica). Además introduciremos las caracterizaciones que la comunidad hace del conocimiento científico, las metáforas que se emplean para caracterizar la esencia de los conocimientos de los diferentes niveles.

3) Etapa validativa. El fin es validar, sancionar, por lo que introduciremos en esta etapa los criterios que la comunidad y/o el individuo emplean para aceptar que las propuestas particulares o grupales han resuelto los problemas. También introduciremos los agentes que sancionan y las acciones que realizan los diferentes agentes para sancionar la consecución de los fines de las diferentes interacciones.

Con estas dos dimensiones hemos generado la rejilla que aparece en la tabla 3.1

Tabla 3.1: Rejilla para clasificar las unidades de información según Planos y Etapas.

P L A N O S		E T A P A S	
		Gnoseológica	Ontológica
	Episte-moló-gico	Cómo se llega al conocimiento matemático Es descubrimiento/creación **(Categoría 1)**	Qué son las matemáticas Dónde están Características del conocimiento matemático Matemática bella/matemática útil **(Categoría 6)**
Psico-lógico	Psico episte..	Cómo llega el sujeto a incrementar su conocimiento matemático **(Categoría 2)**	Qué es incrementar el conocimiento matemático del sujeto **(Categoría 7)**
	Psico didác.	Cómo llega el sujeto a aprender matemáticas **(Categoría 3)**	Qué es aprender matemáticas **(Categoría 8)**
	Didác tico	Cómo enseñar matemáticas **(Categoría 4)**	Qué es la enseñanza de las matemátic **(Categoría 9)**
Episte molo gía	de la Didácti-ca	Cómo acceder al conocimiento didáctico **(Categoría 5)**	Qué es el conocimiento didáctico Cómo es el conocimiento didáctico Características del conocimiento didáctico

			(Categoría 10)

Cada casilla de la rejilla se convierte en una categoría de una variable bidimensional (Plano, Etapa). Veamos con más detalle la caracterización, para lo cual indicaremos el sujeto que interviene en el circuito analizado, dando por supuesta la institución que reflexiona sobre este circuito.

I. Categorías de la ***etapa gnoseológica.***

Categoría 1: ¿Cómo se llega al conocimiento matemático? Incluiremos en esta categoría aquellas unidades que se refieren a las acciones concretas que realiza la comunidad matemática para llegar a alcanzar la solución de los problemas. El sujeto de esta categoría es la comunidad matemática, y el conocimiento, el conocimiento matemático, en el sentido de conocimiento sabio.

Categoría 2: ¿Cómo llega el sujeto a incrementar su conocimiento? En esta categoría se incluirán las unidades de información que describan o caractericen el proceso por el que el sujeto, interna y externamente, llega a conocer. Acciones que ocurren en el interior del sujeto y que son facilitadas por acciones externas del sujeto para incrementar el dominio del medio. El sujeto de esta categoría es el investigador (como representante del género humano), y el conocimiento, el conocimiento matemático, como conocimiento sabio.

Categoría 3: ¿Cómo llega el sujeto a aprender? Esta categoría encierra las unidades que se refieran al proceso sistemático, deliberado, por el que el sujeto llega a apropiarse del conocimiento matemático escolar. El sujeto de la categoría es el alumno, y el conocimiento es el conocimiento matemático escolar, es decir, el conocimiento asumido por la comunidad científica, filtrado por la comunidad educativa.

Categoría 4: ¿Cómo enseñar? Categoría que abarca las unidades que se refieren a la actuación deliberada y práctica del profesor o de la comunidad educativa para ayudar a que el alumno se apropie del conocimiento matemático escolar. Los sujetos de esta categoría son el profesor, el alumno y la comunidad educativa, y el conocimiento es el conocimiento matemático escolar.

Categoría 5: ¿Cómo se accede al conocimiento didáctico? En esta categoría incluiremos las unidades de información que describan acciones concretas que desarrolla la comunidad científica para llegar a adquirir el conocimiento científico sobre la educación. El sujeto de la categoría es el investigador y la comunidad investigadora en educación, y el conocimiento es el conocimiento didáctico sobre las matemáticas (el conocimiento sabio sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, la reflexión sobre la educación matemática)

II Categorías de la ***etapa ontológica***

En esta etapa se afrontan cuestiones ligadas a la caracterización de los planos, por lo que

encierra preguntas comunes (*qué es..?*) junto con preguntas específicas (relación con otros conocimientos)

Categoría 6: ¿Cómo se caracteriza el conocimiento matemático? Categoría muy amplia que encierra aquellas unidades que describen las características, o bien la naturaleza, la esencia y la relación que tiene el conocimiento matemático con la naturaleza física, así como las metáforas relacionadas con estos aspectos. El sujeto de esta categoría es la comunidad matemática y el conocimiento, el conocimiento matemático sabio.

Categoría 7: ¿Qué es incrementar su conocimiento? En esta categoría introduciremos las unidades que definan explícitamente o caractericen el proceso cognitivo por el que el sujeto incrementa su conocimiento. Es decir, las operaciones internas del sujeto que le llevan a alterar su relación con el medio, sin intervención deliberada de ningún otro agente. El sujeto de esta categoría es el investigador, como representante del género humano, y el conocimiento, el conocimiento matemático sabio.

Categoría 8: ¿Qué es aprender? Incluye las unidades que definan explícitamente el proceso de interacción entre el alumno y el conocimiento matemático escolar, traspuesto por el profesor o la comunidad educadora matemática. Es decir, las unidades que describan las operaciones que se realizan en el interior del sujeto durante el proceso de interacción con el conocimiento matemático escolar. El sujeto de esta categoría es el alumno y el conocimiento, el conocimiento matemático escolar.

Categoría 9: ¿Qué es enseñar? En esta categoría se introducirán las unidades que definan acciones explícitas del proceso de interacción didáctico alumno - profesor - conocimiento matemático escolar, sin incluir las descripciones de las operaciones materiales que se realizan para facilitar esta interacción (que corresponden a la categoría 4). Los sujetos son el profesor y el alumno, y el conocimiento es el conocimiento matemático escolar.

Categoría 10: ¿Qué es el conocimiento didáctico, sobre enseñanza de las matemáticas? En esta categoría se incluyen aquellas unidades que caractericen el conocimiento didáctico y describan la esencia del mismo. Los sujetos de esta categoría son los investigadores en educación matemática y en didáctica, y el conocimiento, es el conocimiento científico sobre cómo se enseñan y aprenden las matemáticas (conocimiento sabio sobre educación matemática).

III. Categorías de la ***etapa validativa***.

La validación encierra una delimitación de los sujetos que sancionan, así como los criterios que se emplean para ello. Estos criterios dan lugar a especificidades en cada uno de los

planos, por lo que el abanico de preguntas es más amplio que el de las otras etapas.

Categoría 11: ¿Cómo se establece la validez del conocimiento matemático? En esta categoría se incluyen varios aspectos relacionados con la validación del conocimiento: los criterios que emplean el investigador y la comunidad científica para aceptar como conocimiento matemático el problema planteado y la solución propuesta; los sujetos que sancionan este conocimiento; los procedimientos que emplean el individuo y la comunidad para aceptar como conocimiento sabio un conocimiento matemático, etc. Son sujetos de esta categoría la comunidad matemática y el investigador. El conocimiento es el conocimiento matemático.

Categoría 12: ¿Cómo se llega a considerar que el individuo ha incrementado su conocimiento? Incluimos en esta categoría los criterios que se emplean para considerar que el sujeto ha comprendido algún fenómeno, que tiene cierto grado de dominio sobre el conocimiento matemático ya aceptado en la comunidad matemática. También se incluyen los criterios que cada investigador particular emplea para considerar que sus prácticas resuelven los problemas planteados. El sujeto es el investigador y el conocimiento es el conocimiento matemático.

Categoría 13: ¿Cómo se valida el aprendizaje? Categoría que encierra las unidades que explicitan los criterios que emplea el profesor y el alumno para considerar que éste último ha adquirido el conocimiento matemático escolar. Sujetos que deben determinar que se ha adquirido el conocimiento. Estrategias para dar validez a la adquisición del conocimiento.
Categoría 14: ¿Cómo se valida la enseñanza? En esta categoría se encierran las unidades que se refieren a los criterios que se emplean para determinar el conocimiento matemático que debe incluirse en los curricula escolares, los sujetos que seleccionan estos conocimientos y los criterios que emplean los sujetos implicados para dar validez al proceso educativo. También incluimos las que se refieren a estrategias para dar validez al proceso por el que se facilita el conocimiento. Los sujetos son el profesor, la administración educativa, la comunidad educativa, el alumno, etc. El conocimiento es el conocimiento matemático escolar.

Categoría 15. ¿Cómo se valida el conocimiento didáctico? Dando un paso más en la categoría anterior, en la 15 se incluyen las unidades que se refieren a los criterios que emplea el investigador y la comunidad de Educación Matemática para decidir que las observaciones y razonamientos referidos a cómo enseñar constituyen conocimiento que debe/puede ser difundido. Los sujetos pertenecen a la comunidad científica relacionada con la educación matemática, y el conocimiento es el conocimiento didáctico sabio.

3.4.2 Análisis del texto empleando la Rejilla

Esta Rejilla nos ha permitido analizar, tanto el texto entregado a los estudiantes para su comentario, como los textos producidos por los estudiantes y las respuestas en la entrevista. Es decir, esta Rejilla se constituye en un instrumento para el "análisis del texto" y para el "análisis del contenido" de los comentarios de texto realizados por los estudiantes.

Para llevar a cabo el análisis de contenido dividimos el texto original en unidades de información, y las codificamos. El proceso de codificación comenzó por diferenciar las unidades que en el texto refiere al *realismo* de las que dedica al *constructivismo*. O sea, definimos una nueva variable categórica, que denominaremos **Polo**, con dos valores: realismo y constructivismo.

A las unidades dedicadas al realismo las codificamos con un número de tres cifras comenzando con el **1**, mientras que a las referentes al constructivismo las codificamos con un número que empieza por **2**. En el texto las unidades realistas aparecen en los dos primeros epígrafes y las constructivistas en los dos últimos. Las otras dos cifras de cada código corresponden al número de orden en que aparecen en el texto: del 01 al 43 (101 al 143) en el *realismo*, y 01 a 32 (201 a 232) en el *constructivismo*.

Con ayuda de la Rejilla hemos completado el análisis realizado con el texto, situando los párrafos del artículo en cada categoría o valor de la variable tridimensional (Plano, Etapa, Polo). Esto nos permite estudiar en que casillas hacen los autores mas hincapié, así como qué casillas no han atendido. Gracias a ello observamos que el artículo enfatiza especialmente las categorías 6 y 4, es decir, caracteriza el conocimiento matemático y la forma de enseñarlo. Presta cierta atención a la forma de acceder al conocimiento matemático, y los aspectos epistemológicos siempre los contempla desde la perspectiva constructivista.

Tampoco en el texto completo se consideran todas las categorías descritas. En concreto, no se indica cómo se accede al conocimiento didáctico en ninguna de las dos corrientes o polos (categoría 5). No aparece una definición explícita de aprendizaje en el realismo, ya que se supone que el aprendizaje deriva como consecuencia de la enseñanza. Una breve alusión en el texto no analizado indica que para el realismo, *aprender es cambiar conductas observables*. (Categoría 8).

En el texto se hace alusión a **cómo** se enseña en una didáctica constructivista (*diseñar y presentar situaciones*), pero no **se caracteriza** específicamente la enseñanza en la perspectiva constructiva (tal como lo hacen las diferentes escuelas constructivistas, Lerman 1994) (Categoría 9). Parece que la didáctica constructiva se reduce a la psicología. Se enfatiza la forma de captar el conocimiento pero no se indica cómo colaborar en el aprehender, qué estatuto tiene la reflexión sobre la forma de colaborar a aprehender. (Categoría 10). Sin embargo, la postura realista se ha caracterizado en el artículo de una forma epistemológica, pero no psicológica, lo que lleva a desatender la caracterización del aprendizaje en el realismo y los criterios de validación de la comprensión del sujeto, en el polo realista (Categoría 12)

Las únicas reflexiones constructivistas que tienen sentido de norma se destinan, en el artículo, a criticar la postura realista (por historicidad de verdad matemática, por no poder basarse en ella para sancionar aprendizaje, y por luchar contra la validación heterónoma), más que a delimitar criterios de validación constructiva. En consecuencia, y dado que tampoco se delimita el conocimiento didáctico, no se indican criterios de validación del conocimiento didáctico en la perspectiva constructivista (categorías 11, 12, 13, 14 y 15)

En el texto entregado para el resumen aparecen representadas prácticamente todas las categorías que están ocupadas por párrafos del artículo. El primer epígrafe del artículo (párrafos del 1 al 12) está dedicado a presentar el problema de manera general, principalmente de manera epistemológica, y sin inclinarse por ninguno de los dos polos. Sin embargo, esta introducción general y supuestamente neutra no aparece en el texto entregado a los estudiantes. Al haber prescindido de parte del artículo hemos eliminado informaciones referentes a la postura constructivista, especialmente, tanto en el aspecto epistemológico como en el psicológico. Sin embargo, la información relacionada con el plano didáctico se ha mantenido prácticamente en su totalidad en el extracto comentado por los estudiantes.

3.5 Variables de la investigación

La rejilla constituye un sistema de categorías del significado de las unidades de información. Este sistema de categorías permite, por una parte, obtener tablas de frecuencias de las unidades de información contenidas en los comentarios de texto de los estudiantes, y por otra, agrupar las informaciones obtenidas en distintos trabajos de los estudiantes con objeto de elaborar los perfiles en los estudios de casos. Para definir estas categorías hemos establecido unas dimensiones que nos permiten clasificar las unidades de información, y que constituyen aspectos interesantes para nuestro estudio. Estas dimensiones van a constituir las variables de nuestra investigación.

Las características o dimensiones que hemos descrito para elaborar la rejilla y el sistema de categorías se pueden considerar variables en el sentido que las define Fox (1981), y nos permiten diferenciar aspectos que toman diferente valor, con lo que nos informan sobre los datos.

Diferenciamos de partida dos variables, con los siguientes valores:

Variable 1: ETAPA:

Gnoseológica (codificada ACCE, de acceso al conocimiento)

Ontológica (codificada OBJE, de objeto del conocimiento)

Validativa (codificada VALI)

Variable 2: PLANO:

Epistemológico (codificado EPI)

Psicológica ∩ Epistemológica (codificada SIEP, Psicoepistemológica)

Psicológica ∩ Didáctica (codificada PSIC)

Didáctica (codificada DIDA)

Epistemología de la Didáctica (codificada EPDI)

Al analizar el texto hemos presentado otra dimensión que nos ha dividido cada categoría en dos partes. Esta dimensión, que vamos a llamar POLO, se refiere a la identificación de la unidad con las corrientes epistemológicas y didácticas que define el artículo de Moreno y Waldegg, es decir, *el realismo y el constructivismo*. Dado que el artículo presenta las dos corrientes en oposición, no ha sido difícil decidir si una unidad del artículo se refería al realismo
o al constructivismo. Según la posición de la unidad en el artículo y el contenido de esa unidad en el contexto, hemos clasificado todas las unidades en tres posiciones dentro de cada categoría: polo realista, polo constructivista y descripción general de la categoría. Aparece así otra variable que vamos a considerar, la variable POLO, cuyos valores van a ser Realismo (codificado REAL), y Constructivismo (codificado CONS).

Para clasificar las unidades de los comentarios en relación a la variable POLO recurrimos a identificar la unidad del texto de la que deriva. En caso de que la unidad no corresponda a ninguna del texto, hemos atendido a la posición de esa unidad en la parte del resumen dedicada a describir el realismo o constructivismo.

La variable POLO sólo será considerada en la parte del comentario de textos de los estudiantes que encierra el resumen del texto, con lo que el referente para clasificar las unidades en relación a esta variable será siempre el texto y como en él se caracterizan estas dos corrientes.

Las variables descritas: ETAPA, PLANO (y POLO, en el caso del resumen del cuestionario) se han obtenido a partir de la definición de la rejilla que constituye el sistema de categorías de las unidades de información extraídas de todos los instrumentos de toma de datos (Comentario de textos, trabajos de los estudiantes durante el curso y entrevista). Estas categorías permitirán describir las creencias y concepciones del estudiante que aparecen en sus producciones. Pero otro objetivo de la investigación es estudiar el cambio que se opera en las creencias y concepciones, por lo que vamos a emplear esta categorización y caracterización de creencias y concepciones en dos momentos distintos. Aparece pues una variable independiente, que se refiere al momento en que se toman los datos. Vamos a llamar a esta variable **TEST**, con dos valores PRE y POS. La aplicación del cuestionario en dos momentos distantes en el curso deja clara la diferencia entre estos dos valores de la variable test en el estudio de grupo, ya que este estudio se relaciona exclusivamente con este instrumento.

Para los estudios de casos hemos considerado PRE los trabajos realizados antes de la fase de prácticas de enseñanza (practicum), realizado durante el mes de enero de 1994. Los trabajos realizados a partir de ese momento se introducen en POS.

Un análisis pormenorizado, en el que la mayoría de las variables tienen como unidad de análisis las unidades de contenido, corre el riesgo de perder de vista el contenido global del texto. Por ello, en los estudios de casos, hemos atendido a otras dimensiones, que se refieren a ideas globales extraídas de los textos analizados, tanto de las respuestas del estudiante al comentario de textos como de la trascripción escrita de la entrevista.

Nos ha interesado la estructura de los textos de los estudioantes, para lo cual nos hemos servido de los comentarios de texto realizadas por las profesoras de Lengua y Literatura Española (§2.5.1). También hemos analizado el contenido de las unidades que no corresponden con alguna unidad del texto y si aparecen contradicciones internas y externas de las unidades del resumen respecto a las unidades del texto. Veamos algún ejemplo:

(Caracterización de la enseñanza realista: aparición de una contradicción con el texto) "*Se exige al alumno un discurso análogo al enseñado por el profesor, teniendo en cuenta, la capacidad e inteligencia del alumno"* (Unidad 9, 6-pre) Frente a unidad 132 del texto: *"Aunque se reconocen diferencias entre los estudiantes (de inteligencia, de actitud, de motivación), estas diferencias se borran al solicitar respuestas únicas y universales, centradas principalmente en el contexto de justificación*"

En la entrevista, hemos detectado si el estudiante reconoce que la cuestión planteada supone un dilema o problema para el que no dispone de solución, fijándonos en la actitud del entrevistado ante las preguntas relativas a cuestiones epistemológicas o a reflexiones sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

(pregunta)- *Es decir, la manera de que plantees una clase o de que estructures una clase va a reflejar ¿qué?*

.(54) **A** (Respuesta)- No se si es la estructura en sí. Pero es la manera.. Va a reflejar lo que yo pienso que son esos conceptos. O esos (Pregunta)- *Y ¿qué reflejarían tus clases?. ¿Que pretenderías que tus clases reflejaran?*

.(55) **R** - Hombre yo que se. ¿Que pretendería que ..?

-*¿Cómo crees tú que se transmitiría lo que tú piensas en tus clases?*

(56) **R** -La verdad no se.. ¿Lo que yo pienso?..

En los perfiles de los estudiantes de los estudios de casos, aparecen estas dimensiones, completando el análisis realizado por medio de las variables definidas.

3.6 Categorías de creencias y concepciones sobre las matemáticas y sobre el aprendizaje y la enseñanza

Presentaremos a continuación ejemplos prototípicos de respuestas a las preguntas fundamentales que surgen en cada categoría. Estas respuestas proceden de estudios sintéticos, que se han ocupado de analizar las creencias y concepciones que han surgido a lo largo de la historia. La mayor parte de ellos han sido presentados en el capítulo 1, apartado

1.4. En algunos casos, estas respuestas aparecen en continuos entre posturas extremas, junto con alguna postura intermedia sintetizadora. Este es el caso de los diez puntos sintéticos del texto de Cañón (1993), en los que hemos encerrado entre corchetes la postura defendida por la autora.

Para señalar los extremos de los continuos, hemos indicado las posturas extremas, separadas por un signo de oposición ⟸⟹.

Otras respuestas presentan diferentes concepciones que no encierran una oposición, sino que establecen diferencias cualitativas en varios factores.

Hemos numerado las preguntas dentro de cada categoría de manera que pueden servir de código para una referencia posterior, como en los estudios de casos. Con el mismo fin, hemos ordenado y separado con letras las categorías de respuestas.

Etapa gnoseológica

(Categoría 1) [Gnoseología del conocimiento matemático]

(01.1) ¿*Cómo se llega al conocimiento*? **a)** Es descubrimiento ⟸⟹ [simultáneamente creación (formulación) y descubrimiento (no arbitrario)] ⟸⟹ es creación (Cañón, cuestión 1) **b)** Se llega por los sentidos ⟸⟹ por la razón (Copleston) ⟸⟹ por construcción cuasi-empírica (Lakatos, Davis y Hersh)

(01.2) ¿*Cómo se generan los conocimientos matemáticos*? **a)** Redactando axiomas incuestionables, definiciones, teoremas ⟸⟹ [las teorías maduras se constituyen en axiomas distinguiendo períodos] ⟸⟹ cuestionando axiomas, demostraciones, contraejemplos (Cañón, cuestión 5)

(Categoría 2) [Psicología del acceso al conocimiento]

(02.1) ¿*Cómo llega el sujeto a incrementar su conocimiento matemático*? **a)** Principios constructivistas (vonGlaesserfeld): 1: el conocimiento es construido activamente por el sujeto, no recibido pasivamente desde el entorno; 2: llegar a conocer es un proceso adaptativo que organiza el mundo experiencial; no se descubre en un mundo externo preexistente e independiente de la mente del que conoce (constructivismo radical). (Vergnaud)

(Categoría 3) [Psicología del acceso al aprendizaje]

(03.1) ¿*Cómo se llega a aprender*? a) Creando reflejos condicionados u operantes (asociacionistas) ⟸⟹ transformando el sujeto las acciones externas sociales en acciones internas (Vigotskii, estructuralismo) (Pozo) b) Por la escucha e imitación de actividades ⟺ por dialéctica actividades-lección magistral (Brousseau, Robert y Robinet) c) Aumentando las destrezas (modelo conductista) Proporcionando teorías personales (modelo de desarrollo) Mediante un proceso de enculturación (modelo de aprendizaje) (Farnhan-Digory)

(03.2) ¿*Qué sujetos participan en el aprendizaje*? a)El aprendizaje se induce por el profesor al alumno ⟺ el aprendizaje es un fenómeno individual ⟺ tiene que tener una fase colectiva (Brousseau, Robert y Robinet)

(03.3) ¿*Qué hace el alumno durante el aprendizaje*? a) Sigue directrices, domina modelo ⟺ recibe ⟺ explora con autonomía (Ernest, 1989a) b) Recibe ⟺ Explica, comunica, argumenta, recibe (Brousseau)

(Categoría 4) [Gnoseología del proceso de enseñanza]

(04.1) ¿*Cómo enseñar*? a) Transmitiendo conocimientos finales ⟺ basándose en intuiciones de los alumnos (Vergnaud) b) Creando conflictos cognitivos (const. social) ⟺ sólo mediante construcción personal (const. radical) (Ernest, Lerman)

(04.2) ¿*Quién marca la secuencia de contenidos en la enseñanza*? a) La estructura del conocimiento matemático ⟺ el desarrollo de las ideas en los alumnos (Peterson)

(04.3) ¿*Qué hace el profesor en la enseñanza*? (Antes) a) Programa un guión de actuación fijo ⟺ reflexiona previamente y elabora un guión flexible (Ernest) b) Organiza para una presentación clara ⟺ para facilitar construcciones de los alumnos (Peterson) (Durante) a) Profesor expone magistralmente ⟺ organiza actividades de alumnos mediante situaciones de acción, de comunicación y de institucionalización (Brousseau) b) Profesor instructor ⟺ explicador ⟺ facilitador (Ernest) c) Profesor como mediador (constructivismo social) ⟺ facilitador (constructivismo radical) (Lerman) d) Separa teoría y práctica ⟺ interrelaciona contenidos con aplicaciones que preceden y siguen (Ernest) e) Sigue el libro de texto ⟺ modifica con actividades adicionales ⟺ diseña curriculum (Ernest) f) Se ocupa preferentemente de los buenos en matemáticas ⟺ favorece aprendizaje de todos (Peterson) g) Da recetas y evita obstáculos en los alumnos con dificultades ⟺ da una visión global a estos alumnos para que no pierdan sentido (Peterson)

(Categoría 5) [Gnoseología del conocimiento didáctico]

(05.1) ¿*Cómo se accede al conocimiento didáctico*? a) Mediante la práctica docente ⟺ Mediante una conjugación teoría-práctica b) Aprendiendo a enseñar (profesor eficaz) ⟺ introduciéndose en los usos de los docentes (socialización del profesor) ⟺ mediante el crecimiento personal (desarrollo personal) (Brown y Borko) c) Clasificación en relación a dos dimensiones interactivas: a) grado en que se entienden los contextos sociales: como ciertos o válidos ⟺ como problemáticos o discutibles; b) grado en que el curriculum de formación: está establecido de antemano ⟺ no está establecido (Zeichner) d) Perspectivas en formación de profesores (Ferry)

Etapa ontológica

(Categoría 6) [Ontología del conocimiento matemático]

(06.1) *¿Cómo se caracteriza el conocimiento matemático*? **a)** Por el rigor y un lenguaje formalizado ⟸⟹ [el rigor es imperativo en deducción confirmatoria de construcciones] ⟸⟹ rigor es un fantasma que reduce la matemática a la lógica (Cañón, cuestión 4)

(06.2) *¿Qué son los conceptos matemáticos*? **a)** Resultados generales ⟸⟹ [casos particulares, pero se avanza con resultados generales] ⟸⟹ génesis de resultados y redes de problemas (Cañón, cuestión 6)

(06.3) *Características del lenguaje matemático* **a)** Abstracto ⟸⟹ [abstracción no recoge complejidad, pero no es necesario recoger la génesis] ⟸⟹ génesis de lenguaje en historia (Cañón, cuestión 7)

(06.4) *Papel de la lógica en matemáticas* **a)** Matemáticas exige sistema formal ⟸⟹ [lógica es forma necesaria pero no suficiente] ⟸⟹ la racionalidad validativa es relativa a la época (Cañón, cuestión 8)

(06.5) *¿Qué relación tienen los conocimientos matemáticos con la naturaleza*? **a)** La naturaleza está escrita en lenguaje matemático, es, pues, clave para entender el cosmos ⟸⟹ [naturaleza está en continua interacción con mente humana; se crean modelos matemáticos que median] ⟸⟹ es idealización a partir de experiencia (Cañón, cuestión 9)

(06.6) *¿Para qué sirven las matemáticas*? **a)** Son útiles por sí, por su belleza ⟸⟹ [la belleza y utilidad van ligadas] ⟸⟹ es útil a la ciencia (Cañón, cuestión 10)

(Categoría 7) [Ontología del conocimiento]

(07.1) *¿Qué es conocer*? a) Intuición matemática o percepción en el reino de la matemática (realismo) ⟸⟹ actividad mental interna (constructivismo) (Tymoczko) b) Comprensión instrumental ⟸⟹ comprensión relacional (Skemp)

(Categoría 8) [Ontología del aprendizaje]

(08.1) *¿Qué es aprender*? a) Asociar un estímulo a una respuesta (asociacionismo) ⟸⟹ asimilar-acomodar las estructuras mentales (Piaget, estructuralismo) (Pozo) b) Recibir pasivamente ⟸⟹ [apropiarse para posicionarse (constructivismo social) ⟸⟹ construir para interpretar (constructivismo radical)] (Peterson, Lerman) b) Alcanzar una posición dentro de una escala ⟸⟹ alcanzar modelo cualitativamente diferente ⟸⟹ alcanzar un mundo diferente en cultura y práctica (Farnham-Digory) c) Crear asociaciones (teorías asociacionistas-mecanicistas) ⟸⟹ reestructurar (teorías organicistas-estructuralistas) (Pozo) d) Recibir un modelo de conocimiento (platónico) ⟸⟹ Comportamiento de obediencia y dominio del modelo de destrezas (utilitarista) ⟸⟹ Construcción activa de un modelo de comprensión (constructivista) (Ernest)

(08.2) *¿Qué aprender?*

a) El sistema formal, explícito y consistente, producto o estado final del conocimiento (formalismo) ⟸⟹ conocimiento basado en intuiciones del sujeto (intuicionismo psicológico) (Vergnaud)

(Categoría 9) [Ontología de la enseñanza]

(09.1) *¿Qué es enseñar*? a) Cambiar el comportamiento visible (Conductistas) ⟸⟹ mejorar la capacidad de procesar la información (procesamiento de la información) ⟸⟹ ayudar al alumno a desarrollarse (personales) ⟸⟹ provocar relaciones democráticas y relaciones sociales (interacción social) (Joyce y Weil) b) Comunicar conocimientos (platonismo) ⟸⟹ actividades en términos de modelos psicológicos (aristotelismo) (Dossey) c) Mediar (constructivismo social) ⟸⟹ facilitar (constructivismo radical) (Lerman)

(09.2) *Fines de la educación matemática*

a) Disciplinarios ⟸⟹ utilitarios ⟸⟹ culturales (Thompson)

b) Externos ⟸⟹ internos ⟸⟹ de desarrollo intelectual (Carrillo, Contreras)

(Categoría 10) [Ontología del conocimiento didáctico]

(10.1) *¿Qué es el conocimiento didáctico*?

a) Componentes del conocimiento del profesor:

Del contenido, de la estructura, de orientación (Elbaz)

Formación académica, formación pedagógica (Mialaret)

Conocimiento didáctico del contenido (Shulman)

Conocimiento para la acción (Llinares)

b) Epistemología de la práctica (Shön) ⟸⟹ Conocimiento declarativo sobre cómo enseñar ⟸⟹ profesor investigador (Stenhouse, Elliot)

(10.2) *Características del conocimiento didáctico*

c) Conocimiento teórico ⟸⟹ conocimiento práctico (Ernest)

Etapa validativa

Una cuestión fundamental para todas las categorías de esta etapa es quien detenta la autoridad para sancionar el conocimiento, y el valor de verdad de ese conocimiento. Una escala general para todas las categorías de la etapa lo constituye el esquema de Perry (1970, 1988) que resume en 8 niveles los estadios de desarrollo psicológico. Copes (1982) reduce este esquema a 4 etapas fundamentales, y lo aplica a la educación matemática.

Según este esquema, los sujetos que se posicionen en una etapa dualística pensarán que existe un criterio externo para establecer la verdad del conocimiento matemático, por ejemplo (categoría 11). Este criterio externo puede llevar a posturas como las que Davis y Hersh llaman "mito de euclides", según la cual el modelo geométrico de la realidad física es la geometría euclídea, siendo esa realidad la que establece la validez del conocimiento matemático. Una postura dualística en relación al aprender significa que aprende quien adquiere el conocimiento establecido. En relación a la enseñanza nos lleva a buscar un prototipo de enseñanza eficaz, que se basaría en un aprendizaje eficaz, y que a su vez sancionaría un conocimiento didáctico eficaz.
Análogamente se podrían interpretar las otras posturas de este esquema en relación al conocimiento matemático, a la enseñanza y aprendizaje y a la didáctica.

(Categoría 11) [Validación del conocimiento matemático]

(11.1) *¿Dónde está la verdad de las matemáticas?* **a)** Las proposiciones matemáticas son verdaderas y necesarias $\Longleftrightarrow$ [el conocimiento matemático es necesario en las relaciones, histórico en el quehacer y es válido como consistente] $\Longleftrightarrow$ conocimientos contingentes y falibles (Cañón, cuestión 2)

(11.2) *Características de la verdad matemática*
a) Sus proposiciones son universalmente verdaderas $\Longleftrightarrow$ [son una producción cultural, expresables en lenguaje independiente de culturas] $\Longleftrightarrow$ depende de culturas $\Longleftrightarrow$ depende de culturas, progresivamente universalizable (Cañón)

(11.3) *¿Quién establece la validez del conocimiento matemático?*
a) Adecuación a mundo físico / consenso en la institución sobre su aplicación a resolver los problemas del campo (Davis y Hersh, Godino y Batanero)

(Categoría 12) [Validación de la adquisición del conocimiento]

(12.1) *Criterios para considerar que el individuo ha adquirido el conocimiento*
a) Cambio de conducta $\Longleftrightarrow$ acomodación-asimilación (Piaget)

(Categoría 13) [Validación del aprendizaje]

(13.1) *¿Quién valida el aprendizaje*?
(13.2) *¿Cómo validar el aprendizaje*? *Criterios*
(13.3) *¿Qué es saber matemáticas?*

a) Saber matemáticas es saber identificar conceptos $\Longleftrightarrow$ es ser capaz de emplearlos (aristotelismo, Peterson; Romberg)

b) Alcanzar una posición dentro de una escala (conductista) $\Longleftrightarrow$ alcanzar modelo cualitativamente diferente al que se disponía antes (desarrollo) $\Longleftrightarrow$ alcanzar un mundo social diferente en cultura y práctica (de aprendizaje) (modelos de paso de experto a novato de Farnhan-Digory)

(Categoría 14) [Validación de la enseñanza]

(14.1) *¿Quién establece el curriculum de matemáticas*?
(14.2) *Criterios para establecer el curriculum*

a) Sólo interesa el conocimiento final (formalismo) $\Longleftrightarrow$ interesa el proceso histórico (Davis y Hersh, Vergnaud)

b) Matemática como objeto $\Longleftrightarrow$ matemática como herramienta (Douady)

c) Interesa enseñar teoremas, procedimientos y reglas de cálculo $\Longleftrightarrow$ interesa enseñar para resolver problemas y plantear cuestiones (Robert y Robinet)

(14.3) *¿Quién valida la enseñanza*?
(14.4) *Criterios para validar la enseñanza.*

(Categoría 15) [Validación del conocimiento didáctico]

(15.1) *¿Quién valida el conocimiento didáctico?*
(15.2) *Criterios para validar el conocimiento sobre la enseñanza*

a) El rendimiento de los estudiantes (profesor eficaz) $\Longleftrightarrow$ la significatividad de la experiencia (perspectiva humanística) (Cooney)

Capítulo 4

Evolución de creencias y concepciones del grupo de estudiantes

4.1. Introducción

Tal como hemos apreciado en la revisión bibliográfica, el estudio de las creencias y concepciones de los profesores debe emplear métodos indirectos y triangulaciones que permitan inferir las teorías personales de los profesores (Ernest, 1989; Thompson, 1992; Ponte, 1992, 1994). Hemos observado cómo los métodos que se están empleando en las investigaciones mas recientes, tienen un carácter interpretativo, basados en análisis cualitativos de datos (Hoyles, 1992, Pajares, 1992, Thompson, 1992), con objeto de evitar que aparezcan sólo las creencias declaradas (Thompson, 1992).

Hemos distinguido dos partes en la segunda parte de nuestra investigación, que se plantea estudiar la evolución de las creencias y concepciones de los estudiantes. La primera afronta al grupo de estudiantes, en conjunto, y trata de describir tendencias generales de las concepciones y creencias del grupo sobre las matemáticas y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La segunda consiste en dos estudios de casos, que permiten estudiar en profundidad a dos estudiantes, sirviendo de triangulación al estudio del grupo.

El estudio del grupo se basa en la utilización del comentario de textos que hemos presentado en capítulos anteriores. Partiendo de la idea de intertextualidad (Eco, 1985), hemos analizado los resúmenes que los estudiantes han hecho del texto entregado, con objeto de inferir las creencias y concepciones que hacen que los estudiantes seleccionen ciertas unidades para este resumen. El contenido de estos resúmenes, junto con el grado de coincidencia con los contenidos del texto, nos puede dar una idea de las creencias de partida de los estudiantes. Pero esta idea puede estar sesgada por la habilidad del estudiante para resumir y por la representación que el estudiante se haga de la *"excelencia"* de la tarea, dado que el estudiante se encuentra en un contexto escolar y realiza la tarea de comentar el texto ejerciendo el papel de alumno de los cursos de formación (*laguna de los dos mundos*, Feiman-Nenser y Buchman, 1988). Para evitar que el peso de estas variables intervinientes pueda anular los efectos de sus creencias y concepciones sobre el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, hemos triangulado la investigación mediante la realización de un análisis basado en jueces, similar al realizado en el estudio piloto, y mediante los estudios de casos. En este capítulo vamos a describir el estudio del grupo.

4.2. Diseño del estudio de grupo: finalidad y medios empleados

En este capítulo exploramos las posibilidades que ofrece el comentario de textos para caracterizar las concepciones y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas y su enseñanza. El supuesto metodológico que adoptamos es que el sujeto proyecta en sus comentarios las concepciones con las que afronta esta tarea. Como el texto presentado se refiere a la naturaleza del conocimiento matemático y su repercusión en la forma de concebir la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, esperamos que los estudiantes resalten o descarten total o parcialmente, una parte de la información aportada en el texto, lo cual sería reflejo indirecto de sus propias convicciones. Al mismo tiempo, la situación generada por el comentario del texto creará condiciones propicias para la manifestación de dichas convicciones personales.

Con el estudio del grupo nos proponemos describir tendencias generales de las concepciones y creencias en el conjunto de estudiantes sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, detectadas mediante el comentario de textos.

Estas tendencias en las concepciones y creencias de los estudiantes del grupo se estudian a comienzos del curso y al final del mismo, con lo que el estudio del grupo afronta tres objetivos:

1: Describir las creencias y concepciones sobre las matemáticas y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en el grupo de estudiantes a principios de curso.

2: Describir esas creencias en el grupo de estudiantes al final del curso.

3: Describir la evolución que han sufrido las concepciones y creencias del grupo de estudiantes a lo largo del curso.

Para conseguir estos objetivos realizaremos dos análisis. El primero se basa en estudiar el

contenido de las unidades de información del texto que eligen los estudiantes para resumir el extracto del artículo. Estas unidades serán clasificadas en categorías atendiendo a los valores de las tres variables incorporadas en la Rejilla (*polo*, *plano* y *etapa*). Obtendremos así unas tablas de contingencias observadas cuya estructura será estudiada con ayuda de dos métodos de análisis multivariante de datos: el análisis logarítmico-lineal (Bishop, Fieberg y Holland, 1975; Everit, 1977) y el análisis de correspondencias múltiple (Escofier y Pagés, 1988; Greenacre, 1993).

Realizaremos, además, un segundo estudio empleando el constructo *grado de sensibilidad*, o índice de coincidencia con los jueces, tal como lo hemos definido en el apartado 2.5.5.1. La Rejilla, presentada en el capítulo anterior, será una herramienta importante para

todos los análisis. En el estudio del grupo nos permite obtener la tabla de frecuencias de unidades de información de los resúmenes de los estudiantes, y en los estudios de casos nos permite agrupar las informaciones concernientes a todos los trabajos, y que correspondan a la misma categoría.

Como se ha indicado, durante el mes de octubre de 1993, se pidió a los estudiantes de la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos de Bachillerato*, que comentaran el texto de Moreno y Waldegg presentado en el capítulo 3, y que respondieran por escrito a las mismas cuestiones que en el estudio piloto. Los estudiantes realizaron este trabajo durante las dos horas de una de las sesiones de la asignatura citada, como un trabajo del curso. Respondieron los 30 estudiantes.

El Comentario de textos se pasó una segunda vez, en el mes de junio, al finalizar el curso. En esta segunda ocasión, los estudiantes realizaron el comentario en casa, recogiéndose 25 respuestas escritas de los estudiantes. El estudio se centra, por tanto, en los 25 estudiantes de los cuales hemos recogido información en los dos momentos.

Las producciones de los 25 estudiantes que han realizado ambos comentarios serán el objeto de los dos análisis previstos. El primer análisis empleará la Rejilla como herramienta con la que clasificar las unidades de información de las respuestas de los estudiantes, siempre en relación al fragmento del artículo entregado para su comentario.

En el segundo análisis, el grado de sensibilidad, ha tomado valor al comparar las respuestas de los estudiantes con las selecciones de unos jueces, a los que se les ha pedido que indiquen las unidades de información del fragmento del artículo que, a su juicio, mejor caracterizan las corrientes epistemológicas y didácticas del Realismo y Constructivismo.

En los dos análisis hemos comparado los resúmenes de los estudiantes con el fragmento del artículo. Dividimos en unidades de información tanto el fragmento del artículo como la primera parte del comentario de textos de los estudiantes (resúmenes del contenido del texto).

Suponemos que los estudiantes han querido describir las posturas reflejadas en el texto de la manera más fiel posible. Para realizar este resumen habrán seleccionado aquellas informaciones del texto que les han parecido más significativas. Estas informaciones se contienen en las unidades de información que hemos identificado en el texto. La significatividad de las informaciones estará ligada a aspectos derivados del propio texto, como la forma de enfatizar ciertas unidades. Así, en el texto se afirma:

"La tesis fundamental de esta postura epistemológica - que llamaremos realismo

matemático- es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de

conocimiento" (unidad 111 de UIFA) [el subrayado es nuestro] Con lo que dan un indicador de que esta idea debe figurar en el resumen de este texto. Pero la significatividad también estará ligada a las concepciones y creencias de los estudiantes, ya que estas concepciones suministrarán a los estudiantes un referente implícito que les hará sensibles a determinadas informaciones del texto.

Basándonos en este presupuesto, nos hemos planteado identificar las unidades de información contenidas en el fragmento del artículo a las que los estudiantes han sido sensibles, con lo que las han incorporado a su resumen. Para ello identificamos las unidades de información del fragmento del artículo que correspondían con las unidades de información de los resúmenes de los estudiantes. Naturalmente, esta identificación no es evidente siempre, ya que si bien aparecen unidades del artículo repetidas textualmente por los estudiantes, en otros casos aparecen reinterpretaciones del texto o frases de aportación personal. Cuando la frase elegida por el estudiante era textual o casi textual, la identificación con la unidad del texto era inmediata, y codificábamos la frase con el mismo criterio que lo hicimos en el texto: 101 a 143 si se refiere a una unidad de los dos primeros epígrafes del fragmento del artículo, y 201 a 232 si se refiere a una unidad de los dos últimos epígrafes del fragmento del artículo. Por ejemplo, la siguiente unidad del resumen de un estudiante será codificada 201:

". *Para Piaget el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas*

estructuras intelectuales que le permiten ver al objeto de cierta manera y extraer

de él cierta información" (Unidad 6, estudiante 5, post-test)

" *Para Piaget (y en esencia, para todos los constructivistas), el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información,* " (Unidad 201 fragmento del artículo)

En otros casos, el estudiante altera la redacción pero mantiene la idea principal que aparece en la unidad del texto. Por ejemplo, la siguiente unidad del resumen de un estudiante ha sido codificada como 114:

" *Se parte de la idea de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados*" (Estudiante 1, pre-test, unidad 3)

"*Ambas concepciones -la idealista de Platón y la empirista de Aristóteles- parten de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexisten a él*" (Fragmento del artículo, unidad 114)

Algunos estudiantes han empleado para el resumen unidades con parecido más lejano con las del texto. Hemos considerado estas unidades como de propia creación, codificándolas 100 o 200 según se refieran a la descripción de la postura realista o constructivista.

"*El alumno tiene que asimilar los conocimientos"* (Unidad 7, estudiante 1, pre test, codificada 100)

De esta forma, el resumen de cada estudiante (RE) dividido en unidades de información (UIRE), lo hemos sustituido por la muestra de unidades de información del fragmento del artículo con la que coinciden en parte (MUIFARE, figura 4.1).

Figura 4.1

La Rejilla nos ha permitido obtener tablas de frecuencias. En el tabla 4.1 hemos clasificado las unidades de información del fragmento del artículo (UIFA). Hemos elaborado otras dos tablas con las unidades de información de todas las muestras de estas unidades que corresponden a cada resumen de los estudiantes (MUIFARE), tanto para el pre-test como para el post-test. El estudio de estas tres tablas y la comparación, nos suministrarán una primera descripción de las respuestas de los estudiantes.

4.2.1. Estudio de la estructura del fragmento del texto mediante el análisis de correspondencias

En el primer análisis, el texto de referencia es el fragmento empleado en el comentario. La estructura y el contenido de este texto son pues, elementos importantes que van a influir en la forma de las respuestas de los estudiantes. En el capítulo 2, apartado 2.5.1, presentamos un primer análisis del fragmento, realizado por dos profesoras de Lengua y Literatura Española. Con ayuda de la categorización de las unidades del texto vamos a realizar otro análisis estadístico del mismo, que triangule las apreciaciones externas anteriores. Hay que señalar que no nos planteamos la inferencia a otros posibles textos, sino que nuestro fin es solamente exploratorio, y nuestras apreciaciones se circunscriben al texto empleado.

Para este análisis estadístico del texto hemos partido de las unidades de información contenidas en el mismo, situadas en la rejilla (Tabla 3.1), y cuyos códigos resumimos en la tabla
4.1. De esta forma podemos obtener una tabla de contingencia a la que es posible aplicar distintas técnicas de análisis de datos, con el fin de determinar su estructura. La rejilla define en realidad una tabla de contingencia tridimensional, cuyas variables y categorías son las indicadas en el capítulo 2, y que denominamos del siguiente modo:

Variable ***etapa***, que toma tres valores o categorías distintas: *acceso*, *objeto* y *validación*, correspondientes, respectivamente, a las etapas gnoseológica, ontológica y validativa. Para estas categorías usaremos en las tablas y gráficos del análisis de correspondencias
los códigos ACCE, OBJE, VALI.

Variable ***plano***, con los valores: *epistemología*, *psicoepistemología*, *psicología, didáctica*, *epistemología de la didáctica*. (Códigos: EPIS, SIEP, PSIC, DIDA, EPDI).

Variable ***polo***, con los valores: *realismo* y *constructivismo* (Códigos: REAL, CONS).

Tabla 4.1

Unidades de información del Fragmento del Artículo (UIFA) que aparecen en cada categoría de la rejilla (Incluir aquí) ----------------------------

La tabla 4.1 nos permite obtener una tabla de contingencias que presenta las frecuencias observadas O_{ijk} para el valor i de la variable *etapa*, valor j de la variable *plano* y valor k de la variable *polo*. Podemos totalizar respecto a cada una de las variables o combinaciones de pares de variables obteniendo también las frecuencias marginales observadas. Obtenemos de esta forma el tabla 4.2.

Tabla 4.2:

Frecuencias observadas de las unidades de información
del fragmento del artículo según las variables *etapa*, *plano* y *polo*: (Incluir aquí)

Una vez obtenida la tabla 4.2, se le ha aplicado el Análisis de Correspondencias Múltiple. Este tipo de análisis extiende el Análisis de correpondencias simples a tablas de variables cualitativas clasificadas por tres o más variables. Puede considerarse una extensión del análisis de componentes principales a variables cualitativas. La técnica trabaja con las frecuencias relativas condicionales de las categorías de cada variable respecto al resto, es decir, con las filas de la matriz de Burt. Por ello, cada categoría de cada variable se representa por un punto en un espacio n-dimensional (n=10). Ello permite definir combinaciones lineales de categorías (de los vectores que unen los puntos correspondientes con el origen), coordenadas de las categorías sobre los ejes y correlaciones entre ejes y categorías (coseno del ángulo que forman).

Este análisis ha producido cinco factores con más del 5% de inercia, los cuales explican el 93.5% de dicha inercia total. Puesto que el número de total de categorías de las tres variables es 10, la dimensión original del problema (10x10, es decir, nueve posibles factores), se ha reducido a cinco. Ello es indicativo de la existencia de correpondencias entre las categorías de diferentes variables. El valor Chi cuadrado obtenido ha sido significativo y la calidad de representación es mayor que 0.879, por lo que creemos que la representación gráfica obtenida reproduce suficientemente las interrelaciones entre el conjunto de categorías de las diferentes variables. Las tablas 4.3 y 4.4 muestran los resultados obtenidos mediante el paquete de programas BMDP (Dixon y cols., 1993).

Tabla 4.3:

Autovalores y descomposición de la inercia total (Incluir aquí)

Tabla 4.4:
Resultados del análisis de correspondencias (Incluir aquí)

4.2.2. Interpretación de los factores obtenidos

Para cada categoría indicamos por **x** la coordenada de la categoría sobre el eje marcado por el factor y por **r** el valor del coeficiente de correlación al cuadrado entre la categoría y el factor. Esta correlación nos indica la calidad de representación de la categoría sobre el eje, puesto que un valor 1 indica que el punto correspondiente a la categoría se sitúa sobre el eje, por lo que la proyección no deforma su posición respecto a otros puntos.

Respecto a las coordenadas, los puntos que presentan mayor valor absoluto contribuyen a la definición del eje, oponiéndose entre si los puntos de coordenadas positivas y negativas. En consecuencia, basamos el análisis en los puntos que presentan valores altos o moderados para sus coordenadas y correlaciones con el eje. Asimismo, tendremos en cuenta la contribución total (en proporción) de cada punto a la inercia del eje (proporción explicada del valor Chi cuadrado obtenido).

PRIMER FACTOR: ***Polaridad realismo-constructivismo*** *(Figura 4.2)*

Este factor explica el 36,7% de la inercia. Las categorías que más contribuyen a la inercia explicada por este eje son: VALI (0.234), CONS (0.219), SIEP (0.180) y REAL (0.162). (Los números entre paréntesis indican la proporción de inercia del eje explicada por la categoría).

Respecto a la variable *etapa*, en este factor sólo aparece una contribución importante de la categoría VALI (x=1.167, r=0.689) que presenta coordenadas positivas. Para la variable *plano* presenta una oposición entre las categorías EPDI (x=1.405, r= 0.287) frente a SIEP (x=-0.957,
r=0.567) y respecto al *polo* opone REAL (x=0.535, r=0.853) a CONS (x= -0.724, r=0.853).

En consecuencia este factor no produce una separación de las diferentes categorías de la variable *etapa*, aunque si en las de *plano* y *polo*. En particular, da cuenta de los rasgos distintivos caracterizadores del *realismo* y el *constructivismo* en el texto.

Al estudiar las correspondencias entre los valores de estas tres variables, en función de la orientación positiva o negativa de sus coordenadas, observamos que en la parte positiva del eje (realismo) aparecen el valor VALI (de la variable *etapa*) y EPDI (de la variable *plano*) Ello refleja de manera patente el diferente comportamiento de la *validación* respecto al *polo*: hay una ausencia de consideraciones sobre la *etapa de validación* del conocimiento en el *constructivismo*, mientras que en el *realismo* la *validación* aparece en todos los valores de la variable *plano*, excepto en *psicoepistomología*. La observación directa de la tabla de datos concuerda con este resultado: los items clasificados como *validación* están ligados al *realismo*, no apareciendo ninguna con el *constructivismo*. Esta misma observación se puede hacer para la categoría que hemos codificado como EPDI, aunque en menor intensidad. Mientras que en el *realismo* hay unidades de información referentes a *epistemología de la didáctica* en las *etapa*s de *objeto* y *validación*, esta categoría no ha sido considerada por los autores del texto en su relación con el *constructivismo*.

Por el contrario, el valor SIEP está especialmente ligado al *constructivismo*, ya que aparece con coordenadas negativas. Mientras que en el *constructivismo* hemos encontrado un total de 13 unidades de información en *psicoepistemología* (en las *etapa*s de *acceso* y *objeto*), en el *realismo* sólo aparecen tres unidades, ligadas a estas mismas *etapa*s.

Estas relaciones se aprecian visualmente en el gráfico correspondiente al primer factor (Figura 4.2)

Figura 4.2 Representación del primer factor (Incluir aquí)

SEGUNDO FACTOR: ***Distinción entre acceso y objeto en la variable etapa*** (Figura 4.3)

Este factor explica el 24.9 % de la inercia total (Tabla 4.4). Las categorías que más contribuyen a definir este factor son: DIDA (0.247), ACCE (0.261), OBJE (0.222), EPIS (0.133).

En el eje 2 (Figura 4.3) se representan en posiciones opuestas las categorías de la variable ACCE (x= 0.759, r= 0.643) frente a 0BJE (x= -0.547, r=0.792) en lo que respecta a la variable *etapa*. En la variable *plano* se opone DIDA (x=0.826, r= 0.597) frente a EPIS (x= -0.486, r= 0.390).

La distinción entre *acceso* y *objeto* en este factor está ligada al tratamiento desigual que reciben las categorías EPIS y DIDA en el texto analizado. Mientras que en la *etapa acceso* la frecuencia modal aparece en el *plano didáctico* (12 unidades de información), en la *etapa objeto* la frecuencia modal aparece en *epistemología* (21 unidades de información) seguida de *psicoepistemología* (11 unidades).

------------------------------------ Figura 4.3 Representación del segundo factor (Incluir aquí) ---------------------------------

TERCER FACTOR:

Este factor explica sólo el 14.2% de la inercia total, por lo que su importancia relativa es mucho menor y no presentaremos las representaciones gráficas. Tan sólo lo tendremos en cuenta para estudiar posteriormente los casos aislados de estudiantes que pudieran tener una puntuación importante en este factor. Las variables y valores que más contribuyen a su definición son: PSIC (0.492) y DIDA (0.203), las cuales se oponen mutuamente en este eje.

Podemos explicar esta oposición por la diferente frecuencia marginal de estas dos categorías de la variable *plano*.

REPRESENTACIÓN CONJUNTA DE LOS DOS PRIMEROS FACTORES.

En la figura 4.4 representamos conjuntamente los dos primeros factores, para situar sobre ellos las categorías de las diferentes variables y las asociaciones (correspondencias) de categorías de diferentes variables. En resumen obtenemos las siguientes conclusiones:

Como se ha indicado, el primer eje representa la oposición entre *realismo* y *constructivismo* y el segundo la oposición entre *objeto* y *acceso*. El resto de las categorías se sitúan en las siguientes posiciones:

En *etapa*s, la *validación* se sitúa en el primer cuadrante VALI(x_1=1.167; x_2=0.246), por lo que tiene valores positivos en las dos coordenadas. Por ello presenta una fuerte asociación con la categoría *realismo* de la variable *polo* y una débil asociación con la categoría *acceso* de la variable *etapa*.

Respecto a la variable *plano*, las categorías *didáctica* (x_1=-0.031, x_2=0.826) y *psicología* (x_1=0.003, x_2=0.653), que se sitúan sobre la parte positiva del segundo eje, están claramente asociadas con la categoría *acceso* de la variable *etapa*. La categoría *epistemología* (x_1=0.332, x_2=-0.486) y *epistemología de la didáctica* (x_1=1.405, x_2=-0.260) tienen valores positivos en el primer eje (la segunda de ellas muy alto) y un valor negativo, moderado la primera y débil la segunda, en el segundo eje. Por ello están asociadas al *realismo* (fuertemente la segunda) y débilmente al *objeto*.

Por último, la *psicoepistemología* (x_1=-0.957, x_2=-0.392) presenta coordenadas negativas en los dos ejes, por lo que se presenta asociada al *constructivismo* (fuertemente) y al *objeto* (débilmente).

Figura 4.4:
Estructura del fragmento del texto.
Representación gráfica en el plano del primer y segundo factor (Incluir aquí)

Tal como habíamos indicado en el comentario del fragmento del texto, realizado en el capítulo 2 (§2.5), el fragmento del artículo tiene una estructura paralela, en la que cada línea trata uno de los *polos*. Lo que el análisis de correspondencias nos muestra es que las dos líneas paralelas no tratan por igual las demás variables. Así, se observa que el *polo realista* enfatiza los aspectos prescriptivos (validación de la enseñanza y el aprendizaje, como consecuencia, validación del conocimiento didáctico, y en algún sentido, validación formal del conocimiento matemático). El *polo constructivista* se centra en aspectos psicológicos, evitando entrar en analizar las formas de validar el conocimiento y los procesos de aprendizaje, que presenta como personales. En este sentido, el análisis de correspondencia reafirma lo enunciado en este comentario (§2.5) en el sentido de que la información suministrada no es homogénea y está menos estructurada en el *polo constructivista* que en el *realista*.

Pero además, el análisis de correspondencias nos muestra otra dimensión no detectada en el comentario. Esta dimensión se representa por la oposición entre las *etapas gnoseológica* y *ontológica*. El tratamiento que el fragmento da a los *planos didáctico y psicológico* es preferentemente *gnoseológico* (¿cómo se enseña? ¿cómo se aprende?), mientras que el tratamiento *ontológico* afecta preferentemente al *plano epistemológico* en el *realismo* (¿qué es la matemática?), y al *psico-epistemológico* en el *constructivismo* (¿qué es conocer matemáticas?).

Este análisis completa el realizado en el capítulo 2, y ha sido posible gracias a la categorización del texto, mediante el empleo de la Rejilla (variable tridimensional). Gracias a este instrumento, conocemos mejor la estructura y el contenido del fragmento, y nos encontramos en mejores condiciones para analizar la forma en que los estudiantes resumen el texto y realizan el comentario.

4.3. Asociaciones parciales y marginales en la tabla de contingencia de los resúmenes de los estudiantes. Significación estadística mediante el análisis logarítmico-lineal

El primer análisis, de las unidades de información de los textos producidos por los estudiantes, se basa en el contraste entre la estructura del texto, obtenida en el apartado anterior, y la proyección de los resúmenes de los estudiantes sobre los ejes obtenidos por medio del análisis de contingencias.

Haremos esta proyección en dos etapas. En la primera proyectaremos las frecuencias marginales de los resúmenes de los estudiantes, cada uno por separado, distinguiendo los dos momentos de aplicación del test, antes y después (pre-test y post-test). En la segunda etapa proyectaremos sobre los ejes obtenidos del análisis del texto las frecuencias marginales de la tabla de contingencia obtenida con los resultados de todo el grupo de estudiantes, en cada momento: antes y después (pre-test y post-test). Estas dos proyecciones nos situarán gráficamente los resúmenes de los estudiantes en los ejes, lo que permitirá estudiar la posición de cada estudiante respecto al texto y contemplar y analizar la posible variación que ha sufrido.

Para realizar la primera proyección hemos construido una tabla de contingencia para cada estudiante, similar a la tabla 4.1. De esta tabla hemos obtenido la distribución marginal correspondiente a las 10 variables ya estudiadas para cada momento de aplicación del comentario: antes y después. Sumando los valores de cada variable en el pre-test y post-test, hemos obtenido la tabla 4.5, que comprende el número de unidades de los resúmenes de todos los estudiantes en cada categoría.

De esta tabla 4.5 observamos, para el pre-test (valor antes de la variable test) a) En los resúmenes de los estudiantes aparece una diferencia de 14 unidades a favor del *constructivismo*, con respecto al *realismo*. b) El *plano* que más aparece en los resúmenes de los estudiantes es el *epistemológico*, después el *didáctico*, y en tercer lugar el *psicodidáctico*.

c) Las *etapas* que más aparecen en los resúmenes son la que caracteriza el *objeto* (*etapa ontológica*), después la de *acceso* (*etapa de gnoseológica*), y por último, a gran distancia, la *etapa validativa.*

Y para el post-test (valor después de la variable test): a)En los resúmenes de los estudiantes aparecen 7 unidades más en el *realismo* que en el *constructivismo*.

b) El *plano* que más aparece en los resúmenes de los estudiantes es el *epistemológico*, después el *didáctico*, y en tercer lugar el *psicológico* referido al conocimiento matemático (*psicoepistemológico*).

c) Las *etapas* que más aparecen en los resúmenes son, por este orden: la que caracteriza el *objeto* (*etapa ontológica*), después la de *acceso* (*etapa gnoseológica*) y por último, a gran distancia, la *etapa validativa*.

Tabla 4.5:

Frecuencias de cada variable en el total de resúmenes
de los estudiantes, clasificadas según test, polo, plano y etapa. (Incluir aquí)

Esta tabla 4.5 nos permite comparar los resultados obtenidos por el grupo completo en pre-test y post-test. Para contemplarlo con más claridad hemos resumido los datos de la tabla 4.5 en la tabla 4.6 que muestra sus valores marginales.

Tabla 4.6:
Frecuencias de cada valor de las variables
en los dos momentos en que se ha pasado el comentario.(Incluir aquí)

La tabla 4.6 nos muestra:

a) Prácticamente se ha mantenido el número de unidades empleadas por los estudiantes para su resumen (de 530 en pre-test, a 517 en post-test), que supone unas medias de 21,2 unidades por resumen en el pre-test y 20,68 en el post-test.

b) Mientras en los resúmenes del pre-test aparecían más unidades caracterizadoras del *constructivismo*, en el post-test aparecen más unidades caracterizadoras del *realismo*. c) Se mantiene el énfasis en los aspectos *epistemológicos* de la matemática (categoría 6 de la rejilla), especialmente para describir la postura *realista*.

d) Los estudiantes emplean fundamentalmente el *plano epistemológico* para caracterizar el *polo realista*, mientras que el *constructivismo* lo caracterizan principalmente por el *plano psicológico*, tanto en el pre-test como en el post-test.

e) El aumento de unidades para caracterizar el *realismo* se centra en las categorías 6 y 11, referentes a la caracterización *epistemológica* del conocimiento matemático. La bajada *constructivista* se manifiesta especialmente en el *plano didáctico*. Parece que los estudiantes se hacen más sensibles a la importancia que tiene la caracterización *ontológica* del contenido a enseñar y de la enseñanza y el aprendizaje sobre la práctica docente.

La realización de un análisis multivariante permitirá profundizar en estas primeras observaciones y manejar la interacción entre las tres variables consideradas: *etapa, plano y polo*, y entre estas tres y la variable *test (antes, después)*. Para ello, el siguiente paso del análisis multivariante se ha centrado en el análisis de la tabla 4.5, que presenta las unidades de información de los resúmenes de los estudiantes en el pre-test y en el post-test. Vamos a estudiar sobre esta tabla, no sólo la estructura de las asociaciones de las categorías de las diferentes variables, sino también explorar si los estudiantes han enfatizado una de las categorías de una variable frente a otras. La técnica del análisis de correspondencias no nos permite establecer el nivel de significación de estas diferencias y asociaciones. Por ello, en esta fase del análisis se ha aplicado un modelo logarítmico lineal, empleando el paquete estadístico BMDP. Creemos adecuado utilizar esta técnica confirmatoria en un análisis exploratorio, si nos situamos en la perspectiva de análisis de datos denominada IDA o "Informal Data Analysis" (Gutierrez Cabriá, 1994).

El propósito es estudiar si existen diferencias significativas en las frecuencias de cada categoría en una misma variable y que asociaciones se dan entre categorías de distintas variables. Ello es posible por los contrastes asociados al modelo que hacen referencia a las distribuciones marginales y condicionadas por una o varias variables. Para ello utilizamos un modelo completo, incluyendo las interacciones hasta orden tres, puesto que el contraste sobre el efecto de todas las interacciones de orden tres dio un resultado significativo (Chi=115.63, p=0.0000) y el estudio de las interacciones de cuarto orden no dio resultado significativo. En la tabla 4.8 aparecen los resultados de los contrastes de asociaciones parciales y marginales. En esta tabla, llamamos **e** a la *etapa*, **p** al *plano*, **P** al *Polo* y **t** al *test*. De esta forma, las interacciones de orden dos sólo contemplan las iniciales de estas variables. Así, **pP**, por ejemplo, es la interacción *plano-Polo*.

El contraste de asociación marginal prueba la significación estadística de suprimir el término correspondiente de un modelo en el cual el resto de las variables no incluidas en este efecto hubiesen sido totalizadas. Es por ello equivalente a un contraste de independencia entre las variables que componen el efecto. El contraste de asociación parcial prueba el efecto del término dado sobre el modelo global, por lo que indica la conveniencia de incluirlo o no en el cálculo final del modelo (es decir, de las frecuencias esperadas y las desviaciones respecto a las mismas).

----------------------Tabla 4.7:
Contrastes de asociaciones parciales y marginales sobre los datos presentados en la Tabla 4.5
(Incluir aquí) ------------------------

Como resultado, observamos un efecto parcial de cada una de las variables *etapa* y *plano*, aunque no del *polo* y del *test*. Se observa que no hay diferencia global del número total de unidades de información entre *pre-test* y *post-test*, ni tampoco entre *constructivismo* y *realismo*.

Por el contrario, se observa, en la variable *etapa* importantes diferencias que han sido estadísticamente significativas, como pone de manifiesto el análisis. Las referencias al *objeto* hechas por los alumnos (578) superan significativamente a la del *acceso* (395) y las dos se diferencian notablemente de la *validación* (74).

Asimismo hay una diferencia significativa entre las diversas categorías de la variable *plano*, correspondiendo la máxima frecuencia a *epistemología* (389) y *didáctica* (278). En una posición intermedia se sitúa la *psicología* (204 como *psicología epistemológica,* y 165 como *psicodidáctica*).

Respecto a las asociaciones marginales han sido estadísticamente significativas las siguientes: *etapa* por *plano*, *etapa* por *polo*, *plano* por *polo*, *etapa* por *polo* por *plano*. Ello quiere decir que se ha encontrado una asociación estadísticamente significativa entre cada una de estas combinaciones de variables.

Influenciados por el contenido del fragmento del texto, los estudiantes han atendido especialmente a los aspectos ontológicos que a los gnoseológicos, y mucho menos a los valorativos. Igualmente, la estructura del texto, en el que hemos observado que existen notables diferencias en el número de unidades de cada categoría, ha repercutido en los resúmenes de los estudiantes. Esta influencia de la estructura del texto sobre todas las demás variables podría justificar el que no sean significativas las diferencias entre los resúmenes realizados en el pre-test y en el post-test. Veamos más detenidamente las diferencias significativas observadas.

Relación entre la etapa y el plano

El *objeto* aparece ligado a la *epistemología* (322) seguido a mucha distancia de la *psicoepistemología* (168) y el *acceso* a la *didáctica* (238), seguido de la *psicología* del aprendizaje (77) y *epistemología* (44). La *validación* sólo aparece en relación con la *psicología* y la *epistemología*.

Es decir, los resúmenes de los estudiantes se ocupan, preferentemente, de caracterizar las matemáticas y de describir la forma de enseñar matemáticas. Son menos sensibles a las fundamentaciones de los procesos de aprendizaje, y a la relación entre los aspectos concretos: matemáticas y enseñanza, y sus fundamentos abstractos: conocimiento y aprendizaje.

Relación entre la etapa y el polo

La *validación* sólo aparece en el *realismo*, y el *objeto* y el *acceso* se caracterizan ligeramente más en el *constructivismo* que en el *realismo*.

La distribución irregular de las unidades del fragmento del artículo ha repercutido en la elección que hacen los estudiantes.

Relación entre la etapa y el test

En relación con las *etapas*, las diferencias más notables se refieren al *acceso* y a la *validación*. La caracterización *gnoseológica* es más amplia en el pre-test, mientras que la *validativa*, es más extensa en el post-test. Ha habido un traspaso de unidades de uno a otro valor de la variable *etapa*. Como las únicas unidades *valorativas* se refieren al *realismo,* el transvase ha favorecido la caracterización de esta corriente, mediante las alusiones a la formalización del conocimiento matemático, como forma de establecerlo, y a la validación de los métodos de enseñanza por medio de los resultados de los alumnos. En este sentido, podría inferirse que los estudiantes tienen menos temor a emplear unidades de información que participan de las escalas tradicionales de valores educativos, como son la formalización de los conocimientos y la evaluación mediante pruebas repetitivas.

Relación entre el plano y el polo

Respecto al *realismo*, el principal *plano* es el *epistemológico*, seguido por el *didáctico*. En el *constructivismo* el más importante es el *psicoepistemologico*. En el *constructivismo* los planos se distribuyen de manera más homogénea que en el *realismo*, salvo el *plano de epistemología de la didáctica*, que no se contempla. El *constructivismo* pone más énfasis en la cognición, en una filosofía general de lo que es el conocimiento para el sujeto, a diferencia del *realismo*, que parece dejar de lado lo que es el conocimiento y se centra en la naturaleza de los objetos matemáticos, con lo que se está repitiendo el esquema del texto.

Relación entre etapa, polo y plano

En el *realismo* se caracteriza fundamentalmente el objeto matemático (*objeto, epistemología*: categoría 6 de la Rejilla) y en el *constructivismo* el *didáctico, acceso* y el *objeto, psicoepistemología* (categorías 4 y 7 de la Rejilla)

El *acceso* al conocimiento didáctico (*plano epistemología de la didáctica*) no se contempla en ninguno de los dos *polos*, pero si se caracteriza de alguna forma este conocimiento y su *validación* en el *realismo*, por medio de los resultados de los alumnos.

En el *realismo* se caracteriza la enseñanza (*plano didáctico*) y no se caracteriza el aprendizaje (*plano psicodidáctico*), mientras que en el *constructivismo* ocurre al contrario (categorías 8 y 9).

Otras relaciones menos evidentes se dan entre la *etapa* y el *polo*, que varía entre pre-test y post-test. Por último, los efectos *plano* por *test* y *etapa* por *plano* por *test* dan unos valores del nivel de significación muy próximos al 5 por ciento, aunque no son estadísticamente significativos .

Finalmente cabe destacar que no hemos encontrado significación estadística entre el *pretest* y *post-test* en las variables, lo que parece indicar que no ha habido cambio global en las creencias del grupo de estudiantes, o al menos no lo hemos podido apreciar con esta metodología.

En el análisis realizado en esta sección hemos destacado algunas observaciones referentes a los resúmenes de los estudiantes. Una de las causas de las variaciones detestadas como significativas en este análisis puede estar relacionada con la estructura del texto. Para precisar estas apreciaciones vamos a realizar una comparación en las estructuras del texto, y los resúmenes realizados por los estudiantes.

4.4. Estudio comparativo de la estructura de los resúmenes de los estudiantes con la del texto

Una vez analizadas las estructuras de asociaciones del texto (sección 4.2.1) y de las respuestas de los estudiantes (sección 4.3) queremos determinar hasta que punto se corresponden estas dos estructuras o bien aparecen algunas diferencias atribuibles a las concepciones de los estudiantes que han influido en los resúmenes que presentan.

Este estudio comparativo vamos a hacerlo en dos fases:

Fase 1) Un estudio individualizado de las respuestas de cada uno de los estudiantes. Esto lo conseguimos proyectando, sobre los ejes factoriales obtenidos en el análisis de correspondencias de la sección 4.2, como variables suplementarias, un perfil de las respuestas del estudiante. Este perfil se define mediante un vector cuyas coordenadas son las distribuciones marginales de las tablas correspondientes al estudiante. Estas variables suplementarias no intervienen en el análisis, sino que simplemente se proyectan sobre los ejes factoriales que se han obtenido en el mismo. Podemos comprobarlo comparando los gráficos presentados para cada factor y para el plano factorial en esta sección y la sección
4.2.

Debido al principio baricéntrico, cada estudiante y el conjunto de todos los estudiantes del grupo, considerados como variables suplementarias a las estudiadas en el análisis de correspondencia se proyectarán en una posición de los ejes que indica el lugar geométrico de las asociaciones que presenta con las diferentes variables que constituyen el eje. Por ello, la proyección de variables suplementarias se considera similar a la regresión múltiple entre variables cuantitativas. Una posición privilegiada sobre un eje es, según Escofier y Pagés (1988) una indicación de la asociación entre la nueva variable y el eje. Debido al número elevado de sujetos hemos separado las proyecciones del conjunto de datos en el pre-test y post-test, para que los gráficos se interpreten con mayor claridad. Ello nos permitirá apreciar los cambios de los sujetos particulares entre pre-test y post-test, así como detectar los casos atípicos, indicativos de concepciones diferenciadas.

Fase 2) Un estudio conjunto del total de los resúmenes de todos los alumnos. Para ello hemos proyectado las distribuciones marginales de la tabla de contingencia del conjunto de los 25 estudiantes. En este caso, para no aumentar el número de gráficos se proyectan sobre los mismos ejes los datos del pre-test y del pos-test. Asimismo, incluimos en estos gráficos las proyecciones correspondientes a los dos estudiantes que serán objeto del estudio de casos, para poder comparar sus posiciones, respecto a la "posición promedio" del grupo.

4.4.1. Proyección individualizada de los estudiantes

4.4.1.1. Datos obtenidos en el pre-test

En la tabla 4.8 presentamos los datos correspondientes a los resúmenes de los estudiantes considerados como categorías suplementarias de las variables utilizadas para el análisis de correspondencias del fragmento del texto. La calidad de la representación es, en general, alta, por encima de 0.854, con excepción del alumno A17.

Tabla 4.8:
Resultados de la proyección sobre el ACM
de los datos individuales de los estudiantes en el pre-test (Incluir aquí)

Al proyectar los resúmenes de los estudiantes sobre el primer factor obtenido en el análisis de correspondencias realizado con las unidades del fragmento, observamos que no aparece una dispersión demasiado grande del conjunto de estudiantes, respecto a este factor. Las coordenadas varían tan sólo de 0.038 (A1) a -0.375 (*A5*).

Figura 4.5
Representación gráfica del primer factor.
Proyección de los estudiantes (PRE-TEST) (Incluir aquí)

Como habíamos identificado este factor con la influencia de la variable *polo*, podemos decir que no hay posturas contrapuestas en los estudiantes en lo que se refiere al *polo*, en el sentido de que algunos de ellos estén más ligado al *constructivismo* y otros al *realismo*. Puesto que la mayor parte de los estudiantes presenta coordenada negativa en este eje, podemos deducir que, en su resumen, han enfatizado el *polo constructivista.* Dentro de ello, los *alumnos* que presentan mayor correlación con este eje (cuyos resúmenes se ligarían más al *polo* que a las otras variables, son los alumnos:

A8 (r= 0.910), A9 (r=0.766), A10 (r=0.713), A25 (r=0.644) y A5 (r=0.615).

En cuanto a la posición en el eje, las más ligadas al constructivismo son las del alumno A5 (x=-0.375), seguido por el A9 (x=-0,318), aunque el que tiene una correlación mayor con la dimensión que presenta el factor es el estudiante A8 (x=-0,309, r=0,910)

La proyección de los resúmenes de los estudiantes sobre el segundo factor obtenido en el análisis de correspondencias del fragmento del texto aparece en la figura 4.6.

---------------- ***Figura 4.6***:
Representación gráfica del segundo factor.
Proyección de los estudiantes (PRE-TEST) (Incluir aquí)

En esta figura observamos que, al contrario que en el primer factor, en el segundo factor aparece una dispersión notable del conjunto de estudiantes. Los estudiantes extremos son el A7 (x=0.857, r=0.621), por un lado, y el A5(x=-0.236, r= 0.394), por el otro. Parece que unos estudiantes enfatizarán más la *etapa de acceso* y el *plano didáctico* y otros la *etapa de objeto* y el *plano epistemológico*.

Los alumnos que más correlación presentan con este eje son los siguientes:

A7 (r=0.621), A22(r=0.581), A16 (r=0.567), A23 (r=0.384), A5 (r=0.394).

Observamos que aparecen dos grupos de estudiantes con comportamientos contrapuestos respecto al segundo factor. Por una parte, los estudiantes:

A7 (x=0.857), A22 (x=0.358), A16(x=0.347), A23 (x=0.264), que enfatizan más el aspecto *didáctico* y de *acceso;* y por otro, los estudiantes:

A24 (x=-0.224) y A5 (x=-0.236), que se han preocupado más por el *objeto* y la *epistemología*. Los alumnos que se sitúan cerca del origen en este eje, presentan un equilibrio entre los aspectos representados por el factor.

En la proyección sobre la representación conjunta de los factores, (figura 4.7) se aprecia, de nuevo, que los alumnos se distribuyen a lo largo del segundo factor, no apareciendo gran dispersión respecto al primer eje. Se podría decir que los resúmenes de los alumnos son prácticamente unidimensionales, ya que todos aparecen hacia la parte negativa del primer factor y muy próximos al origen. En todo caso, podremos diferenciar entre los grupos de alumnos con coordenadas positivas y negativas en el segundo factor. No obstante, quitando el caso atípico del alumno A7, hay una graduación muy uniforme en el resto, no apareciendo grupos claramente diferenciados. Hay más bien un continuo de respuestas que tipologías que diferencien las mismas.

---------------- ***Figura 4.7***: Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor.
Proyección de los estudiantes (PRE-TEST) (Incluir aquí) ----------------

4.4.1.2. Datos obtenidos en el post-test

Del mismo modo que en el pre-test, se han proyectado como variables suplementarias el perfil de respuesta de cada uno de los estudiantes sobre los factores obtenidos en el análisis de correspondencias realizado en el texto. La calidad de la representación es, en general, alta, por encima de 0.85, con excepción de los alumnos A18 (0,676), A9 (0.643) y A3 (0.535) con una calidad moderada.

En la tabla 4.9 aparecen las coordenadas de cada estudiante respecto de los 5 factores principales obtenidos en el análisis del texto, así como sus correlaciones. --------------

Tabla 4.9
Resultados de la proyección sobre el ACM
de los datos individuales de los estudiantes en el post-test. (Incluir aquí)

Las figuras 4.8, 4.9 y 4.10 representan respectivamente, de manera gráfica, la posición que ocupa cada estudiante en: el primer eje, el segundo eje, y sobre el plano obtenido con los dos factores principales.

Figura 4.8:
Representación gráfica del primer factor.
Proyección de los estudiantes (POST-TEST) (Incluir aquí)

Figura 4.9:
Representación gráfica del segundo factor.
Proyección de los estudiantes (POST-TEST) (Incluir aquí)

Figura 4.10:
Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor.
Proyección de los estudiantes (POST-TEST) (Incluir aquí)

Al comparar la posición en el primer eje de los resúmenes correspondientes al post-test con los resúmenes del pre-test, no se observan cambios globales. El rango de variación de las coordenadas se sitúa, de nuevo, entre el alumno A5 (x=-0.347) y A9 (x=0.076), por lo que podemos observar que, también en el post-test, los estudiantes se han inclinado por el polo
constructivista.

Sin embargo, observamos algunos cambios sobre este eje de alumnos particulares, como el alumno A9 que ha pasado en el pre-test de una posición *constructivista* (x=-0.318, r=0.766) a una posición más ecléctica respecto a los dos polos en el post-test (x= 0.07, r=0.047). Por el contrario, el alumno A24 ha aumentado su tendencia hacia el constructivismo, ya que pasa de los valores (x=-0.186, r=0.251) a los valores (x=0.347, r=0.731), por lo que aumenta no sólo el valor absoluto de su coordenada, sino también el de la correlación con el eje.

Observamos que en el segundo eje ha habido un aumento de la dispersión de los datos, pasando de unos valores extremos en el pre-test A5(x=-0.236, r= 0.244), A7 (x=0.857, 0.621) (rango de 1.093) a unos valores extremos en el pos-test de A2 (x=-0.629, r=0.650) y A17(x=0.605, r=0.637) (rango de 1.234). Hay ahora una mayor división de los estudiantes en cuando al énfasis que hacen del *objeto y epistemología* o bien del *acceso y la didáctica*.

En cuanto a los cambios en alumnos particulares, destaquemos el estudiante A2, que pasa de (x=-0.210, r=0.347) a (x=-0.629, r=0.650) y el estudiante A13 pasa de (x=-0.182, r=0.252) a (x=-0.308, r=0.527). En estos estudiantes, el énfasis hecho en el post-test respecto al *objeto* y la *epistemología* se ha hecho más acusada que en el pre-test.

El estudiante A4 pasa de (x=-0.156, r=0.251) a (x=0.311, r=0.558), con lo que el leve énfasis que hacía en los aspectos de *objeto* y *epistemología* es ahora sustituido por una mayor sensibilidad hacia el *acceso y la didáctica*.

El estudiante A7 pasa de (x=0.857, r=0.621) a (x=0.034, r=0.017), el A23 de (x=0.263, r=0.394) a (x=0.047 , r=0.018) y el A16 de (x=0.347, r=0.567) a (x=0.209, r=0.180). Estos alumnos enfatizaban preferentemente, con mayor o menor intensidad el *plano didáctico* y la *etapa de acceso* y ahora muestran un equilibrio en este factor.

El estudiante A22 pasa de (x=0.356, r=0.581) a (x=-0.197, r=0.193), o sea, de una mayor sensibilidad por los aspectos *didáctico* y *acceso,* a mostrar una tendencia leve hacia la *epistemología* y el *objeto*.

Conclusiones de la primera parte del análisis.

Como se ha puesto de manifiesto en la sección 4.1.2, el texto se estructura según dos dimensiones fundamentales, la primera separa las unidades que se refieren al *realismo* de las que se refieren al *constructivismo*. La segunda separa, en un extremo la caracterización del *objeto* matemático ([epis, obje], categoría 6), y en el otro la forma de enseñar matemáticas ([dida, acce], categoría 4). La proyección de las unidades de los resúmenes de cada estudiante sobre estos ejes nos permite sacar las siguientes conclusiones:

a) Los estudiantes no se diferencian significativamente en la caracterización que hacen de los dos *polos*, especialmente en el pre-test. Todos caracterizan mejor el *constructivismo* que el *realismo*, aunque en el post-test se produce una subida en coordenadas respecto del primer eje, de los resúmenes. Esto puede significar que los estudiantes se hacen un poco más sensibles a las diferencias entre las características de los *polos realista* y *constructivista*; o sea, al hacerse sensibles a la existencia de estos dos *polos*, necesitan citar los argumentos del texto que los diferencia.

b) Los resúmenes de los estudiantes se distinguen en la manera en que se ocupan de caracterizar el conocimiento matemático o la forma de enseñar. La variación entre resúmenes respecto a este segundo eje es muy amplia. El estudiante A7, por ejemplo, se ocupa sólo de caracterizar la enseñanza, en el pre-test, mientras que el A2, se ocupa sólo del conocimiento matemático en el post-test.

c) El tercer factor que aparece en el análisis de correspondencias del texto distingue la dimensión *psicológica* frente a la *didáctica* (oposición aprendizaje-enseñanza). Los resúmenes de los estudiantes correlacionan ligeramente con este eje, y sus valores en él son próximos entre sí. Hay una mayor preocupación por caracterizar el aprendizaje que por caracterizar la enseñanza.

d) Al contemplar las figuras 4.7 y 4.10 se observa que algunos estudiantes han cambiado significativamente de posición entre el pre-test y el post-test. Destaquemos los siguientes, por orden decreciente de distancia:

A7: Baja en el segundo eje, tendiendo al centro. Esta variación hacia el centro significa una mayor correspondencia del resumen con el texto, lo que puede indicar un trabajo mas cuidadoso, o una mayor sensibilidad a los aspectos epistemológicos que aparecen en el texto y que no se contemplaban en el pre-test.

A2: En el pre-test se encontraba en el centro de los ejes, y ha bajado considerablemente por emplear unidades que caracterizan el objeto matemático en detrimento de la caracterización de la forma de enseñar. Ha cambiado su interpretación del texto, pasando de considerarlo como una descripción sobre dos formas de enseñar a enfatizar los aspectos epistemológicos de las dos posturas.

A17: Desde una posición central en ambos ejes, sube en el segundo eje, tendiendo a ocuparse fundamentalmente de la enseñanza y desentendiéndose del conocimiento matemático. La breve extensión de los resúmenes sólo permiten decir que el estudiante

ha cubierto el trámite, sin poner mucho entusiasmo en la tarea, lo que distorsiona cualquier interpretación.

c) Cuatro estudiantes no han variado prácticamente su posición en los ejes, desde el pretest a el post-test (A3, A8, A10 y A11) y seis varían ligeramente su posición (A5, A13, A15, A18, A21 y A24)

d) El estudiante A5, que nombraremos **LUIS** y será objeto de uno de los estudios de casos, sólo se desplaza muy ligeramente hacia el polo *constructivista*. Parte de este desplazamiento se debe al empleo de unidades del texto, de manera literal, en el resumen del post-test (parafrasear), lo que neutraliza el efecto de la aparición de unidades interpretadas por el estudiante, que cambien de posición respecto a las unidades del texto que las inspiran.

e) La estudiante A12, que nombraremos **EVA** al realizar uno de los estudios de casos, se encontraba en el pre-test en el centro de ambos ejes, y, en el post-test, se ha desplazado ligeramente hacia el polo *epistemológico*, en el segundo eje, y hacia el polo *realista* en el primer eje. Una interpretación posible es que Eva haya tomado conciencia de la relación entre los argumentos epistemológicos y didácticos y siente que debe describir lo que aporta el *polo realista* sobre el conocimiento matemático, más que indicar como ve la enseñanza el *constructivismo*.

4.4.2. Proyección conjunta del grupo y de los estudiantes de los estudios de casos

En esta sección abordamos el estudio de las respuestas conjuntas de todo el grupo en el pre-test y post-test, con objeto de describir la "tendencia general" de las respuestas, frente a la variabilidad particular que fue analizada en la sección anterior. Asimismo, pretendemos observar posibles cambios en esta tendencia general.

La comparación de los dos estudiantes A5 (Luis) y A12 (Eva), que van a ser objeto de los estudios de casos, con respecto a la tendencia general del grupo, permitirá analizar hasta qué punto estos estudiantes representan a su grupo o son casos " atípicos" en alguna de las dimensiones identificadas en los apartados anteriores. Las tablas y gráficos con los resultados de la inclusión de estos datos en el análisis de correspondencias se reflejan en la tabla 4.10 y en las figuras 4.11 a 4.13. La calidad de representación es muy alta para todos los puntos, por encima de 0.849.

Tabla

4.10:
Resultados del ACM.
Proyección del grupo y de los dos estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

Figura 4.11.
Representación gráfica del primer factor.
Proyección del grupo y de los dos estudiantes A5 y A12(pre-test y post-test)

Figura 4.12:
Representación gráfica del segundo factor.
Proyección del grupo y de los dos estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

En el primer factor, se observa en la tendencia global del grupo lo que ya se ha dicho al comentar los cambios de los alumnos individuales. La tendencia del grupo en el pre-test se orientaba ligeramente hacia el *constructivismo* (x=-0.199, r=0.550), tendencia que prácticamente se conserva (x=0.14, r=0.571).

Respecto al alumno A5 ha pasado de un valor (x=-0.357, r=0.588) asociado al *constructivismo* a acentuar esta posición (x=-0.479, r=0.697).

El alumno A12, por el contrario ha experimentado un cambio en su posición respecto a este eje, pasando de una asociación más ligada con el *constructivismo* (x-0.266, r=0.601) a otra más ligada con el *realismo* (x=0.216, r=0.220).

En relación al segundo factor, observamos que no se aprecian cambios en las tendencias del grupo en relación a este eje, a pesar de que individualmente había bastante variabilidad y también cambios de estudiantes particulares. Esto lo vemos en la similitud de valores en pre-test (x=0.050, r=0.035) y post-test (x=0.011. r=0.004)

Ha habido un ligero cambio en el alumno A5 que pasa de (x=-0.232, r=0,248) a (x=-0.164, r=0.082) y no ha cambiado el alumno A12 (x=0.017, r=0.002), (x=-0.167, r=0.132) que continúa en una posición intermedia.

La figura 4.13 muestra que las categorías de las distintas variables consideradas para los datos de los estudiantes y los correspondientes al texto están representadas en posiciones muy próximas entre si, de lo que podemos inferir que el conjunto de las respuestas de los estudiantes constituye un "buen resumen" del extracto del artículo; no se ha apreciado globalmente en este conjunto de respuestas algún tipo de sesgo en los items seleccionados que pudiera ser indicativo de una concepción o creencia común a una mayoría de los estudiantes que enfatizara alguna categoría sobre las restantes. Por el contrario la variabilidad de los estudiantes que hemos analizado en las secciones anteriores neutralizaría una posible "tendencia sesgada" del grupo.

Figura 4.13:
Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor.
Proyección del grupo de estudiantes y de los dos estudiantes A5 y A12
(pre-test y post-test) (Incluir aquí)

A un resultado semejante se llega cuando hemos proyectado los datos del post-test como filas suplementarias en el análisis de correspondencias de la matriz de datos correspondiente al extracto del texto.

La variación en el comportamiento del grupo entre pre-test y post-test no es significativa, tal como cabría esperar al contemplar el número de estudiantes que han cambiado significativamente y el número de ellos que han permanecido. Esta ligera variación se dirige hacia una preocupación mayor por la caracterización del conocimiento matemático que por la enseñanza. Los estudiantes se encontraron en una clase de *Prácticas de enseñanza de matemáticas*, y tenían las expectativas de que iban a tratar el proceso de enseñanza y no a analizar el objeto matemático. Recibieron un texto que habla del conocimiento matemático y de la enseñanza de las matemáticas, y resumieron atendiendo a lo que se les presentaba, pero pensando que lo más importante era lo referente a la enseñanza. En las actividades del curso se ha hablado frecuentemente de aspectos epistemológicos, con lo que ha cambiado ligeramente su "jerga" en esta asignatura, y al realizar de nuevo el comentario se han sentido inclinados a aportar más aspectos epistemológicos en ligero detrimento de los didácticos. Pero este cambio ha sido tan ligero que no se puede pensar en un cambio global de creencias y concepciones.

Sólo algunos estudiantes han realizado cambios bruscos que habría que estudiar más a fondo. Pero tal como hemos visto en la primera parte del análisis, el número de estudiantes que permanecen muy próximos a la posición que adoptaron en el pre-test es mayor que el número de estudiantes que han cambiado. Por otra parte, las variaciones se contrarrestan, con una tendencia hacia el centro de los ejes, lo que no es de extrañar, ya que indica que al hacérseles más familiares los términos y las ideas del texto, los estudiantes resumen mejor dicho texto.

4.5 Segundo análisis: Variables y resultados

Concluimos el primer análisis indicando que los estudiantes del grupo son "buenos resumidores del texto". Pero, de acuerdo con lo comentado en el capítulo 2, podemos pensar que, en los resúmenes, se encierran las interpretaciones de los estudiantes sobre las tendencias en la enseñanza de las matemáticas y la relación que existe entre estas tendencias y las posturas epistemológicas descritas en el texto, es decir, realismo y el constructivismo.

Con objeto de sobrepasar el texto y afrontar la forma en que estos estudiantes contemplan las posturas realista y constructivista, hemos pedido a 11 jueces (los 6 del estudio piloto, más 5 nuevos) que identificaran aquellas unidades del texto que a su juicio mejor describen las posturas realistas y constructivistas sobre las matemáticas y su enseñanza.

Nuestro presupuesto es que los estudiantes tienen unas determinadas concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza. Estas concepciones van a influir en los estudiantes al enfrentarse a un texto que describe directamente la relación entre la enseñanza de las matemáticas y la forma de concebir el conocimiento matemático. Ante la tarea de resumir las ideas del texto, los estudiantes intentarán recoger los aspectos más importantes del mismo. Pero para decidir sobre la importancia de los aspectos necesitan emplear sus concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. El texto, de esta forma, se constituye en un reactivo que favorecerá la explicitación y cuestionamiento de sus concepciones y creencias. Los resúmenes de los estudiantes van a estar influidos por sus concepciones y creencias, de manera que aquellos que hayan reflexionado previamente sobre estos aspectos epistemológicos serán más sensibles al contenido del texto, y destacarán las ideas más significativas. Las opiniones de los jueces serán una referencia externa al texto que nos permitirá estudiar el *grado de sensibilidad* de los estudiantes respecto a los argumentos epistemológicos y didácticos contenidos en el mismo.

El aporte de los jueces fue diverso. Al no haber delimitado el número de unidades que debían seleccionar ni el orden de representatividad de estas, se produjeron valoraciones con cantidades muy variables de unidades. Para sintetizar todos los juicios decidimos contar el número de jueces que seleccionaba cada unidad. Este número se constituirá en peso de esa unidad a la hora de establecer el *índice de sensibilidad* del resumen del estudiante, ya que calcularemos la suma de los pesos de todas las unidades que aparecen en el resumen de cada estudiante.

Los jueces han destacado 30 unidades de la caracterización que el texto hace del Realismo y 30 del Constructivismo. Sin embargo, la mayoría de las preferencias han ido a las unidades del Constructivismo. Hay mayor coincidencia en la elección de las unidades del Constructivismo. La unidad más elegida es la 111

111: La tesis fundamental de esta postura epistemológica -que llamaremos realismo matemático- es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el

objeto de conocimiento.

En el Constructivismo hay 4 unidades (205, 211, 216 y 220) elegidas por 9 de los 11 jueces.

Las elecciones de los jueces nos suministran una valoración externa del texto, que nos puede servir para situar las opiniones de los estudiantes en relación a las posturas epistemológicas. Para ello vamos a emplear las mismas variables que hemos empleado hasta ahora con el texto, es decir la posición de las unidades en la Rejilla: *plano, fase y polo*, así como la variable *test: pre-test, post-test*.

Debemos advertir que algunas unidades se han situado en más de una categoría (por ejemplo, la 121, que al analizar las respuestas de los estudiantes se ha dividido en dos unidades, una clasificada en la categoría 1 -unidad 121A- y otra en la categoría 11 -unidad 121B-).

Diferenciando por las variables del estudio, hemos observado que los jueces eligen más unidades del *constructivismo* que del *realismo* (162 frente a 125). El *plano* más elegido es el *psicológico* en su vertiente *constructivista* y el *epistemológico* en su vertiente *realista*. La *etapa* más elegida es la de caracterización del objeto (*ontológica*), en los dos *polos*. El orden de elección por categorías empieza en la categoría 7 del *constructivismo* (*acceso* al conocimiento por parte del sujeto, cómo llega a captar el conocimiento), seguida de la 6 del *realismo* y del *constructivismo* (características del conocimiento matemático). Los aspectos didácticos referentes a la enseñanza son elegidos con una media de casi dos unidades por juez, para los dos *polos*. Los jueces parecen pues considerar que el artículo describe mejor los aspectos epistemológicos que los didácticos.

Como hemos dicho, las elecciones de los jueces nos van a servir para valorar la sensibilidad de los estudiantes a las concepciones realista y constructivista. Para ello hemos comparado las muestras de unidades de información del extracto del artículo que se corresponden con el resumen de los estudiantes (MUIFARE), con las unidades elegidas por los jueces (UIFAJ, tabla anterior). A cada unidad elegida por los jueces le hemos asignado un peso igual al número de jueces que habían elegido esa unidad. A cada unidad de la muestra de cada estudiante ($MUIFARE_i$) le hemos asignado el peso que le corresponde según el número de jueces que han elegido la misma unidad. La suma de estos pesos para todas las unidades del resumen del estudiante nos da un número que hemos tomado como una medida de la sensibilidad en bruto, ya que será variable dependiendo del número de unidades que haya elegido el estudiante. Para poder comparar estas cantidades, hemos dividido esta cantidad entre el número de unidades que cada estudiante ha empleado en el resumen. De esta forma obtenemos, para la muestra de cada estudiante, un índice de la coincidencia con respecto a los jueces. Es decir, el número de jueces que coinciden con el estudiante en la elección de una unidad tipo de las elegidas por el estudiante. En la figura 4.14 se recoge la forma de valoración de las unidades del estudiante 5 y el cálculo de su índice de sensibilidad o coincidencia con los jueces.

Hemos obtenido el índice de sensibilidad de cada estudiante y ordenado estos índices en el grupo. La tabla 4.11 muestra la distribución de este índice en los dos momentos: Pre-test y post-test en todos los estudiantes. Recordamos que el máximo valor de una unidad respecto a los jueces sería de 10 (para la unidad 111)

------------------------- ***Figura 4.14***:

Cálculo del índice de coincidencia con los jueces del resumen del realismo del estudiante número 5.

La distribución de los índices de sensibilidad para todo el grupo de estudiantes es la que aparece en la tabla 4.11.

------------------- ***Tabla 4.11***:

Índices de sensibilidad de los estudiantes en los resúmenes realizados

----

En esta tabla aparecen en negrilla los valores mayores de los índices para cada ocasión y polo. Subrayados aparecen los menores valores del índice para cada ocasión (*test*) y *polo*.

En esta tabla observamos que los valores centrales son mayores en el *constructivismo* que en el *realismo*, y que hay menos diferencia entre el pre-test y el post-test.

Concretamente, las medias correspondientes son las que aparecen en la tabla 4.12.

Tabla 4.12:

Valores medios y errores de muestreo del índice de sensibilidad

para los diferentes valores de los factores considerados.

La diferencia entre las medias del pre-test y del post-test es de casi medio punto, mientras que la diferencia debida al *polo* es de casi un punto. Cabría pensar que el efecto de la variable *polo* es tan notable que enmascara el de la variable *test*. Para contrastar el grado en que cada variable influye en la variación del grado de sensibilidad, tanto por separado como en actuación conjunta, hemos aplicado un análisis de varianza múltiple, en el que hemos considerado la influencia de los factores *test* y *polo*, así como las interacciones que entre estos factores puedan aparecer, sobre el índice de sensibilidad. En la tabla 4.13 aparecen los resultados del análisis de varianza.

---------------***Tabla 4.13***. Resultados del análisis de la varianza --------------

Podemos ver de una manera gráfica la variación que sufre el índice de sensibilidad debido a las dos variables *test* y *polo*, en los gráficos de cajas, de las figuras 4.15 y 4.16

Figura 4.15

Gráfico de la caja para el factor test (1: pre-test. 2: Post-test) -----------------

----

Figura 4.16

Gráfico de la caja para el factor polo (1: realismo, 2: Constructivismo) ------------------

De estas últimas tablas y figuras podemos concluir:

a) Se observa en esta tabla que el índice de sensibilidad varía significativamente con la variable *polo*, (nivel de significación 0.0002). Los índices de sensibilidad son mayores en el *constructivismo* que en el *realismo*, en los dos momentos en que se ha pasado el comentario. Podemos decir, entonces, que los estudiantes son más sensibles a la caracterización del *Constructivismo* que a la del *Realismo*.

b) Respecto a la variable *test*, observamos que ha disminuido en más de un punto el rango de variación de los índices de sensibilidad a las concepciones *realistas*, desde el pre-test al post-test, aunque ha variado menos el rango intercuartílico. También ha aumentado el rango de variación de los índices de sensibilidad a las concepciones *constructivistas*. Sin embargo ha disminuido el rango intercuartílico correspondiente a este polo *constructivista*. Se observa que el aumento del rango es debido fundamentalmente a la subida de los índices de caracterización del constructivismo en el post-test.

c) Pese a estas variaciones, el índice de sensibilidad no sufre una diferencia significativa debida a la variable *test.* Tampoco ha sido significativa la interacción entre ambas variables.

d) En conclusión, sólo es significativa la variación debida a la variable *polo*, que debe estar inducida por el texto, ya que también en los jueces hay mayor coincidencia en la valoración de las unidades constructivistas que en las realistas.

4.6 Conclusiones del estudio del grupo

Estas observaciones, junto con las realizadas en el primer análisis nos permiten obtener las siguientes conclusiones: a) Se observa que los estudiantes caracterizan mejor el *constructivismo* que el *realismo*. Se

podría interpretar diciendo que son más sensibles a las unidades que aportan ideas que los estudiantes consideran nuevas, y esto ocurre con la caracterización epistemológica y psicológica del *constructivismo*. Las afirmaciones sobre el *realismo* parecen menos valoradas en el texto y están unidas a una enseñanza que en el mismo texto es criticada.

b) Pese a que no son significativas las diferencias entre los resúmenes del grupo en pre-test y post-test, si ha mejorado ligeramente el índice de sensibilidad de los estudiantes a la caracterización de los dos polos presentados.

c) El segundo análisis nos permite completar las observaciones realizadas sobre los estudiantes destacados en el primer análisis.

• ***Estudiantes que han obtenido diferencias notables***

A7: Su índice de sensibilidad hacia el *realismo* es bajo, especialmente en el pre-test. Ha subido espectacularmente su sensibilidad hacia las unidades *constructivistas* del post-test. Este aumento de sensibilidad se debe a una mayor preocupación por la forma *constructivista* de concebir el *objeto* matemático.

A2: Ha mejorado mucho su sensibilidad hacia la postura *realista*, desde el pre-test al post-test. También ha mejorado algo la ya alta sensibilidad hacia el *constructivismo*. Esta mejora se debe a que ha reducido el número de unidades en el resumen. Ha eliminado especialmente las alusiones a la enseñanza, para centrarse en la importancia del conocimiento matemático. Se podría pensar que los diversos acontecimientos y estímulos ocurridos durante el curso han hecho ver al estudiante la repercusión que tiene sobre la enseñanza la forma de concebir la matemática.

A17: Es muy poco sensible a los argumentos *constructivistas*, especialmente a los que caracterizan el conocimiento matemático. Su resumen es fundamentalmente *didáctico*. Parece que contempla el texto como una reflexión sobre la enseñanza, pero aportando una visión particular que identifica la enseñanza *constructivista* con una actitud motivadora del profesor, y la enseñanza *realista* con una actitud directiva e impositiva del profesor. No parece haberle influido el discurrir del curso, sino que ha permanecido en su visión restrictiva y parcial del proceso.

• ***Estudiantes que sufren ligeras variaciones:***

Luis (A5): Se pone de evidencia su capacidad para distinguir las unidades del texto que mejor resumen el mismo. Pero además coincide con los jueces en esta selección, y mejora ligeramente su visión *constructivista*, en detrimento de la *realista*.

Eva (A12): Su grado de sensibilidad es mediano respecto al grupo, en los dos *polos* y momentos. Representa un estudiante tipo en lo que respecta a su sensibilidad a los argumentos epistemológicos y didácticos. No podemos confirmar la hipótesis que formulábamos en las conclusiones del primer análisis en el sentido de había tomado conciencia de la existencia de los dos *polos* epistemológicos, ya que su ligero cambio y su leve aumento de sensibilidad hacia la corriente *constructivista* puede deberse a su capacidad para resumir. El estudio de casos nos permitirá analizar sus creencias de partida y con ello interpretar su posible mejora.

• ***Estudiantes que no han variado en relación a los ejes:***

A3: Se manifiesta como un buen resumidor, especialmente en el post-test

A11: Mantiene también el índice de sensibilidad respecto al *realismo* y sube algo en el *constructivismo*. Se ocupa preferentemente de aspectos didácticos, sin distinguir apenas los aspectos epistemológicos.

A18: Aunque no separa claramente los aspectos epistemológicos y didácticos, sube en su índice de sensibilidad, desde el primer cuartil al tercero. En su resumen se aprecia que adjudica al profesor las tareas investigadoras y docentes, y a los alumnos la comprensión y el aprendizaje. Con ello vemos que se puede obtener un índice de sensibilidad elevado sin ser consciente de la diferencia de planos que se plantea en el texto.

A21: En el pre-test apenas tiene en cuenta la postura epistemológica *realista*. Al aparecer el término "formalismo", se basa en él para identificar un tipo de enseñanza memorística y sin motivación. Esto le da la oportunidad de caracterizar la enseñanza *constructivista* como opuesta a las consideraciones negativas que ha hecho de la realista-formalista: motivada, activa. Pero esta caracterización la realiza desde una interpretación personal, lo que hace que aparezcan muchas unidades sin clasificar. En el post-test emplea unidades del texto, aunque pocas encierran informaciones precisas. Se puede advertir una mejora en la sensibilidad del estudiante, tanto por su mayor apertura a elementos del texto como por su mejor elección en relación con las selecciones de los jueces.

A24: Cambios ligeros en la sensibilidad hacia los dos *polos*, como lo eran en los dos ejes. El resumen es muy breve en el pre-test y algo más amplio en el post-test. La variación mas significativa se debe a la introducción de aspectos *psicológicos* en la caracterización *constructivista* del *acceso* al conocimiento.

d) En general los estudiantes han subido en índice de sensibilidad respecto a los dos polos. Entre los que han bajado destacamos los siguientes estudiantes: A17, A8, A15, A19 y A22. Esta bajada se debe fundamentalmente a una reinterpretación, que hace que no se puedan identificar las unidades que emplean con las que aparecen en el texto, con lo que no aumenta el peso total del resumen y sin embargo aumenta el número de unidades entre las que se divide, así: **A22**: experimenta una subida en la sensibilidad hacia el *realismo* y una bajada en el

constructivismo hasta obtener la puntuación mínima en esta corriente en el post-test. El resumen de este estudiante es muy breve en el post-test, pese a que el comentario general mantiene su extensión del pre-test. Su representación del *constructivismo* es de carácter didáctico, con una idea de enseñanza *constructivista* como más activa y con protagonismo del alumno. Esta idea central la desarrolla mediante unidades que no coinciden con las del texto, por lo que su índice de coincidencia con los jueces es bajo, pese a que coincida en algunas ideas.

4.7. Resumen del estudio del grupo

El estudio del grupo se planteaba como objetivo el caracterizar las concepciones y creencias del grupo de estudiantes, mediante un análisis de las respuestas a un comentario de textos. La aplicación del comentario en dos ocasiones pretendía estudiar los cambios apreciados en estas concepciones y creencias.

Partimos del presupuesto de que los estudiantes se enfrentarían a la tarea de resumir el texto con diferentes grados de sensibilidad hacia los argumentos expuestos en el mismo, y que resaltarían en su resumen aquellas ideas que mejor encajaran en sus concepciones y creencias. En este presupuesto, el contenido del texto tiene una gran importancia en la caracterización que podamos hacer de estas concepciones y creencias. Por esta razón, empezamos por completar el análisis del texto mediante un tratamiento estadístico basado en el análisis de correspondencias. Para ello descompusimos el texto en unidades de información y clasificamos estas unidades en el sistema de categorías que encierra la Rejilla presentada en el capítulo 3. De este análisis de correspondencias obtuvimos que el texto empleado para el comentario parece articularse en dos dimensiones fundamentales. La primera se establece entre los *polos realista y constructivista* y la segunda entre los *planos y etapas epistemología de la matemática y enseñanza de la matemática.*

Este análisis estadístico del texto triangula el análisis realizado por los comentarios de las profesoras de Lengua y Literatura española (§2.5.1). Es importante resaltar que ambos análisis coinciden en dar al texto una estructura paralela, basada en los valores de la variable polo. Asimismo, los dos análisis aprecian que el texto enfatiza las mismas categorías.

Posteriormente realizamos una valoración externa del texto mediante las opiniones de los jueces. El texto pretende presentar las posturas *realista* y *constructivista* y su repercusión en la enseñanza. El análisis de los jueces valora estas descripciones e implicaciones, delimitando las frases que mejor pueden cumplir estos objetivos. Con ello añaden un análisis externo del contenido del texto. Gracias a esta valoración hemos podido contrastar los resúmenes de los estudiantes con significados externos de las dos corrientes.

Una vez estudiada la estructura del texto y la relación entre su contenido y la descripción de las corrientes *constructivista* y *realista,* hemos analizado los resúmenes de los estudiantes observándolos desde tres puntos de vista. En primer lugar hemos realizado un análisis de correspondencia entre los resúmenes y el esquema del texto. Este proceso estadístico nos ha dado una información del grado en que los estudiantes reconocen las ideas que aparecen en el texto, y el grado de significación de las variaciones entre el pre-test y el post-test. La estructura desigual del texto, detectada mediante los tres análisis realizados, parece haber incidido en los estudiantes de manera que se han eclipsado las diferencias obtenidas entre el pre-test y el post-test. Sin embargo, el procedimiento nos ha permitido detectar perfiles de creencias y concepciones a partir de los resúmenes de los estudiantes y la variación que se da en alguno de ellos.

Pretendíamos que el segundo análisis nos suministrara una información sobre hasta que punto los estudiantes han reflexionado sobre las razones epistemológicas que influyen sobre las opciones didácticas que determinan la forma de enseñar matemáticas. También pretendíamos estudiar la variación que sufre este grado de implicación desde el comienzo de curso hasta el final del mismo. Para ello recurrimos a las opiniones de los jueces y contrastamos los resúmenes de los estudiantes con las elecciones que los jueces hicieron de las unidades del texto. El análisis de los índices de coincidencia entre los estudiantes y los jueces supone una triangulación con el análisis anterior que permite relacionar los resúmenes de los estudiantes con los significados que se atribuyen a las corrientes.

Estos dos análisis nos han suministrado unas medidas cuantitativas y espaciales de los sujetos, lo que nos ha permitido destacar características de sus resúmenes y variaciones de los mismos. Para interpretar estas variaciones o permanencias hemos vuelto a revisar los resúmenes, en un intento por controlar algunas variables intervinientes que hayan podido influir en los cambios y permanencias, a la vez que interpretar los resultados obtenidos en términos de creencias y concepciones. Por ejemplo, hemos considerado la extensión de sus trabajos como un indicador del interés que los estudiantes han puesto en la tarea. Otro indicador de interés que hemos considerado es si el estudiante ha reinterpretado el texto o haya hecho una interpretación libre. En ese caso es más fácil caracterizar sus creencias y concepciones. Sin embargo, si ha empleado citas textuales, podemos pensar que el estudiante se muestra cauto ante el contenido del texto, que le resulta extraño. En esta actitud ante el texto influyen también las expectativas ante los cursos de formación (Flores, 1993), ya que si se plantea que va a recibir enseñanza declarativa sobre el cómo enseñar matemáticas, puede considerar que todos los documentos entregados y las reflexiones que debe realizar en la asignatura Prácticas de Enseñanza deben de ser didácticas, con lo que se cierra a los aspectos epistemológicos.

La realización de estas tres revisiones nos ha suministrado alguna información sobre las creencias y concepciones de los estudiantes. Hemos observado que la mayoría de los estudiantes han resumido el texto respetando su estructura. Las variaciones entre el pre-test y post-test no son significativas. Pero, sin embargo, han aparecido variaciones interesantes entre las posturas de algunos estudiantes, aunque dichas variaciones habría que completarlas mediante métodos de indagación personalizada como los que afrontamos en los estudios de casos.

Parece que los estudiantes han interpretado mayoritariamente el texto como un discurso didáctico, y que la oposición *constructivismo-realismo* se basa en enseñanza tradicional-enseñanza activa. Las ideas didácticas que en el texto se atribuye al *constructivismo* son captadas como formas de una enseñanza que implica más al estudiante (lo importante es la actividad del estudiante, etc), de forma que se aproximan a la postura que Ernest (1994) llama *Romántica*. Esta postura que combina la aceptación de un conocimiento externo con el principio activista romántico acerca al grupo al constructivismo ingenuo (Ernest, 1994).

Los estudiantes, en general, mejoran en sensibilidad hacia las aportaciones contenidas en el texto. Pero tal como se verá en las entrevistas de los estudios de caso, no puede imputarse este aumento de sensibilidad al hecho de emplear el mismo texto, dada la lejanía en el tiempo entre pre-test y post-test.

Figura 4.1: Ejemplo de sustitución del resumen de un estudiante por la muestra de unidades de información del fragmento del texto, y cálculo de frecuencias de cada categoría-*polo* (Estudiante 27 - pre-test)

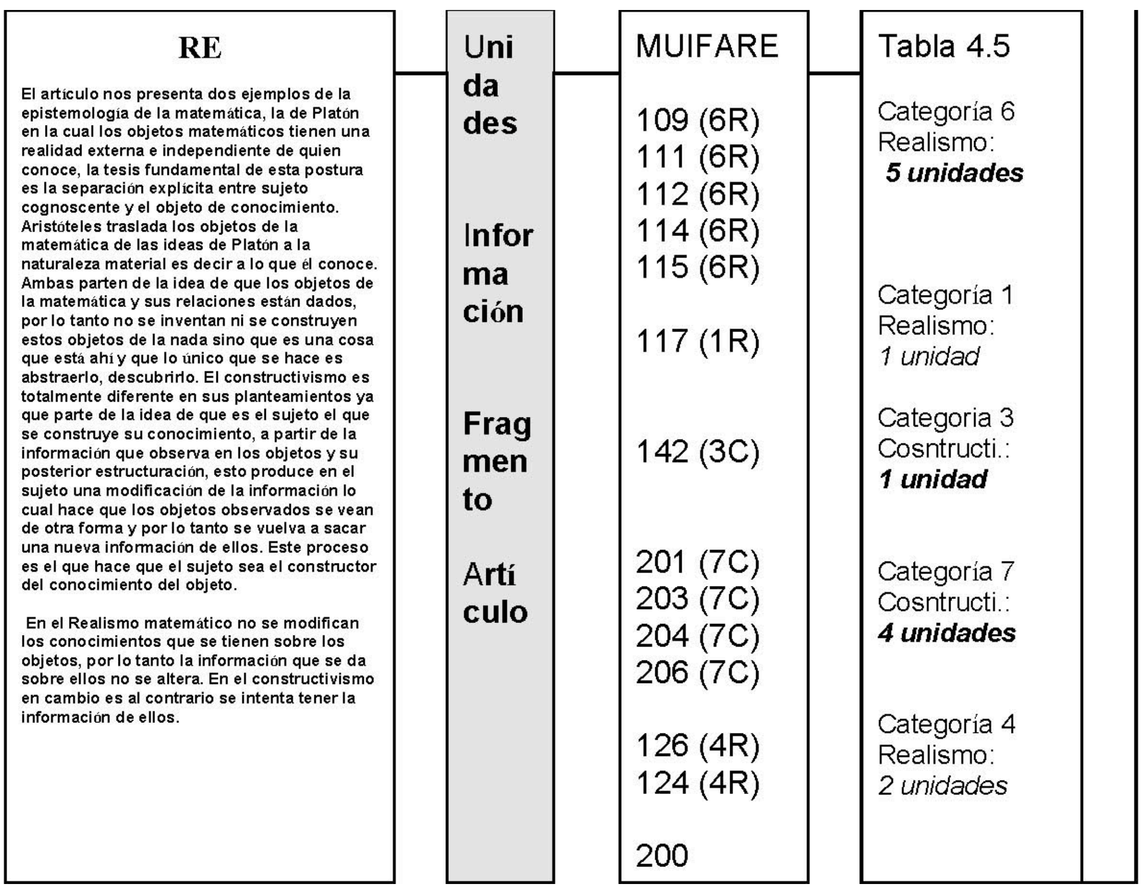

Figura 4.2 Representación gráfica del primer factor .

EPDI .

```
           -              .               -
           -              .               -
      1.2  +              +               +
           -           VALI .             -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
      .80  +              +               +
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -           REAL .             -
           -              .               -
A     .40  +              +               +
X          -           EPIS .             -
I          -              .               -
S          -              .               -
           -              .               -
1          -              .               -
           -              .               -
      0.0  +           PSIC +             +
           -           DIDA .             -
           -           OBJE .             -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
     -.40  +              +               +
           -           ACCE .             -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -              .               -
           -           CONS .             -
     -.80  +              +               +
           -              .               -
           -              .               -
           -           SIEP .             -

           LX =   .3394 ( 36.7%)

                              DIDA .
                                              -
```

Figura. 4.3:
Representación

gráfica del
segundo factor

```
   -
   .8  +                 +                     +
       -               ACCE .                  -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -               PSIC .                  -
       -                 .                     -
   .6  +                 +                     +
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
   .4  +                 +                     +
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
A      -                 .                     -
X      -               VALI .                  -
I   .2 +                 +                     +
S      -                 .                     -
       -                 .                     -
2      -                 .                     -
       -                 .                     -
       -               REAL .                  -
    0. +                 +                     +
       -               CONS .                  -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
  -.2  +                 +                     +
       -                 .                     -
       -               EPDI .                  -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -                 .                     -
  -.4  +               SIEP +                  +
       -                 .                     -
       -                 .                     -
       -               EPIS .                  -
       -               OBJE .                  -
        LX =  .2300 ( 24.9%)
```

Figura 4.4: Estructura del fragmento del texto. Representación gráfica en el plano del

primer y segundo factor

```
    ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....
                                                                        -| -
                                                                     -DIDA -
                                                                      .8 + + +
                                                                   -ACCE | -
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                     -PSIC -
                                                                        -| -
                                                                      .6 + + +
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                      .4 + + +
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                        -| -
                                                                     A -| -
                                                                 X -| VALI -

I          .2          +          +
S                                -|

        -|
2                                -|

.-      |

.-      |

                                                                                 +
                                                                                 -
                                                                                 -
                                                                                 -
                                                                                 -
                                                                            REAL -
    0.  +--+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+-------+----+
        -CONS                                     |                              -
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
   -.2  +                                       +                                +
        -|                                                                       -
        -|                                     EPDI                              -
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
   -.4  +                         SIEP                        +                  +
        -|                                                                       -
        -|                                                                       -
        -|                                     EPIS                              -
        -OBJE                                                                    -
        ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....

         -.90    -.30            .30              .90              1.5
                 -.60            0.0              .60              1.2

                                    AXIS 1

         LX =  .3394                          (                              36.7%)
```

```
LY =  .2300                        (                           24.9%)
```

Figura 4.5: Representación gráfica del primer factor. Proyección de los estudiantes

(PRE-TEST)

```
                 PLOT OF ROWS
                               .
         -Epdi . -
         -. -
         -. -
         -. -
    1.2  + + +
         -vali . -
         -. -
         -. -
         -. -
         -. -
         -. -
    .80  + + +
         -. -
         -. -
         -. -
         -. -
         -real . -
         -. -
A .40 +
X -epis
I -
S -
         -
1 -
         -A1
                               + +
                               . -
                               . -
                               . -
                               . -
                               . -
                               . -
    0.0  + psic + +
         -A6 dida . -
         -A12 obje . -
         -A15 . -
         -A8 . -
         -A10 . -
         -A9 . -
   -.40  + A5 + +
         -acce . -
         -. -
         -. -
         -. -
         -. -
         -cons . -
   -.80  + + +
         -. -
         -. -
         -siEP . -

          LX =  .3394 ( 36.7%)

*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH
```

```
   WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
LABEL AXIS 1 LABEL AXIS 1

 A21 -0.03
 A11 -0.06
 A19 -0.10 A2
 A17 -0.12 A25
 A18 -0.14
 A7 -0.17 A16
 A14 -0.17 A13
 A24 -0.19 A3
 A23 -0.19

                                         A22 -0.21
                                          A4 -0.21
                                            -0.21
                                            -0.24
                                         A20 -0.26
                                            -0.27
                                            -0.28
                                            -0.30
```

Figura 4.6: Representación gráfica del segundo factor. Proyección de los estudiantes

(PRE-TEST)

```
         -
    .9 +

         -A7

         -dida
         -

         -acce
         -
         -

         -psic

    .6   +
         -
         -
         -
         -
         -
         -

         -A22

    .3 + A16
A -A23 vali
X -A11
I -
S -A1

         -A1
4
2 -

         -A21 real

                              .
                              . -
                              + +
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              + +
                              . -
```

```
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 + +
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -

     0.   + A19

          -A25 cons
          -

          -A20

          -A13

          -A24

          -A5

          -Epdi

    -.3   +
          -

          -siEP
          -
          -

          -epis
          -
          -obje

    -.6   +
          -

                                 + +
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 + +
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 . -
                                 + +
                                 . -

           LX =  .2300 ( 24.9%)

*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH

                WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
                 LABEL AXIS 2

              A22 0.36

              A17 0.29

              A4 0.15

              A15 0.11
```

```
A3 0.11

A10 0.10

A8 0.03

A12 0.02
A6 -0.13
A9 -0.15
A18 -0.20
A2 -0.21
```

Figura 4.7: Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor.

Proyección de los estudiantes (PRE-TEST)

```
...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....
                                                                       -| -
                                                                   .9 + + +
                                                                    -A7 | -
                                                                    -dida -
                                                                       -| -
                                                                  -acce | -
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                    -psic -
                                                                   .6 + + +
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                       -| -
                                                                   -A22 | -
                                                                .3 + A16+ +
                                                           A -A23 | vali -
                                                                   X -A11 -
                                                                     I -| -
                                                                S -A4 |A1 -
                                                                -A15A14 | -
                                                                     2 -| -
                                                                -A21 real -

0.   +--+-------+-------+-A25A19+-------+-------+-------+-------+-------+----+
     -cons A8 A12| -
     -| -
     -A20 | -
     -A9 A6 -
     -A13A18 | -
     -A5 A24 | -
     -| Epdi -

-.3  + + +
     -| -
     - siEP | -
     -| -
     -| -
     -| epis -
     -| -
     -obje -

-.6  + + +
     -| -
     ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....

      -.90 -.30 .30 .90 1.5
              -.60 0.0 .60 1.2

                                AXIS 1
      LX = .3394 ( 36.7%)
      LY = .2300 ( 24.9%)

*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH

              WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
               LABEL AXIS 1 AXIS 2


            A2 -0.22 0.14
```

```
A3 -0.30 0.11
A10 -0.30 0.10
A17 -0.12 0.29
```

Figura 4.8: Representación gráfica del primer factor. Proyección de los estudiantes

(POST-TEST)

```
        -Epdi
        -
        -
        -

                                            .
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -

    1.2  +

        -vali
        -
        -
        -
        -
        -

    .80  +
        -
        -
        -
        -

        -real
        -

                                            + +
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            + +
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -

A .40 +
X -epis
I -
S -

        -
1 -A7

        -A12

                                            + +
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -
                                            . -

    0.0  + A19 psic + +
        -A23 dida . -
        -A20 obje . -
        -A16 . -
        -A1 . -
        -A24 . -
        -A2 . -
```

```
   -.40  + + +
         -A5 acce . -
         -. -
         -. -
         -. -
         -. -
         -cons . -
   -.80  + + +
         -. -
         -. -
         -siEP . -

          LX =  .3394 ( 36.7%)

*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH
               WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
                LABEL AXIS 1

                                                 A9 0.07
                                                 A6 0.04
                                                 A8 0.04
                                                A25 -0.03
                                                A21 -0.06
                                                 A4 -0.09
                                                A11 -0.10
                                                 A3 -0.11
                                                A17 -0.13
                                                A18 -0.16
                                                A14 -0.21
                                                A15 -0.22
                                                A13 -0.24
                                                A10 -0.30
                                                A22 -0.30
```

Figura 4.9: Representación gráfica del segundo factor. Proyección de los estudiantes

(POST-TEST)

```
    .9   +
         -
         -dida
         -
         -acce
         -
         -
         -psic
    .6   + A17
         -
         -
         -
         -
         -
         -
         -
    .3   + A4
         -A1 vali
A -A16
X -A11
I -A15
S -A10
         -
2 -A8 real
                              + +
                              . -
```

```
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              + +
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              + +
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
                              . -
  0.   + A20 + +
       -A14 cons . -
       -A21 . -
       -A12 . -
       -A5 . -
       -A3 . -
       -. -
       -A18 Epdi . -
 -.3   + A13 + +
       -. -
       -siEP . -
       -. -
       -. -
       -epis . -
       -. -
       -obje . -
 -.6   + + +
       -A2 . -
       -. -
            LX =  .2300 ( 24.9%)


*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH
              WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
               LABEL AXIS 2

            A22 0.20
            A10 0.11
            A19 0.10
            A7 0.03
            A9 0.03
            A6 0.02
            A25 -0.09
            A24 -0.18
```

Figura 4.10: Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor. Proyección de los estudiantes (POST-TEST)

```
      ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....
  .9   +                                       +                                       +
       -|                                                                              -
       -dida                                                                           -
       -|                                                                              -
       -acce                                     |                                     -
       -|                                                                              -
```

```
       -|                                                                           -
       -psic                                                                        -

  .6   +                                    A17+                                    +
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -

  .3   +                                     A4                                     +
       -A1                         |                      vali                      -

A      -A16                                       |                                 -

X      -A22                                      A11|                               -

I      -A15                                       |                                 -

S      -A10                                 A19                        -
       -|                                                              -

2      -A23|                        A7                     real                     -

  0.   +--+-------+-------+----A20+A9-----+-------+-------+-------+-------+----+
       -cons                         A14                         |                  -
       -A21                                                                         -
       -|                                    A12                                    -
       -A5                                    |                                     -
       -A24                                  A25|                                   -
       -|                                                                           -
       -A18                        |                      Epdi                      -

 -.3   +                         A13                       +                        +
       -|                                                                           -
       -                         siEP                      |                        -
       -|                                                                           -
       -|                                                                           -
       -|                                   epis                                    -
       -|                                                                           -
       -obje                                                                        -

 -.6   +                                     +                                      +
       -A2                                    |                                     -
       -|                                                                           -
       ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....

        -.90    -.30              .30              .90              1.5
                -.60              0.0              .60              1.2


                                    AXIS 1
        LX = .3394 ( 36.7%)
        LY = .2300 ( 24.9%)


***    NOTE    ***    LABELS    AND    COORDINATES    OF    POINTS    WHICH

             WOULD        OVERWRITE        POINTS        ALREADY        PLOTTED
              LABEL            AXIS             1            AXIS              2


            A3                                -0.30                          0.11
            A6                               -0.03                          -0.13
            A8                               -0.31                          -0.03
```

Figura 4.11. Representación gráfica del primer factor. Proyección del grupo y de los dos

estudiantes A5 y A12(pre-test y post-test)

```
       -Epdi
       -
       -
       -
```

```
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -

    1.2  +

         -vali
         -
         -
         -
         -
         -

    .80  +
         -
         -
         -
         -

         -real
         -

                               +                      +
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               +                      +
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
A      .40      +
X               -
I               -
S        -AL12pos

       -
     1 -
       -

                               +                        +

                        epis   .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -
                               .                      -

    0.0  +                         psic                         +                        +
         -dida                                    .                                      -
         -GRUpos                       obje                       .                      -
         -GRUpre                                   .                                     -
         -.                                                                              -
         -AL12pre                                  .                                     -
         -AL5pre                                   .                                     -

   -.40  +                                       +                                       +
         -AL5pos                       acce                       .                      -
         -.                                                                              -
         -.                                                                              -
         -.                                                                              -
         -.                                                                              -
         -cons                                    .                                      -

   -.80  +                                       +                                       +
         -.                                                                              -
         -.                                                                              -
         -siEP                                    .                                      -
```

```
          LX =  .3394                               (                                 36.7%)
```

Figura 4.12: Representación gráfica del segundo factor. Proyección del grupo y de los

dos estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

```
         -

         -dida
    .8 +

         -acce
         -
         -

         -psic
         -

    .6   +
         -
         -
         -
         -
         -

    .4   +
         -
         -
         -

A -
X -vali

                      .
                      . -
                      . -
                      + +
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      + +
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      + +
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -

  I .2 +
     S -
       -
     2 -
       -

         -GRUpre real

                      + +
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -
                      . -

    0.   + GRUpos + +
         -cons . -
         -. -
```

```
       -. -
       -. -
       -AL5pos . -

 -.2   + + +
       -AL5pre . -
       -Epdi . -
       -. -
       -. -
       -. -

 -.4   + siEP + +
       -. -
       -. -
       -epis . -
       -obje . -

        LX =  .2300 ( 24.9%)

*** NOTE *** LABELS AND COORDINATES OF POINTS WHICH

              WOULD OVERWRITE POINTS ALREADY PLOTTED
               LABEL AXIS 2

             AL12pos -0.17
             AL12pre 0.02
```

Figura 4.13: Representación gráfica sobre el plano del primer y segundo factor.

Proyección del grupo de estudiantes y de los dos estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-

test)

```
    ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....
                                                                        -| -
                                                                      -dida -
                                                                      .8 + + +
                                                                     -acce | -
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                      -psic -
                                                                         -| -
                                                                      .6 + + +
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                      .4 + + +
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                         -| -
                                                                       A -| -
                                                                   X -| vali -

I          .2          +          +
S                               -|

         -|
2                               -|

         -                          |

         -                A5pre GRUpre

                                                                                  +
                                                                                  -
                                                                                  -
                                                                                  -
                                                                                  -
                                                                           real -

    0.   +--+-------+-------+GRUpos-+-------+-------+-------+-------+-------+----+
```

```
     -cons                                   Al12pre                                  -
     -|                                                                               -
     -|                                                                               -
     -|                                                                               -
     -AL5pos                     |                        AL12pos                     -
-.2  +                                         +                                      +
     -|                                                                               -
     -|                                      Epdi                                     -
     -|                                                                               -
     -|                                                                               -
     -|                                                                               -
-.4  +siep                                       +                                    +
     -|                                                                               -
     -|                                                                               -
     -|                                      epis                                     -
     -obje                                                                            -
     ...+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.......+.....

      -.90    -.30             .30             .90             1.5
              -.60             0.0             .60             1.2

                                       AXIS 1

      LX =  .3394                        (                                    36.7%)

      LY =  .2300                        (                                    24.9%)
```

Figura 4.14: Cálculo del índice de coincidencia con los jueces del resumen del *realismo* del estudiante número 5.

1ª fase: Sustitución del resumen de un estudiante (RE) por la muestra de unidades de información del extracto del texto (MUIFARE) (Estudiante 5 - post-test, unidades referidas al realismo)

RE

"Realismo matemático"
.Para Platón es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento.
. Para Aristóteles conocer ahora significa -conocer los objetos matemáticos, en los objetos corpóreos- de la Naturaleza.
. El realismo suministra el contexto de descubrimiento.

REPERCUSIONES
. El Realismo matemático privilegia el objeto de conocimiento
y concede un papel pasivo al sujeto.

Unidades

Información

Fragmento

Articulo

$MUIFARE_{5post}$

(1)111
(2)113
(3)121
(4)209
(5)210

2ª fase: Obtención del índice de sensibilidad (estudiante 5, post-test, descripción del realismo)

$MUIFARE_{5\text{-post-realismo}}$ Unidades elegidas	Pesos Número de jueces	VMUIFARE Índice de coincidencia

111 113 121 209 210	10 7 2 2 2	entre las unidades elegi das por el estudiante 5 para caracterizar el *realismo* y las elegidas por los jueces: 23/5 = 4,60
Número de unidades 5	Peso total de las uni dades elegidas 23	

Figura 4.16: Gráfico de la caja (1: Realismo, 2: Constructivismo)

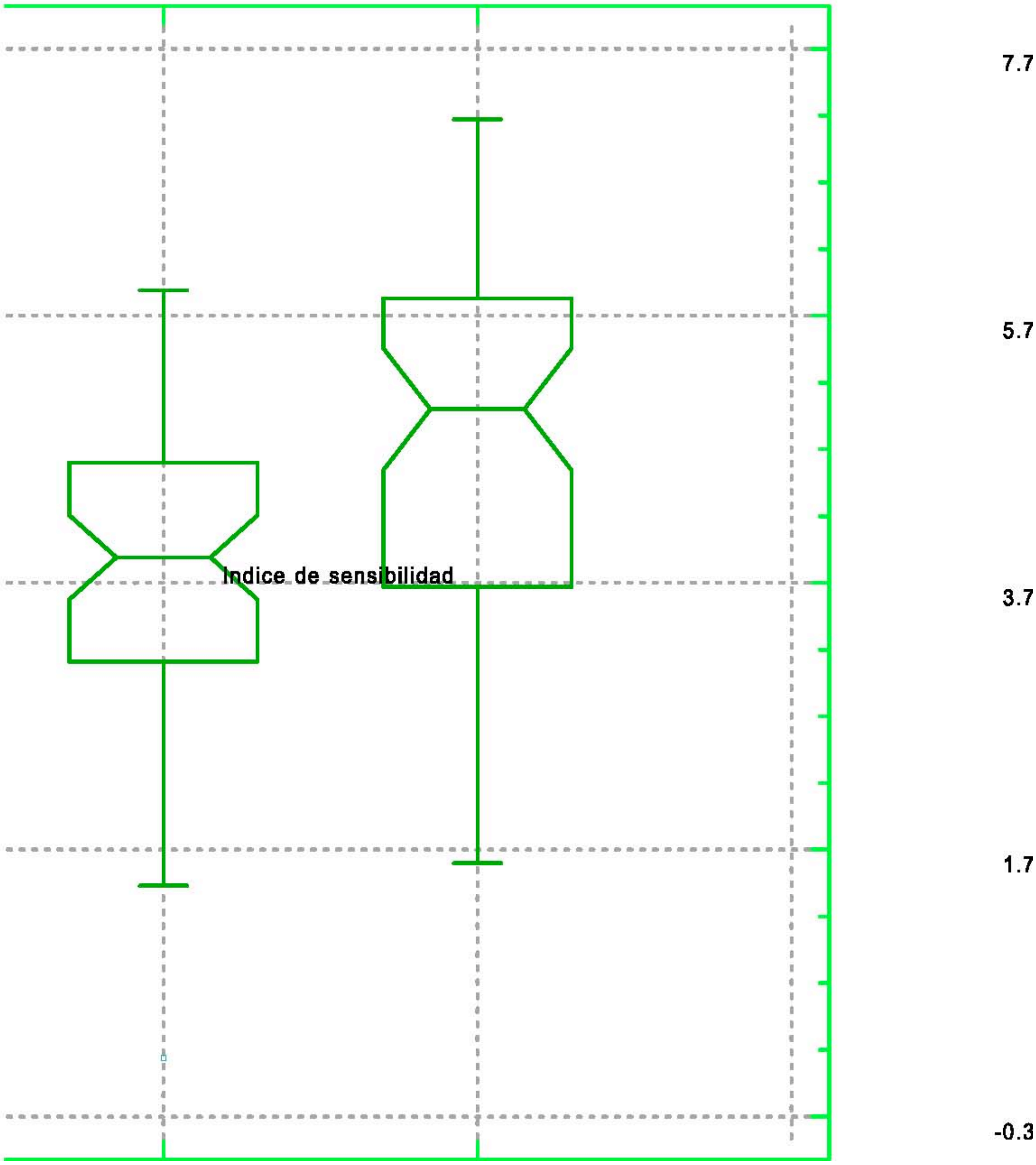

Figura 4.15:

Grficos de la caja

para el factor test

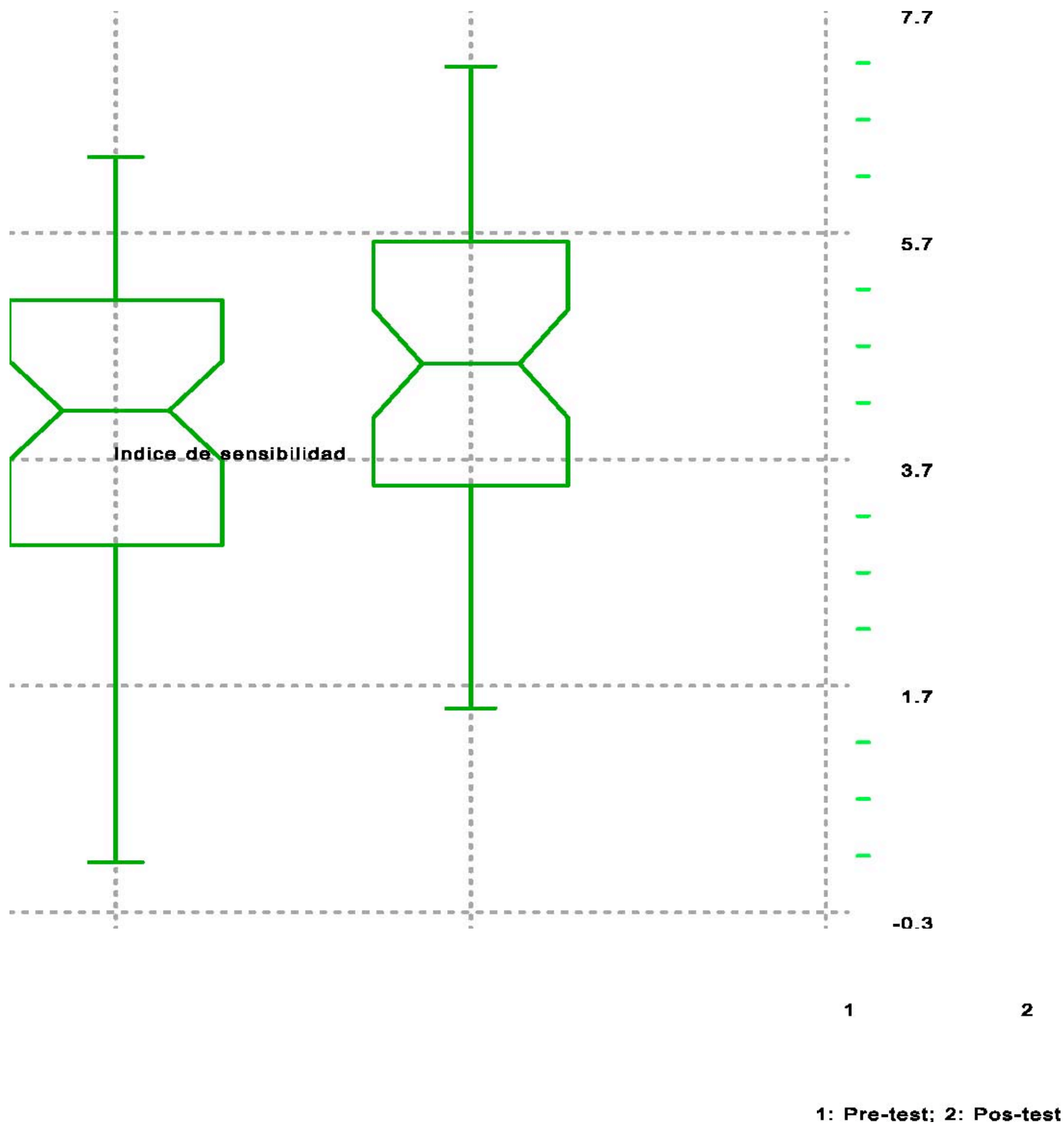

Tabla 4.1: Unidades de **I**nformación del **F**ragmento del **A**rtículo (**UIFA**) que aparecen en cada categoría de la rejilla

		Gnoseológica		Ontológica	
		Real	**Cons**	**Real**	**Cons**
	Epistem.	104 117 120A 121A		101 102 103A 108 109 111 112 114 115 116 119 122	140 141 143 207 208 212 215 216 217
Psic.		113B	214 220 221 222	110 113A	201 202 203 204 205 206 218 219 223
		127	142 213 227		225 226
	Didact.	124 125 126 209 210	211 224 228 229 230 231 232	123 134 135 138 139	
Epis.	**de didact**			125B 129	

***Tabla 4.2*: Frecuencias observadas de las unidades de información del fragmento del artículo según las variables etapa, plano y polo:**

Polo	Plano	Etapa			
		ACCE	OBJE	VALI	TOTAL
Realismo (REAL)	EPIS	4	12	6	22
	SIEP	1	2	0	3
	PSICO	1	0	3	4
	DIDA	5	5	3	13
	EPDI	0	2	2	4
	TOTAL	11	21	14	46
Construc-	EPIS	0	9	0	9

tivismo (CONS)	**SIEP**	**4**	**9**	**0**	**13**
	PSICO	**3**	**2**	**0**	**5**
	DIDA	**7**	**0**	**0**	**7**
	EPDI	**0**	**0**	**0**	**0**
	TOTAL	**14**	**20**	**0**	**34**

***Tabla 4.3*: Autovalores y descomposición de la inercia total.**

TOTAL INERTIA = SUM OF EIGENVALUES = 0.9246

AXIS	**EIGEN VALUE**	**% OF INERTIA**
1	**0.339**	**36.7**
2	**0.230**	**24.9**
3	**0.131**	**14.2**
4	**0.111**	**12.0**
5	**0.053**	**5.7**
6	**0.034**	**3.7**
7	**0.026**	**2.8**
8	**0.000**	**0.0**
9	**0.000**	**0.0**

CUM % HISTOGRAM

```
1.   36.7 |******************************
2.   61.6 |********************
3.   75.7 |************
4.   87.8 |**********
5.   93.5 |*****
6.   97.2 |*** 100.0 |** 100.0 |100.0 |
```

CHISQUARE VALUE WITH 81 DF = 665.677 CHISQUARE
ASSOCIATED P-VALUE = 0.000

***Tabla 4.4*: Resultados del análisis de correspondencias**

ROW	NAME	MASS	QLT	INR	FACTOR AXIS 1	COR2	CTR	FACTOR AXIS 2	COR2	CTR	FACTOR AXIS 3	COR2	CTR
1	ACCE	0.104	0.879	0.093	-0.432	0.208	0.057	0.759	**0.643**	0.261	-0.124	0.017	0.012
2	OBJE	0.171	0.893	0.064	-0.135	0.048	0.009	-0.547	**0.79**2	0.222	-0.075	0.015	0.007
3	VALI	0.058	0.960	0.115	1.167	**0.689**	0.234	0.246	0.031	0.015	0.440	0.098	0.086
4	EPIS	0.129	0.916	0.078	0.332	0.182	0.042	-0.486	0.390	0.133	-0.235	0.091	0.054
5	SIEP	0.067	0.973	0.108	-0.957	0.567	0.180	-0.392	0.095	0.045	0.248	0.038	0.031
6	PSIC	0.038	0.967	0.104	0.003	0.000	0.000	0.653	0.154	0.070	1.311	0.619	0.492
7	DIDA	0.083	0.903	0.095	-0.031	0.001	0.000	0.826	0.597	0.247	-0.565	0.279	0.203
8	EPDI	0.017	0.990	0.115	1.405	0.287	0.097	-0.260	0.010	0.005	0.704	0.072	0.063
9	REAL	0.192	0.907	0.064	0.535	**0.85**3	0.162	0.036	0.004	0.001	-0.122	0.044	0.022
10	CONS	0.142	0.907	0.087	-0.724	**0.853**	0.219	-0.049	0.004	0.001	0.165	0.044	0.029

ROW	NAME	MASS	QLT	INR	FACTOR AXIS 4	COR2	CTR	FACTOR AXIS 5	COR2	CTR

ACCE	0.104	0.879	0.093	0.000	0.000	0.000	0.101	0.011	0.020
OBJE	0.171	0.893	0.064	0.000	0.000	0.000	0.120	0.038	0.046
VALI	0.058	0.960	0.115	0.000	0.000	0.000	-0.532	0.143	0.311
EPIS	0.129	0.916	0.078	0.384	0.244	0.172	0.075	0.009	0.014
SIEP	0.067	0.973	0.108	-0.432	0.115	0.112	-0.505	0.158	0.320
PSIC	0.038	0.967	0.104	0.671	0.162	0.152	0.296	0.032	0.062
DIDA	0.083	0.903	0.095	-0.172	0.026	0.022	-0.009	0.000	0.000
EPDI	0.017	0.990	0.115	-1.902	0.525	0.542	0.815	0.097	0.209
REAL	0.192	0.907	0.064	0.000	0.000	0.000	-0.046	0.006	0.008
CONS	0.142	0.907	0.087	0.000	0.000	0.000	0.062	0.006	0.010

***Tabla 4.5*: Frecuencias de cada variable en el total de resúmenes de los estudiantes, clasificadas según test, polo, plano y etapa.**

```
         test Polo plano etapa
         ------------------------
         acceso objeto valida TOTAL
         ---------------------------------------------------
         ------------

 antes realismo    epis 25 99 7 | 131
                   siep 0 13 0 | 13
                   psico 18 0 17 | 35
                   dida 55 21 1 | 77
                   epdi 0 2 0 | 2
                   -----------------------------------|---------
                   TOTAL 98 135 25 | 258


         construc- epis 0 57 0 | 57

         tivismo   siep 12 76 0 | 88
                   psico 21 27 0 | 48
                   dida 79 0 0 | 79
                   epdi 0 0 0 | 0
                   -----------------------------------|-------
                   --
                   TOTAL 112 160 0 | 272



 ---------------------------------------------------------------


 después realism   epis 19 105 16 | 140
                   siep 0 15 0 | 15
                   psico 16 0 19 | 35
                   dida 45 11 7 | 63
                   epdi 0 2 7 | 9
                   -----------------------------------|---------
                   TOTAL 80 133 49 | 262


          construc epis 0 61 0 | 61
                   siep 24 64 0 | 88
                   psico 22 25 0 | 47
                   dida 59 0 0 | 59
```

```
epdi 0 0 0 | 0
-----------------------------------|-------
--
TOTAL 105 150 0 | 255
```

***Tabla 4.6*: Frecuencias de cada valor de las variables en los dos momentos en que se ha pasado el comentario.**

Test	Epi	Siep	Psic	Did	Epdi	Acc	Obj	Vali	Real	Con	Tot
PRE	188	101	88	156	2	210	295	25	258	272	530
POS	201	103	82	162	9	185	283	49	262	255	517

***Tabla 4.7*: Contrastes de asociaciones parciales y marginales sobre los datos presentados en la Tabla 4.5**

	Asociación parcial		Asociación marginal	
	χ^2	Prob.	χ^2	Prob.
etapa	451.47	0.0000		
plano	485.28	0.0000		
Polo	0.05	0.8295		
test	0.16	0.6878		
ep	580.31	0.0000	584.71	0.0000
eP	106.39	0.0000	109.45	0.0000
et	8.00	0.0183	9.60	0.0082
pP	197.50	0.0000	200.48	0.0000
pt	7.73	0.1019	9.29	0.0543
Pt	0.17	0.6757	0.42	0.5183
epP	141.09	0.0000	140.53	0.0000
ept	10.74	0.0567	14.03	0.0507
ePt	0.00	1.0000	051	0.4740

pPt	**0.70**	**0.7054**	**0.14**	**0.9861**

SUPPLEMENTARY ROWS

Tabla 4.8: **Resultados de la proyección sobre el ACM de los datos individuales de los estudiantes en el pre-test**

	SROW NAME	QLT	FACTOR AXIS 1	COR2 AXIS 1	FACTOR AXIS 2	COR2 AXIS 2	FACTOR AXIS 3	COR2 AXIS 3
1	A1	0.995	0.038	0.022	0.142	0.302	-0.013	0.002
2	A2	0.949	-0.221	0.386	-0.210	0.347	0.121	0.115
3	A3	0.890	-0.297	0.416	0.109	0.056	0.162	0.125
4	A4	0.961	-0.210	0.475	0.153	0.251	-0.131	0.184
5	A5	0.870	-0.375	*0.615*	-0.236	*0.244*	-0.026	0.003
6	A6	0.968	-0.031	0.011	-0.133	0.197	-0.199	0.441
7	A7	0.994	-0.171	0.025	0.857	**0.621**	-0.614	0.319
8	A8	0.996	-0.309	**0.910**	-0.030	0.009	-0.045	0.020
9	A9	0.960	-0.318	**0.766**	-0.155	0.182	-0.030	0.007
10	A10	0.879	-0.302	**0.713**	0.099	0.076	0.061	0.029
11	A11	0.922	-0.059	0.022	0.235	0.353	-0.286	0.526
12	A12	0.995	-0.127	*0.207*	-0.020	*0.005*	-0.001	0.000
13	A13	0.915	-0.277	0.583	-0.182	0.252	-0.102	0.078
14	A14	0.965	-0.174	0.309	0.123	0.154	-0.073	0.054
15	A15	0.949	-0.195	0.328	0.112	0.108	0.004	0.000
16	A16	0.932	-0.269	0.340	0.347	0.567	-0.036	0.006
17	A17	0.485	-0.117	0.039	0.286	0.229	0.000	0.000
18	A18	0.952	-0.136	0.162	-0.201	0.354	0.164	0.237
19	A19	0.995	-0.103	0.097	0.016	0.002	0.116	0.123
20	A20	0.804	-0.257	0.528	-0.112	0.101	0.060	0.028
21	A21	0.910	-0.032	0.007	0.055	0.022	0.076	0.042
22	A22	0.951	-0.210	0.201	0.356	0.581	-0.171	0.133
23	A23	0.907	-0.188	0.201	0.263	0.394	0.157	0.140
24	A24	0.878	-0.186	0.251	-0.224	0.366	-0.144	0.151
25	A25	0.854	-0.243	0.644	0.012	0.002	-0.008	0.001

SROW NAME	QLT	FACTOR AXIS 4	COR2 AXIS 4	FACTOR AXIS 5	COR2 AXIS 5
A1	0.995	0.089	0.118	0.192	0.551
A2	0.949	0.074	0.043	-0.086	0.058
A3	0.890	0.182	0.157	0.170	0.136
A4	0.961	0.060	0.038	0.035	0.013

A5	0.870	-0.031	0.004	-0.029	0.004
A6	0.968	0.146	0.238	0.085	0.081
A7	0.994	-0.121	0.012	0.140	0.017
A8	0.996	0.060	0.035	0.050	0.024
A9	0.960	0.024	0.004	-0.008	0.000
A10	0.879	0.074	0.043	0.048	0.018
A11	0.922	0.035	0.008	0.045	0.013
A12	0.995	-0.075	0.073	0.235	0.710
A13	0.915	0.008	0.001	-0.010	0.001
A14	0.965	0.145	0.214	0.151	0.234
A15	0.949	0.190	0.312	0.152	0.200
A16	0.932	-0.034	0.005	-0.055	0.014
A17	0.485	0.159	0.071	0.229	0.147
A18	0.952	0.129	0.147	-0.077	0.052
A19	0.995	0.258	0.610	0.133	0.163
A20	0.804	0.112	0.101	0.076	0.047
A21	0.910	0.302	0.659	0.158	0.181
A22	0.951	0.027	0.003	0.083	0.031
A23	0.907	0.152	0.132	0.084	0.041
A24	0.878	0.090	0.059	0.085	0.052
A25	0.854	0,100	0.109	0.095	0.099

***Tabla 4.9*: Resultados de la proyección sobre el ACM de los datos individuales de los estudiantes en el post-test.**

SROW	NAME	QLT	FACTOR AXIS 1	COR2	FACTOR AXIS 2	COR2	FACTOR AXIS 3	COR2
1	A1	0.997	-0.233	0.374	0.254	0.443	-0.074	0.038
2	A2	0.934	-0.367	0.221	-0.629	0.650	-0.018	0.001
3	A3	0.535	-0.109	0.065	-0.185	0.187	0.117	0.075
4	A4	0.852	-0.090	0.046	0.311	0.558	0.126	0.092
5	A5	0.968	-0.479	0.697	-0.164	0.082	-0.112	0.038
6	A6	0.944	0.038	0.019	0.018	0.004	0.166	0.351
7	A7	0.911	0.128	0.235	0.034	0.017	-0.194	0.534
8	A8	0.896	0.038	0.076	0.048	0.123	0.096	0.498
9	A9	0.643	0.070	0.047	0.025	0.006	0.111	0.119
10	A10	0.946	-0.298	0.493	0.109	0.066	0.095	0.050
11	A11	0.887	-0.095	0.050	0.190	0.198	-0.267	0.389
12	A12	0.898	0.072	0.027	-0.130	0.085	-0.140	0.099
13	A13	0.979	-0.236	0.309	-0.308	0.527	-0.143	0.113
14	A14	0.877	-0.206	0.440	-0.021	0.004	0.090	0.083
15	A15	0.993	-0.217	0.295	0.145	0.132	-0.276	0.481
16	A16	0.987	-0.208	0.169	0.209	0.170	0.209	0.170
17	A17	0.981	-0.125	0.027	0.608	0.634	0.277	0.131
18	A18	0.676	-0.160	0.152	-0.273	0.442	0.046	0.012
19	A19	0.927	-0.006	0.000	0.101	0.083	0.247	0.497
20	A20	0.914	-0.127	0.106	0.013	0.001	0.341	0.762
21	A21	0.877	-0.064	0.106	-0.070	0.128	-0.134	0.470
22	A22	0.831	-0.299	0.444	0.197	0.193	-0.185	0.171
23	A23	0.927	-0.114	0.110	0.047	0.018	0.290	0.713
24	A24	0.993	-0.347	0.731	-0.184	0.205	0.071	0.031
25	A25	0.937	-0.027	0.008	-0.093	0.090	0.137	0.197

SROW NAME	QLT	FACTOR AXIS 4	COR2	FACTOR AXIS 5	COR2
A1	0.997	0.096	0.063	0.107	0.079
A2	0.934	-0.075	0.009	-0.180	0.053
A3	0.535	0.191	0.198	0.044	0.010
A4	0.852	0.151	0.132	0.065	0.024
A5	0.968	-0.163	0.081	-0.152	0.070
A6	0.944	0.081	0.084	0.195	0.485

```
A7 0.911  | 0.059 0.049 | 0.073 0.077 |
A8 0.896  | -0.050 0.133 | -0.035 0.066 |
A9 0.643  | -0.097 0.092 | 0.198 0.379 |
A10 0.946 | 0.164 0.149 | 0.184 0.188 |
A11 0.887 | 0.134 0.098 | 0.166 0.152 |
A12 0.898 | 0.283 0.405 | 0.237 0.283 |
A13 0.979 | 0.015 0.001 | -0.072 0.029 |
A14 0.877 | 0.175 0.318 | 0.055 0.031 |
A15 0.993 | 0.036 0.008 | 0.110 0.076 |
A16 0.987 | 0.266 0.275 | 0.227 0.201 |
A17 0.981 | 0.277 0.131 | 0.184 0.058 |
A18 0.676 | 0.079 0.037 | -0.074 0.032 |
A19 0.927 | 0.124 0.125 | 0.165 0.222 |
A20 0.914 | -0.069 0.031 | -0.044 0.013 |
A21 0.877 | 0.062 0.100 | 0.053 0.074 |
A22 0.831 | -0.065 0.021 | 0.019 0.002 |
A23 0.927 | 0.090 0.068 | 0.046 0.018 |
A24 0.993 | 0.065 0.026 | -0.004 0.000 |
A25 0.937 | 0.239 0.601 | 0.063 0.041 |
```

Tabla 4.10: Resultados del ACM. Proyección del grupo y de los dos estudiantes A5 y A12 (pre-test y post-test)

SROW	NAME	QLT	FACTOR AXIS 1	COR2	FACTOR AXIS 2	COR2	FACTOR AXIS 3	COR2
1	AL5pre	0.849	-0.357	0.588	-0.232	0.248	-0.031	0.004
2	AL12pre	0.979	-0.266	0.601	0.017	0.002	-0.075	0.047
3	AL5pos	0.968	-0.479	0.697	-0.164	0.082	-0.112	0.038
4	AL12pos	0.946	0.216	0.220	-0.167	0.132	-0.026	0.003
5	GRUpre	0.973	-0.199	0.558	0.050	0.035	-0.046	0.030
6	GRUpos	0.976	-0.142	0.571	0.011	0.004	0.019	0.011

SROW NAME QLT | FACTOR COR2 | FACTOR COR2 | | AXIS 4 | AXIS 5 | --1 AL5pre 0.849 | -0.031 0.004 | -0.031 0.004 | 2 AL12pre 0.979 | 0.122 0.127 | 0.154 0.202 | 3 AL5pos 0.968 | -0.163 0.081 | -0.152 0.070 | 4 AL12pos 0.946 | -0.015 0.001 | 0.354 0.589 | 5 GRUpre 0.973 | 0.119 0.200 | 0.103 0.150 | 6 GRUpos 0.976 | 0.096 0.262 | 0.067 0.129 |

Tabla 4.11: Índices de sensibilidad de los estudiantes en los resúmenes realizados Estudia n	Realismo		Constructi		Estudiant	Realismo		Constructi	
	PRE	POST	PRE	POST		PRE	POS	PRE	POS
01	3,70	3,11	5,00	5,40	14	4,67	4,40	5,00	6,25
02	2,89	5,62	5,92	6,25	15	2,80	2,10	5,54	4.56
03	3,50	4,13	5,94	6,38	16	1.44	2,10	3.58	3.80
04	5,40	3,62	3,00	3,40	17	3.40	1.50	2.33	1.67
05	5,62	4,60	5,20	6,14	18	2.89	4.50	3.25	5.67

06	3,89	3,47	4,17	5,67	19	5.37	3.13	6.22	5.73
07	1,43	2,44	2,75	4,53	20	5.43	3.38	3.69	4.93
08	4,45	3,71	6,37	5,53	21	0,14	3,16	2,64	5,00
09	4,78	4,75	4,92	6,67	22	2,35	4,67	2,46	1,60
10	4,12	5,57	5,07	3,67	23	2,18	3,17	1,80	4,50
11	4,60	4,33	4,60	5,40	24	4.14	5.89	5,83	6.57
12	4,00	3,92	5,19	6,14	25	3.45	4.14	4.00	7.17
13	4,27	5,40	5,29	5,40	Medias	3.63	3.87	4.39	5.12

***Tabla 4.12*:** Valores medios y errores de muestreo del índice de sensibilidad para los diferentes valores de los factores considerados.

Factor	Nivel	Media	Error de muestreo
Test	Pre-test	4,0180	0,1710
	Post-test	4,4964	0,1874
Polo	Realista	3,7676	0,1794
	Constructivista	4,7374	0,1794
Total		4,2525	0,1269

Fuente de variación	Suma de cuadrados	Grados de libertad	Media de cuadrados	F	P
Efectos principales : Test	6,4874	1	6,4877	3,693	0,0573
Polo	25,6503	1	25,6503	**14,603**	0,0002

Interacción test-polo	2,1351	1	2,1351	1,216	0,2727
Residual	186,1943	106	1,7565		
Total	**219,3423**	**109**			

Capítulo 5

Estudios de casos de dos estudiantes

5.1 Introducción

El estudio realizado en el grupo nos ha suministrado tendencias generales de las concepciones y creencias de los estudiantes. Además nos ha permitido emplear el comentario de textos como instrumento para explicitar estas tendencias. Un estudio más particularizado de las respuestas de algunos estudiantes podrá caracterizar las concepciones y creencias de estos sujetos. Es esto lo que abordaremos con los estudios de casos. Para ello hemos seleccionado una muestra de dos estudiantes que hemos estudiado en profundidad.

El comentario de textos suministra una serie de informaciones referentes a las concepciones y creencias. Ahora bien, estas concepciones y creencias emergentes del comentario pueden estar influidas por el hecho de que los estudiantes adopten una "postura escolar" ante la tarea de cumplimentarlo. Bajo este supuesto, los estudiantes pueden intentar satisfacer las expectativas que le atribuyen al profesor más que definirse personalmente frente a las ideas del texto presentado. Pero incluso esa visión de las expectativas del profesor está influenciada por las creencias y concepciones del estudiante, con lo que esta actitud sólo falsearía en parte el análisis realizado, ya que hemos intentado extraer creencias y concepciones implícitas. Con objeto de ampliar el ámbito de respuestas del sujeto, profundizar en las creencias y evitar el peso excesivo de estas actitudes "escolares" de los estudiantes, hemos entrevistado a los estudiantes, intentando que en sus respuestas aparezcan más claramente sus concepciones y creencias respecto de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

5.2 Tomas de datos en los estudios de casos

Para realizar este estudio de casos vamos a analizar todos los trabajos realizados por los estudiantes analizados, con especial atención a los comentarios de texto así como las respuestas de los estudiante a una entrevista. Podemos resumir pues la investigación basada en el estudio de casos mediante el diagrama de la figura 5.1. En este diagrama se observa que la primera vez que los estudiantes realizaron el comentario de textos fue durante el mes de octubre de 1993, como un módulo más del desarrollo del curso. El primer módulo de actividades propuesto en el curso fue referente al análisis didáctico y matemático de un juego de azar, como posible actividad de enseñanza. La entrevista se realizó en el mes de diciembre, con lo que pudimos emplear tres trabajos de los estudiantes para seleccionar los que serían investigados en el estudio de casos.

Figura 5.1:

Tabla 5.1: Comparación de las creencias y concepciones de Luis y Eva

	Luis	**Eva**
Forma de concebir el conocimiento matemático	El conocimiento es externo al sujeto. No se ha planteado si es descubrimiento o invención, y no se posiciona en esta controversia.	Existe un cuerpo externo, generado por el trabajo de los matemáticos a través de la historia Es descubrimiento y creación.
Actitud ante el conocimiento	La autoridad externa debe transmitirle el conocimiento que necesitará para su desenvolvimiento profesional (dualístico, Copes, 1982)	Existe un conocimiento fruto de debate entre los matemáticos a lo largo de la historia (relativismo contextual). Ella tendrá que buscar su método de enseñanza (multiplicismo, Copes, 1982)
Caracterización de la enseñanza	Transmisión, haciendo que el alumno trabaje. Con ello logrará llegar al conocimiento externo	Transmisión para que el alumno disponga de una base que le permita construir su conocimiento
Proceso de formación como profesores	Formación teórica por expertos, y sobre todo, formación que adquirirá con la práctica profesional.	Formación con la práctica profesional. Los expertos ayudarán a que profesor reflexione, ya que no hay método mejor.

Expectativas como profesores	Ser un buen expositor. Lograr mantener el interés de los alumnos para aprender matemáticas. Conseguir una clase ordenada	Emplear problemas en lugar de ejercicios. Interesar a los alumnos para que construyan su propio aprendizaje

5.2.1 Selección de los estudiantes para los estudios de caso

Cuando se diseñó el estudio de casos se disponía del comentario de textos de los estudiantes del curso 1993-94, realizado el mes de octubre de 1993, así como de tres trabajos realizados en clase, y que habían dado lugar a producciones escritas de todos los estudiantes de la asignatura. Estas producciones iban a ser decisivas para seleccionar a los estudiantes que serían analizados en profundidad.

El estudio piloto realizado el curso 1992-93 nos suministró un primer método de análisis de los comentarios de texto, principalmente basado en el *índice de sensibilidad*. Este constructo nos dio un primer dato para la selección de los estudiantes. Empleando los 6 jueces que habían sido utilizados en el estudio piloto se hizo una primera valoración de este índice, gracias al cual seleccionamos 5 estudiantes (Luis: máxima puntuación en la descripción del constructivismo y alta en realismo; Eva: máxima puntuación en realismo; A: puntuaciones muy altas en ambas posturas; B, alta en realismo; C, muy altas en ambas posturas). Otros aspectos ligados al comentario nos llevaron a añadir 3 estudiantes a los ya seleccionados (C: aparenta tener muy claras las ideas, aunque presenta incongruencias en el modelo de enseñanza constructivista; D: emplea una terminología no contemplada en el artículo, de raíz psicológica, referente al constructivismo; E: se distancia un poco del texto para aportar un resumen personal coherente de la enseñanza).

Esta muestra de 8 estudiantes ha sufrido una serie de filtrados hasta llegar a seleccionar a los dos estudiantes analizados en los estudios de casos.

La segunda selección se realizó atendiendo a la claridad de expresión en los trabajos realizados hasta el momento. Para ello se tomó nota de los estudiantes que aparentemente manifestaban sus ideas sin miedo, sin querer responder a las expectativas del profesor. También destacamos aquellos estudiantes que manifestaban posturas epistemológicas o didácticas muy claras. Así, en el trabajo 1, sobre un juego de azar, nos fijamos en los estudiantes que se manifestaban claramente sobre el papel de la experimentación en la comprobación y verificación de resultados probabilísticos. En el trabajo 2, destacamos los estudiantes que describían con mayor lujo de detalles los modelos de clase visionados.

De esta segunda revisión destacamos, sobre todo, a Luis y al estudiante C, y luego añadimos a Eva, y los estudiantes B, E y F.

Se citó a estos seis estudiantes para realizar una entrevista personal, y al final solo se pudieron llevar a cabo cinco de las seis entrevistas previstas, a Luis, Eva, y los estudiantes E, F y
C.

Se recogieron todos los documentos que iban produciendo a lo largo del curso estos cinco estudiantes. El comentario final del curso, sin embargo, no fue realizado por el estudiante C, por lo que redujimos la selección a los otros cuatro. De ellos se eliminó el estudiante F, ya que no logramos que su actitud durante la entrevista fuera suficientemente abierta. Nos quedamos pues con los otros tres, de los que elegimos dos al azar, los números 5 y 12, que hemos llamado Luis y Eva

De estos dos estudiantes se han recogido todos los trabajos, individuales y de grupo, producidos a lo largo del año académico. Estos trabajos se han estudiado en profundidad, intentando extraer las concepciones y creencias de los estudiantes sobre el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

5.2.2 Diseño de los estudios de casos

La investigación descriptiva que estamos llevando a cabo (Fox, 1976, Whitney, 1983) se completa con los estudios de casos. Anguera (1978) define estos estudios de la siguiente manera:

El estudio de casos es un análisis completo del estado del sujeto considerado individualmente, con respecto, por regla general, a determinadas fases de su personalidad total. (Anguera, 1978, p. 169)

En nuestra investigación, el fin de los estudios de casos coincide con el fundamento de estos estudios que señala Fox (1976)

El fundamento del estudio de casos es la idea de que existen procesos e *interacciones, tales como los aspectos de la personalidad y la conducta social, que no se pueden estudiar más que en la forma en que interaccionan y operan en un individuo. Este razonamiento afirma también que si nos enteramos de cómo interaccionan esos procesos en algunos individuos es probable que lleguemos a saber más sobre los procesos abstractos.* (Fox, 1976, p. 481)

Partimos, pues del carácter individual de las creencias y concepciones y tratamos de describir estas creencias y concepciones en individuos determinados. La concepción dinámica de las concepciones de un sujeto sobre las matemáticas y sobre su enseñanza y aprendizaje nos lleva a estudiar los cambios que aparecen en estas concepciones y creencias.

En los estudios de casos realizados hemos partido de todos los documentos producidos por los sujetos en el curso 1993-94, relacionados con la asignatura Prácticas de Enseñanza en Institutos. En esta población aparecen tres tipos de trabajos en relación con los objetivos de la investigación. Por una parte están los trabajos realizados como respuesta a las consignas del profesor de la asignatura *Prácticas de Enseñanza*, que tienen un fin escolar. En ellos los estudiantes responden a una serie de cuestiones, pero el objetivo del estudiante es aprobar la asignatura. Estas cuestiones no se refieren directamente a la naturaleza del conocimiento matemático y a la enseñanza y aprendizaje. Fundamentalmente se refieren a tareas prácticas de los profesores, y su repercusión en la enseñanza. Sin embargo, en cada uno de ellos hay un aspecto relacionado más explícitamente con la forma de concebir el conocimiento matemático o la enseñanza y el aprendizaje.

Por otra parte está el comentario, en el que se presenta una argumentación, y se pide un resumen y la valoración de algunas actividades de enseñanza, al hilo de la argumentación presentada. Se puede considerar que también tiene un contexto escolar (se han cumplimentado en el marco de la asignatura y dentro del horario y local dedicada a ella). Sin embargo, la tarea es diferente, con matices que la hacen más cerrada que los trabajos de valoración y opinión.

Finalmente la entrevista es una tarea extraescolar. Realizada en un marco diferente, con una relación más personal, en horario diferente y restringida a ciertos estudiantes.

Hemos considerado que la información suministrada por estos tres tipos de trabajos puede diferenciarse en dos grupos. El primero comprenderá la información indirecta, en la que se muestra la sensibilidad de los estudiantes a los argumentos enunciados en el texto presentado para comentar. El segundo encierra una valoración personal y opiniones, por lo que consideramos que suministran directamente las concepciones y creencias de los estudiantes sobre el conocimiento matemático y su enseñanza y aprendizaje.

Mediante los comentarios de texto vamos a intentar detectar la forma en que los estudiantes contemplan las teorizaciones que se hacen, explícitamente, en el texto presentado, sobre la naturaleza de los conocimientos matemáticos y sobre la enseñanza de las matemáticas. Con la entrevista pretendemos que el estudiante explicite sus concepciones sobre la enseñanza y ponga de manifiesto la relación que existen entre estas concepciones y creencias y la forma en que concibe el conocimiento matemático y la forma en que este conocimiento se enseña y aprende.

Afrontamos pues dos objetivos complementarios. El primero es situar al estudiante en relación a una argumentación explícita entre la forma de concebir el conocimiento matemático y la forma en que debe/puede enseñarse (resumen del comentario).

El segundo es hacer que el estudiante explicite su idea sobre la enseñanza y muestre la fundamentación de esta idea (restantes trabajos, valoración del comentario y entrevista).

Nuestra hipótesis de partida es que las concepciones del estudiante van a variar a lo largo del curso. En este supuesto, la forma en que se contempla el texto del artículo debe variar, por lo que esperamos que el comentario nos muestre alguno de los aspectos en que ha variado, especialmente aquellos relacionados con la sensibilidad a los argumentos empleados en el artículo.

Para estudiar estos fenómenos vamos a utilizar las variables empleadas en el estudio del grupo, es decir el PLANO en el que se encuentran las afirmaciones de los estudiantes, la ETAPA, y el POLO (cuando se refiera al comentario de textos). Además, como en el caso del estudio del grupo, aparece la variable TEST, que permitirá contrastar los valores de las otras variables en relación al momento en que se han tomado los datos. Para ello hemos dividido las producciones del estudiante en unidades de información, y hemos empleado la rejilla como instrumento que permita sistematizar el contenido de estas unidades.

Los estudios de casos van a seguir, pues, el esquema siguiente:

Objetivo

Describir los cambios de concepciones y creencias de los estudiantes sobre las matemáticas, y la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a lo largo de un curso.

RESUMEN DEL TEXTO

Objetivo: Describir sistemáticamente la forma en que el estudiante contempla las teorizaciones que, explícitamente, se le hacen sobre la naturaleza de los conocimientos matemáticos y sobre la enseñanza de las matemáticas en el texto presentado.
Variables: Significado de las unidades:

Variable independiente: TEST

Variables dependientes: PLANO; ETAPA; POLO Instrumento: Rejilla

Resultados: Esquema de las descripciones que el estudiante hace del texto.

Esquema de las posición del estudiante respecto a las actividades de enseñanza. En Pre-test, En Post-test Contraste

VALORACIÓN DE ACTIVIDADES, ENTREVISTA y OTROS TRABAJOS

Objetivo: Hacer que el estudiante explicite sus concepciones y creencias sobre la enseñanza y ponga de manifiesto la relación que existen entre estas concepciones y creencias y la forma en que concibe el conocimiento matemático y la forma en que este conocimiento se aprende. Variables: Significado de las respuestas:

Variable independiente: TEST

Variables dependientes: PLANO; ETAPA Instrumento: Rejilla Resultados: Esquema de las creencias y concepciones del estudiante que han aparecido en la entrevista sobre el conocimiento matemático y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

5.2.3 Análisis de datos

Todos los trabajos producidos por los estudiantes los hemos descompuesto en unidades de información. Estas unidades de información se han situado en la categoría correspondiente de la Rejilla, con lo que hemos obtenido una tabla para cada trabajo. De cada tabla hemos realizado un informe particular, en el que hemos clasificado la información por *planos*. De esta forma nos hemos encontrado con un informe para cada trabajo, en el que aparecen concepciones y creencias del estudiante sobre las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Estos informes, sistematizados gracias a las rejillas, nos han permitido poner en común las concepciones del estudiante sobre aspectos relacionados con el conocimiento matemático y con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Bajo la hipótesis de partida, y teniendo en cuenta que el fin de nuestra investigación es detectar la evolución de las creencias y concepciones, no podemos afirmar que las concepciones que el estudiante tiene al realizar un trabajo correspondan con las que mantiene en otro momento distinto. Pensamos que hay una influencia de la variable tiempo, que está marcada por las actividades realizadas durante el curso.

Además, los trabajos aportan aspectos diferentes, que a veces no corresponden más que a un plano de reflexión. Por todo ello, hemos decidido contar dos momentos clave para estudiar el posible cambio que han sufrido las concepciones y creencias de los estudiantes. Estos momentos van a situarse *antes* de la realización de la fase de prácticas, y *al final del curso*. Para contrastar las concepciones y creencias en esos momentos hemos empleado la rejilla, elaborando dos tablas, una para cada momento, en las que se recogen las unidades de información de todos los trabajos realizados entre dichos períodos. Llamaremos Rejilla 1 a la tabla obtenida mediante la rejilla antes de las prácticas, y Rejilla 2 a la tabla obtenida al final de curso; así, la Rejilla 1.1 (o 2.1) será la tabla que encerrará las unidades de los trabajos y de la parte evaluativa del comentario, mientras que la Rejilla 1.2 (o 2.2) recogerá las unidades relativas al resumen en el comentario de textos. El informe elaborado a partir de cada una de estas tablas nos dará un perfil de las creencias y concepciones del estudiante. La comparación entre ambos perfiles nos aporta el cambio posible de concepciones y creencias.

5.2.3.1. **Análisis de datos del comentario de textos** Tal como hicimos en el estudio del grupo, los comentarios de texto de los estudiantes se han dividido en unidades de información. Pero, a diferencia de lo realizado en el estudio del grupo, las unidades que se han estudiado son aquellas que aparecen en el trabajo del estudiante, y no las unidades del extracto del artículo que coinciden con las elegidas por el estudiante. Estas unidades de información de los comentarios de texto de los estudiantes se han categorizado mediante la rejilla, introduciéndolas en las casillas correspondientes.

Hemos situado en la rejilla todas las unidades de información de los comentarios, es decir, también hemos identificado la casilla de unidades que no corresponden con ninguna del texto, y las unidades de la parte valorativa del comentario. Por ejemplo, la unidad siguiente del resumen, que no corresponde con ninguna del texto

El formalismo consiste en dar teorías (=axiomas) y ver las relaciones que se *derivan.* (Unidad 1, pre-test, estudiante 5)

ha sido clasificada 061 (es decir, casilla 6, polo realista), ya que de alguna forma caracteriza el conocimiento matemático. Y las dos unidades siguientes, referente a la consideración de las matemáticas como objeto de enseñanza o de aprendizaje, han sido clasificadas 032, es decir, en la casilla 3, polo constructivista.

> *- Los alumnos han de construir, en la medida de lo posible, el conocimiento matemático. Ésta es la única forma de que el aprendizaje sea significativo.* (Unidades 21 y 22, post-test, estudiante 13)

De esta forma hemos podido obtener una tabla para los resúmenes de los comentarios de textos de cada estudiante. El análisis de cada categoría de estas tablas nos ha llevado a agrupar las unidades de significado y a buscar la estructura de las concepciones subyacentes a las mismas. Hemos vuelto a escribir el comentario de textos del estudiante ordenándolo por planos, empezando por separar las afirmaciones que se refieren al conocimiento matemático de las que se refieren a la enseñanza de las matemáticas y al conocimiento didáctico, y después diferenciando en estos planos las referencias al análisis cognitivo. Dentro de cada plano, y siguiendo la estructura de la rejilla, hemos diferenciado las tres etapas de acceso, caracterización y validación del conocimiento. De esta forma hemos obtenido unos resúmenes sistemáticos de los comentarios de texto de los estudiantes.

Estos resúmenes nos han permitido elaborar unos perfiles de los estudiantes en los dos momentos: Pre-test y Post-test. Estos perfiles, junto con el contraste entre ellos, aportan una parte importante de estos estudios de casos.

5.2.3.2 Análisis de datos de la entrevista

Definen Ghiglione y Matalon (1989) las entrevistas como "una conversación con objetivos" (p. 61). Fox (1976) precisa que la entrevista se emplea cuando el investigador desea hacer preguntas al nivel consciente (p. 605).

Teniendo en cuenta que las concepciones y creencias pertenecen a las fronteras entre el nivel consciente profundo y el nivel no consciente (Fox, 1976, pp. 445-458), la entrevista puede darnos algunas de las concepciones que el estudiante tiene en el nivel consciente.

De acuerdo con los objetivos de la investigación, nos pareció más adecuado, emplear una entrevista semiestructurada (Fox), o semidirectiva (Ghiglione y Matalon), es decir,

> *El entrevistador propone un tema y solo interviene para estimular o insistir*
>
> (Ghiglione y Matalon, p. 61)
>
> *En este caso, el sujeto está invitado a responder de manera exhaustiva, con sus propios términos y a partir de su propio marco de referencia, a una pregunta general caracterizada por su ambigüedad; pero si no se aborda espontáneamente uno de los subtemas que el encuestador haya planteado, éste formula una nueva pregunta cuya característica ya no sea la ambigüedad, a fin de que el sujeto pueda producir un discurso sobre la parte del marco de referencia del investigador.* (Op. citada, p. 83)

Como indican estos autores, las entrevistas semiestructuradas parten de un guión, que señala el tema y los subtemas, como puntos de apoyo relacionados con los fines de la investigación.

En el desarrollo de la entrevista se ha concedido una importancia especial al trabajo realizado con los estudiantes, consistente en visionar clases impartidas por otros profesores, empleando métodos de enseñanza diversos. Dada la importancia práctica de este visionado, hemos empleado esta actividad como referente para situar al entrevistado en relación a la enseñanza de las matemáticas. Es decir, se trataba de emplear los reactivos basados en las clases visionadas para "aterrizar" en los aspectos epistemológicos referentes a las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. De esta forma se concretaba en los contenidos matemáticos de los trabajos realizados, y en la enseñanza presenciada por los estudiantes.

Para la realización de las entrevistas se comenzó por hacer una preparación adaptada a cada estudiante. Se trataba de profundizar en las concepciones y creencias manifestadas por los estudiantes en los trabajos realizados hasta el momento, a la vez que dirigir las cuestiones hacía otras concepciones y creencias no manifestadas en esos trabajos. En el estudio de casos presentaremos la planificación particular de la entrevista para el estudiante correspondiente.

Cada entrevista duró entre sesenta y noventa minutos, en condiciones de entorno adecuadas a las planteadas por Ghiglione y Matalon (1989). La entrevista fue grabada en audio, tras explicar al estudiante los motivos de la entrevista y demandar su autorización para la grabación y el empleo de sus respuestas. Durante el transcurso de las entrevistas no se tomaron notas. Sólo asistieron el entrevistador y el entrevistado.

Para su análisis hemos empleado principalmente la audición de estas entrevistas y su trascripción. El proceso de análisis de las entrevistas comenzó con la audición de la entrevista completa en un par de ocasiones, con objeto de estudiar el tono general y una primera estructuración de las mismas. Posteriormente pasamos a transcribirlas en dos etapas. En una primera se hizo una trascripción general, sin detallar momentos de duda y frases entrecortadas de los estudiantes. Una revisión posterior dio lugar a la trascripción más fiel, en la que se intentó recoger el proceso general de la conversación, con las interrupciones, las dudas, y otros datos que indicaban actitudes de los sujetos implicados.

El siguiente paso en el análisis consistió en la lectura atenta de la entrevista, a la vez que se volvía a escuchar las cintas cuando la respuesta escrita presentaba dudas. De esta lectura atenta surgieron una serie de dimensiones que se emplearon para recoger una primera información esquemática del contenido de la entrevista.

Así se planteó el estudiar el contenido matemático a que se refería la respuesta, el trabajo que se estaba comentando, el sujeto que había sugerido la discusión del tema (entrevistador o Entrevistado), el carácter de la respuesta (argumentativa, descriptiva), etc. Surgió así un primer cuadro, en el que se recogía la caracterización de cada respuesta, o parte de la respuesta, en función de estas dimensiones.

Este cuadro nos permitió elaborar un primer esquema del contenido de la entrevista, en relación con la variable temporal: partes que se podían diferenciar en el transcurso de la entrevista. Los elementos que marcan estas partes son las respuestas del estudiante. En cada parte se destacaron respuestas del estudiante que reflejan concepciones y creencias respecto a las matemáticas y su enseñanza.

La esquematización final de las entrevistas se realizó a partir de la Rejilla. Basándonos en el esquema de partes de la entrevista y en la clasificación de las respuestas, fuimos introduciendo cada unidad de información (parte de la respuesta con sentido independiente, y completo), en la categoría de la rejilla correspondiente. De este análisis obtuvimos unas tablas que permiten sistematizar el contenido de las entrevistas, atendiendo a las concepciones y creencias sobre el conocimiento matemático, sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y sobre la naturaleza del conocimiento didáctico.

5.2.3.3. *Informes* de todos los trabajos y *resúmenes*

Los informes parciales extraídos de las entrevistas fueron completados con los informes similares realizados con los restantes trabajos del estudiante que se estaba analizando, incluyendo los derivados de las respuestas valorativas al comentario.

Las tablas de datos obtenidas a partir de cada trabajo nos permitieron situar cada unidad de una manera contextualizada. Con ayuda de la Rejilla, estas tablas fueron proyectadas en una tabla resumen para los trabajos realizados antes de las prácticas y en otra rejilla resumen para los trabajos realizados después de las prácticas. La ordenación de las unidades de cada categoría en un discurso coherente, y su posterior agrupamiento por planos, generó los perfiles de las creencias y concepciones de los estudiantes respecto a las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, obtenidos de forma directa. Constituyen los *informes* que presentamos en los estudios de casos.

Los resúmenes de los comentarios también se agruparon en otras dos tablas, correspondientes a los dos momentos en que se han realizado los comentarios. Estas tablas suministran de manera indirecta las concepciones y creencias de los estudiantes.

Los *informes* y los *resúmenes* de los dos momentos se han contrastado entre si, por una parte, y se ha intentado integrar en un perfil general de cada uno de los dos estudiantes analizados en los estudios de casos.

5.3. Estudios de casos. El caso de LUIS

Luis está matriculado en quinto curso de la licenciatura de matemáticas, y en dos asignaturas de cursos anteriores: el Cálculo Numérico y el Cálculo de Probabilidades y Estadística de 3º. Su participación en los debates de la clase de Prácticas de Enseñanza ha sido escasa.

Ha realizado todos los trabajos del período anterior a las prácticas, aunque sin demasiado entusiasmo. El trabajo sobre la programación de una unidad didáctica lo realiza en el grupo en el que participa el otro estudiante analizado, Eva. Su entrevista fue muy amplia, tanto por su duración como por la rapidez de palabra. No es fácil detectar el grado de participación de Luis en los trabajos realizados en equipo.

La Memoria de Prácticas es muy breve, con errores graves de expresión, manuscrita. Abundan las fotocopias de documentos oficiales del instituto que visitó, y de las disposiciones legales, pero sin aportar síntesis personales. El diario de prácticas se reduce a dos hojas, en las que indica los contenidos matemáticos que se han tratado en las tres semanas de presencia en los institutos.

Uno de las últimas tareas del curso consistió en valorar, por escrito, las prácticas de enseñanza. Para que la valoración fuera más sincera, se dio la oportunidad de no firmar el escrito de opiniones. Algunos estudiantes firmaron este escrito y otros no. Incluso algunos no lo entregaron. En el caso de Luis, la rejilla de después de las prácticas recoge, pues, sólo la Memoria de Prácticas y al Comentario de textos, realizado al final del curso, ya que no se identificó en su valoración del curso.

Durante los meses de noviembre y diciembre se plantearon las entrevistas. Fue este el momento en que se decidieron que estudiantes iban a ser analizados en profundidad. Antes de la entrevista se habían realizado los trabajos 1, 2 y 3, respectivamente, Azar, Visionado de clases, y primer Comentario de Textos. Como se ha comentado más adelante, este estudiante fue seleccionado por las siguientes razones:

a) Tenía una alta puntuación en *grado de sensibilidad* (tanto con los 6 jueces iniciales, del estudio piloto, como con los 11 jueces de la investigación de grupo, en la que obtiene

la más alta del realismo, 5,62, y el percentil 70 del constructivismo, 5,20)

b) Definió explícitamente los objetos del conocimiento matemático, en el comentario del

pre-test, al calificar matemáticas como objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje

> "*un axioma es una definición de un "objeto" que puede darse en la realidad o no; y no importa si sirve para algo. El hecho es que hay que estudiarlo y relacionarlo con otros "objetos" para dar más información*" Com. 25, 26 y 27).

Parecía tener claras ciertas ideas sobre lo que son las matemáticas. Dedujimos en un primer análisis que el estudiante relacionaba la estructura del conocimiento matemático con sus cualidades educativas. c) Luis llegó a establecer un criterio para validar "estrategias ganadoras" del juego de azar, en el primer trabajo (" *que acierte de 5 cartas, 4 al menos*" Azar, 2). No parecía tener miedo ni pudor a expresar sus creencias y concepciones, que, por otra parte, parecían estar formadas. d) De las clases proyectadas en vídeo, Luis se inclinó por la primera, clase magistral impartida con el modelo clásico. Las objeciones que hacían a los otros modelos permitían abrir vías de indagación (en la descripción de la clase del logaritmo: "[*el alumno] no sabe el porqué de cada cosa y se pierde toda la base teórica".* Vid. 16)

Tal como se ha comentado en el diseño de los estudios de casos, descompusimos los trabajos de Luis en unidades de información, estas unidades las incluimos en una Rejilla y a partir de esa Rejilla elaboramos los informes de cada trabajo. A continuación presentamos los informes parciales elaborados a partir de los trabajos de Luis, y las síntesis, en forma de perfiles obtenidos al poner todos los informes en común, en los dos momentos estudiados.

5.3.1 **Informes de los trabajos realizados por Luis antes de las prácticas**

Los trabajos de Luis son escuetos, con afirmaciones rotundas sobre elementos relacionados con la naturaleza del conocimiento matemático o con la enseñanza. En general contesta las preguntas planteadas en cada trabajo, sin adornos.

El primer trabajo, relativo al *análisis y aprovechamiento de un juego de azar*, es muy breve, de él se han obtenido sólo 10 unidades de información. El segundo, la *diferenciación y valoración de los métodos de enseñanza visionados*, es un poco más amplio (34 unidades de información). Luis esquematiza cada método de enseñanza con palabras, sin otros elementos gráficos. Para valorar los métodos de enseñanza emplea como criterio la "eficacia en el aprendizaje", pero sin argumentar por qué considera que aumenta esta eficacia en los métodos preferidos.

Todo el *comentario de textos* (trabajo 3) está redactado. El resumen del comentario está estructurado siguiendo el esquema lineal del enunciado. es decir, primero define las dos corrientes y después comenta sus repercusiones en la enseñanza. Básicamente parafrasea el artículo. En total utiliza 23 unidades de información en el resumen y 13 en la valoración. Cuando define las corrientes se extiende más en el *realismo* que en el *contructivismo*, tal como ocurre en el artículo. Sin embargo se extiende más cuando habla de las repercusiones del *constructivismo* en la enseñanza. Esto puede deberse a que capta como más positivo el tratamiento que en el artículo se hace de este apartado.

Por lo que respecta al empleo de términos, Luis toma del artículo las parejas de opuestos: activo/pasivo, educador/ colega tradicional, pero no recoge el término profesor que es el empleado en la parte que el texto trata del Realismo matemático. Esto parece indicar que, en este caso, no capta la marca negativa que dicho término tiene en el artículo. Destaca el hecho de que introduzca un término que no aparece en el texto comentado: axiomas, que emplea como sinónimo de teorías.

En la segunda parte del comentario, no explicita claramente su opinión personal, pero el hecho de priorizar el término objeto de aprendizaje, nos da una idea de su inclinación. De las actividades de enseñanza, elige la *exposición del profesor* y la *resolución de problemas por los alumnos*, proponiendo la segunda como comprobación de la eficacia de la primera. No dice nada del *debate de ideas en clase*, lo cual nos indica que lo ignora o que no lo considera como parte importante de la enseñanza, en contraposición con la tematización de la frase "es muy importante", que utiliza al definir la *exposición del profesor*. Este es el único elemento con el que nos indica de forma más directa su opinión.

Todo el comentario, incluida la segunda parte, está redactado utilizando técnicas de indefinición de sujeto: impersonales (*hay que*, *se tendrá en cuenta*), pasivas reflejas (*se han dado en clase*). A pesar de que en el enunciado se le demanda varias veces su postura personal no parece atreverse a exponerla abiertamente.

La Entrevista se realizó el 30 de noviembre de 1993. La conversación fue distendida, con continuos cortes de uno al otro. Luis habla muy deprisa, lo que hace que se exprese mal, rompiendo con frecuencia la congruencia verbal, que pronuncie mal, y que emplee términos incorrectos. Tiene un marcado acento andaluz, con seseo. La entonación influye mucho en el sentido de las frases. Recurre a la risa para reforzar y compartir sus opiniones, o para evadir respuestas o reflexiones. No tiene ningún problema para reconocer que no entiende alguna pregunta o expresión. Al principio de la entrevista, Luis pareció adoptar una postura evasiva, justificada por cansancio y por un sentido determinista y tremendista del hombre. Pero poco a poco se fue metiendo en la reflexión conjunta, y en la mitad de la conversación se adscribe aficiones y tendencias más humanísticas. Cuando se introduce en un tema continua hablando, aunque se le haya hecho otra pregunta distinta. Superpone la continuación de su expresión, pese a haberse detenido y cerrado, aparentemente, la respuesta. La reflexión es principalmente argumentativa, aunque las razones no son profundas.

Junto con la otra estudiante investigada, Eva, programaron el tema "Números complejos" para 2º curso de la ESO. En esta programación se adopta un modelo de enseñanza consistente en intercalar actividades y explicación. Pese a que se les pidió que diseñaran la clase en torno a las actividades, ellos las proponen con un fin motivador, y no son adecuadas. Confunden contenidos procedimentales con formas de enseñar. Este trabajo está redactado y manuscrito por Eva, por lo que hemos preferido no incluirlo en el perfil de Luis.

Una vez divididos los trabajos en unidades de información se elaboraron unas primeras rejillas con ayuda de las que elaboramos unos informes parciales. Las unidades de cada casilla ofrecían información fragmentaria, por lo que en estos informes tratamos de agrupar las unidades relacionadas para dar un sentido más completo a las ideas expuestas en relación a las creencias y concepciones del estudiante respecto al conocimiento matemático y a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Para la elaboración del perfil resumen de estos informes volvimos a recoger las rejillas elaboradas a partir de cada trabajo. Situamos las unidades de información de cada trabajo en la casilla correspondiente, según la localización que le habíamos dado al analizar cada trabajo. Luego fuimos identificando el tipo de cuestión que trataba cada unidad, empleando para ello la rejilla inicial, obtenida a partir del análisis de la bibliografía. De esta forma pudimos ir estudiando la manera en que el estudiante respondía a las cuestiones epistemológicas o didácticas planteadas en la rejilla citada. Por último pasamos a elaborar un informe que recogiera toda la información suministrada por esas unidades.

Tal como se ha dicho en el diseño de los estudios de casos, vamos a elaborar dos tablas y de informes resumen diferentes. Los primeros se refieren a las informaciones directas, y los segundos a los reactivos indirectos, tal como el resumen del comentario.

5.3.1.1 **Informe directo de Luis, antes de las prácticas**

(a) Conocimiento matemático

En ningún trabajo de Luis se alude a la forma en que el sujeto epistémico llega al conocimiento matemático. Sólo en la entrevista, y de pasada, Luis manifiesta su rechazo a considerar que el conocimiento se "inventa", aunque reconoce una forma de intervención del sujeto en la trascripción del conocimiento. (Ent. 157-158)

(Ent. 157)

Pero ¿tú consideras que el conocimiento matemático está en la naturaleza, está fuera, lo construye el hombre, es un .. ? (157)
-Hombre, el hombre lo construye, porque es él quien lo escribe ¿No? Está escrito, ¿quién lo escribe?. El hombre.
¿Y quien le inspira eso? ¿De dónde sale? (158) - Eso ya...

Para Luis, el conocimiento matemático avanza relacionando axiomas y aplicándolos a la realidad (Com. 27)

(Com. 27) *El hecho es que hay que estudiarlo y relacionarlo con otros "objetos" para dar más información.*

La relación de las matemáticas con la "vida real" aparece con frecuencia en la entrevista. Para Luis las matemáticas derivan de la "vida real", por abstracción. Los contenidos matemáticos sencillos provienen de idealizar objetos físicos, con lo que se pueden "ver localmente" en estos objetos. (Ent. 61; Azar, 4 y 5).

(Ent. 61)

Entonces, te repito, ¿crees que percibimos por los sentidos más una geometría euclídea que una geometría proyectiva? (Ent. 58)- *.... Hombre la euclídea es la.. de siempre. Pero ..* (Ent. 59)- *Y es la de siempre, y bueno es en la que te mueves tú. ¿Si?, ¿te mueves en un plano indefinido?* (Ent. 60)- *(risas) Te pones a mirar un cuadro y ya está.*

Pero no es indefinido ¿no? (Ent. 61)- *No pero bueno, se puede, se puede ver localmente digamos. Pero, no se. Por ejemplo, en* R^4 *y en* R^5 *o en espacios de estos así, espacios de Hilbert, o espacios de esos de Banach, bueno, eso .., eso ¿a quién se lo cuentas?.*

A partir de estos conceptos se establecen axiomas, y la relación entre ellos da lugar a nuevo conocimiento matemático, con lo cual este conocimiento derivado es más difícil de relacionar con la realidad.

Las demás ciencias positivas que tratan de estudiar la realidad están escritas en lenguaje

matemático (Ent. 70), suministrándoles el rigor. Con ello las matemáticas son la base de las ciencias positivas, formando un todo con ellas, una sola ciencia (Ent. 74)

(Ent. 70)- *No, se tienen que estudiar por algo porque .. porque los, avances, por lo menos yo creo, los avances científicos van apoyados, muchos, bueno, la herramienta digamos de todo el avance científico son las matemáticas. El instrumento con el que se escriben las cosas. Eso son las matemáticas. Luego la física, la química y las demás, pues bueno, pues son otra cosa. Pero se tienen que apoyar en la matemática.*

(Ent. 74) *Bueno, aunque le digamos matemáticas, le digamos física, le digamos química, biología, química, eso es mentira. Ciencias hay una y ya está. Y todo va unido, como antes. Antes no había eso matemáticas, eso no. Antes había tu eras matemático, también eras biólogo, también eras físico, eras todo ya. Y ahora sin embargo no. Venga: tu eres de matemáticas, pues venga matemáticas; tu eres de biología, biología. Pero no hay una unión, como antes, que antes la había.*

Para Luis, los conocimientos matemáticos son coherentes, serios, objetivos (no interpretables), con certeza discernible (Ent. 123, 124). Esta verdad estriba en la coherencia con

una lógica establecida, en la que están de acuerdo los matemáticos (Ent. 125, 126).

Eso que has dicho. ¿Consideras que las ciencias son más serias que las letras? (Ent. 124)- *Si, porque, en el sentido de que si estos lo ves matemáticamente sabes que esto es así, y es así y es así. Y no hay otra interpretación. Sin embargo muchas veces, en escri.., cuando tu lees un libro, por ejemplo, puedes leerlo de muchas maneras, y entonces ¿cuál es la verdadera?, pues a lo mejor no ningu.., Todas o ninguna. No sabes cual es la verdadera. Sin embargo ya se que en matemáticas sabes si un teorema es cierto o no es cierto.*

¿Porqué?

(Ent. 125)- *Por que dicen muchos que es cierto y lo son (risas)*

O sea por que estadísticamente... (Ent. 126)- *Hombre, estadísticamente.., no, que hay mucha gente, matemáticos y todo eso que dicen: mira que está esto bien hecho este paso, y tal, está bien. Está bien.*

El lenguaje de las matemáticas es claro y conciso (Ent, 166).

Los conocimientos matemáticos son relaciones entre axiomas (Com. 25-26).

(Com. 25) *(La matemática es "objeto de enseñanza") en el sentido en que se dan axiomas y teoremas, lemas, etc,.., es decir, las relaciones que se obtienen de los* *axiomas.*

(Com. 26) *Un axioma es un definición de un "objeto" que puede darse en la realidad o no; y no importa si sirve para algo.*

La relación de los conceptos matemáticos con la experimentación es más clara en el campo de los fenómenos aleatorios, en los que la experimentación puede llegar a predecir resultados (Azar, 6)

(Azar. 6) *la experimentación del suceso también nos puede llevar a coger una estrategia bastante buena; que incluso podría superar al cálculo de la probabilidad*

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Luis diferencia "aprender para aprobar" de "aprender por interés" (Ent. 92).

(Ent. 92) *Porque tu ahora mismo estudias para acabar y colocarte. El que ya está trabajando tiene algo agarrado. Y entonces puede estudiar, pero más bien por hobby, por interés. Interés de saber. Tu te mueves más bien por el interés de aprobar y pasar una asignatura.*

Los alumnos tienden a aprender para aprobar, especialmente los que tienen dificultades, a

los que hay que enseñarle lo que le van a preguntar en el examen (Ent. 189).

(Ent. 189) *Además que las clases particulares, eso es ya otro sistema. Eso es ya otro sistema. Porque el chaval que va a clases particulares ya.. uff, tu, si le queda una asignatura, tu no puedes ahí enseñarle ahí la filosofía, ni la evolución, ni las técnicas de aprendi.. , no. Tu le enseñas ahí, que te van a preguntar en el examen tal y tal cosa y te la tienes que saber. Eso son otra cosa diferente.*

Ni en el resumen del comentario, ni en el resto de los trabajos se caracteriza ontológicamente el aprendizaje.

Luis piensa que se logra un mejor aprendizaje si se le da mayor protagonismo al alumno.

El alumno aprende mejor si se parte de sus intuiciones (Ent. 56), o si se le hace resolver problemas (Ent, 32), mediante una combinación entre la resolución de problemas y la lección magistral (Vid. 4, 5, 30, 31 y 33).

(Ent. 56)- *hombre, todo lo que se pueda tocar, y se pueda ver, eso lo, es lo*

bueno,
porque lo comprendes mucho mejor de lo que lo imaginas, te lo tienes que imaginarte.

(Ent. 32) *Y es donde se aprenden las cosas es en los problemas. La teoría significa comprender las cosas. Pero donde de verdad se aprende es en los problemas. Que por eso son problemas.*

(Vid. 30-33) *Me identifico más con el primer método* (clase magistral)*, pues es con este sistema donde creo que el alumno comprenderá mejor el tema. El alumno conoce el fundamento de la teoría y resuelve mejor los problemas. En los otros dos métodos parece que solo importa los problemas sin conocer lo suficiente la teoría y sin saber de donde viene cada cosa.*

Gracias a la lección magistral el alumno comprenderá mejor la teoría y resolverá mejor los problemas (Vid. 30). Sin embargo, no basta con aprender la teoría para saber resolver problemas (Ent. 32). La dificultad de resolver problemas está en saberlos empezar (Ent. 35)

(Ent. 35) - *Es que cuando tu empiezas a hacer un problema, empiezas a hacerlo pero que..., yo, lo que me gustaría saber es cómo empiezas a hacerlo. Porque si ya mas o menos mecánico, si. Pero si tu nunca has visto un problema, o el planteamiento. ¿cómo tu puedes resolver eso?. El cómo eso es lo que yo siempre me pregunto. No...Porque hay un razonamiento, lo puedes ir viendo, entonces lo puedes entender o no pero lo vas viendo. Pero así hacer tu un problema: y esto lo tengo que hacer así, por que si, para hacer esto, y tengo que demostrar antes esto para..., Eso es donde yo veo la dificultad.*

Para Luis, saber matemáticas es saber "identificar" los conceptos (Ent. 103, 104) Para ver

si un alumno "sabe" se le pueden plantear problemas (Com. 37)

(Ent. 103-104) - *Conoce la teoría significa decir que sabe, aunque no sepa, a lo mejor, resolver algún problema, pero sabe lo que está manejando. Sabe lo que es esto, sabe lo que es la mesa, sabe lo que es un teléfono. No.. coger un bicho y empezar ahí a tocar botones. Eso no*
Por ejemplo, con los logaritmos, ¿que sería conocer el logaritmo? (104)- Pues, definición de logaritmo, y sus propiedades.

La enseñanza es transmisión, ya que la razón de ser de la enseñanza es la existencia de un cuerpo de conocimientos con una lógica interna, que hay que conocer para participar (Com. 24,

25 y 26)

En el proceso de enseñanza el profesor comienza motivando a los alumnos comunicándole la utilidad de los conceptos y justificando las definiciones (Com. 29, 30).

> (Com. 29-30) *La matemática es "objeto de aprendizaje" en el sentido de que las definiciones o axiomas hay que motivarlas,*
> *(30) es decir, hay que explicar para qué los puede utilizar y la definición hay que justificarla,*

Después expone la "teoría" desarrollando lógicamente los conceptos, describe los conceptos, dice lo que tiene que hacer el alumno, tratando de que el alumno participe. Después se

hacen ejemplos (Ent. 47, 193, Com. 32, 33).

> (Com. 32-33) *(La presentación de conceptos por el profesor) Es muy importante (33) porque así se ve cual es el objeto de estudio que se pretende aprender.*
> (Ent. 47). *Pero primero, primero los conceptos. Y luego ya los problemas y la .. Y el problema este también de la estadística, pues más o menos igual que el de antes. Creo que se deben aprender los conceptos y luego darles los ejemplos. Y si quieren hacer como este de las monedas y tirarlas y eso, pues dejarlo como un ejercicio para casa y que lo apunten y que al otro día vuelvan, y entonces se podrá hablar un poco de como ha ido, de como lo han hecho ellos. Pero en un principio, siempre, .. que se le digan las cosas. Y ¿deberes de estos?, lo mejor para casa. Que es donde. Que se entretengan ellos en lanzar la moneda, no que en clase, venga, una moneda se cae al suelo, la mesa.., no se no.*

Se deben explicar primero los conocimientos, no los problemas, ya que los conocimientos

son más generales y los problemas darían una visión práctica y parcial. De esta forma, cuando resuelva estos ejercicios, el alumno sabrá lo que está empleando (Vid. 15, 32)

> (Vid. 32) *En los otros dos métodos parece que solo importa los problemas sin conocer lo suficiente la teoría y sin saber de donde viene cada cosa.*

Para motivar se pueden emplear juegos y experimentos (Azar 8 y 10), siempre y cuando

no supongan una interrupción en el proceso ni generen demasiado alboroto en la clase (Ent. 48), en cuyo caso es mejor dejarlos para que el alumno los haga en casa. Para realizar estos juegos o

experimentos el alumno debe conocer la teoría, para saber el porqué de lo que ocurre (Ent. 47)

> (Azar, 8-10) *El papel de la experimentación y juego en el aprendizaje de la matemática es comprobar que las cosas que se estudian tiene una finalidad real, es decir, que se puede comprobar.*
> *Las cosas no se estudian por estudiar, sino que sirven para algo.*
> (10A) *En cuanto al juego, nos sirve para entender y motivar el principio de nuestro estudio.*
> (Ent. 48) (47) *porque si tu estas en tu clase, los de al lado sienten ese ruido y también le molesta. Que hay muchos profesores así que le molestan el ruido de sus vecinos.*

> (Ent. 47) *Pues que eso de que le des un botoncito y salga una cosa... yo que se. Yo creo que en el primer método, te da la definición, los conceptos, no se, ¿no?.*
> *Y como se deben hacer la cosas. El profesor tiene, o debe de hacer los problemas. En el del logaritmo no, aquí empiezan ellos a coger la calculadora,*
> *mover de aquí para allá, este botoncito para qué sirve.. Y están utilizando la calculadora pero sin saber lo que es, a lo mejor la función logaritmo, no saben*
>
> *lo que es la función exponencial, no saben lo que es una sucesión, si diverge, si converge, si .. no se, no saben las reglas normales.*

El profesor debe explicar la evolución histórica de los conceptos, para que no se queden

con la idea solo de los conceptos finales (Ent. 143, 147, 149). También debe explicarse la

utilidad de los conceptos (Ent. 62)

> (Ent. 143) - *Claro si eso es lo que pasa. Por ejemplo, el teorema de Fermat, que lo han descubierto, bueno, mentira, lo han demostrado este año, eso llevaba doscientos años..., y en doscientos años se han hecho muchas cosas. Ahora de pronto pun, pues ya está demostrado. A lo mejor en dos años está aquí en la facultad de Granada el teorema de Fermat, ¡muy bien!, y en una hora te lo han explicado. ¡vaya!. Y en estos doscientos años no se ha hecho nada. ¡Vaya!.* (Ent. 147) *Es lo que he dicho antes. Intentar explicar una evolución del problema. Intentar dar una evolución también de lo que estás haciendo. Yo creo que es eso. Si tu llegas ahí, venga, teorema de Fermat, pum, pum, pum, paso, dices, ¡vaya, que bien, podían haberlo demostrado antes!*

Fíjate tu que fácil lo han hecho (risas) (Ent. 149) *Si, tienes que dar las dos cosas. Las dos cosas tienes que darlas. La evolución y también la base cien.. como se demuestran las cosas. Las dos cosas tienes que darlas, no te .. Pero las demostraciones, a lo mejor, no habría, a lo mejor, que darlas así tan duras...Porque, muchas veces... Es que a mi me gusta mucho más la historia, más que, más que la demostración, en fin. Pero que, donde la verdad está el problema es como se ha resuelto. ¿Por qué se ha resuelto? ¿Por qué ha estado tanto tiempo ahí olvidado, bueno, olvidado no, mentira, ha estado tanto tiempo ahí al pie del cañón y sin embargo nadie ha dado con la tecla? ¿dónde estaba? ¿A quien se le ha ocurrido esa idea? ¿O ha habido también que construirse .. nuevas cosas?. ¿para demostrar eso?. Yo no lo se. Por que muchas veces tu tienes un razonamiento o tienes un.. tienes lo que sea ¿no?, lo tienes ahí, está escrito, está guardado, todo el mundo sabe que es verdad sabe que se demuestra, pero a lo mejor cuando pasen cuarenta o cincuenta años, a lo mejor se ha encontrado una cosa y a lo mejor, con lo que tu tenías antes, las coges y pum ¿no?, sacas un nuevo resultado.*

En la explicación, el profesor debe hacer preguntas, para observar si los alumnos participan en la clase y se interesan por la asignatura (Ent. 86).

(Ent. 86) - *Dar resultados buenos significa que .. la gente se haya enterado de lo que tu hayas explicado, aparte de los exámenes que tu hayas puesto, claro. Y que tu veas que la gente te responde. Que la gente.. tu preguntas y .. la gente responde, y la gente, ..sentirse un poco como por la asignatura. Y la gente le gusta hacer los problemas, le gusta moverse.*

Hay que prepararse para ser profesor (Ent. 3). En esta preparación deben enseñarte a transmitir, a evitar el aburrimiento y a gestionar la clase (Ent. 4 - 6, 171). Las prácticas de enseñanza son muy importantes en esta preparación, como también lo es la reflexión posterior, en la que se expongan los problemas encontrados y se aporten soluciones (Ent. 182), aunque

estas soluciones no serán únicas ni exactas, porque no existen (Ent. 182)

(Ent. 3) - *Hombre, ¿consciente?... Metodología es para.. Si quieres dedicarte a la enseñanza tienes que hacer una.., digamos un aprendizaje, ¿no?, y donde más se aprende un poco más es en metodología. Porque en la otras ya sabemos lo que va a ser el CAP. Y ya está.* (Ent. 4-6) *Entonces ¿crees que hace falta una preparación específica para dar clase? (4)- Para dar clase, aparte de los conocimientos tienes que tener, hombre, saber introducir un poco las cosas, o cómo crees tu que tienes que dar, para que la gente se entere. Si, que hace falta, digamos, esa capacidad para transmitir. Aparte de lo que tu tengas en la cabeza sobre tus ideas. Que a lo mejor, tu sabes mucho, pero también tienes que saber transmitirlas. Y hacer que le guste la asignatura a alguien. Porque.. Luego ya la manera de como tu la* *transmitas es muy diferente. A lo mejor para ti puede ser de una manera y para otro de otra. En fin eso ya depende de criterios, pero para enseñar tienes tu que.. tienes que saber algo, o sea es... algo.*

(Ent. 171) - *Como se deben dar, .. Eso depende. Como se deben de dar más o menos las clases. Como debes evitar que la gente se aburra; cómo debes de,.. , que la gente se interese por la asignatura, por lo menos no por la asignatura se interese por tu hora (risas), al menos el tiempo que tu estás allí, como se debe hacer más amigas. Cuando tu veas la actitud de los alumnos, saber, cuando a los alumnos los estás viendo, saber lo que están pensando, y saber lo que quieren; si no lo entienden, si lo entienden, si están allí metidos para escuchar porque no les queda mas remedio. Saber la actitud en cada momento de los alumnos. Y saberte tu comportar, claro. Que muchas veces tu no puedes darle muchas,.., abrir la mano a los niños, porque es que eso..* (Ent. 182) - *Bueno otra cosa que habría que hacer después de prácticas es, después de elaborado todo lo que se ha hecho en el mes de prácticas, pues intentar corregir si ha habido algún error, o si alguno ha tenido tal problema o si ha tenido cualquier situación, comentarla en clase, y darle no una solución , porque una solución no se le va a dar. Pero, que si le pasa otra vez, que sepa cual debe ser su comportamiento, general, ¿no? Qué es lo que tiene que hacer para evitarle ese problema. Porque solución, no hay, solución única no existe. Como cada uno, como eso es todo subjetivo, no es objetivo. Cada uno da su opinión, y.. ahí no hay una cosa.. rígida.*

5.3.1.2 **Informe indirecto de Luis, basado en el resumen del comentario**

El resumen de Luis contiene las cuatro partes que diferencia el texto: descripción del realismo, repercusión en la enseñanza y aprendizaje; descripción del constructivismo y repercusión en la enseñanza y el aprendizaje. Luis parafrasea el texto.

(a) Conocimiento matemático

Los objetos matemáticos para el *realismo* tienen una realidad ajena al sujeto, pudiendo estar en el mundo de las ideas o en la naturaleza. Al preexistir al sujeto, no dependen de él, sino que sus características están dadas.

Para el *realismo*, conocer es reconocer los objetos matemáticos.

Para el *constructivismo*, conocer es alterar las estructuras intelectuales al interactuar con el objeto de conocimiento.

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Para el *constructivismo*, aprender es asignar significados a partir de la actuación con situaciones diseñadas por el profesor.

En la enseñanza *realista* se le da un papel pasivo al sujeto (Com. 15, 16).

(Com. 15-16) *En cuanto al modelo de enseñanza el realismo matemático privile gia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto.*

En la enseñanza *constructivista*, el sujeto es activo, el profesor no se limita a explicar el conocimiento, sino que debe presentar situaciones, que provoquen una actuación del alumno y la consiguiente alteración de sus estructuras (Com. 17, 20, 23)

(Com. 17) *En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial:*

(Com. 20) *La tarea del educador constructivista, mucho más compleja que la de su colega tradicional, consistirá en diseñar y presentar situaciones*

(Com. 23) *Ahora el educador no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto, con mayor o menor habilidad.*

5.3.1.3 **Síntesis de los informes: Observaciones**

Del informe directo destacamos que Luis caracteriza el conocimiento matemático de manera formalista, (Cañón, 1993, cuestión 1), conformado por axiomas y sus consecuencias. Este conocimiento deriva de una abstracción de la naturaleza. Gracias a esa abstracción puede establecerse una forma de razonamiento matemático preciso, con un lenguaje claro y conciso, en el que la verdad se establece por coherencia interna (Cañón, 1993), y está establecida por agentes externos, que han arbitrado los criterios de comprobación. Gracias a la claridad de esta coherencia, la matemática es el lenguaje de las otras ciencias (extremo utilitarista, Cañón, 1993, cuestión 10), suponiendo el paradigma de la ciencia "seria".

Parece que las ideas epistemológicas sobre el conocimiento matemático, son coherentes con las ideas *realistas* del resumen del comentario, y especialmente con el *formalismo*, que se ocupa de dar teorías y ver las relaciones que derivan de ellas.

Luis parece responsabilizar al profesor de "lo que tiene que saber el alumno", con lo cual debe decirle todo lo que quiere que conozca. Por ello se lamenta de no saber la utilidad de los conocimientos matemáticos ("*no te lo enseñan*"), ni la evolución histórica de los conceptos. Por esa misma razón, considera que las clases en las que se pone a los alumnos a resolver problemas,

los alumnos no van a saber lo que están haciendo. Su idea de enseñar es la de "mostrar" (platonismo, Dossey, 1992), con lo que lo único que "sabe" el alumno es lo que le "han mostrado" (extremo platónico, Peterson y cols, 1987, Romberg, 1991).

Los conceptos que "se muestran" son formales, derivados de la naturaleza mediante un proceso de abstracción, y a veces, muy difíciles de intuir. Son valiosos por tener una utilidad que Luis confiesa no conocer, pero que está relacionada con la importancia que tienen los conocimientos matemáticos para las demás ciencias. La validación de los conocimientos de las demás ciencias se alcanza mediante la matematización de sus resultados. Y es que la matemática tiene un método serio de razonamiento, que hace que se pueda discernir si un teorema es verdadero o no.

La imagen de la enseñanza se completa con la idea de que lo "mostrado" es "aprendido" (o debe ser aprendido) por el alumno, sin tomar en consideración la interpretación del mensaje por parte del receptor, pese a que en el resumen destaca las aportaciones *constructivistas* al proceso de interacción del sujeto con el objeto. Esta interpretación es menos connotativa cuando considera que "saber matemáticas" es "saber de que se trata" (identificar en el "mostrador" que se le ha presentado, saber elegir el procedimiento para resolver el ejercicio preciso, etc.), con lo que parece que identifica "comprender" (*la teoría significa comprender las cosas* Ent. 32) con captar la descripción que el profesor hace de los conceptos (comprensión instrumental, Skemp, 1978). La alusión a las utilidades y otros aspectos son anecdóticas, y sirven para mejorar la retención y para motivar a unos alumnos "desganados", "cansados" de que se les exijan cosas.

Luis cae a veces en una visión tremendista de la enseñanza y de la escuela, según la cual la escuela es una guardería, incluso en la enseñanza secundaria, una obligación que no resulta atractiva para nadie (Ent. 114-118). Él mismo se siente muy cansado de las exigencias a las que le somete el régimen de estudios. Por este mismo cansancio, no cree que se pueda cambiar esta situación, sino que él reproducirá lo que ha recibido (Ent. 12, 14, 82)

En vista de que enseñar es comunicar conocimientos, el conocimiento didáctico debe favorecer que el profesor aprenda a enseñar (profesor eficaz, Brown y Borko, 1992)

5.3.2. Informes de los trabajos realizados por Luis después de las prácticas Tal como ya hemos comentado, sólo se han analizado en profundidad el comentario realizado al final del curso y la memoria de prácticas.

De la memoria de prácticas hemos seleccionado la programación de una de las clases que Luis impartió. Esta programación está redactada en pasado, constituyendo más una narración de lo que hizo en clase que una planificación propiamente dicha. El modelo de clase descrito en esa programación está protagonizado por el profesor, quien indica lo que se pretende conocer, explica los contenidos, da una idea intuitiva y plantea ejercicios para que los alumnos los resuelvan. No aparece ninguna descripción de los métodos de enseñanza observados en las prácticas, lo que nos ha reforzado la idea de su mínima participación en el trabajo referente a analizar los métodos de enseñanza.

En el comentario de textos, Luis parafrasea el extracto del artículo, sin conectivos claros entre las frases del texto que elige, por lo que a veces no se completan las ideas. Se diría que Luis se ha limitado a elegir las frases del texto que, a su juicio, podrían encajar en cada apartado del comentario, lo que se puede interpretar como una actuación cauta, o, como indicó en la entrevista (Ent. 152) que el texto presentado *"apenas lo entendía"*.. Así aparecen mezclados aspectos de enseñanza con aspectos del conocimiento didáctico (unidades 17 y 18 del post-test, que son las 128 y 129 del texto, pese a que está hablando de la exposición del profesor).

Hemos diferenciado, en el comentario, 26 unidades de contenido, las 12 primeras referentes al resumen y las 14 últimas a la valoración de los métodos de enseñanza.

El comentario completo está presentado en forma de esquema. El resumen está realizado siguiendo el esquema del artículo, desarrollando primero el concepto de *realismo* y *constructivismo*, y después sus repercusiones en la enseñanza. Parafrasea el texto llegando a copiar literalmente. Este hecho está relacionado con la redacción en forma de esquema, pues al presentar frases sueltas no necesita hacer procesos de adaptación del discurso. De los términos destacados, sólo emplea la oposición pasivo/ activo.

En la segunda parte del comentario no reelabora ni expone su opinión personal, sino que se limita a definir los dos términos tomando las frases del artículo. La valoración de los métodos de enseñanza, se compone de tres puntos que son frases tomadas directamente del artículo, más un cuarto punto en el que expone su opinión sobre el *debate de ideas en clase,* pero redactado de tal forma que no queda claro si también está valorando los otros dos métodos. La postura que adopta de parafrasear es una manera de no afrontar directamente su opinión, a pesar de lo que se le demanda. Al igual que la indeterminación de sujeto que expresa al utilizar una forma impersonal en el último punto: "Se fomenta".

5.3.2.**1 Informe directo de Luis después de las prácticas**

Como los trabajos analizados se reducen al Comentario y la Memoria de Prácticas, las informaciones extraídas en este segundo momento son más escasas.

(a) Conocimiento matemático

Aparecen muy pocas referencias al conocimiento matemático. Sólo puede destacarse las que hacen referencia a las unidades del comentario de textos que en el texto original están relacionadas con las matemáticas, pero que Luis focaliza en la enseñanza.

En la parte valorativa del comentario, Luis emplea dos unidades de información del artículo referidas a la justificación (Com. 19 y 20). Estas unidades, que en el texto se refieren a cualidades del conocimiento matemático realista, las proyecta Luis para establecer el valor que tiene en la enseñanza la explicación del profesor realista.

> (Com. 20) . *Repuestas únicas y universales, centradas principalmente, en el contexto de justificación.*

Ello nos hace pensar que Luis se refiere con estas unidades a su consideración del conocimiento matemático como universal, justificado, con respuestas únicas (Com. 18, 19 y

20). Además, el conocimiento matemático es transmisible (Com. 13 y 14) por quien lo posee. En estas unidades Luis parece referirse a cualidades objetivas del conocimiento matemático, lo que le hace ocuparse más de la forma de transmisión que de la discusión sobre la naturaleza del conocimiento.

(Com. 13-14) *Objeto de enseñanza: éste puede transmitirse.*

Quien posee el conocimiento puede ofrecerlo a quien no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión.

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas Luis alude a la precisión del lenguaje matemático y a su justificación, cuando se refiere a los métodos de enseñanza observados durante las prácticas (Prac. 8 y 9) (Prac. 8-9) *Se hace hincapié en hablar bien matemáticamente sobre todo en*

primero de BUP, que es donde menos teoría se da y se hacen más ejercicios. Por el contrario en las clases observadas en COU, la manera de impartir clase varía. Se intenta explicar el porqué de las cosas, las demostraciones de los teoremas

El debate (participación colectiva) entre alumnos crea en estos una actitud crítica, y desarrolla su pensamiento (Com. 23, 24 y 25).

(Com. 23-25) .*El debate de las ideas en clase es totalmente fundamental, porque a raíz de esto se fomenta el razonamiento de los niños, la motivación e interés. Este debate hace que los alumnos, reflexionen, se hagan críticos, desarrollen su pensamiento,*

En la enseñanza el profesor empieza con la presentación de los objetivos, después "da"

los contenidos formales y luego los relaciona con otros contenidos anteriores; posteriormente explica intuitivamente y hace, o hace que los alumnos hagan, ejercicios de ejemplos. Finalmente

encarga ejercicios para hacer en casa (Mem. 1 a 10)

(Mem. 1-10) *La clase que "mejor" he dirigido yo, creo que fue cuando tuve que explicar el Teorema del Valor Medio y unas consecuencias inmediatas de él. Anteriormente a mi exposición el profesor ya había explicado lo que se* *pretendía conocer con dicho resultado. Así pues mi labor consistió en dar dicho teorema, primero de forma rigurosa y muy detallada de lo que se quería demostrar en cada cosa. Así como recordando propiedades que ya se habían dado antes y que los alumnos no recordaban o no comprendían. También hacía preguntas para saber en cada caso si me estaban siguiendo. Escribía todo lo que estaba haciendo para que los alumnos tuviesen unos buenos apuntes y no se perdieran luego en su casa cuando volvieran a estudiarlo. Una vez finalizado, me olvidé de tanta precisión y les expliqué gráficamente lo que este teorema y sus propiedades querían decir. Por cierto que esto último fue lo que más me gustó. A continuación mandé unos ejercicios bastante simple para el día siguiente en donde había que tener también en cuenta el Teorema de Rolle que ya se había explicado con anterioridad. Estos ejercicios consistían básicamente en demostrar algunas hipótesis del Teorema del Valor Medio.*

La enseñanza es transmisión de conocimientos finales (Mem. 1, 2 y 3). Para su explicación, el profesor sigue el orden que deriva de la estructura del conocimiento matemático formal (Mem. 1 a 4). El profesor organiza la enseñanza para una presentación clara. En clase expone magistralmente (Mem. 3 a 7), haciendo preguntas para ver si los alumnos siguen el razonamiento (Mem. 5). En esta explicación se separa teoría y práctica, aunque se relaciona con los conceptos anteriores (Mem. 9 y 10)

5.3.2.2 **Informe indirecto de Luis después de las prácticas**

(a) Conocimiento matemático

Luis resume la postura *realista* sobre el conocimiento matemático en el *platonismo*, que separa el sujeto y el objeto de conocimiento (Com. 1).

(Com. 1) *1) "Realismo matemático"*
.Para Platón es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento.

Sin embargo, para conocer el objeto hay que reconocerlo en la naturaleza, según Aristóteles (Com. 2)

(Com. 2) . *Para Aristóteles conocer ahora significa -conocer los objetos matemáticos, en los objetos corpóreos- de la Naturaleza.*

El *constructivismo* concibe conocer como alterar las estructuras del sujeto mediante su interacción con los objetos (Com. 6 a 10)

> (Com. 6-10) . *Para Piaget el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten ver al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. El sujeto se acerca nuevamente al objeto de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.*

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La enseñanza *realista* mantiene un papel pasivo del alumno, mientras que en la *constructivista* el alumno es activo. (Com. 4-5; Com, 11-12)

> (Com. 4-5) *El Realismo matemático privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto.* (Com. 11-12) *Es la actividad del sujeto la que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje".*

5.3.2.3. Síntesis de los informes de Luis: Observaciones

Se mantiene la idea de que la única interpretación epistemológica de Luis es la que realiza en el comentario, referida a la postura realista, según la cual hay una distancia considerable entre el sujeto y el objeto de conocimiento. El sujeto accede al conocimiento mediante su reconocimiento en la naturaleza material, y la valida en una estructura formal. Esa visión es compatible con la que realiza en los otros trabajos, según la cual el conocimiento matemático es universal, justificado, con respuestas únicas (Cañón, 1993, cuestión 4, postura a-histórica)

Por otra parte, Luis se fija en que en el texto se dice que el constructivismo analiza cómo el sujeto individual llega al conocimiento mediante un cambio de sus estructuras intelectuales.

Parece, pues, que Luis parte de una consideración del conocimiento matemático como un conjunto de conocimientos externos al sujeto, y por tanto transmisibles (a-histórico, Cañón, 1993). Pero no se puede transmitir sin tener en cuenta la forma en que el alumno accede al conocimiento.

De esta forma, las posturas *realista* y la *constructivista* no son contradictorias, sino complementarias. La primera se sitúa en el plano epistemológico, caracterizando el conocimiento matemático, mientras que la constructivista se sitúa en el plano psicológico, analizando cómo el alumno llega a adquirir el conocimiento. Hay un punto de conflicto en estas posturas, ya que el *realismo* aboga por una transmisión pasiva, mientras que el *constructivismo*, y el estudiante con ella, apoya la actividad de los sujetos implicados en la enseñanza. Con esto, Luis identifica la enseñanza *constructiva* con una enseñanza activa y participativa.

Luis acepta un cambio en el modo de enseñar, pero no es sensible a las repercusiones epistemológicas de este cambio, sino solo a las razones psicológicas.

En la argumentación de Luis no parece contradictorio el considerar las matemáticas como objeto de enseñanza (ya que es transmisible) y considerarlas objeto de aprendizaje (el sujeto llega mediante alteración de estructuras). Esto podría interpretarse pensando que Luis considera que las matemáticas son objeto de enseñanza para el profesor y objeto de aprendizaje para el alumno.

5.3.3. **Análisis de las diferencias entre los dos perfiles de Luis**

La entrevista ha sido el instrumento que mas ha ayudado a caracterizar y profundizar en las concepciones y creencias de Luis.

De cualquier forma los perfiles que hemos elaborado a partir de los trabajos de Luis en los dos momentos contrastados son perfectamente congruentes, aunque el primero es mucho más explícito que el segundo.

En los resúmenes de los comentarios tampoco observamos diferencias significativas. Luis es sensible a las afirmaciones del texto que indican que el *realismo* se caracteriza por la separación entre el objeto y el sujeto, y el *constructivismo* por considerar que el conocimiento se produce al cambiar las estructuras del sujeto en diferentes aproximaciones, tanto en pre-test como en post-test. En el pre-test diferencia las posturas platónicas y aristotélicas, mientras que en el post-test aparecen aspectos de cada una que no se opone a la otra. (Platonismo indica donde están los conocimientos, aristotelismo indica como se llega a ellos).

En contra de lo que podría esperarse, elabora un poco más el comentario realizado antes de las prácticas, aunque en el realizado al final de curso sigue la forma del articulo y no la del enunciado de la pregunta. No ha sido sensible a la oposición profesor/ educador, a pesar de que emplea el segundo término. Es muy cuidadoso a la hora de explicitar su postura personal, no manifestándola de manera abierta, sino que recurre a la indeterminación de sujeto y a la cita literal para manifestar sus opiniones.

Los trabajos analizados antes de las prácticas son más extensos, y por tanto más explícitos. En ellos caracteriza a la matemática como formada por axiomas, lemas, etc, que no están relacionados necesariamente con la realidad. Pero a la vez parece reconocer los objetos matemáticos en la realidad mediante un proceso de abstracción.

En el comentario realizado después de las prácticas parafrasea aún más de lo que lo hace antes, llegando a emplear frases del texto para responder a la valoración, lo que parece indicar mayor cautela en sus respuestas. En esta valoración indica que la matemática es objeto de enseñanza en el sentido de que puede transmitirse, mientras que es objeto de aprendizaje en el sentido de que se construyen el conocimiento mediante una modificación de estructuras.

En pre-test y post-test coincide el que el modelo *realista* de enseñanza da un papel pasivo al alumno, mientras que en el *constructivista* el profesor y alumno son más activos. En los dos momentos plantea la necesidad de motivar la enseñanza, pero mientras en el pre-test parece que esta motivación la debe hacer la exposición del profesor, en el post-test, la sitúa en el debate de las ideas en clase. En el pre-test la única actividad de enseñanza que se contempla es la explicación del profesor, ya que la resolución de problemas por los alumnos es solamente una forma de contrastar el aprendizaje.

Estas apreciaciones nos hacen reiterarnos en las observaciones realizadas al final del informe realizado después de las prácticas. Parece que Luis sólo es sensible a aspectos didácticos, referidos a cómo enseñar, no al contenido a enseñar, al qué enseñar y a su caracterización epistemológica.

Pero además, Luis confía en elementos externos de verificación de los conocimientos y de los modos de actuar. Epistemológicamente necesita una autoridad externa que le establezca la veracidad del conocimiento (posición dualística respecto al conocimiento matemático, Copes, 1982, Perry, 1970, 1985). Didácticamente se sitúa en una postura relativista, que parece justificada por la propia esencia de la enseñanza como una actividad humana (posición multiplicista respecto a la enseñanza y al conocimiento didáctico; Copes, 1982; Perry, 1985)

5.4 **Estudios de casos: El caso de Eva**

Eva está matriculada en el último curso de la licenciatura de matemáticas, y tiene aprobadas todas las asignaturas de los cuatro cursos anteriores. Ha participado frecuentemente en los debates y discusiones en la clase de Prácticas de Enseñanza. En el período de evaluación de la fase de prácticas presentó, junto con su compañero de prácticas, un trabajo que tomaba como punto de partida el modelo de enseñanza observado, y el análisis del papel de la demostración en la clase de matemáticas.

Ha realizado todos los trabajos del período anterior a las prácticas. Gran parte de estos trabajos están mecanografiados empleando un tratamiento de textos.

Fue entrevistada durante 45 minutos, pero la transcripción no es muy extensa, ya que Eva habla pausadamente, pensando antes de responder, y en la entrevista no se interrumpen entrevistador y entrevistado. En muchos casos, Eva repite la pregunta antes de responderla.

Durante la entrevista Eva aludió al primer trabajo realizado en equipo, lo que indica que participó activamente en su redacción. El otro trabajo en equipo, *análisis de los métodos de enseñanza observados durante las prácticas*, lo entregaron manuscrito, con la letra de Eva, por lo que lo hemos tenido en cuenta en la elaboración del perfil de después de las prácticas.

También hemos tomado en consideración la opinión de Eva sobre nuestra asignatura, ya que está firmado por la autora.

Seleccionamos a Eva para analizarla en profundidad, principalmente, por presentar una puntuación alta en el *grado de sensibilidad* a las posturas epistemológicas y didácticas, en el *comentario de textos* realizado antes de las prácticas, especialmente en la caracterización del realismo, cuya puntuación es la mayor en relación a los 6 jueces empleados en el estudio piloto. Sin embargo, este índice se situo en la mediana de las puntuaciones respecto al total de los 11 jueces considerados para la investigación, en lo que respecta al realismo, y en el percentil 7 para el constructivismo. Los demás trabajos de Eva fueron menos llamativos, incluso llegamos a pensar que sus respuestas estaban sesgadas por un proceso de deseabilidad, al coincidir en parte con los modelos presentados en los módulos utilizados durante el curso. Nos decidimos finalmente a incluirla entre los entrevistados por su alta participación en las clases. Mas tarde, el contenido de sus trabajos, y el interés de sus respuestas a la entrevista nos llevaron a seleccionarlo para su análisis en uno de los estudios de casos.

5.4.1 **Informes de los trabajos realizados por Eva antes de las prácticas**

Los trabajos de Eva no son muy extensos, con una presentación cuidada y buena expresión y redacción.

El primer trabajo, dedicado al juego de azar, destaca por identificar una variedad de conceptos matemáticos implicados en el juego presentado. En este trabajo dice considerar igualmente válidos la experimentación y el análisis lógico-combinatorio, para establecer y justificar las ventajas de una estrategia ganadora.

Eva diferencia los modelos de clase visionados (trabajo 2), decidiéndose, por razones más emotivas que racionales, por el método propuesto en una clase basada en la calculadora para introducir el concepto de logaritmo y sus propiedades, en la que Eva aprecia una gran habilidad del profesor y una respuesta positiva de los alumnos. Sin embargo, Eva echa en falta una base matemática para evitar que los alumnos estén trabajando con un concepto que *no conocen*.

El Comentario de textos es extenso, bien estructurado. El resumen está redactado, pero usando guiones y títulos. No copia el enunciado completo pero sí toma los dos términos resaltados en negrita como presentación de la misma. La estructura del resumen sigue el enunciado lineal de la pregunta, es decir, primero define el *realismo* y *constructivismo*, luego recoge el punto común del que parten ambos, mediante una reformulación de las ideas del texto, en el que sintetiza una parte del contenido del texto. Por último se centra en las repercusiones de ambos movimientos en la enseñanza. Analiza las repercusiones contraponiendo dos elementos: el papel del alumno y la didáctica, y recoge los términos que en el artículo marcan negativa y positivamente cada corriente: profesor (realismo)/ educador (constructivismo), pasivo (enseñanza realista)/ activo y creatividad (enseñanza constructivista).

La segunda parte del comentario encierra una opinión personal que le hace anteponer un verbo de pensamiento: "creo" a las afirmaciones. Formula su opinión sobre las matemáticas como objeto de enseñanza mezclando ideas que en el texto están referidas a la consideración como objeto de enseñanza y objeto de aprendizaje. En la valoración de las actividades de enseñanza, une la exposición del profesor con la resolución de problemas por los alumnos, ya que los considera complementarios, y le da al debate de las ideas en clase, una significación subjetiva: debatir ideas es compartir dudas y conocimientos. Además añade un punto más, el trabajo de los alumnos.

La entrevista con Eva tuvo lugar el 13 de diciembre de 1993, siendo la última de las seis entrevistas realizadas. la conversación Fue distendida, manteniendo Eva una actitud abierta. la comunicación entre entrevistador y entrevistada Fue fluida, y pareció establecerse una cierta complicidad. A veces Eva repitió la pregunta planteada, especialmente cuando esta era demasiado directa. No hubo altibajos, salvo un cierto respeto inicial que se superó rápidamente. La impresión que dio es que Eva tenía una visión abierta de los temas tratados, con lo que sus afirmaciones son a veces difíciles de clasificar, al encerrar matices de diferentes aspectos. Las respuestas a la entrevista fueron preferentemente descriptivas. La mayoría de los temas tratados fueron introducidos por el entrevistador. Una gran parte de la entrevista se dedicó a analizar la enseñanza, pese a que las preguntas pretendían abarcar aspectos generales. Así, cuando se planteó la discusión sobre la naturaleza del conocimiento matemático, Eva dirigió la respuesta a la naturaleza de las matemáticas escolares. El esquema que eligió Eva para representar los modelos de enseñanza observados en vídeo se basa en la posición relativa que ocupan los conceptos, el profesor y los alumnos.

De la revisión de los trabajos anteriores entresacamos algunas cuestiones para intercalarlas en la entrevista. En el *comentario de textos* hablaba Eva de la necesidad de que los alumnos tuvieran una "base" de conocimientos para poder descubrir otros conocimientos. Esta afirmación nos suscitó preguntar: *¿Cómo se logra que los alumnos dispongan de esa "base" para poder construir el conocimiento? ¿Qué conocimientos debe descubrir el alumno? ¿Se obtiene esa base por transmisión? ¿Cómo se articulan la transmisión y el descubrimiento en la enseñanza?*. Del trabajo del azar nos planteamos la cuestión de pedir que matice la afirmación de que *el método experimental es igualmente válido que el probabilístico*.

Al presentar el caso de Luis hemos mencionado el trabajo en equipo, consistente en programar una unidad, ya que estos dos estudiantes, junto con otro estudiante, formaron parte del mismo equipo, al realizar el diseño de una unidad didáctica.

Hemos situado las unidades de información extraídas de cada trabajo realizado por Eva, en la Rejilla, dando lugar a una tabla por cada trabajo. Posteriormente hemos elaborado una tabla final que resume las obtenidas en los dos momentos que estamos considerando en la investigación: antes del *practicum*, y después del *practicum*. Estas tablas nos permitieron elaborar informes correspondientes a las informaciones indirectas (resumen del Comentario de textos) y directas (restantes trabajos).

5.4.1.1 Informe directo de los trabajos realizados por Eva antes de las prácticas

(a) Conocimiento matemático

Para Eva, el conocimiento matemático no se descubre (Ent. 43), aunque tiene su parte concreta o real (Ent. 46). Tampoco se genera arbitrariamente, no se inventa (Ent. 47), aunque en

el proceso de evolución ha podido haber momentos de creación arbitraria. El hombre ha establecido la forma de notar los conceptos, aunque esto es menos importante (Ent. 28, 39 y 47)

> (Ent. 47) -*Entonces no se yo si es inventar o es descubrir. Es decir: "¡Anda, pero si esto estaba aquí y no lo había visto!". Es que no se, el matiz quizás de la palabra... No es inventar de decir: ¡Anda, pues voy a hacer una teoría que !. En realidad luego también. Quizás no en el principio pero ya en el proceso, todas las teorías tienen su parte concreta, o real, de decir: "esto lo veo".* (Ent. 39) *No, yo no pienso que sean inventados. Bueno, quizás inventados en la forma de notación, o de..., no se, pero si no se hubiesen llamado así se habrían llamado de otra manera. A ver si me explico. Esto que de la parte real, que si la parte imaginaria, que si la i, y todas estas cosas, yo pienso que no son inventados.*

Una prueba de que no han sido inventados arbitrariamente es que no son incoherentes (Ent. 38)

> (Ent. 38) *Además si fuera una cosa así, que a uno se le ocurre decir un día que a esto lo llamo así, pues seguro que a los dos días hubiera habido alguna cosa que no hubiera ido bien...*

Los conceptos matemáticos surgen para resolver problemas (Ent. 45, 25) y se concretan

en teorías cuando se comprueba su aplicación a hechos reales o abstracciones de hechos reales (Ent. 49).

> (Ent. 45) -*Yo pienso que, no se, todos los conceptos se han ido descubriendo ante la necesidad de ir resolviendo problemas.* (Ent. 25) -*Bueno, pues para mí un número complejo es, el cuerpo de los números complejos es una extensión de los reales, son una forma de representar o de notar una... Son unos números que aparecen para resolver un problema que se planteó al resolver un tipo de ecuaciones.*
>
> (Ent. 49) *- Y una vez.. ¿Cómo se convierten en teorías que tengamos que estudiar los demás?*
>
> *(49) - Pues. Porque. Pues por esa concreción. O sea, viendo que se concretizan en una serie de hechos reales, muchas veces, otras veces a lo mejor hablamos de hechos reales y no son hechos reales en sí, son a lo mejor, son interpretaciones de alguna cosa física. Pues yo pienso que entre todo eso... Yo pienso que la mayor validación es así.*

La representación de estas formas contrastadas de resolver problemas se constituyen en

conceptos matemáticos (Ent. 25), y llegan a ser algo que podemos transmitir (Com. 33)

Las matemáticas utilizan un método formal de razonamiento. Pero también pueden emplear la experimentación, aunque exigiría mucho tiempo y experimentos para llegar a resultados válidos (Ent. 66, 68; Azar, 3 a 6)

> (Ent. 66) -*Hombre, considero que es importante la experimentación en cuanto que si uno ve lo que en realidad es, bien. Y si no al equivocarse, al comprobar su propio error pues ya sabe el porqué. Si me estás preguntando para comprender un concepto. Por ejemplo. Hombre, también es importante el método formal en el sentido... también es necesario comprender los conceptos matemáticos.*
>
> (Ent. 68) *Quiero decir, este problema se planteaba con las tarjetas. ¿Tu crees que la experimentación puede comprobar...?*
>
> *(68) -No, en este caso no, está claro. Porque... porque quizás por suerte, en ese caso concreto, quizás a voleo, quizás pues puede que algún individuo gane siempre, o sea, acierte. Entonces esto no prueba que si tu lo haces así al*

azar, a lo mejor ganas una vez, pero quizás al día siguiente o.., por si ese día tienes suerte, o, a lo mejor en otro juego, a lo mejor ya no. Entonces de lo que se trataba era de buscar un método para tener más posibilidad de ganar. Lo cual tampoco significa que siempre se gane. Lo que pasa es que yo aquí pienso que un poco los métodos experimentales, las situaciones que se utilizan, son un poco, más que de experimentación, de comprobación. Hummm.

Parece que cuando Eva habla de la experimentación, se refiere a la experimentación como método de aprendizaje, realizado por los alumnos. Esta experimentación es más bien comprobación (Ent. 68) que prepara el profesor para enseñar unos conocimientos formales (Azar, 5-6)

Las matemáticas tienen alguna relación con la naturaleza (Ent. 48), aunque esta relación

no es muy estrecha (Ent. 18a)

(Ent. 47-48) *Quizás no en el principio pero ya en el proceso, todas las teorías tienen su parte concreta, o real, de decir: "esto lo veo". ¿En el mundo físico?*
(48) -En el mundo físico. Yo pienso que sí.

Los conceptos matemáticos tienen utilidad para resolver problemas de la propia matemática (Ent. 30a, 31; Programación de unidad), del mundo científico y cultural (Ent. 34)

(Ent. 31) *Bueno, yo pienso que deben de servir para algo más que para dar. No, es que lees cosas, y yo tenía mi concepción de los números complejos: pues sí, eran otro tipo de números que servían para ampliar los reales, y llegas y empiezas a leer cosas de gente que piensa que no sirve para nada. Que son una invención, que son una notación. No sé. Nosotros hemos dado análisis complejo y aparte para resolver ecuaciones, pues sirven para resolver otro tipo de cosas. Las integrales. El año pasado dimos integrales en áreas y cosas así.*

(Ent. 34) *(Para qué sirve la estadística) Pues simplemente para saber interpretar*
una noticia del periódico, o por ejemplo para saber,.. O incluso al ir a comprar a
una...

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

El aprendizaje exige una actuación personal de quien aprende, aunque el alumno puede comprender lo que le plantea el profesor (Ent. 12)

> (Ent. 12) -*Pero yo creo que lo que se le va a quedar a los alumnos es su experiencia. ¡Hombre!, no quitando importancia ni a los conceptos ni a todo lo que es el fundamento. Pero hasta que ellos descubran, aunque sea que se han equivocado, no. Lo que es estudiar, es igual que en la lengua y en la historia. A lo mejor puedes tener capacidad de, incluso de aprender a comprender problemas en un momento determinado bajo una visión del profesor, ya conociéndolos, sabiendo el tipo de problema, la forma. Aprender, lo que es aprender, yo creo que aprende uno...*

El alumno que ha aprendido un concepto, sabe identificarlo e interpreta los problemas ligados al concepto (Ent. 14)

> (Ent. 14) *(¿Qué es aprender?) -Lo primero es saber que es, y luego saber trabajar con eso, y saber interpretar resultados. Bueno, es ese caso no se.. Aparte de trabajar más comprender el sentido de la aplicación en distintos...*

Para llegar a ese aprendizaje debe disponer de una base de conocimientos. Esa base es la

que permite comprender conceptos abstractos anteriores, y ser capaz de aplicarlos a cosas concretas (Ent. 18b)

> (Ent. 18b) *Tampoco podemos pretender que los alumnos se queden con saber cosas que solamente se pueden tocar, porque las matemáticas tampoco son. Entonces yo creo que la base tiene que ser en parte de una cosa y en parte de otra. En parte tienen que tener capacidad para abstraer una serie de conocimientos y en otras, capacidad de trabajar con cosas concretas.*

Un alumno ha comprendido un concepto si sabe utilizarlo para interpretar problemas relacionados con ese concepto (Ent. 76)

La enseñanza tiene como fin el que el alumno domine una serie de conceptos (Pro. Objetivos). Enseñar es transmitir (Pro. Método)

Para enseñar, el profesor comienza por motivar a los alumnos, mediante situaciones que

den sentido matemático (Pro.), o escolar (Ent. 36) a los conceptos, y que haga que los alumnos se

interesen por la resolución de estas situaciones (Com. 37 y 38).

(Ent. 36) -*Si yo me refería a la motivación que un individuo puede tener. Hombre, a lo* *mejor ya una persona, si es muy buen profesor, si tiene buen.... Si engancha bien, quizá pueda. Pero yo me refería a la motivación que el propio alumno tiene ante una asignatura. Como es este caso. ¡Hombre!, que siempre hay el buen profesor y el menos bueno que a lo mejor no sabe vender el producto. Pero es que yo pienso que ante los números complejos que la única motivación puede ser la de que yo se que son necesarios. A lo mejor, quizás simplemente a nivel de bachillerato, porque en tercero de BUP, se va a dar quizás un poco ¿no?, y entonces es necesario, en el caso de primero. Pues entonces, pues sí, pues yo tengo que ingeniármelas de manera que intenten que.. ellos lo entiendan, y comprendan y eso. Pero yo pienso que hay otras cosas, aparte de los números reales que pueden ser más reales para esa edad. Más que nada, por.. O sea, yo no considero, a mi ningún conocimiento me parece innecesario.* (Com. 36-38) *Creo que la presentación de los conceptos y propiedades por parte del profesor a los alumnos es importante en cuanto que han de despertar el interés de los alumnos a la resolución de problemas y ayudarlos a ella.*

Estas situaciones pueden estar inspiradas en el proceso histórico, siempre que este

proceso facilite su enseñanza (Ent. 30b), o ser situaciones intuitivas que luego permitan abstraer

los conceptos a los alumnos (Ent. 58)

(Ent. 30b) *O sea yo pienso que esto del proceso histórico, lo que pasa es que en realidad, a nivel de bachillerato tampoco puedes introducirlos de otra manera; y de hecho, el proceso histórico, pues si es así.. no se, creo que es una coincidencia. A lo mejor hay otros conceptos que tienen un origen más enrevesado, y a lo mejor, pues, en el transcurso, pues aparecen aplicaciones más tangibles que puedan comprender. Lo que ocurre es que en este caso concreto..* (Ent. 58) *-Pues yo pienso que a un niño que está en un Instituto, en este caso, pues yo pienso que lo mejor es, antes de presentarle los conceptos propiamente dichos, pues hacer algún tipo de motivación, como esto de las situaciones problema que hemos estado haciendo. No sé, a lo mejor luego en la práctica lo hago y me convenzo de que no, pero como todavía no he tenido oportunidad, porque yo pienso que se motiva más viendo, que.. Es todavía nosotros y necesitamos muchas veces ver algunas cosas.. Yo pienso que lo mejor es, poner algún ejemplo, que quizás no sea el origen exacto del concepto o de lo que se quiera explicar. Pero algo material, para que sean capaces luego de abstraer.*

El profesor debe provocar que los alumnos trabajen y participen, pero para ello tiene que

asegurarse de que los alumnos dispongan de una base de conocimientos que les permitan afrontar

las tareas y comprender los problemas (Vid, 28, 29 y 33)

(Vid, 28-29) *Como inconveniente (del segundo método observado) podría considerarse, el que los alumnos manejan algo que no saben qué es, lo cual puede llevarlos a confusión; falta una base matemática.*
(vid. 33) *la falta de dicha explicación (en el tercer método observado), lleva a los*
alumnos a una comprensión errónea del planteamiento del problema, por lo que
queda la discusión centrada en la posibilidad de forzar situaciones.

Más importante que la transmisión es que los alumnos descubran a partir de esa base (Com. 34, 35), que los alumnos experimenten (Ent. 70, 71) e investiguen (Vid. 20, 23 y 30), y que debatan sobre sus descubrimientos (Com. 39-41, Vid. 24). Esto puede conseguirse con juegos (Azar, 7-8), ya que en ellos se hacen más intuitivos los conceptos. Finalmente el profesor

explica para formalizar (Vid. 25, 34, 37)

(Com. 34-35) *pero más importante que la mera transmisión de conocimientos es el descubrimientos de ellos, a partir de una base obtenida con anterioridad.*

(Vid. 20) *El profesor motiva al alumno haciéndole ver la utilidad de la clase; despierta su interés sobre el tema y lo incita a investigar.*

(Com. 39-41) *En cuanto al debate de las ideas en clase, es bueno, en cuanto que consiste en compartir tanto dudas como conocimientos.*
(Azar, 7-8) *El juego y la experimentación tiene un papel muy importante en el aprendizaje de las matemáticas, porque son una manera de materializar de algún modo, lo abstracto. Es una forma de poder ver y tocar lo que intentamos imaginar.*

No se debe separar la teoría de la práctica (Ent. 22, 83; Vid. 13, 18 y 38), aunque para resolver los problemas, los alumnos deben disponer de una base teórica que evite que manejen cosas que no saben lo que son. (Ent. 15; Vid. 28, 29, 33, 46 y 47).

(Ent. 83) *Y luego claro, no totalmente al margen de la teoría, porque de hecho me parece que es absurdo, un poco. Lo que pasa es que eso de que una persona que se sabe muy bien la teoría y no es capaz de resolver problemas, no se, es una formación un poco deficiente, vamos, pienso yo. Porque ¿la teoría por la teoría?,*
no se. Si sabes, no se quizás sea mucha abstracción, pero si tu sabes mucho de un

tema y luego no eres capaz de aplicarlo a nada, no sé yo hasta que punto.
(Vid. 38) *La elección de uno de los tres métodos es difícil debido a que considero que son importantes tanto las clases teóricos como las prácticas*

(Ent. 15) *Entonces lo que yo quería decir era, .. pienso que para ese tipo de clases los alumnos han de tener una preparación porque quizá llegan, así, de pronto. Pienso que los alumnos han tenido que trabajar... ¡Hombre! siempre hay que partir de algún sitio, no desde cero. Pero así, llegar y empezar a trabajar con la calculadora. A lo mejor llega un momento que piensan que ese concepto, .., es.. , es concepto como secundario de la aplicación. Que se puedan perder en ...., al estar manejando una cosa que no saben lo que es, pues a lo mejor luego perderse y quedarse un poco... Aunque lo más importante desde luego es la práctica.*

Además, la resolución de problemas le permite al estudiante contrastar el nivel de sus conocimientos (Com. 42)

(Com. 42) *De todo esto creo que el trabajo de los alumnos es lo principal, para que ellos se den cuenta de lo que en realidad conocen.*

Las situaciones que se plantean a los alumnos deben ser problemas, no ejercicios (Ent. 78, 81 y 83), caracterizados por tener un enunciado complicado y por no aparecer como aplicación directa de un concepto.

(Ent. 78) -*No, de un problema. O sea un problema con un enunciado más o menos complicado. Por eso digo que no es lo mismo que ponga "tres más cuatro igual...", eso yo pienso que es un ejercicio. Entonces, yo me refería al problema, en el que haya un enunciado, y que no viene exactamente después de haber definido una operación, por ejemplo.*
(Ent. 83) -*Sí como a la práctica en resolver problemas, no ejercicios ni la aplicación totalmente clara de. Bueno está claro que en cualquier problema se va a aplicar un concepto, pero no, que no sea exclusivamente, bueno hemos estudiado, no se, es que no se me ocurre ahora mismo, pero un concepto, entonces aplicación exacta de un concepto que se ha estudiado, sino resolución de problemas, no ejercicios sino problemas.*

Gracias a estos problemas los alumnos pueden saber de donde vienen los conceptos (Ent. 75)

(Ent. 75) *-No, que entiendan el problema que surge, por ejemplo en el de los complejos era una ecuación. O sea entender porqué surgen y, a lo mejor no saben darle.., quizá no sepan darle solución, o algún otro tipo de problema, pero que entiendan el problema que se plantea, y bueno quizás puedan. Pero yo pienso que el alumno sea capaz a priori de resolver esa situación, sino simplemente que se de cuenta de que esa situación existe.*

Eva no comprende porque determinados conceptos, como los números complejos, aparecen en el curriculum de las matemáticas escolares, ya que no cree que los alumnos lleguen

a comprenderlos (Ent. 31a, 51)

(Ent. 51) *Sobre todo cuando se plantea tantas veces lo que "en la ley se establece que hay que estudiar esto y esto", pero en realidad luego, no se, cada uno tiene su punto de vista quizás, ¿no? sobre.. Y dices, bueno. Yo me he preguntado quien valida lo que hay que estudiar y lo que no hay que estudiar. Pero no tengo ninguna respuesta.*

5.4.1.2 **Informe indirecto de Eva, basado en el resumen del Comentario de textos antes de las prácticas**

(a) Conocimiento matemático

La postura *realista* sobre el conocimiento matemático parte de la separación explícita entre los objetos de conocimiento y el sujeto; los objetos matemáticos están dados (Com. 1 a 6), con lo que el sujeto los descubre (Com. 7)

Para los *constructivistas*, el conocimiento está ligado al sujeto (Com. 8 y 9). Alcanzar estos conocimientos es alterar las estructuras intelectuales, mediante la interacción con los objetos, partiendo de estructuras previas (Com. 10-14)

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas La enseñanza *realista* privilegia el contenido a enseñar, planteando un discurso que el alumno debe decodificar (Com. 18, 20, 22, 27) (Com. 20-22) *Según el Realismo matemático, el profesor ha de "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado, y el estudiante ha de decodificarlo, no puede modificar la estructura del discurso.*

En este discurso se destaca la formalización de los conceptos (Com. 23-25)

La enseñanza *constructivista* se preocupa por la actividad del sujeto. El profesor debe provocar el cambio de las estructuras intelectuales del alumno mediante situaciones adecuadas (Com. 19, 26-28), y después coordina la negociación de significados entre sujetos (Com. 29). Esto exige mayor creatividad (Com. 30-31)

> (Com. 26-28) *Desde el punto de vista del Constructivismo, el educador ha de diseñar y presentar situaciones, que, apelando a las estructuras anteriores de que el alumno dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él.*
> (Com. 29) *El siguiente paso consiste en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos.*
> (Com. 30-31) *La didáctica no se limita a tomar conocimiento de un texto y exponerlo en el aula. Exige del educador una constante creatividad.*

5.4.1.3 **Síntesis de los informes de Eva, antes de las prácticas:**

Observaciones Eva manifiesta encontrarse ante diversos dilemas sobre la naturaleza del conocimiento matemático, que no tiene resueltos.

Es sensible a la existencia de posturas epistemológicas que se diferencian en la distancia y autonomía que conceden al objeto de enseñanza en relación al sujeto cognoscente. Eva resalta los aspectos *validativos* de la postura *realista*, al considerar que existe cierta relación entre el conocimiento matemático y la naturaleza, y los aspectos *psicológicos* de la postura *constructivista*, al abogar por una actividad del sujeto para interactuar con los objetos de conocimiento.

Eva se sitúa en una posición que se aleja gnoseológicamente del *realismo*, ya que los objetos matemáticos no se descubren, pero tampoco se inventan (Cañón, 1993, cuestión 1). Sin embargo subyace en las creencias de Eva que la naturaleza está detrás del conocimiento matemático, aunque la matemática tiene un sistema formal propio que permite llegar a resultados sin esperar a la experimentación, que sería larga pero llevaría al mismo resultado.

Reconoce explícitamente que la forma de concebir el conocimiento repercute en la forma de enseñar, pese a que la enseñanza también es transmisión. De esta forma aparecen distintos grados de protagonismo concedido al alumno, para descubrir unos conocimientos que ya existen. Con ello aboga por una enseñanza activa mediante un proceso de experimentación que está trucado por el profesor, ya que el resultado de este experimento debe ser el descubrimiento de unos conocimientos establecidos a lo largo de la historia.

En resumen, el conocimiento matemático ha surgido para resolver problemas de las propias matemáticas o de las ciencias positivas. Una vez aceptado por las generaciones siguientes, este conocimiento debe transmitirse a los alumnos. Pero el aprendizaje es una tarea personal, que debe realizar el alumno. La tarea del profesor es facilitar ese aprendizaje. Para ello deberá preparar unas clases basadas en la experimentación e investigación, mediante situaciones diseñadas para que el alumno llegue a estos conceptos.

Con ello, Eva capta una serie de dialécticas que le alejan de una postura rígida. Así, concibe el aprendizaje como algo individual, pero que necesita una fase de debate (Brousseau, 1983, 1986, Robert y Robinet, 1989). En la dialéctica aristotelismo-platonismo (Dossey, 1992; Peterson y cols., 1987; Romberg, 1991) acepta que saber es tanto identificar los conceptos, como aplicarlos, y que la enseñanza es transmitir una base, para que después los alumnos puedan afrontar problemas y resolverlos ellos. Para ello aboga porque el profesor diseñe situaciones que motiven a los alumnos y les haga afrontar problemas de los que emergerán los objetos. Esta secuencia de situaciones puede basarse en el proceso histórico que ha sufrido el objeto, pero no es necesario (Cañón, 1993, cuestión 7)

5.4.2 **Informes de los trabajos realizados por Eva después de las prácticas**.

Eva ha realizado todos los trabajos correspondientes a este período, por lo que todos han sido tenidos en cuenta en la elaboración de su informe. Incluso hemos considerado el trabajo en equipo dedicado a describir los modelos de enseñanza que ha observado durante las prácticas, ya que en la Memoria de prácticas aparecen referencias explícitas a este trabajo.

De la Memoria de Prácticas hemos destacado la programación de una clase que Eva impartió, así como las conclusiones. En esta Memoria aparecen resúmenes de las coordenadas legales y materiales del instituto visitado. Incluye una descripción de los modelos de enseñanza observados, y las clases que considera mejores, empleando como criterio de excelencia, sobre todo, la receptividad del alumno. El diario de observación de clases no es muy extenso, y está mecanografiado. En el anexo de la Memoria incluye exámenes y relaciones de ejercicios.

El Comentario de Textos es amplio, aunque más breve que el realizado antes de las prácticas. Todo el comentario está redactado. El resumen se organiza en torno a las posturas *realista* y *constructivista*, y siguiendo la estructura del artículo, es decir, las repercusiones de ambas corriente en la enseñanza están tratadas al hablar de cada una de ellas. Incluso reproduce la forma del artículo en la extensión que da a cada parte, más al *realismo*, y menos al *constructivismo*.

De los términos destacados del texto, Eva recoge en su resumen la oposición pasivo/ activo, pero no aparece la diferencia profesor/ educador, y emplea sólo el término *profesor* al hablar de ambas corrientes, por lo tanto en esta caso la posible oposición de términos se ha neutralizado. Tampoco recoge el término creatividad.

En la segunda parte del comentario, da prioridad al objeto de aprendizaje sobre el de enseñanza, que aparece en segundo lugar. Esto supone una reelaboración personal, pues representa un cambio respecto al orden en el que aparecen ambos términos en el artículo y en las consignas. La reestructuración se refuerza con dos aspectos más. En primer lugar la tematización del verbo de pensamiento "considero", que se repite también cuando comienza a hablar del objeto de aprendizaje. En segundo lugar podemos leer una idea que no está enunciada en el texto comentado: la importancia de la sabiduría matemática heredada. La valoración de las actividades de enseñanza la expresa mediante una reorganización particular, en la que considera complementarios la *resolución de problemas por los alumnos*, y *el debate de ideas en clase,* y los comenta conjuntamente. La *presentación del profesor* apoya las otras dos actividades de enseñanza, que se justifica apelando al conocimiento heredado, idea que ya vimos que exponía en el apartado anterior. Como vemos, Eva se dedica especialmente a los apartados valorativos, reduciendo los resúmenes al mínimo. Estos apartados valorativos aparecen precedidos de una alusión a la subjetividad de las afirmaciones: *En mi opinión,* por ejemplo.

Hace una exposición no demasiado crítica de las etapas de la asignatura Prácticas de Enseñanza, en el trabajo de valoración de la misma. En este trabajo final aparecen algunas de sus concepciones sobre la naturaleza del conocimiento didáctico y el contenido de los cursos de formación de profesores.

5.4.2.1 **Informe directo de Eva después de las prácticas**

(a) Conocimiento matemático

Los conocimientos matemáticos se han ido generando a partir del trabajo de los matemáticos a lo largo de la historia, con lo que han dado lugar a un cuerpo de conceptos (Com. 27). Estos conceptos deben ser construidos por los alumnos en el aprendizaje (Com. 20)

> (Com, 25-27) *Considero que también es la matemática objeto de enseñanza, debido a que es imposible que los alumnos puedan construir todos los conocimientos matemáticos, cosa que por otro lado sería absurda, pues no serviría para nada el trabajo de muchos matemáticos a lo largo de la historia.*
> (Com. 20-22) .*Considero que la matemática es, principalmente objeto de aprendizaje. Los alumnos han de construir, en la medida de lo posible, el conocimiento matemático. Esta es la única forma de que el aprendizaje sea significativo para el alumno.*

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas El aprendizaje es un proceso individual, interno al alumno (Com. 23). Pero debe haber una fase de enseñanza, ya que es imposible que el alumno construya todo el conocimiento (Com. 25-26 y 36), y una fase colectiva de discusión, en la que se compartan trabajos y se contrasten logros (Com. 32-34)

> (Com. 35-36) *Apoyando estos puntos se encuentra la presentación de los conceptos y propiedades que ha de complementar el trabajo del alumno, con lo conocido gracias al trabajo de muchas personas a lo largo de la historia.*
> (Com. 32-34) *Lo segundo porque en matemáticas son necesarias la discusión y unificación de criterios; es de esta forma como el alumno comparte su trabajo y puede ser capaz de decidir si su postura es o no adecuada.*

Para aprender, el alumno debe construir el conocimiento (Com. 21), resolviendo problemas (Com. 28-30)

(Com. 28-30) . *Según mi criterio, me parece que el papel principal en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas lo juega lo que tiene que ver con el trabajo del alumno: las actividades de resolución de problemas por el alumno y el debate de las ideas en clase. Lo primero porque la manera de que el alumno se implique en el proceso y sea capaz de construir su propio conocimiento es mediante la resolución de problemas*

Habría que evitar la valoración del aprendizaje en los exámenes (Mem. 22-25)

*(*Mem. 22-25*) Uno de los aspectos que necesitan un nuevo planteamiento es la evaluación. Es necesario que deje de considerarse sinónimo de examen. Además, en cuanto a los exámenes, debemos intentar evitar todas las posibles incoherencias y contradicciones que a veces aparecen en los mismos. De igual modo considero que, ya que la situación de hacer un examen es ficticia, debemos facilitar a los alumnos las mejores condiciones posibles para realizar los exámenes.*

La enseñanza es un proceso social, que debe implicar a toda la comunidad educativa y tomar en consideración el máximo de factores que influyen sobre ella (Mem. 19-21)

(Mem. 19-21) *4. La enseñanza es un proceso que se realiza en los Centros, pero*
que necesita de la estrecha colaboración de los padres o tutores de los alumnos.

1. *5. Es necesario hacer la programación de las unidades didácticas a impartir, aún cuando nuestra experiencia profesional sea larga, ya que cuando menos, es necesario una adaptación al grupo en cuestión.*
2. *6. La edad de los alumnos con los que vamos a tratar en nuestro futuro profesional es un factor que hay que añadir a las circunstancias personales de cada uno y hay que tener en cuenta en la enseñanza.*

Es necesario programar la enseñanza (Mem. 20) para organizar la exposición de una manera clara, sin embargo Eva justifica no haber realizado programación de alguna de las clases

impartidas durante las prácticas debido a que sabía lo que iba a hacer en clase, o la clase se iba a dedicar a resolver ejercicios (Mem. 1).

El orden de aparición de los contenidos de las programaciones realizadas por Eva está determinado por la estructura lógica de los conocimientos matemáticos (Mem. 3-6 y 13)

(Mem. 3-6) *Objetivos: Se pretende que los alumnos:*
-conozcan la utilidad de la Regla de L'Hopital

-sepan aplicar la Regla de L'Hopital
-verifiquen las hipótesis de los teoremas antes de aplicarlos Contenidos. Conceptos y propiedades: - Regla de L'Hopital Procedimiento:- Enunciado del teorema, - Demostración del teorema, - Ejercicios. Requisitos previos: -Conocimientos y destrezas sobre derivadas y límites; - Conocimiento del teorema de Cauchy

En este diseño se ha tenido en cuenta los posibles errores del alumno (Mem. 8-10)

(Mem. 8-10) *A continuación enunciaré el teorema, haciendo especial hincapié en que la tesis es que el límite del cociente de dos funciones en un punto es igual al límite del cociente de las derivadas de las dos funciones en dicho punto y no al límite de la derivada del cociente en el punto. Antes de pasar a la demostración del teorema, insistiré en la necesidad de la verificación de las hipótesis de un teorema para concluir la tesis. Seguidamente demostraré el teorema. Volveré a insistir en la necesidad e verificar las hipótesis de los teoremas antes de concluir la tesis*

Los objetivos son externos y utilitarios dentro de las matemáticas (Mem. 3). El método de enseñanza es expositivo (Mem. 8-10), separando la teoría y la práctica (Mem. 11-12)

(Mem. 11-12) *y una vez hecho esto, para que los alumnos comiencen a trabajar con esta regla, propondré los ejercicios de la página 273 del libro de texto. Una vez que hayan trabajado estos ejercicios, propondré los de las páginas 279 y 280 del libro de texto.*

Sin embargo, Eva considera que la enseñanza debe contemplar la construcción del conocimiento por el alumno, mediante actividades problema que sean significativas y motiven (Com. 24-31).

(Com. 23-24) *Dicha construcción es algo interno al alumno que el profesor ha de estimular, fomentar y potenciar.*
(Com. 29-31) *Lo primero porque la manera de que el alumno se implique en el proceso y sea capaz de construir su propio conocimiento es mediante la resolución de problemas que el profesor ha de procurar que sean cercanos y lo motiven.*

Debe haber después un debate de ideas y, finalmente, para complementar el trabajo de los alumnos, debe haber una presentación de conceptos y propiedades por el profesor (Com. 35)

(Com. 32-36) *Lo segundo porque en matemáticas son necesarias la discusión y unificación de criterios; es de esta forma como el alumno comparte su trabajo* *y puede ser capaz de decidir si su postura es o no adecuada. Apoyando estos puntos se encuentra la presentación de los conceptos y propiedades que ha de complementar el trabajo del alumno, con lo conocido gracias al trabajo de muchas personas a lo largo de la historia.*

En relación con el conocimiento didáctico, Eva ha percibido los siguientes elementos que

diferencian los métodos de enseñanza empleados por los profesores que ha observado durante las

prácticas: quién resuelve los ejemplos (Pra. 1); grado en que siguen el libro de texto o añaden

materiales propios (Pra. 4-8); si explican todo o dejan que los alumnos descubran algunos

conceptos (Pra. 9-10); la posición física que ocupa el profesor durante la clase (Pra. 11-12); si el

profesor inicia la interacción con el alumno o espera que le pregunten (Pra. 13-14); si sacan a los

alumnos a la pizarra (Pra. 15-16); si proponen actividades a alumnos aventajados o retrasados

(Pra. 18)

(Pra. 4-8) *A solamente utiliza el libro de texto para seguir alguna explicación, pero nunca para ejercicios; prepara relaciones. C y B siguen el libro al pie de la*
letra para la teoría y los "problemas". B además, prepara relaciones de repaso
al acabar cada tema.
(Pra. 11-12) *A pasa la mayor parte del tiempo moviéndose por el aula; casi nunca está en su mesa o en la pizarra. B también se mueve bastante aunque pasa*
más tiempo en la pizarra que A. C casi siempre está en la pizarra y si no, apenas
llega al fondo del aula.

Eva resalta que los profesores emplean ejercicios, no problemas (Pra. 17) pero tampoco

ella ha previsto emplear problemas en la clase programada (Mem. 11-12)

(Pra. 17) *Un punto común a los tres es que hacen y proponen ejercicios, no problemas*

Para ser profesor hay que ver la enseñanza desde la perspectiva del profesor (Mem.

28) y a ello colaboran las prácticas de enseñanza.

> (Mem. 26-28) *8. El período de prácticas, aunque corto, es muy útil ya que constituye nuestro primer contacto con nuestro futuro profesional. Debido a este período nos planteamos cuestiones que antes no se nos ocurrían, ya que veíamos la enseñanza desde la perspectiva de alumnos. Es por tanto una buena ocasión para reflexionar sobre ellas porque aún cuando estamos más cerca de ser profesores, todavía no hemos olvidado el papel de alumnos.*

Al conocimiento didáctico (sobre cómo enseñar, o cómo ser/actuar profesor) se accede preferentemente mediante la práctica (Mem. 26), con lo que las prácticas de enseñanza deberían durar más de un mes (Opi. 5) Para hacer estas prácticas sería conveniente que cada estudiante fuera tutorado por un profesor (Opi. 6-7). Es conveniente prepararse para la fase de prácticas y reflexionar después de haberlas realizado (Opi. 1-3)

> (Opi. 1-3) *En esta primera etapa (preparación de las prácticas) considero que tuvimos el primer contacto con lo que en realidad debíamos enfrentarnos. Creo que la importancia de esta fase la hemos descubierto al corregir, por ejemplo, la programación que en ese momento hicimos.*
> *- Después de las prácticas. Creo que esta etapa es bastante importante porque supone una reflexión sobre la etapa anterior y es quizás en ese momento en el que más se aprecia el resultado de las prácticas*

Eva considera que ha sido fructífero para ella el preparar trabajos específicos en el marco de la asignatura Prácticas de Enseñanza, aunque no está segura de que haya sido provechoso para sus compañeros que la han escuchado durante la exposición (Opi. 4)

El conocimiento didáctico no va a dar soluciones, sino que incita a la reflexión (Opi. 8), ya que el proceso de enseñanza-aprendizaje es muy complejo, y todos los modelos de enseñanza tienen sus ventajas (Mem. 14-15 y 17)

(Opi. 8) *Un fallo de los alumnos ante esta asignatura es que, quizás esperamos que se nos resuelvan algunas cuestiones analizadas en clase, con las que no se* *pretende más que una reflexión.*

(Mem. 14-15) *El proceso de enseñanza-aprendizaje es muy complejo y es*

imposible dar un método ideal para ello. Todos los modelos en enseñanza tienen

sus ventajas e inconvenientes

Es el profesor quien tiene que decidir racionalmente el modelo adecuado a sus circunstancias (Mem. 17)

Los estudiantes toman conciencia de lo que han aprendido cuando contrastan los trabajos realizados antes y después de las prácticas (Opi. 2-3), y al reflexionar sobre lo realizado durante las prácticas.

5.4.2.2 Informe indirecto de Eva después de las prácticas

(a) Conocimiento matemático

Para la postura *realista*, los objetos de la matemática dependen del sujeto que conoce (Com. 2), que pueden estar en la naturaleza o en el mundo de las ideas (Com. 3-4). El matemático las descubre (Com. 5), las formaliza (Com. 1) y puede enseñarlas (Com. 7-8).

(Com. 1-8) . *Basado en el Formalismo, el Realismo matemático considera que la existencia de los objetos de la matemática y sus relaciones no dependen del sujeto que conoce. Defendiendo esta postura se encuentra Platón y Aristóteles. Sin embargo, mientras que para Platón los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos se encuentran en el mundo de las ideas, independientemente del sujeto cognoscente, Aristóteles las concibe en la Naturaleza material. Según esta corriente, la matemática es algo externo al hombre que éste ha de descubrir. Una vez descubiertos los resultados matemáticos, hay que justificarlos dentro de una estructura formal. De esta manera, el individuo que posee el conocimiento puede ofrecerlo a los que no lo posee. Así la matemática se convierte en objeto de enseñanza.*

La interpretación *constructivista* considera que el conocimiento está contextualizado, con lo que depende del sujeto (Com. 13-14)

(Com. 13-14) *El Constructivismo defiende la contextualización del conocimiento*

y la dependencia de los objetos y del sujeto que conoce.

(b) Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La enseñanza *realista* parte del conocimiento externo, el profesor que es quien lo posee, escoge un discurso para transmitirlo (Com. 9-11), el alumno se limita a aceptar y asimilar el conocimiento transmitido (Com. 10-12)

Como la postura *constructivista* parte de que las matemáticas son objeto de aprendizaje (Com. 15), la enseñanza se concibe como un proceso que facilite que el alumno, actuando ante situaciones diseñadas por el profesor, acomode nuevos significados (Com. 16-19)

5.4.2.3 **Síntesis de los informes de Eva después de las prácticas. Observaciones**

Eva ha percibido, en el fragmento utilizado para el comentario de texto, la existencia de dos posibles formas de ver el conocimiento matemático, la *realista* y la *constructivista*. Incluso llega a identificar la forma en cada postura epistemológica repercute en la manera de considerar la enseñanza. Esto ha hecho que seleccione las unidades que muestran una implicación (*realismo*: conocimiento externo a sujeto, lo descubre, lo justifica y puede enseñarlo mediante su transmisión inequívoca; *constructivismo*: conocimiento ligado al sujeto, lo construye el sujeto, luego es el alumno quien debe construirlo, la enseñanza es la facilitación para que el alumno construya el conocimiento)

Cuando se posiciona en alguna de las dos posturas intenta hacerlo en la que aparentemente se ha valorado más positivamente en la clase de prácticas, el *constructivismo*, pero no puede desechar el aceptar la existencia de un conocimiento externo.

Rechaza la visión *realista* en lo que significa no tomar en consideración al sujeto que accede al conocimiento, especialmente cuando esta visión se extiende a la enseñanza. Así llega a rechazar la actitud pasiva del alumno en la enseñanza-transmisión, pero es consciente de que hay algo externo que transmitir.

Esta transmisión debe implicar al alumno, y para ello toma Eva en consideración muchas variables que intervienen en el proceso de enseñanza. Con ello la enseñanza debe tender a que el alumno, en una segunda fase, construya el conocimiento por si mismo.

Asigna al profesor el papel de facilitador del aprendizaje del alumno, ya que el aprendizaje es personal. Para afrontar esta tarea, el profesor debe preparar cuidadosamente las clases, teniendo en cuenta los alumnos a los que va dirigida.

Sin embargo, el modelo de programación y de clase que ha impartido durante las prácticas parte de la lógica de los conceptos matemáticos, y no se alude a las características de los profesores ni a la construcción del conocimiento por el alumno. Puede que Eva se sienta presionada por las directrices del profesor, pero no aparece ninguna reflexión que la ponga en tela de juicio.

Para Eva, es fundamental la práctica para la preparación del profesor, pero es más aprovechable si está planificada y tutorada convenientemente. De esta forma se podrá reflexionar sobre el valor de todos los métodos de enseñanza, entre los que Eva diferencia por muchos aspectos.

5.4.3. **Análisis de las diferencias entre los dos perfiles de Eva: antes y después de las prácticas**

La entrevista es el trabajo que encierra el máximo de información en todo el curso. En el informe de después de las prácticas ha pesado especialmente el comentario de textos.

El contraste entre los comentarios realizados nos muestra que el segundo está más meditado y mejor estructurado, presentando frases más elaboradas. Se aprecia un cambio en la estructura del resumen, que pasa de estructurarlo de acuerdo con las consignas (3 partes) a hacerlo de acuerdo con el texto (4 partes). También la parte valorativa del comentario es más completa en el realizado al final de curso. Además, en esa segunda ocasión considera complementarias las actividades de enseñanza centradas en los alumnos (resolución de problemas y debate), mientras que en el comentario realizado antes de las prácticas presentaba como complementarias las actividades de explicación del profesor y la resolución de problemas. En resumen, el segundo comentario presenta una reelaboración más personal del texto presentado.

Eva se manifiesta como una estudiante con posiciones dialécticas, en las que aparecen componentes de los continuos detectados en el capítulo 3 que pertenecen a diferentes polos. Para ella, el conocimiento encierra descubrimiento y creación; la enseñanza es transmisión y facilitación; el aprendizaje es individual, pero tiene una fase colectiva; en su formación como profesora tendrá gran peso la actuación práctica como profesora, pero valora la reflexión realizada con apoyo externo.

La postura de Eva no parece haber cambiado a lo largo del curso de manera notable, ya que no se aprecian diferencias notables entre los perfiles trazados en los dos momentos. Ha aparecido una información más rica en el período inicial, ya que la entrevista barrió un amplio campo de aspectos. Gracias a ello se detecta la posición de Eva respecto a la forma de acceso al conocimiento matemático, mediante un proceso intermedio entre la invención y el descubrimiento (Cañón, 1993, cuestión 1). Los trabajos posteriores se limitan a añadir la importancia del proceso histórico de desarrollo del conocimiento para constituir el cuerpo de conceptos matemáticos.

Aparentemente no hay cambios significativos en los informes obtenidos de manera indirecta, mediante el resumen de los comentarios de textos. En los dos momentos contrastados Eva manifiesta sensibilidad para diferenciar entre una postura que considera que el conocimiento es externo al sujeto, frente a otra que enfatiza la contextualización del conocimiento y su relación con el sujeto. Parece proyectar estas posturas en dos formas distintas de enseñanza: en la primera hay protagonismo del profesor, en la segunda lo hay del alumno. Sin embargo, en el comentario inicial parece hacer compatible una enseñanza activa con una explicación previa del profesor, mientras que en el final asocia como más próximas las actividades centradas en el alumno.

Para Eva, el aprendizaje es personal, pero debe ser facilitado por la actuación del profesor, mediante la selección y presentación de situaciones problema que le permitan al alumno la construcción del conocimiento.

En el primer comentario (Pre-test) ha prestado más atención a la realización del resumen, estableciendo los procesos de interacción del sujeto con el objeto, que se dan para la construcción del conocimiento. En el segundo comentario (Post-test) se ha preocupado más de emitir una valoración de las actividades de enseñanza. Esta valoración es más personal y más argumentada en el post-test. Se diría que Eva se siente más suelta al responder al post-test, menos sujeta a las afirmaciones del texto y mas segura de la validez de sus apreciaciones. En el post-test describe con más riqueza por qué los alumnos deben ser activos en la enseñanza. En el pre-test Eva ha argumentado la actividad del alumno a partir de la necesidad de que descubran el conocimiento y para que tomen conciencia de lo que *en* *realidad conocen*. En el post-test Eva justifica la importancia de la actividad del alumno en base a que el aprendizaje debe ser significativo, que el aprendizaje es interno al alumno y que, en matemáticas, es necesario compartir para decidir la corrección de la postura personal. Aunque en este post-test considera que hay conocimiento externo al alumno, repite que este conocimiento es fruto del *trabajo de muchos matemáticos a través de la historia*, con lo que no lo considera externo al sujeto (al sujeto investigador)

Se aprecia pues, una profundización en la consideración de que el conocimiento es contextual, pese a que ya en el pre-test destacaba esta característica como la diferenciadora de las dos posturas epistemológicas.

Eva aboga por el empleo de problemas en la enseñanza, matizando que dichos problemas no son ejercicios.

La Memoria de Prácticas suministra información de la forma en que Eva ha llevado a cabo su actuación como profesor en prácticas. Este testimonio muestra una discrepancia entre lo planteado como forma de enseñar y la manera práctica de hacerlo. Por ejemplo, Eva emplea ejercicios, no problemas, y pone en práctica un modelo expositivo de enseñanza, en el que los alumnos no construyen el conocimiento. Lo que resulta más curioso es que Eva no explicita esta incongruencia, con objeto de salvar la imagen que surge de las restantes afirmaciones.

En resumen, Eva es teóricamente sensible a que la forma de enseñar matemáticas está relacionada con la manera en que se concibe el conocimiento matemático. Este conocimiento matemático existe como cuerpo de conceptos, elaborado a través de la historia, en un proceso de invención y contraste con la naturaleza. Dado que el aprendizaje es personal, es preciso que el alumno construya el conocimiento mediante la resolución de problemas. Para ello el profesor debe preparar unas clases en las que se presenten situaciones que den sentido al aprendizaje y le hagan experimentar y construir el conocimiento al alumno. Pero esto se empaña por la actuación práctica de Eva, quien repite el modelo de clase expositiva.

Respecto al conocimiento matemático, Eva se sitúa en una etapa relativista contextual (Copes, 1982), ya que para la aceptación del conocimiento es necesario el debate entre los matemáticos a lo largo de la historia. Sin embargo, se sitúa en una etapa multiplicista en relación al conocimiento didáctico (Copes, 1982) al valorar el relativismo de la excelencia de todos los métodos de enseñanza. Esta postura puede explicar la discrepancia entre sus declaraciones teóricas sobre la enseñanza y la puesta en práctica de un método diferente.

5.5 **Conclusiones de los estudios de casos** Los estudios de casos nos han confirmado las escasas diferencias existentes entre los perfiles elaborados antes y después de las prácticas de enseñanza, lo que muestra la consistencia del sistema de creencias (Green, 1971). El efecto global sobre las concepciones y creencias de las tareas específicas realizadas en el curso de formación, tanto por la parte teórica de la asignatura *Prácticas de enseñanza* como por la realización de las prácticas en los institutos, ha sido mínimo.

Sin embargo, los estudios de casos nos han mostrado dos perfiles de estudiantes muy distintos en cuanto a concepciones y creencias. Las diferencias que se manifiestan en sensibilidad a los argumentos epistemológicos, detectan unas diferencias en la forma de concebir el conocimiento matemático. Mientras que Luis no se plantea otra posibilidad que un conocimiento matemático ajeno al sujeto, Eva contempla la coexistencia de formas diferentes de concebirlo.

Luis espera que se le transmita la caracterización del conocimiento, mientras que Eva se plantea dilemas y es consciente de que no siempre alcanza una solución. Así, Eva considera que la comunidad investigadora ha llegado al conocimiento matemático por un proceso dialéctico descubrimiento - invención, que no acaba de formular, mientras que Luis reconoce no habérselo planteado. De acuerdo con la caracterización que introducen los niveles de Perry (Perry, 1970, 1985, Copes, 1982), Luis se encuentra en una fase de autoridad externa, mientras que Eva se encuentra en una fase de integración de la autoridad, que le sitúa en diferentes niveles para el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico.

Aunque ambos estudiante abogan por una enseñanza en la que el alumno sea más activo, su caracterización y argumentación de este tipo de enseñanza tiene matices diferentes. Mientras que para Luis se basa en criterios de eficacia de carácter positivista, en Eva se fundamenta en coherencia con la necesidad de construir personalmente el conocimiento.

Por último, en su formación como profesores ambos enfatizan la importancia de la práctica docente y de reflexiones anteriores y posteriores. Pero el grado de sensibilidad respecto a las variables que distinguen los métodos de enseñanza es diferente. Con ello Eva se siente impresionada por procesos innovadores, aunque choquen con su experiencia discente. Luis permanece anclado en su forma de concebir el conocimiento, lo que le hace aspirar a ser un buen expositor, que consiga interesar a sus alumnos. La disposición a la innovación de Luis es mínima.

En la tabla 5.1 aparece una síntesis comparativa de las creencias más significativas de los estudiantes analizados: Luis y Eva.

Metodológicamente podemos extraer las siguientes conclusiones:

a) La entrevista ha sido el instrumento que ha suministrado más información directa, por lo que habría que haberla realizado también al final del curso para comparar con mayor detalle los informes directos.

b) El comentario se ha manifestado un instrumento útil para suministrar algunos indicadores de creencias no declaradas. En su ejecución e interpretación ha pesado el que los estudiante sólo lo hayan considerado una tarea escolar, y que haya interferido el grado de interés del estudiante al realizarlo. Sin embargo, los distintos indicadores detectados nos han permitido inferir matices sobre la forma en que los estudiantes conciben la argumentación presentada en el texto.

c) La realización de informes directos y de informes indirectos ha permitido una triangulación desde la cual se ha podido sacar una caracterización de concepciones y creencias de los estudiantes, analizados en profundidad. En los informes directos hemos detectado, fundamentalmente, concepciones y creencias declaradas; los informes indirectos nos han suministrado reacciones de los sujetos ante argumentaciones explícitas e implícitas, lo que nos ha permitido interpretar el sentido que los estudiantes asignan a algunos términos relacionados con las posturas epistemológicas y educativas.

d) Por último, las tablas obtenidas a partir de la Rejilla nos ha suministrado un mecanismo para sistematizar las observaciones obtenidas de cada uno de los trabajos analizados.

Tabla 5.1: Comparación de las creencias y concepciones de Luis y Eva

	Luis	**Eva**

Forma de concebir el conocimiento matemático	El conocimiento es externo al sujeto. No se ha planteado si es descubrimiento o invención, y no se posiciona en esta controversia.	Existe un cuerpo externo, generado por el trabajo de los matemáticos a través de la historia Es descubrimiento y creación.
Actitud ante el conocimiento	La autoridad externa debe transmitirle el conocimiento que necesitará para su desenvolvimiento profesional (dualístico, Copes, 1982)	Existe un conocimiento fruto de debate entre los matemáticos a lo largo de la historia (relativismo contextual). Ella tendrá que buscar su método de enseñanza (multiplicismo, Copes, 1982)
Caracterización de la enseñanza	Transmisión, haciendo que el alumno trabaje. Con ello logrará llegar al conocimiento externo	Transmisión para que el alumno disponga de una base que le permita construir su conocimiento
Proceso de formación como profesores	Formación teórica por expertos, y sobre todo, formación que adquirirá con la práctica profesional.	Formación con la práctica profesional. Los expertos ayudarán a que profesor reflexione, ya que no hay método mejor.
Expectativas como profesores	Ser un buen expositor. Lograr mantener el interés de los alumnos para aprender matemáticas. Conseguir una clase ordenada	Emplear problemas en lugar de ejercicios. Interesar a los alumnos para que construyan su propio aprendizaje

Conclusiones e implicaciones

Nuestra investigación afrontaba el estudio de las concepciones y creencias de los estudiantes. La vaguedad con que estos constructos *concepciones y creencias* se han definido en la literatura de investigación, nos ha llevado a describir un inventario de posibles concepciones y creencias sobre el conocimiento matemático, y sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Así, en la primera parte de esta tesis doctoral hemos sintetizado visiones epistemológicas y didácticas procedentes de diversas fuentes relacionadas con la educación matemática.

Con objeto de desglosar de un modo operativo distintas facetas del constructo concepciones y creencias, así como de presentar de manera ordenada las posturas epistemológicas y didácticas, hemos elaborado un instrumento, la Rejilla. El empleo de la Rejilla nos ha permitido describir, de manera sincrónica, un amplio abanico de posiciones y formas de concebir las matemáticas y su enseñanza y aprendizaje. Consideramos, por tanto, que este instrumento analítico constituye en sí mismo una aportación significativa en este campo de estudio.

Posteriormente, hemos analizado los trabajos elaborados por los estudiantes para profesor de matemáticas, durante su paso por la asignatura *Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos*. Entre estos trabajos, hemos utilizado especialmente el comentario de textos, como reactivo para detectar concepciones y creencias y contrastar la evolución de las mismas durante el curso. Analizando los resúmenes del texto comentado y situando sus contenidos en las categorías de la Rejilla, hemos podido establecer perfiles representativos de cómo los estudiantes contemplan las argumentaciones que en el texto se hacen sobre la repercusión que las posturas epistemológicas tienen en los modelos de enseñanza. Estos perfiles nos han dado una visión de las creencias y concepciones de los estudiantes sobre ambas posturas, epistemológicas y didácticas y de la relación entre las mismas.

Pero además, la Rejilla nos ha suministrado un método de comparar los resúmenes de los estudiantes en dos momentos diferentes dentro del curso, con lo que hemos podido estudiar su evolución.

Es decir, el proceso de investigación presentado ha comenzado con unos constructos de difícil manejo y ha ido estableciendo recursos para operativizar las observaciones y la sistematización de los análisis. Podemos, pues, concluir señalando el logro de uno de los objetivos de investigación, esto es, poner a punto recursos metodológicos para estudiar las concepciones y creencias de los estudiantes.

Gracias a esta operativización, estamos en condiciones de hacer un balance de los logros en relación a los objetivos explícitos de la investigación (capítulo 2, §2.6).

Respecto a los objetivos a) y b), formulados en la sección 2.6, podemos concluir que las situaciones didácticas diseñadas e implementadas durante el curso, y en particular el comentario de textos, se han revelado como recursos significativos para propiciar la reflexión metacognitiva de los futuros profesores.

En relación al objetivo c), hemos observado que los estudiantes han percibido el argumento epistemológico-didáctico del texto como una dialéctica entre formas de enseñanza. En esa dialéctica, los estudiantes se inclinan por una enseñanza más activa, que implique más al alumno, pero que se encargue de transmitirle un conocimiento matemático establecido.

El grupo de estudiantes se muestra más sensible a los argumentos epistemológicos del polo *realista* y a los argumentos psicológicos del polo *constructivista*. Sus creencias epistemológicas parten de la aceptación de un conocimiento matemático externo que es transmisible. Para aumentar la eficacia de la transmisión, la enseñanza debe tomar en consideración la forma en que el alumno llega a conocer, para lo cual debe motivarlo y favorecer que construya ese conocimiento de manera activa.

Los estudios de casos nos han permitido detectar rasgos diferenciales en las concepciones y creencias de los dos estudiantes. Los dos estudiantes analizados parten de la existencia de un conocimiento externo, pero mientras Eva lo justifica en relación al trabajo realizado por los matemáticos a lo largo de la historia, Luis no se plantea su origen. Luis cree que las posturas realista y constructivista descritas en el texto son complementarias. El realismo describe la naturaleza del conocimiento matemático y el constructivismo la forma en que el sujeto conoce. Sin embargo, estos polos chocan en la forma en que conciben la enseñanza. Luis se decanta por una enseñanza activa por razones psicológicas, entre las que aparecen las ligadas a la motivación del alumno. Eva considera que el conocimiento matemático ha surgido para resolver problemas de las propias matemáticas o de otras ciencias. Este conocimiento, una vez aceptado, debe transmitirse. Dado que para Eva el aprendizaje implica esencialmente al alumno la tarea del profesor debe consistir en ayudarle en dicho proceso.

Luis necesita y confía en elementos externos de verificación de los conocimientos y de los modos de enseñar. Su concepción sobre la naturaleza de la matemática y la claridad y precisión del valor de verdad de sus afirmaciones le lleva a atribuirle un carácter preponderante sobre las demás ciencias, especialmente sobre las humanísticas. Luis concibe que la forma de enseñar depende del profesor y para perfeccionarla basta con la práctica. Con ello detectamos una forma relativista de concebir el conocimiento didáctico.

Eva considera que para la aceptación del conocimiento matemático es necesario el debate entre los matemáticos en un proceso histórico. Sin embargo, coincide con Luis en considerar el conocimiento didáctico de manera relativa, aunque es más propensa a discutir sobre las cualidades educativas de los modelos de enseñanza.

En relación al estudio de la evolución de las creencias y concepciones, como consecuencia del proceso formativo, formulado en los objetivos d) y e), podemos decir que, con los instrumentos utilizados en esta investigación, no se ha observado un cambio significativo en las concepciones y creencias grupales. Las técnicas de análisis estadístico utilizadas para la comparación global de las manifestaciones de los sujetos, antes y después del proceso formativo, tienen que basarse en la realización de promedios. Aunque ha habido cambios en alumnos particulares, no se observan en el conjunto del grupo, porque los promedios compensan las desviaciones individuales. Ahora bien, desde un punto de vista educativo la caracterización de las respuestas individuales es también de la máxima importancia. Así pues, el estudio de casos nos permite apreciar que Luis ha aumentado su sensibilidad hacia los argumentos didácticos, lo que le lleva a valorar positivamente las actividades de enseñanza tales como el trabajo en grupo, el debate de las ideas en clase y la resolución de problemas por los propios alumnos. Eva ha explicitado sus creencias con una mayor seguridad y convicción personal sobre la necesidad de contextualizar el conocimiento matemático para su enseñanza, así como acerca del protagonismo del alumno en el aprendizaje.

En el objetivo f) nos propusimos poner a punto instrumentos de recogida y análisis de datos idóneos para el área problemática. Como conclusión podemos afirmar que tanto el comentario de textos, usado como reactivo, la Rejilla de análisis, que encierra las variables Plano y Etapa y sus respectivas categorías, y las técnicas de análisis multivariante de datos cualitativos implementadas, constituyen aportaciones significativas de nuestra investigación por su aplicabilidad a otras cuestiones de investigación en Didáctica de las Matemáticas. La incorporación de juicios emitidos por personas externas a la propia investigación sobre las características del texto utilizado, complementa el proceso analítico realizado aportando elementos de triangulación en el mismo.

Implicaciones para la formación de profesores de matemáticas

Tal como ya hemos dicho, la formación de profesores tiene que tomar en consideración las concepciones y creencias de los estudiantes para profesor. Nuestra investigación ha mostrado algunos instrumentos para detectar estas concepciones y creencias.

En concreto, el comentario de textos se ha mostrado como una técnica interesante para hacer que el estudiante interactúe con lecturas de carácter epistemológico. El análisis de este comentario permite al formador y a los profesores en formación, poner en común los significados de los términos empleados en los cursos de formación. De esta forma, el debate sobre las posturas epistemológicas y didácticas será más productivo.

La tabla de creencias elaborada a partir de la Rejilla incluye, de manera sistemática, una información muy rica sobre las distintas posiciones ante el conocimiento matemático y sobre la enseñanza y el aprendizaje. Esta tabla puede constituir un instrumento para situar a los estudiantes, y para abrir las expectativas sobre estas concepciones.

Los estudios de casos muestran la variedad de perfiles de los estudiantes frente a las cuestiones epistemológicas y didácticas. La riqueza que encierra esta diversidad permite que el formador de profesores comprenda mejor la variedad de posturas y la cantidad de factores que intervienen en la visión epistemológica y didáctica del estudiante. De esta forma, el formador tomará conciencia de la importancia de actuar sobre aspectos personales, más que suministrar un cuerpo de conocimiento didáctico. La conciencia de la pluralidad de opciones, y el dominio de factores que intervienen en las expectativas de los estudiantes durante sus cursos de formación, debe hacer que el formador adopte una tendencia abierta en el curriculum de formación. Esta actitud debe verse reflejada en una tendencia a articular, en la formación de profesores, la teoría y la práctica, la reflexión epistemológica y didáctica, el contexto de formación y el contenido, etc. En resumen, la conciencia de la pluralidad de visiones debe hacer que el formador dirija su acción hacia la formación de profesores reflexivos, y se ocupe él mismo de reflexionar sobre el contenido didáctico del contenido, que además asuma las características del contexto (conocimiento situado).

Perspectivas de investigación

Los instrumentos diseñados durante la investigación, se han revelado como puntos de referencia importantes para aplicar en futuras investigaciones. La propia concepción de la investigación como un proceso, nos abre un enorme campo de investigaciones en la parcela precisa de la formación de profesores.

Parece razonable esperar el cambio de concepciones y creencias de los estudiantes como consecuencia de un proceso formativo. El que en nuestra investigación no se haya apreciado este cambio abre un abanico de problemas que precisan nuevas investigaciones, entre las que destacamos los siguientes aspectos: a) Diseño de nuevos instrumentos de recogida de datos, incorporando nuevas situaciones de valoración de las concepciones y creencias; b) Diseño e implementación de situaciones didácticas que propicien la reflexión metacognitiva; c) Estudio del efecto que producen sobre las concepciones y creencias de los estudiantes las concepciones implícitas en otras instituciones que concurren en el proceso formativo, tales como son las instituciones implicadas en las "práctica docente en los Institutos", y en "las clases de matemáticas" que continúan recibiendo en 5º curso.

Dentro de esta problemática podemos enunciar cuestiones más específicas como las siguientes:

* ¿Qué contenidos epistemológicos debe tener un curso de formación de profesores, para fundamentar el conocimiento matemático de los estudiantes?

*¿Qué tipo de situaciones se deben diseñar para hacer que los estudiantes reflexionen sobre sus propias creencias y concepciones sobre las matemáticas?

.* ¿Cómo implicar a los estudiantes en su propia formación como profesores? ¿Cómo interactuar con los estudiantes para poner en común un programa de formación inicial de profesores que parta de sus expectativas de formación, pero que no se restrinja a sus demandas de carácter tecnológico? ¿Qué reactivos pueden emplearse para abrir las expectativas de los estudiantes?

.* ¿Cómo diseñar las *prácticas de enseñanza* de manera que se constituyan en un reactivo para la reflexión? ¿De qué forma se puede coordinar el trabajo de los tutores de prácticas? ¿Cómo articular la formación inicial de los estudiantes en formación con la formación permanente de los tutores y con la reflexión sobre el curriculum de formación? ¿Cómo articular la relación teoría-práctica en los programa de formación de profesores?

.* ¿Cómo se articula la componente didáctica de las matemáticas con la epistemológica, y con el contenido matemático en los curricula de los cursos de formación? ¿Cómo tomar en consideración la forma en que los estudiantes contemplan su experiencia discente?

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anguera, M.T. (1978). *Metodología de la observación en las ciencias humanas*. Madrid: Cátedra.

Artigue, M. (1992). The importance and limits of epistemological work in didactics. En W. Geeslin, K. Graham. (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME conference*, Durham, NH, August 6 - 11, 1992

Artigue, M. (1990). Epistemologie et Didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 10, nº 2-3, pp. 241-286.

Bazzini, L. (1994). (Editor),Theory and practice in Mathematics Education. *Proceedings of the "Fifth international conferencie on systematic cooperation between theory and practice in Mathematics Education.* Grado, Italia.

Behar, J. (1991).. Observación y análisis de la producción verbal de la conducta. En *Metodología observacional en la investigación psicológica*, M. T. Anguera (Ed.), (pp. 330 - 389). Barcelona: PPU.

Bishop, Y., Fiemberg, S. y Holland, P. (1975). *Discrete multivariante analysis: Theory and Practice*. Cambridge, Mass: Mit Press.

Blanco, L. (1991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de EGB y estudiantes para profesores*. Badajoz: Universidad de Extremadura, Manuales UNEX, No 11.

Blanché, R. (1973). *La Epistemología*. Barcelona: Oikos-Tau.

Blumer, H. (1982) *El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método*. Barcelona: Hora.

B.O.E. (1992). *Real Decreto 1178, por el que se establecen las enseñanza mínimas del bachillerato*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

B.O.J.A., (1992). *Curriculum de la Educación Secundaria Obligatoria, Área de Matemáticas*, BOJA nº 56. Sevilla, pp. 4188-4202

Borasi, R. (1985). Using errors as springboards for the learning of Mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, vol. 7, Special Issue, pp. 1-14.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), pp. 2-8.

Borko, H. y Shavelson, R.J. (1988). Especulaciones sobre la formación del profesorado: recomendaciones de la investigación sobre procesos cognitivos de los profesores. En L.M. Villar. (Dir), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado,* (pp. 259-276). Alcoy: Marfil.

Bouazzaoui, H. (1988).. *Conceptions des éléves et des professeurs á propos de la notion de continuité d'une fonction*. Thése du Doctorat. Université de Laval.

Bramald, R., Hardman, F. y Leat, D. (1995) Initial teacher trainees and their views of teaching and learning. *Teaching & Teacher Education*, vol 11, No 1, pp. 23-31.

Bright, G.W. y Vacc, N.N. (1994). *Changes in undergraduate preservice teachers' beliefs during an elementary teacher-certification program*. Paper presented at the annual meeting of the American Education Research Association, New Orleans.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistemologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 4.2, pp. 164-197.

Brousseau, G. (1986). Fundaments et méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7, nº 2, pp 33-115.

Brousseau, G. (1989). Utilité et intérêt de la didactique pour un professeur de collège. *Petit x*, nº 21, pp. 47-68.

Brousseau, G. (1990). Le contrat didactique: le milieu. *Recherches en Didactique des mathématiques*. Vol 9/3, pp. 309-336.

Brown, C.A. y Borko, H. (1992). Becoming Mathematics Teacher. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. -239). New York: Mcmillan

Brown, C.A. y Cooney, T.J. (1985). The importance of meanings and milieu in developing tehories of teaching mathematics. *Proceedings of the second TME - Conference Bielefeld.*

Brown, J.S., Collins, A. y Duguid, P. (1989). Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18, 2-1, pp. 32-42.

Brown, S.I.; Cooney, T.J.; Jones, D. (1990). Mathematics teacher education. En R. Houston (Ed.) *Handbook of research on teacher education*, (pp. 639-653). New York: Mcmillan.

Bruner, J. (1991). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza. (Original de 1990)

Bullough, R.V. y Stokes, D.K. (1994) Analyzing personal teaching metaphors in preservice teacher education as a means for encouraging professional development. *American Educational Research Journal* .Vol 31, no 1, pp. 197-224.

Cañón, C. (1993). *Las Matemáticas. Creación y descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.

Carl, I.M. (1989). Essential mathematics for the twenty-first century: the position of the National Council of Supervisors of Mathematics. *Mathematics Teacher*. 82 (6), pp. 470- 474.

Carpenter, T.P., Fennema, E., Peterson, P.L., Chiang, C.P. y Loef, M. (1989). Using knowledge of children's mathematics thinking in classroom teaching: an experimental study. *American Educational Research Journal*, Vol 26, nº 4, pp. 499-531.

Carrillo, J. (1996). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Sevilla.

Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1993). *La identificación de las concepciones del profesor sobre la matemática y la educación matemática como claves para el diseño de estrategias de formación del profesorado*. Comunicación presentada a las VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Sevilla, Septiembre 1993

.Carrillo, J. y Contreras, L.C. (1994). The relation between the teacher's conception of mathematics and mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. En J. Ponte y J.F. Matos. (Eds) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME*, Lisboa, 1994 (pp. 152-159)

Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble: La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fundamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 12, nº1, pp. 73-112.

Clark, C. M. y Peterson, P. L. (1986). Procesos de pensamiento de los docentes. En M.C. Wittrock (Ed). *La investigación en la enseñanza, III. Profesores y alumnos*, pp. 443-533. Madrid: Paidos Educador. M.E.C.

Cobo, B., Coriat, M., Flores, P. (1991). Criterios para el estudio de actividades de álgebra. En E. Filloy y L. Puig. (Eds.) *Memorias del tercer simposio internacional sobre* *"investigación en Educación Matemática": Historia de las ideas algebraicas*, pp. 133-140. Valencia, Sección Matemáticas Educativas del CINVESTAV, México 1993.

Cockcroft (1985). *Las matemáticas si cuentan*. Madrid: MEC. Original de 1982.

Colomb, J.; Guillaume, J.C. y Charnay, R. (1987). Articulation Ecole/Collége. Quels contrats disciplinaires en Mathématiques?. *Revue Francaise de Pédagogie,* n 80, pp. 25-36.

Collier, C.P. (1972). Prospective elementary teachers' intensity and ambivalence of beliefs about mathematics and mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, Nº 3, pp. 155-163.

Cooney, T.J. (1980). Research on teaching and teacher education. En R.J. Shumway (Ed.) *Research in Mathematics Education*, pp. 433-473. Reston, VA: NCTM.

Cooney, T.J. (1984a). The contribution of theory to mathematics teacher education. Paper prepared for sesions on Theory in *Mathematics Education*. V ICME, Adelaida.

Cooney, T.J. (1984b). Investigating mathematics teachers' beliefs: The pursuit of perceptions.
Paper prepared for short comunications at V ICME, Adelaida

Cooney, T.J. (1994a). Teacher education as a crucible for systematic cooperation between theory and practice. En L. Bazzini. (Ed.), *Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth International Conferencie on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education*, pp. 67-79. Grado, Italia, 1994.

Cooney, T.J. (1994b). Research and teacher education: in search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education,* Vol 25, No 6 pp. 608-636.

Cooney, T.J. y Shealy, B.E. (1994). Conceptualizing teacher education as field of inquiry: theoretical and practical implications. En J. P. Ponte y J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME,* Vol II, pp. 225-232. Lisboa.

Copes, L. (1979). *The Perry development scheme and the teaching of mathematics*. Comunicación presentada en PME, Warwick, England.

Copes, L. (1982). The Perry development scheme: A metaphor for learning and teaching mathematics. *For the Learning of Mathematics*, vol 3, 1, pp. 38-44.

Copleston (1960). *Historia de la Filosofía*. Madrid: Ariel.

Crawford, K. (1992). Applying theory in teacher education: changing practice in mathematics education. En W. Geeslin y K. Graham. (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME conference*, (pp. 1-161-1-168). Durham, NH.

D'Ambrosio, U. (1994). Cultural framing of mathematics teaching and learning. En R. Biehler, R.W. Schilz, R. Straser, B. Winkelmann (Eds.) *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 443-455). Dordrecht: Kluwer A.P.

D'Ambrosio, B. y Mendonça, T.M. (1992). Pre-service teachers' representations of children's understanding of mathematical concepts: conflicts and conflict resolution. *Educational Studies in Mathematics*, 23, pp. 213-230.

Davis, P. y Hersh, R. (1989). *Experiencia matemática* . Madrid: MEC, Labor. Original de 1982.

Dionne, J.J. (1985). The relative importance given by the teacher to the students' answer and reasoning. *Proceedings of the IX International Conference of PME*. Noordwijkerout.

Dionne, J.J. (1987). Elementary school teacher' perceptions of mathematics and mathematics teaching and learning: twelve case studies. *Proceedings of the XI International Conference PME*, (pp. 84-92). Montreal

Dixon, W.J.S. (1993). *BMDP Statitical software manual*. Berkeley: University of California Press.

Dörfler, W. (1991). Formas y significados de la generalización en matemáticas. En A. Bishop,
S. Melling-Olsen, J. van Dormolen. (Eds.) *Mathematical knowledge: its growth trough teaching*. Kluwer Academic Publisher, London.

Dörfler, W., Gaulin, C., Shuard, H. y Jones, G. (1986). Action Group 6: Pre-service teacher education. En M. Cars. (Ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education*, (pp. 111-123). Adelaida, Birkhäuser, Boston.

Dörfler, W., Hetyei, G., Breiteig, T., Carraher, T., Dossey, A., Jones, G. y Wain, G. (1990). Action Group 6: Preservice Teacher Education. En K. Hirst (Ed.) *Proceedings of the Sixth International Congress on Mathematical Education*, (pp. 177-190). Budapest: Departement of Mathematic the University Southampton.

Dossey, J.A. (1992). The nature of mathematics: its role and its influence. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 39-48). New Yorks: Mcmillan

Dossey, J., Jansson, L., Comiti, C., Jones, G. y Kulkarni, G. (1994). Preservice and inservice teacher education. En C. Gaulin, B.R. Hogdson, D. Wheeler, J. Egsgard (eds.), *Proceedings of the 7th International Congress on Mathematical Education,* (pp.

134138). Quebec: Les Presses de l'Université Laval.

Dou, A. (1970). *Fundamentos de la matemática*. Barcelona: Labor.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 7, nº 2, pp. 5-31.

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: Elements for analysing and constructing didactical situations in Mathematics. En: A.J. Bishop y S. Mellin-Olsen (Eds.), *Mathematical knowledge: its grouth through teaching*. (pp 100-130). Dordrecht: Kluwer

.A.P. Dougherty, B.J. (1992). Project delta: teacher change in secondary clasrooms. En W. Geeslin,
.K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth PME Conference*, Vol I, (pp. 201-208). Durham NH. Eco, U. (1985). *Apostillas a "El Nombre de la Rosa"*. Barcelona: Lumen. Original de 1984. Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen. Original de 1977. Elbaz, F. (1983). *Teacher thinking. A study of practical knowwledge*. London: Crom-Helm. Elliot, J (1991). Estudio del curriculum escolar a través de la investigación interna. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* nº 10, pp. 45-68. Enseignement Mathématique (1902 y ss.). *Enquête sur la méthode de travail des mathematiciens*. Ernest, P. (1986). Social and political values. *Mathematics Teacher*, nº 116. pp. 16-18.

Ernest, P. (1989a). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel (Ed.) *Mathematics Education and Society*, (pp. 99-101). Document Series 35. UNESCO.

Ernest, P. (1989b). The knowledge, beliefs and attitudes of the mathematics teacher: a model. *Journal of Education for Teaching*. Vol 15, nº 1, pp. 13-33.

Ernest, P. (1991). *Philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.

Ernest, P. (1992). The nature of mathematics: Towards a social constructivist account. *Science & Education* 1, pp. 89-100.

Ernest, P. (1994a). Varietes of constructivism: their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education* 2, pp. 1-14.

Ernest, P. (1994b). What is social constructivism in the psychology of mathematics education? En J. Ponte y J.F. Matos. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conferencie for PME,* (pp. 304-311). Lisboa.

Escofier, B. y Pagés, J. (1988). *Analysis factorielles simples et multiples; objectifs, méthodes* *et interpretation*. Paris: Dunod.

Escudero, I., García, M., Llinares, S. y Sánchez, V. (1993). Creencias epistemológicas sobre las matemáticas en los estudiantes para profesores de primaria. Ponencia presentada en el IV Congreso de Enseñanza de las Ciencias. *Enseñanza de las ciencias*, número extra (IV Congreso), pp. 317-318.

Farnham-Diggory, S. (1994). Paradigms of knowledge and instruction. *Review of Educational Research,* Vol 64, No 3, pp. 463-477.

Feiman-Nenser, S. y Buchman, M. (1988). Lagunas en las practicas de enseñanza de los programas de formacion del profesorado. En L.M. Villar. (Dir), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum y la formación del profesorado*. (pp. 301-314). Alcoy: Marfil.

Ferrini-Mundy, J. (1986). *Mathematics teachers' attitudes and beliefs: implications for in-service education*. Paper presented at the annual meeting of AERA, San Francisco

Ferrater, (1994). *Diccionario de términos filosóficos*. Barcelona: Ariel.

Ferry G. (1987). *Le Trajet de la Formation*. Paris: Dunod.

Flores, P. (1997) *Metáforas para la formación de profesores*. Comunicación enlas 8 JAEM, Salamanca 9-12 Septiembre.

Flores, P. (1993). *Formación práctica inicial de profesores de matemáticas de secundaria: algunas cuestiones de investigación sobre la planificación de la enseñanza y expectativas y necesidades de formación de los futuros profesores*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Flores, P. y Godino, J.D. (1992). Formación de profesores de matemáticas de enseñanzas medias: Expectativas de los futuros profesores. En E. Navarrete, G. Palomino y M. Serrano (Eds.)*, Actas de V Jornadas Andaluzas de educación Matemática*, (pp. 317-335).
Granada: SAEM Thales.

Flores, P. Godino, J.D. (1993a). Necesidades de formación para la práctica docente de los futuros profesores de matemáticas de enseñanzas medias. En L. Montero. y J.M. Vez. (Eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. (pp. 667-672). Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Flores, P. y Godino, J. D. (1993b). *Concepciones sobre las matemáticas y su enseñanza de* *los futuros profesores de matemáticas de secundaria*. Ponencia presentada en las IV Jornadas Andaluzas de Educación Matemática. Sevilla.

Flores, P. y Godino, J.D. (1995). Aproximación a las concepciones de los estudiantes para profesor de matemáticas mediante el comentario de un texto. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*. 47-61

Foss, D.H. y Kleinsasser, R.C. (1994). *Investigating preservice teachers' beliefs, conceptions, and practices: contrasting research paradigms*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Assotiation, New Orleans.

Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. Pamplona: EUNSA. Original de 1969.

Furinghetti, F. (1994). Ghost in the classroom: Beliefs, prejudices and fears. En L. Bazzini (Ed.), *Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth international conferencie on Systematic Cooperation Between Theory and Practice in Mathematics Education*, (pp. 81-91). Grado, Italia.

Gattuso, L. (1992). Discrepancies between conceptions and practice: a case study. Research Reports in XVI PME. W. Geeslin, K. Graham. (Eds). *Proceedings of the Sixteenth PME Conference. University of New Hampshire,* Vol I, (pp. 233-240). Durham, NH (USA).

Gattuso, L. y Mailloux, N. (1993). Conceptions about mathematics teaching of preserice elementary and high-school teachers. *Proceedings of the XI International Conference PME,* (pp. 392-399). Montreal.

Ghiglione, R. y Matalon, B. (1991). *Les enquêtes sociologiques*. Paris: Armand Colin.

Godino, J.D. (1991) Hacía una teoría de la Didáctica de la Matemática. En A. Gutierrez, (Ed.). *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. (pp. 105-148). Madrid, Síntesis.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (en prensa) Clarifyng the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. ICMI Study 94, *What is research in mathematics education and what are its results?*. University of Mariland.

Godino, J.D. y Batanero, M.C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques* Vol 14, nº 3, pp. 325-355.

Goldin, G. (1989). Constructivist epistemology and discovery learnig in matehmatics. *Proceedings of the XIII International Conference PME*, Vol II, (pp. 15--22). Paris.

Gómez, B. (1991) Las matemáticas en el proceso educativo. En A. Gutierrez, (Ed.) *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. (pp. 59-104). Madrid, Síntesis.

Greco, P. (1981) Estatuto epistemológico de los conceptos psicológicos de Piaget. En B. Inhelder, R. García y J. Voniche. *Jean Piaget. Epistemología genética y equilibración*. (pp. 79-89). Madrid. Editorial Fundamentos.

Green, T.F. (1971). *The activities of teaching*. New York: Mc Graw Hill.

Greenacre, M.J. (1993). *Theory and aplications of correspondence analysis*. London:

Academic

Press. Grouws, D.A. (1992).. *Handbook of Research on Mathematics*. New York:

Mcmillan. Guimaraes, H.M. (1992). Concepçoes, práticas e formaçao de professores.

Educaçao

Matemática. Lisboa: Instituto de Inovaçao Educacional

Gutiérrez, S. (1994). *Filosofía de la Estadística*. Valencia: Servei de Publications, Universitat de Valencia. Hernández, J.A., y García, M.C. (1995). *Orientaciones prácticas para el comentario crítico de textos*. Sevilla: Algaida. Hersh, R. (1986). Some proposal for reviving the philosophy of mathematics. En T. Tymoczko, (Ed.), *New Direction in the Philosophy of Mathematics* (pp. 9-28). Boston: Birkauser. Hodder, I. (1994). The interpretation of documents and material culture. En N.K. Denzin y Y.S. Lincoln. (Eds), *Handbook of Qualitative Research*. (pp. 392-402), London: Sage publications. Hollingsworth, S. (1989). Prior beliefs and cognitive change in learning to teach. *American*

Educational Research Journal. Vol 26, Nº 2, pp. 160-189. Houston, R. (Ed.), (1990).

Handbook of research on teacher education. New York: Mcmillan. Hoyles, C. (1992).

Illumination and reflections - Teachers, methodologies and Mathematics. En W. Geeslin y K. Graham. (Eds), *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Durham, (pp. 3-263 - 286)

Inhelder, B. García, R. y Voniche, J. (1981). *Jean Piaget. Epistemología genética y equilibración*. Madrid. Editorial Fundamentos.

Johnston, M. (1994). Contrast and similarities in case studies of teacher reflection and change. *Curriculum inquiry*, 24:1, pp. 9-26.

Johnston, S. (1992). Images: a way of understanding the practical knowledge of student teachers. *Teaching & Teacher Education*, Vol 8, No 2, pp. 123-136.

Jones, D., Henderson, E. y Cooney, T. (1986). Mathematics teachers' beliefs about mathematics and about teaching mathematics. *Proceding of the VII annual meeting PME-NA*, East

Lansing, Michigan Joyce, B. y Weil, M. (1985). *Modelos de enseñanza*. Madrid:

Anaya 2. Junta de Andalucía (1994). *Proyecto de Decreto por el que se establecen las*

enseñanza de

Bachillerato en Andalucía. Sevilla: Consejería de Educación y Ciencia.

Kilpatrick, J. (1994). Historia de la investigación en educación matemática. En J.

Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra. *Educación matemática e investigación*. (pp. 17-98).

Madrid: Síntesis. Kilpatrick, J. (1987). What constructivism might be in mathematics

education. En J. Bergeron,
H. Herscovics, C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh PME Conference, Vol I*. (pp. 3-27).

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI.

Knoche, N. Hillel, J., Boero, P. y Kilpatrick, J. (1994) Methodologies in research in mathematics education. *Proceedings of the VI International Congress on Mathematical Education*. Quebec.

Kuhn, T.S. (1975). *La estructura de las revoluciones científicas*. Madrid: Fondo de Cultura Económica. Original de 1962.

Lakatos, I. (1978). *Pruebas y Refutaciones*. Madrid: Alianza Universidad. Original de 1976.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Universidad. Original de 1978.

Lakatos, I. (1986). A renaissance of empiricism in the recent philosphy of mathematics? En T. Tymoczko, (Ed.), *New Direction in the Philosophy of Mathematics*, (pp. 29-48). Boston: Birkauser.

Landshere, G. de (1977) *La formación de los enseñantes del mañana*. Madrid. Narcea.

Lappan, G. y Theule-Lubienski, S. (1992). Training teacher or educating professionals?. What are the issues and how are they being resolved?. *Selected lectures ICME-7*.

Lerman, S. (1983). Problem solving or knowledge centred: the influence of philosophy on mathematics teaching. *International Journal of Mathematics and Science Technologic*, 14 (1), pp. 59-66.

Lerman, S. (1989). Constructivism, mathematics and mathematics education. *Educational Studies in Mathematics,* 20, pp. 211-223.

Lerman, S. (1994a). Metaphors for mind and metaphors for teaching and learning mathematics. En J. Ponte, J.F. Matos. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME,* Lisboa, (pp. 144-151, Vol III)

Lerman, S. (1994b). Towards a unified space of theory-and-practice in Mathematics teaching: a
research perspective. En L. Bazzini. (Ed.), *Theory and practice in Mathematics Education. Proceedings of the "Fifth International Conferencie on Systematic Cooperation between Theory and Practice in Mathematics Education,* (pp. 133-142). Grado, Italia.

Llinares, S. (1989). *Las creencias sobre la naturaleza de las matemáticas y su enseñanza en estudiantes para profesores de primaria: dos estudios de casos*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1991a). Los mapas cognitivos como instrumento para investigar las creencias de los profesores en formación. En C. Marcelo (Coord.) *La investigación sobre la formación del profesorado. Métodos de investigación y análisis de datos*. Buenos Aires: Cincel.

Llinares S. (1991b). La naturaleza de la comprensión de las nociones matemáticas curriculares: variables en la formación del profesor de matemáticas. En C. Marcelo

(Ed.) *El estudio de caso en la formación del profesorado y la investigación didáctica*. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Sevilla.

Llinares, S. (1991c). *La Formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GID.

Llinares, S. (1993). Aprender a enseñar matemáticas. Conocimiento de contenido pedagógico y entornos de aprendizaje. En L. Montero, y J.M. Vez (Eds.) *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Llinares, S. (1995). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función*. Conferencia invitada en el IV Encontro de Investigaçao em Educaçao Matemática. Luso. Portugal.

Llinares, S. y Sánchez, M.V. (1987). Las creencias sobre las matemáticas y la enseñanza de las matemáticas en profesores de EGB en formación. En L.M. Villar (Ed), *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores. Implicaciones para el curriculum de formación de profesores*. Alcoy: Marfil.

Llinares, S., Sánchez, V., García, M. y Escudero, I. (1995). *Creencias y aprender a enseñar matemáticas*. Servicio de publicaciones de la universidad de Sevilla.

Mach, E. (1969). La economía de la ciencia. En J.R. Newman (Dir.), *La forma del pensamiento matemático,* (pp. 52-65). Barcelona: Grijalbo. Original de 1916.

Manning, P.K. y Cullum-Swan, B. (1994). Narrative, Content, and Semiotic Analysis. En N.K. Denzin, y Y.S. Lincoln. (Eds). *Handbook of Qualitative Research,* (pp. 463-477). London: Sage publications.

Marcelo, C. (1987). *El pensamiento del profesor*. Barcelona: Ceac.

Marcos, F. (1988). *El comentario lingüístico. Metodología y práctica*. Madrid: Cátedra.

Mayerson, (1977). *Conception of knowledge in mathematics: interaction with and application to a teaching methods course*. Tesis doctoral inédita. Universidad de New York y Buffalo.

McGalliard, (1983). *Selected factors in the conceptual systems of geometry teachers: Four case studies*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Georgia, Athens.

McQualter, J.W. y Warren, W.G. (1983). The personal construction of teaching and mathematics teacher education. *Procedings of the 5th Biennal conference of Mathematics Education Lectures Association*, Toowombac, Quesland

MEC (1992) *Matemáticas. Secundaria obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación y

Ciencia.

Mialaret, G. (1977) *Ciencias de la Educación*. Barcelona. Oikos-Tau

Middleton, J.A. y Romberg, T.A. (1993, Abril). *Teachers' conceptions of mathematics and mathematics education: effects of collaboration on teacher beliefs*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association. Atlanta.

Moreira, C. (1994). Reflecting on prospective mathematics teachers' experiences in reflecting about the nature of mathematics. En J.P. Ponte, J.F. Matos. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth international conference for PME*, (pp. 287-294). Lisboa

Moreira, C. y Noss, R. (1995). Understanding teachers' attitudes to change in a logomathematics environment. *Educational Studies in Mathematics,* 28 (1), pp. 155-176.

Moreno, L. y Waldegg, G. (1992). Constructivismo y educación matemática. *Educación Matemática*. Vol 4, n 2, pp. 7-15.

Mumby, H. (1988). Investigaciones sobre el pensamiento de los profesores: dilemas ante la conducta y práctica profesionales. En L.M. Villar, (Ed.), *Conocimientos, creencias y teorías de los profesores*. (pp. 63-86). Alcoy: Marfil.

NCTM (1991a). *Professional standards for teaching mathematics.* Reston: Va. National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991b). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática*. Sevilla: Thales. Original de 1989.

Negrín, O. y Ossenbach, G. (1986). *El comentario de textos educativos*. Madrid: UNED.

Oprea, J.M. y Stonewater, J. (1987). Mathematics teachers' beliefs systems and teaching styles: influences on curriculum reform. *Proceedings of the International Conference PME, Vol. 1, Montreal.*

Ortega y Gasset, J. (1986). *Ideas y creencias*. Cuadernos de Pedagogía. [Original de 1934]

Otte, M. (1979). Formación y vida profesional de los Profesores de Matemáticas. En UNESCO (Eds.) *Nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática*. UNESCO, Montevideo.

Owens, J.E. (1987). Personal constructs of mathematics and mathematics teaching. *Proceeding of the XI International Conference PME*, Montreal

Pajares, M.F. (1992). Teachers' beliefs and educational research: cleaning unp a messy contruct. *Review of Educational Research* Vol 62, nº 3, pp. 307-332.

Papert, S. (1981). *Jaillissement de l'esprit*. Tours: Flammarion. Original de 1980.

Perry, W.G. (1970). *Forms of intellectual and ethical development in the college years*. New York: Holt, Rinehart y Winston.

Perry, W.G. (1988). Different wordls in the same classroom. En P. Ramsden, (Ed.) *Improving learning. New perspectives*. (pp. 145-161). Londres: Kogan Page, Ltd.

Peterson, P.L., Fennema, E., Carpenter, T.P. y Loef, M. (1987). *Teachers' pedagogical content beliefs in mathematics*. Paper presented en AERA, Washington, D.C.

Piaget, J. (1977) *Epistemología genética*. Buenos Aires. Salpín, S.A. (Edición francesa de 1970).

Polya, G. (1966). *Matemática y razonamiento plausible.* Madrid: Tecnos.

Ponte, J.P. (1992). Concepçoes dos professores de matemática e processos de formaçao. *Educaçao Matemática*. Lisboa: Instituto de Inovaçao Educacional

Ponte, J.P. (1994a). Mathematics teachers´ professional knowledge. En J. Ponte, J.P. Matos, (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conferencie for PME*. (pp. 195-210) Lisboa.

Ponte, J.P. (1994b). "Knowledge, beliefs and conceptions in mathematics teaching and learning". En L. Bazzini (Ed.), *Theory and practice in mathematics education. Proceedings of the 'Fifth international conference on systematic cooperation between theory and practice in mathematics education.* . Grado Italia.

Ponte, J.P., Matos, J.F., Guimaráes, H.M., Leal, L.C. y Canavarro, A.P. (1994). Teachers' and students' views and attitudes towards a new mathematics curriculum: a case study. *Educational Studies in Mathematics* 26, pp. 347-365.

Porlan, R. (1989). *Teoría del conocimiento, teoría de la enseñanza y desarrollo profesional. Las concepciones epistemológicas de los profesores*. Tesis doctoral inédita. Uninversidad de Sevilla

Porlan, R. (1993). *Constructivismo y escuela*. Sevilla: Díada.

Praia, J. y Cachapuz, F. (1994). Un análisis de las concepciones acerca de la naturaleza del conocimiento científico de los profesores portugueses de la enseñanza secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, nº 12 (3), pp. 350-354.

Pozo, J.I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid: Morata.

Rector, J. y Ferrini-Mundi, J. (1986). Formal mathematics study and teacher's beliefs an conceptions: interactions and influences. *Proceedings of the VIII annual meeting PME-NA*, East Lansing, Michigan

Relich, J. y Way, J. (1994). Measuring pre-service teachers attitude to mathematics: further develoments of a questionnaire. En J. Ponte, J.F. Matos. (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conferencie for PME*. (pp. 105-112). Lisboa

Rice, M. (1992). Teacher change: a constructivist approach to professional development. W. Geeslin, K. Graham. (Eds) *Proceedings of the sixteenth PME conference*, (pp. 2-250-2-257). Durham, NH.

Rico, L. (1992). *Plan para la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas en Enseñanza Secundaria. Proyecto Docente*. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Rico, L. y Coriat, M. (1992). *La asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato en la Universidad de Granada*. Comunicación presentada en la 1ª Conferencia Internacional Las Didácticas Específicas en la Formación del Profesorado. Santiago de Compostela, Julio 1992.

Rico, L., Fernández, F., Gil, F., Castro, E., Castro, E., Olmo, A., Moreno, F. y Segovia, I. (1995). *Conocimientos y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rico, L. y Flores, P. (1997) *Didáctica de la matemática y formación del profesorado*. Ponencia en el II Congreso de Formación del Profesorado. Granada, 9-12 abril.

Rico, L. y Gutierrez, J. (Eds.) (1994). *Formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria*. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación, Uiversidad de Granada.

Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo XX. En J. Kilpatrick,
L. Rico y M. Sierra (Eds.) *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. y Sierra, M. (1991). La comunidad de educadores matemáticos. En A. Gutierrez (Ed.). *Área de conocimiento Didáctica de la Matemática*. (pp. 11-58). Madrid, Síntesis.

Richardson, L. (1994). Writing. A method of inquiry. En N.K. Denzin, Y.S. Lincoln. (Eds.), *Handbook of Qualitative Research*, (pp. 516-529). London: Sage publications.

Robert, A. y Robinet, J. (1989). *Representations des enseignants de mathématiques sur les matémathiques et leur enseignement*. Cahier de DIDIREM. Université Paris VII. IREM. Paris.

Román, M. y Díez, E. (1989). *Curriculum y Aprendizaje. Un modelo de Diseño Curricular de aula en el marco de la Reforma*. Pamplona: Itaka. Dirección Provincial del MEC de Navarra.

Romberg, F.A. (1991). Características problemáticas del curriculumn escolar de matemáticas. *Revista de educación*, No 2, 94, p. 323-406.

Ruiz, L. (1994). *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función*. Tesis doctoral inédita. Universidad de Granada.

Russell, B. (1983). *El conocimiento humano*. Barcelona: Orbis.

Sánchez, M.V. y Llinares, S. (1990). El conocimiento acerca de las matemáticas y las prácticas de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 8(2), pp-97-104.

Sánchez, M.V. y Llinares, S. (1988a). Un estudio de las creencias del futuro maestro en relación con las matemáticas: influencia de las prácticas. En C. Marcelo (Ed.), *Avances en el Estudio del Pensamiento del Profesor*, Sevilla: Servicio de Publicaciones de la Universidad.

Sánchez, M.V. y Llinares S. (1988b). *Un estudio de la influencia de los períodos de prácticas sobre los pensamientos de los futuros maestros*. V Jornadas de estudios de la Investigación en la Escuela. Sevilla.

Santos, V. y Lambdin, D. (1992). Empowering prospective elementary teachers. En W. Geeslin y K. Graham,(Eds), *Proceedings of the sixteenth PME conference*, Vol 2, (pp. 282-289) Durham NH.

Schatz, M. y Grouws, D.A. (1992). Mathematics Teaching Practices and their effects. A. Grouws, (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* NCTM, New York: McMillan.

Schön, D. (1992). *La formación del profesional reflexivo.* Barcelona: Paidós. MEC.

Schön, D. (1993). Teaching and learning as a reflective conversation. En L. Montero, y J.M. Vez, (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. (pp. 5-18). Santiago de Compostela: Tórculo Ediciónes.

Shram, P. y Wilcox, S.K. (1988). Changing preservice teachers' conceptions of mathematics learning. En J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler, (Eds.), *PME-NA: Proceedings of the tenth annual meeting* .(pp. 349-355). Dekalb, IL: Northern Illinois University.

Schram, P., Wilcox, S., Lanier, P., Lappan, G. y Even, R. (1988). *Changing mathematical conceptions of pre-service teachers; a content and pedagogical intervention*. Paper presented of AERA, New Orleans, April 1988

Selden, R. (1987). *La teoría literaria contemporanea*. Barcelona: Ariel. Original de 1985.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22. (pp. 1- 36)

Shavelson R. y Stern P. (1983). Investigaciones sobre el pensamiento pedagógico del profesor, sus juicios, decisiones y conducta. En J. Gimeno. y A. Pérez. *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal/universidad.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growt in teaching. *Educational Researcher*. 15 (2), p. 4-14.

Shulman, L.S. (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: the impact of subject-spedific conceptions of teaching. En L. Montero, J.M. Vez, (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*. (pp. 53-69). Santiago de Compostela: Tórculo Edicións.

Shumway, R.J (Ed.) (1980). *Research in mathematics education*. Reston, VA: NCTM.

Simon, M. y Schifter, D. (1993). Toward a constructivist perspective: the impact of a mathematics teacher inservice program no students. *Educational Studies in Mathematics*, Vol 25, nº 4, pp. 331-340.

Skemp, R.R (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *Arithmetic Teacher*, Nov 1978. pp 9-15.

Smyth, W.J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación, 294* 275-300.

Steffe, L.P. (1992). Building a Foundation. *Journal for Research in Mathematics Education*, vol 23, nº 2, pp. 183-186.

Steiner, H.G. (1987). Philosophical and Epistemological aspect of mathematics and their interaction with theory and practices in mathematics education. *For the Learning in Mathematics* 7, 1, pp. 7-13.

Stenhouse L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. Selección de artículos del autor por Ruduck y Hopkins. Madrid: Morata. Original de 1985.

Stonewater, J.K. y Oprea, J.M. (1988). An analysis of in-service teachers' mathematical beliefs: a cognitive development perspective. En J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler, (Eds.), *PME-NA: Proceedings of the tenth annual meeting* .(pp. 356-363). Dekalb, IL: Northern Illinois University.

Swinson, K. y Shield, M. (1994). Practice what you preach: influencing preservice teachers' beliefs about mathematics. En J. Ponte, J.F. Matos, (Eds.), *Proceedings of the eighteenth International Conference for PME*. (pp. 321-328) Lisboa.

Taylor, W. (1980). La formación del personal docente: decisiones que hay que tomar. *Perspectiva*. UNESCO, vol X, nº 2. pp. 233-241.

Thompson, A.G. (1992). Teacher's beliefs and conceptions: a synthesis of the research. En D.A. Grouws, (Ed.), *Handbook on mathematics teaching and learning*. (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Thompson, A.G.(1984). The relationship of teachers' conceptions of mathematics and mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, pp. 105-127.

Tymoczko, T. (1992). *Humanistic and Utilitarian Aspects of Mathematics*. ICME VII

Tymoczko, T. (1986). *New Direction in the Philosophy of Mathematics*. Boston: Birkauser.

Vergnaud, G. (1990). Epistemology and psychology of mathematics education. En P. Nesher y J. Kilpatrick, (Eds),. *Mathematics and cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp 14-30). Cambridge: Cambridge University Press.

Vicente, L. (1995). *Palabras y creencias*. Murcia: Universidad de Murcia. von Glasersfeld, E. (1989a). Cognition, construction of knowledge, and teaching. *Synthese 80,* pp. 121-140. von Glasersfeld, E. (1989b). Constructivism in education. En T. Husen y N. Postlethwaite, (Eds.), *International Encyclopedia of Education* (pp. 162-163). Oxford: Pergamon. von Glasersfeld, E. (1995). Introducción al constructivismo radical. En Watzlawick (Comp.) *La* *realidad inventada*. (pp. 20-37). Barcelona: Gedisa. (Original de 1981) Watzlawick, P., Weakland, J.H. y Fisch, R. (1976) *Cambio*. Barcelona: Herder. Waxman, B. y Zelman, S. (1987). Childrens' and teachers' mathematical thinking: helping make

the conections. *Procedings of the XI International Conference PME*, Montreal.

Weber, J. (1986). *Basic content analysis*. Newbury Park, California: Sage University Press.

Weinberg, D. y Cavelek, J. (1987). A social constructivist theory of instruction and the development of mathematical cognition. *Procedings of the XI International Conference PME*, (pp. 346-352). Montreal White, L.A. (1983). *La ciencia de la cultura. Un estudio sobre el hombre y la civilización*. Barcelona: Paidos. Whitney, F.L. (1983). *Elementos de investigación*. Barcelona: Ediciones Omega.

Wilcox, S., Schram, P., Lappan, G. y Lanier, P. (1991). The role of a learning community in changing preservice teacher's knowledge and beliefs about mathematicas education. *For the Learning of Mathematics*, 11, 3, pp. 31-39.

Wilson, M.R. (1994). One preservice secondary teacher's understanding of function: the impact of a course integrating mathematical content and pedagogy. *Journal for Research in Mathematics Education* Vol 25, 4, pp. 346-370.

Wittgenstein, L. (1988). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica, Original de 1953. Yinger, R.J. y Clark, C.M. (1988). El uso de documentos personales en el estudio del pensamiento del profesor. En L.M. Villar, (Ed.), *Conocimientos, creencias y teorías de los profesores*. (pp. 175-196). Alcoy: Marfil.

Zeichner, K. (1983). Alternative paradigms of teacher education. *Journal of Teacher Education*. Vol XXXIV, No 3, pp. 3-9.

Zeichner. K. y Gore, J. (1990). Teacher socialization. En W.R. Houston, (Ed.), *Handboock of research on teacher education*. (pp. 329-348). New York: Macmillan, Zweng, M., Green, T., Kilpatrick, J., Pollak, H. y Suydam, M. (Eds.), (1983). *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education*. Birkhäuser, Boston.

ANEXO

Fragmento del artículo entregado para el comentario realizado después de las prácticas.

Consignas para realizar el comentario de texto

Prácticas de Enseñanza de Matemáticas en Institutos.

Concepciones sobre las matemáticas, la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

MORENO Y WALDEGG

<u>La matemática como objeto de enseñanza</u>

En lo que va del presente siglo y hasta hace poco tiempo, la concepción filosófica dominante sobre la matemática ha sido la formalista, que grosso modo, nos presenta a esta disciplina como un cuerpo estructurado de conocimientos dicho cuerpo está conformado por los objetos matemáticos, las relaciones entre ellos y los criterios para validar resultados dentro de un marco axiomático-deductivo.

El formalismo exige extirpar el significado de los objetos a fin de trabajar exclusivamente con las "formas" y con las relaciones entre dichos objetos que se derivan de la base axiomática de las teorías. La actividad matemática producto de esta concepción ha sido sumamente fructífera, baste observar la gran cantidad de resultados surgidos en el presente siglo.

Sin embargo, esto mismo no se puede decir de la práctica educativa que se deriva de una concepción formalista de la matemática. Respecto a la epistemología de la matemática que domina la "enseñanza tradicional", ésta tiene raíces históricas mucho más lejanas, que se remontan a la época de la antigua Grecia.

Para Platón, los objetos matemáticos, así como las relaciones entre ellos, tienen una realidad, externa e independiente de quien conoce, en el mundo de las ideas. Conocer para Platón significa re-conocer, trasladar este cuerpo de objetos y relaciones preexistentes en un mundo exterior e implantarlos en el intelecto del individuo. Considerando que la matemática es un La tesis fundamental de esta postura epistemológica -que llamaremos realismo matemático- es la separación explícita entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento. Este realismo epistemológico es modificado por Aristóteles quien le da un matiz empírico, al trasladar los objetos de la matemática del mundo de las ideas de Platón a la Naturaleza material: conocer ahora significa re-conocer los objetos matemáticos -mediante procesos de abstracción y generalización- en los objetos corpóreos de la Naturaleza.

Ambas concepciones -la idealista de Platón y la empirista de Aristóteles- parten de la premisa fundamental de que los objetos de la matemática y sus relaciones están dados, su existencia no depende del sujeto que conoce, ya que preexisten a él.

Bajo esta concepción, la matemática puede ser vista como un "objeto de enseñanza": el matemático la "descubre" en una realidad externa a él, una vez descubierto un resultado matemático, es necesario "justificarlo" dentro de una estructura formal y queda listo para ser enseñado.
Esta concepción epistemológica, en una especie de simbiosis con el formalismo, encaja dentro de la oposición formulada por el empirismo lógico del siglo veinte, «contexto de descubrimiento/contexto de justificación»: el realismo suministra el contexto de descubrimiento, mientras que el formalismo nos da el contexto de justificación.

La transmisión del conocimiento "objeto de enseñanza", éste puede transmitirse. Quien posee el conocimiento puede ofrecerlo a quien no lo posee, sin riesgo de que el conocimiento se modifique en el proceso de transmisión.

La tarea del profesor consiste en "inyectar" el conocimiento en la mente del estudiante a través de un discurso adecuado. El estudiante, por su parte, no puede modificar la estructura del discurso, su tarea consiste en decodificarlo. La didáctica, bajo este punto de vista, busca optimizar la tarea del profesor mediante una especie de combinatoria de contenidos, generalmente apoyada en preceptos universales -como el paso de los simple a lo complejo, de lo particular a lo general, de lo concreto a lo abstracto, del análisis a la síntesis- y poniendo especial énfasis en el contexto de la justificación, como estado superior del conocimiento. La evaluación del aprendizaje, bajo esta concepción, queda definida de manera clara: los mismos contenidos que el profesor transmite inequívocamente mediante su discurso, serán demandados al estudiante quién deberá responder con un discurso análogo. Aunque se reconocer diferencias entre los estudiantes (de inteligencia, de actitud, de motivación), estas diferencias se borran al solicitar respuestas únicas y universales, centradas principalmente, en el contexto de justificación.

La conjunción realismo-formalismo ha dominado la educación matemática durante el presente siglo: subyace a la mayoría de los textos y de los planes de estudio de todos los niveles escolares, a la actividad de muchísimas profesores, a los métodos de evaluación y clasificación y a muchos de los trabajos de investigación educativa. No obstante, los resultados no han sido del todo satisfactorios: el sentimiento de fracaso en profesores y estudiantes parece ir en aumento. Parece necesario revisar las hipótesis (explícitas e implícitas) sobre las que se apoyan nuestros esfuerzos. La La construcción del conocimiento.
primera pregunta al ver el esquema tradicional: Profesor---(conocimiento)---🕗 alumno es ¿qué es el "conocimiento"? "Eso" que no ha resultado ser tan fácil de transmitir quizá se deba a que no es algo que pueda transmitirse, debido a que el profesor no lo tiene "hecho" para consumo de sus alumnos, sino que los alumnos lo construyen. Esta última es la tesis de las epistemologías constructivas que trataremos a continuación.

La matemática como objeto de aprendizaje

Para Piaget (y, en esencia, para todos los constructivistas). el sujeto se acerca al objeto de conocimiento dotado de ciertas estructuras intelectuales que le permiten "ver" al objeto de cierta manera y extraer de él cierta información, misma que es asimilada por dichas estructuras. La nueva información produce modificaciones acomodaciones- en la estructuras intelectuales, de tal manera que cuando el sujeto se acerca nuevamente al objeto lo "ve" de manera distinta a como lo había visto originalmente y es otra la información que ahora le es relevante. Sus observaciones se modifican sucesivamente conforme lo hacen sus estructuras cognoscitivas, construyéndose así el conocimiento sobre el objeto.

De una forma u otra, el propósito de todas las epistemologías ha sido el análisis de las relaciones entre el sujeto cognoscente y el objeto de conocimiento y la forma en que se genera el conocimiento mediante tal interacción. El modelo de enseñanza tradicional -soportada por el realismo matemático- que hemos descrito anteriormente, privilegia el objeto de conocimiento y concede un papel pasivo al sujeto. En la perspectiva constructivista, es la actividad del sujeto lo que resulta primordial: no hay "objeto de enseñanza" sino "objeto de aprendizaje"

Diversos estudios relativos a la forma en que los estudiantes resuelve problemas matemáticos, han llevado a la explicación, de corte constructivista, de que la estructura de la actividad de resolución de problemas surge como un objeto cognoscitivo (un esquema) a partir de la reflexión que el sujeto hace sobre sus propias acciones. El "conocimiento matemático", para la epistemología genética, es resultado de esta reflexión sobre acciones interiorizadas -la abstracción reflexiva-. La matemática no es un cuerpo codificado de conocimientos (así como una lengua no es le texto de su enseñanza), sino esencialmente una actividad.

El conocimiento, desde la perspectiva constructivista, es siempre contextual y nunca separado del sujeto; en el proceso de conocer, el sujeto va asignando al objeto una serie de significados, cuya multiplicidad determina conceptualmente el objeto. Conocer es actuar, pero conocer también implica comprender de tal forma que permita compartir con otros el conocimiento y formar así una comunidad. En esta interacción, de naturaleza social, un rol fundamental lo juega la negociación de significados.

Una tesis fundamental de la teoría piagetiana es que todo acto intelectual se construye progresivamente a partir de estructuras cognitivas anteriores y más primitivas. La tarea del educador constructivista, mucho más compleja que la de su colega tradicional, consistirá entonces en diseñar y presentar situaciones que, apelando a las estructuras anteriores de que el estudiante dispone, le permitan asimilar y acomodar nuevos significados del objeto de aprendizaje y nuevas operaciones asociadas a él. El siguiente paso consistirá en socializar estos significados personales a través de una negociación con otros estudiantes, con el profesor, con los textos.

Al poner el énfasis en la actividad del estudiante, una didáctica basada en teorías constructivistas exige también una actividad mayor de parte del educador. Esta ya no se limita a tomar el conocimiento de un texto y exponerlo en el aula, o en unas notas, o en otro texto, con mayor o menor habilidad. La actividad demandada por esta concepción es menos rutinaria, en ocasiones impredecible, y exige del educador una constante creatividad.

CUESTIONES

1.- Explica, brevemente las principales ideas sobre el ***Realismo matemático*** *y el* ***Constructivismo*** *expresadas por los autores en el texto, así como la repercusión que estas corrientes de pensamiento tienen sobre la enseñanza de las matemáticas. 2.- Realiza una* ***valoración personal*** *del texto en la que expreses tu opinión respecto a los siguientes aspectos:*

*A. ¿En qué medida, consideras tú que la matemática es "**objeto de enseñanza**" y en que medida "**objeto de aprendizaje**"?.*

B. ¿Qué papel crees tú que desempeña en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

los siguientes aspectos: i) la presentación de los conceptos y propiedades a los alumnos por el profesor ii) las actividades de resolución de problemas por el propio alumno iii) el debate de las ideas en clase ?