UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION

Departamento de Didáctica de la Matemática

LA INTRODUCCION DEL NUMERO REAL EN EDUCACION SECUNDARIA

TESIS DOCTORAL

Isabel M.ª Romero Albaladejo

Granada, 1995

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
UNIVERSIDAD DE GRANADA

LA INTRODUCCION DEL NUMERO REAL EN EDUCACION SECUNDARIA

TESIS DOCTORAL

Isabel Mª Romero Albaladejo

GRANADA 1995

DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACION
UNIVERSIDAD DE GRANADA

LA INTRODUCCION DEL NUMERO REAL EN EDUCACION SECUNDARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Dr. L. Rico Romero
que presenta la licenciada en Ciencias Matemáticas
Dª Isabel Mª Romero Albaladejo
para optar al grado de Doctor.

Fdo.: Isabel Romero Albaladejo

VºBº, El Director

Fdo.: Dr. L. Rico Romero

GRANADA 1995

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a las siguientes personas:

Al director de esta tesis y de mi formación como investigadora en Didáctica de la Matemática, Luis Rico Romero, por la guía que me ha proporcionado durante estos años, y por todo lo que he aprendido de él.

A mis compañeros de trabajo en el Departamento de Didáctica de la Matemática. Especialmente a Carmen Batanero y Juan Díaz Godino, por su cordialidad; a Moisés Coriat y a Pablo Flores, por su ayuda en muchos frentes y su disponibilidad; a Paco Fernández, por el apoyo logístico suministrado en la etapa final; y a José Gutiérrez, por haber apreciado mis intuiciones más queridas y haberme estimulado a sacarlas a la luz.

A Gregorio Palomino, por haber posibilitado mi experiencia en el Instituto Albaycín, y haberme prestado su colaboración.

A Rafael Pérez Gómez, que fue el primer catalizador de mis ideas y mis inquietudes en el terreno de la didáctica, junto a Belén Cobo.

A mis amigos: Víctor Neuman, María Peregrina, Emiliana Polo, Encarna Monteoliva y Teresa Sánchez, por su apoyo y cariño incondicional en los momentos más difíciles de la realización de este trabajo.

Sobre todo, a mis alumnos y alumnas del Instituto Albaycín, por haberme obligado siempre a sujetarme a la realidad y a descubrir en ella la verdadera fuente de riqueza, por todo lo que me han educado y lo que me han permitido disfrutar.

A mis padres

INDICE

Capítulo I. Encuadre del estudio

I.1 Presentación....................1

I.2 Area problemática....................2

I.3 Antecedentes....................3

I.3.1 Estudios en torno a la Epistemología Didáctica del Número Real....................5

I.3.2 Análisis de concepciones de los alumnos sobre los Números Reales....................6

I.3.3 Estudios con procesos didácticos sobre el Número Real....................7

I.3.4 Concepciones de los alumnos sobre el Infinito....................7

I.4. El contexto de la investigación y sus agentes....................8

1.5 El Problema de Investigación....................11

1.6. Caracterización de nuestra investigación....................12

1.7 Proceso de investigación....................14

1.8 Tipo de investigación....................16

1.9 Metodología....................17

Capítulo II. Desarrollo del problema de investigación: análisis teórico

II.1 Delimitación del problema de investigación....................23

II.2 Aspectos estructurales del concepto de Número Real....................24

II.2.1 Datos sobre la historia del concepto de Número Real....................26

II.2.2 Reflexiones epistemológicas sobre el concepto de Número Real....................51

II.3 Aspectos cognitivos relativos al concepto de Número Real....................56

II.3.1 La noción de comprensión y los sistemas de representación....................56

II.3.2 Sistemas de representación en el ámbito Numérico....................59

II. 3. 3 Sistemas de representación en el ámbito Geométrico....................61

II.3.4 Conexiones en los sistemas de representación....................62

II.4 Racionalidad del estudio y supuestos en que se basa....................65

II.5 Objetivo General e Hipótesis....................69

Capítulo III. Planificación de la Investigación

III. 1 Formulación del problema. Focos de Investigación....................................73

III. 2 Primer Foco de Investigación:

Notaciones Numéricas de los Números Reales..74

III. 2. 1 Subobjetivos del Primer Foco...74

III. 2. 2 Cuestiones Específicas de Investigación del Primer Foco............75

III. 2. 3 Presentación a los alumnos

de las Cuestiones de Investigación del Primer Foco.....................76

III. 2. 4 Cuestiones Complementarias del Primer Foco.............................78

III. 3 Segundo Foco de Investigación:

Representaciones Geométricas de los Números Reales.............................78

III. 3. 1 Subobjetivos del Segundo Foco..79

III. 3. 2 Cuestiones Específicas de Investigación del Segundo Foco.........81

III. 3. 3 Presentación a los alumnos

de las Cuestiones de Investigación del Segundo Foco..................84

III. 3. 4 Cuestiones Complementarias del Segundo Foco..........................89

III.4 Inserción en el Marco Curricular..89

III. 5 Unidades de Análisis para la organización del Contenido............................91

III. 5. 1 Unidades para el Primer Foco de Investigación............................91

III. 5. 2 Unidades para el Segundo Foco de Investigación.........................95

III. 6 Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido...........................97

III. 6. 1 Unidades para el Primer Foco de Investigación............................97

III. 6. 2 Unidades para el Segundo Foco de Investigación.......................101

III. 6. 3 Clasificación final de las unidades..105

III. 7 Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica....................................106

III. 7. 1 Descripción general de las Unidades de Análisis

para la Interacción Didáctica..107

III. 7. 2 Descripción de las Unidades

relativas a la Gestión del trabajo en el Aula...............................110

III. 7. 3 Descripción de las Unidades

relativas a Gestión del Desarrollo del Contenido.........................111

III. 7. 4 Descripción de las Unidades

relativas a la Construcción de Conocimiento en el Aula.............112

III. 8 Plan de actuación en el aula...116

Capítulo IV. Fase de Acción 1: Implementación; Observación y Resultados; Reflexión y Toma de decisiones

IV.1 Implementación....121
IV.1.1 Instrumentos de observación....121
IV.1.2 Balance entre la Planificación y la Acción....122
IV.1.3 Desarrollo de la Acción....125
IV.1.4 Descripción de las sesiones....125
IV.2 Observación y Resultados....150
IV.2.1 Observación y resultados del Pretest....152
IV.2.1.1 Resultados del Pretest....153
IV.2.1.2 Reflexión general sobre los resultados del Pretest....162
IV.2.2 Observación y resultados de las Cuestiones Complementarias de Investigación....163
IV.2.2.1 Actividad F1 (preguntas 3 y 4)....164
IV.2.2.2 Actividad F2 (pregunta 1)....165
IV.2.2.3 Actividad F8....166
IV.2.2.4 Actividad F10....167
IV.2.2.5 Reflexión general sobre las Cuestiones Complementarias....169
IV.2.3 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación F12....170
IV.2.3.1 Criterios que concretan las unidades de análisis....170
IV.2.3.2 Apartados para observar y valoración de respuestas....171
IV.2.3.3 Resultados de la Cuestión de Investigación F12....174
IV.2.3.4 Reflexión general soble la comprensión en la Cuestión de Investigación F12, a partir de los documentos escritos....178
IV.2.3.5 Estudio de la Interacción en la Cuestión de Investigación F12....179
IV.2.4 Observación y resultados del Examen 1....183
IV.2.4.1Criterios que concretan las unidades de análisis....184
IV.2.4.2 Resultados del Examen....185
IV.2.4.3 Reflexión general sobre los resultados del Examen....191
IV.3 Reflexión sobre la Fase de Acción 1 y Toma de Decisiones....191
IV.3.1 Reflexión sobre la Comprensión del Contenido....191
IV.3.2 Reflexión sobre los Aspectos Actitudinales....199
IV.3.3 Toma de decisiones....202
IV.4 Revisión del plan general de investigación, a partir de los resultados de la Fase de acción 1....204

Capítulo V. Fase de Acción 2: Implementación; Observación y Resultados; Reflexión y Toma de decisiones

V.1 Implementación....207
V.1.1 Instrumentos de observación....207
V.1.2 Balance entre la Planificación y la Acción....208
V.1.3 Desarrollo de la Acción....211
V.1.4 Descripción de las sesiones....211
V.2 Obsérvación y Resultados....249
V.2.1 Observación y resultados del Cuestionario de Repaso....252
V.2.2 Observación y resultados de la Tarjeta 1 sobre el Cuestionario de Repaso....261
V.2.3 Observación y resultados de la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso....262
V.2.3.1 Criterios que concretan las unidades de análisis....263
V.2.3.2 Apartados para observar y valoración de respuestas....263
V.2.3.3 Resultados de la Tarjeta 2....265
V.2.3.4 Reflexión sobre los resultados de la Tarjeta 2....269
V.2.3.5 Toma de decisiones a partir de los resultados de la Tarjeta 2....270
V.2.4. Observación y resultados de la Cuestión de Investigación 1....270
V.2.4.1 Criterios que concretan las unidades de análisis....271
V.2.4.2 Apartados para observar y valoración de respuestas....271
V.2.4.3 Resultados de la Cuestión de Investigación 1....274
V.2.4.4 Reflexión general sobre la comprensión de la Cuestión de Investigación 1, a partir de los documentos escritos....278
V.2.4.5 Estudio de la Interacción Didáctica en la Cuestión de Investigación 1....279
V.2.5. Observación y resultados de la Cuestión de Investigación F14....291
V.2.5.1 Criterios que concretan las unidades de análisis....293
V.2.5.2 Apartados para observar y valoración de respuestas....295
V.2.5.3 Resultados de la Cuestión de Investigación F14....298
V.2.5.4 Reflexión general sobre la comprensión de la Cuestión de Investigación F14, a partir de los documentos escritos....303

V.2.5.5 Estudio de la Interacción Didáctica en la
Cuestión de Investigación F14..279
V.2.6. Observación y resultados de la actividad F16..............................311
V.2.6. Observación y resultados de la actividad F17..............................312
V.2.8 Exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número π
y el número de Oro..315
V.2.9 Observación y resultados de la
Cuestión de Investigación 2..330
V.2.9.1 Criterios que concretan las unidades de análisis..............331
V.2.9.2 Apartados para observar y valoración de respuestas.......332
V.2.9.3 Resultados de la Cuestión de Investigación 2..................335
V.2.9.4 Estudio de la Interacción Didáctica en la
Cuestión de Investigación 2..340
V.2.10 Observación y resultados de la
Cuestión de Investigación 1 (Bis)..350
V.2.10.1 Criterios que concretan las unidades de análisis............352
V.2.10.2 Apartados para observar y valoración de respuestas.....353
V.2.10.3 Resultados de la Cuestión de Investigación 1 (bis).........357
V.2.10.4 Estudio de la Interacción Didáctica en la
Cuestión de Investigación 2...368
V.2.11 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación 3.......370
V.2.11.1 Criterios que concretan las unidades de análisis............371
V.2.11.2 Apartados para observar y valoración de respuestas.....372
V.2.11.3 Resultados de la Cuestión de Investigación 3................373
V.2.11.4 Estudio de la Interacción Didáctica en la
Cuestión de Investigación 2..368
V.2.12 Observación y resultados del Examen 2: Preguntas 1, 4 Y 6........375
V.2.12.1 Criterios que concretan las unidades de análisis............377
V.2.12.2 Apartados para observar y valoración de respuestas.....377
V.2.12.3 Resultados del Examen 2..381

V.3 Reflexión y toma de decisiones sobre la Fase de Acción 2...........................388
V.3.1 Reflexión sobre la Comprensión del Contenido.............................388
V.3.2 Reflexión sobre los aspectos actitudinales....................................422
V.3.3 Toma de decisiones...425

Capítulo VI. Conclusiones y Reflexión Final

VI. 1 Introducción...427
VI. 2 Elementos básicos de la investigación...428

VI. 3 Desarrollo del Objetivo General....................430
VI. 4 Conclusiones....................431
IV.4.1 Viabilidad de la propuesta didáctica con las condiciones enunciadas para la introducción del Número Real a escolares de 14-15 años....................431
IV.4.2 Información relevante de la comprensión de los escolares de 14-15 años sobre el concepto de Número Real....................434
VI. 5 Reflexión final e implicaciones para futuras investigaciones....................450

Bibliografia....................453

Anexos....................475

CAPITULO I

ENCUADRE DEL ESTUDIO

I. 1 Presentación

La realización de la presente tesis doctoral se encuadra dentro del Programa de Formación de Personal Investigador del Ministerio de Educación y Ciencia, que se desarrolla preferentemente a través de las becas para postgraduados. Su autora ha sido becaria de investigación de dicho programa, en la convocatoria correspondiente al año 1989 y hasta el año 1993, y el director de este trabajo ha sido tutor en el proceso de su formación como investigadora en el área de Didáctica de la Matemática.

El presupuesto del que partimos, en lo que se refiere al campo de la Educación, es que la enseñanza y el aprendizaje constituyen una práctica humana y social, y que el compromiso de la Didáctica con la práctica educativa es, precisamente, lo que da sentido a su desarrollo. Consideramos que los planteamientos teóricos sobre temas educativos han de estar conectados con el sistema escolar, la actuación práctica, y la posterior reflexión crítica sobre lo actuado.

Recientemente, numerosos especialistas en Educación Matemática demandan un cambio de actitud para superar la desconexión teoría-práctica que ha caracterizado gran parte de la historia de la Didáctica en general y, en particular, de la Didáctica de la Matemática (Kilpatrick, 1988, 1992; Cobb, 1983; Nickson, 1992). En documentos institucionales, como el preparado por la Comisión Internacional de Educación Matemática (ICMI) en 1979, se pone de manifiesto que es fundamental para la coherencia interna de la disciplina salvar la separación entre las indagaciones pedagógicas fundamentales y la práctica de la enseñanza.

A la hora de encauzar la formación de la autora de la presente tesis como investigadora en el área de Didáctica de la Matemática, pareció clara la necesidad de conjugar la formación teórica con el conocimiento directo de la práctica de la enseñanza en clase y del centro escolar como institución social. Tal decisión responde a un planteamiento teórico sostenido por autores como Kilpatrick (1993): *"La experiencia práctica en la enseñanza es un sustrato esencial para desarrollar cualificaciones en la investigación (en el campo de la didáctica)"* (pg. 8). Consideramos que el análisis teórico sobre cualquier problema relacionado con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas es sólo una parte del conocimiento necesario para investigar en Educación Matemática, que, para ser completo, precisa del conocimiento adquirido por el investigador a través de su experiencia directa con escolares; tal y como afirma Cobb (1983) *"los investigadores que no se ocupan de la enseñanza intensiva y extensiva de niños corren el riesgo de que sus modelos se vean distorsionados para reflejar su propio conocimiento matemático"* (pg.85).

Partiendo de estos presupuestos, establecimos contacto con el Seminario de Matemáticas del I.B. Albaycín de Granada, a través de D. Gregorio Palomino, profesor de dicho centro. A lo largo de los cursos 1990-91, 1991-92, 1992-93 y 1993-94, la autora de esta tesis, se ha hecho cargo de uno de los grupos correspondiente al nivel de 1º de BUP. Todas las responsabilidades como profesora de los cursos han sido asumidas por ella, bajo la tutoría del Dr. Rico y del profesor Palomino. Este trabajo docente ha constituido la parte práctica de su formación como investigadora en el área. De forma simultánea se ha venido realizando la formación teórica, que ha comportado el estudio de distintas disciplinas, cursadas en el Programa de Doctorado Didáctica de la Matemática (bienio 90-92) de la Universidad de Granada, y el análisis en profundidad del tópico "El concepto de Número Real, y su introducción en la Enseñanza Secundaria", que dio lugar a una Memoria de Tercer Ciclo (Romero, 1993), correspondiente a dicho Programa de Doctorado.

El presente trabajo es fruto de la síntesis entre ambas dimensiones, la teórica y la docente, que han dado lugar a la investigación que pasamos a describir.

I. 2 Area Problemática

Nuestro trabajo se realiza dentro de la línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática denominada ***Pensamiento Numérico***, que estudia los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social. El Pensamiento Numérico estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas (Castro, 1994; pg. 1). Es una línea de investigación en Didáctica de la Matemática que aborda este estudio desde una triple orientación. Por un lado se ocupa de estructuras numéricas específicas; en segundo término, estudia las funciones cognitivas que los seres humanos desarrollan mediante el uso de conceptos y propiedades numéricas; en tercer lugar, el Pensamiento Numérico tiene en cuenta los problemas y situaciones que se abordan y resuelven mediante la estructura numérica considerada y, muy especialmente, analiza la fenomenología que subyace a tal estructura.

Desde esta perspectiva, nuestro trabajo se encuadra en el ***Campo Conceptual de los Números Reales***, en el sentido establecido por González (1995): conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura matemática -en este caso de los Números Reales-, junto con las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios de dicho sistema numérico, y con el campo de los fenómenos y situaciones que admiten ser analizados mediante los mismos y de los problemas que pueden ser abordados con ellos (pgs. 226-228).

El concepto de Número Real es, sin duda, un concepto matemático complejo (Feferman, 1989; pgs. 223 y sgs.). Para llegar a su estado actual de elaboración la humanidad ha necesitado múltiples ensayos, interpretaciones, superación de errores, desarrollos conceptuales, formalizaciones y, en definitiva, numerosos procesos interconectados cuya coherencia y validación han requerido un largo periodo histórico que, por los datos conocidos, podemos cifrar en algo más de 7.000 años (Bell, 1989).

Como ocurre con los conceptos matemáticos avanzados, hay una considerable separación entre la forma en que se organizan y estructuran cognitivamente los conceptos e ideas numéricos y el modo en que se formalizan y presentan en orden deductivo en los procesos de enseñanza habituales (Tall, 1991). Una construcción del concepto de Número Real cognitivamente efectiva presenta dificultades considerables y es, necesariamente, lenta, puesto que supone el dominio e integracion de distintos campos numéricos, naturales, enteros y racionales, cada uno con sus propias especificidades simbólicas, operatorias, estructurales y de representación (Hiebert y Carpenter, 1992), junto con la comprensión en profundidad de procesos específicos de paso al límite. Cada uno de los campos numéricos antes mencionados dispone de unos símbolos y representaciones propias, mediante las que se expresan las propiedades y relaciones que constituyen la correspondiente estructura conceptual y que satisfacen unas determinadas funciones cognitivas; todo ello ha de ser integrado por el alumno para la construcción significativa del concepto de Número Real (Romero, 1993; Castro, 1994; González, 1995).

Por lo que respecta a la ***dimensión curricular***, la introducción del Número Real en la enseñanza secundaria en España se ha venido haciendo de forma similar en todos los textos de 1º de B.U.P. correspondientes a la reforma de cuestionarios del año 75, que siguió la línea de implantación en nuestro pais del currículo de la Matemática Moderna, y en el que puede advertirse la influencia estructuralista francesa, que se pone de manifiesto en textos como "Exposé moderne des mathématiques élémentaires" de Lucienne Félix (1966).

En términos generales, podemos considerar que el esquema propuesto por López Fernández (1985), y que presentamos a continuación, es el que han utilizado gran parte de los autores de libros de texto de bachillerato en nuestro país para el plan de estudios vigente desde el año 75.

Dicho esquema incluye los siguientes apartados:

-Estudio y análisis de la biyección existente entre el conjunto Q de los Números Racionales y el conjunto de las expresiones decimales infinitas periódicas.

-Representación gráfica de los elementos de Q sobre una recta graduada mediante unidad arbitrariamente elegida. La recta así completada, recta racional, es inmediatamente aplicada a la medida de longitudes desconocidas.

-Demostración, mediante reducción al absurdo, de la no pertenencia a Q de una expresión decimal infinita no periódica. Suele escogerse la que se obtiene de calcular el radical $\sqrt{2}$.

-Esa expresión decimal irracional se representa, a continuación, mediante un punto en la recta racional. Así se hace ver al alumno la insuficiencia de la recta racional para la medida de longitudes.

-El proceso suele terminar con la definición genérica del conjunto R de los Números Reales y la representación gráfica, mediante intervalos encajados, de cualquiera de sus elementos en la, hasta ahora, llamada recta racional. Esta recta pasa a llamarse real y se propone al alumno como solución definitiva al problema de la medición y comparación de longitudes.

Este proceso u otro similar, impecables desde el punto de vista matemático, presenta, sin embargo, importantes inconvenientes didácticos a nuestro juicio. En efecto, justo al contrario de lo ocurrido en el proceso histórico, el alumno puede quedar con la idea de que un día se demostró la irracionalidad de $\sqrt{2}$ y, en función de ello, se construyó el conjunto de los Números Reales, aplicándose posteriormente a la medición y comparación de longitudes (López Fernández, 1995; pg. 110).

El escolar que inicia su aprendizaje sobre los Números Reales puede entender que el concepto de número irracional, en lugar de surgir y fraguarse como respuesta y solución a problemas concretos, era algo que estaba ahí, esperando que alguna mente humana lo encontrara y presentara a los demás como solución al problema de la medida. Más aún, en el caso de los alumnos, el problema de la medida no es comprendido porque nunca han tenido que afrontarlo como tal.

Por otra parte, apreciamos que la cuestión de las distintas representaciones numéricas y geométricas del Número Real, y de las conexiones y correspondencias entre ellas, se trata de forma muy superficial en el plan de estudios correspondiente al año 75. Por último, este esquema de introducción del Número Real está enfocado a una presentación únicamente expositiva, con un papel asignado a los alumnos de receptores pasivos de unos conocimientos previamente elaborados.

Todos estos problemas delimitan nuestra área de trabajo y serán abordados con mayor profundidad en el Capítulo II de esta memoria.

I. 3 Antecedentes

En términos generales, hemos de resaltar la ***escasez de antecedentes*** sobre el tema de investigación que nos ocupa. En la literatura de investigación hay estudios sobre las intuiciones de los alumnos en torno al concepto de Número Real, pero se observa una falta de investigaciones de tipo curricular que profundicen sobre el desarrollo de tales intuiciones. Nuestra revisión bibliográfica ha sido realizada sobre los siguientes documentos:

-Revistas:

-Educational Studies in Mathematics; desde 1968 (completa).

-For the Learning of Mathematics; desde 1980 (completa).

-Journal for Research in Mathematics Education; desde 1970 (completa).

-The Journal of Mathematical Behaviour; desde 1985 (completa).

-Recherches en Didactiques des Mathématiques; desde 1980 (completa).

-Mathematical Spectrum; desde 1984-85.

-Mathematics Teacher; desde 1985.

-The Mathematical Gazette; desde 1985.

-Bordón; desde 1949.

-Revista de Enseñanza Media; 1956-1968 (completa).

-Revista de Bachillerato y nueva Revista de Enseñanzas Medias (completa).

-Enseñanza de las Ciencias(completa).

-Actas de congresos:

-Actas del congreso PME (desde el PME 8).

-Actas del congreso ICME (desde el ICME4).

Entre los estudios relacionados directamente con el tema del Número Real y su didáctica aparecidos en la literatura de investigación, podemos reconocer varias orientaciones; describimos algunas de ellas en los apartados 1.3.1 a 1.3.4.

I. 3. 1 Estudios en torno a la Epistemología Didáctica del Número Real

-Arsac, 1987. Estudia la génesis histórica de la demostración en Grecia, en el siglo V a.C., a partir de la pregunta: "¿Está la aparición de la demostración enlazada con un problema interno de las matemáticas, o es debido a las características especiales de la sociedad griega?" El problema interno al que se alude es el de la irracionalidad y, al hilo del mismo, se hacen observaciones interesantes a nivel epistemológico y didáctico.

-Arcavi y Bruckheimer, 1987. Trabajo sobre formación de profesores. Los autores hacen uso de episodios históricos del desarrollo de los números irracionales para enfocar su tratamiento didáctico. Delimita tres etapas claves en el desarrollo histórico del concepto de Número Real y caracteriza cada una de ellas.

-Burn, 1990. La investigación evidencia que muchos de los alumnos que empiezan a estudiar matemáticas a nivel universitario creen que la recta real es discreta. Para avanzar en el análisis real, los estudiantes deben dar dos pasos fundamentales: pasar de un conjunto discreto de números a un conjunto denso, y de un conjunto de números denso pero incompleto a un conjunto continuo. El artículo argumenta la dificultad y profundidad del segundo paso.

-Tall y Schwarzenberger, 1978. Estudio sobre el problema de los límites en la expresión decimal de los Números Reales. El artículo presenta ejemplos de conflictos, conscientes e inconscientes, entre las nociones de "decimal" y "límite", de "decimal" y "fracción", de "número" y "límite", de "sucesión" y "serie". Algunos de estos conflictos son debidos a las acepciones que tienen algunos de estos términos en contextos ajenos al de la mátemática, y que interfieren con el significado matemático; otros provienen de experiencias previas de los alumnos; y otros, son debidos a distinciones puramente matemáticas. Los autores abogan por la sensibilidad del educador a las distintas fuentes de conflictos, para mejorar la guía que es posible proporcionar a los estudiantes.

I. 3. 2 Análisis de concepciones de los alumnos sobre los Números Reales

-Monaghan, 1988. Se refiere a las concepciones de los alumnos acerca de la representación decimal de los números reales, que es fundamental para su comprensión, como ésta lo es para la comprensión del Cálculo. El autor argumenta que para tener una comprensión básica de la completitud de R, debe considerarse el límite de la serie correspondiente a una determinada expresión decimal como un número real, es decir, considerar un decimal infinito como un número real. Para ser capaces de hacer esto, los alumnos deben tener un sentido del infinito actual, ya que, de otro modo, los decimales infinitos son considerados como un proceso y no como una entidad. Este es un punto importante para la compresión de los Números Reales. Sin embargo, se pone de manifiesto que la visión que tienen los alumnos de dichos números corresponde a una etapa de infinito potencial, sin llegar a incorporar la noción de infinito actual, en la mayoría de los casos. El autor sostiene que, aunque es posible "hacer" Cálculo sin la comprensión pertinente del infinito actual, no es posible comprender el Cálculo en esas condiciones.

-Robinet, 1986. Presenta un cuestionario diseñado para explorar las ideas de alumnos de 17-18 años y primer año de universidad sobre diversos aspectos de los números reales. Consta de cuatro preguntas: sobre el concepto de número real en general, la densidad en los reales, la diferencia entre decimales y racionales, y la imagen que tienen los estudiantes de la recta real. Los resultados muestran que los alumnos consideran R principalmente como un conjunto de números, es decir, bajo el ámbito numérico, mientras que el ámbito geométrico aparece muy poco en las concepciones de los alumnos; los diferentes conjuntos numéricos que constituyen R son diferenciados mediante su escritura y solamente así; además, la recta no es para los alumnos una buena representación de R en el nivel intuitivo, sin que el modelo sea construido de forma más explícita y sus propiedades sean puestas de manifiesto.

-Romero y Chiesa, C. (en prensa). Se trata de un cuestionario elaborado para estudiar cómo conciben los estudiantes la idea de Continuo en el momento en que se inician en el Cálculo Infinitesimal. El análisis realizado pone de manifiesto que, en el caso de los individuos de la muestra, el esquema conceptual del continuo es un agregado inconexo de imágenes y de enunciados de propiedades. No se detecta con el cuestionario ningún tipo de nexo no trivial entre geometría y números y, además, se observa que la característica más relevante de los números para los alumnos resulta ser, precisamente, su forma de escritura.

I. 3. 3 Estudios con procesos didácticos sobre el Número Real

-Douady, 1980. Realiza una propuesta de situaciones didácticas, ya experimentadas, en las que se enlazan la medida y la representación decimal para la introducción de los Números Reales, con objeto de analizar las estrategias utiilzadas por los alumnos y axiomatizar sus acciones y discurso para determinar los modelos implícitos de los alumnos sobre los Números Reales en situaciones de aprendizaje escolar.

-Coriat y otros, 1993. Presentación de un modelo didáctico, basado en una sucesión que se utiliza para establecer una secuencia de proporciones con las que realizar la mezcla de dos pigmentos; está diseñado para explorar la introducción del concepto de número real con magnitudes distintas a la longitud y el tiempo; experimentado en cursos de formación de profesores.

I. 3. 4 Concepciones de los alumnos sobre el Infinito

-Fishbein y Tirosh, 1979. Se trata de un test de diez items para explorar las intuiciones de niños respecto al infinito. Algunos de los items están directamente relacionados con la recta y el continuo lineal, otros con la correspondencia entre conjuntos infinitos (cardinales) y límites. En los resultados se pone de manifiesto la naturaleza contradictoria del infinito para nuestro esquemas mentales, cuya lógica está adaptada a realidades finitas. Además, sostiene que el tratamiento educativo habitual sólo afecta a la comprensión formal y de nivel superficial del concepto de infinito, mientras que las intuiciones más primitivas permanecen estables. Los autores abogan por la importancia de trabajar con estas intuiciones para poder someterlas a un control matemático apropiado.

-Gardiner, 1985. Sobre la conexión entre los procesos infinitos en matemáticas y aquellas partes de las matemáticas en Secundaria que dependen de los procesos infinitos. El autor presenta dieciséis tópicos en los que los alumnos han de enfrentar los procesos infinitos en las matemáticas de Secundaria y, a partir de aquí, analiza la distinción entre "la psicología de los procesos infinitos" y "la matemática de los procesos infinitos", y los problemas de correspondencia entre ambas.

-Moreno y Waldegg, 1991. Los autores analizan distintas etapas históricas en la evolución del infinito actual y clasifican, a partir de aquí, el nivel en que se encuentran las conceptualizaciones del infinito actual en estudiantes de Secundaria. Dado que los alumnos se quedan en el nivel de la conceptualización de Bolzano, los autores hacen un estudio de las dificultades que encuentran, en la actual estructura curricular, para alcanzar el nivel de conceptualización de Cantor sobre el infinito actual.

-Tall, 1980. Detecta una tendencia en varios niños a interpretar los puntos de la recta en términos de medida y no de cardinalidad; ésto provoca conflictos con resultados derivados de la usual interpretación en términos del sistema de los números reales. El autor proporciona una interpretación formal alternativa que es lógicamente consistente y, sin embargo, consonante con las intuiciones de los niños en lugares que son conflictivos según la interpretación cardinal. El paradigma cardinal es visto entonces como una de las muchas extensiones infinitas posibles del concepto de número, más que una realidad lógica absoluta contra la cual todo debe ser juzgado. El autor llama la atención sobre el hecho de que la investigación psicológica de los puntos de vista de los niños sobre lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño está distorsionada si sólo tenemos en cuenta una interpretación puramente cardinal.

Ante el estado de la cuestión que determinan los escasos estudios encontrados, autores como Monaghan (1988), demandan más investigación en este campo, puesto que se observa que los proyectos realizados hasta ahora se han centrado en analizar las concepciones de los alumnos, pero no han evaluado la eficacia de programas de enseñanza, ni han abordado la utilidad de una aproximación al tema mediante planteamiento de conflictos cognitivos y discusión de las concepciones de partida de los alumnos. En el planteamiento de nuestra investigación, tales concepciones necesitan ser comprendidas e interpretadas para pasar, posteriormente, a proponer vías para su desarrollo y superación. No estamos de acuerdo con la tendencia habitual a sobre-corregirlas cuando surgen, para avanzar rápidamente en la instrucción sobre el tópico; sostenemos que hay que dar un paso más, y desarrollar medios para que los alumnos amplíen y transformen progresivamente dichas concepciones, con objeto de construir un conocimiento matemático más amplio y fundado.

I. 4 El contexto de la investigación y sus agentes

Como ya hemos apuntado al principio, en nuestro estudio concedemos prioridad al ***contexto en que se desarrolla el proceso de enseñanza-aprendizaje***, con toda su riqueza y la multiplicidad de variables que lo conforman. Nuestro objetivo primordial no es explicar los procesos cognitivos subyacentes a la adquisición de ciertos contenidos, sino estudiar el proceso constructivo que desarrollan unos alumnos en torno al concepto de

Número Real en la situación escolar en que dicho proceso tiene lugar. Pensamos que este enfoque permite una mayor aproximación e integración entre la teoría y la práctica.

"Sólo los más recientes desarrollos de la ciencia cognitiva han empezado a abrirse a la dimensión social. Pero durante mucho tiempo, la carácterística básica, común a otras muchas disciplinas, era el enfoque en el individuo" (Bauersfeld, 1994; pg. 134).

De acuerdo con Resnick *"La idea de que el pensamiento es independiente del contexto [...] subyace a la tradición psicológica experimental de la investigación sobre el aprendizaje y el pensamiento. Solamente si se piensa que el pensamiento se comporta de la misma manera en diferentes entornos, se puede esperar aprender algo acerca del mismo, observando la conducta en un entorno muy restringido y a menudo artificial"* (Resnick, 1989; pg. 11).

También autores como Hiebert y Carpenter (1992) proponen que las investigaciones enfocadas en la comprensión de los alumnos se diseñen para que puedan proporcionar un análisis detallado de cómo interaccionan los elementos del proceso de enseñanza-aprendizaje. Compartimos con estos autores la opinión de que las investigaciones que contribuyan a la clarificación de la comprensión de los alumnos serán aquellas que revelen su pensamiento, tal como ocurre en los entornos de la clase, y cómo cambia éste en el curso de la instrucción (Hiebert y Carpenter, 1992; pg. 92).

Además, hemos de tener en cuenta que, como sostienen Bauersfeld (1983) y Crawford (1988), citados por Van der Brink (1990) *"las técnicas de investigación, deben emplearse en entornos de investigación que sean también significativos para los niños. Los investigadores han de buscar esto. No se logra ese contexto meramente por pedir a una persona que relate en voz alta, o diseñando tareas para que alguien pase un test. Uno necesita encontrar contextos adecuados. Los factores socioculturales son de una importancia primaria"* (pg. 37).

Es evidente que esta forma de abordar el estudio de los procesos de enseñanza-aprendizaje, partiendo del contexto en que se producen, es compleja y presenta numerosos problemas. La complejidad social de la situación de aprendizaje se revela como un problema, al mismo tiempo que como una potencialidad adicional.

Además de las dificultades que plantea la descripción del proceso, dinámico y complejo, que constituye la vida en el aula, en nuestro caso concreto contábamos con un segundo dato determinante: la decisión de que la autora de la investigación, en su función de profesora de un curso del nivel correspondiente asumiera el trabajo de campo para desarrollar las clases sobre el tema objeto de investigación. Nos situamos así en el caso del ***Investigador como miembro pleno de la situación que estudia***, dentro de la tipología ofrecida por Adler y Adler (1994) para clasificar el papel de los investigadores cualitativos con respecto a las situaciones objeto de estudio. Estos autores consideran las opciones siguientes: el investigador miembro pleno de la situación, el investigador participante activo de la misma y el investigador como miembro periférico (pg. 379).

La decisión de que la investigadora asumiera el papel de profesora en nuestro estudio viene justificada por varios argumentos; de lo expuesto hasta el momento señalamos los siguientes:

-El tratamiento curricular que se lleva a cabo en la actualidad del Número Real, tal como hemos visto, no facilitaba el tipo de indagación que nos habíamos propuesto; además, dicha indagación planteaba dificultades para ser asumida por otro profesor.

-Nuestros presupuestos sobre la importancia de estudiar la actividad constructiva del conocimiento de los alumnos en el contexto en que ésta se produce, es decir, en la clase, hacían aparecer este espacio como escenario natural de nuestra investigación.

-El trabajo directo con los alumnos para la puesta en práctica y desarrollo de nuestras ideas presentaba múltiples ventajas ya que, a través de la interacción personal, es más fácil controlar la recogida de información y obtener datos significativos para las cuestiones planteadas en nuestro estudio; más aún, teniendo en cuenta que éstas cuestiones pueden ir evolucionando o matizándose en el transcurso del proceso didáctico, que se concibe como dinámico e interactivo.

De esta forma, la autora de la presente tesis asumía el doble papel de profesora e investigadora. Siguiendo a Richardson (1994), consideramos que la noción de profesor investigador tiene varios significados posibles. Uno de esos significados viene dado por la concepción de que enseñar es investigar. Este argumento sugiere que el trabajo de enseñanza es como el trabajo de investigación. El profesor experimenta con un tratamiento o actividad, toma datos, y toma decisiones sobre la base de esos datos y juzga si la actividad funciona (Neilson, 1990). Una segunda aproximación se refiere a varias concepciones del profesor como un práctico reflexivo (Dewey, 1933; Louden, 1991; Russell y Munby, 1992; Schon, 1983). Una tercera concepción se refiere a la Investigación-Acción; en esta forma de investigación del profesor, los profesores como grupo pueden llegar a ser más sistemáticos al pensar sobre su trabajo, tomar y analizar datos en relación con problemas percibidos en sus clases y en sus escuelas y, por tanto, comprender y mejorar su práctica (Carr y Kemmis, 1986; Elliot, 1976-77).

Una cuarta noción del profesor investigador es cualitativamente distinta de las tres precedentes. Es la noción del ***investigador experto en didáctica de la disciplna y en su contenido como profesor***, que tiene en nuestra comunidad el precedente de Castro (1994). Esta forma de investigación tiene como objetivo contribuir a la base de conocimientos que puedan ser utilizados dentro de la comunidad educativa, a través de las formas compartidas en la comunidad científica en cuanto a diseño, metodología, presentación, etc.

Las tres primeras nociones descritas pueden ser consideradas como "indagación práctica", mientras que la cuarta categoría entraría dentro de lo que se considera "investigación formal". La principal distinción entre estas dos formas de investigación es que la indagación práctica se lleva a cabo en el trabajo diario de cada uno con propósitos de mejora de dicho trabajo: hay una preocupación inmediata por encontrar soluciones prácticas a los problemas que se presentan en la realidad cotidiana; sin embargo, en el modolo del investigador experto en contenido como profesor, los problemas de enseñanza de un determinado tópico son definidos por vía teórica y existe una fuerte preocupación por generar pautas de contenido teórico, así como secuencias de aprendizaje empíricamente validadas a partir del estudio de los procesos didácticos experimentados con los alumnos. Además, los resultados de este tipo de investigación han de ser contrastados y validados dentro de la comunidad científica, mientras que el individuo o grupo de prácticos implicados en una indagación práctica necesitan responder a un sentido más personal de validación y avance. (Richardson, 1994).

El papel de la autora de esta tesis como investigadora-profesora, se sitúa dentro de la cuarta categoría de las anteriormente descritas. La presente investigación ha sido diseñada para que la investigadora asumiera el papel de profesora durante la fase práctica de la misma, correspondiente al proceso didáctico que tuvo lugar durante los meses Octubre a Marzo del curso 1993-94, y para hacer posible, sobre la base de esta fase práctica, la investigación formal en los términos anteriormente descritos.

I. 5 El Problema de Investigación

Así pues, en una primera aproximación, nuestro ***problema general de investigación*** se centra en: Explorar vías para la introducción al concepto de Número Real en el curriculum de Enseñanza Secundaria. Detectar y estudiar las dificultades y potencialidades que se pueden presentar en la comprensión matemática de los alumnos sobre estos conceptos, en un contexto escolar, explicitando las limitaciones y posibilidades para el aprendizaje que proporciona el aula como escenario natural complejo.

Para abordar el análisis teórico de esta cuestión, nos apoyaremos en el estudio y revisión de los problemas fundamentales que han surgido históricamente a lo largo del desarrollo del concepto de Número Real (Artigue, 1990); en la reflexión sobre los sistemas usuales de representación para el Número Real y sus elementos, así como las relaciones entre ellos (Hiebert, 1992); y, por último, en el análisis del papel que juega la interacción social en la construcción del conocimiento (Lerman, 1989).

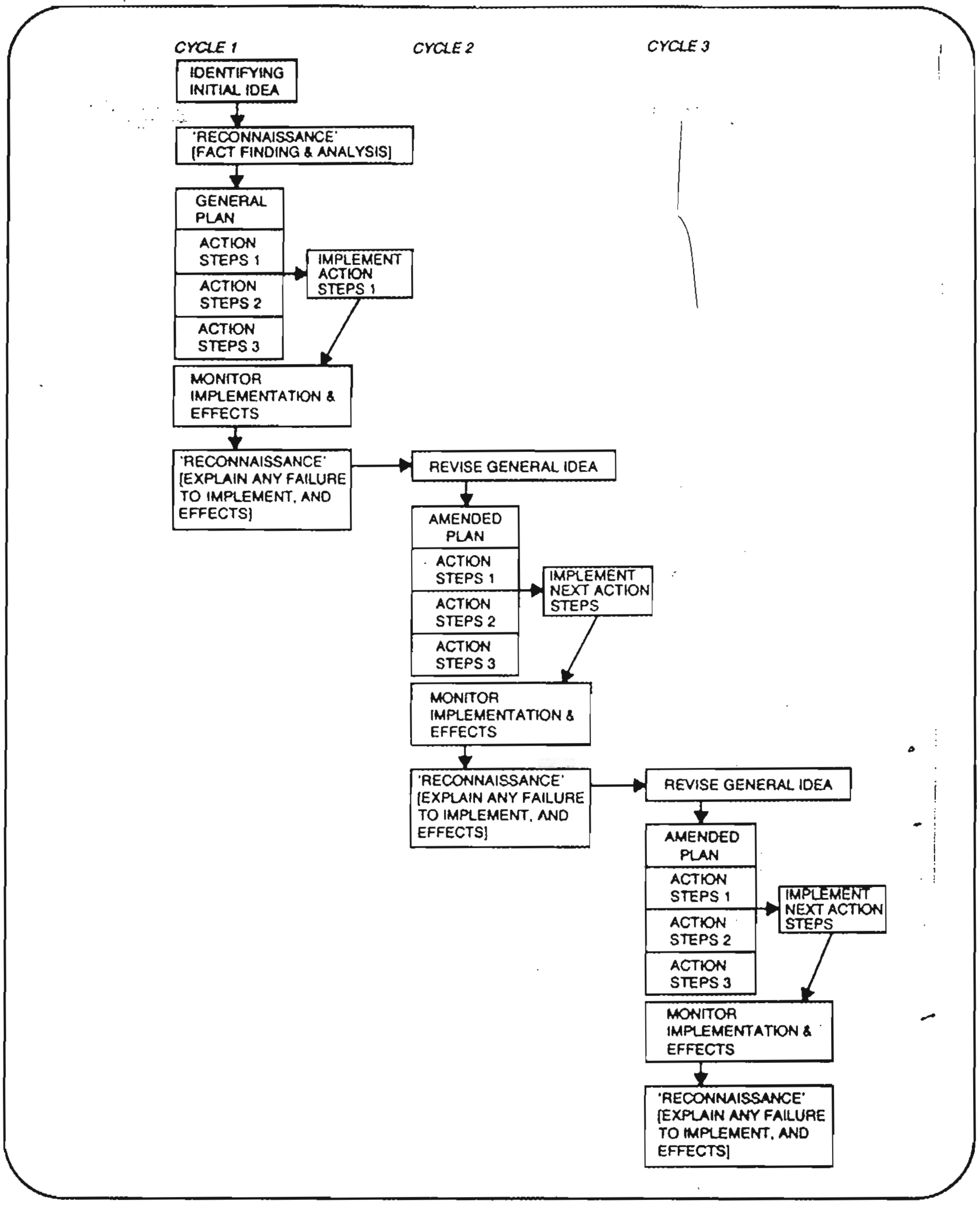
I. 6 Caracterización de nuestra investigación

Arnal (1992) considera dos líneas tipológicas dentro de la ***Investigación-Acción***: una basada en la escuela lewiniana y otra en la escuela inglesa. Dentro de la tipología de Lewin señala cuatro modalidades: la investigación-acción diagnóstica, la participativa, la empírica y la experimental (pg. 250).

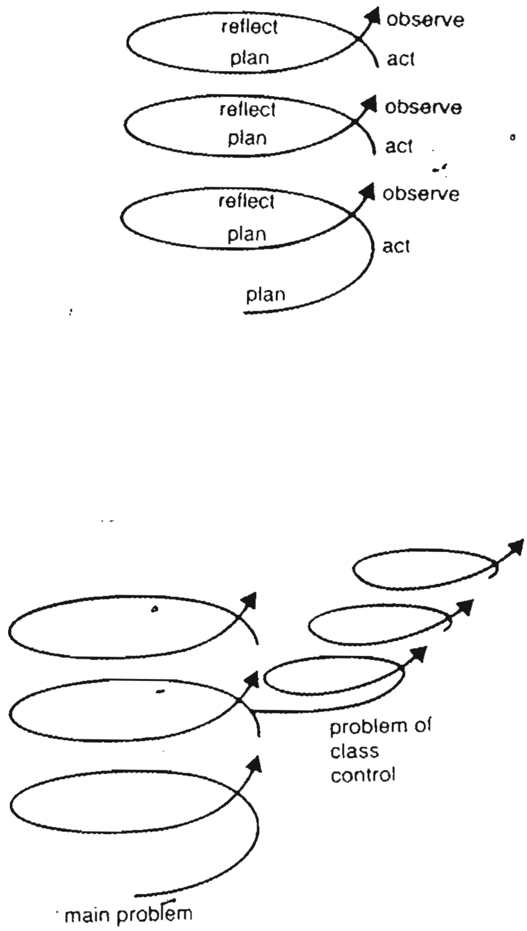
Nuestro trabajo ha sido concebido dentro de la línea de Investigación-Acción; siguiendo la tipología anterior, se situaría en la intersección entre la categoría de investigación-acción diagnóstica (por cuanto que está enfocada a la recogida de datos, su interpretación, su diagnóstico y la recomendación de unas medidas de acción), con la investigación-acción empírica (por cuanto estudia un problema social mediante una acción que supone un cambio y valora los efectos producidos, todo ello de la manera más sistemática posible).

El esquema general de trabajo se basa en las etapas que se han descrito como fundamentales de una Investigación en la Acción: Planificación, Acción, Observación y Reflexión, así como la idea de secuencialidad de las mismas en forma de ciclos (Lewin, 1946; Kemmis, 1982; Elliot, 1973; Ebbut, 1985; Whitehead, 1984; citados por McNiff, 1988; Castro, 1994).

El esquema propuesto por Elliot (citado por McNiff, 1988; pg. 30) recoge la idea básica de las fases cíclicas, y se adapta especialmente bien para la descripción de nuestro proceso (fig. 1.1).

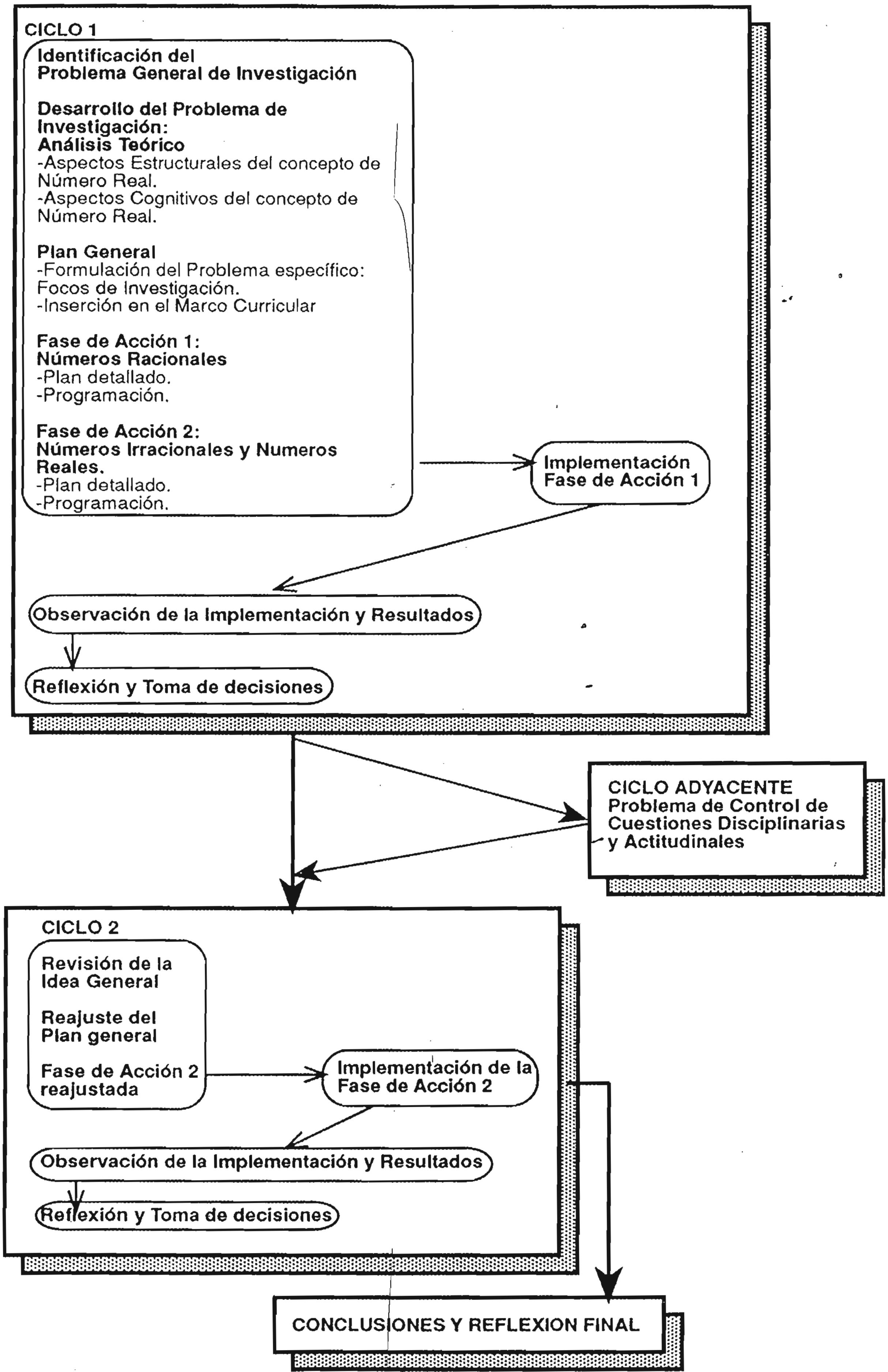


A este esquema hemos incorporado la aportación de Whitehead (citado por McNiff, 1988; pg. 44), que se refiere a la posibilidad de dar cuenta de episodios espontáneos a lo largo del proceso de investigación-acción, mediante espirales adyacentes a la correspondiente al problema principal de investigación. Este marco de espirales adyacentes permite acomodar el tratamiento que se da a problemas subyacentes al problema fundamental de investigación, cuyo tratamiento se considera necesario para abordar el problema principal (fig. 1.2).



I. 7 Proceso de Investigación

A partir de los dos esquemas teóricos del apartado anterior, elaboramos el esquema general de nuestra investigación que se presenta en la fig. 1.3. Hemos de advertir que dicho esquema no ha sido un plan a priori, sino una sintesis de nuestro proceso de investigación-acción, que pretende facilitar la comprensión del mismo y servir de guía para el desarrollo de su exposición. Asímismo, la linealidad en la descripción del proceso de investigación en esta memoria obedece a motivos de claridad de exposición; para hacerla posible, ha sido necesario explicitar una estructura que, en varios aspectos, ha permanecido implícita durante la realización del trabajo de investigación propiamente dicho.


CICLO 1
Identificación del Problema General de Investigación
Desarrollo del Problema de Investigación:
Análisis Teórico
-Aspectos Estructurales del concepto de Número Real.
-Aspectos Cognitivos del concepto de Número Real.
Plan General
-Formulación del Problema específico: Focos de Investigación.
-Inserción en el Marco Curricular
Fase de Acción 1:
Números Racionales
-Plan detallado.
-Programación.
Fase de Acción 2:
Números Irracionales y Numeros Reales.
-Plan detallado.
-Programación.
Implementación Fase de Acción 1
Observación de la Implementación y Resultados
Reflexión y Toma de decisiones
CICLO ADYACENTE
Problema de Control de Cuestiones Disciplinarias y Actitudinales
CICLO 2
Revisión de la Idea General
Reajuste del Plan general
Fase de Acción 2 reajustada
Implementación de la Fase de Acción 2
Observación de la Implementación y Resultados
Reflexión y Toma de decisiones
CONCLUSIONES Y REFLEXION FINAL

I. 8 Tipo de Investigación

Según autores como Bisquerra (1989), bajo el término de **Investigación-Acción** se agrupan un conjunto de tendencias sobre investigación educativa, que comparten unos principios comunes, pero que no se acomodan a un modelo único de Investigación-Acción. Las opciones metodológicas cubren un espectro amplio: desde la utilización de metodología cuantitativa (incluyendo experimentación, control de variables, análisis estadístico etc.) hasta el uso exclusivo de métodos cualitativos (pg. 279).

La investigación que hemos llevado a cabo en nuestro caso se encuadra dentro del **paradigma cualitativo**, por cuanto acentuamos la consideración de la naturaleza socialmente construida de la realidad, la íntima relación entre el investigador y el problema investigado, y los condicionantes situacionales que dan forma a la investigación (Denzin y Lincoln, 1994; pg. 4). Dentro de los atributos que, según Cook y Reichard (1982; pg.29), caracterizan el paradigma cualitativo, en nuestro estudio destacamos los siguientes:

-Concepción global fenomenológica "interesado en comprender la conducta humana desde el propio marco de referencia de quien actúa".

-Observación naturalista.

-Próximo a los datos; perspectiva "desde dentro".

-Fundamentado en la realidad, orientado a los descubrimientos, exploratorio, expansionista, descriptivo e inductivo.

-Orientado al proceso.

-Válido: datos "reales", "ricos" y "profundos".

-Holista.

-Asume una realidad dinámica.

El paradigma cualitativo concibe el mundo social mediante el desarrollo de conceptos y teorías que estén basados en los datos, es decir, conceptos y teorías derivados de los datos e ilustrados por ejemplos característicos de los datos.

> *"Cualquier entendimiento científico de la acción humana, en cualquier nivel de ordenación o de generalidad, debe empezar y basarse en un entendimiento de la vida cotidiana de los miembros que realizan estas acciones. No llegar a advertir esto y no actuar al respecto de un modo consecuente, es cometer lo que podíamos denominar falacia del abstraccionismo, es decir, la falacia de creer que uno puede conocer de forma más abstracta lo que no puede comprender de una forma particular"* (Douglas, 1970:11). Citado por Cook y Reichard (1986; pg.63).

Un investigador cualitativo prefiere que la "teoría"[1] emerja de los propios datos. Siguiendo ideas de Filstead (1986), consideramos que esta cimentación de la teoría en los

[1] Teoría consiste en relaciones plausibles propuestas entre conceptos y conjuntos de conceptos. Aunque solamente plausible, su plausibilidad ha de ser fortalecida a través de la investigación continua (Strauss y Corbin, 1994; pg. 278)

datos incrementa la capacidad del investigador para comprender y, quizá, para concebir en definitiva una explicación del fenómeno, que sea consecuente con su aparición en el mundo social. Al tratar de proporcionar una base a la teoría, el investigador intenta averiguar qué esquemas de explicación son empleados por las materias sometidas a estudio para proporcionar un sentido a las realidades sociales con las que se encuentran; qué teorías, conceptos y categorías sugieren los propios datos. La insistencia en la proximidad a los mundos cotidianos de los participantes y en captar *in situ* sus acciones proporciona un refuerzo sólido a las explicaciones que finalmente desarrolle la investigación (pgs. 63-65).

En este sentido, esta investigación está diseñada como un **estudio de caso**. Dentro de los estudios de caso Stake (1994), identifica tres tipos distintos: el estudio de caso Intrínseco, el estudio de caso Instrumental y el estudio de caso Colectivo (pg. 237). Ateniéndonos a esta clasificación, el nuestro pertenece a la categoría Instrumental, por cuanto un caso particular, la experiencia curricular de introducción al concepto de Número Real con una clase de alumnos de 1º de BUP, es examinado con vistas a proporcionar luz sobre un tema. El caso es de un interés secundario; juega un papel de soporte, facilitando nuestra comprensión de algo más: posibles vías para la introducción al concepto de Número Real en el curriculum de Enseñanza Secundaria, y dificultades y potencialidades que puede presentar el tópico para el desarrollo de la comprensión matemática de los alumnos. Es decir, el caso es examinado en profundidad, se hace un escrutinio del contexto y se detallan sus actividades, pero su finalidad se centra en avanzar nuestra comprensión sobre un interés extrínseco más amplio. En definitiva, el estudio de caso es un paso útil en la búsqueda de indicios para avanzar hacia otro grado de generalización, si bien no es necesario poner el énfasis en la generalización, especialmente cuando se trata de primeras aproximaciones a un tema.

1. 9 Metodología

El planteamiento de una investigación consta no sólo de una concepción filosófica global, sino también de un nexo con un determinado tipo de métodos para llevar a cabo la investigación. Según Cook y Reichard (1986), la distinción más notable entre los paradigmas cuantitativo y cualitativo corresponde a la dimensión de verificación frente a la de descubrimiento. Los métodos cuantitativos han sido desarrollados más directamente para la tarea de verificar y de confirmar teorías y, en gran medida, los métodos cualitativos fueron desarrollados, deliberadamente, para la tarea de descubrir o generar teorías. No es sorprendente entonces que cada familia de métodos haya llegado a estar asociada con distintas posiciones paradigmáticas (pg. 38).

Recogida de datos

La investigación cualitativa puede utilizar *técnicas de recogida de datos* como los estudios de casos, las entrevistas en profundidad, la observación participante, fotografías, vídeo, grabaciones, etc. Con esto se pretende estudiar lo que la gente "dice y hace", en lugar de lo que "dice que hace", más propio de las encuestas y métodos cuantitativos. (Bisquerra, 1989; pg. 258).

En muchos trabajos cualitativos se intenta un análisis profundo del comportamiento y su significado en la interacción social diaria, a través de un trabajo de campo que incluye:

-participación intensiva y a largo plazo con los sujetos;

-registro cuidadoso de lo que acontece, mediante notas de campo y recogida de evidencia documental (manuscritos, ejemplos de trabajos de los alumnos, fotos, cassette, vídeo, etc.);

-reflexión analítica a partir de los registros realizados y la documentación obtenida;

-descripción detallada, utilizando procedimientos narrativos.

Todas las técnicas mencionadas han sido utilizadas en algún momento durante esta investigación.

Análisis de Datos:

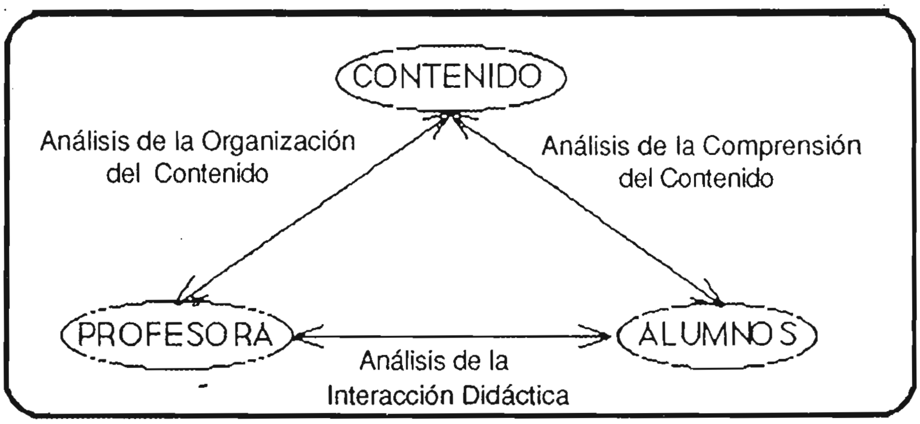
Tal como hemos señalado anteriormente, nuestra investigación está enfocada para hacer surgir conceptos y planteamientos teóricos a partir de los propios datos, mediante su análisis.

El investigador cualitativo utiliza el **análisis inductivo**, lo cual significa que las categorías, temas y regularidades emergen de los datos. Las categorías que emergen de las notas de campo, documentos y entrevistas, no son impuestas a priori a los datos. Al comienzo de su trabajo el investigador desarrolla un sistema para codificar y categorizar los datos. La estrategia de inducción analítica implica el examen de estos datos en busca de categorías de fenómenos y de relaciones entre esas categorías; a tal fin, se desarrollan tipologías e hipótesis de trabajo a partir de los casos iniciales que, posteriormente, van siendo reelaboradas o modificadas con la aparición de nuevos casos (Goetz y Lecompte, 1988; pg. 186).

Para realizar este tipo de análisis de datos existen diversas técnicas; una de las técnicas más características de la metodología cualitativa es la **Triangulación**. Su razón de ser está en que los datos de la observación y las lecturas de las mediciones son entendidos como resultado de una transacción, en la que tanto el observador como el objeto de investigación contribuyen a la forma de los datos. Si se dispone de una sola observación es imposible diferenciar los elementos subjetivos y los objetivos. Sin embargo, cuando se pueden ajustar observaciones por medio de instrumentos diferentes y desde emplazamientos distintos, como referidas a "los mismos" objetos, entonces es posible distinguir en los datos los componentes debidos al observador y a lo observado. (Campbell citado en Cook y Reichard, 1982; pg. 99).

Denzin (1978), citado por Janesick (1994), identifica cuatro tipos básicos de triangulación. Triangulación de datos: uso de una variedad de fuentes de datos en un estudio); triangulación de investigadores: utilización de diferentes investigadores o evaluadores; triangulación teórica: uso de múltiples perspectivas para interpretar un mismo conjunto de datos; y triangulación metodológica: utilización de múltiples medios para estudiar un sólo problema.

En nuestro caso, realizamos una **triangulación de investigadores**: profesora-investigadora y director de la investigación, y una **triangulación de datos**, utilizando diversas fuentes: documentos escritos de los alumnos, diario de la profesora-investigadora, grabaciones en audio y grabaciones en vídeo, los cuales serán analizados y contrastados entre sí, con vistas a obtener información sobre las relaciones entre los tres componentes del triángulo didáctico Contenido-Alumnos-Profesora.



El análisis de las tres relaciones: Profesora-Contenido, Alumnos-Contenido y Profesora-Alumnos será realizado mediante unidades de análisis diseñadas con tal fin. Dichas unidades son:

-Las **Unidades de Análisis para la Organización del Contenido** permiten conocer qué aspectos concretos de contenido se tratan y con qué desarrollo se proponen.

-Las **Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido** permiten interpretar las distintas conexiones establecidas por diferentes alumnos entre las piezas de conocimiento matemático sobre las que han trabajado

-Las **Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica** permiten abordar el estudio de las interacciones que han tenido lugar entre la profesora y los alumnos a lo largo del proceso didáctico y su relación con la construcción de conocimiento.

En el análisis de las tres relaciones mencionadas, a las que en este trabajo denominamos **aristas**, nuestro interés primordial está en estudiar la Comprensión del Contenido Matemático (en el sentido de Hiebert y Carpenter, explicitado en el apartado II. 3. 1 de esta memoria) por parte de los Alumnos; realizamos dicho estudio mediante el análisis de la relación Alumnos-Contenido. De hecho, el estudio que se realiza sobre las otras dos relaciones tiene por finalidad poner de manifiesto cómo se ha estructurado el

Contenido y en qué marco de Interacción social se ha trabajado. De este modo queremos contextualizar y precisar las condiciones bajo las que los alumnos han elaborado su conocimiento sobre Números Irracionales y ayudar así a delimitar los factores que facilitan tal Comprensión y profundizar en la interpretación de los mismos.

En los próximos capítulos describiremos detalladamente las unidades de análisis elaboradas para el estudio de cada una de las aristas del triángulo didáctico Contenido-Alumnos-Profesora, asi como los datos recogidos, la interpretación de dichos datos y la reflexión realizada para establecer conclusiones al respecto.

Fiabilidad y Validez.

Para evaluar la calidad científica de un trabajo de investigación han de abordarse las cuestiones de su Fiabilidad y Validez. Aunque algunos autores discuten la pertinencia de la utilización de estos criterios, heredados del paradigma cuantitativo, para la evaluación de estudios cualitativos (Wolcott, 1990; Donmoyer, 1990; citados por Janesick, 1994; pg. 216), la mayoría están de acuerdo en que dichos criterios siguen siendo útiles si son interpretados adecuadamente dentro de este último paradigma (Janesick, 1994; pg. 217).

La Fiabilidad se refiere a la medida en que se pueden replicar los estudios. Exige que un investigador, que utilice los mismos métodos que otros, pueda replicar los resultados obtenidos. Ello plantea un enorme problema en las investigaciones sobre el comportamiento natural o los fenómenos únicos. Cuestiones de unicidad e idiosincrasia pueden llevar a afirmar que es imposible replicar un estudio cualitativo, más aún teniendo en cuenta que este tipo de estudios tienen lugar en escenarios naturales y, a menudo, intentan registrar procesos de cambio. Sin embargo, la generación, perfeccionamiento y validación de constructos y postulados puede no exigir la replicación de las situaciones. Por lo demás, puesto que el comportamiento humano nunca es estático, ningún estudio, independientemente de sus métodos y diseños, puede ser replicado con exactitud. (Goetz y Lecompte, 1988; pg. 214).

A pesar de lo expuesto anteriormente, el investigador cualitativo aumenta la **Fiabilidad externa** de sus datos intentando dar solución a cuatro problemas principales: los referidos al status del investigador, la selección de informantes, las situaciones y condiciones sociales, los constructos y premisas analíticos y los métodos de recogida y análisis de datos (Goetz y Lecompte, 1988; pg. 217). Para fortalecer la fiabilidad externa de nuestro estudio hemos dado cumplida información en cuanto al status de la investigadora y hemos avanzado algunas cuestiones sobre los constructos y premisas analíticos y sobre los métodos de recogida y análisis de datos, que serán ampliadas y detalladas en el transcurso de los capítulos posteriores. Por lo que respecta a la selección de los informantes y a la situación y condiciones sociales, ya hemos mencionado que el estudio ha sido realizado con un grupo de alumnos y alumnas escogido al azar entre los grupos de 1º de B.U.P., nivel en el que hasta el momento se ha venido introduciendo a nivel curricular el tópico que pretendemos estudiar, de un Instituto de Bachillerato público, perteneciente al área urbana de la ciudad de Granada, de nivel socioeconómico medio o medio-bajo; la edad de los alumnos está comprendida entre los 13-14 años.

El problema de la **Fiabilidad Interna** de los estudios cualitativos plantea la cuestión de la coincidencia entre varios investigadores que actúen en un solo estudio. Para fortalecer la fiabilidad interna de nuestro estudio hemos seguido dos de las estrategias propuestas por Goetz y Lecompte (1988):

-Los descriptores de bajo nivel inferencial: transcripción literal de las conversaciones de los participantes, descripciones tomadas de las notas de campo u otros registros observacionales y datos brutos como citas directas a partir de grabaciones en audio. Estos descriptores constituyen la evidencia principal para estimar la validez de un informe ya que, basándose en este material, los lectores pueden aceptar, rechazar o modificar las conclusiones extraídas por el investigador.

-La revisión por otros investigadores; en este caso por el director de la tesis y otros colegas que han intervenido a lo largo del desarrollo del análisis de los datos; por último, la publicación de los resultados que constituye en sí misma una forma de ofrecer el material a la revisión de otros expertos (pg. 221).

La Validez tiene que ver con la cuestión de cómo justificamos las interpretaciones que hacemos en la investigación. En la investigación empírica o cuantitativa se establece tradicionalmente una dicotomía entre validez interna y validez externa. La primera se refiere a la confianza con la que podemos reclamar que nuestros resultados surgen de las condiciones experimentales, y la segunda con nuestra habilidad para generalizar los resultados a otras condiciones y circunstancias.

Según Goetz y Lecompte (1988), una investigación del tipo de la que hemos llevado a cabo posee un alto grado de **Validez Interna**, que viene avalado por:

-La convivencia con los participantes, en este caso la propia participación de la investigadora; la práctica de prolongar la recogida de datos durante un largo periodo de tiempo, que ha ofrecido la oportunidad de efectuar análisis y comparaciones continuas de dichos datos con el fin de perfeccionar los constructos.

-La realización de la investigación en un escenario natural, que ha reflejado las experiencias vitales de los participantes con mayor exactitud de la que permiten escenarios de tipo más artificial o los laboratorios.

-El proceso de autovigilancia de la investigadora, denominado subjetividad disciplinada, por el que todas las fases de su actividad se han sometido a un cuestionamiento y reevaluación continuos (pg. 224).

Si bien la influencia del investigador participante y el rol que ha asumido puede afectar en determinado tipo de estudios a la validez de los datos que proporcionan los informantes, creemos que esto no ha sido un problema en nuestro caso dada la relación cotidiana de la investigadora como profesora del grupo de alumnos con los que se ha realizado el trabajo de campo. No obstante, este punto requeriría una meta-valoración o evaluación de segundo nivel, desde el punto de vista de la metodología de investigación.

Por lo que se refiere a la **Validez externa**, estamos de acuerdo con Firestone (1993) en que una de las mayores dificultades de la investigación cualitativa consiste en generalizar los hallazgos a situaciones distintas de las estudiadas. Usualmente, los tres argumentos empleados para generalizar a partir de los datos son: la extrapolación desde una muestra a la población a partir de análisis estadísticos, la generalización analítica, y la transferencia de un caso a otro. A menudo, la investigación cualitativa ha utilizado el último argumento, pero también se han hecho esfuerzos para hacer uso de los dos primeros (pg. 16).

En la generalización de resultados a partir de la **transferencia de un estudio de caso a otro**, la conexión entre el caso descrito y la situación en que puede aplicarse no se lleva a cabo tanto por criterios formales de correspondencia como a través del conocimiento implícito del lector. Es decir, la responsabilidad de la transferencia pasa del investigador al lector que quiera aplicar los descubrimientos. Sin embargo, el investigador sí tiene la responsabilidad de proporcionar una decripción lo más rica, profunda y detallada posible del caso estudiado; puesto que el investigador no puede conocer la situación en que los lectores consideren aplicar los resultados del estudio, debe describir un amplio rango de aspectos del proceso estudiado y de los hallazgos obtenidos, para que los lectores tengan información suficiente para evaluar la correspondencia entre la situación estudiada y la suya propia, especialmente porque las situaciones pueden diferir bastante (Firestone, 1993; pg. 18). En nuestra investigación procuramos una descripción lo más rica y detallada posible del proceso, a fin de que sea posible ubicar sus distintas coordenadas.

Dado que el carácter de este estudio es fundamentalmente exploratorio, la **generalización analítica**, esto es, la generalización de un conjunto de datos particulares a una teoría más amplia, puede resultar prematura. Entendemos que generalizar una teoría es proporcionar evidencia que apoye, aunque no pruebe definitivamente dicha teoría. En cuanto a la generalización mediante la extrapolación a partir de una muestra, con técnicas estadísticas, queda fuera por completo de nuestras intenciones, dado el carácter de esta investigación y los fines, en principio exploratorios, que se propone.

CAPITULO II

DESARROLLO DEL PROBLEMA DE INVESTIGACION: ANALISIS TEORICO

II. 1 Delimitación del problema de investigación

En el capítulo anterior establecimos el área problemática en la que se sitúa nuestro estudio e identificamos el problema general de investigación mediante un primer enunciado:

Explorar vías para la introducción al concepto de Número Real en el currículo de Enseñanza Secundaria. Detectar, analizar y evaluar las dificultades y potencialidades que pueden presentar para el desarrollo de la comprensión matemática de los alumnos, en un contexto curricular, explicitando las limitaciones y posibilidades para el aprendizaje que proporciona el aula como escenario natural complejo.

Para delimitar, articular y concretar este problema hemos comenzado por realizar el estudio detallado de las dos primeras componentes del campo conceptual de los Números Reales, descritas en el capítulo anterior; dichas componentes son: la estructura de este conjunto numérico y las funciones o competencias cognitivas asociadas a dicho conjunto numérico.

Para abordar los aspectos estructurales hemos realizado un estudio de la evolución histórica del concepto de Número Real, centrándonos en los obstáculos y rupturas conceptuales que se detectan en las reflexiones histórico-críticas sobre este campo (Artigue, 1990; González, 1995); también hemos considerado con detalle diferentes sistemas de representación de los Números Reales que se han ido consolidando a lo largo de la historia y los problemas implicados en cada uno de estos sistemas.

Para realizar el estudio cognitivo partimos de la noción de comprensión de Hiebert y Carpenter (1992) y nos centramos sobre los sistemas de representación de los Números Reales, sus elementos y relaciones, para poner de manifiesto la utilización que los alumnos hacen de cada uno de estos sistemas, los significados que les atribuyen y los contextos en los que los emplean, así como las contradiciones reales o aparentes que surgen al trabajar con los diferentes sistemas. Nos proponemos provocar diferentes organizaciones de estos conocimientos que pongan de relieve la complejidad y dificultades de las ideas en estudio; de este modo nos aproximamos a la comprensión por parte de los alumnos del tópico que nos ocupa.

En cuanto a la tercera componente de nuestro campo conceptual, que hace referencia a la fenomenología de los conceptos implicados, no se ha incorporado explícitamente a nuestro estudio; es decir, no hemos realizado una caracterización y estudio sistemático de los fenómenos, problemas y situaciones propios del campo de los Números Reales. Sin embargo, hemos utilizado algunos de estos problemas, en especial los relativos a la medida de longitudes, en las cuestiones que hemos propuesto para el estudio de la comprensión de los escolares.

Además, al explicitar la racionalidad de nuestro estudio y los supuestos en que se basa, hemos puesto especial acento en los aspectos sociales y contextuales en la construcción del conocimiento por parte de los alumnos.

Así pues, el presente capítulo consta de tres partes bien diferenciadas. La primera parte (apartado II. 2) está dedicada a una revisión histórica del concepto de Número Real y un análisis epistemológico de los principales obstáculos detectados sobre este concepto a lo largo del tiempo; esta revisión y análisis permiten determinar las componentes teóricas básicas sobre las que vamos a iniciar el estudio de esta estructura matemática con escolares de 14- 15 años. La segunda parte (apartado II. 3) está dedicada a presentar y conectar los diferentes componentes teóricos mediante los que abordamos el tratamiento cognitivo del campo conceptual de los Números reales; nociones fundamentales son la de comprensión y la de sistemas de representación, referidas especialmente al conocimiento matemático. La tercera parte (apartado II. 4) ubica nuestra investigación en el marco teórico presentado y discute su racionalidad. Concluímos el capítulo reenunciando el Objetivo General de la investigación y la Hipótesi que sustentan (apartado II.5).

II. 2 Aspectos estructurales: aproximación histórica y reflexiones epistemológicas.

Nuestra aproximación a los conceptos involucrados en los Números Reales no se centra, en primera instancia, en la estructura formal usual (algebraica o topológica) de este conjunto numérico. Habiendo constatado las dificultades que presenta la comprensión de dicha estructura formal en el terreno didáctico (Gardiner, 1985), nuestra intención es dirigirnos al estudio de la historia y la epistemología de estos conceptos, con objeto de dilucidar los puntos relevantes en su evolución, que han ido determinando la construcción de esta estructura formal con tal nivel de complejidad. Al proceder así, pretendemos determinar puntos de anclaje sobre los que apoyar un plan de acción en el terreno didáctico que realice un acercamiento progresivo y consistente al conjunto de los Números Reales.

El estudio de la evolución histórica de una estructura conceptual o de un concepto matemático es una fuente de información enormemente valiosa para el análisis conceptual del tópico en estudio, puesto que la reflexión sobre la construcción histórica aporta criterios para conocer y profundizar sobre los procesos individuales y sociales de construcción del conocimiento correspondiente.

Son varios los argumentos que podemos tener en cuenta en este sentido:

-En primer lugar, la revisión histórica indica cuáles fueron los conflictos y las dificultades a las que los matemáticos, y la comunidad científica de la que formaban parte, tuvieron que hacer frente a lo largo del desarrollo de un determinado concepto. Es usual considerar que esas dificultades pueden suponer también un obstáculo para los alumnos. Y, si bien pensamos que no es fundamental, y en ocasiones ni siquiera conveniente, que los alumnos se enfrenten de forma directa a todos los conflictos surgidos a lo largo de la historia de un concepto, sí que algunos son indispensables de superar para una comprensión adecuada del mismo.

En conceptos matemáticos tan elaborados y complejos como el de Número Real, postulamos que sería imposible entender la teoría en la forma definitiva que le impone el planteamiento formal y la lógica rigurosa actuales, sin los puntos de anclaje que encontramos en el camino por el que se ha llegado a adoptar esa forma. Tal como afirma Kline, se puede comprimir la historia y evitar muchos de los esfuerzos y trampas inútiles, pero no es posible darla de lado (Kline, 1978).

-Por otra parte, puede que los tipos de respuestas dadas por los matemáticos a los conflictos surgidos a lo largo del desarrollo de un concepto tengan similitud con aquellas propuestas por los alumnos (Moreno y Waldeg, 1991; Robinet, 1986). En cualquier caso, el estudio histórico de los intentos de superación de una limitación conceptual o planteamiento incorrecto, será de enorme valor a la hora de interpretar las respuestas de los alumnos a dificultades análogas, y de generar intuiciones para orientar vías de aprendizaje.

-Además, la historia es una fuente de inspiración, ya que aporta cuestiones de interés para explorar con los alumnos, y para la elaboración de situaciones didácticas en torno a ellas.

A continuación, expondremos un recorrido por la historia del concepto de Número Real, al que seguirá un apartado de reflexiones epistemológicas en torno al mismo. En el apartado II.5, estableceremos una serie de conclusiones para nuestro plan didáctico, elaboradas a partir de esta reflexión.

II. 2. 1 Datos sobre la historia del concepto de Número Real

El Número Real en la Antigua Grecia

La concepción pitagórica del número. La relación número-magnitud

Los pitagóricos eran miembros de una sociedad o comunidad religiosa, fundada por Pitágoras de Samos en Crotona, ciudad del sur de Italia, en la segunda mitad del siglo VI a.C. (Jámblico). La información que ha llegado hasta nosotros acerca de los orígenes de esta sociedad y de la vida de su fundador presenta numerosas incertidumbres. Dice Aristóteles que *"los llamados pitagóricos se dedicaron a las matemáticas y fueron los primeros en hacerlas progresar; absortos en su estudio ccreyeron que sus principios eran los principios de todas las cosas"* (Aristóteles, Metafísica A5, 958 b 23, citado por Kirk y Raven). Según Aristóteles, parece que les impresionó el descubrir que los intervalos musicales que hay entre las notas de la lira pueden expresarse numéricamente. *"Puesto que veían que los atributos y las relaciones de las escalas musicales eran expresables en números y que parecía que todas las demás cosas se asemejaban en su naturaleza a los números y que éstos parecían ser los primeros de la naturaleza, supusieron que los elementos de los números eran los elementos de todos los seres existentes y que los cielos todos eran armonía y número"* (op. cit.).

Evidentemente, la doctrina que afirma que las cosas son números no es de fácil comprensión. ¿Qué entendían por ello los pitagóricos? En primer lugar, ¿qué entendían por número? o ¿qué es lo que pensaban acerca de los números?

Parece estar claro que para los pitagóricos el número no era simplemente una cosa imaginada o una construcción intelectual, sino algo que tenía consistencia en sí mismo; los números eran como una suerte de átomos que en sus diversas composiciones y relaciones dan la esencia misma de lo que es la variedad del mundo existente (Pérez de Laborda, 1983; pg. 24). Los números pitagóricos están compuestos de unidades, y estas unidades son cuasi-átomos que se ligan en una composición espacial definida. Así, por la yuxtaposición de unos cuantos puntos, engéndrase la línea, no sólo en la imaginación del científico matemático, sino también en la realidad externa; del mismo modo, la superficie es engendrada por la yuxtaposición de varias líneas, y, finalmente, el cuerpo por la combinación de varias superficies. Puntos, líneas y superficies son, por lo tanto, las unidades reales que componen todos los cuerpos de la naturaleza, y, en este sentido, todos los cuerpos deben ser considerados como números. En definitiva, cada cuerpo material es una expresión del número cuatro, puesto que resulta como un cuarto término de tres clases de elementos constitutivos (puntos, líneas y superficies) (Copleston, 1969; pg. 48). Pero hasta qué punto la identificación de las cosas con números que hicieron los pitagóricos haya de atribuirse a la costumbre de representar los números mediante figuras geométricas, o bien a una extensión del descubrimiento de que los sonidos musicales son reducibles a números, resulta sumamente difícil decirlo. Se ha sostenido que la original identificación de las cosas con números se debió a la segunda de las causas indicadas (Bournet, citado por Copleston); sin embargo, si se consideran los objetos -según consideraban los pitagóricos- como sumas de puntos materiales, cuantitativos, y si, a la vez, se ven los números geométricamente como sumas de puntos, no es difícil comprender cómo puede darse el paso siguiente, el de identificar los objetos con números (Copleston, 1969; pg. 48).

De esta forma, el número, tal como lo consideraban los pitagóricos era una arquitectura discontinua de unidades-puntos (mónadas), indivisibles, reales, constitutivas del ser mismo de las cosas. Según Nicómaco, pitagórico tardío del primer siglo de nuestra era y una de nuestras fuentes más precisas de la aritmética pitagórica, es *"un agregado compuesto de unidades"*. Concepción tenaz que volvemos a encontrar en Euclides, el cual dice que número es *"una multiplicidad compuesta de unidades"* (Elementos, VII, Def. 1 y 2). Por lo tanto, dentro de esta concepción del número como agregado de unidades, sólo los números naturales merecen el nombre de números (Desanti, 1967; pg.443).

Estos conceptos dieron lugar a nociones que pronto demostraron ser falsas; entre ellas nos interesa destacar la idea según la cual las razones entre cantidades geométricas (longitudes) podían ser expresadas por razones entre enteros, como si se asumiera que ambas podían reducirse al común denominador de los puntos contenidos en las dos longitudes.

Teniendo en cuenta que al referirse a la razón entre dos magnitudes, éstas eran representadas comunmente por dos líneas geométricas, dadas dos longitudes, AB y AC, se trataba de buscar una unidad de longitud común a ambas, AD, de manera que la longitud AB fuera expresable como un número entero a de veces AD y la longitud AC fuera expresable como otro número entero b de veces AD; entonces la relación entre ambas longitudes sería expresable en términos de una razón, a/b, de números enteros. Ahora bien, el "número" que resulta de la operación de medida no es del todo el mismo "número" de los pitagóricos. El número-medida de una magnitud debe ser concebido de una manera puramente operatoria: como un múltiplo de una parte alícuota, elegida arbitrariamente, de la magnitud dada. Esta concepción de la unidad es bien diferente de la concepción de unidad-mónada. Puesto que la unidad-medida es homogénea a la magnitud dada y es una porción arbitraria de esa magnitud, el acto que la distingue dentro de un continuo situa a ese continuo como divisible a voluntad. El mismo concepto, el de número, se presenta así con dos caras: una cara "ontológica" (multiplicidad constituida de unidades) y una cara "operatoria". Pero la naturaleza operatoria del número está ya implícita, como hemos visto, en la teoría de las razones tal como la habían construído los mismos pitagóricos (Desanti, 1967; pg. 445).

El descubrimiento de la irracionalidad

Como se ha dicho antes, uno de los principios fundamentales del pitagorismo establecía que la esencia de todas las cosas es explicable en términos de arithmos, es decir, de propiedades intrínsecas de los números naturales y de sus razones. Sin embargo, algunos diálogos de Platón (por ejemplo el Menón) ponen de manifiesto que la comunidad matemática griega se vio grandemente sorprendida por un descubrimiento que prácticamente demolía las bases de la fe pitagórica en los números naturales. Este descubrimiento fue el de que, incluso dentro de la geometría misma, los números naturales y sus razones resultaban inadecuados para dar cuenta de algunas propiedades fundamentales, algunas muy sencillas; no bastaban, por ejemplo, para comparar la diagonal de un cuadrado, de un cubo o de un pentágono regular con su lado o arista respectivamente. Tales parejas de segmentos son inconmensurables, por muy pequeña que sea la unidad de medida elegida (Boyer, 1986; pg. 106).

No sabemos con exactitud cuándo y cómo se hizo este descubrimiento , pero lo que sí es cierto es que se ha gastado mucha tinta en favor de hipótesis distintas. Las antiguas razones a favor de un origen hindú de este descubrimiento carecen de base, y también parece haber pocas probabilidades de que Pitágoras mismo llegase a conocer el problema de la inconmensurabilidad. La sugerencia más plausible es que el descubrimiento fuera hecho por los pitagóricos tardíos hacia mediados del siglo V a. de C. (Boyer, 1986; pg. 106). Las circunstancias que rodearon al primer reconocimiento de la existencia de segmentos inconmensurables son tan inseguras como la fecha en que se hizo el descubrimiento. Se suele admitir que este reconocimiento tuvo lugar en conexión con la aplicación del teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo isósceles, y Aristóteles menciona una demostración de la inconmensurabilidad de la diagonal de un cuadrado con respecto al lado, indicando que se basaba en la distinción entre lo par y lo impar. Tal demostración no ha llegado hasta nosotros, pero podríamos reconstruirla como sigue: sean d y l la diagonal y el lado de un cuadrado y supongamos que son conmensurables, es decir, que la razón d/s es racional e igual a p/q, donde p y q son enteros sin factores comunes; ahora bien, se sabe por el teorema de Pitágoras que $d^2 = l^2 + l^2$, luego $(d/s)^2 = p^2/q^2 = 2$, o bien $p^2 = 2q^2$; por lo tanto, p^2 debe ser un número par, luego p ha de ser par a su vez. En consecuencia, q debe ser impar. Sea $p = 2r$; sustituyendo en la ecuación $p^2 = 2q^2$ tenemos $4r^2 = 2q^2$, luego $q^2 = 2r^2$, y por tanto q^2 debe ser par, y así q debe ser necesariamente par. Sin embargo, como se vio antes q tenía que ser impar y ningún entero puede ser a la vez par e impar. Se sigue, por lo tanto, por el método de demostración indirecta, que la hipótesis de que d y l eran conmensurables es falsa (Boyer, 1986; pg. 106).

Sin embargo, el grado de abstracción de la demostración mencionada es tan alto que la posibilidad de que ésta fuera la base del descubrimiento original de los inconmensurables ha sido, con toda razón, cuestionada (Boyer, 1986; pg. 107). Hay, no obstante, otros caminos por los que pudo llegarse al descubrimiento de este fenómeno; uno de los más interesantes, a nuestro parecer, es el propuesto por Gardiner (1982) en su libro "Infinite Processes" (señalado también por Ríbnikov, 1974; pg. 53), que presentamos en el Anexo I. Partiendo del algoritmo de Euclides para encontrar la mayor unidad de medida común para dos segmentos dados cualesquiera, se muestra cómo la aplicación de dicho algoritmo a la diagonal y el lado de un cuadrado da lugar a un proceso infinito, y cómo este resultado implica la no existencia de una parte alícuota (es decir, una unidad de medida común) a ambas longitudes; dicho de otra forma, la longitud y el lado de un cuadrado son inconmensurables, y se demuestra cómo, en términos numéricos, esto equivale a afirmar que la razón entre ambas no puede expresarse mediante una razón de números naturales.

El proceso infinito al que da lugar la aplicación del algoritmo de Euclides para encontrar la mayor medida común entre el lado y la diagonal del cuadrado no se reduce sólo al caso de esta figura geométrica: el pentágono regular lo ejemplifica también de forma interesante. Se puede obtener una demostración geométrica bastante parecida a la de la razón de la diagonal de un cuadrado a su lado para la razón de la diagonal del pentágono regular a su lado, y existe una hipótesis de que fuera esta propiedad la que condujo al descubrimiento, posiblemente por Hipaso, del fenómeno de la existencia de segmentos inconmensurables, pero no ha quedado ningún documento que nos permita resolver la cuestión. Si éste hubiera sido el caso, no habría sido $\sqrt{2}$, sino $\sqrt{5}$ el que reveló por primera vez la existencia de magnitudes inconmensurables (Boyer, 1986; pg. 107). Por otra parte, hay autores que conjeturan que el descubrimiento de la inconmensurabilidad por parte de los pitagóricos está ligado a la división de un segmento en extrema y media razón (Ríbnikov, 1974; pg. 53).

Sea como fuere, lo cierto es que la existencia de longitudes inconmensurables echaba por tierra la teoría de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a ser expresados mediante los números naturales y sus razones, y esto constituyó un grave problema para la matemática griega (Kline, 1972; pg. 58). En efecto, *alogon*, la palabra griega que designa la noción de "irracional" puede, como en nuestra lengua, ser entendida en dos sentidos. En un sentido restringido logos significa "proporción", "razón calculable"; alogon designaría por tanto la categoría de magnitudes cuya razón no puede ser expresada en términos de enteros, es decir, las magnitudes inconmensurables. En otro sentido más general logos quiere decir "razón"; alogon significará por tanto "aquello cuya existencia pone en peligro las normas que aseguran la coherencia del discurso", y parece ser que para los pitagóricos, al menos al principio, estos dos sentidos estuvieron bastante ligados (Desanti, 1967; pg. 441).

Antes de profundizar en la crisis que produjo el descubrimiento de los irracionales, apuntaremos que el libro X de los "Elementos" emprende la tarea de clasificar los irracionales, es decir, las magnitudes inconmensurables con una magnitud dada. El contenido general de este libro puede describirse así: Euclides investigó cada posible segmento cuya longitud pueda expresarse (en notación moderna) en la forma $\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{b})}$, siendo a y b longitudes de segmentos conmensurables. Claro está que no todos los irracionales pueden representarse así, y Euclides trata sólo los que surgen de su álgebra geométrica. Fowler, en "The Mathematics of Plato´s Academy" (1987), hace una interesante recopilación del tratamiento de la inconmensurabilidad por autores antiguos, hasta Proclo.

Zenón de Elea

La revelación de la inconmensurabilidad de las magnitudes planteó a la comunidad de pensadores griegos la búsqueda de una explicación racional para los problemas relacionados con:

a) la prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común;

b) lo indefinidamente pequeña de la última;

c) que ésta debe estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan.

A este grupo de problemas se añadieron los geométricos, cuya solución conducía a dificultades análogas (determinación de la mayoría de las longitudes, áreas y volúmenes) (Kline, 1972; pg. 61). Algunos grupos de científicos antiguos buscan salida a estas dificultades en la aplicación a la matemática de ideas filosóficas atomistas. Un ejemplo de la más fuerte expresión de un enfoque semejante lo constituye la escuela de Demócrito (alrededor de 460-370 a.C.). Demócrito consideraba que todos los cuerpos estaban constituídos por pequeños átomos, las magnitudes primarias. Los cuerpos se diferencian entre sí por la forma, posición y modo de unión de los átomos que los componen. Algunas de sus opiniones acerca de los infinitésimos matemáticos y sobre su aplicación a algunas magnitudes geométricas reflejan sus ideas atomistas (Copleston, 1969; pg. 84). Sin embargo, sobre la parte matemática de semejantes manifestaciones e investigaciones se conoce demasiado poco. Obras suyas como *"Sobre los irracionales"* no han llegado hasta nosotros.

Mucho más se conoce sobre los argumentos de sus adversarios científicos. Tenemos en cuenta aquí los argumentos contra el atomismo esgrimidos por Zenón de Elea (nacido alrededor del año 489 a.C.):

-Supongamos que la realidad consta de unidades. Estas unidades, o tienen magnitud o no la tienen. En el primer caso, consideremos por ejemplo una línea como formada por unidades dotadas de magnitud: esta línea será infinitamente divisible, puesto que, por más que se la divida sus unidades seguirán teniendo magnitud y, por tanto, seguirán siendo divisibles. Más, en tal caso, la línea constará de un número de unidades infinito, y cada una de esas unidades estará dotada de magnitud. Así pues, esa línea tendría que ser infinitamente grande, como compuesta de un número infinito de partes extensas. Por consiguiente, todas las cosas del mundo habrán de ser infinitamente grandes, y el mundo habrá de ser infinitamente grande. Supongamos por el contrario que las unidades elementales carecen de magnitud. En ese caso, también el universo entero carecerá de magnitud, ya que, por más unidades que añadamos y juntemos, si ninguna de ellas tiene magnitud, tampoco la reunión de todas ellas tendrá magnitud alguna. Mas si el universo carece en absoluto de magnitud, ha de ser infinitamente pequeño, y todas las cosas del universo habrán de ser infinitamente pequeñas (Simplicio, citado por Kirk y Raven). Se plantea así el siguiente dilema: o todas las cosas del mundo son infinitamente grandes, o bien cada una de ellas es infinitamente pequeña. La conclusión que Zenón quiere que saquemos de este argumento es, naturalmente, que la suposición de donde deriva semejante dilema es absurda, a saber, la de que el universo y todas las cosas que hay en él están compuestas de unidades.

-¿Hace ruido un celemín de grano al caer sobre el suelo? Sin duda. Y ¿qué pasa si cae un grano de trigo o la milésima parte de un grano? No hace ruido alguno. Mas el celemín de trigo no está compuesto sino de granos de trigo o de partes de granos de trigo. Si, pues, las partes no hacen ruido al caer, ¿cómo puede su conjunto hacer ruido, siendo así que el conjunto no está compuesto sino de partes? (Copleston; pg. 68).

Los argumentos más célebres de Zenón son los concernientes al movimiento, los cuales conducen a paradojas lógicas en el esfuerzo por obtener magnitudes continuas de un conjunto de partículas infinitamente pequeñas. Son conocidas las paradojas del estadio, de Aquiles y la tortuga y de la flecha, entre otras (Aristóteles, Fís. Z9, 239 b 9).

Estas aporías significaron para la antiguedad griega la imposibilidad de hacer coincidir la pluralidad discontinua, la pluralidad pitagórica de puntos aritméticos o aún la pluralidad democriteana de átomos con extensión, con el dato concreto, con la realidad continua del espacio en donde se desplazan las cosas. Las aporías marcaron el fracaso de una ciencia cuyo modelo parecía haber sido fijado por la matemática; y provocaron una concepción nueva del conocimiento y de la verdad, según la cual, el mundo sensible, el de las apariencias, no podía ser objeto de un conocimiento verdadero, no contradictorio, la verdad es inaccesible mediante la observación, sólo es accesible al pensamiento puro (Arsac, 1987; pg. 299).

Las paradojas de Zenón pusieron de manifiesto que, si buscamos demostraciones exactas y soluciones lógicamente exhaustivas a este tipo de problemas, es imposible utilizar el infinito apoyándose en consideraciones atomísticas ingenuas y que no se pueden resolver mediante fórmulas matemáticas estáticas desarrolladas para tratar problemas con números finitos. Para semejantes objetivos es necesario elaborar y valerse de métodos que contienen, junto a las variedades de criterios sobre los infinitésimos, elementos de paso al límite, que introducen el elemento dinámico en las matemáticas gracias al cual el problema de lo infinitamente pequeño puede ser abordado de manera adecuada (Cajori, 1985; pg. 24). Uno de los más antiguos métodos de este género es el método de exhausción, cuya creación se atribuye a Eudoxo.

Eudoxo de Cnido

A veces nos encontramos con la expresión "la reforma platónica de las matemáticas", y a pesar de que el término "reforma" parece que tendiese a exagerar los cambios que tuvieron lugar, lo cierto es que la obra de Eudoxo, contemporánea de Platón, tuvo tal importancia que la palabra "reforma" no resulta improcedente en absoluto (Boyer, 1986). Durante la juventud de Platón el descubrimiento de los inconmensurables había producido un verdadero escándalo lógico, al ser la causa de la ruina de toda la teoría de las proporciones. Dos cantidades, tales como la diagonal y el lado del cuadrado, son inconmensurables cuando no tienen una razón tal como la de un número natural a otro; pero ¿cómo puede uno comparar entonces las razones entre magnitudes inconmensurables? Si Hipócrates demostró realmente que dos círculos son entre sí como los cuadrados construidos sobre sus diámetros, lo cual es dudoso, debió de tener alguna manera de manejar proporciones o igualdades de razones (Boyer, 1986; pg. 127). No sabemos cómo pudo proceder, ni si se anticipó en algún sentido a Eudoxo, que fue quien dio una definición nueva y universalmente aceptada de la igualdad de dos razones. Parece ser que los griegos habían hecho uso previamente de la idea de que cuatro cantidades están en proporción, a:b = c:d, si las razones a:b y c:d tienen la misma resta mutua; es decir, si la menor en cada una de las dos razones cabe entre la mayor el mismo número entero de veces, y el resto en cada caso cabe en la menor el mismo número entero de veces, y el nuevo resto cabe en el anterior el mismo número entero de veces, y así sucesivamente. Esta definición sería difícil de utilizar (estrictamente imposible, al dar lugar a un proceso indefinido) y así el descubrimiento de Eudoxo de la Teoría de las Proporciones, fue un éxito brillante.

La Teoría de las Proporciones la encontramos por primera vez, ya expresada de manera cumbre, en el libro V de los Elementos de Euclides. La aplicación de esa teoría a los números ocupa los libros VII, VIII y IX. Por fin, el uso para lograr una clasificación de las inconmensurabilidades se encuentra en el libro X. En la Teoría de las Proporciones de Euclides aparecen tres nociones distintas pero interrelacionadas: número, magnitud y razón. Las dos primeras nociones se dan por supuestas en la exposición de Euclides, pero podemos decir al respecto que, como los griegos no consentían en partir la unidad, excepto cuando la división entre dos números naturales da otro número natural, a la división entre dos números no la consideraban otro número; la proporción es una relación entre números, no un número. Así pues, por no saber dar curso legal a los números fraccionarios, no les quedó otro remedio que considerar la división entre dos números naturales como una simple razón entre ellos. Una proporción es siempre una relación entre magnitudes o números, que viene dada por una función lineal, cuya constante de proporcionalidad establece la relación entre las cantidades de ambas magnitudes, o números correspondientes. Las dos magnitudes se representan en numerosas ocasiones por dos líneas, más como una ayuda visual que como una geometrización de la aritmética. La Teoría de las Proporciones tendrá, por tanto, dos vertientes, una la de las proporciones entre magnitudes, otra la de las proporciones entre números, aunque ambas son como las dos caras de una misma moneda, como dos aplicaciones, cada una a un ámbito con lenguaje distinto, de una única teoría de las proporciones, con una diferencia importante: en el caso de los números son magnitudes discretas, y en el caso de las magnitudes geométricas son continuas. En cambio, la noción de razón es definida de una forma considerablemente precisa y adecuada. La denominación "teoría de la proporción" se usa porque la noción de semejanza de razones es crucial, tanto para el desarrollo de la teoría como para la misma definición de razón (Desanti, 1967). Un par de magnitudes relacionadas que tengan la misma razón entre las cantidades de la primera magnitud y sus correspondientes de la segunda magnitud se dicen "proporcionales". Aunque no aparecen en la obra de Euclides definiciones ni postulados con referencia a la noción de magnitud, no es difícil extraer de los procedimientos usados un conjunto de propiedades que deben presuponerse, en cualquier clase de magnitud dada, para poder aplicarle la teoría general de las proporciones de Eudoxo (Stein, 1990; pg. 166).

Estas propiedades caracterizan a una magnitud con la estructura de semigrupo aditivo ordenado (el orden compatible con la estructura de semigrupo). La adición da lugar de forma obvia a la operación de la multiplicación por un esalar, que es básica para la definición de la noción de razón. La caracterización euclidiana del concepto de razón está contenida en las definiciones 3, 4 y 5 del libro V de los Elementos (Stein, 1990; pg. 168), y su explicación puede verse en el Anexo II.

Consecuencias del descubrimiento de los irracionales

El descubrimiento de los irracionales tuvo importantes consecuencias, ya que fue una idea fuerte a favor del rechazo de la imagen pitagórica de los números como puntos físicos, e hizo surgir la necesidad de una teoría general, capaz de abarcar la noción de número como pluralidad discontinua y como magnitud continua. Dicha teoría se desarrolló bajo la idea del continuo, con lo cual se priorizó el razominamiento geométrico en detrimento del aritmético y el algebraico, evitándose el tratamiento explícito de los irracionales en términos numéricos (Desanti, 1967; Boyer, 1986).

Se ha especulado y discutido extensamente con la idea de que si los griegos hubieran afrontado el tratamiento aritmético del número irracional podrían haber adelantado el desarrollo de la aritmética y e álgebra; e incluso, si ellos mismos no lo hubieran hecho, no habrían impedido que lo hicieran generaciones posteriores, que fueron inducidas a pensar que solamente la geometría ofrecía un fundamento seguro para el estudio de magnitudes cuyos valores podían incluir irracionales. Como contrapartida, con esta elección, los geómetras del siglo IV a.C. pusieron una de las piedras miliares en la historia de todo el pensamiento. "La gran continuidad" del análisis, el sistema del número real estaba ya a la vista.

Como con el descubrimiento de los irracionales resultó que la colección de las magnitudes geométricas (por ejemplo los segmentos) era más completa que el conjunto de los racionales, resultó oportuno construir un cálculo más general en forma geométrica. Este cálculo, que no llegó a buen fin por la imposibilidad de resolver ciertos problemas con regla y compás, recibió el nombre de álgebra geométrica. A menos que los irracionales positivos, pudieran incorporarse con los racionales positivos en un dominio unificado de "números" o "magnitudes" de modo que todos formaran un sistema completo con las operaciones de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división, tal como se entendía entonces para los racionales, los recientemente imaginados irracionales seguirían siendo motivo de perturbación para la matemática, tal como era entendida por los griegos. Además, las operaciones en el sistema ampliado del número tienen que dar los mismos resultados para los números racionales que antes de la inclusión de los irracionales. La demanda de coherencia interna en el dominio agrandado fue impuesta automáticamente, pues se había convenido ya que las matemáticas no debían desafiar a la deducción rigurosa. El *alogon* se integrará así en el seno de un logos más general y mejor reglado (Bell, 1949; pg. 71). La "crisis" desemboca de este modo en un esfuerzo de rigor, esfuerzo que excedía las posibilidades de los griegos y que no se vería culminado hasta fines del siglo XIX.

Por otro lado, la imposibilidad de representar los irracionales como razones de enteros condujo a la búsqueda de aproximaciones. El método de aproximación reemplazó a la pérdida de la armonía pitagórica y se convirtió en una poderosa herramienta para la comprensión de realidades tanto matemáticas como físicas (Stein, 1990). Arquímedes, Herón y Ptolomeo comenzaron a trabajar en este sentido, pero no consiguieron modificar el carácter de las matemáticas griegas ni la impronta subsiguiente del pensamiento griego; en consecuencia, el álgebra y la geometría fueron contempladas como disciplinas sin ninguna relación mutua.

Limitaciones

Las limitaciones del pensamiento matemático griego conducen de manera casi automática a los problemas que dejaron para las generaciones futuras. El fracaso a la hora de aceptar los irracionales como números dejó ciertamente abierta la cuestión de si se podía asignar un número a las razones inconmensurables, con lo que éstas podían ser estudiadas desde el punto de vista de la aritmética. Por otra parte, con el número irracional, el álgebra se ampliaría también. En vez de regresar a la geometría para resolver ecuaciones cuadráticas, o de otro tipo, que podían tener raíces irracionales, estos problemas se podrían abordar en términos numericos, de forma estrictamente empírica, siguiendo la tradición de los egipcios y los babilonios, así como la de los matemáticos alejandrinos. Por lo tanto, los griegos legaron dos ramas de las matemáticas completamente distintas y muy desigualmente desarrolladas. Por una parte estaba la rigurosa, deductiva y sistemática geometría y por otra, la heurística y empírica aritmética y su extensión al álgebra. La incapacidad para la construcción de un álgebra deductiva significa que el rigor matemático quedó confinado a la geometría; de hecho, éste siguió siendo el caso hasta en los siglos XVII y XVIII, cuando el álgebra y el cálculo ya se habían extendido; pero incluso entonces se entendía todavía que las matemáticas rigurosas se referían a la geometría. Esta situación no se modificaría hasta el siglo XIX (Boyer, 1986).

Aportación de Arabes e Hindúes

Está documentado que los matemáticos del periodo de la cultura hindú comprendido entre el 200 y el1200 d. C. dieron un gran paso en aritmética al afrontar la cuestión de los números irracionales; es decir, comenzaron a operar con estos números con métodos correctos, lo cual permitió la obtención de conclusiones útiles. Los hindúes eran menos sofisticados que los griegos a la hora de detectar las dificultades lógicas implícitas en el concepto de número irracional. Su interés en el cálculo les hizo pasar por encima de consideraciones ontológicas, cuestiones que los griegos creían que eran fundamentales. No obstante, al aplicar sin excesivo rigor a los irracionales métodos semejantes a los usados con los racionales ayudaron al progreso de las matemáticas (Kline, 1972; pg. 251).

Del mismo modo que los indios, los árabes trabajaron libremente con los irracionales. Especialmente interesante es la comprensión de la irracionalidad algebraica. La tendencia a la realización de operaciones con irracionales algebraicos es característica de las matemáticas árabes. Por ejemplo, en las obras de Al-Khowarizmi (s.IX) ya se encuentran operaciones con irracionales cuadráticos (Ríbnikov, 1974; pg. 111). Al-Karkhi (s.XI) introdujo muchas trasformaciones de expresiones irracionales. Tanto él como Al-Baki (alrededor del año 1100), comentaron el libro décimo de los "Elementos" de Euclides, aclarando sus teoremas con ejemplos numéricos. En general, los árabes consideraron las operaciones con números irracionales que habían introducido los hindúes, y convirtieron en habituales transformaciones como $\sqrt{(a^2b)} = a\sqrt{b}$ y $\sqrt{(ab)} = \sqrt{a}\sqrt{b}$.

En virtud de tal enfoque y de la frecuente aplicación de los cálculos con expresiones irracionales, la distinción entre números racionales e irracionales comienza a borrarse. A la representación del número como colección de unidades se añadieron las representaciones sobre relaciones entre magnitudes continuas. Se estableció la adecuación de la inconmensurabilidad geométrica con la irracionalidad numérica. Las expresiones irracionales comenzaron a entrar en la clase de los números sobre la base de las reglas de las operaciones definidas para ellas. En las matemáticas de esta época en lugar de dos conceptos aislados, números y razones, surgió una nueva, más amplia concepción del número real positivo. De hecho, Omar Khayyam (1048?-1122) y Nasir-Eddin (1201-1274) afirman claramente que toda razón de magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables, puede ser considerada como un número (Kline, 1972; pg. 259). En las soluciones geométricas de las ecuaciones cúbicas dadas por los griegos los coeficientes siempre eran segmentos, mientras que en el tratamiento de Omar Khayyam son números concretos. Al reemplazar la teoría de las proporciones geométricas de Euclides por un planteamiento numérico, Omar Khayyam trabajó con el concepto de número real en general. Precisamente una de las contribuciones más fructíferas del eclecticismo árabe en este caso fue la tendencia a superar el vacío entre el álgebra numérica y el álgebra geométrica. La idea de una concepción única de número mediante la integración de los números racionales y las razones tuvo en Oriente Medio cierto perfeccionamiento (Boyer, 1972; pg. 312). En Europa semejante idea no apareció hasta mucho tiempo después. Sólo desde el siglo XVI, en relación con el desarrollo vertiginoso de los medios de cálculo, los científicos empezaron a reconocerla, aunque ya veremos que, con un grado semejante de generalidad, sólo fue expresada por Newton (Kline, 1972).

Si bien la labor matemática de hindúes y árabes no se considera tan brillante como el trabajo de los griegos, produjo algunos cambios en el contenido y en el carácter de las matemáticas que fueron importantes para su desarrollo posterior. El libre uso de los irracionales como números contribuyó a la ampliación de la aritmética y a la creación de un álgebra más trascendente, un álgebra en la que las letras y las operaciones se podían aplicar a una clase más amplia de números. Además, tuvo una gran significación para el reconocimiento futuro de que el álgebra podía coexistir con la geometría; la aceptación de los números irracionales hizo posible asignar valores numéricos a todos los segmentos lineales y a las figuras de dos o tres dimensiones; es decir, expresar longitudes, áreas y volúmenes mediante números (Kline, 1972; pg. 267).

Puede admitirse que ambas culturas, árabe e hindú, eran conscientes de la situación precaria en que se encontraban la aritmética y el álgebra, pero tuvieron la audacia, reforzada por necesidades prácticas, de desarrollar estas ramas, tomando un camino de innovación matemática posible.

Se llega así a consolidar dos tradiciones de matemáticas independientes entre sí: por una parte, el cuerpo de conocimiento lógico y deductivo establecido por los griegos, que servía al ambicioso propósito de comprender la naturaleza; y, por otra, las matemáticas fundamentadas empíricamente y orientadas a la práctica, creadas por egipcios y babilonios, recuperadas por los greco-alejandrinos y desarrolladas por hindúes y árabes, quienes las hicieron avanzar hasta situarlas a un nivel intelectual no muy distante del alcanzado por la geometría (Kline, 1972).

A finales de la Edad Media el impulso intelectual y la preocupación científica comienza a despuntar en Europa, declinando lentamente en los paises de cultura musulmana. En un mundo en el que las influencias culturales se entrecruzan, encontramos el primer paso en el mundo de los irracionales de un europeo a comienzos del siglo XIII en la aproximación de Fibonacci (1202) a una raiz con una fracción sexagesimal (Boyer, 1986; pg.330).

Una última nota por lo que se refiere a los irracionales en la Edad Media: Al-Khowarizmi (825) se refirió a los números racionales como "audibles". El término "sordo" fue utilizado por Fibonacci para referirse a un número que no tiene raiz cuadrada. Los árabes llamaron a menudo a los números sordos "*números no expresables*", traducción del término euclideano *alogon* (sin razón, irracional, inconmensurable). Sin embargo, no había un acuerdo general sobre lo que era un número sordo. Se admitía que un número como $\sqrt{2}$ era un sordo, pero había autores importantes que excluían $\sqrt{6}$, ya que $\sqrt{6}=\sqrt{2}\sqrt{3}$ (Smith, 1958; pg. 251).

También los árabes se adelantaron en la práctica de utilizar fracciones decimales. Al-Kashi fue quizá el primero en utilizar las fracciones sexagesimales para sugerir, al mismo tiempo, que las fraciones decimales se prestan igualmente bien a la resolución de problemas cuyos cálculos exigen muchas cifras exactas. No obstante, para el cálculo de raíces continúa utilizando las fracciones sexagesimales. (Stillwell, 1987; pg. 53)

Invención de las fracciones decimales y tratamiento de los irracionales

Los matemáticos del siglo XVI experimentaron grandes dificultades de carácter práctico computacional. Ante todo, estas dificultades se concentraban en los problemas de confección de tablas de las funciones trigonométricas y en la determinación del valor de π. Otro problema importante lo constituía la búsqueda de algoritmos simples y fiables para la determinación de raíces de ecuaciones. Los recursos aritméticos de cálculo de la época se limitaban a las operaciones con números enteros y fracciones simples, las fraciones decimales sólo comenzaban a abrirse camino. La introducción de las fracciones decimales en Europa se realizó por primera vez en 1585, en la obra "La Disme", escrita por Simón Stevin ingeniero militar. Stevin no fue ni el inventor de las fracciones decimales ni el primero en utilizarlas de forma sistemática. Se encuentra ya un uso más que casual de las fracciones decimales en la antigua China, en la Arabia medieval (Al-Kashi) y en la Europa renacentista; por la época en la que Vieta proclamaba su decidido apoyo a las fracciones decimales en 1579, ya se las aceptaba, en general, por parte de los matemáticos que estaban en las fronteras de la investigación. En los problemas prácticos, las fracciones decimales sólo se popularizaron cuando Stevin acometió la tarea de explicar con todo detalle y de forma elemental tanto su definición como los algoritmos para realizar las cuatro operaciones aritméticas básicas con ellas. Stevin poseía una idea correcta de las fracciones decimales, pero su notación no era la más adecuada para la aritmética[1]. La notación moderna aparece en la traducción al inglés de la "Descriptio" de Napier en 1616. Pero aunque Stevin las introdujera y mostrara su utilidad, en el transcurso de más de doscientos años posteriores las fracciones decimales sólo se utilizaron en la práctica del cálculo astronómico. Se requirieron los esfuerzos de muchos de los más eminentes matemáticos (Lagrange,Laplace, Monge entre otros), quiénes en el periodo de los años 1790-1799 elaboraron un sistema decimal único, para que el aparato de las fracciones decimales adquiriera su actualidad universal. (Ríbnikov, 1974; pg. 314).

Hacia el año 1500 los números irracionales se usaban con cierta libertad. El matemático alemán M. Stifel (1486?-1567), Stevin y Cardano utilizaban números irracionales en la tradición de los hindúes y los árabes, introduciendo cada vez nuevos tipos. Stevin se negaba explicitamente a considerar a ningún número como sordo, irracional, absurdo o irregular. Y se propuso describir todos los números irracionales. (D'hombres, 1978; pg.130)

Stifel trabajaba con irracionales de la forma ${}^m\sqrt{(a+{}^n\sqrt{b})}$, y Cardano racionalizaba fracciones con raíces cúbicas. La medida en que se llegaron a utilizar los números irracionales viene ejemplificada por Vieta. Para Vieta (1540) los números no tienen dimensiones, son positivos y racionales (en los casos de irracionalidad Vieta pasa al lenguaje de la geometría), las magnitudes tienen dimensiones. Estas ideas reflejaban la existencia de una ruptura, aún no determinada, entre los números y las magnitudes. Sin embargo, en cuestiones de cálculo práctico, Vieta encuentra una expresión para π. Considerando polígonos regulares de 4,8,16... lados inscritos en un círculo de radio unidad, Vieta halló (Kline, 1972; pg. 330) que el valor de π viene dado por la expresión:

$$\pi = \sqrt{1/2}\cdot\sqrt{(1/2+1/2\sqrt{1/2})}\cdot\sqrt{(1/2+1/2\sqrt{(1/2+1/2\sqrt{1/2})})}\ldots$$

Como hemos apuntado, aunque los cálculos con números irracionales se efectuaban con libertad, el problema de si tales expresiones eran realmente números era aún fuente de inquietud. En su obra principal, la "Aritmetica Integra" (1544), que trata de la aritmética, de los irracionales del libro X de Euclides y del álgebra, Stifel (citado por Kline, 1972) considera la posibilidad de expresar los racionales en notación decimal. Por una parte, argumenta:

Dado que, al analizar figuras geométricas, cuando nos fallan los números racionales toman en su lugar los irracionales y prueban exactamente las cosas que los racionales no pudieron probar... nos vemos movidos y obligados a afirmar que son verdaderamente números; obligados, esto es, por los resultados que se siguen de su

1 Escribía 5,912 como 5 **0** 9 **1** 1 **2** 2 **3**, o como 5,9'1''2'''.

uso, resultados que percibimos como reales, ciertos y constantes. Por otra parte, otras consideraciones nos obligan a negar que los números irracionales sean números en absoluto. Esto es, cuando tratamos de someterlos a numeración [representación decimal]... hallamos que se escapan continuamente, de forma que ninguno de ellos puede ser aprehendido precisamente en sí mismo... Y nada de tal naturaleza carente de precisión puede llamarse número... Por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una especie de nube de infinitud. (El subrayado es nuestro). (pg.337)

A continuación argumenta que los números son enteros o fracciones; obviamente, los irracionales no son ni una cosa ni otra, luego no son realmente números (Kline, 1972; pg. 337).

Tratamiento de los irracionales en los siglos XVII y XVIII

Pascal y Barrow decían que un número como $\sqrt{3}$ sólo puede entenderse como una magnitud geométrica; los números irracionales son meros símbolos que no tienen existencia independiente de la magnitud geométrica continua, y la lógica de las operaciones con números irracionales debe justificarse por el método eudoxiano de las magnitudes. Este era también el punto de vista de Newton en su "Aritmética Universal", publicada en 1707, aunque basada en clases dadas treinta años antes:

"Por número entenderemos, no tanto el conjunto de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquello que se mide con unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad". (Newton, citado por Kline, 1972; pg. 337).

Otros matemáticos hicieron afirmaciones positivas de que los números irracionales eran entidades independientes. Stevin consideraba los irracionales como números, y los aproximaba cada vez más por racionales; Wallis, en su "Algebra" (1685), también consideraba los irracionales como números en su pleno sentido. Consideraba el libro V de los "Elementos" de Euclides como de naturaleza esencialmente aritmética. También Descartes, en las "Reglas para la dirección del espíritu" (hacia 1628) admitía los irracionales como números abstractos que pueden representar magnitudes continuas. (Kline, 1972; pg. 337).

En esta época, se consideraba que las rectas tenían ciertos puntos construibles usando métodos geométricos e incluso tomando raíces n-ésimas, y había una tendencia a considerar que estos puntos eran todos los puntos de la recta (Crossley, 1987; pg. 139).

Transición al pensamiento moderno. Los números trascendentes

En el siglo XVII siguen los cálculos de irracionalidades. En este sentido, merece la pena mencionar a Wallis (1616-1703) que, estudiando la cuadratura del círculo, llegó a la siguiente expresión de π:

$$\pi/2 = 2.2.4.4.6.6.8.8.../1.3.3.5.5.7.7.9...$$

Pero no estaba satisfecho con ella porque en lugar de un número finito de términos que proporcionara un valor absoluto, contenía un número infinito, que se aproximaban cada vez más a ese valor. Con este motivo indujo a su amigo, Lord Brouncker, a investigar el tema. Por supuesto, Lord Brouncker no encontró lo que estaban buscando, pero obtuvo una expresión de π en forma de fracción continua, que fue el origen de la teoría moderna de las fracciones continuas.

En el curso del siglo XVIII, el concepto de número experimentó un desarrollo lento, durante el que fue enriquecido gradualmente. El concepto de número incluía los números naturales, las fracciones positivas y las irracionalidades. Estas últimas tenían una definición general, llegada desde la antigüedad, a través de consideraciones geométricas: un número es aquéllo que se relaciona con la unidad como un segmento de una recta a otro, tomado como unidad. Sin embargo, la concepción general de los irracionales como números sólo adquirió status científico en la segunda mitad del siglo XVIII (Ríbnikov, 1987; pg.313), y hasta la primera mitad del siglo XIX no se constata la estabilización del término *número irracional* asociado al concepto que se había hecho familiar desde los griegos.

El siglo XVIII es el de las demostraciones de la irracionalidad para determinados números de Euler, Lambert y Legendre. En 1737, Euler mostró, sustancialmente, que e y e^2 eran irracionales y Lambert mostró que π es irracional. El trabajo sobre la irracionalidad de π estuvo motivado en gran parte por el deseo de resolver el problema de la cuadratura del círculo. La conjetura de Legendre de que π podía no ser la raíz cuadrada de una ecuación algebraica con coeficientes racionales, llevó a la distinción entre tipos de irracionales. Cualquier raíz, real o compleja, de cualquier ecuación algebraica polinómica con coeficientes racionales es llamada número algebraico. Consecuentemente, todo número racional y algunos irracionales son números algebraicos. Aquellos números que no son algebraicos se denominan trascendentes porque, como indicó Euler, "ellos trascienden el poderío de los métodos algebraicos" (Kline, 1972; pg. 785). Esta distinción entre números algebraicos y trascendentes, al menos ya era reconocida por Euler en fechas tan tempranas como 1744. Euler conjeturó que el logaritmo de una base racional debía ser racional o trascendente. Sin embargo, ningún número trascendente era conocido en el siglo XVIII y el problema de mostrar que había números trascendentes permanecía abierto, y seguiría así hasta mediados del siglo siguiente.

En el siglo XVII y al principio del XVIII se tiene, en efecto, la idea intuitiva de números conocidos, "seguros" (los naturales y los racionales), después, en una esfera u otra, los irracionales con radicales, y más allá, objetos de otra naturaleza, cantidades fuera de la norma, "Trascendentes". Hay voluntades confusas, como la de Lambert, de comenzar a integrar a todos ellos en una misma entidad, que será como una clase de todos los números. Serán Cantor y Dedekind quienes lo lleven a cabo, más de un siglo después, con la construcción del cuerpo de los números reales.

Teorías del Número Real en el siglo XIX

Necesidad de fundamentación

Es un hecho sorprendente en la historia de la matemática que no se acometiera la fundamentación lógica del sistema de los números hasta finales del siglo XIX. Es en ese momento cuando quedaron lógicamente establecidas las propiedades más simples de los números racionales positivos y negativos y de los números irracionales; con anterioridad algunos de estos números ni siquiera habían sido definidos. La fundamentación lógica de los números complejos, cuya aceptación no era muy anterior, presuponía la del sistema de los números reales. A pesar del extenso desarrollo alcanzado por el álgebra y el análisis, la comprensión e interpretación intuitivas de los números reales parecía suficiente, y los matemáticos se contentaban con operar sobre esa base sin que se hubiera propuesto una estructuración precisa de estos números y sus propiedades.

Sin embargo, empezaban a plantearse cuestiones acuciantes para la fundamentación del sistema numérico. En efecto, la rigorización del análisis impelía a remediar la falta de claridad en el concepto de número real. Por ejemplo, la demostración de Bolzano de que una función real de variable real, continua en un intervalo [a,b], que es negativa para x = a y positiva para x = b. se anula para algún valor de x entre a y b, aunque intuitivamente aceptable, carecía de consistencia lógica en un punto crítico porque faltaba una adecuada comprensión de la estructura del sistema de los números reales.

El estudio detallado de los límites también mostraba la necesidad de comprender el sistema de los números reales, ya que sucesiones de números racionales pueden tener un límite irracional y recíprocamente. La incapacidad de Cauchy para probar la suficiencia de su criterio para la convergencia de una sucesión se derivaba, igualmente, de su falta de comprensión de la estructura del sistema numérico, que le llevaba a encerrarse en círculos viciosos. El estudio de discontinuidades de funciones representables mediante series de Fourier revelaba la misma deficiencia. Fue Weierstrass el primero que señaló que, para establecer con precisión las propiedades de las funciones continuas, necesitaba la teoría del continuo numérico (Kline1972; pg. 1293).

Señalemos que la referencia constante para la noción de continuo, tanto en el siglo XVIII como a principios del siglo XIX, era el espacio euclídeo; todavía en1867, H. Hankel afirma:

"Todo ensayo de tratamiento formal de los números irracionales que no utilice el concepto de magnitud geométrica conducirá a los artificios más delicados y abstrusos...". (Hankel, citado por D'hombres, 1978; pg. 200).

No obstante, para solucionar todos los problemas planteados, hacía falta elaborar una construcción explícita de los números reales, no un análisis lógico-deductivo a partir de una intuición dada a priori.

Otra de las motivaciones para la fundamentación del sistema numérico fue el deseo de asegurar la verdad matemática de sus construcciones. Como consecuencia de la aparición de las geometrías no euclídeas la geometría había perdido su status de verdad indiscutible, pero parecía que la matemática construida sobre la aritmética ordinaria debía ser incuestionable. Sin embargo, era necesaria una fundamentación del sistema numérico que despejara cualquier duda sobre la verdad de la aritmética, del álgebra y del análisis construidos sobre esa base.

Merece la pena señalar que, antes de que los matemáticos apreciaran la necesidad de analizar el sistema numérico mismo, el problema que había parecido más pertinente abordar era el de la fundamentación del álgebra y, en particular, una explicación del hecho de que uno pueda usar letras para representar los números reales y complejos, y operar con las letras por medio de las propiedades aceptadas como verdaderas para los enteros positivos (Kline, 1972).

A fines de siglo, quedó claro que había que profundizar en la fundamentación del análisis y clarificar la estructura de todo el sistema numérico real. Se aseguraría así también la estructura lógica del álgebra, ya que resultaba intuitivamente claro que los diferentes tipos de números poseían las mismas propiedades formales; de aquí que, si se podían establecer esas propiedades sobre una base firme, podrían aplicarse igualmente a las letras que representaban números cualesquiera, principio de extensión de las leyes formales (Kline, 1972; pg. 1294).

Una etapa importante hacia la mejor comprensión de los números irracionales fue el trabajo de mediados del siglo XIX sobre los irracionales algebraicos y trascendentes. La distinción entre unos y otros había quedado establecida en el siglo XVIII. En el siglo XIX el problema de determinar si e y π eran algebraicos o trascendentes seguía atrayendo a los matemáticos, y hasta 1844 siguió abierta la cuestión de si había o no irracionales trascendentes. Ese año, Liouville mostró que cualquier número de la forma

$$a_1/10 + a_2/10^{2!} + a_3/10^{3!} + \ldots,$$

donde los a_i son enteros arbitrarios de 0 a 9, es trascendente.

La siguiente gran etapa en el reconocimiento de números trascendentes específicos fue la demostración de Hermite en 1873 de que e es trascendente. Que π es trascendente había sido sospechado ya por Legendre, pero fue Lindemann quien lo demostró en 1882 (Ríbnikov, 1974; pg. 334).

Permanece todavía el misterio en torno a una constante fundamental, la constante de Euler, que tiene un importante papel en análisis, y de la que no se sabe si es racional o irracional (Kline, 1972; pg. 1294).

En 1902 Darboux afirmaba que desde Liouville, los matemáticos se habían dado cuenta de que los números algebraicos no formaban sino una clase muy particular en el mar inmenso de los números trascendentes. El trabajo con este tipo de números llevó a reconsiderar los números asociados a la recta (Crossley, 1987; pg. 142).

Teorización de los números irracionales

A finales del siglo XIX se afrontó directamente la cuestión de la estructura lógica del sistema de los números reales. Los números irracionales suponían la principal dificultad. Ahora bien, el desarrollo del significado y propiedades de los números irracionales presupone la construcción del sistema de los números racionales. Los distintos autores que contribuyeron a la teoría de los números irracionales, o bien supusieron que los números racionales se conocían con tanta seguridad que no precisaban una fundamentación, o bien esbozaron un esquema improvisado.

Curiosamente, la construcción de una teoría de los irracionales no requería mucho más que un cambio de punto de vista . Euclides, en el Libro V de los "Elementos", había estudiado las razones entre magnitudes inconmensurables, y había definido la igualdad y desigualdad entre tales razones. Su definición de igualdad equivalía a dividir los números racionales en dos clases, la de aquellos para los que m/n es menor que la razón a/b entre las magnitudes inconmensurables a y b, y la de aquellos para los que m/n es más grande. Cierto es que la lógica de Euclides tenía sus limitaciones. Aun así tuvo la idea esencial que podía haberse utilizado antes para definir los números irracionales; de hecho, Dedekind hizo uso del trabajo de Euclides y reconoció su deuda hacia éste. Sin embargo, el largo retraso en sacar partido de alguna reformulación de las ideas de Euclides puede entenderse por el hecho de que los números negativos tenían que ser aceptados completamente antes de disponer del sistema completo de los números racionales; además, tenía que experimentarse la necesidad de una teoría de los irracionales, y esto ocurrió solamente en el siglo XIX, cuando el crecimiento del análisis y el estudio de las ecuaciones diferenciales demandaban una solución, que obligó a emprender la aritmetización del análisis (Kline, 1972; pg. 1296). Una información más detallada a este respecto se encuentra en el Anexo III.

Hamilton ofreció un primer tratamiento de los números irracionales en dos artículos, en 1833 y 1835. Basaba en el tiempo su noción de todos los números, *que tenga la propiedad (1) y que se relacione con la distancia en cuestión de tal manera que los puntos de la recta a los que se asignan las distancias a_1, a_2, a_3, ..., a_n ...., se aproximan infinitamente al punto a determinar, conforme n aumenta. Esto lo expresamos diciendo: la distancia desde el punto 0 al punto a determinar, es igual a b, donde b es la cantidad numérica correspondiente a la sucesión (1). Para completar la conexión presentada en el dominio de las cantidades con la geometría de la línea recta, sólo debemos añadir un axioma que simplemente diga que, recíprocamente, toda cantidad numérica también tiene un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esa cantidad (en el sentido que hemos precisado más arriba). Llamo a esta proposición axioma porque por su naturaleza no puede ser universalmente probado."* (Cantor, citado por Crossley, 1987; pg. 147). (El subrayado es nuestro).

Así que, claramente, Cantor dice que *es necesario un axioma para afirmar que a cada número real corresponde un punto de la recta,* por muy plausible y psicológicamente convincente que pueda parecernos, y que parezca todavía incluso a muchos matemáticos.

Dedekind

La teoría de Dedekind de los números irracionales, presentada en su libro *"Ensayos sobre la Teoría de los Números"* en 1872, parte de las ideas que ya tenía en 1858. En esa época tuvo que dar clases de cálculo y constató que, aunque se afirmara frecuentemente que el cálculo diferencial trata de la magnitud continua, la explicación de esta continuidad no estaba dada en ningún sitio; incluso las exposiciones más rigurosas de cálculo diferencial no basaban sus pruebas en la continuidad, sino, con mayor o menor conciencia del hecho, apelaban a nociones geométricas o sugeridas por la geometría; decía que esa sigue siendo la forma en que hay que hacerlo en una primera presentación del cálculo, particularmente si uno no desea perder mucho tiempo. Dedekind llegó a la conclusión de que el concepto de límite, que puede ser considerado de alguna manera como una base suficiente para el cálculo infinitesimal, había que fundamentarlo en la aritmética y asegurar, al mismo tiempo, una definición de la esencia de la continuidad (Dedekind, 1963; pgs. 1-2).

En la mencionada obra,Dedekind se pregunta, en primer lugar, por la continuidad de la recta. Tanto Galileo como Leibniz, y aún Bolzano, creían que continuidad significaba la existencia de al menos otro número entre dos cualesquiera, propiedad que ahora se conoce como densidad. Pero los números racionales poseen esta propiedad y, sin embargo, hay infinitos puntos de la recta que corresponden a números no racionales.

En la exposición afirma que presupone el desarrollo de los números racionales, que comenta brevemente. Pero si se trata de reflejar aritméticamente todos los fenómenos de la recta, el dominio de los números racionales es insuficiente y se hace absolutamente necesario que el instrumento construido por los números racionales se mejore esencialmente por la creación de nuevos números, tales que el dominio de los números gane la misma completitud, o la misma "continuidad", que la recta.

Dedekind parte de una intuición de origen geométrico, y encuentra la esencia de la continuidad de la recta en el siguiente principio:

> *"Por cada partición de la recta en dos clases de puntos tales que cada punto de la primera está a la izquierda de cada punto de la segunda, hay uno y sólo un punto que produce la partición"* (Dedekind, 1901; pg. 11).

A continuación, manifiesta cierta incomodidad con el hecho de que el secreto de la continuidad sea una cosa tan trivial y apunta también que, si el espacio tuviera alguna existencia en absoluto no sería necesario que fuera continuo; muchas de sus propiedades permanecerían iguales incluso si fuera discontinuo. Y si supiéramos cierto que el espacio fuera discontinuo nada nos impediría, en el caso de que lo deseáramos, rellenar sus huecos en el pensamiento y hacerlo así continuo. Aquí está implícito el axioma de Cantor, que establece un punto que establece la división entre las dos clases de puntos definidas (Crossley, 1987; pg. 148).

El principio de continuidad que acaba de establecer es un axioma para la recta; traslada entonces esta idea al sistema numérico. Consideremos, dice Dedekind, cualquier partición del sistema de los números racionales en dos clases tales que cualquier número de la primera es menor que cualquier número de la segunda. Tal partición de los números racionales es lo que se llama una cortadura. Si las clases son denotadas por A_1 y A_2, la cortadura se denota por (A_1, A_2). Para algunas cortaduras, específicamente las determinadas por un número racional, hay un número máximo en A_1 o un número mínimo en A_2. Recíprocamente, cada cortadura en los racionales en la que hay un máximo en la primera clase y un mínimo en la segunda está determinada por un número racional.

No deje de notarse que se ha hecho un uso explícito del infinito actual y no se ha dudado al decir que "todos" (los infinitos) números de la clase A_1 son menores que "todos" (los infinitos) números de la clase A_2. La comparación por (infinitas) parejas de los elementos de cada clase ha sido considerada como realizada sin mayor problema, aunque fuera de manera sólo implícita. Estará aquí una de las más graves acusaciones y recusaciones del grupo de matemáticos que se denominarán intuicionistas, partidarios de hablar sólo de aquello que son capaces de construir (Pérez de Laborda, 1983). Sin embargo, este es precisamente uno de los problemas que mayores perspectivas ha abierto en las matemáticas del siglo XX: los números sólo pueden definirse pasando por el infinito actual y, además, van siempre más allá de cualquier dominio del pensamiento lógico sobre ellos.

Pero hay cortaduras que no están determinadas por números racionales. Si ponemos en la primera clase todos los números racionales positivos y negativos cuyo cuadrado es mayor que 2, y en la segunda clase todos los demás racionales, esa cortadura no está determinada por ningún número racional. Para cada cortadura de este tipo "*creamos un nuevo miembro irracional a, que está completamente definido por la cortadura; diremos que el número a corresponde a esa cortadura, o que produce la cortadura*". Así, a cada cortadura le corresponde uno y un sólo número, racional o irracional.

El lenguaje de Dedekind al introducir los números irracionales adolece de cierta imprecisión. Introduce el irracional *a* como correspondiente a la cortadura y definido por ella, pero no está demasiado claro de dónde viene *a*. Debería decir que el número irracional a no es otra cosa que la cortadura misma. De hecho, H. Weber le dijo esto a Dedekind, quién replicó que el número irracional a no es la cortadura misma, sino algo distinto, que corresponde a la cortadura y que la produce. De modo parecido, aunque los números racionales generan cortaduras, no son lo mismo que ellas. Y añadía que tenemos el poder mental de crear tales conceptos.

A continuación, Dedekind define cuándo una cortadura (A_1, A_2) es menor o mayor que otra cortadura (B_1, B_2). Después de haber definido la desigualdad, señala que los números reales poseen tres propiedades demostrables:

1) si $a > b$ y $b > g$, entonces $a > g$.

2) Si a y g son dos números reales diferentes, entonces hay una cantidad infinita de números reales diferentes entre a y g.

3) Si a es cualquier número real, entonces los números reales pueden dividirse en dos clases A_1 y A_2, cada una de las cuales tiene infinitos elementos, y cada elemento de A_1 es menor que a y cada elemento de A_2 es mayor que a. El número a mismo puede ser asignado a cualquiera de las dos clases.

El conjunto de los números reales posee ahora continuidad, que Dedekind expresa así: si se divide el conjunto de los números reales en dos clases A_1 y A_2 tales que cada elemento de A_1 es menor que todos los elementos de A_2, entonces existe un y sólo un número a que produce esa división.

Define después las operaciones con números reales. La suma de las cortaduras (A_1,A_2) y (B_1,B_2) se define así: si c es cualquier número racional, lo pondremos en la clase C_1 si hay un número a_1 en A_1 y un número b_1 en B_1 tales que $a_1+b_1 \geq c$. Pondremos todos los demás números racionales en la clase C_2. Ese par de clases C_1 y C_2 constituyen una cortadura (C_1, C_2), puesto que cada elemento de C_1 es menor que cada elemento de C_2. La cortadura (C_1,C_2) es entonces la suma de (A_1, A_2) y (B_1, B_2). Las otras operaciones, dice, se definen análogamente. Y pasa entonces a establecer las propiedades de la suma y la multiplicación, como la propiedad asociativa y conmutativa.

Las definiciones de número real dadas por Dedekind y Cantor son las más sencillas para los propósitos de este trabajo; además, ambas son esencialmente equivalentes, y señalan la relación entre los números reales construidos y la recta geométrica a partir de un vector unidad. (D´Hombres, 1978; pg. 227). Las dos construcciones se apoyan en la abstracción del infinito actual y se basan en el análisis de la noción de continuidad; los números reales se construyen sobre la base de los números racionales y la diferencia es que, mientras Dedekind define un número irracional por medio de una cortadura de todos los números racionales, Cantor emplea un agregado convergente seleccionado de esos números.

Weierstrass

En cuanto a Weierstrass, su esquema es demasiado sutil para exponerlo en detalle; parte de un conjunto de números racionales positivos $\{a_v\}$, el cual denomina agregado. El agregado tiene la propiedad de que cualesquiera que sean y cuantos quiera que sean los elementos del agregado que se sumen (siempre se trata de un número finito, aunque tan grande como se quiera de elementos) su suma no supera un límite dado. A continuación define la relación de orden entre agregados y las operaciones básicas.

Es importante llamar la atención sobre la diferencia de punto de partida entre Cantor y Dedekind, números racionales como ya dados y una propiedad a priori de origen geométrico: segmentos encajados o cortaduras, y el de Weierstrass, que parte del número puro, es decir, de la aritmética, adelantando una posición extrema, que sería defendida por L. Kronecker. (D´Hombres, 1978; pg. 228).

Otras teorías

Hay otros enfoques de la teoría de los números irracionales además de las anteriores. Por ejemplo, O. Stolz (1842-1905) mostró que cada número irracional puede representarse como un decimal infinito no periódico; Wallis había identificado números racionales y números decimales periódicos en 1696-, y esto puede utilizarse como propiedad definitoria.

En 1912, P. E. B. Jourdain definió tres tendencias en las varias teorías aritméticas de los números reales:

a) el número definido como una entidad lógica -una clase o una operación- con Weierstrass, Weber, Russell, Pieri;

b) el número creado, o postulado, con Dedekind, Stolz, Peano;

c) el número definido como un signo, con Cantor, Heine, Pringsheim. (Cajory, 1893; pg. 399).

Aportaciones en el siglo XX

Excepto Weierstrass, los matemáticos que trabajaron en la teoría de los números reales basaron su construcción en los números racionales; a su vez, los racionales se basaban en los naturales; así pues, el problema de la fundamentación para el sistema de los números reales se trasladaba al análisis lógico del dominio de los números naturales y, en general, a los conjuntos con un número infinito de elementos. Hilbert llamó a este enfoque "método genético" pero, aún reconociendo el valor pedagógico y heurístico de este método, prefirió, como más seguro desde el punto de vista de la lógica, la aplicación del método axiomático al sistema completo de los números reales (Kline, 1972; pg.1306).

La identificación de la "recta real" con la recta geométrica parece haber oscurecido el hecho de que, aunque poseemos una colección de axiomas que están de acuerdo con una visión intuitiva de la recta geométrica, sin embargo, no hay garantía de que se haya captado la descripción completa de la recta geométrica. Hilbert, en su axiomatización de la geometría, dio una seria de axiomas que caracterizan al Número Real. Una innovación crucial fue el axioma de completitud, que dice que los puntos de la recta han de comprender un conjunto maximal que satisfaga los demás axiomas (Crossley, 1987; pg. 149). Este axioma se refiere a la totalidad de los puntos. Autores previos, como Stiffel y otros habían considerado maneras de producir más números, pero nunca la posibilidad de que ese proceso pudiera completarse. Esta idea se elaboró junto con el desarrollo del Algebra y la teoría de Conjuntos en el siglo XIX.

El axioma de completitud garantiza, en este caso particular, la unicidad del conjunto de los Números Reales, es decir, que cualquier otra presentación de un conjunto que satisfaga los mismos axiomas es esencialmente la misma, salvo isomorfismos, en terminos matemáticos. Parecería entonces que, con los axiomas de Hilbert, la naturaleza de los Números Reales quedaría totalmente clara y precisa, pero ese no ha sido el caso. Por la necesidad de considerar la totalidad de los números reales, el axioma de Hilbert lleva, a finales del siglo XIX, a las paradojas del infinito, con las que se habían puesto a prueba argumentos de generaciones enteras de lógicos, desde Zenón hasta Russell, y cuyo proceso de clarificación aún continúa. Resultó entonces que a las teorías de Dedekind, Cantor y Weierstrass del sistema de los números reales se les podían hacer las mismas objeciones que los lógicos matemáticos habían hecho a la teoría de conjuntos de Cantor.

No es nuestro propósito aquí abordar el estudio de la teoría de Conjuntos, pero sí señalar que los intentos por evitar las paradojas del infinito llevaron a Hilbert a la formalización de las Matemáticas. Desafortunadamente, en el proceso de formalización, se pierde la unicidad del conjunto de los Números Reales. Si tomamos los axiomas formalizados del Número Real, entonces tenemos que los Números reales son una interpretación, o modelo, de los axiomas formalizados. Sin embargo, hay otras posibles interpretaciones que no son isomorfas a los Números Reales. Estas interpretaciones son los llamados "modelos de Análisis No Standard", que fueron introducidos por primera vez a mediados de la década de los sesenta por Abraham Robinson (1966).

Desde el punto de vista de los teoremas del lenguaje formal no importa si uno trabaja con los números reales standard o con los no standard. Todo el trabajo que hemos venido discutiendo previamente, ha sido realizado en el contexto de los números, más que en el de la geometría. Deja la cuestión de la distribución de los puntos en la recta geométrica sin abordar. Y así permanece la situación en el presente. Hay un sistema de números que funciona muy bien para el Cálculo y el Análisis. Todo el mundo considera este sistema de números, en la práctica habitual, como identificable con los puntos de la recta, y la introducción explícita del axioma de Cantor generalmente, se olvida. Sin embargo, las alternativas no standard al sistema de los Números Reales no alteran los teoremas del Cálculo y del Análisis. Pero también los modelos no standard fallan a la hora de arrojar luz sobre la naturaleza de la recta como objeto geométrico y, como Cantor demostró, no podemos establecer si la recta refleja o no la estructura del sistema de los Números Reales. Ciertamente, asumimos que así ocurre, al menos por lo que respecta a los Números Racionales. Si los futuros matemáticos considerarán la visión de los Números Reales del siglo XIX como la representación de la recta, o solamente como una representación entre otras es una cuestión que permanece abierta (Crossley, 1987).

El proceso que hemos visto, revela un cambio gradual en el concepto de la correspondencia entre los números y los puntos de la recta, desde los números naturales, a los números racionales, los números construibles, los números reales, y finalmente a los reales no standard, en un proceso que parece asegurar la permanente evolución del concepto.

II. 2. 2 Reflexiones epistemológicas sobre el concepto de Número Real

Un análisis epistemológico del concepto de Número Real requiere una reflexión de su tratamiento a lo largo de la historia, que aporte consideraciones significativas en cuanto a la construcción del conocimiento sobre el tópico que nos ocupa. Para ello, señalaremos, en primer lugar, las etapas más importantes que hemos detectado en el desarrollo histórico del concepto de Número Real; posteriormente analizaremos una serie de dificultades inherentes a la conceptualización realizada en las distintas etapas consideradas.

En el desarrollo histórico del concepto de Número Real reconocemos tres etapas clave:

1. Descubrimiento de la irracionalidad.

En el amplio periodo de la historia de las matemáticas que abarcan las culturas babilónica y egipcia, que suele cifrarse desde el 3000 hasta el 1000 a. de C. (Boyer, 1986; Smith, 1958), no sale a la luz la cuestión de la irracionalidad, ya que con los planteamientos y conocimientos matemáticos de estas culturas tal cuestión no parece tener razón de ser. El problema matemático consiste para ellos en obtener la aproximación numérica de una razón, sin que haya lugar a que surja el problema de que una razón pueda ser racional o irracional (Neugebauer, 1957).

Las dificultades conceptuales, históricamente constatadas, se presentan por primera vez con los matemáticos griegos. Como ya hemos mencionado, los pitagóricos sostenían que los números naturales y sus razones eran suficientes para describir la relación entre dos segmentos cualesquiera. El descubrimiento, probablemente a finales del siglo V a. de C. (Boyer, 1986; 106), de longitudes que no se pueden medir mediante una unidad común, en las que la relación entre las longitudes no es reducible a una razón entre naturales, como ocurre en el caso de la diagonal y el lado del cuadrado, proporcionó el primer enfrentamiento con el llamado *problema de la irracionalidad.* Dicho problema se plantea por *la existencia de longitudes cuya relación no puede expresarse en términos de razones de enteros* (Gardiner, 1982, pg. 40). Esto llevó a los matemáticos griegos a separar el mundo de las magnitudes continuas del dominio del número, en un intento de buscar una teoría general que integrara los nuevos entes matemáticos surgidos de la costatación de las longitudes inconmensurables (Euclides). El concepto de irracionalidad surge así de la geometría y permanece conectado a ella hasta el siglo XVI; se considera este concepto de naturaleza distinta al concepto de número, centrado en la pluralidad de unidades.

2. Decimales infinitos e irracionalidad.

A raíz del desarrollo de las fracciones decimales por Stevin en el siglo XVI, surge *la discusión de si los decimales infinitos no periódicos son números o no y de qué clase.* Hay opiniones a favor de su aceptación, puesto que son útiles cuando *"nos fallan los números racionales"*, así como consideraciones que *"nos impulsan a negar que los irracionales sean números en absoluto"* (Stilfel, 1594, citado por Kline, 1972; pg.337). Aunque las expresiones decimales infinitas no periódicas acaban siendo aceptadas, finalmente, como números, no hay un marco bien establecido sobre el Número Real a finales del siglo XVI.

3. Construcción formal del concepto de Número Real.

En el siglo XIX se cierra el problema de la conceptualización del número Real con las distintas fundamentaciones dadas por Dedekind, Cantor y Weierstrass (Boyer, 1986). Sin embargo, estas construcciones tienen un elevado nivel de refinamiento. *Desde el punto de vista lógico un número irracional no es simplemente un símbolo o un par de símbolos,* tal como una razón entre dos enteros, *sino una colección infinita*, como una sucesión de Cantor o una cortadura de Dedekind. *El número irracional, definido lógicamente, encierra pues gran dificultad*, y podemos comprender por qué los griegos, y tras ellos tantas generaciones de matemáticos, encontraron tan difícil manejar este concepto (Pérez de Laborda, 1983).

Las tres etapas históricas mencionadas abarcan, en realidad, grandes períodos de la historia de la matemática, en los que se producen cambios importantes sobre otros muchos conceptos. Sin embargo, a efectos del que venimos considerando, nos limitamos a destacar las etapas mencionadas. En cada una de ellas se suscitan varios problemas de interés para la reflexión en Didáctica de la Matemática. Realizamos a continuación una enumeración de tales problemas, junto con reflexiones didácticas pertinentes.

1.- El problema de la irracionalidad surge en un contexto muy específico: el de la matemática en la Antigua Grecia. En opinión de autores como Arsac (1987), en el origen de la transformación de la matemática de una ciencia pragmática en una ciencia hipotético-deductiva está la cuestión de la irracionalidad. Al margen de este contexto, los matemáticos habían trabajado ampliamente con los números sin que esta cuestión se plantease con anterioridad.

Situándonos en la perspectiva del curriculum de matemáticas de la Educación Secundaria, a partir de los conocimientos aritméticos de nuestros alumnos, el problema de la irracionalidad, simplemente, no tiene lugar. Así pues, su introducción a los estudiantes requiere una evolución cualitativamente importante en su pensamiento matemático. Esta modificación no se produce espontáneamente, mientras se evita el problema de la irracionalidad y se pospone a la espera de que la presentación formal del concepto solucione un conflicto que no se entiende como tal, porque nunca ha sido planteado.

2.- El problema de la irracionalidad adquiere plena significación en el contexto geométrico, más concretamente, en el terreno de la medida. *"Sin la presión de los problemas de la medida, R no habría respondido más que a problemas matemáticos extremadamente elaborados" (*Douady, 1980; pg.109).

3.- La idea intuitiva inicial de que dos magnitudes, y más concretamente, dos longitudes, tienen una parte alícuota común es, sin duda, una etapa inevitable en el desarrollo del conocimiento matemático, tanto en el plano histórico como en el plano individual (Arsac, 1987; 284). Pero esta intuición puede convertirse en un obstáculo para la comprensión del problema de la irracionalidad.

4.- El reconocimiento del fenómeno de la inconmensurabilidad en el dominio geométrico implica el paso de un estadio donde la figura sirve de útil de prueba al estadio en que la geometría se convierte en *"el arte de los razonamientos ciertos sobre figuras falsas"*. En efecto, es absolutamente imposible constatar la inconmensurabilidad sobre una figura; al contrario, de la experiencia práctica e inmediata se sigue la conmensurabilidad, ya que la percepción y las necesidades prácticas se satisfacen en un número finito de pasos. Así que la conmensurabilidad no puede concernir más que a objetos matemáticos ideales, y no puede mostrarse, sino que precisaría entonces de una demostración *en el sentido de deducción a partir de unos axiomas* (Arsac, 1987; pg.280).

5.- Junto con el problema anterior, en cualquier demostración geométrica sobre inconmensurabilidad subyace el problema de los procesos infinitos, como hemos puesto de manifiesto en el desarrollo histórico.

6.- La irracionalidad de los radicales cuadráticos, considerada desde el punto de vista numérico, se aborda siguiendo métodos basados en la reducción al absurdo, lo que supone grandes dificultades para el razonamiento de los alumnos (Tall, 1978), especialmente a un nivel introductorio. Cuando se pretende resolver el problema de la irracionalidad planteándolo exclusivamente en el terreno de la aritmética, resulta bastante pobre en significatividad. Los razonamientos por reducción al absurdo son la forma elegante de eludir el inevitable proceso infinito que surge cuando se trata de ir obteniendo las sucesivas aproximaciones decimales (por exceso o por defecto) de los radicales cuadráticos, sobre las que nos es posible comprobar la irracionalidad.

7.- Por lo que respecta a la notación decimal de los Números Reales, ésta proporciona un medio fácil de introducir los números irracionales y un criterio para distinguirlos de los racionales; mientras que a los números racionales les corresponden las notaciones decimales finitas y periódicas, los irracionales se caracterizan por su notación decimal infinita no periódica. Pero las notaciones decimales nos enfrentan, una vez más, con el problema del infinito. Para considerar un decimal infinito como un número, los alumnos deben tener un sentido del infinito actual; de otra forma estos decimales serán concebidos por los alumnos como un proceso, serán vistos como entidades dinámicas e incompletas, radicalmente distintas de los números que conocen. Sin embargo, una creencia fundamental, sostenida tradicionalmente por filósofos y epistemólogos, es la de que nada que fuera infinito podía ser concebido como un objeto actual (Rosenblatt, 1991).

8.- Todavía queda un punto que tiene importancia para la noción de Número Real: es la noción del Continuo. La noción "intuitiva" o "a priori" de continuo lineal, o de la recta geométrica, es fuente de numerosas dificultades, contradicciones y paradojas (Romero i Chiesa; en prensa), que también implican la noción de infinito. Estas dificultades se ponen de manifiesto cuando consideramos que mediante la representación geométrica y mediante verificación empírica no podemos detectar diferencias entre densidad y continuidad. Para hacer inteligible dicha diferencia es necesario un nivel más elevado de representación, que incluye la idea de potencia de un conjunto, es decir, su cardinal (Moreno y Waldegg, 1991; pg.217).

9.- El concepto de Número Real, más concretamente el concepto de irracionalidad, es indisociable del problema del infinito. Y al enfrentarnos al infinito, hemos de tratar con unos esquemas mentales complejos, contradictorios y fuertemente ligados a dificultades intuitivas, procedentes en gran parte de nuestros esquemas de pensamiento habituales, constituidos a partir nuestra experiencia práctica y adaptados a objetos y acontecimientos finitos (Fischbein, 1979).

10.- Progresivamente, se va eliminando en el tratamiento didáctico de los Números Reales toda reflexión y discurso sobre el continuo y el infinito que no esté cuantificado y delimitado por la estructura regulada por las operaciones autorizadas del Cálculo, en donde, como hemos visto, toda correspondencia con el continuo lineal lleva implícito el axioma de Cantor. Esto ocurre con el tratamiento de las integrales, los límites o las derivadas. Y, sin embargo, por lo que se refiere al terreno didáctico, el propio Dedekind afirma: *"La intuición geométrica en la primera enseñanza del Cálculo Diferencial me parece, desde el punto de vista didáctico, extraordinariamente útil, incluso indispensable"* (Op. cit.).

Las diez reflexiones anteriores resumen las consideraciones epistemológicas surgidas del estudio histórico realizado sobre el concepto de Número real, los problemas principales de los que surge y a los que se enfrenta, así como sobre los sistemas de reperesentación sobre los que se estructura.

Las cinco primeras constatan que el problema de la no conmensurabilidad de determinadas longitudes sigue siendo el punto de partida para un planteamiento significativo de la necesidad de estos nuevos números; es en un contexto geométrico donde se plantea esta cuestión. Determinado el contexto geométrico adecuado, detectamos tres dificultades importantes para avanzar sobre este problema: la intuición inicial de que dos longitudes cualesquiera siempre son conmensurables, la carencia de un sistema deductivo bien fundado mediante el que superar las interpretaciones prácticas que refuerzan la intuición inicial, y, en tercer lugar, los argumentos basados en procesos infinitos que necesariamente hay que utilizar.

La sexta reflexión hace referencia a las dificultades derivadas del uso de razonamientos por reducción al absurdo cuando se trata de justificar que un radical cuadrático, en general, no admite una expresión racional. Los escolares han manejado expresiones de la forma $\sqrt{n}$ con regularidad y sin haberlas cuestionado previamente; también han aprendido técnicas para obtener valores aproximados de estas expresiones. A comienzos de la Educación Secundaria se plantea a los escolares, con argumentos muy sofisticados, la profunda diferencia que hay entre estas expresiones y los números racionales, manejados conjuntamente con anterioridad. El mayor conflicto que se plantea a este respecto es que no captan el interés del problema planteado y tampoco entienden su resolución. De nuevo surgen como obstáculo los procesos infinitos

La séptima reflexión plantea las dificultades que surgen de la presentación de los números decimales infinitos no periódicos y detecta que estas notaciones ya tuvieron dificultades para ser aceptadas históricamente como números.

Con la octava reflexión destacamos las dificultades derivadas del modelo de la recta numérica, utilizado como sistema de representación para los número reales. Los axiomas implícitos en el continuo geométrico de la recta plantean obstáculos importantes para el dominio de este sistema, aparentemente sencillo.

Finalmente, las dos últimas reflexiones constatan dos hechos: el papel ineludible de las nociones de infinito, potencial y actual, en cualesquiera de los sistemas de representación con los que se inicia el estudio de los Números Reales y los intentos sistemáticos por eludir mediante formalizaciones las dificultades derivadas de la complejidad conceptual señalada.

II. 3 Aspectos cognitivos relativos al concepto de Número Real

II. 3. 1 La noción de comprensión y los sistemas de representación

Una idea ampliamente aceptada dentro de la comunidad de Educación Matemática es que en el aprendizaje de las Matemáticas debe promoverse la comprensión. Para caracterizar lo que es ***comprensión***, partimos de la idea de que el conocimiento se representa internamente, y de que esas representaciones internas están estructuradas. Según la caracterización de Hiebert y Carpenter (1992), *"Las Matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes"* (pg. 67).

Al refererirnos a las representaciones hemos de considerar las ***representaciones internas***, por un lado, y, por otro lado, las ***representaciones externas***. Para pensar sobre ideas matemáticas, necesitamos representarlas internamente, en una forma que permita a la mente operar con ellas. Pero estas representaciones internas no son observables, ni comunicables, si no es por medio de representaciones externas, ya sea en forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos físicos (Hiebert y Carpenter, 1992; pg. 66). Esta distinción entre representaciones internas y externas es una distinción clásica de la epistemología, cuando establece dos sentidos básicos para dicha noción: i) representación como *contenido mental*, al que se asigna un sentido subjetivo y privado; ii) representación como aquello que se obtiene en el acto de representar, es decir, el *objeto intencional* de semejante acto (Ferrater, 1981; pg. 2847-2848).

La noción básica de representación expresa que una cosa significa, trata de o se refiere a otra. En esta perspectiva, la representación de algo por algo no se presenta aisladamente; toda representación tiene carácter sistémico, forma parte de un sistema (Gunttenplan, 1994; pg. 536). En el caso específico de las matemáticas la noción de representación se hace equivalente con la de sistema simbólico o sistema de símbolos.

Los sistemas simbólicos se caracterizan mediante un conjunto de rasgos sintácticos y semánticos.

Precisando nuestra terminología, nos referiremos a las ideas matemáticas antes mencionadas -consideradas como constructos teóricos pertenecientes al ámbito del conocimiento formal u oficial- con el término ***concepto.*** Y con el término ***concepción*** denotaremos a toda la red de representaciones internas y asociaciones evocadas por el *concepto* a través de sus representaciones externas, es decir, a la contraparte del concepto en el "*universo del conocimiento humano*" interno y subjetivo (Sfard, 1991; pg. 3). Esta misma distinción es recogida por Tall y Vinner (1981) mediante los términos "*esquema conceptual*" y "*definición formal*" (en la traducción adoptada por Romero i Chiesa (en prensa) de los términos "*concept image*" y "*concept definition*" de Tall y Vinner). Según estos autores, el "*esquema conceptual*" describe la estructura cognitiva global asociada al concepto, que incluye todas las representaciones mentales y propiedades y procesos asociados; se construye a lo largo de los años a través de experiencias de todo tipo, que cambian conforme el individuo encuentra nuevos estímulos y madura. Por "*definición formal*" entienden el conjunto de términos y expresiones utilizadas para especificar el concepto en cuestión.

Objetivo de nuestro estudio será determinar concepciones o representaciones internas de los alumnos de Primer Curso de Bachillerato sobre la noción de Número Real, es decir, la extensión y profundidad de las relaciones que establecen sobre la base de dos sistemas de representación fundamentales: la notación decimal y el modelo de la recta. Esta determinación no se sitúa en una consideración estática del concepto de Número Real, sino que se pretende estudiar en un proceso dinámico en el que intervienen la presentación, discusión y elaboración de significados de los sistemas de representación considerados, así como de sus relaciones mutuas. Estudiar la iniciación al concepto de número Real en Secundaria consiste, para nosotros, en decribir e interpretar el proceso mediante el cual unos escolares, partiendo de sus conocimientos anteriores sobre los números racionales y de unas nociones intuitivas básicas, construyen un sistema de relaciones significativas entre ellos y alcanzan una versión mas elaborada y potente del concepto de Número Real en el ámbito social escolar. Nos proponemos presentar un proceso de redefinición, cambio y construccion de concepciones, con sus logros y limitaciones, como marco explicativo de la comprensión de un concepto numérico altamente elaborado, en el que se avanza mediante el encaje adecuado de algunas de sus piezas esenciales.

El desarrollo reciente de la psicología cognitiva se basa en el uso extensivo de la noción de representación para caracterizar los estados mentales y las actividades de los sujetos, de ahí que tenga importancia la cuestión ¿qué clases de sistemas de representación se usan en la cognición? La distinción más general establece dos tipos distintos de sistema de representación: digitales y analógicos. La competencia matemática, que se presenta como caso paradigmático de competencia cognitiva, incluye procesamientos analógicos tanto como digitales (Gunttenplan, 1994; pg. 537).

Dentro de los sistemas digitales de representación, son las representaciones proposicionales las mejor estudiadas; las representaciones proposicionales son símbolos abstractos, amodales, similares al lenguaje; las notaciones matemáticas usuales aritméticas y algebraicas, son ejemplos apropiados de representaciones proposicionales.

Las representaciones analógicas son imágenes, principalmente visuales. Las imágenes se suelen identificar con dibujos, que se consideran representaciones de tipo analógico. Las representaciones geométricas y gráficas forman parte de los sistemas analógicos. En el caso de los conceptos numéricos y, en particular, en el concepto de Número Real, intervienen ambos tipos de representación, digital y analógica, desde el momento en que incluyen notaciones simbólicas y representaciones geométricas (Gunttenplan, 1994; Eysenck, 1990)

En el caso del concepto de ***Número Real,*** por lo que respecta a las ***representaciones externas***, las ***notaciones simbólicas*** y las ***representaciones geométricas*** juegan un papel fundamental, ya que permiten expresar las ideas y las relaciones constitutivas de dicho concepto. Tanto en el ámbito de las notaciones simbólicas, como en el de las representaciones geométricas, poseemos un instrumento integrador fundamental para el Número Real: el sistema de Notación Decimal y el Modelo de la Recta, respectivamente.

El sistema de Notación Decimal es un sistema integrador en el dominio de las notaciones simbólicas, puesto que toda notación decimal (finita, periódica o no periódica) representa un número real y, recíprocamente, cada número real puede ser expresado mediante una notación decimal. En este dominio de las notaciones simbólicas, contamos también con las notaciones habituales operatorias (fracciones, raíces cuadradas...), que constituyen un complemento y un apoyo importante para el sistema de Notación Decimal dentro de este ámbito.

Por otra parte, el Modelo de la recta es un sistema integrador en el dominio de las representaciones geométricas. El hecho de que la correspondencia entre los puntos de la recta y los Números Reales, realizada a través de la medida de longitudes, se conceptualice como una biyección, permite considerar importantes propiedades en el conjunto de los Números Reales, tales como el orden o la densidad, cuya interpretación mediante el continuo lineal es mucho más intuitiva y conveniente en las primeras etapas, según hemos visto en las consideraciones realizadas en apartados anteriores.

En el debate imágenes/ proposiciones, que trata de enfatizar las representaciones proposicionales en la cognición humana, consideramos que las representaciones analógicas desempeñan un papel esencial en la determinación y comprensión del concepto de Número Real, sin cuya aportación tal concepto se podría establecer sin construir su significado con precisión. Como trataremos de poner de manifiesto en este estudio, el sistema simbólico de la notación decimal es insuficiente para abordar la complejidad del concepto de Número Real que, como veremos, necesita el apoyo que proporcionan las imágenes de la representación geométrica. Entendemos que nuestro trabajo suministra una información empírica en la que se aborda la comprensión de un concepto en términos de representaciones proposicionales y analógicas necesarias y mutuamente complementarias. Tomamos pues partido en la mencionada controversia (Eysenck, 1990; pg. 293- 296) sosteniendo la importancia de las imágenes en la comprensión de los conceptos numéricos, delimitando sus funciones precisas y su conexión con la simbolización numérica.

Pasamos a describir con más detalle los sistemas de representación del Número Real, teniendo en cuenta que cada sistema simbólico se caracteriza mediante las correspondientes condiciones y rasgos sintácticos y semánticos.

II. 3. 2 Sistemas de representación en el ámbito Numérico

Sistema de Notación decimal

En el sistema de numeración decimal posicional los números enteros se expresan en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x, mientras que las fracciones decimales se expresan en términos de potencias de 1/10, de forma análoga a los polinomios en 1/x.

Es usual en el trabajo escolar hacer el paso de la notación fraccionaria a la decimal. Mediante el algoritmo de la división las fracciones pueden escribirse de forma justificada en notación decimal. En algunos casos obtenemos en un número finito de pasos su expresión decimal, que es igualmente finita. Sin embargo, en otros casos el algoritmo de la división no da lugar a una expresión decimal finita, sino que el cociente obtenido tiene infinitas cifras decimales. En este caso, la equivalencia de ese cociente con la fracción inicial supone una extensión del convenio previo que se estableció para los decimales exactos. La justificación formal de la equivalencia entre una fracción y una expresión decimal ilimitada viene dada por la interpretación de un decimal infinito como una serie de potencias de 1/10: $\Sigma a_n 1/10^n$ (Gardiner, 1982; pg. 75). Esta cuestión, desconocida por los alumnos, constituye el ejemplo más sencillo de extensión mediante el cual trascendemos los procesos finitos para tomar contacto con los procesos infinitos, que están en la raiz de las matemáticas de las magnitudes continuas.

Sin tener que desceder a las profundidades de la justificación formal, los alumnos de esta edad (14- 15 años) pueden establecer razonadamente que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica y viceversa o, al menos, eso es lo que da por supuesto la organización curricular para el nivel correspondiente (Rico, Coriat, Marín y Palomino, 1994). En efecto, al efectuar la división indicada por la expresión fraccionaria, observamos que el número de restos distintos posibles es limitado, ya que el resto ha de ser menor que el dividendo, de modo que si la división no es exacta, llegará un momento en que un resto se repita y, una vez que esto suceda, las cifras del divisor y los restos siguientes se repetirán indefinidamente en el mismo orden. Recíprocamente, los alumos de este nivel pueden razonar las reglas que permiten la conversión de un decimal finito o periódico en una fracción, aunque éstas últimas hacen uso implícito de ciertas propiedades de series numéricas al efectuar operaciones aritméticas con números de infinitas cifras.

Una vez claro que a todo número racional corresponde un decimal recurrente y viceversa, cabe preguntar qué ocurre con los decimales infinitos no recurrentes: ¿responden estas expresiones a alguna noción de número?

Si consideramos la interpretación de los decimales infinitos recurrentes como series de potencias, e interpretamos el caso de los decimales infinitos no recurrentes de la misma forma, en este segundo caso no disponemos de la recurrencia para sumar la serie. No obstante, aplicando a la sucesión de sumas finitas de la serie de potencias de 1/10 la propiedad fundamental de los números reales: toda sucesión infinita de números reales creciente y acotada superiormente por cierto número k, tiene como límite un número real a < k), entonces *a cada decimal infinito le corresponde un número real. Recíprocamente, cada número real viene dado mediante un decimal infinito* (Ilín y Pozniak, 1991; pg. 33).

Este resultado muestra la potencia del simbolismo de la notación decimal para el Número Real, pero al mismo tiempo pone de manifiesto la complejidad y la sofisticación de algunos resultados que subyacen en la aparentemente sencilla notación decimal para representar los Números Reales; los argumentos para aceptar el estatus numérico de estas notaciones van a poner de manifiesto la perplejidad de los alumnos de quince años cuando se encuentran expresiones de este tipo.

La Notación operatoria habitual

Aunque los alumnos del nivel en el que se desarrolla el trabajo de investigación se enfrentan por primera vez a los decimales infinitos no periódicos, sin tener la posibilidad de comprender aún las justificaciones formales en las que se fundamentan, la simultaneidad de la Notación Decimal con la Notación habitual constituye un apoyo para el trabajo con este tipo de expresiones decimales y su aceptación por parte de los alumnos. Denominamos Operatoria a la Notación habitual en el sentido de que destaca el carácter operatorio de los Números Reales, al indicar una Operación mediante cuya aplicación algorítmica obtenemos la representación decimal; este es el caso de:

-la notación de Fracción, que expresa una división indicada;

-la notación habitual de los Irracionales algebraicos, que viene dada a partir del proceso de resolución de una ecuación, de la que son ejemplos sencillos los irracionales cuadráticos;

-la notación habitual de irracionales trascendentes conocidos, en los que a partir del "nombre" tenemos acceso a métodos para su aproximación decimal.

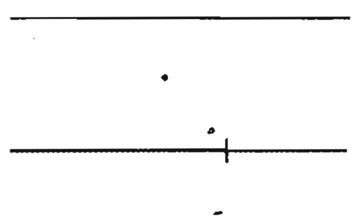
II. 3. 3 Sistemas de representación en el ámbito Geométrico

El modelo de la Recta Real

Por recta real se entiende un sistema de imágenes, signos, reglas y convenios mediante los que se realiza una representación geométrica de los Números Reales y se interpretan sus operaciones sobre una línea recta. Constituye el segundo instrumento integrador fundamental para el estudio de los Números Reales, que tomamos como referencia para enfocar nuestra investigación.

El análisis de la recta real incluye dos niveles. En un primer nivel encontramos:

1) Imágenes específicas:



línea recta

punto

Combinación de línea recta y punto

2) Convenios de carácter general:

a) Una marca en la recta (punto) representa un número, y recíprocamente.

b) Los números 0 y 1 pueden elegirse arbitrariamente entre los puntos de la recta; para establecer la aplicación de R en la recta hay que fijar esos puntos.

c) El orden izquierda-derecha entre los puntos de la recta corresponde al orden usual entre los números; esto lleva a que los puntos a la izquierda de 0 correspondan a los números negativos y que los puntos a la derecha de 0 correspondan a los números positivos.

3) Reglas para representar los números:

a) Ley de la aplicación de R en la recta: la medida de longitudes;

b) Criterio para representar el punto que corresponde a la suma de dos números;

c) Criterio para representar el punto que corresponde a un producto.

En un segundo nivel de análisis entra la consideración del continuo lineal, que soporta la interpretación geométrica del conjunto de los Números Reales. El sistema axiomático sobre el que se fundamenta dicho continuo lineal impone una lógica y unas propiedades al conjunto numérico, difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas; ésta es precisamente una de las claves por las que la

Recta Numérica se convierte en un sistema de representación ineludible para la comprensión del concepto de número real.

Los alumnos han tenido contacto con el modelo de la recta desde la educación primaria; han estudiado la representación en la misma de los números Naturales, Enteros y Racionales. El criterio mediante el cual un número, Racional o Irracional, es asignado a un punto de la recta es el de la Medida de Longitudes; a un número determinado le corresponde el punto extremo del segmento con origen en 0, tal que la medida de dicho segmento con respecto al segmento unidad (origen 0 y extremo 1) viene dada por el número en cuestión. Este criterio se maneja de forma implícita. Sin embargo, hemos señalado que la clave para considerar a la Recta como modelo de los Números Reales es la consideración de la biyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta. Si se quiere empezar a trabajar de modo consistente con el modelo de la Recta, consideramos que es necesario profundizar en esta cuestión, es decir, en el estudio de la Correspondencia Números-Puntos de la recta y en su carácter biyectivo.

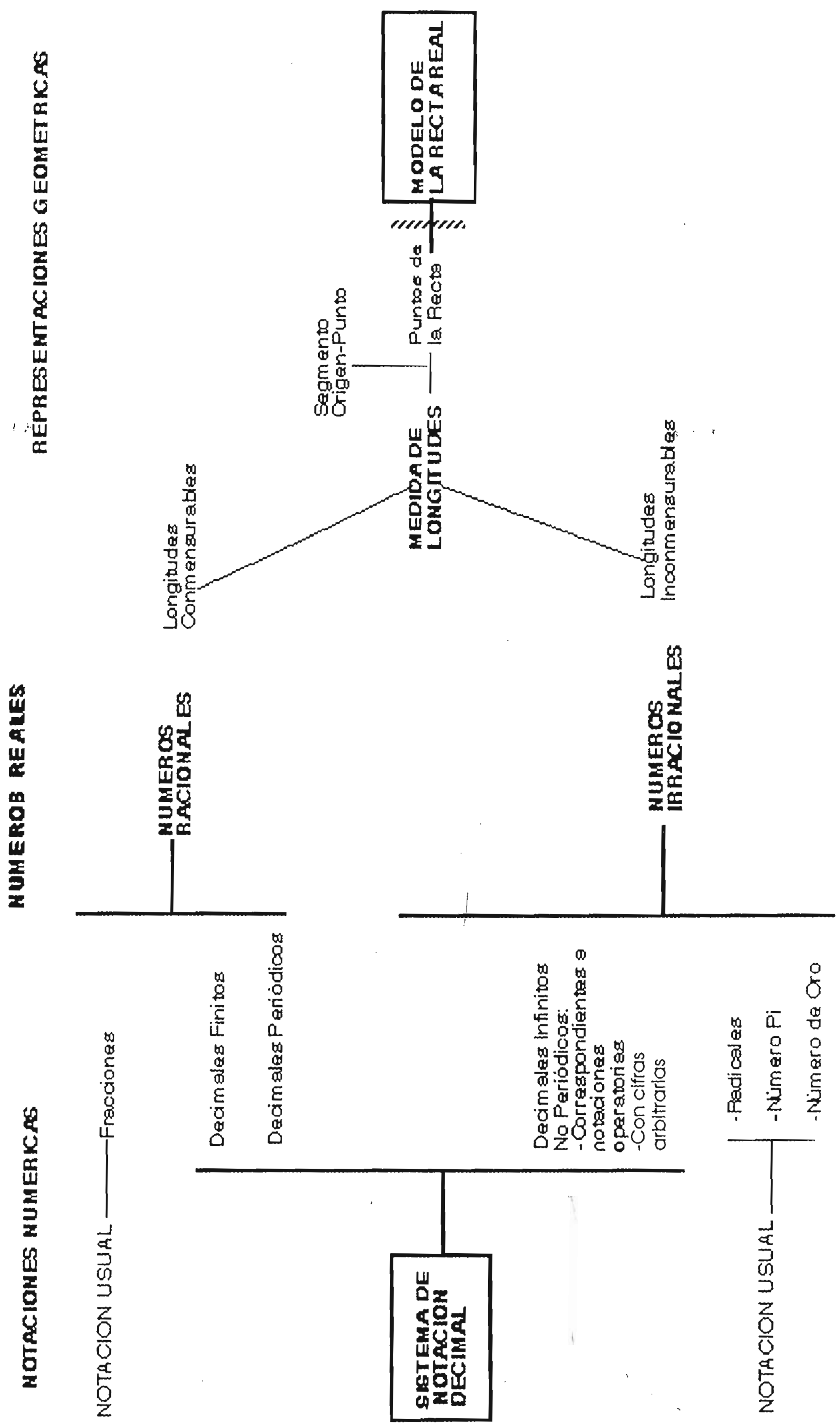
Además, hemos de tener presente que el modelo de la Recta, en su aparente simplicidad, encierra una complejidad considerable (Romero i Chiesa), y es importante tener en cuenta que R no es el único conjunto numérico que se representa isomorfamente mediante dicho modelo, sino que también el conjunto de los Hiperreales hace uso de gran parte de los signos y convenios considerados (Tall, 1980).

II. 3. 4 Conexiones en los sistemas de representación

Una vez descritos los Sistemas de Representación de los Números Reales, avanzaremos en nuestro estudio sobre su comprensión apoyándonos en los siguientes supuestos de la psicología cognitiva. En primer lugar, consideramos que existen relaciones entre las representaciones externas y las internas. En segundo lugar, asumimos que las representaciones internas pueden ser relacionadas o conectadas entre sí. Además, la naturaleza de las representaciones matemáticas externas influye en la naturaleza de las representaciones matemáticas internas y, recíprocamente, la forma en que un alumno genera e interpreta representaciones externas proporciona información acerca de cómo el alumno ha representado esa información internamente (Hiebert y Carpenter, 1992; pg. 66).

Si nuestro objetivo es favorecer la comprensión en los alumnos, y está comprensión viene dada por el incremento en el número de ***conexiones en las redes de representaciones internas*** y la consistencia de las mismas, parece claro, a la vista de los presupuestos anteriores, que una forma de lograrlo es a través del establecimiento de ***conexiones entre los elementos de los sistemas de representación externos*** de un concepto, tanto dentro de un mismo sistema (por ejemplo, dentro del sistema de notaciones simbólicas) como entre sistemas diferentes (por ejemplo, entre las notaciones simbólicas y las representaciones gráficas). Numerosos autores abogan por la importancia de los distintos sistemas de representación de un concepto como modos de expresar distintas facetas o características del mismo, que no serían abarcables por un solo sistema de representación; y además, por la importancia de las transformaciones dentro de ellos y las traducciones entre distintos sistemas (Janvier, 1987; Sfard, 1991; Duval, 1993; Hiebert y Carpenter, 1992; Castro, 1994; González, 1995).

Una vez presentados en el apartado anterior los distintos sistemas de representación externos del concepto de Número Real, pasaremos a establecer un mapa en el que señalaremos algunas de las transformaciones y traducciones entre dichos sistemas, que resultan de interés en nuestro trabajo con el Número Real al nivel de los alumnos de 1º de BUP. En esta mapa destacaremos las relaciones sobre las que vamos a centrar intencionalmente los elementos y rasgos de comprensión de nuestros escolares sobre el concepto en estudio.


NOTACIONES NUMERICAS
NUMEROS REALES
REPRESENTACIONES GEOMETRICAS
NOTACION USUAL
Fracciones
Decimales Finitos
Decimales Periódicos
NUMEROS RACIONALES
Longitudes Conmensurables
MEDIDA DE LONGITUDES
Segmento Origen-Punto
Puntos de la Recta
MODELO DE LA RECTA REAL
SISTEMA DE NOTACION DECIMAL
Decimales Infinitos No Periódicos:
-Correspondientes a notaciones operatorias
-Con cifras arbitrarias
NUMEROS IRRACIONALES
Longitudes Inconmensurables
NOTACION USUAL
-Radicales
-Número Pi
-Número de Oro

Nota:

La tipología establecida para la Notación Habitual, en el caso de los Números Irracionales, es una tipología didáctica. Hemos optado por ella, en lugar de la tipología que dividiría a los irracionales en Algebraicos y Trascendentes (conocidos) por lo que respecta a su notación habitual operatoria, debido a que esta última queda fuera por completo del ámbito didáctico en el nivel en que nos movemos. Así pues, hemos reseñado los tipos de notación operatoria de los irracionales con los que trabajaremos en este nivel.

II. 4 Racionalidad del estudio y supuestos en que se basa

Dentro de las contribuciones realizadas al ICME 6 (1998, Budapest) por el Grupo de Trabajo "*Cuestiones epistemológicas concernientes a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*", se encuentra la siguiente recomendación: *"Un asunto esencial es que las matemáticas deberían ser enseñadas y aprendidas como una construcción progresiva para afrontar problemas prácticos y teóricos. Esta tesis tiene paralelismo con la idea de que, en el curso de la Historia, los conceptos matemáticos han emergido de esa forma. El concepto de Número se ofrece como una buena ilustración de tal proceso a largo plazo"* (Recherches en Didactique des Mathématiques, vol. 10, 1989; pg. 120).

De lo expuesto en los apartados anteriores, cabe deducir la gran dificultad del tratamiento didáctico del tópico que nos ocupa. En efecto, es en el concepto de Número Real donde tienen su raíz los problemas que afectan a la matemática continua. Sostenemos que soslayar estos problemas en espera de que un tratamiento formal del tema evite afrontarlos no contribuye a la comprensión del Cálculo y del Análisis Matemático por parte de los alumnos. Por otra parte, también sostenemos que, al emprender nuestro estudio, no hay un conocimiento suficiente ni bien organizado del campo conceptual que nos ocupa, que proporcione pautas de actuación adecuadas para el trabajo de profesores y alumnos. Se hacen necesarios estudios sistemáticos del campo conceptual de los Números Reales basados en un análisis detallado y una comprensión adecuada de los sistemas de representación que lo fundamentan, que permitan detectar los problemas de comprensión que se presentan y hacer propuestas constrastadas para su tratamiento y superación. Se hace ineludible encontrar propuestas didácticas que permitan un desarrollo gradual de la comprensión del Número Real por parte de los alumnos y que nos permitan describir y caracterizar dicho desarrollo. Nuestro trabajo va encaminado a satisfacer las necesidades apuntadas.

Si atendemos al marco general descrito por Harnik (1986) (citado por Arcavi y Bruckheimer, 1987; pg. 21), las etapas principales en el desarrollo de un concepto, son:

-Una ***etapa preliminar***; *"Un nuevo concepto nace de la necesidad. Al principio es a menudo vago e incluso los inventores del concepto se sienten incómodos con él".*

-Una ***etapa de familiarización***; *"El concepto se usa repetidamente con confianza creciente, hasta que es comprendido".*

-Una ***etapa de axiomatización***.

En una planificación que tuviera en cuenta las etapas mencionadas, un objetivo prioritario para la primera etapa sería ***conseguir que el problema de la irracionalidad sea para los alumnos, realmente, un problema***, es decir, que estuviera dotado de significado en relación con el carácter problemático, como condición necesaria para que tenga sentido buscar la solución del problema y, posteriormente, las demostraciones y el tratamiento formal puedan aceptarse como vias para responder a la cuestión planteada.

Las primeras preguntas que pueden plantearse deben tener como objetivo ***poner en cuestión la creencia en la conmensurabilidad de cualquier magnitud, más concretamente, de cualquier longitud, con otra tomada como unidad.*** Como hemos señalado anteriormente, éste sería un obstáculo ineludible en la comprensión del concepto de Número Real. Sólo a partir de aquí, ***puede introducirse la noción de inconmensurabilidad***, cuya importancia para la comprensión del concepto que nos ocupa ha quedado patente en el análisis histórico.

Otro problema importante, que surge con la extensión de la notación decimal para cantidades no enteras, es el relativo a las ***notaciones decimales infinitas.*** Los alumnos, en el nivel en que nos encontramos, tienen suficiente manejo de la notación decimal como para introducir las expresiones decimales infinitas no periódicas, que caracterizan a los números irracionales y que son fácilmente distinguibles de la notación decimal de los racionales. La cuestión será entonces ver cuál es el ***grado de aceptación de estas expresiones por parte de los alumnos, y cómo la familiarización y el uso de las mismas en distintos contextos contribuye a aumentar el grado de aceptación y confianza sobre el status de número de tales expresiones.***

Con respecto a la ***correspondencia Números Reales-Puntos de la Recta***, la medida de longitudes permite asignar un punto de la recta a los números construibles, con los números no construibles nos enfrentamos de forma ineludible a problemas relacionados con los procesos infinitos y el paso al límite. A lo largo del ***trabajo con el modelo de la recta***, somos conscientes de que se presentarán problemas relacionados con el infinito y el continuo, y estaremos abiertos a explorar y analizar las intuiciones de los alumnos en este sentido. No obstante, no será un tema que nos propongamos abordar directamentre en nuestro plan de actuación didáctica, por motivos de su intrínseca dificultad, dada la sofisticación de los instrumentos matemáticos requeridos para su tratamiento riguroso, que desbordan los objetivos de este estudio.

A la hora de desarrollar la acción didáctica, podemos elegir entre dos enfoques distintos: uno partiría de los conocimientos de los alumnos y se centraría en estudiar cómo puede ser extendido ese conocimiento, y el otro ***partiría del análisis de cómo debería ser conectado el conocimiento una vez que se ha adquirido y trabajar hacia***

atrás. Aunque en última instancia ambos enfoques deben tener en cuenta cómo se organiza el conocimiento una vez adquirido y cómo se conecta el conocimiento con el conocimiento del que parten los alumnos, el primero podría ser descrito como de abajo a arriba, y el segundo como de arriba a abajo.

En nuestro caso, hemos optado por el segundo enfoque. Por una parte, el análisis del concepto de Número Real nos proporciona bases para identificar cómo debería ser conectado el conocimiento y qué conexiones son claves y prioritarias para servir de centros de interés alrededor de los cuales organizar el trabajo con los alumnos. También el estudio cuidadoso de las redes de conceptos y las conexiones necesarias para la construcción del Número Real proporciona una visión enormemente útil y clarificadora para detectar posibles dificultades, alcance de las mismas y posibles soluciones más o menos parciales en distintos niveles de avance; de este modo se facilita la selección de situaciones e informaciones que abran vías de progreso a los alumnos. Por último, este análisis proporciona un medio para situar el ***conocimiento previo de los alumnos***, el cual es el punto de partida ineludible en nuestro trabajo; siguiendo a autores como Wittrock (1990), Hiebert y Carpenter (1992), para que una idea, hecho o procedimiento matemático se comprenda ha de estar conectado a nuestra base de conocimientos previos. Sin embargo, consideramos que el conocimiento previo puede resultar muy limitado para generar, en un avance espontáneo, cuestiones de la envergadura de las que constituyen los fundamentos del concepto de Número Real.

Una vez que hemos destacado la importancia del proceso de construcción de conocimiento sobre un concepto por los alumnos mediante el aumento del número de conexiones y la consistencia de las mismas en las redes conceptuales, el paso siguiente será plantearnos cómo podemos conseguirlo. Nuestra hipótesis de partida es que esta construcción no se lleva a cabo por la mera exposición de las conexiones en el nivel de las representaciones externas; es más, esta explicitación por parte del profesor supondría el riesgo de que la información suministrada fuera internalizada en forma de piezas aisladas en lugar de favorecer la construcción de las conexiones pretendidas. Sostenemos que ***el enriquecimiento de las concepciones se produce a través del esfuerzo realizado por los alumnos para resolver situaciones problemáticas***. *"Es a través de la resolución de problemas como un concepto cualquiera adquiere sentido para un alumno. Este proceso de elaboración pragmática es esencial para la psicología y la didáctica, como es esencial para la historia de las ciencias"* (Vergnaud, 1990; pg. 135). Estas situaciones problemáticas deben estar dotadas de sentido para los alumnos, pero ser a la vez generadoras de conflictos que favorezcan la aparición, puesta en práctica y discusión de conexiones, tanto de carácter operatorio como de carácter estructural, que constituirán su concepción de Número Real. Este tipo de situaciones constituyen *"un problema que los alumnos no pueden resolver con el conocimiento disponible pero para* *las que pueden desarrollar nuevos instrumentos de resolución. Estos instrumentos son el punto de partida para nuevo conocimiento"* (Laborde, 1994; pg. 147). Sólo a través de interacciones dialécticas a partir de las situaciones mencionadas, y de la vuelta sobre las mismas en sucesivas ocasiones, los alumnos irán construyendo y consolidando dicha concepción.

Para concluir este análisis, sería conveniente reflexionar sobre el punto relativo al ***carácter operatorio y al carácter estructural de las conexiones internas*** que tienen lugar en la construcción de las concepciones matemáticas. Con los términos operatorio/estructural, nos estamos refiriendo a la dualidad que aparece en la literatura matemática, psicológica y filosófica expresada en formas diferentes: algorítmico/ abstracto, procedimental/ declarativo, proceso/ producto, procedimental/ conceptual, útil/ objeto, etc. (Sfard, 1991; pg. 7). Nuestro interés en detenernos en este punto, es poner de manifiesto la complementaridad de ambos aspectos en la formación del conocimiento y nuestro presupuesto, compartido por autores como Sfard, Janvier, Douady y otros, de que en el proceso de formación del conocimiento, tanto a nivel histórico como a nivel psicológico, la etapa operatoria suele preceder a la etapa estructural. En el caso del Número Real, en nuestro enfoque, la aparición de los procesos de aproximación decimal de raíces cuadradas, medida de longitudes, consideración de razones entre longitudes, etc. y su manejo, precederá a la consideración de estos procesos como objetos matemáticos, "números irracionales", de diversos tipos según su procedencia. Más aún, siendo conscientes de que la formación de concepciones estructurales es un proceso lento y lleno de dificultades según cabe deducir del desarrollo histórico del concepto que nos ocupa, uno de nuestros objetivos será observar qué grado de estructuración son capaces de alcanzar los alumnos a partir de los procesos mencionados, durante nuestro proceso didáctico, sin pretender fijarnos un objetivo a priori en este sentido.

Por último, un aspecto clave a tener en cuenta en nuestros presupuestos, es el papel de la ***interacción social*** en la construcción del conocimiento y sus implicaciones para la comunidad de la clase.

Por lo que se refiere a la cuestión ontológica del conocimiento, partimos de la base de que el conocimiento de un mundo real objetivamente existente no puede ser alcanzado. Esto no quiere decir que tal conocimiento real no exista, solamente, que aún en el caso de que esto fuera así, no hay forma de que podamos tener conocimiento de ello, si demandamos que este conocimiento sea algo objetivo y absoluto. La objetividad, a nuestro juicio, reside en la naturaleza pública del lenguaje, de los conceptos y las teorías, y por tanto del conocimiento. Estas pueden cambiar, ya que son construcciones sociales, conceptos públicamente negociados, pero en cuanto a que son relativos a una cultura determinada, en un lugar y tiempo determinados, funcionan como conocimiento objetivo, sin necesidad de adscribirles una existencia trascendental (Lerman, 1989; pg. 219). Aceptando la hipótesis de que las representaciones matemáticas son construcciones sociales (Restivo, 1992), queremos tomar distancia expresamente del debate relativismo/ realismo, ubicando la construcción social del conocimiento en los campos de su construcción, distribución y utilización. Nuestra hipótesis localiza el conocimiento en el dominio social: los conceptos son públicos y su significado se establece mediante el uso compartido.

En la discusión de los aspectos cognitivos y sociales del conocimiento, es necesario coordinar tres puntos de referencia: las prácticas compartidas en la comunidad social, más específicamente en la comunidad matemática para nuestro caso, las prácticas compartidas dentro de la comunidad de la clase, y las concepciones que los alumnos forman a partir de dichas prácticas. Las prácticas compartidas por la comunidad matemática son privilegiadas en el sentido de que delimitan los objetivos cognitivos que serían deseables para los alumnos. En teoría, el conocimiento de estos objetivos por parte del profesor y su contacto con las potencialidades de los alumnos en la comunidad de la clase, le colocan en un papel de puente entre los alumnos y el conocimiento matemático, considerado en términos de prácticas compartidas por la comunidad matemática. Para llevar a cabo esta labor, es importante considerar al alumno como alguien que intenta comprender o dotar de significado a sus experiencias, y a la clase, como una comunidad que proporciona a los alumnos el ámbito para contrastar estos significados, tanto en pequeños grupos de discusión como en discusiones más amplias reguladas por el profesor, y converger hacia significados compartidos o, más precisamente, considerados como compartidos en el seno de la comunidad. Los grupos de trabajo de los alumnos y las discusiones de clase, proporcionan a los individuos la posibilidad de describir, explicitar, contrastar, modificar o ampliar las conexiones internas que han formado a partir de las situaciones de trabajo y, por otra parte, proporcionan al profesor la oportunidad de observar las conexiones explicitadas por los alumnos, aprovechar y reforzar los puntos fuertes, rebatir conexiones inapropiadas, apoyar aquéllas que puedan tener potencialidad para el avance en la comprensión del concepto, estudiar conexiones no previstas con anterioridad y sus posibles derivaciones, etc., en un flujo en el que ambas partes se benefician de un proceso mutuamente enriquecedor en su aprendizaje como alumnos y como guía, respectivamente.

II. 5 Objetivo General e Hipótesis

Pasamos a precisar los supuestos que se derivan de las consideraciones realizadas hasta el momento para nuestra investigación y a partir de los cuales vamos a reenunciar el objetivo general de este estudio y explicitar la hipótesis en la que se sustenta.

1.- La construcción del concepto de Número Real se asienta sobre dos familias de representaciones: notaciones numéricas -notaciones simbólicas, de carácter proposicional- y modelos geométricos -imágenes y representaciones gráficas-; es decir, en el concepto de Número Real intervienen sustantivamente representaciones digitales y analógicas.

A nivel estructural la imbricación e interdependencia de ambos tipos de representación se pone de manifiesto en el proceso histórico de la construcción del concepto de Número Real, especialmente en el planteamiento y resolución de los conflictos más significativos.

A nivel cognitivo los dos tipos de representación son, igualmente, necesarios y mutuamente complementarios. Sostenemos que la comprensión del concepto de Número Real pasa por el manejo de ambos sistemas de representación (notaciones numéricas y modelos geométricos) y de las conexiones y relaciones entre ellos, de forma complementaria y progresivamente más profunda y compleja.

2.- Consideramos que el tratamiento didáctico que se hace del concepto de Número Real, derivado esencialmente del programa de la Matemática Moderna, es inadecuado y pobre en significatividad para los alumnos. El problema de la irracionalidad es altamente complejo, y a esta complejidad se añaden las dificultades derivadas de las nociones de infinito implicadas.

Consideramos que el concepto de Número Real no puede abordarse de forma efectiva mediante un tratamiento convencionalmente formal, basado en representaciones proposicionales, y con referencias superficiales y pobremente conectadas en el terreno de las imágenes.

Del presupuesto anterior se deriva que la estrategia didáctica del curriculum de matemáticas convencional pretende solucionar problemas importantes de comprensión soslayándolos mediante un planteamiento formal que, al pasar de puntillas por las dificultades del Número Real, elude las cuestiones fundamentales que están en la raiz de la comprensión de este concepto.

Bajo estos supuestos, reenunciamos con mayor precisión el Objetivo General de este estudio:

Explorar dificultades y potencialidades que presenta la introducción del concepto de Número Real a escolares de 14-15, utilizando para ello una propuesta didáctica que se caracterice por:

-tener en cuenta la complejidad de dicho concepto y abrir vías para la presentación, comprensión y solución de problemas fundamentales en la construcción del mismo,

-basarse, de forma simultánea y complementaria, en los sistemas de representación digitales y analógicos propios del Número Real y en un conocimiento claro, preciso y riguroso de la red conceptual que sustentan,

-estimular la progresiva profundización en las componentes e interrelaciones de ambos sistemas de representación, con objeto de proporcionar una base consistente para una adecuada formación de los alumnos en este terreno,

-insertarse en un contexto curricular, y considerar las limitaciones y posibilidades que proporciona el aula como escenario natural complejo.

Bajo los anteriores supuestos, objetivo y caracterizaciones, la Hipótesis de nuestro estudio es:

Sostenemos que

1º es viable una propuesta didáctica con las condiciones enunciadas, que nos permita introducir el Número Real a un grupo de alumnos de 1º de B.U.P.;

2º el desarrollo en el aula de la mencionada propuesta permitirá recoger información relevante de la comprensión de los escolares de 14-15 años sobre el concepto de Número Real.

En los capítulos que siguen nos proponemos desarrollar nuestro objetivo y aportar evidencias que delimiten y concreten la Hipótesis.

CAPITULO III

PLANIFICACION DE LA INVESTIGACION

III. 1 Formulación del problema. Focos de Investigación

Una vez perfilado el objetivo general de nuestro estudio, como conclusión del capítulo anterior, nos proponemos en este capítulo desarrollar la planificación de la propuesta didáctica señalada en dicho objetivo, teniendo en cuenta la caracterización en él explicitada. Para ello, hemos decidido establecer y articular dos tópicos subsidiarios, que centran nuestra atención y se derivan del objetivo general, a los que denominamos **Focos de Investigación**; mediante estos dos focos se particulariza el objetivo general.

El **Primer Foco** estudia los problemas didácticos implicados en las Notaciones Numéricas usuales para representar los Número Reales, así como las potencialidades que el trabajo con este tipo de notaciones tiene para la comprensión del concepto; el **Segundo Foco** estudia, a su vez, los problemas que surgen de las Representaciones Geométricas de los Números Reales y las potencialidades que éstas presentan en el terreno didáctico. Pasamos a describir la concreción del estudio sobre ambos focos, que actúan como objetivos subsidiarios del objetivo principal. Cada Foco se desglosa en una serie de subobjetivos específicos: 4 subobjetivos para el Primer Foco y 5 subobjetivos para el Segundo Foco de Investigación. La operativización de los subobjetivos la realizamos mediante el enunciado de Cuestiones Específicas de Investigación, 23 en total, que se acompañan de una serie de Cuestiones Complementarias. Ambos tipos de Cuestiones, se proponen a los alumnos con formato de tareas escolares: ejercicios, pruebas, trabajos de exploración, exámenes o cuestiones para el debate, que incluyen en cada caso uno o varios items.

En lo que sigue presentamos con detalle el proceso que lleva desde la definición de los objetivos de la investigación a las tareas y actividades mediante las que vamos a captar el conocimiento y las concepciones de los alumnos sobre las diferentes cuestiones determinadas; mediante este desarrollo concretamos y delimitamos nuestro problema de investigación (apartados 2 y 3). A continuación, presentaremos las unidades de análisis que utilizaremos para interpretar los datos obtenidos en las mencionadas tareas, en las distintas componentes del triángulo didáctico Alumnos-Contenido-Profesora (apartados 4, 5, 6 y 7). Finalmente, estableceremos nuestro plan de actuación en el aula (apartado 8 y Anexos III.1 y III.2).

III. 2 Primer Foco de Investigación: Notaciones Numéricas de los Números Reales

El Primer Foco de investigación considerado corresponde al ámbito de las Notaciones Numéricas, y determina un primer objetivo parcial para nuestra investigación; a su vez, va a desglosarse en una serie de subobjetivos, que detallamos mediante cuestiones específicas

La elección de este Foco de Investigación se fundamenta en el carácter integrador de la Notación Decimal para los Números Reales, en la familiaridad que tienen los alumnos con este sistema de notación a raíz de su estudio en niveles precedentes, y en la facilidad aparente que proporciona para distinguir los números racionales, determinados por las notaciones decimales periódicas, de los irracionales, caracterizados por las notaciones decimales infinitas no periódicas.

Si atendemos al estudio histórico y epistemológico, las notaciones decimales infinitas presentan, en una primera fase, problemas de aceptación. Esta aceptación se incrementa a causa del uso continuado y creciente, así como de su utilidad. Finalmente, la aceptación se produce en términos de justificación formal. Sin embargo, según hemos visto en el capítulo precedente, la aceptación a nivel formal lleva implícita la noción de infinito actual, y el manejo de resultados matemáticos de un nivel avanzado, como son los conceptos de límite, de serie y de suma de una serie.

III. 2. 1 Subobjetivos del Primer Foco

Dado que nos encontramos en un nivel introductorio del concepto de Número Real, los **subobjetivos**, dentro del objetivo parcial que estudia el ámbito de las notaciones numéricas, son:

Primero, *explorar el nivel de conocimientos que tienen los alumnos sobre las notaciones decimales, enteras y fraccionarias (finitas y periódicas) y, en consecuencia, trabajar las deficiencias que encontremos al respecto para mejorar dicho nivel.*

En la etapa escolar previa al nivel en que nos encontramos, los alumnos han estudiado la notación decimal de los números racionales; han estudiado la notación decimal finita y han realizado operaciones aritméticas con dicha notación, lo cual nos hace prever que poseen una noción del valor posicional de las cifras en este sistema decimal. Por otra parte, los alumnos han tenido contacto con la notación decimal infinita periódica, a través del algoritmo tradicional de la división, que permite pasar de la notación fraccionaria a la decimal.

Segundo, *introducir las notaciones decimales infinitas no periódicas* con distintos ejemplos y *explorar el grado de aceptación por parte de los alumnos de este tipo de notaciones y los problemas que pueden suscitarse* en torno a este tema.

Tercero, *trabajar las conexiones de las notaciones decimales infinitas no periódicas* de algunos números irracionales (raíces cuadradas, pi, número de oro) *con las notaciones habituales de esos mismos números*, así como *con la medida de longitudes (inconmensurables) correspondientes a los valores numéricos mencionados*.

Nos proponemos detectar, en este caso, los *cambios que se produzcan en la comprensión de los alumnos con respecto a que las notaciones infinitas no periódicas representan una noción de número.*

Cuarto, *clasificar los distintos tipos de notaciones decimales que se presentan*, incluidas las notaciones decimales no periódicas, y *caracterizar los distintos conjuntos numéricos por su tipo de notación decimal*; a partir del conjunto de todas la expresiones decimales posibles *establecer un nuevo conjunto numérico: los Números Reales.*

III. 2. 2 Cuestiones Específicas de Investigación del Primer Foco

Las **Cuestiones Específicas de Investigación** (CEI) que operativizan los subobjetivos anteriores, y en las que se explicita qué aspectos de la comprensión de los alumnos queremos explorar en relación con el Primer Foco de Investigación (CEI I), son las siguientes:

-Después de revisar los conocimientos sobre números racionales:
CEI I-1: ¿Qué expresiones decimales conocen los alumnos y cómo las clasifican?
CEI I- 2: ¿Qué argumentos utilizan para aceptar o rechazar, según los casos, el que determinadas expresiones decimales infinitas representen números?

-Después del trabajo con distintas situaciones didácticas, en las que se tratarán las conexiones de la notación decimal infinita no periódica con las notaciones operatorias de algunos tipos de números irracionales (raíces cuadradas, pi, número de oro), así como con las medidas de las longitudes (inconmensurables) correspondientes:
CEI I-3: ¿Amplían los alumnos el espectro de notaciones decimales que conocen?
CEI I-4: ¿Modifican su clasificación de las notaciones decimales?

CEI I-5: ¿Modifican los alumnos sus planteamientos para aceptar que ciertos tipos de expresiones decimales infinitas representen números?

CEI I-6: ¿Qué tipo de expresiones decimales infinitas se aceptan como números?

CEI I-7: ¿Qué argumentos se aducen en cada justificación?

CEI I-8: ¿Qué concepción de número podemos inferir que construyen los alumnos sobre la base de la clasificación establecida y las características que, a su juicio, otorgan status de número a una expresión decimal?

Con estas 8 Cuestiones Específicas de Investigación, pretendemos, siguiendo a Hiebert y Carpenter (1992), llevar a cabo una primera exploración de la base de conocimientos e intuiciones de los alumnos sobre los puntos señalados, y una segunda exploración para estudiar cómo evolucionan y se modifican los conocimientos de los alumnos sobre Números Reales a través del proceso didáctico establecido para este estudio. Las situaciones didácticas se han diseñado para la construcción y refuerzo de las conexiones entre las diferentes representaciones de los Números Reales. Exploraremos la red de representaciones que poseen los alumnos sobre los números mencionados antes de comenzar nuestro estudio y las modificaciones detectadas en estas redes, tanto en sus componentes como en su estructuración, después del trabajo con las situaciones didácticas mencionadas[1] .

III. 2. 3 Presentación a los alumnos de las Cuestiones de Investigación del Primer Foco

Las Cuestiones Especificas de Investigación enunciadas se plantean a los alumnos con formato de tareas concretas, que pasamos a presentar; indicamos para cada una de las tareas el lugar y momento de su presentación a los alumnos.

Cuestión Específica de Investigación I-1. Se planteará al comienzo del estudio sobre números irracionales, después de finalizar el repaso sobre los números racionales; previamente se ha llamado la atención de los alumnos sobre las expresiones decimales de números ya conocidos por ellos, como π y $\sqrt{2}$.

Tarea:

"1) Conoces decimales infinitos. Los decimales infinitos pueden ser de diferente tipo. Escribe ejemplos de cada uno de los tipos de decimales infinitos que conoces, y de algún otro tipo que se te pueda ocurrir. Explica el motivo/causa por el que aparece (Por ejemplo, los decimales periódicos aparecen al expresar algunas fracciones en forma decimal)."

1 Como hemos señalado, en ellas se trabajará con irracionales cuadráticos, pi y el número de oro, mediante aproximaciones de carácter numérico, geométrico e interrelacionado.

EJEMPLO	TIPO DE DECIMAL INFINITO	MOTIVO POR EL QUE APARECE

Cuestión Específica de Investigación I-2. La tarea correspondiente será planteada a continuación inmediatamente de la tarea anterior, sobre la misma hoja.

Tarea:

"2) Revisa los decimales anteriores; ¿todas las expresiones decimales que has indicado son números?.

TIPO DE DECIMAL INFINITO	¿ES UN NUMERO?	¿POR QUE?

Argumenta razonadamente la respuesta, imaginando que tienes que explicarlo a un compañero que no sabe."

Cuestión Específica de Investigación I-3. Se planteará después de haber trabajado con distintas situaciones didácticas, anteriormente mencionadas. Esta cuestión se plantea mediante la siguiente

Tarea:

"1) a) ¿Corresponde la expresión 9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

b) ¿Corresponde la expresión 0,9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

c) ¿Corresponde la expresión $\sqrt{2}$=1,4142135... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

d) ¿Corresponde la expresión: Número de Oro = $(1+\sqrt{5})/2$=1,618034..., a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

e) ¿Corresponde la expresión π= 3,14159... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

f) ¿Corresponde la expresión: 1,0100100010000100... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas."

Cuestiones Específicas de Investigación I-4 y 5. Ambas cuestiones se plantearán mediante una misma tarea, la cual se presenta inmediatamente a continuación de la tarea anterior.

Tarea:

"2) a)¿Qué tipos de decimales infinitos conoces? Da ejemplos de cada uno y di de dónde surgen."

TIPO DE DECIMAL INFINITO	EJEMPLO	DE DONDE SURGE

Cuestiones Específicas de Investigación I-6, 7 y 8. Se presentarán mediante una tarea, que es un subapartado de la tarea presentada para las cuestiones 4 y 5.

Tarea:

"b) ¿Cualquier decimal infinito (de los que se han escrito anteriormente) corresponde a un número? En el caso de que algunos lo sean y otros no, decir cuáles sí y cuáles no, y en todos los casos justifica tu respuesta lo mejor que puedas."

III. 2. 4 Cuestiones Complementarias del Primer Foco

Además de las Cuestiones Específicas de Investigación enunciadas, hemos planteado otras Cuestiones Complementarias, de utilidad para dar precisión a los focos de interés primordial. Dividimos en dos bloques estas Cuestiones Complementarias:

-Un primer bloque de cuestiones de carácter exploratorio y situaciones didácticas sobre la Notación Decimal de los Números Racionales.

-Un segundo bloque de situaciones didácticas entre el grupo formado por la primera y segunda cuestiones de investigación específicas y el grupo formado por las restantes.

La presentación detallada de las tareas correspondientes a estas Cuestiones Complementarias de Investigación se realiza en los Anexos III.1, III.2 y III.3, al describir las Fases de Acción 1 y 2 del Plan de la Investigación y el material de trabajo para los alumnos.

III. 3 Segundo Foco de Investigación: Representaciones Geométricas de los Números Reales

La elección de este Foco es debida a varias razones; entre ellas señalamos el carácter integrador del Modelo de la Recta para los Números Reales, el conocimiento que los alumnos tienen de este modelo desde los niveles precedentes, y el soporte intuitivo que proporciona la recta para la interpretación del conjunto de los números reales y para algunas propiedades importantes de estos números.

El hecho que permite considerar la recta como modelo para el conjunto de los Números Reales es que la correspondencia números-puntos de la recta se conceptualice como una biyección. El criterio de correspondencia mediante el cual un número, racional o irracional, se asigna a un punto de la recta es el de la Medida de Longitudes. Este criterio se maneja por los alumnos de forma implícita, usualmente. Sin embargo, entendemos que resulta clave para trabajar de modo consistente con el modelo de la recta y para interpretar correctamente el carácter biyectivo de la correspondencia números-puntos de la recta.

Si atendemos al estudio histórico y epistemológico, el problema de la irracionalidad surge en el ámbito de la medida de longitudes con la aparición de longitudes inconmensurables, y es en este ámbito donde adquiere pleno sentido. No obstante, el problema, aunque significativo, no es fácil de plantear, ya que tropieza con el obstáculo de la creencia general en la conmensurabilidad de cualquier par de longitudes dadas y la dificultad de mostrar en la realidad física la existencia de longitudes inconmensurables. Hay que recurrir entonces a demostraciones geométricas, de donde la consideración de la geometría como "el arte de los razonamientos correctos sobre figuras falsas" (Arsac 1987) en la que, además, los razonamientos sobre procesos infinitos son ineludibles.

Una vez descubierta la existencia de longitudes inconmensurables, se trabaja en la construcción, estudio y clasificación de longitudes irracionales; en un momento determinado se llega a pensar que las rectas tenían ciertos puntos construibles usando métodos geométricos, que incluían raíces de orden superior a 2, y que estos puntos podían ser todos los puntos de la recta.

El trabajo con números trascendentes a lo largo de los siglos XVIII y XIX, llevó a reconsiderar los números asociados a la recta, hasta que, a finales del siglo XIX, las teorías de Cantor y Dedekind permiten la identificación de la "recta real" con la recta geométrica, mediante el axioma de Cantor (o equivalentes). La construcción axiomática de los Números Reales, a pesar de estar de acuerdo con una visión intuitiva de la recta geométrica, tampoco garantiza ser el único modelo de ésta; las alternativas no standard al sistema de los Números Reales son modelos igualmente válidos y, hoy por hoy, la cuestión de si los Números Reales, tal como fueron construidos en el siglo XIX, constituyen la única representación de la recta o son solamente una entre varias representaciones posibles sigue estando abierta.

III. 3. 1 Subobjetivos del Segundo Foco

En esta fase introductoria del concepto de Número real, los **subobjetivos** propuestos dentro del objetivo parcial que estudia el ámbito de las representaciones geométricas, son:

Primero, *establecer los conocimientos de los alumnos respecto a la representación en la recta de los números racionales.*

En la etapa escolar previa al nivel en que nos encontramos, los alumnos han utilizado la recta numérica como modelo para los números naturales. En efecto, en una línea recta se elige un punto arbitrario al que se le hace corresponder el 0 y otro punto a la derecha del mismo, a una distancia arbitraria, al que se le hace corresponder el número 1; estos dos puntos determinan un segmento unidad; trasladando sucesivamente este segmento o, lo que es lo mismo, marcando sucesivamente puntos en la recta hacia la derecha con la misma distancia entre ellos que la existente entre los puntos correspondientes a 0 y a 1, se obtienen los puntos que corresponden a los restantes números naturales. Mediante el mismo proceso, realizado en dirección contraria a partir del punto 0, se pueden representan los enteros negativos. *Asumimos que la generalidad de los alumnos tiene adquirida la destreza de representar en la recta los números naturales y enteros, aunque no sepan explicitar las bases que la sustentan; no obstante, comprobaremos si se presentan anomalías en este punto. También se supone que los alumnos de este nivel han representado fracciones y decimales en la recta, pero la correspondencia entre los números racionales y la recta numérica será objeto de atención más detallada por nuestra parte, y procuraremos corregir las deficiencias en este sentido, para poder avanzar en el trabajo con los Números Reales.*

Segundo, *trabajar con la Medida de Longitudes como requisito previo para el establecimiento de la Correspondencia números-puntos de la recta.*

Un punto importante que hemos de tener en cuenta es *el obstáculo que supone la creencia en la conmensurabilidad de todas las longitudes con otra tomada como unidad,* constatada en anteriores experiencias (Romero, 1993) y por otros autores (Arsac, 1987).

Tercero, *las longitudes inconmensurables serán introducidas a los alumnos a través del ámbito numérico, mediante la construcción de longitudes que corresponden a raíces cuadradas de números naturales, cuya expresión numérica en notación decimal es infinita no periódica.*

Esta aproximación es debida a las dificultades, explicitadas anteriormente, que se presentan en el terreno puramente geométrico. Por otra parte, la resolución del problema en el terreno aritmético sería, a nuestro juicio, prematura y seguramente carente de significación para los alumnos del nivel en que nos encontramos, dada la sofisticación y las dificultades que presenta para la comprensión el razonamiento por reducción al absurdo (Tall, 1978).

Cuarto, a partir del trabajo con la medida de longitudes, abordaremos la *Correspondencia Números-Puntos de la Recta para los distintos tipos de Números Reales estudiados, atendiendo a las diferencias entre números Racionales- números Construibles-números No Construibles.*

Consideramos que el trabajo sobre dicha correspondencia y la construcción de un criterio para la asociación número-punto de la recta es un paso fundamental cuyo dominio conviene controlar para abordar el tratamiento y estudio de cuestiones de un nivel más elevado, a saber, la naturaleza del continuo geométrico y el numérico, y la relación entre ambos. Es más, es probable que esta correspondencia números-puntos de la recta lleve directamente a plantear este problema, especialmente a partir de las representaciones decimales infinitas no periódicas de números no construibles.

Quinto, *estaremos atentos a recoger los puntos significativos que puedan plantearse en relación con el continuo geométrico y las intuiciones de los alumnos sobre este tópico a lo largo del trabajo con el modelo de la recta, así como las implicaciones que puedan derivarse de estas intuiciones.*

No obstante, no hemos diseñado una estrategia de trabajo específica con los alumnos para este tema, debido a la sofisticación de los instrumentos matemáticos necesarios para abordarlo y a la imposibilidad de introducirlos en este nivel (escolares de 14-15 años). En este sentido, pensamos que a raiz del estudio de la correspondencia entre los números y los puntos de la recta será posible obtener información o interpretar algunos usos de los alumnos sobre el continuo lineal, y avanzar reflexiones al respecto, sobre las que podamos profundizar en futuras etapas de investigación.

III. 3. 2 Cuestiones Específicas de Investigación del Segundo Foco

Las **Cuestiones Específicas de Investigación** (CEI II) que operativizan los subobjetivos anteriores, y en las que se explicitan cuáles aspectos de la comprensión de los alumnos queremos explorar en relación con el Segundo Foco de Investigación se plantearán en dos etapas: la primera, en la Fase 1 del trabajo, correspondiente a los números racionales, y la segunda en la Fase 2 correpondiente a los Números Irracionales y Números Reales.

Fase de los Números Racionales

Medida de Longitudes:

CEI II-1: Dadas distintas parejas de segmentos, ¿son capaces los alumnos de idear procedimientos para encontrar un número que exprese la relación entre ambas? En caso afirmativo, ¿qué tipo de procedimientos idean?

CEI II-2: ¿Admiten los alumnos que dos longitudes cualesquiera son siempre conmensurables?; es decir, ¿existe un número racional que expresa la medida de una en relación a la otra, tomada como unidad?

Correspondencia Números-Puntos de la Recta:

Para trabajar con la correspondencia números-recta en el ámbito de los números racionales, partimos de que los alumnos saben que la correspondencia que a cada número racional le asigna un punto de la recta es una aplicación entre números racionales-puntos de la recta[2]; dicha aplicación está bién definida, no

[2] Utilizamos la terminología subrayada para facilitar la exposición de la idea subyacente en términos matemáticos; en ningún caso se hará mención de estos términos a los alumos.

obstante, se planteará una pregunta al respecto en el Pretest. Además, se trabajará sobre esta cuestión en el proceso didáctico, al tratar la representación en la recta de fracciones equivalentes y de distintas representaciones, fraccionaria y decimal, de un mismo racional. También se tendrá en cuenta que la aplicación es inyectiva, lo cual damos por asumido, aunque se podría entrar a un nivel más profundo en la diferenciación entre el plano factible y el ideal, y las aproximaciones.

Para explorar las concepciones de los alumnos acerca de la sobreyectividad de dicha aplicación, trataremos de inducirles a establecer de forma explícita un criterio para la correspondencia inversa entre los puntos de la recta y los números. Interesa, en principio, focalizar la atención en el criterio anteriormente mencionado: a un punto de la recta, le hacemos corresponder el número que expresa la medida de la longitud del segmento con origen en el 0 y extremo en el punto con respecto al segmento unidad (con origen en 0 y extremo en 1).

Para ello, trasladaremos la situación de conmensurabilidad a la recta, fijando en ella el origen y el 1, y marcando diversos puntos a los que los alumnos tendrán que asignar un número. Nos proponemos investigar las siguientes cuestiones:

CEI II-3: ¿Utilizan los alumnos las técnicas ideadas en el ejercicio relativo a la conmensurabilidad de segmentos para resolver la cuestión? ¿Utilizan procedimientos distintos? ¿Cuáles?

CEI II-4: ¿Son capaces de explicitar, a partir de esta experiencia, criterios de asignación de números a puntos de la recta? ¿explicitan el criterio de la medida de segmentos determinados por los puntos y el origen con respecto del segmento unidad? ¿Explicitan otros criterios? ¿Cuáles?

CEI II-5: Para el criterio de la medida de segmentos, ¿sigue siendo válido el resultado de la conmensurabilidad de todas las longitudes, en caso de que se llegara a establecer?

CEI II-6: Si es así, ¿aceptan los alumnos que, en consecuencia, a todo punto de la recta corresponde un número racional?

CEI II-7: En caso de que los alumnos piensen que a todo punto de la recta le corresponde un número racional, ¿interpretan sobre esta base que los números racionales llenan la recta, o las intuiciones sobre el continuo lineal interfieren y añaden matices a la simple consideración de la sobreyectividad números racionales-puntos de la recta[3] ?

[3] En experiencias anteriores (Romero, 1993), cuando los alumnos fijan su atención en la densidad de los números racionales, esgrimen argumentos de este tipo: "Los números racionales no llenan la recta numérica porque como entre dos siempre hay otro, nunca habría alguno que acabara taponando el hueco"*. En el supuesto caso de que se establezca un criterio que permita asignar a cada punto de la recta un número

Fase de los Números Irracionales y Números Reales

A raíz del estudio con números racionales, se podría esperar, en principio, que estos números permitieran medir todas las longitudes en una línea recta y, en consecuencia, que todos los puntos de la recta correspondieran a números racionales, pero hay distancias a lo largo de esa recta que no pueden ser medidas con fracciones racionales y, por tanto, hay puntos de la recta que no corresponden a números racionales.

Para trabajar en torno a esta cuestión, prestaremos atención, en una segunda etapa, a todos los números aparecidos en el transcurso del proceso didáctico; son ejemplos de números reales de distintos tipos, a los que nos referiremos en lo sucesivo como a "números reales" (aunque los ejemplos estén bastante limitados por el nivel de los alumnos).

Medida de longitudes

CEI II-8: ¿Cómo reaccionan los alumnos ante el conflicto suscitado por la supuesta irracionalidad de algunas raíces cuadradas, a través de su expresión decimal (infinita no periódica), y la supuesta conmensurabilidad de la longitud correspondiente a las mismas con la unidad?

CEI II-9: ¿Hasta qué punto comprenden la diferencia entre longitudes conmensurables e inconmensurables, y aceptan la existencia de longitudes inconmensurables, a través de la notación decimal infinita no periódica?[4] ¿Ponen en duda la existencia de longitudes inconmensurables y piden algún tipo de demostración?

Correspondencia Números-Puntos de la Recta:

CEI II-10: ¿Consideran los alumnos que es una aplicación, es decir, que a cada número real (específicamente de cada tipo de los estudiados) le corresponde un punto de la recta? Prestaremos especial atención al caso de los No Construibles.

---

racional, ¿Cómo influye la densidad de los racionales en que estos números llenen la recta? ¿Tiene huecos la recta? ¿Cómo es posible "taponar el hueco"? O, en términos del eterno problema de Zenón: ¿cómo pasar al límite, cómo saltar del más alto número finito posible al transfinito que cierra la serie? (Pérez de Tudela, 1981).

[4] La conexión sería la siguiente: el número que expresa la medida de las longitudes de los lados de algunos cuadrados (aquellos cuya superficie es un número natural no cuadrado, por ejemplo), tiene una expresión decimal infinita no periódica, por tanto ese número no puede expresarse en forma de fracción (la expresión decimal de las fracciones es única y periódica). Entonces no existe una parte alícuota común a la longitud del lado y a la unidad, ya que si ésta existiera (denominador), la longitud podría expresarse en forma de fracción, sin más que contar el números de veces que la parte alícuota encaja en el lado del cuadrado (numerador).

CEI II-11: ¿Consideran los alumnos que está bien definida, es decir, que a todas las representaciones (decimal, notación habitual, fracciones equivalentes) de un mismo número les corresponde el mismo punto?

CEI II-12: ¿Consideran los alumnos que es inyectiva, o sea, que a números distintos corresponden puntos distintos de la recta?

CEI II-13: ¿Qué concepciones tienen los alumnos acerca de la sobreyectividad y el conjunto origen de la correspondencia números reales-puntos de la recta? En este punto, la Medida como criterio de correspondencia es válida para los números construibles, ¿qué pasa con los demás, específicamente para cada tipo de los estudiados?

CEI II-14: ¿Cuáles de los números conocidos por los alumnos llenan, a su juicio, la recta?

CEI II-15: ¿Piensan que la recta puede llenarse con números o, como en el caso de los racionales, las intuiciones sobre el continuo lineal añaden matices significativos a la correspondencia planteada en términos de números-puntos[5]?

Con estas 15 Cuestiones Específicas de Investigación en el Foco de Investigación de las Representaciones Geométricas, nos proponemos realizar un estudio de la base de conocimientos e intuiciones de los alumnos en este terreno, y de su evolución a través del proceso establecido.

III. 3. 3 Presentación a los alumnos de las Cuestiones de Investigación del Segundo Foco

Las Cuestiones Especificas de Investigación enunciadas se plantean a los alumnos con formato de tareas concretas, que pasamos a presentar; indicamos para cada una de las tareas el lugar y momento de su propuesta a los alumnos.

Fase de los Números Racionales

Cuestión Específica de Investigación II-1. Será planteada a mediados de la fase de trabajo con los números racionales.

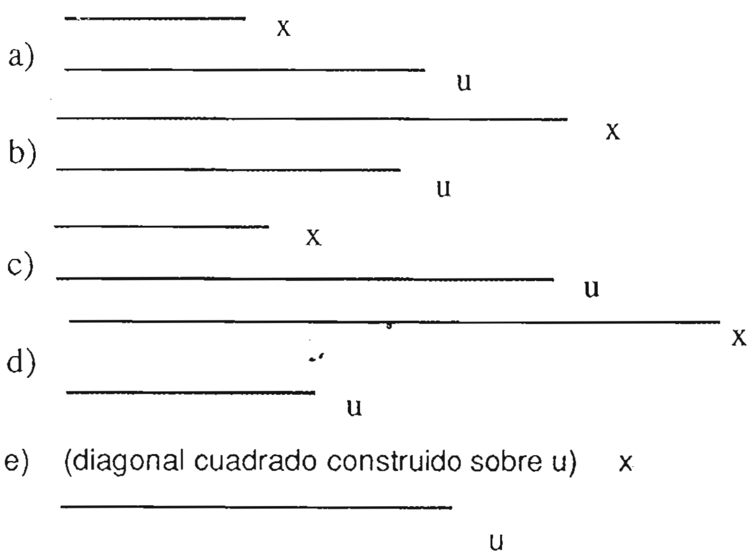
Tarea:

"1) Tomando como unidad de medida la longitud **u**, expresa, para cada pareja de segmentos, la medida de la longitud **x** en función de **u** con exactitud y sin utilizar ningún instrumento de medida graduado. Anota el proceso que has seguido y organízalo para explicarlo después a los compañeros[6] .

---

[5] Sin embargo, si por razones de cierre en el proceso didáctico, los Números Reales se establecieran como los que "llenan la recta", las dos últimas cuestiones carecerían de sentido. El problema aquí radicaría en dilucidar qué significa "llenar" la recta. Y cómo se construyen sobre esta base los Números Reales. Pero esta discusión queda fuera del alcance de nuestro estudio con escolares de 14-15 años.

[6] Las proporciones son a)1/2 b)3/2 c)3/7 d)8/5



Cuestión Específica de Investigación II-2. Se propondrá como segunda parte de la actividad anterior.

Tarea:

"2/ ¿Crees que dadas dos longitudes cualesquiera hay siempre un número que expresa una en función de la otra? En caso afirmativo di de qué tipo será ese número. En cualquier caso, justifica tu respuesta imaginando que tienes que convencer a un compañero de tu opinión."

Cuestiones Específicas de Investigación II- 3, 4, 5 y 6.

Además del planteamiento de estas Cuestiones Específicas de Investigación, se propondrá una tarea a los alumnos para constatar posibles contradicciones al supuesto inicial de que los alumnos consideran la correspondencia números racionales-puntos de la recta como una aplicación bien definida. Dicha tarea se planteará en el Examen correspondiente a la Fase de Acción 1 (Números Racionales), que se realizará al concluir dicha fase:

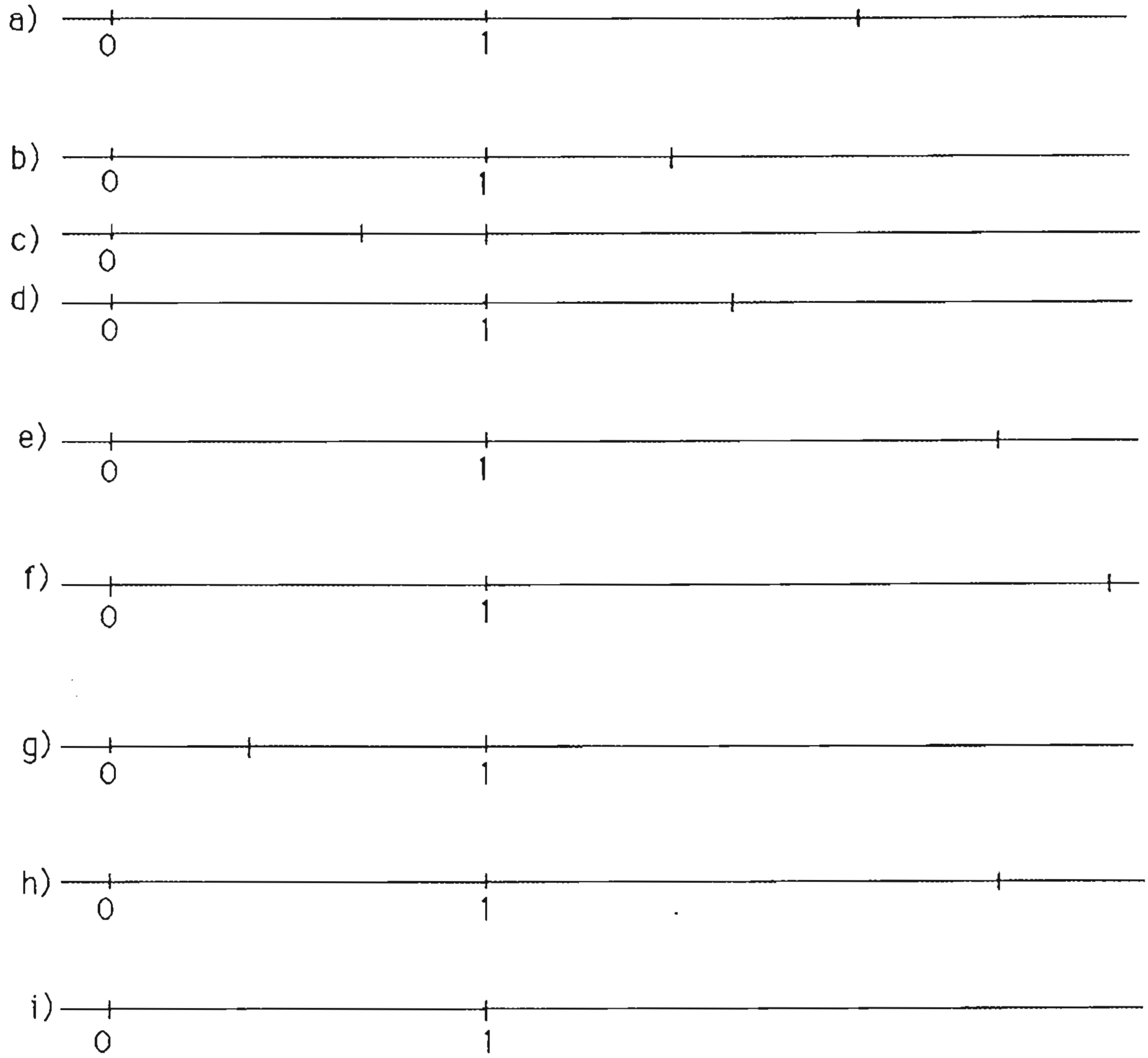
Tarea: "Representa en la recta numérica:

-1; 5/4; 0,4; -0,75; 10/8; 1,25"

Cuestión Específica de Investigación II-3. Se presentará en una tarea que será propuesta después de la Cuestión Específica de Investigación 1, con algunas sesiones intermedias:

Están elegidas de modo que las primeras sean fáciles de visualizar y den lugar a la invención de un procedimiento para su comprobación, que pueda ampliarse en los casos progresivamente más complicados (mayor número de pasos en técnica de diferencias sucesivas, denominador más alto en técnica de divisiones sucesivas (Romero, 1993).
(En caso de que los alumnos intenten aplicar la técnica de la división sucesiva en mitades, los resultados serán "complicados" en los casos con denominador impar, y dará lugar a discusión).

Tarea: "1) ¿Qué número corresponde (exactamente) al punto marcado en la recta numérica en cada apartado? Anota en cada caso el proceso que has seguido para averiguarlo y organízalo para explicarlo después a los compañeros[7]



Cuestiones Específicas de Investigación 4, 5 y 6. Se presentarán mediante una misma tarea, correspondiente al segundo apartado de la actividad anterior.

Tarea:

---

7 Los puntos corresponden a a)2 b)3/2 c)2/3 d)5/3 e)11/8 f)8/3 g)3/8 h)19/8 i) √2 (dibujar a mano).
Están elegidos con el propósito de que, como en la experiencia de la conmensurabilidad, los primeros pasos sean fáciles de visualizar y tanto si se aplica la técnica de las difierencias sucesivas como si se elige el fraccionamiento en 2, 3, 4... partes de la unidad, los alumnos tengan que hacer cada vez un número mayor de pasos. (En caso de que intenten aplicar la técnica de la división sucesiva en mitades, los resultados serán "complicados" en los casos con denominador impar, y dará lugar a discusión). En cualquier caso, las fracciones están elegidas de modo que sugieran que lo que ocurra para los puntos del intervalo [0;1] ocurre para cualquier punto de la recta, situándose en el intervalo [n,n+1], en donde esté el punto en cuestión.
En el apartado i), la longitud √2 (de la diagonal del cuadrado de lado la unidad) se ha elegido para ver que aproximaciones racionales consiguen los alumnos y si, debido a la inconmensurabilidad teórica, es más difícil alcanzar unanimidad en la práctica. ¿Qué interpretaciones hacen los alumnos de esto en caso de que suceda? La cuestión se retomará cuando se haya estudiado explícitamente la irracionalidad de √2, a través de su expresión decimal para plantear un conflicto con la supuesta conmensurabilidad de la longitud √2.

"2/ Dado un punto cualquiera de la recta, ¿crees que siempre hay un número que le corresponda? ¿De qué tipo puede ser este número? Justifica tu respuesta imaginando que tienes que convencer a un compañero de tu opinión."

Cuestión Específica de Investigación II-7. Se planteará en el examen de números racionales.

Tarea:

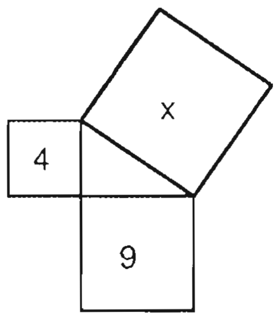
"Un genio ha colocado todos los números racionales en los puntos correspondientes de la recta numérica. ¿Crees que esos puntos llenarían toda la recta, o que, por el contrario, habría puntos sin marcar?"

Fase de los Números Irracionales y los Números Reales

Cuestiones Específicas de Investigación II-8 y 9. Se propondrán como Cuestiones Complementarias de investigación a lo largo del proceso didáctico, dentro de las actividades diseñadas para la fase correspondiente a los números irracionales:

Tarea:

"1)



a) ¿Qué mide el área x? ¿Cómo se llama la propiedad que has utilizado para averiguarlo?

b) Utilizando la propiedad anterior, construye un cuadrado de área 2, otro de área 5 y otro de área 10, en un papel cuadriculado.

c) A partir del resultado anterior, construye un cuadrado de área 3 y otro de área 6.

d) ¿Qué miden los lados de los cuadrados anteriores?

2) a) A partir del ejercicio anterior, construye un cuadrado de área 12. ¿Cuál es la medida de su lado?

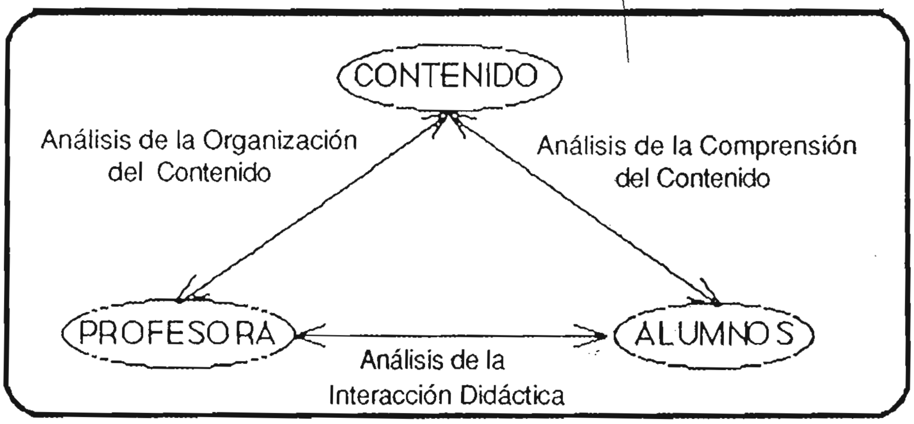
b_1) ¿Cuál es la expresión decimal de $\sqrt{12}$? ¿De qué tipo es esa expresión decimal?

b_2) ¿Es $\sqrt{12}$ un número? ¿Por qué?

b_3) ¿Es $\sqrt{12}$ un número racional? ¿Por qué?"

sobre la comprensión de los alumnos en torno al contenido matemático que nos ocupa y sobre su evolución (Hiebert y Carpenter, 1992).

Para hacer posible dicho estudio y el análisis subsiguiente, hemos elaborado una serie de unidades de análisis que permitirán estudiar las relaciones entre las tres componentes del triángulo didáctico Alumnos-Contenido-Profesora.



Las Unidades de Análisis para la arista Profesora-Contenido en el triángulo didáctico están elaboradas para poner de manifiesto la organización y secuenciación de los contenidos que se tratarán a lo largo del proceso didáctico. Estas unidades de análisis son previas a dicho proceso didáctico, si bien están basadas en sucesivas aproximaciones hechas en experiencias anteriores (Romero, 1993).

Las Situaciones y Cuestiones de Investigación presentadas en los apartados anteriores serán planteadas a los alumnos a lo largo de este proceso didáctico, y sobre la actividad realizada en torno a ellas recogeremos información a través de varias fuentes: diario de la profesora-investigadora, documentos escritos de los alumnos y grabaciones en audio y vídeo de la discusión mantenida en clase a raiz del trabajo sobre las situaciones propuestas. Esta información será procesada por medio de la Unidades de Análisis para las aristas Alumnos-Contenido y Alumnos-Profesora. Las unidades de análisis para la arista Alumnos-Contenido son previas a la implementación del plan didáctico y han sido elaboradas, como en el caso de las unidades de análisis para la arista Profesora-Contenido, a partir de nuestra experiencia anterior (Romero, !993). Sin embargo, las unidades de análisis para la arista Profesora-Alumnos han sido elaboradas por nosotros a partir de los documentos audiovisuales obtenidos durante este proceso didáctico, también mediante un proceso de aproximaciones y revisiones sucesivas.

Estos tres tipos de unidades de análisis constituyen el sistema de categorías que vamos a utilizar para describir y evaluar el trabajo realizado en la organización del contenido, caracterizar la comprensión mostrada por los escolares en las sucesivas organizaciones del conocimiento que hacen durante su proceso de aprendizaje y, finalmente, describir la dinámica de trabajo seguida en el aula. En definitiva, las diferentes unidades de análisis proporcionan el sistema de categorías mediante el que estudiamos las relaciones dentro del triángulo didáctico mencionado. A su descripción detallada dedicamos los apartados 5, 6 y 7 de este capítulo

En un segundo nivel de reflexión, consideramos el curriculum como un plan operativo constituido por otras cuatro componentes: Objetivos, Contenidos, Metodología y Evaluación (Howson, Keitel y Kilpatrick, 1982; pg. 2); esta consideración se emplea para estructurar la planificación de nuestro trabajo en el aula. La descripción detallada de la planificación a partir de las cuatro componentes mencionadas proporciona información para establecer los límites dentro de los que se desarrolla nuestro trabajo, ofreciendo al mismo tiempo un marco de referencia para su replicabilidad. Esta descripción se realiza en los Anexos III.1 y III.2.

Pasamos pues a describir las Unidades de Análisis de cada una de las aristas del triángulo didáctico, y concluiremos con la presentación del Plan específico de actuación en el aula, y su articulación en fases, mediante el que encuadramos el desarrollo de esta investigación.

III. 5 Unidades de Análisis para la organización del Contenido

Las Unidades de Análisis para la Organización del Contenido realizadas por la Profesora, permitirán conocer qué aspectos concretos de contenido son tratados y con qué grado de desarrollo son propuestos. A la hora de elaborar estas unidades recordamos que nuestro objetivo es aproximar a los alumnos de 1º de BUP, por primera vez, al concepto de Número Real. Presentamos estas Unidades de Análisis desglosadas según los Focos de Investigación considerados para nuestro estudio; con ellas damos cuenta de las conexiones e interrelaciones entre los distintos elementos de los Sistemas de Representación del Número Real en las que queremos centrar nuestra atención.

III. 5. 1 Unidades para el Primer Foco de Investigación

En este Foco de Investigación, correspondiente al ámbito numérico y centrado en las representaciones simbólicas, nuestro objetivo es introducir el concepto de Número Irracional a través de la notación decimal infinita no periódica, y englobar todas las notaciones decimales posibles bajo un único concepto numérico, el concepto de Número Real. Tratándose, como hemos puesto de manifiesto, de un tópico matemático avanzado, no es nuestra intención introducirlo formalmente, sino empezar por desarrollar su comprensión con los alumnos de este curso, partiendo del nivel de conocimientos que poseen, e intentando realizar una construcción sistemática del concepto basada en un tipo determinado de representaciones.

Los alumnos del nivel en que se desarrolla el trabajo de investigación se enfrentan por primera vez a los decimales infinitos no periódicos, sin tener aún la posibilidad de comprender las justificaciones formales que subyacen a la consideración de que los decimales infinitos no periódicos responden a una noción de número. Sin embargo, en el plano didáctico, la convivencia de la notación decimal con la notación habitual operacional, como por ejemplo las raíces cuadradas irracionales, y el trabajo con medidas inconmensurables con la unidad cuya medida suele darse, también, por la notación habitual operacional (en el caso de los radicales), constituye un apoyo para el trabajo con este tipo de expresiones decimales y su aceptación por parte de los alumnos. [9]

Así pues, en este Foco de Investigación, nos proponemos introducir el concepto de Número Irracional a los alumnos de 1º de BUP a través de la notación decimal infinita no periódica, e integrar todas las notaciones decimales posibles bajo el concepto de Número Real. Para ello nos apoyaremos en los conocimientos ya establecidos sobre la notación decimal de los Números Racionales, sus intuiciones sobre notaciones decimales infinitas, y los significados que los alumnos son capaces de generar a partir del trabajo didáctico con las notaciones habituales operatorias en el caso de algunos irracionales (raíces cuadradas, π, número de oro) y con la medida de longitudes inconmensurables con la unidad.

Las Unidades de Análisis elaboradas para la Organización del Contenido en este Foco de Investigación son las siguientes:

1. Significado de la notación decimal de los números racionales:

1.1. En el sistema de numeración decimal los números enteros se expresan en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x.

1.2. Para expresar fracciones, esta notación se extiende abarcando también las potencias de 10 de exponente negativo. Así, la expresión decimal de los números racionales constaría de una parte entera (expresada en términos de potencias de 10, de forma análoga a los polinomios en x) y una parte llamada decimal, a partir de la coma hacia la derecha, expresada en términos de potencias de 1/10, de forma análoga a los polinomios en 1/x.

2. Paso de la notación fraccionaria a la decimal en los números racionales:

2.1. Las fracciones pueden escribirse de forma justificada en notación decimal, por el algoritmo de la división; en algunos casos obtenemos en un número finito de pasos su expresión decimal, que es igualmente finita.

2.2. En otros casos, el algoritmo de la división no da lugar a una expresión decimal finita, sino que el cociente obtenido tiene infinitas cifras decimales. En este caso, la

---

9 Esta problemática tiene paralelismos con la polémica surgida en el siglo XVI en torno a la aceptación de los decimales infinitos como números y a la dificultad de aceptación del infinito actual.

equivalencia de ese cociente con la fracción inicial supone una extensión del convenio previo que se estableció para los decimales exactos. La justificación formal de la equivalencia entre una fracción y una expresión decimal ilimitada viene dada por la interpretación de un decimal infinito como serie de potencias de 1/10: $\sum a_n 1/10^n$.

2.3. Es posible establecer razonadamente que todo número racional tiene una expresión decimal finita o infinita periódica (pura o mixta). En efecto, al efectuar la división indicada por la expresión fracionaria, observamos que el número de restos distintos posibles es limitado (el resto ha de ser menor que el dividendo), de modo que si la división no es exacta llegará un momento en que un resto se repita y, una vez que esto suceda, las cifras del divisor y los restos siguientes se repetirán indefinidamente en el mismo orden.

3. Paso de la notación decimal a la fraccionaria en los números racionales:

3.1. Un decimal finito puede escribirse como fracción sin más que poner como numerador el número sin la coma decimal y en el denominador la potencia de 10 correspondiente al número de cifras que la expresión decimal tenía después de la coma.

3.2. Existen procedimientos para convertir un decimal periódico (puro o mixto) en fracción. El procedimiento al uso, que aparece en la mayoría de libros de texto correspondientes al nivel de Secundaria consiste en conseguir, a partir del decimal periódico dado, dos números periódicos puros con el mismo periodo multiplicando por la potencia de 10 apropiada; al restarlos se obtiene un número entero; se puede obtener así una fracción al dividir dicho número por la diferencia entre las potencias de 10 por las que hemos multiplicado el número de partida para conseguir los dos decimales periódicos con el mismo periodo[10].

Ej:

$$N=76{,}57496496496....$$
$$100N=7657{,}496496496...$$
$$100000N=765496{,}496496496...$$
$$100000N-100N = 7657496-7657$$
$$N=7649839/99900$$

3.3. Con el convenio anterior, cada número racional tiene una notación periódica única, excepto el 0.

---

[10] Hay que notar que estas reglas hacen uso implícito de ciertas propiedades de series numéricas al efectuar operaciones aritméticas con números de infinitas cifras.
Es especial el caso de 0,999..., cuya fracción generatriz es 1/1; sin embargo, esta expresión decimal no se obtiene mediante una división. Lo mismo ocurre con todas las expresiones decimales con nueve periódico (por ejemplo, la fracción generatriz de 4,679999... sería 468/100).
La igualdad 0,9999...=1 tiene su justificación en la suma de la serie numérica correspondiente a su expresión decimal. Sin embargo, con alumnos de este nivel, este resultado sólo puede introducirse como un convenio.
Al introducir este convenio se sigue que todos los decimales finitos pueden expresarse también como decimales infinitos, sin más que sustituir la última cifra por esa última cifra disminuida en una unidad y seguida de infinitos nueves.

4. Correspondencia número decimal periódico-fracción-racional:
De lo expuesto anteriormente se deduce que todo decimal periódico (puro o mixto) corresponde a un número racional, y viceversa (excepto 0). Esto es así porque hay una biyección entre los decimales periódicos y cada clase de fracciones equivalentes, y porque cada clase de fracciones equivalentes corresponde a un número racional.

5. Decimales infinitos no periódicos. Tipología de casos estudiados en Secundaria:

a) Expresión decimal de raíces de ecuaciones con coeficientes racionales; concretamente los alumnos trabajarán el caso de las raíces cuadradas.

b) Expresión decimal de longitudes construibles inconmensurables con la unidad; concretamente, los alumnos trabajarán con el caso de las raíces cuadradas.

c) Expresión decimal de números irracionales conocidos: pi, número de oro.

d) De creación arbitraria, siguiendo un patrón: 0,12345678910...; 0,101001000100001....

e) De creación arbitraria sin seguir ningún patrón.[11]

6. Los decimales infinitos no periódicos no corresponden a números racionales: si así fuera, podrían expresarse en forma de fracción, pero la expresión decimal correspondiente a una fracción es finita o periódica.

7. Criterios para la asignación del status de número a distintos tipos de expresiones decimales infinitas:

7.1. Criterios de notación:

a) Regularidades y patrones que permitan algún tipo de control sobre las infinitas cifras.

b) Posibilidad de nombrarlos y simbolizarlos.

c) Estar compuestos de cifras.

7.2. Carácter operatorio de los números:

-Los números surgen a partir de acciones; en el caso de los decimales infinitos, pueden surgir a partir de:

a) Operaciones aritméticas o algebraicas (divisiones, raíces cuadradas, resolución de ecuaciones, acceso a algoritmos de aproximación a partir del "nombre"...)

b) Medida de longitudes (inconmensurables con una longitud unidad dada).

c) Correspondencia con puntos de la recta.

-Con los números se pueden realizar acciones:

a) Hacer operaciones aritméticas.

b) Hacer operaciones en el terreno de la medida.

7.3. Pertenencia a conjuntos numéricos.

---

[11] Es importante tener en cuenta que los dos últimos tipos de expresiones decimales infinitas no periódicas tienen un carácter especial, puesto que no provienen de un criterio operacional, sino de una extensión arbitraria de las expresiones decimales infinitas.

8. Los decimales infinitos no periódicos corresponden a un nuevo tipo de números: los números irracionales.

9. Los números racionales y los irracionales forman los Números Reales, que son aquellos que:

9.a. Abarcan todas las notaciones decimales posibles

9.b. Expresan la medida en relación con una unidad de todas las longitudes posibles y, por tanto, corresponden a todos los puntos de la recta.

9.c. Dan solución a todas las ecuaciones con coeficientes racionales.

III. 5. 2 Unidades para el Segundo Foco de Investigación

En este foco de investigación, correspondiente al ámbito de las representaciones geométricas, nuestro objetivo es introducir a los alumnos el modelo de la recta, como sistema de representación analógico clave en el que se apoya la comprensión del concepto de Número Real. En efecto, la consideración del continuo lineal soporta la interpretación geométrica de este conjunto de números y, tal como hemos señalado en capítulos anteriores, el hecho de que la correspondencia números-puntos de la recta se conceptualice como una biyección, permite considerar en el conjunto numérico propiedades complejas que serían difíciles de expresar y argumentar en términos de simples notaciones numéricas. Dado que esta correspondencia números-puntos de la recta se establece a través de la Medida de Longitudes, el trabajo con la <u>Medida</u> será uno de los tópicos específicos de interés y el otro estará constituido por el trabajo con la <u>Correspondencia Números-Puntos de la recta</u> propiamente dicho.[12]

Los alumnos han tenido contacto con el modelo de la recta en la etapa anterior de EGB, y han estudiado la representación en la misma de los números Naturales, Enteros y Racionales. Ahora bien, el criterio de la medida de longitudes para establecer la corespondencia números-puntos de la recta es utilizado usualmente de forma implícita y, aún más, puede que no sea el único criterio que emplean los alumnos para asignar un punto de la recta a un número. Así pues, explicitar y clarificar los criterios y procedimientos mediante los cuales se asigna un número racional a un punto de la recta -haciendo especial hincapié en el criterio de la medida de longitudes- será uno de nuestros puntos de partida para el desarrollo del contenido a nivel de representación gráfica; el otro punto de partida lo constituirá la explicitación de la conmensurabilidad de las medidas de las longitudes correspondientes a los números racionales. A partir de aquí, podremos trabajar sobre los criterios y procedimientos para asignar un punto de la

[12] Por las consideraciones que expusimos en capítulos precedentes, prescindiremos de tratar específicamente la relación Números Reales-Continuo lineal, aunque estaremos abiertos y prestaremos especial atención a todo lo que surja en relación con este punto a lo largo del proceso didáctico.

recta a los nuevos tipos de números que pretendemos introducir: los irracionales, poniendo especial atención al concepto de medida inconmensurable con la unidad de la que da cuenta este tipo de números.[13]

Las Unidades de Análisis elaboradas para la Organización del Contenido en el Foco de Investigación 2 son las siguientes:

1. Medida de longitudes. Medir una longitud es expresar con un número la (relación/razón) que existe entre dicha longitud y otra longitud tomada como unidad de medida. Dada una longitud cualquiera y otra tomada como unidad, puede ocurrir que:

1.1. Exista una parte alícuota a ambas longitudes, en cuyo caso la relación entre ambas podrá expresarse a través de un número racional. En efecto, podrá expresarse mediante una fracción que tenga como denominador el número de veces que la parte alícuota está contenida en la unidad, y como numerador el número de veces que dicha parte alícuota está contenida en la longitud que queremos medir. Diremos entonces que ambas longitudes son conmensurables.

1.2. No exista una parte alícuota a ambas longitudes, en cuyo caso la relación entre ambas no podrá expresarse mediante un número racional. Diremos entonces que ambas longitudes son inconmensurables.

2. Correspondencia números racionales-puntos de la recta

La correspondencia entre los números racionales y los puntos de la recta se establece con el siguiente criterio: a un número racional determinado le corresponde el punto extremo del segmento, con origen en 0, tal que la medida de dicho segmento con respecto del segmento unidad (origen 0 y extremo 1) viene dada por el número racional en cuestión. Dicha correspondencia es:

2.1. Aplicación: a cada número racional le corresponde un y sólo un punto de la recta.

2.2. Aplicación bien definida: a las distintas representaciones de un mismo número racional (fracciones equivalentes, decimal) les corresponde el mismo punto.

2.3. Aplicación inyectiva: a puntos distintos de la recta corresponden números racionales distintos.

2.4. No sobreyectiva: debido a que no todas las longitudes son conmensurables, fijada la unidad de medida (es decir, los puntos 0 y 1 en la recta) existen longitudes inconmensurables con dicha unidad de longitud. Por tanto existen puntos en la recta a los que no les corresponde un número racional.

[13] Un aspecto importante a tener en cuenta es el obstáculo que puede suponer la creencia en la conmensurabilidad de cualquier longitud con otra tomada como unidad, lo cual equivaldría a considerar todas las medidas como racionales; la existencia de este obstáculo ha sido discutida en el capítulo precedente. Estaremos especialmente atentos al punto correspondiente a la introducción de las medidas inconmensurables con la unidad, correspondientes a los números irracionales, y a los conflictos que puedan suscitarse a partir del obstáculo mencionado.

3. Correspondencia números reales[14] -puntos de la recta. Con el mismo criterio de correspondencia que hemos explicitado en el apartado anterior, tenemos que la correspondencia entre los nuevos números aparecidos y los puntos de la recta es:

3.1. Aplicación bien definida: a las distintas representaciones de un mismo número real (fracciones equivalentes, notación habitual operatoria, notación decimal) les corresponde el mismo punto, y dicho punto es único.

3.2. Aplicación inyectiva: a números diferentes les corresponden punto de la recta distintos

3.3. Aplicación sobreyectiva: cada punto de la recta es imagen de un número real.

3.4. Aplicación biyectiva: como consecuencia de las dos condiciones anteriores, cada número real corresponde con un único punto de la recta y viceversa.

III. 6 Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido

Recordamos la caracterización de la comprensión que presentamos en el capítulo II, a partir de la cual realizaremos nuestro análisis. Nos basamos en la idea de que el conocimiento se representa internamente y que esas representaciones internas están estructuradas, "*Las Matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes*" (Hiebert y Carpenter,1992). Precisando nuestra terminología, nos referiremos a las ideas matemáticas consideradas como constructos teóricos pertenecientes al ámbito del conocimiento formal con el término "concepto". Y con el término "concepción" denotaremos todo el entramado de representaciones internas y asociaciones evocadas por el "concepto" (a través de sus representaciones externas), es decir, a la contraparte del concepto en el "universo del conocimiento humano" interno y subjetivo (Sfard, 1991).

Las Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido han sido elaboradas de forma que permitan interpretar las concepciones de los alumnos sobre los contenidos matemáticos detallados en el apartado antenior, Unidades de Análisis para la Organización del Contenido, y las conexiones que establecen entre ellas.

III. 6. 1 Unidades para el Primer Foco de Investigación

Queremos centrar nuestra atención en la <u>comprensión de los alumnos sobre los números reales a partir de la Notación Decimal</u>:

[14] Nos referimos a los números reales que serán introducidos a los alumnos en el prodeso didactico, y que se explicitaron en las Unidades de Análisis para el Contenido del Foco de Investigación 1.

a) Por una parte, queremos explorar los tipos de expresiones decimales que los alumnos consideran adecuadas, y cómo emplean esta tipología para diferenciar distintos tipos de números reales.
b) Por otra parte, queremos explorar qué atributos otorgan la condición de número a distintos tipos de expresiones decimales, a juicio de los alumnos.
c) Finalmente, queremos conocer cómo los alumnos elaboran, sobre la base de la tipología establecida y de los atributos que otorgan status de número a una expresión decimal, su noción de número real.

Como preparación para el estudio específico de este foco nos parece, tal como pusimos de manifiesto en el capítulo anterior, que el punto de partida ineludible consiste en explorar la base de conceptos que los alumnos tienen sobre los números racionales y su expresión decimal, fruto de los conocimientos adquiridos durante los estudios realizados en los niveles previos de la Educación General Básica y del repaso llevado a cabo en la primera etapa del presente curso. Esta exploración se llevará a cabo en diversos momentos de dicho repaso. Para realizarla, utilizaremos las cuatro primeras Unidades de Análisis para la Comprensión de los Contenidos, correspondientes a la Expresión Decimal de los Números Racionales. Estas unidades se desglosan del modo siguiente:

I. 1. Interpretaciones de los alumnos sobre la notación decimal en el ámbito de los números racionales. Para su valoración tendremos en cuenta:
I.1.1. Argumentaciones sobre la notación decimal correspondiente al número más grande e interpretación sobre la necesidad de limitar las cifras en los números enteros (infinito potencial versus actual).
I.1.2. Argumentaciones sobre la notación decimal correspondiente al número positivo más pequeño, con especial consideración para los argumentos derivados de la densidad de los racionales en conjunción con la expresión decimal de estos números (infinito potencial versus actual).
I.1.3. Ordenación de números racionales expresados en forma decimal. Significado atribuido a las cifras decimales, de donde se deriva el criterio de ordenación.

I. 2. Interpretación del paso de la notación fraccionaria a la decimal en los números racionales y realización a través del algoritmo de la división, en los casos siguientes:
I.2.1. Caso finito, cuando el resultado de la división es una expresión decimal finita.
I.2.2. Caso infinito, cuando a partir del algoritmo de la división se obtiene un cociente con infinitas cifras decimales. Distinción entre expresión exacta, con infinitas cifras decimales, y expresión aproximada del resultado, con un número finito de cifras decimales del mismo. Se trabajará con el algoritmo de la división y la calculadora.

I.2.3. Interpretación de la periodicidad de las cifras del cociente obtenido a partir del algoritmo de la división.

I. 3. Interpretación y paso de la notación decimal a la fraccionaria en los números racionales, se trabajarán los siguientes casos:
I.3.1. Expresiones decimales finitas.
I.3.2. Expresiones decimales periódicas.
I.3.3. Caso especial de las expresiones periódicas con periodo nueve.

I. 4. Comprensión de los alumnos de la correspondencia número decimal finito o periódico-fracción-racional. Para valorarla se tendrá en cuenta:
I.4.1. Asociación del concepto de número racional a sus expresiones fraccionaria y decimal.
I.4.2. Consideración de las infinitas fracciones equivalentes correspondientes a un mismo racional y de la unicidad de su representación decimal.
I.4.3. Consideración de la correspondencia fracciones equivalentes-decimal finito o periódico, y viceversa.

Llegamos así al apartado específico del primer Foco de Investigación: comprensión de los alumnos sobre los números reales a partir de su expresión decimal. Como hemos precisado anteriormente, nos interesa centrar tres aspectos de la comprensión de los alumnos:
a)Significados atribuidos a las distintas expresiones decimales y empleo de esta tipología para diferenciar distintas clases de números reales.
b) Atributos que otorgan la condición de número a distintos tipos de expresiones decimales.
c) Concepto de número real en base a la tipología establecida y los atributos de número.

Nuevamente, siguiendo a Hiebert y Carpenter (1992) y a Wittrock (1990), queremos llevar a cabo una primera exploración de la base de conocimientos e intuiciones de los alumnos sobre los puntos señalados, y una segunda exploración para estudiar cómo se modifican y evolucionan los conocimientos de los alumnos después de haber trabajado en clase sobre distintas situaciones didácticas.[15] Es decir, exploraremos las redes de representaciones sobre los números que poseen los alumnos al comienzo y cómo estas redes varían, tanto en sus componentes como en su estructuración, después del trabajo con las situaciones didácticas diseñadas para la construcción y desarrollo de

[15] En ellas se trabajará con irracionales cuadráticos y π, mediante aproximaciones de carácter numérico, geométrico y sus interrelaciones. Ver Anexo III.3.

a. Claridad de la respuesta dada por el alumno

b. Procedimiento ideado (mantenimiento del procedimiento y tipo)

II.1.2. Generalización a la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera. Consideraremos:

a. Claridad de la respuesta dada por el alumno

b. Respuesta a la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera (existencia de un número que exprese la relación entre ellas) y argumento con el que los alumnos justifican dicha respuesta.

c. Tipo de número mediante el cual expresan la relación.

d. Coordinación entre el nivel geométrico y el nivel numérico.

En cuanto a la Correspondencia Números Racionales- Recta tendremos en cuenta:

II. 2. Manejo de la correspondencia números racionales-puntos de la recta en términos de aplicación por parte de los alumnos. Valoraremos:

II.2.1. La asignación de un punto de la recta a las representaciones decimal y fraccionaria de los Números Racionales.

II.2.2. Los procedimientos de asignación de un punto de la recta al número en cuestión para cada uno de los casos anteriores.

II. 3. Manejo de la correspondencia como una aplicación bien definida. Para valorarla tendremos en cuenta:

II.3.1. Asignación de un punto de la recta a las distintas representaciones de un mismo número racional (fraccionaria y decimal, fracciones equivalentes).

II.3.1. Procedimientos de asignación de un punto de la recta a las distintas representaciones del mismo número racional.

II. 4. Manejo de la correspondencia números racionales-puntos de la recta como aplicación inyectiva. Para valorarla tendremos en cuenta la asignación del mismo punto de la recta a las notaciones decimales periódicas y a su fracción correspondiente, es decir, no identificación del punto correspondiente a un decimal periódico con el correspondiente a una aproximación finita de dicho decimal.

II. 5. Comprensión por parte de los alumnos de la sobreyectividad de la correspondencia números racionales-puntos de la recta. En esta unidad analizaremos:

II.5.1. Concepciones de los alumnos sobre si los números racionales llenan o no la recta numérica y argumentos con los que justifican su respuesta:

II.5.2. Capacidad de los alumnos para concebir un procedimiento mediante el cual asignar un número a un punto de la recta; para su valoración tendremos en cuenta:

a. Capacidad para concebir un procedimiento general mediante el cual asignar un número a un punto señalado en la recta (en la cual están ya fijados el cero y el uno).

b. Tipo de procedimiento concebido, caso de que lo hagan.

c. Tipo de número mediante el cual expresan esa relación.

d. Argumento con el que justifican su respuesta.

e. Capacidad para relacionar los ámbitos numérico y geométrico.

II.5.3. Conexión de la correspondencia números racionales-recta con su probable creencia en la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera.

II.5.4. Caso de que logren hacer la conexión señalada en el apartado anterior y consideren que a todo punto de la recta le corresponde un número racional, analizaremos si, sobre esta base, establecen que los números racionales llenan la recta o la concepción del continuo interfiere y añaden matices a la simple consideración de la sobreyectividad números racionales-puntos de la recta.[16]

Nivel de los Números Reales.

Dada la dificultad de la demostración geométrica de la existencia de longitudes inconmensurables, introducimos los números no racionales a través de su expresión decimal infinita no periódica. El conjunto numérico ha sido ampliado. Se conocen los números racionales y otro tipo de números, irracionales. La Correspondencia Números-Puntos de la Recta se establecerá ahora entre el Conjunto Numérico Ampliado[17] y los puntos de la recta.

Por lo que se refiere a la Medida de Longitudes suponemos que la mayoría de los alumnos, en el nivel anterior, han expresado su creencia en la conmensurabilidad de cualquier longitud con otra longitud dada tomada como unidad. Esto significa la suposición de que todas las longitudes son racionales y, por tanto, expresables en forma decimal con un decimal finito o periódico.

Al introducir medidas correspondientes a números irracionales, cuya expresión decimal es infinita no periódica, se plantea un conflicto con la creencia en la

[16] Se explorará también cuáles son las primeras intuiciones de los alumnos en esta pregunta antes de haber establecido el criterio de correspondencia, para ver hasta qué punto se modifican sus pensamientos o se producen conflictos, y si hay más variables que tomar en cuenta en torno a la Correspondencia Números-Continuo lineal que desborde la simple asociación números-puntos que integran dicho continuo.
En experiencias anteriores (Romero, 1993: Memoria Tercer Ciclo), cuando los alumnos fijan su atención en la densidad de los números racionales, esgrimen argumentos de este tipo: "Los números racionales no llenan la recta numérica porque como entre dos siempre hay otro, nunca habría alguno que acabara taponando el hueco". En el supuesto caso de que se establezca un criterio que permita asignar a cada punto de la recta un número racional, ¿Cómo influye la densidad de los racionales en que estos números llenen la recta? ¿Tiene huecos la recta?).

[17] Para trabajar en torno a esta cuestión, prestaremos atención a todos los números aparecidos en el transcurso del proceso didáctico; son ejemplos de Números Reales de distintos tipos -la tipología la establecemos sobre la base de la notación decimal (Ver Unidades de Análisis para la Organización del Contenido)- a los que nos referiremos en lo sucesivo como a "Números Reales" (aunque los ejemplos estén bastante limitados, dado el nivel de los alumnos).

conmensurabilidad de cualquier longitud con otra tomada como unidad. En efecto, si hubiera una parte alícuota entre las longitudes correspondientes a los números irracionales y la unidad, su relación podría expresarse mediante una fracción, y por tanto su expresión decimal sería finita o periódica.

Para valorar la comprensión de los alumnos en torno a esta cuestión consideramos las siguientes Unidades de Análisis:

II. 6. Capacidad para conectar la creencia en la conmensurabilidad de cualquier longitud con otra tomada como unidad, con la necesaria expresión racional de dicha longitud en esa unidad.

II. 7. Capacidad para plantearse el conflicto subsiguiente con la expresión no racional (infinita no periódica)[18] de la medida relativa de parejas de longitudes tales como el lado de un cuadrado y su diagonal, longitud de la circunferencia y su diámetro, lado de un pentágono y su diagonal.

II. 8. Conflicto entre el carácter acotado (finitud actual) de la longitud irracional y la infinitud potencial de su expresión decimal.

II. 9. Capacidad para interpretar la imposibilidad de obtener mediante medida fisica una longitud irracional. Cuestionamiento de la comprobación fisica del problema de la inconmensurabilidad.

Para valorar la correspondencia puntos de la recta-números reales, tendremos en cuenta:

II. 10. Manejo de la correspondencia números reales-puntos de la recta en términos de aplicación por parte de los alumnos. Valoraremos:
II.10.1. Asignación de un punto de la recta a las distintas representaciones numéricas de los Números Racionales y a las representaciones numéricas de los Números Irracionales señalados en el Foco de Investigación 1: raíces cuadradas y expresiones aritméticas con raíces cuadradas, π, Número de Oro, decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias.[19]

---

18 Este argumento es el único de que disponen los alumnos y, además de ser un "decreto" (en el sentido de conocimientos establecido pero no demostrado) el hecho de que la expresión decimal de algunas raíces cuadradas sea infinita no periódica, hace uso de una concatenación lógica que creemos que no es fácil de aprehender en niños de este nivel. (Por otra parte, en el caso específico de $\sqrt{2}$, contamos con la experiencia del intento de conmensurar en la práctica la diagonal y el lado de un cuadrado).

19 Es muy importante tener en cuenta y sacar a la luz el problema de que no se puede obtener físicamente una medida irracional (incluidas las construibles), de forma que a los alumnos les resulte significativo. Esta

II.10. 2. Procedimientos de asignación de un punto de la recta al número en cuestión, para cada uno de los casos mencionados.

II. 11. Manejo de la correspondencia como aplicación bien definida. Para valorarla tendremos en cuenta:

II.11.1. Asignación de un mismo punto de la recta a las distintas representaciones del mismo número racional.

II.11. 2. Asignación de un mismo punto de la recta a las distintas representaciones del mismo número irracional.

II. 12. Manejo de la correspondencia números reales-puntos de la recta como aplicación inyectiva. Para valorarla tendremos en cuenta:

II.12.1. Asignación del mismo punto de la recta a la representación habitual de los irracionales y a su expresión infinita, no a ninguna de sus aproximaciones.

II.12. 2. Comprensión de que a los puntos irracionales no le puede corresponder ninguna fracción, en contra de lo que podían haber supuesto anteriormente. Un enlace posible es la expresión decimal o la conmensurabilidad de longitudes.

II. 13. Interpretación de los alumnos de la sobreyectividad de la correspondencia números reales-puntos de la recta. En esta unidad analizaremos:

II.13.1. Tipos de números reales que los alumnos consideran que pueden corresponder a un punto cualquiera de la recta.

II.13. 2. Argumento mediante el que justifican la elección anterior.

II. 14. Diferenciación de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta y la correspondencia Números Reales-recta (en el sentido del continuo lineal).

III. 6. 3 Clasificación final de las unidades

De acuerdo con lo dos Focos de Investigación establecidos y los dos niveles que hemos determinado para el desarrollo del tópico en el aula, hemos enunciado 21 Unidades de Análisis para la Comprensión del contenido, que quedan resumidas en la siguiente tabla:

diferenciación entre la determinación conceptual y la obtención física, ¿puede ayudar a los alumnos a establecer criterios de correspondencia en el caso de los números no construibles? ¿Cuáles?

Tabla 3.1: Clasificación de las unidades para analizar la Comprensión del Contenido.

Niveles Focos de Investigación	Números Racionales	Número Reales
Foco de Investigación I	I.1 Notación decimal. I.2 Paso de notación fraccionaria a decimal. I.3 Paso de notación decimal a fraccionaria. I.4 Correspondencia fracción-decimal	I. 5 Aceptación y uso de notación decimal. I.6 Estatus de número de las expresiones decimales. I.7 Concepto de número real a partir de la notación decimal
Foco de Investigación II	II.1 Medidad de longitudes II.2 Correspondencia raciona- les- puntos de la recta. II.3 Caracter bien definido de la aplicación racionales- puntos de la recta. II.4 Carácter inyectivo de la aplicación. II.5 Carácter sobreyectivo de la aplicación.	II.6 Implicación conmensurabilidad expresión racional. II.7 Existencia parejas segmentos con medida irracional II.8 Carácter acotado de un segmento e infinitud de su expresión irracional. II.9 Imposibilidad física de longitudes irracionales. II.10 Correpondencia números reales- puntos de la recta II.11 Aplicación bien definida II.12 Aplicación inyectiva. II.13 Aplicación sobreyectiva II.14 Diferencia puntos de la recta- continuo lineal.

III. 7 Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica

Las unidades de interacción didáctica han sido elaboradas con objeto de describir y estudiar la construcción social de conocimiento y los significados compartidos sobre el Número Real surgidos durante las sesiones de trabajo y discusión en el aula, así como el contexto organizativo y disciplinar en el que dicha construcción ha tenido lugar. Para ello nos hemos propuesto presentar, organizar y analizar los datos que hemos obtenido a partir de las grabaciones en vídeo de las principales sesiones de trabajo realizadas sobre el tópico en estudio. Hemos de puntualizar que en todos los casos, salvo las sesiones correspondientes a las exposiciones de trabajos de los alumnos, se trata de grabaciones cuyo objeto fundamental es recoger la discusión sostenida en la comunidad de la clase a partir del trabajo realizado previamente por los alumnos, en pareja o individualmente, sobre las cuestiones escritas propuestas por la profesora. Ocasionalmente, también se recogen los momentos en que la profesora ordena las tareas que han de realizar los alumnos en torno a las cuestiones escritas.

Interesa poner de manifiesto la forma en que se llevó a cabo la negociación y el intercambio de significados en la comunidad de la clase en relación a los contenidos seleccionados. Así pues, hemos registrado las sesiones de discusión en gran grupo, o Puesta en Común, para dejar constancia del proceso de interacción social con el que los alumnos construyeron sus nociones respecto al concepto de Número Real.

El fin pretendido en las sesiones de Puesta en Común por la profesora-investigadora es promover la Comprensión de los alumnos sobre las cuestiones tratadas, estimulando la explicitación de sus ideas, la precisión y justificación de las mismas y el contraste con las de la profesora y las de otros compañeros, estableciendo un proceso dialéctico mediante el cual sistematizar unos conocimientos compartidos por la comunidad de la clase. Las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica se elaboran para sistematizar, estructurar y estudiar las interacciones que se producen a lo largo de la Puesta en Común entre la profesora y los alumnos y los alumnos entre sí, en relación al objetivo explicitado.

III. 7. 1 Descripción general de las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica

Las actuaciones que tienen lugar en la Puesta en Común las diferenciamos según el Agente: profesora o alumnos, y, en cada caso, las clasificamos, atendiendo a su Finalidad prioritaria en la dinámica del aula, en tres apartados:

1. Gestión del trabajo en el aula (Organización y disciplina).
2. Gestión del desarrollo del contenido (Organización del tratamiento del contenido matemático).
3. Construcción del conocimiento en el aula (Organización del conocimiento matemático y de su significado).

Esta diferenciación en tres apartados nos parece importante y se debe al siguiente motivo. Como hemos mencionado anteriormente el objetivo final de las sesiones de Puesta en Común ha sido la elaboración de significados mediante los que construir y desarrollar conocimiento en torno al tópico matemático que nos ocupa, a través del intercambio de información y discusión de los argumentos aportados en la comunidad de la clase sobre los contenidos trabajados. Las acciones dirigidas específicamente a este fin han sido englobadas dentro del apartado 3.

Ahora bien, para que la construcción de conocimiento haya podido tener lugar ha sido necesario realizar acciones que responden a las otras dos finalidades. En primer lugar, hay actuaciones encaminadas a la gestión de la propia discusión sobre el contenido; es decir, a determinar qué contenidos se van a tratar y en qué orden, las intervenciones de los sujetos, la articulación del debate, etc. Las actuaciones correspondientes a este fin han sido consideradas dentro del apartado 2.

En segundo lugar hay que considerar la gestión y control de los comportamientos de los alumnos en el aula en lo referente a la realización de tareas y a la disciplina. El mantenimiento de esta finalidad ha resultado fundamental para sostener las otras dos; prueba de ello son las dificultades surgidas en la Fase de Acción 1 por problemas actitudinales y de disciplina, que motivaron el aplazamiento del proceso de investigación previsto, para trabajar en una espiral complementaria, antes de pasar a implementar la Fase de acción 2, como se verá en el próximo Capítulo. Las acciones relativas a este apartado han sido englobadas dentro del apartado 1.

En el cuadro de doble entrada se presentan las unidades de análisis consideradas para clasificar las interacciones, al tener en cuenta las diferentes actuaciones en el aula de la profesora y los alumnos. Esta tipología de clasificación se obtiene considerando, junto con las tres Finalidades antes mencionadas, cuatro Tipos de Actuaciones Generales que tienen lugar: Fijar normas o establecer convenios, Establecer significados, Enjuiciar e Intervenir.

Cada unidad específica resulta de considerar una finalidad junto con un tipo de actuación general. Además, también se tiene en cuenta el agente: profesora o alumnos y el tipo de acción particular en que se concretan algunas de las actuaciones generales.

En la tabla, debajo de la descripción de cada unidad aparecen las siglas con las que la codificamos en cada caso y que se utilizarán en la transcripción de las grabaciones.

Tabla 3.2: Unidades para el análisis de la Interacción según agente, finalidad y actuación.

Finalidad / Actuaciones	1. GESTION DEL TRABAJO EN EL AULA		2. GESTION DEL DESARROLLO DEL CONTENIDO		3. CONSTRUCCION DEL CONOCIMIENTO EN EL AULA	
Fijar Normas o Convenios	**Prof.** Organiza **PO**	**Alum.** Sugiere **AS**	**Prof.** Organiza **PO**	**Alum.** Sugiere **AS**	**Prof.** Organiza Conocimiento **POC**	**Alum.** Aporta Información **AAI**
Establecer Significados	**Prof.** Pregunta **PP** Explica **PE**	**Alum.** Pregunta **AP** Explica **AE**	**Prof.** Pregunta **PP** Explica **PE**	**Alum.** Pregunta **AP** Explica **AE**	**Prof.** Indaga Significados **PIS** Desarrolla Comprensión **PDC**	**Alum.** Indaga Significados **AIS** Muestra Comprensión **AMC**
Enjuiciar	**Prof.** Valora Propuestas e nterveneiones **PV**	**Alum.** Idem **AV**	**Prof.** Valora Propuestas e Intervenciones **PV**	**Alum.** Idem **AV**	**Prof.** Valora Ideas **PVI**	**Alum.** Valora Ideas **AVI**
Intervenir	**Prof.** Amonesta Comporta-mientos **PA**	**Alum.** Reaccio-nan a la Amonest. **AR**	**Prof.** Interviene en la Interacción **PI**	**Alum.** Idem **AI**	**Prof.** Sistematiza Conocimiento **PSC**	**Alum.** Elabora Conocimiento **AEC**

Además, consideramos oportuno, fuera de las unidades del cuadro, introducir otra unidad, que clasifique las situaciones en las que predomine un determinado clima en el aula: **CA.**

En total, son treinta y una las unidades de análisis, o categorías, consideradas para analizar la interacción didáctica, las cuales pasamos a describir con detalle, atendiendo a los parámetros que las determinan y caracterizan. Esta descripción se estructurará a partir de las tres finalidades generales. Los segmentos del discurso vienen determinados por estas unidades: cuando cambia la unidad o categoría, consideramos un nuevo segmento en el discurso

III. 7. 2 Descripción de las Unidades relativas a la Gestión del trabajo en el Aula

La profesora gestiona el trabajo y el comportamiento en el aula. Esta gestión se reconoce cuando propone tareas y actuaciones, da pautas para su realización, organiza las acciones en el aula, aclara las dudas de los alumnos al respecto, establece normas relativas al comportamiento, asume el control del mismo, amonesta y sanciona a los alumnos.

Los alumnos, a su vez, interaccionan con la actuación gestora de la profesora, manifiestan acuerdo o desacuerdo, preguntan razones, hacen propuestas de gestión, valoran el acierto o desacierto de las propuestas realizadas y, a su vez, proponen modificaciones a las mismas. En muy escasas ocasiones los alumnos asumen la gestión del trabajo y la responsabilidad de mantener la disciplina en el aula, pero cuando esto ocurre también lo consideramos en esta finalidad.

Las actuaciones consideradas según esta finalidad son independientes del contenido, y podrían ser válidas para la gestión del aula en otras asignaturas o temas. Las categorias consideradas son:

1.P. Relativas a la actuación de la Profesora:

1.PO: La profesora ORGANIZA. Esta categoría viene caracterizada por los parámetros siguientes:

-PO/ d: Da normas, directrices u órdenes a los alumnos relativas a las tareas que espera que éstos realicen, o al comportamiento que se espera de ellos.

-PO/ a: Anima, da estímulo a los alumnos para que realicen las tareas, o avancen en su realización.

-PO/ s: Solicita la atención de los alumnos.

-PO/ p: Establece prioridades y da permiso para la intervención de los alumnos en la dinámica de la clase.

1.PP: La profesora PREGUNTA a los alumnos, en donde distinguimos:

-PP/ t: Para hacerse una idea de cómo va la realización de tareas.

-PP/ g: Su opinión en cuestiones relativas a la gestión del aula.

1.PE: La profesora EXPLICA, donde reconocemos las opciones siguientes:

-PE/ a: Aclara cuestiones relativas a las directrices que ha dado.

-PE/ r: Da razones o justificaciones de las órdenes que ha dado o las decisiones que ha tomado.

1.PV: La profesora VALORA las intervenciones, sugerencias etc. de los alumnos en materia de gestión del aula:

-PV/ a: Acepta la propuesta del alumno.

-PV/ r: Rechaza la propuesta del alumno.

1.PA: La profesora AMONESTA a los alumnos por cuestiones de disciplina, distinguimos:

-PA/ r: Reprende a los alumnos, a causa de un comportamiento inadecuado.

-PA/ s: Sanciona a los alumnos, debido a un comportamiento inadecuado.

1.A Relativas a la actuación de los Alumnos:

1.AS: Los alumnos SUGIEREN o hacen propuestas en relación con la gestión del aula: quién ha de intervenir, quién ha de mantener silencio, elevar la voz, etc.

1.AP: Los alumnos PREGUNTAN:

-AP/ p: Piden precisión sobre una información.

-AP/ d: Sobre las directrices que ha dado la profesora.

-AP/ e: Piden explicaciones sobre una orden o decisión de la profesora.

1.AE: Los alumnos EXPLICAN:

-AE/ t: Informan sobre cómo va la realización de tareas.

-AE/ r: Dan razones o argumentos para justificar una propuesta de gestión.

1.AV: Los alumno VALORAN:

-AV/ a: Aceptan propuestas (de gestión del aula) de la profesora o de un compañero.

-AV/ r: Rechazan propuestas (de gestión del aula) de la profesora o de un compañero.

1.AR: Los alumnos REACCIONAN a una amonestación sobre su comportamiento.

III. 7. 3 Descripción de las Unidades relativas a Gestión del Desarrollo del Contenido

La profesora conduce la presentación y desarrollo de los contenidos, estableciendo prioridades en los contenidos que se tratan, decidiendo la conveniencia o no de continuar la discusión sobre determinadas cuestiones, interviniendo en el desarrollo de la acción cuando lo estima oportuno, aclarando las dudas de los alumnos respecto a la organización y desarrollo de los contenidos.

Los alumnos, a su vez, participan en el desarrollo del contenido y modifican la actuación gestora de la profesora, haciendo sugerencias, intervenciones al respecto o preguntas sobre puntos que no han quedado claros.

2.P Relativas a las actuaciones de la Profesora:

2.PO: La profesora ORGANIZA la presentación y discusión de los contenidos:

-PO/ ce: Plantea las preguntas propuestas en las Cuestiones Escritas, para iniciar la discusión sobre las mismas. En las ocasiones en que se retomen las cuestiones escritas, o se insista en ellas, con el fin de indagar significados, estimular las intervenciones de los alumnos etc, se codificarán de acuerdo con estas finalidades.

-PO/ p: Establece prioridades en cuanto a qué contenidos tratar.

2.PP: La profesora PREGUNTA a los alumnos:

-PP/ g: Su opinión en cuestiones relativas a la gestión del contenido

2.PE: La profesora EXPLICA:

-PE/ a: Aclara puntos relativos a las cuestiones escritas planteadas y a la gestión de los contenidos, y clarifica las dudas de los alumnos al respecto.

-PE/ s: La profesora da sugerencias o ejemplos para ayudar a los alumnos a comprender las cuestiones escritas planteadas.

-PE/ r: Da razones o justificaciones de las órdenes que ha dado o las decisiones que ha tomado.

2.PV: La profesora VALORA las sugerencias de los alumnos relativas a la presentación de los tópicos o a la discusión del contenido:

-PV/ a: Acepta la propuesta del alumno.

-PV/ r: Rechaza la propuesta del alumno.

2.PI: La profesora INTERVIENE en la interacción de los alumnos:

-PI/ i: Interrumpe una discusión entre alumnos o el discurso de un alumno.

-PI/ s: Suspende o aplaza una discusión.

2.A Relativas a las actuaciones de los Alumnos

2.AS: Los alumnos SUGIEREN o hacen propuestas en relación con la gestión de la discusión, en relación con los contenidos que se pueden tratar, organización de contenidos, etc...

2.AP: Los alumnos PREGUNTAN:

-AP/ p: Piden precisión sobre una información.

-AP/ e: Pide explicaciones sobre una orden o decisión de la profesora.

2.AE: Los alumnos EXPLICAN:

-AE/ r: Dan razones o argumentos para justificar una propuesta de gestión.

2.AV: Los alumnos VALORAN las sugerencias de la profesora, o de otros alumnos relativas a la presentación de tópicos o a la discusión del contenido:

-AV/ a: Aceptan la propuesta.

-AV/ r: Rechazan la propuesta.

2.AI: Los alumnos INTERVIENEN en la interacción de otros compañeros, entre sí o con la profesora. Normalmente, interrumpen la interacción.

III. 7. 4 Descripción de las Unidades relativas a la Construcción de Conocimiento en el Aula

La profesora y los alumnos establecen una discusión en gran grupo (Puesta en Común), sobre los contenidos trabajados por los alumnos individualmente o en pequeño grupo a raíz de las Actividades planteadas. A lo largo del debate e intercambio de información la profesora promueve la comprensión de los alumnos sobre las cuestiones tratadas, estimula la explicitación por parte de los alumnos de sus ideas y el contraste con las de la propia profesora y los otros compañeros, favorece un proceso dialéctico mediante el cual establecer unos conocimientos compartidos por la comunidad de la clase. Además, el intercambio de significados a este nivel puede tener lugar en algún otro momento, como por ejemplo, con ocasión de la propuesta de tareas.

3.P Actuaciones relativas a la Profesora:

3.POC: La profesora ORGANIZA cuestiones relativas al desarrollo de la comprensión y la construcción del conocimiento:

-POC/ d: Da normas y directrices referidas al tratamiento, interpretación y desarrollo de los contenidos.

-POC/ e: Estimula las intervenciones, búsquedas y exploraciones por parte de los alumnos, o la profundización por su cuenta en un tema.

3.PIS: La profesora INDAGA SIGNIFICADOS:

-PIS/ i: Requiere las intuiciones, opiniones, etc. de los alumnos con relación a cuestiones o disyuntivas conceptuales que no han sido tratadas previamente.

-PIS/ e: Interroga sobre conocimientos establecidos, bien en la comunidad de la clase, en cursos previos, o en libros y material informativo en general.

-PIS/ cl: Interroga para hacerse una idea de hasta qué punto una cuestión ha sido comprendida o un resultado es compartido en la clase (dirigiéndose a la clase en general o a alumnos determinados).

-PIS/ p: Profundiza en la intervención de uno o varios alumnos.

3.PDC: La profesora realiza acciones encaminadas a DESARROLLAR LA COMPRENSION en los alumnos:

-PDC/ c: Centra la discusión y/o clarifica las directrices que ha dado, el punto en que se halla la discusión o de los supuestos bajo los que se discute.

-PDC/ ll: Llama la atención de los alumnos sobre un punto del contenido o de la intervención de los compañeros que considera importante.

-PDC/ p: Explica una idea en términos de su perspectiva y conocimientos.

-PDC/ a: Explica una idea a partir de ideas o significados expresados por los alumnos o discutidos en clase con anterioridad.

-PDC/ r: Induce al razonamiento en el alumno a través de un contraejemplo, ejemplo, analogía con algún contenido tratado anteriormente, o devolviendo la cuestión al alumno y haciéndolo responsable de encontrarle significado y responderla.

-PDC/ e: Solicita a los alumnos que expliquen a los compañeros.

3.PVI: La profesora VALORA:

-PVI/ as: Acepta la idea del alumno (la repite simplemente, la resume o la adopta a favor de su postura).

-PVI/ ar: Acepta y resalta la idea del alumno, o llama la atención sobre ella a los demás compañeros.

-PVI/ ad: Acepta y desarrolla, completa o modifica la idea del alumno.

-PVI/ rs: Rechaza la idea del alumno, simplemente, sin dar razones para el rechazo

-PVI/ rr: Rechaza la idea del alumno, dando razones para el rechazo.

-PVI/ c: Hace consideraciones o da opiniones sobre la importancia, facilidad o dificultad de un contenido.

-PVI/ v: Hace juicios de valor sobre las intervenciones, actuaciones, manifestaciones de comprensión o incomprensión etc. de los alumnos.

-PVI/ s: Manifiesta sorpresa.

3.PSC: La profesora SISTEMATIZA CONOCIMIENTOS, o establece una conclusión:

-PSC/ c: Establece una conclusión o hace una síntesis sobre el punto del contenido que ha sido tratado en un determinado punto de la discusión.

-PSC/ e: Hace una estructuración global de una serie de contenidos tratados a lo largo de la discusión.

3.A Respecto a la actuación de los Alumnos

3.AAI: Los alumnos APORTAN información o hacen propuestas en cuestiones relativas a la comprensión:

-AAI/ os: Exponen sus opiniones simplemente sobre el significado del tópico que se está discutiendo.

-AAI/ ai: Avanzan ideas propias, con un contenido que permite adelantar en la discusión, pero sin dar argumentos ni explicaciones.

-AAI/ l: Aportan información que han encontrado en libros y material informativo en general.

-AAI/ nc: Manifiestan que no comprenden, o se muestran confusos o incapaces de responder.

-AAI/ c: Manifiestan o indican que comprenden el tópico que se está tratando.

3.AIS: Los alumnos INDAGAN SIGNIFICADOS:

-AIS/ a: Piden aclaración acerca de las directrices dadas por la profesora, del punto en que se halla la discusión o de los supuestos bajo los que se discute.

-AIS/ e: Piden una explicación o un argumento.

-AIS/ r: Preguntan sobre un razonamiento, o parte de un razonamiento, que no entienden, o no les convence, o no les ha quedado claro.

-AIS/ c: Hacen preguntas dirigidas a obtener una respuesta cerrada o una información sobre un contenido que suponen establecido.

-AIS/ i: Preguntan sobre una intuición directamente, o bien la exponen esperando que sea aceptada, rebatida o discutida.

3.AMC: Los alumnos MUESTRAN SU COMPRENSION:

-AMC/ c: Dan muestras de que se ha producido una comprensión.

-AMC/ ie: Los alumnos dan ideas explicando, razonando o argumentando su postura.

-AMC/ e: Ponen en juego conocimientos ya establecidos, bien en la comunidad de la clase o en cursos previos.

-AMC/ ri: Razonan inductivamente a partir de analogías con conocimientos previos, ejemplos concretos, etc.

3.AVI: Los alumnos VALORAN IDEAS:

-AVI/ as: Aceptan la idea de la profesora o del compañero (la repiten simplemente, la resumen o la adoptan a favor de su postura)

-AVI/ ad:Aceptan y desarrollan, amplían o completan la idea de la profesora o de otro alumno en términos de su perspectiva.

-AVI/ rs: Rechazan la idea de la profesora o de otro compañero, simplemente, sin dar razones para el rechazo.

-AVI/ rr: Contraargumentan o rechazan la idea de la profesora o de otro alumno, dando razones para el rechazo.

-AVI/ c: Hacen consideraciones o dan opiniones sobre la facilidad o dificultad de un contenido.

-AVI/ v: Hacen juicios de valor sobre las intervenciones, actuaciones, manifestaciones de comprensión o incomprensión etc. de la profesora o de los demás compañeros, o incluso sobre la información procedente de un texto.

-AVI/ s: Manifiestan sorpresa.

3.AEC: Los alumnos ELABORAN CONOCIMIENTO:

Los alumnos elaboran conocimiento y establecen conclusiones, en el sentido de cerrar un contenido, estableciendo conexiones y expresando de modo organizado su dominio del contenido.

CA: Categoría de CLIMA DEL AULA:

-CA/ m: Preguntas sobre mensajes, orales o escritos, que no se han entendido bien, y repeticiones de los mismos tanto por parte de la profesora como de los alumnos.

-CA/ s: Frase interrumpida o suspendida, sin que se pueda averiguar el sentido para su codificación.

-CA/ i: Mensajes que resultan inaudibles.

-CA/ sl: Pausas o períodos cortos de silencio.

-CA/ r: Periodos de ruido en los que la comunicación resulta ininteligible debido a la intervención simultánea de varios sujetos o a discusiones entre ellos.

-CA/ b: Se hacen bromas.

Resolución de los ejercicios planteados en la ficha. El profesor dirige las intervenciones de los alumnos en cada ejercicio hasta llegar a establecer un avance en su comprensión, que pueda servir como referencia común sobre la cuestión planteada en el ejercicio.

-Organización individual del trabajo:

Organización por parte de cada alumno de la información recibida a lo largo de todo el proceso de trabajo con la ficha.

-Presentación a la Profesora:

Se presentará el trabajo realizado para la valoración cuando ésta lo solicite.

-El resto de las actividades se realiza de forma más esporádica, de la siguiente manera:

Tarjetas: La profesora plantea a los alumnos una o más cuestiones actitudinales o de contenidos y los alumnos deben contestar en el tiempo previsto y entregar a la profesora para la valoración.

Ejercicios voluntarios: Los alumnos deben hacer por lo menos un número mínimo de ejercicios voluntarios, que la profesora propone en las Fichas o a raiz de las discusiones o dudas planteadas durante el proceso de trabajo con las mismas. Estos ejercicios han de realizarse fuera de clase, a lo largo de un plazo indicado por la profesora durante el cual pueden pedirle orientación.

Exámenes: La profesora propone exámenes que avisará con tiempo suficiente a los alumnos para que los preparen, estudiando los contenidos y revisando los ejercicios prácticos correspondientes. Los exámenes propuestos a lo largo de nuestro plan aparecen en el Anexo III.4.

Evaluación o Valoración: La valoración del proceso didáctico y de la comprensión de los alumnos se realiza por medio de varios instrumentos:

-Un Pretest, para tener información de los conocimientos previos de los alumnos sobre nuestros focos de investigación, que deben haber sido tratados en cursos anteriores. Esta prueba fue pasada también a otra clase del mismo curso en el mismo centro, para comparar los niveles entre una clase y otra, y ver si había diferencias significativas que pudieran afectar a nuestro grupo. Dicho instrumento se presenta en el Anexo III.5.

-El Diario de la profesora, en el que se registran sus impresiones, reflexiones y comentarios sobre cada sesión de clase, tanto en lo que concierne a comprensión de contenidos como a las actitudes y al funcionamiento del grupo.

-Documentos escritos de los alumnos. Aquí se incluyen algunas de las actividades propuestas como trabajo habitual de clase y tarjetas en las que han de contestar a preguntas específicas.

-Exámenes.

-Grabaciones en vídeo de la Puesta en Común en las sesiones correspondientes a las Cuestiones específicas de Investigación y de algunas otras que se estimen interesantes. Grabaciones en audio de las sesiones de Puesta en Común correspondientes a Cuestiones Complementarias de los Focos de Investigación.

Con estos documentos recogeremos información que utilizaremos, en primer lugar, durante el proceso didáctico para hacer una valoración de las sucesivas etapas, tomar las decisiones pertinentes para la acción inmediata, y proporcionar a los alumnos sus calificaciones. Pero además, tal como expusimos en el Capítulo I, algunos de estos datos serán objeto de un análisis más detallado una vez concluido el proceso didáctico, de acuerdo con la metodología allí explicitada, para realizar una reflexión más profunda que permita obtener y argumentar conclusiones sobre nuestros Focos de Investigación.

Una vez presentados los elementos que constituyen el soporte de nuestro Plan de Acción en el Aula, en los Anexos III.1 y III.2 se describe, como hemos señalado, el desarrollo de las Fases 1 y 2 de dicho plan, correspondientes, respectivamente, a la etapa de los Números Racionales (que incluye el trabajo con los Naturales y los Enteros) y a la etapa de los Números Irracionales y Reales.

CAPITULO IV

FASE DE ACCION 1: IMPLEMENTACION, OBSERVACION Y RESULTADOS, REFLEXION

IV. 1 Implementación

Siguiendo el esquema general de nuestra investigación (Capítulo I, apartado I.7), una vez realizada la Planificación de las dos Fases de Acción previstas para este trabajo: Fase de Acción 1, correspondiente a los Números Racionales, y Fase de Acción 2, correspondiente a Números Irracionales y Números Reales, pasamos a describir a continuaeión la Implementación de la primera de dichas fases de acción.

IV. 1. 1 Instrumentos de observación

Tal como estaba previsto en la Planificación, apartado III. 8, los instrumentos para recoger información durante esta primera Fase de Acción han sido los siguientes:

-Diario de la profesora:

.Recoge el plan previsto para cada sesión de clase y las observaciones de la profesora después de la misma.

.En el transcurso de la acción ha servido para dejar constancia y observar la evolución del proceso, reflexionar sobre la acción y hacer los ajustes necesarios en la práctica cotidiana.

.En esta fase, servirá de base para reconstruir la evolución del proceso didáctico.

-Producciones escritas de los alumnos:

.Se han recogido las producciones escritas de los alumnos correspondientes a un total de cinco actividades realizadas en clase y, además, el examen realizado al final de esta fase de acción.

.Estas producciones constan de las respuestas de los alumnos a las cuestiones y ejercicios planteados y de las correcciones y aportaciones después de la Puesta en Común.

El pretest, el conjunto de Fichas y los materiales preparados para que los alumnos trabajen en esta Fase de Acción 1 se encuentran en los Anexos III.3, III.4 y III.5; dentro del

Actividad F12	1 sesión y parte de otra	-Diario -Lectura y archivo de Documentos -Grabación vídeo	Actividad F12	2 sesiones: 11-11-93 12-11-93	-Diario -Lectura y archivo de Documentos -Grabación vídeo: 57´
Actividad F13	2 sesiones	-Diario -Lectura de Documentos -Lectura y archivo de Tarjeta , si se estima pertinente. -Grabación en audio.	-Finalizar actividad F11 -Actividad F13 (Falta finalizar actividad F13 y corrección de actividad F11)	2 sesiones y parte de la siguiente: 16-11-93 17-11-93 (18-11-93)	-Diario -Grabación en audio: 75´
			-Finalizar actividad F13 y corrección de actividad F11	2 sesiones: 18-11-93 19-11-93	-Diario
Actividad F14	11/2 sesión	-Diario -Lectura y archivo de Documentos -Grabación vídeo	**Se invierte el orden entre esta actividad y la siguiente.**		
Actividad F15	1 sesión	-Diario -Lectura de Documentos (pregunta 2)	Actividad F15	1 sesión: 23-11-93	-Diario -Grabación en audio: 30´
			Actividad F14 (Se comienza su realización, pero se pospone su continuación)	1 sesión: 24-11-93	-Diario
Examen 1	1 sesión (+1/2 sesión: Corrección)	-Diario -Lectura y archivo de Documentos	Examen 1 (Se pospone la corrección).	1 sesión y parte de la siguiente: 26-11-93 (16-12-93)	-Diario -Lectura y archivo de Documentos
			Corrección Examen	1sesión: 16-12-93	-Diario

Como en la tabla de Programación, las actividades correspondientes a Cuestiones de Investigación específicas están enmarcadas en negrita, y las correspondientes a Cuestiones Complementarias, en doble línea.

Globalmente estaban previstas 24 sesiones y son necesarias 28 para llevar a la práctica el Plan de trabajo completo; no es usual rebasar el tiempo de realización previsto para cada actividad en más de media sesión. Entre las carencias debidas a la realización señalamos 4 sesiones cuya grabación en audio no se realiza y otras 2 sesiones en las que no se lleva a cabo la lectura de documentos.

IV. 1. 3 Desarrollo de la Acción

Esta primera fase de la acción transcurrió entre el 8 de Octubre y el 26 de Noviembre de 1993, al que hay que añadir la sesión de corrección del dia 16 de Diciembre. Durante este periodo trabajamos con un grupo de 32 alumnos y alumnas, a lo largo de 28 sesiones. Para describir el desarrollo de la acción en cada sesión procedemos a su reconstrucción, que hemos llevado a cabo a partir del Diario de la profesora investigadora y de las grabaciones en audio de algunas de las sesiones; utilizamos segmentos de las grabaciones para ilustrar algunos de los puntos expuestos. Debido a la extensión de esta fase de acción, no se comentan todas las sesiones, sino sólo aquellas que resultan significativas para el desarrollo del proceso.

Organizamos la descripción de cada una de las sesiones según los seis epígrafes siguientes:

1.- Plan previsto,

2.- Ejecución,

3.- Aspectos actitudinales,

4.- Aspectos relacionados con la comprensión,

5.- Valoración,

6.- Toma de decisiones;

No se utilizarán todos los epígrafes para describir cada sesión, sino los que en cada caso se consideren necesarios.

IV. 1. 4 Descripción de las Sesiones

Pasamos a decribir las sesiones empleadas en la implementación de la Fase de Acción 1, según los epígrafes previstos.

8 Octubre 93:

.Plan previsto:

Presentación.

.Ejecución:

El grupo de alumnos con el que vamos a trabajar es la clase de 1ºE, que consta de treinta y dos alumnos y alumnas, que provienen de distintos colegios. El profesor de Matemáticas del curso me presenta a los alumnos diciendo que yo me haré cargo de la asignatura de Matemáticas y seré su profesora para este curso. A partir de aquí, empieza la puesta en práctica del plan previsto.

-13 Octubre 93:

.Plan previsto:

Pasar el Pretest a los alumnos.

.Ejecución:

No ha habido alteraciones con respecto al plan previsto.

-14 Octubre 93:

.Plan previsto:

Distribuir a los alumnos en grupos de cuatro y realizar la actividad F1, relativa a los procesos infinitos en el Sistema Decimal de numeración: existen números decimales con infinitas cifras, no existe el número más pequeño.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto, salvo que no ha podido realizarse la grabación en audio por no estar el material técnico disponible.

.Aspectos actitudinales:

Los niños parecen tímidos y no se atreven a participar demasiado. Parece un grupo bastante pacífico, si bien algunos alumnos han intentado imponer sus intereses en cuestiones de distribución de grupo; he dejado claro quién es la autoridad.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-No parece haber ningún problema con los ejercicios 1 y 2 de F1, relacionados con el orden en los decimales. Sólo una niña ha preguntado al final de la clase cómo es que 0,17432 era menor que 0,175.

-En un grupo se ha planteado la cuestión del infinito (∞). He intentado explicar que ese símbolo tenía un significado distinto a lo que se planteaba en ejercicio 2.

-En cuanto al ejercicio 3, los alumnos han propuesto como números las expresiones 999999..... ("nueve periódico"), e incluso 10101010... ("diez periódico").

.Valoración:

-Parecía no haber ninún problema con los ejercicios 1 y 2 de F1 (relativos a orden en los decimales), y sin embargo, en el pretest se observa que la mayoría de los alumnos no saben ordenar números decimales!

-Creo que la cuestión relativa al infinito y al símbolo ∞ no ha quedado clara para los alumnos.

-Parece que los alumnos no tienen problema en aceptar el "nueve periódico" y el "diez periódico" como números.

-16 Octubre 93:

.Plan previsto:

Realizar la actividad F2: Existen números tan grandes como queramos, no existen números enteros con infinitas cifras, significado de las cifras en el Sistema Decimal de numeración.

.Ejecución:

No se ha podido finalizar la Puesta en Común de la actividad F2. No ha podido realizarse la grabación en audio por no estar el material técnico disponible.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos no tienen ningún problema en aceptar "9 periódico" y "10 periódico" como números y en compararlos (en principio decía alguno que "10 periódico" era más grande, pero otros argumentaron que la primera cifra valía por uno y al final, después de proponer por ejemplo "107 periódico" hemos quedado en que "9 periódico" era el número más grande, y por tanto, "-9 periódico" era el número más pequeño.

-Cuando he preguntado si "9 periódico" era un número, en principio han dicho que sí, pero un alumno ha dicho que los únicos números que podían tener infinitas cifras eran los decimales, ha sido apoyado explícitamente por otra alumna; otros dos mantenían que sí eran números, los demás no sabían.

Al final, he optado por establecer que los decimales podían tener infinitas cifras pero los enteros no, sin entrar en justificaciones.

-Se ha suscitado entonces otra cuestión: había alumnos que decían que no existía el número más pequeño (ni el más grande) y otros que sostenían que no podían saber si existiría o no. He enfocado la atención en la diferencia de matiz, y los de la primera postura han argumentado que sabían que no existía porque, para cualquier número, podían decir uno más pequeño (más grande). He intentado aclararlo usando además algunos ejemplos concretos.

-En cuanto al número positivo más pequeño, los alumnos han empezado diciendo el número 0,1 e inmediatamente han seguido con 0,000....1; luego se les ha ocurrido "cero, coma, cero periodo y 1". Entonces, hemos analizado lo que quiere decir el periodo (infinitos ceros, es decir, siempre cero), y hemos convenido en que el número propuesto no existía. La conclusión final ha sido que tampoco existe el número positivo más pequeño.

.Valoración:

-Creo que la diferencia entre "no saber si existe el número más pequeño (o más grande)" y "saber que no existe", no ha quedado clara para muchos de los alumnos.

-19 Octubre 93:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de F2. Realizar actividad F3, correspondiente a los Números Naturales: origen, definición intuitiva, notación-representaciones, orden, operaciones y propiedades de las operaciones.

.Ejecución:

No se ha podido finalizar la Puesta en Común de la actividad F3.

.Aspectos actitudinales:

En la Puesta en Común, los alumnos parecen haber perdido la timidez inicial y hacen continuos comentarios personales a raiz de cada intervención.

.Valoración:

La Puesta en Común resulta problemática debido a las intervenciones desordenadas de los alumnos; esto hace que resulte dificultosa y no muy productiva.

.Toma de decisiones:

Al oir la grabación en audio para pruebas técnicas, el problema señalado se capta muy bien; se me ocurre hacérsela escuchar a los alumnos, para llamar la atención al respecto.

-20 Octubre 93:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de actividad F3. Realizar actividad F4: Razones para la ampliación del conjunto de los Números Naturales; aparición de los Números Enteros.

.Ejecución:

No se han producido alteraciones significativas con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos no encuentran motivación en las actividades propuestas; no parecen implicarse en la realización de las mismas y tienen muy poco interés por contrastar y corregir los resultados de su trabajo.

.Valoración:

Quizás el desinterés de los alumnos pueda deberse, en parte, a que las actividades en torno a estos conceptos no están planteadas como problemas, sino como repaso y estructuración conceptual de los conocimientos que suponemos que los alumnos poseen de cursos anteriores, y este tipo de actividad resulta poco motivadora para alumnos de esta edad, menos que el trabajo sobre situaciones que resulten problemáticas para ellos.

-21 Octubre 93:

.Plan previsto:

Realizar actividad F5: Operaciones con números enteros y propiedades algebraicas de las operaciones.

Hacer partícipes a los alumnos de las observaciones sobre sus trabajos escritos de las actividades F1 y F2.

.Ejecución:

La retroalimentación de F1 y F2 ha resultado muy dificultosa y ha consumido mucho tiempo. No se ha podido finalizar la actividad F5

.Aspectos actitudinales:

La actitud de los alumnos dificulta considerablemente la dinámica de la Puesta en Común. El tiempo que la profesora no explica o interviene lo aprovechan para hacer sus comentarios y conversaciones particulares, y el escuchar a los compañeros es algo que les resulta totalmente ajeno,

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-He intentado que los alumnos definieran cuál era el "número infinito" del que tanto hablaban para solucionar muchas cuestiones. Les cuesta mucho trabajo intentar hacerlo, pero, sobre todo, no parecen ver la necesidad de definir ese "numero infinito", de delimitar ese concepto. Después de mucha discusión (en la que pretendían discutir sobre la existencia o no de una cosa que eran incapaces de definir o de delimitar de alguna manera, quizás a partir de sus nociones sobre el símbolo ∞), algunos alumnos quedaron en que un ejemplo de ese tal número podía ser 67891011121314...

.Valoración:

-No me ha parecido pertinente avanzar más con los alumnos en el tema del "número infinito". He optado por dejarlo en ese punto, por el momento; ya habrá ocasión de retomar el tema más adelante.

-Aparte de la dificultad de algunas cuestiones conceptuales, vuelve a suscitarse el problema de que los alumnos no están acostumbrados a una interacción del tipo de la requerida en la Puesta en Común, y esto hace que se pierda mucho tiempo y no se avance conceptualmente a un buen ritmo..

.Toma de decisiones:

Después de explicar a los alumnos cómo su actitud entorpecía la Puesta en Común y el avance en los contenidos, he optado por alargar la clase cinco minutos, pero había varios niños que perdían el autobús y, al final, han acabado yéndose todos.

-22 Octubre 93:

.Plan previsto:

Finalizar corrección de actividad F5. Realizar actividad F6: Números Enteros: origen, definición intuitiva, notación-representaciones, orden, operaciones y propiedades de las operaciones.

.Ejecución:

No ha dado tiempo a finalizar la Puesta en Común de la actividad F6.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos van adaptándose a la metodología de trabajo en pequeño grupo y se observa una evolución al respecto; sin embargo, la Puesta en Común sigue suscitando muchos problemas en cuanto a control y organización de la disciplina.

-26 Octubre 93:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de actividad F6.

.Ejecución:

No ha habido alteraciones significativas con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos no están nada acostumbrados a expresarse y a escucharse, y cada uno está pendiente de "su respuesta" hasta que se aburre porque no está dispuesto a mantener una discusión sobre la de otro compañero y esperar su turno.

.Valoración:

La Puesta en Común sigue resultando muy dificultosa debido a la actitud de los alumnos, que persisten en intervenir desordenadamente cuando se les ocurren comentarios, sin cuidar de su pertinencia, y no respetan las intervenciones de los compañeros.

.Toma de decisiones:

He tomado la opción de parar la clase cuando se presenten actitudes contraproducentes, y recuperar el tiempo perdido al final de la misma.

-27 Octubre 93:

.Plan previsto:

Realizar actividad F7, relativa a analizar distintos significados y operaciones de los Números Racionales: cantidad, proporciones, resultado de ecuaciones y transformaciones.

.Ejecución:

No se han producido alteraciones sobre el plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Para los alumnos es muy difícil salir de la tónica a la que están acostumbrados e intentar expresarse y escuchar las explicaciones de otros compañeros sin descalificarlas automáticamente ("no lo sabe explicar") y poner la atención en cualquier otro asunto.

.Toma de decisiones:

Estoy intentando resolver el problema haciendo observaciones en voz alta, deteniendo la clase hasta que el alumno que tiene el turno de palabra pueda ser escuchado, haciendo silencio cuando todos hablan a la vez, callando a los alumnos que hablan sin que se les haya concedido la palabra, etc.

.Valoración:

Las medidas tomadas en relación a los aspectos actitudinales retrasan mucho el avance en los contenidos y se corre el riesgo de que éstos queden imprecisos o mal definidos, y que los alumnos no les den importancia. Pienso que los alumnos mantienen su creencia en la ausencia completa de responsabilidad por su parte, y que sus respuestas están basadas en estímulos de autoridad y sanciones externas.

No cabe una vuelta atrás en los planteamientos actitudinales, pero el equilibrio es difícil.

-28 Octubre 93:

.Plan previsto:

Realizar actividad F8: El número racional en la expresión de medidas: relación entre lo que queremos medir y la unidad con la que se mide.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos en la ejecución del plan previsto, salvo que la grabación en audio se ha extraviado.

.Aspectos actitudinales:

-Parece que los alumnos están algo descontentos con el sistema de las Fichas.

-He tenido que citar a tres alumnos, que estaban entorpeciendo mucho la clase, para hablar con ellos al final de la misma. Eran perfectamente conscientes de su mal comportamiento y se han extrañado de que no los echara de clase, como había hecho otro profesor. He intentado aclararles que no pensaba seguirles el juego de ser la autoridad externa frente a la cual tuvieran que defenderse.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Un grupo de niñas ha hecho un esfuerzo enorme para medir el triángulo unidad de F8 ¡en milímetros cuadrados!

.Valoración:

-Creo que el descontento de los alumnos con respecto a las fichas puede deberse a dos motivos principales: no están acostumbrados a hacer esfuerzos sin la completa conducción del profesor y eso no les apetece, y también a que la presentación puede ser monótona para esta edad (falta de color de dibujos, de formatos variados, etc...; éste es un factor que conviene tener en cuenta.

-Hay bastante diferencia de ritmo entre unos alumnos y otros. Además, los alumnos tienen grados de madurez distintos, y creo que reciben mis mensajes con respecto a las cuestiones actitudinales de distinta forma unos de otros y con distintos grados de comprensión.

.Toma de decisiones:

-Revisar el material para adaptarlo lo más posible a las necesidades que parecen tener estos alumnos, dentro del margen que dan la planificación ya elaborada y los escasos medios con los que contamos en cuanto a diseño de material.

-29 Octubre 93:

.Plan previsto:

Puesta en común de la actividad F8.

.Ejecución:

No se han producido alteraciones con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Hay una serie de individuos que entorpecen enormemente el flujo aceptable de clase, algunos inconscientemente y otros con toda conciencia y más sútilmente para no pillarse los dedos.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-A los alumnos les resulta muy difícil expresar lo que significa "medir", y no hablan de unidad de medida (medir es "hallar una fórmula", es "saber el espacio que ocupa algo", sin ser capaces de explicitar cómo y a través de qué...)

-No dan, en principio, importancia a señalar en qué unidad estamos midiendo y registrarla al lado del número.

-Sólo algún niño es capaz de advertir que el número que expresa la medida depende de la unidad y que si distintas unidades están relacionadas entre sí, esto se reflejará en los resultados; muy pocos son capaces de entenderlo.

-En cuanto a los números que expresan la relación entre dos figuras, lo más natural es que lo piensen en términos de una medida y otra (ej. G = 6A y F = 5A), y no de proporción.

-Cuando sale a relucir el tema de la proporción, los alumnos lo presentan de dos maneras: G/F = 6/5 ó G = 6/5F. La primera la dice alguien de forma intuitiva (a raiz de la respuesta G y F = 6/5).

.Valoración:

El ritmo de trabajo es extremadamente lento y las interferencias actitudinales prácticamente impiden avanzar en la cuestión conceptual, que ya es compleja de por sí (más aún, teniendo en cuenta que el nivel que traían los alumnos de etapas anteriores no era muy elevado, según se comprueba en los resultados del Pretest.

En cuanto a comprensión del contenido,

-Parece que los alumnos no son sensibles a la cuestión de la unidad de medida y que muy pocos son capaces de entender que, si distintas unidades de medida guardan una relación entre sí, esta relación se reflejará en los resultados obtenidos al efectuar mediciones. Esto es lógico, si se tienen en cuenta sus definiciones intuitivas de medida.

-El hecho de que los alumnos expresan la relación entre dos figuras en términos de una medida y otra (ej. G = 6A y F = 5A), y no de proporción, puede venir influenciado por el hecho de que en el ejercicio las medidas ya están dadas en términos de sus unidades.

-Los alumnos tienen mucha dificultad en dar sentido a las expresiones G/F = 6/5 ó G = 6/5F. Incluso para niños despiertos no está claro que una figura sea 6/5 de otra y no son capaces de relacionar el número con el dibujo en un principio; otros dicen que no entienden "cómo se pueden coger 6 partes si tengo 5".

-El tema de la medida no es sencillo, y han quedado sin corregir los dos últimos ejercicios, pero creo que, como primera aproximación a la cuestión de la medida, resulta suficiente.

.Toma de decisones:

He tomado las siguientes decisiones respecto a los problemas de comportamiento:

-Pasar a los alumnos una tarjeta con las preguntas: ¿Qué opino sobre el comportamiento de la clase? ¿Qué problemas veo? ¿Qué soluciones propongo?

-Hacer una redistribución de los grupos de trabajo.

-Hablar del problema con la tutora del curso y el jefe de estudios.

-2 Noviembre 93:

.Plan previsto:

-Dar las notas obtenidas por los alumnos sobre la actividad F8.

-Pasar tarjeta a los alumnos para recoger su opinión sobre el funcionamiento de la clase: problemas y posibles soluciones.

-Plantear actividad F9: Operaciones con los Números Racionales y propiedades algebraicas de las mismas.

.Ejecución:

No ha habido alteraciones con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

-Los resultados, no demasiado buenos, de la actividad F8 han producido inquietud en los alumnos, que han preguntado cómo se puede recuperar. Les he informado que no haré recuperaciones sobre las actividades realizadas; la única forma de recuperar es mejorarse en los sucesivos trabajos.
-Por otra parte, ya antes de pasar la tarjeta actitudinal, algunos individuos (curiosamente uno de los grupos más conflictivos) se han cambiado de grupo por decisión propia y se han mezclado ¡con las niñas!
-La lectura de las tarjetas actitudinales me ha sorprendido por la madurez de muchos alumnos y por el reconocimiento de su propia responsabilidad y de las consecuencias que está teniendo lo que ocurre; curiosamente, los más conflictivos echan balones fuera en su mayoría (que se deje pasar el tiempo, que se cambie al libro...).
.Toma de decisiones:
-Dar retroalimentación a los alumnos sobre sus opiniones en lo que respecta a la situación actitudinal.
-Cambiar de lugar a algunos alumnos que resultan especiamente conflictivos e intentar integrarlos en grupos que resulten más adecuados para mejorar su comportamiento.

-3 Noviembre 93:
.Plan previsto:
Finalizar actividad F9.
.Ejecución:
No se ha podido finalizar la corrección de la actividad F9.
.Aspectos actitudinales:
He dado a los alumnos la información sobre mi lectura de las tarjetas que contestaron dos clases antes acerca del problema del comportamiento del grupo, y les he anunciado las medidas que he tomado: redistribución de grupos y expulsión a los alumnos que resulten problemáticos, los cuales sólo podrán volver a entrar en clase después de una entrevista con los padres.
El jefe de estudios ha venido, después de la charla que tuvimos acerca de los problemas de comportamiento, y ha llamado seriamente la atención sobre el tema.

-4 Noviembre 93:
.Plan previsto:
Comienzo de actividad F10: La notación decimal de las fracciones y viceversa, la correspondencia fracción-decimal periódico, peculiaridades de distintas expresiones decimales infinitas y la ayuda de las regularidades para su control, el caso de los nueves periódicos.
.Ejecución:
No ha habido alteraciones respecto al plan previsto.
.Aspectos actitudinales:

Sigue habiendo ruido, pero hoy los alumnos se han implicado mucho más y se han controlado bastante más también en la Puesta en Común.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Sólo ha dado tiempo a avanzar sobre los dos primeros ejercicios.

En el primero ha surgido muy pronto la cuestión de "qué le faltaba a 7,9999... para ser 8", y se han aventurado varias hipótesis: una décima; una milésima; 0,1111... y finalmente 0,00000....1. Para descartarlas, se me ha ocurrido ir sumando a 7,9999... los números propuestos, para ver que no daba 8; entonces he encontrado el problema de sumar decimales infinitos sin tener que recurrir a la expresión fraccionaria (porque en ese caso nos encontrábamos de nuevo con la dificultad de que 7,9999... = 8). He salido de esta dificultad sumando decimales infinitos empezando por una cifra cualquiera y aplicando el algoritmo tradicional, y así hemos ido descartando todas las posibilidades. En el caso de 0,0000...1, los mismos alumnos han planteado la cuestión de si ese número existía y bastantes alumnos han contestado que no:

> *"(A) No existe.*
>
> *(A) Nunca le vas a poder poner el 1, porque no acaba nunca."*

Sin embargo, otros alumnos han tenido dificultades para aceptar este razonamiento:

> *"(A) Se le pone luego.*
>
> *(P) Pero se le pone ¿cuándo?*
>
> *(A) Luego.*
>
> *(P) Pero si hay infinitos ceros, no se le puede poner luego."*

Aún así, muchos alumnos seguían afirmando que 7,9999... no era 8.

Al final, hemos considerado que en esa pregunta sólo tenían que poner su opinión; por el momento permanecía abierta y volveríamos sobre ella más adelante.

-En cuanto a la segunda pregunta, algunas calculadoras de los alumnos truncaban y otras redondeaban. Hemos tenido que detenernos en el tema del redondeo.

Algunos niños decían que, por ejemplo, el resultado 1/6 = 0,6666667 no podía ser y, puesto que era, he creído conveniente que aventuraran hipótesis sobre ello. Las más plausibles eran que el 7 al final de todos los 6 "indicaba que era periódico". Al final he tenido que explicar que la calculadora redondeaba y cuáles eran las reglas del redondeo; hemos hecho varios ejemplos, para que lo practicaran.

Un alumno ha encontrado a partir de esto una explicación para el conflicto suscitado anteriormente:

> *"(A) ¡Ah!, Seño, ya entiendo: 7,999... es 8 porque redondea."*

-Otro problema que se ha suscitado en torno a esto es que cuando he planteado a los alumnos que el 7 al final de la serie de 6 puede no indicar periodo, sino venir de otro decimal como 0,6666666666666895, dicen que eso no pasa, que eso no puede salir de una división...!

> *"(P) Imaginaros que una división da este número: 0,66666666666895.*
>
> *(A) Eso es imposible, eso de una división es imposible.*

(A) ¿Cómo va a salir 6666... y de repente va a cambiar a 8?"

-Al final de la clase, he vuelto a plantear cómo podríamos saber que 0,6666667 era en realidad 0,6666.......Algunos han dicho que por la división, pero no podían ser más explícitos, y ha acabado el tiempo de clase.

.Valoración:

-La cuestión de sumar decimales infinitos. me ha colocado en una situación imprevista; la forma en que la he resuelto (sumando decimales infinitos empezando por una cifra cualquiera y aplicando el algoritmo tradicional) puede suponer ventajas en cuanto a heurística, pero sienta un precedente sobre manejo de decimales infinitos en el nivel de operaciones aritméticas sobre el que tendré que tener cuidado en lo sucesivo.

-Creo que no todos los alumnos han entendido el redondeo en las cifras decimales, a pesar de los ejemplos trabajados.

-Con respecto a que 0,6666666666666895 no podía venir de una división, podríamos haber trabajado sobre su fracción generatriz.

-El ritmo de avance es lento, pero se están planteando cuestiones de comprensión importantes, que conviene ir solucionando antes de intentar avanzar.

-5 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Seguir con la actividad F10

.Ejecución:

El número de cuestiones planteadas por los alumnos sólo han permitido avanzar hasta el ejercicio 3 incluído.

.Aspectos actitudinales:

El comportamiento ha mejorado. La Puesta en Común ha sido dinámica y productiva.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Según piensan los alumnos, el desarrollo decimal de una fracción puede ser exacto, periódico puro, periódico mixto e infinitas cifras sin regularidad,

-El razonamiento para establecer la expresión periódica (o finita) del cociente de cualquier división, a partir de que los restos de una división siempre son menores que el divisor y que el repetirse un resto obliga a repetirse a los demás restos y, por tanto, al cociente cíclicamente, no resulta fácil de establecer para los alumnos. No son capaces de inducir resultados a partir de los ejemplos de divisiones que han hecho y contestan a las preguntas parciales que yo les formulo para establecer el razonamiento con generalizaciones injustificadas:

"(P) ¿Es posible que la longitud de una división con divisor 7 sea mayor que 7?

(A) No

(P) Pero no sólo en los ejemplos que tenéis ahí. Si dividís 2324 entre 7, ¿puede tener periodo más largo que 7?

(A) (Expresiones dubitativas)

(A) No

(P) Pero no , ¿por qué? ¿Porque lo habéis hecho con tres ejemplos y os sale?

(A) (Expresiones dubitativas)

(P) ¿Cómo podemos saberlo para todos los casos? ¿Qué pasa con los restos de las divisiones? ¿Puede ser el resto mayor que el divisor?"

Después de plantear que el número de restos distintos posibles es siempre menor que el divisor y la relación que existe entre la longitud del periodo y la repetición de los restos en la división, algunos alumnos plantean que no puede haber periodos más largos que 9:

"(A) Isabel, ¿pero no sería el periodo menor que 9? Tú no puedes poner en una división más de una cifra en lo de arriba (cociente); entonces, sólo serían 9."

Para ayudar a los alumnos a salir de esta confusión, pongo un ejemplo de periodo con longitud mayor que 9: 7,1233568921412335689214123356..., y explico que el periodo consiste en que los números se repitan en el mismo orden. Los pocos alumnos que parecen comprender la cuestión planteada tienen bastante interés, y al final de la clase vienen a preguntarme cómo puede pasar ese periodo del ejemplo; se lo explico con un ejemplo: divisor 19, resto 60, siguiente resto 70. Este mismo problema se ha suscitado también en cursos anteriores.

-A partir de aquí planteo la pregunta de si un decimal que proviene de una división puede tener infinitas cifras no periódicas:

"(A) No

(A) Sí, ¿por qué no?

(A) Yo creo que sí, porque está el número Pi.

(P) Pero Pi no es una fracción; estamos hablando de fracciones.

(A) Pero Pi sale de una división.

(P) ¿De qué división sale Pi?

....

(A) Ya sé de qué división sale Pi: de la longitud de la circunferencia partido del diámetro."

Digo a los alumnos que por el momento vamos a prescindir del número π, para razonar sobre fracciones de números concretos aunque arbitrarios; sin embargo, están bastante intrigados con π.

.<u>Valoración:</u>

-Los alumnos más adelantados parecen captar el razonamiento de los restos de las divisiones menores que el divisor, que dan lugar a la expresión periódica del cociente, y mantienen a partir de ahí que todas las fracciones tienen expresión decimal exacta o periódica. Aún así, a la mayoría les cuesta mucho trabajo entender lo que estamos discutiendo.

-Parece que los alumnos, en general, manejan el hecho de que una fracción de denominador x tiene una expresión decimal cuyo periodo tiene como máximo longitud (x-1), pero creo que la salvedad "como máximo" les pasa desapercibida a muchos.

-En general, pienso que el razonamiento a partir de los restos de la división que permite deducir que todo decimal que proviene de una fracción es finito o periódico, presenta dificultades de comprensión para los alumnos. Hay varios pasos que deben tener en cuenta y enlazar debidamente: que los restos de la división deben ser menores que el divisor, que eso implica que en algún momento tendrán que repetirse, que en el momento en que un resto se repita se repetirán las siguientes cifras del cociente y los demás restos, y que de aquí se deriva que la longitud del periodo será, como máximo, (divisor-1), ya que hay ese número de restos no nulos disponibles y puede que estos se repitan antes o después, pero en caso extremo, una vez agotadas todas las posibilidades. -

La mayoría de los alumnos están todavía a un nivel muy concreto de razonamiento, y el trabajo con varios ejemplos de divisiones es un apoyo necesario para que lleguen a comprender y manejar con soltura el razonamiento en cuestión.

.Toma de decisiones:

-Preparar ejemplos que ilustren el caso de periodos mayores de nueve cifras y de periodos que presenten cifras repetidas dentro del mismo periodo, para que los alumnos hagan las divisiones y puedan comprender mejor los argumentos utilizados en clase.

-Preparar ejemplos adecuados para ilustrar a los alumnos el matiz de que el periodo puede tener, como máximo, longitud x-1, donde x es el divisor. Y que esto no quiere decir que siempre tenga longitud máxima.

-9 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Finalizar actividad F10

.Ejecución:

No se han producido alteraciones respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Se aprecia una variación en el comportamiento. Aunque sigue habiendo problemas en la disciplina, ahora los alumnos tienen interés en manifestar sus ideas sobre el tópico que se discute y comienzan a valorar la expresión y comunicación de las mismas; el problema está en que aún no valoran la información que reciben de sus compañeros, y esto dificulta bastante la comunicación fuera del pequeño grupo.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Un alumno intenta pasar 1,7777... a fracción de la forma 17777/10000, pero los demas dicen que eso no es así. En todo caso apuntan que sería 17777..../10000..., pero quedamos en que numerador y denominador no son enteros y por tanto, eso no está bien. Una alumna apunta:

> *"(A) Cuando divides un número entre otro..., si no ¿cómo vas a dividir infinito entre infinito?"*

-Después de intentar con varios ejemplos que los alumnos entren en el proceso de razonamiento mediante el cual pasar de la expresión decimal periódica a la fraccionaria, éstos se niegan rotundamente. Dicen que conocen una regla que es más fácil, y no quieren aprender ninguna otra cosa. Después de justificar que la comprensión de una regla permite memorizarla más fácilmente y con más seguridad que el aprendizaje de la fórmula solamente, establezco que este tipo de aprendizaje forma parte del nivel en que están, y que nadie podrá aspirar a nota si no lo tiene.

-Con respecto a los decimales con 9 periódico, los primeros comentarios de los alumnos son:

> *"(A) Ese no sale.*
> *(A) ¿Cómo puede ser eso?*
> *(A) ¿Cómo puede salir eso?*
> *(A) Y los siguientes tampoco dan.*
> *(P) ¿Este cuánto da?*
> *(A) No da.*
> *(P) ¿Este qué da?*
> *(A) 9/9*
> *(A) Da 1 eso."*

Después de aplicar la regla de conversión, los alumnos establecen que: 0,999...= 1; 2,4999...= 2,5; 3,67999....= 3,678, etc.... Pero siguen sin quedarse satisfechos:

> *"(A) Los de 0,999... no tienen fracción generatriz.*
> *(P) ¿Cómo que no?*
> *(A) Esa es aproximada, pero no la tienen.*
> *(P) ¡Ah! Esa es aproximada. Pero, vamos a ver, si la regla, vosotros la habéis aprendido y era esa; y os sale para todos...*
> *(A) Seño, a ver si haciéndolo por lo otro (el razonamiento de la regla) sale..."*

Finalmente, la explicación que los alumnos en general atribuyen a los resultados obtenidos en el caso de los nueves periódicos es que *la regla redondea.*

Para intentar una salida a este problema, vuelvo al razonamiento de que "no le falta nada para ser 1", pero después de discutir otra vez sobre las décimas, milésimas, 0,000....1, etc... convienen en que no se puede decir lo que le falta...., "¡Pero le falta!" Dejamos así el tema.

-Al final de la clase, una vez tocado el timbre, acabo estableciendo la correspondencia fracciones-decimales finitos y periódicos. No ha dado tiempo a explicitar y a discutir en más profundidad sobre las razones de dicha correspondencia, las cuales han sido trabajadas a lo largo de esta ficha 10.

.<u>Valoración:</u>

-Es muy difícil mantener el orden y la operatividad en gran grupo e ir desarrollando en ellos actitudes de autodisciplina, conciencia de grupo y respeto.

-Con respecto a la comprensión, creo que es natural que los alumnos digan que "la fórmula redondea", porque la regla de la conversión, aunque la razonen, tiene varios pasos que les cuesta trabajo seguir y enlazar para considerar globalmente, mientras que todo el mundo "ve" que 0,999.... no es 1":

.Aspectos especiales de la sesión:

Hoy se ha incorporado a clase una compañera, Carmen, licenciada en Matemáticas e interesada en la investigación en Didáctica, para observar el proceso de investigación. En principio será una observadora participante y ayudará a la profesora investigadora a monitorizar el trabajo en grupo de los alumnos y prestarles ayuda cuando lo necesiten; en la Puesta en Común actuará sólo como observadora.

-11 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Realizar actividad F12: Conmensurabilidad de parejas de segmentos y generalización a dos longitudes cualesquiera.

.Ejecución:

La realización de la actividad tiene lugar en dos sesiones, en lugar de la sesión y parte de otra previstas.

.Valoración:

El formato de presentación de la actividad, pensado en principio con una hoja para cada apartado, en la que los alumnos han de explicar el procedimiento de conmensuración que han aplicado cada vez, resulta demasiado complicado para ellos; no llegan a entender muy bien qué tienen que explicar, y tienen bastantes dificultades para hacerlo.

.Aspectos especiales de la sesión:

Ha habido un problema técnico: a partir del apartado c) incluido, los segmentos no estaban en las proporciones que estaban previstas, sino en otras que resultaban mucho más complicadas de conmensurar. Esto se ha debido a que la impresión por el ordenador es distinta si se hace a partir del programa de dibujo o del programa de textos; yo había hecho las pruebas con una fuente de impresión, y luego había imprimido las fichas definitivas en otro.

.Toma de decisiones:

He decidido cambiar el formato de la actividad por otro en el que la explicación del proceso de conmensuración se haga después de haber finalizado todos los ejercicios prácticos, imprimir las proporciones pretendidas en un principio, y comenzar de nuevo el próximo día.

-12 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Realizar de nuevo actividad F12

.Ejecución:

No ha habido alteraciones sobre el plan previsto.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos han asignado a las parejas de segmentos d) y e) varias fracciones posibles. Al pasarlas a notación decimal, hemos visto que todos los resultados eran muy próximos. Les he hablado de los errores personales en los procesos de medida.

Alguna aproximación de $\sqrt{2}$ era 10/7=1,4285..., otra 14/10...

-En general, han salido dos procedimientos de conmensuración: el de encajes sucesivos hasta encontrar la parte alícuota, y el de la división sucesiva de la unidad por tanteo hasta encontrar la parte alícuota.

-Una alumna apuntó la posibilidad de que la unidad a que hubieran llegado unos fuera más pequeña que a la que hubieran llegado otros. Cuando les dije entonces qué fracción tendrían los unos en lugar de los 8/5 de los otros, tardaron un poco y su compañera y ella contestaron 16/10; luego, otro alumno en su respuesta escrita a la pregunta 2 habla del m.c.d. de las dos longitudes.

-Otra alumna vino al final de la clase para que midiéramos juntas el segmento d), porque le costaba mucho trabajo llegar a una parte alícuota con diferencias sucesivas. A pesar de esto, opinaba firmemente que dos segmentos cualesquiera tendrán una parte alícuota.

.Valoración:

-No sé si los alumnos piensan que, prescindiendo de los errores debidos a las limitaciones físicas, habrá un único resultado posible para cada pareja de segmentos (el trabajar con segmentos concretos en el plano físico trae indisolublemente asociado la imposibilidad de precisión).

-Los alumnos no parecen estar preocupados en absoluto por la precisión, especialmente en el procedimiento de encontrar la parte alícuota por divisiones sucesivas.

-A los alumnos no les supone un conflicto la diversidad de resultados en un mismo ejercicio. Es importante también señalar que el hecho de que los fallos en las proporciones con respecto a las previstas inicialmente a causa del problema técnico, en lugar de haber supuesto el descontrol y la dificultad adicional que yo había temido, haya servido para constatar que los niños en una gran mayoría no dan importancia al hecho de que haya distintos resultados numéricos, y sigan pensando que dos segmentos cualesquiera son conmensurables. Una de las posibles explicaciones es que la tarea de conmensuración se toma como una actividad escolar en la que hay que acertar el resultado; fuera del contexto escolar, probablemente la actividad tendría otro carácter y la no coincidencia de resultados podría suponer un problema sobre el que tuvieran que plantear una discusión.

-16 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Puesta en Común de actividad F11 (Relación de orden en los decimales, valor posicional en el sistema de notación decimal).

Trabajo en grupos sobre la actividad F13 (Equivalencia de fracciones, orden densidad, a partir de material diseñado por Freudenthal).

.Ejecución:

No ha dado tiempo a finalizar la Puesta en Común de F11.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Cuando pido a los alumnos que expliciten los criterios por los cuales han dado sus respuestas, les resulta algo fastidioso e innecesario.

-En el primer ejercicio hemos visto que "2 décimas era lo mismo que 20 centésimas". Para facilitar la comprensión, lo hemos dibujado en la recta.

-En el siguiente ejercicio, los niños sabían en general cuál era el decimal más pequeño pero no sabían explicitar por qué. Han empezado a decir que podía verse pasando los decimales a fracción porque 1,000048 eran "millonésimas"; entonces he intentado hacer lo mismo con otros decimales de ese ejercicio. Uno de los puntos a tener en cuenta es que las fracciones eran impropias; para ser operativos, prescindimos de la parte entera y empezamos a observar la parte decimal: el primero tenía 2 centésimas y el elegído no tenía centésimas, ni milésimas, ni diezmilésimas, tenía 4 cienmilésimas. ¿Y cuántas cienmilésimas tenía 1,02? Hay quien decía ninguna y otros no sabían; hemos empezado por cuántas centésimas: 2, y así sucesivamente hasta ver que tenía 2000 cienmilésimas. También lo he dibujado en la pizarra, en el modelo de la recta.

He intentado proceder análogamente con 1,013, pero los alumnos ya habían perdido interés.

-En el siguiente ejercicio no ha habido problema para decir que el mayor era 0,2; el periodo no ha supuesto ningún obstáculo, cuando he planteado explícitamente la cuestión.

-El ejercicio 4 lo hemos hecho dibujando en la recta, para que resultara más claro. He marcado el 0 y 1 centésima, y hemos ido marcando los demás números. Al llegar a 0,00777... hemos tenido que marcar "milésimas", y entonces un alumno ha dicho que teníamos que dividir la centésima en 10 partes; me parece que los demás compañeros no lo han comprendido, pero no he querido entrar explícitamente en ello; lo que sí quedó claro es que las milésimas eran más pequeñas y que entonces el número estaba entre 0 y 1 centésima. En el caso de 0,011 algunos alumnos han argumentado que ya no estaba entre los extremos marcados porque eso eran 11 milésimas y el extremo 10 milésimas (otros alumnos no lo entendían y lo hemos vuelto a explicar, pero había bastante ruido).

-En el ejercicio 5 hemos utilizado el modelo de la recta también, pero sin darme cuenta me he equivocado y he estado haciendo las cosas en el intervalo [0,1]. Entonces un alumno se ha dado cuenta de mi fallo y me ha pedido que rectificara. Ha surgido la polémica de si el número más cercano a 1,003 era 1 ó 1,01; ya había bastante jaleo y el timbre estaba a punto de tocar, y entonces Jose Manuel ha dicho que 1 estaba más cerca de 1,003 porque éste distaba de 1,01 noventaisiete centésimas. No me ha dado tiempo a comprobarlo. Lo he pospuesto para el día siguiente, porque el tiempo de clase había finalizado.

-Al marcar las milésimas en el intervalo [0,1] ("arrugando" el segmento unidad para poder poner las primeras divisiones en milésimas y las últimas[1]), he preguntado qué número correspondería a la última marca antes de la unidad, y sólo un alumno ha contestado, con bastante esfuerzo, 999/1000.

.Valoración:

-A pesar de las reticencias iniciales, ha resultado muy interesante y útil el criterio que han explicitado los alumnos para comparar expresiones decimales, consistente en comparar cuantas décimas, centésimas, milésimas, etc... tenían cada uno de los decimales que habían de comparar.

-La representación en la recta de los decimales presenta más problemas de comprensión para los alumnos. Más allá de las décimas, no resulta inmediato captar que las centésimas corresponden a dividir cada décima en 10 partes y así sucesivamente, y asociar las representaciones numéricas correspondientes a las divisiones decimales sucesivas; tampoco resulta sencillo, por tanto, ayudarse de la representación en la recta para ordenar expresiones decimales.

.Aspectos especiales de la sesión:

-Carmen, la compañera que observa el proceso de investigación (ver sesión correspondiente a 9-11-93), ha hecho algunas consideraciones al concluir la clase: opina que para que con este sistema la clase fuera fluida tendría que haber la mitad de alumnos, echa en falta el trabajo con los números negativos, y en el esquema de trabajo en general echa de menos la parte Algebraica.

17 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de F11. Trabajar en grupos sobre F13.

.Ejecución:

Aproximadamente la mitad de los alumnos han faltado a clase porque hoy había huelga para protestar por las tasas de la universidad (!).

.Toma de decisiones:

Considero que el trabajo que estábamos haciendo con la Ficha 11 es importante y prefiero finalizar la Puesta en Común cuando estén todos, y dedicar la sesión a que los alumnos que han asistido trabajen en grupos sobre la actividad F13.

.Aspectos actitudinales:

Ha costado un poco hacer entrar a los alumnos en una dinámica de trabajo, pero una vez metidos se han implicado como nunca y se han pasado la clase desgranando hipótesis sobre regularidades y relaciones, probándolas, intentando explicarles unos alumnos a los otros, etc...

[1] Es decir, imaginamos que el segmento unidad es lo suficientemente grande para dividirlo en 1000 partes con comodidad, para poderlo representar en la pizarra imaginamos que lo arrugamos o plegamos a excepción del primer trozo y el último; esto nos permite marcar cómodamente las primeras milésimas y las últimas.

.Valoración:

Este incremento en el aprovechamiento puede venir propiciado, por una parte, por la considerable reducción del número de alumnos, que ha permitido un mayor apoyo y seguimiento por mi parte y por parte de la observadora (que participa en las tareas de monitorización de grupos); y, por otra parte, debido a que en esta ficha 13 se trabaja sobre un material diseñado por Freudenthal, que ha resultado bastante atractivo para los alumnos. Este ultimo punto me hace reflexionar sobre las fichas diseñadas por mí, que presentan normalmente varias cuestiones conceptuales para establecer las conexiones sobre conocimientos adquiridos en cursos anteriores y que, sin embargo, no resultan interesantes para los alumnos.

-18 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de F11 y finalizar actividad F13

.Ejecución:

No ha dado tiempo a realizar la actividad F13.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos han vuelto a estar muy inquietos y la Puesta en Común ha resultado bastante dificultosa. He tenido que echar de clase a un alumno.

-.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos han explicado y entendido el orden de los decimales en ej. 6 en términos de 113 milésimas, 130 milésimas y 100 milésimas (otros alumnos pretendían explicarlo comparando cifra a cifra, pero los compañeros no los entendían). Les he pedido que busquen una regla lo más fácil posible para comparar decimales cualesquiera; pretendía que comparando cifra a cifra a partir de la coma decimal establecieran que cuanto mayor es la cifra que se compara (en el primer lugar a la derecha de la coma, después en el segundo, y así sucesivamente), mayor es el número; sin embargo no he logrado que entendieran la consigna porque no sabía cómo hacerlo sin decirles la respuesta.

-En principio entre 0,1 y 0,11 han dicho los ejemplos "triviales": 0,101; 0,102...; 0,109, pero después les he forzado a sacar más, dibujando los números en la pizarra, dando nombre concreto a los puntos que se iban dibujando una vez que dividíamos en milésimas, por ejemplo; entonces ya han dado ejemplos como 0,100008, y en otras parejas también ejemplos no triviales.

-En cuanto a los números racionales siguientes a 0,1, a la mayoría de los alumnos no les ha costado trabajo remontarse al 0,10000....1, pero ya hemos vuelto al tema de que tal expresión es contradictoria, porque eso quiere decir infinitos ceros; entonces se ha deducido que no hay siguiente. Sin embargo, a juicio de algunos alumnos "que no se pueda decir el número siguiente, no quiere decir que no exista"; cuando he vuelto a preguntar parece que una mayoría de alumnos se decanta porque no existe, yo lo he reafirmado.

-Hemos visto también que el número Natural siguiente a 0,1 es 1. Hay algún alumno que dice que el número Racional siguiente a 0,1 es 0,12. Otros alumnos le intentan explicar su error, pero hay mucho ruido.
-Paso al caso de 366,555..., y ahí alguien dice que el número Racional que le sigue es 366,6 pero enseguida se le contesta que 366,566.... está entre ellos; también yo doy el ejemplo 366, 578.
-En cuanto a la representación en la recta, como ya casi no hay tiempo pregunto oralmente todos los casos salvo 0,333...
Con 0,333..., cuando hay que representarlo exactamente, una alumna expone su solución pero la clase no tiene interés.
.Valoración:
-Parece que los alumnos que tienen interés en seguir la clase no tienen ningún problema con el orden de los decimales ni con establecer la densidad de los mismos.
-La representación en la recta de los decimales no periódicos también parece estar clara, pero no creo que ocurra lo mismo con la representación exacta (no aproximada) de los decimales periódicos.

-19 Noviembre 93:
.Plan previsto:
Finalizar actividad F13
.Ejecución:
No hay alteraciones respecto al plan previsto.
.Aspectos actitudinales:
Hay protestas de algunos alumnos por el "bajo nivel", piensan que hacemos cosas irrelevantes y que perdemos el tiempo. Otros alumnos dicen que "a nadie" le gusta el sistema de Fichas de trabajo; estos últimos también protestan porque siempre se culpa a unos pocos (que son ellos) del mal comportamiento de la clase.
.Aspectos relacionados con la Comprensión:
-Con el diagrama de Freudenthal, hemos visto que los extremos de los segmentos eran 0 y la unidad y hemos superpuesto las líneas para ver que todas las fracciones equivalentes correspondían al mismo punto y la misma longitud. Además, tienen el mismo número decimal.
-Hemos aproximado entonces una primera definición de los Números Racionales a través de la correspondencia entre las distintas representaciones: de fracciones equivalentes, representación decimal (según los alumnos: periódicos puros, periódicos mixtos y exactos), longitud y punto de la recta.
Según se discutió en clase, las fracciones equivalentes y la representación decimal:

(A) Son distintos números con el mismo valor.

(P) Son distintas representaciones del mismo número.

(A) Eso, del mismo valor.

(P) Del mismo número, del mismo valor. Distintas representaciones del mismo número.

....

(A) Los Números Racionales son los números fraccionarios que tienen el mismo valor, el mismo decimal...

(P) ¿Y qué más?

(A) El mismo punto."

-Luego he preguntado el porqué de tener muchas fracciones equivalentes para un mismo número, han contestado que para hacer repartos entre otro número de personas y para sumar. También he preguntado el por qué de las distintas representaciones para un mismo número, y una alumna ha contestado que para trabajar en distintas situaciones. Aprovechando esto hemos visto la representación exacta en la recta de 0,333... a través de su representación fraccionaria.

-Entre dos fracciones con el mismo denominador y numeradores consecutivos, los alumnos en general ya saben que existen otros números racionales. Han propuesto tres estrategias para calcularlos:

.pasar las dos fracciones en cuestión a su expresión decimal,

.la estrategia ilustrada por el siguiente ejemplo: entre 2/7 y 3/7:
((2,5/7 =))25/70,

.buscar fracciones equivalentes a las dos fracciones en cuestión con mayor denominador.

Sin embargo, este punto se ha tratado de forma superficial debido a la premura de tiempo y a la falta de atención de una gran parte de los alumnos.

.Valoración:

Debido a los imprevistos surgidos en estas últimas sesiones, llevamos bastante retraso con respecto del plan previsto.

.Toma de decisiones:

La siguiente actividad prevista es la ficha F14, pero debido al retraso que llevamos con respecto a la planificación, he optado por dar a los alumnos la ficha F15 para que la realicen en casa, puesto que es un repaso y una síntesis estructurada de los contenidos tratados antes del Examen. Dedicaremos la próxima sesión a la Puesta en Común sobre la misma, con objeto de que los alumnos tengan tiempo para preguntar dudas antes del Examen, que será realizado después de la actividad F14.

-23 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Realizar actividad F15: Números Racionales: origen, definición intuitiva, notación-representaciones, orden, operaciones y propiedades de las operaciones, conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los números racionales.

.Ejecución:

Debido a problemas de control de clase, he olvidado cambiar la cinta en donde estaba grabada la Puesta en Común de F11 y he perdido esa grabación, debido a que se ha grabado encima la corrección de la actividad F15.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos tienen mucha dificultad en decir todos los conjuntos numéricos a que pertenecen distintos números. Aparecen los siguientes problemas: a los alumnos les cuesta trabajo asimilar que un entero sea también racional (explico por qué es racional, en función de sus representaciones), que los negativos puedan ser otra cosa que enteros, y que el cero (que es "el elemento neutro") pertenezca a algún conjunto:

"(P) El cero, ¿a qué conjunto pertenece?

(A) A ninguno.

(A) Es el neutro.

(P) ¿Qué quiere decir "elemento neutro"?

(A) Que si operas con él, el resultado siempre va a ser el mismo.

....

(P) (Explico que el cero es un elemento del conjunto, neutro para la suma)

....

(P) Entonces, ¿en qué conjunto está?

(A) No está en ninguno, es neutro. Va aparte.

(A) Es neutro, no está en uno ni en otro."

Un alumno explica:

"(A) El cero pertenece a todos los conjuntos: Los Naturales son el 0, el 1, el 2, el 3... Los Enteros, el cero es el punto que se toma como referencia positivos y negativos. Los Racionales, porque algunas divisiones dan cero."

-Por otra parte, para muchos alumnos los Números Racionales son los "Fraccionarios", y la definición a través de las distintas representaciones: fracciones, decimales, puntos de la recta sólo llegan a captarla los más adelantados. Al resto les cuesta bastante trabajo ampliar la noción que tienen de cursos anteriores, o incluso sus nociones más intuitivas:

"(A) 6/2 sería fraccionario, no racional.

(P) Pero, ¿qué diferencia hay?

(A) Qué "fraccional" es así,pero tiene que dar exacto y racional no.

(P) ¿Es lo mismo racional que fracción?

(A) Es lo mismo. Yo creo que es lo mismo."

.Valoración:

-Por lo que respecta a comprensión, es significativa la cuestión de la definición de los Números Racionales en función de sus representaciones y la persistencia de los alumnos en sus nociones primitivas. La dificultad de establecer las conexiones necesarias sobre el concepto de número racional, pone en alerta con respecto al avance sobre el concepto de número irracional y número real, que se supone ha de construirse a partir del concepto de racional.

.Toma de decisiones:

He propuesto a los alumnos una sesión después del Examen para tratar las cuestiones planteadas por algunos de ellos el día anterior, relativas al nivel de los contenidos, material de trabajo, etc.

-24 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Realización de F14 (Asignación de números a puntos de la recta, dada la unidad, en casos concretos; criterios de asignación; generalización a cualquier punto de la recta)

.Ejecución:

Los alumnos emplean toda la sesión intentando resolver los ejercicios y no da tiempo a empezar la Puesta en Común.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

A partir de la monitorización del trabajo en parejas sobre la actividad he detectado:

-Hay niños que en principio hacen encajes sucesivos y otros que empiezan poniendo decimales.

-En general, los alumnos tienen dificultad en que las divisiones encajen en un número "razonable" de pasos, y coincidan con los de los demás compañeros; esta coincidencia les preocupa mucho.

-Trabajando con un alumno, observo que no es consciente del criterio de medida con el que asigna los números a los puntos de la recta. Cuando en uno de los ejercicios ha dicho que "el punto eran 2/3 de 1 o, mejor, de la unidad", le he preguntado qué quería decir entonces el punto 2, y entonces se ha dado cuenta por primera vez de que eran "¡dos unidades!".

.Valoración:

La realización de esta actividad resulta bastante problemática para los alumnos. Me resulta extraño, por las similitudes que tiene con la actividad F12, relativa a la conmensuración de parejas de longitudes.

.Toma de decisiones:

-Observar en la Puesta en Común con qué criterio asignan los alumnos números decimales a puntos de la recta: si aproximan con una regla, si dividen en 10 partes.

-Llamar la atención en la Puesta en Común sobre el criterio de la medida de longitudes para la asignación de números a los puntos de la recta, a partir de la situación de trabajo con el alumno, mencionada anteriormente.

-Otra cuestión a tener en cuenta en la Puesta en Común, dadas las dificultades que están teniendo en el proceso práctico de la medida, es hablar de las limitaciones físicas, y llamar la atención sobre lo burdo de nuestros instrumentos de medida. Pasaríamos entonces a explorar las posibilidades que tiene para estos alumnos el transportarnos a una situación ideal en nuestra mente, en la que tuvieramos nuestra recta en la cabeza y pudiéramos hacer el proceso de asignar un número a un punto de la recta en la cabeza.

-25 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Concluir F14

.Ejecución:

Cuando he llegado a clase he encontrado que los alumnos tenían una actividad extraescolar.

.Valoración:

-El Examen estaba previsto para mañana, pero el retrasarlo para finalizar F14, supondría un retraso hasta la semana próxima, dado que pasado mañana tenemos clase a última hora, y no me parece una hora apropiada para un examen de Matemáticas.

-De realizar el examen antes de concluir la actividad F14, no sé si tiene sentido hacer la pregunta voluntaria sobre las intuiciones de los alumnos acerca de si los Números Racionales llenan la recta. Yo quería plantearla cuando hubiéramos trabajado la correspondencia a través de la medida, para tener una referencia que pudiera oponerse a la cuestión de la densidad, que puede suponer un foco de atención grande (en experiencias previas, los alumnos enfocaban su atención en este hecho para contestar tanto que los racionales llenaban la recta como que no la llenaban; Romero, 1993. Memoria de Tercer Ciclo).

-Comento con el Dr. Rico, el problema que plantea la actitud del curso, que es muy negativa y no permite avanzar conceptualmente sino con muchísimo trabajo por mi parte y resultados muy pobres en los alumnos. Creo que los conceptos que hemos de tratar en adelante (Fase de Acción 2, correspondiente a Números Irracionales y Reales) son bastante complejos y que no será posible avanzar, con unos rendimientos aceptables, con la dinámica actual del grupo.

El Dr. Rico sugiere, a instancias de lo que le digo y de mi reflexión sobre la conveniencia de haber empezado con un tema más gratificante para la dinámica que pretendo establecer, detener temporalmente la espiral principal de la investigación en la Fase 1, después de realizar el examen correspondiente a esta fase y aplazar el estudio de los números irracionales y los Números Reales. Para ello se propone pasar a trabajar sobre el tema de Combinatoria hasta las vacaciones de Navidad.

Yo veo en principio un inconveniente en la ruptura de ritmo y en que los alumnos puedan olvidar los puntos de anclaje que hayan podido conseguir hasta ahora. Luego pienso que eso puede subsanarse organizando algunas cuestiones clave para Navidad y retomándolas después en una Puesta en Común general, como introducción a la Fase de Acción 2, que retomaremos en caso de que hayamos logrado mejorar el problema de actitudes y comportamiento.

.Toma de decisiones:

-Opto por posponer la actividad F14 para después del Examen.

-A pesar de no tener la referencia de F14 para contestar la pregunta acerca de si los números racionales llenan la recta, decido proponerla en el examen, aprovechando la disposición favorable de los alumnos por tratarse de una ayuda a la nota, y para tener información sobre sus intuiciones más primitivas en relación con esta idea. Volveré a retomar la cuestión cuando establezcamos una ley de correspondencia números-puntos de la recta en F14.

-Dado el poco tiempo de que disponemos para el tema de Combinatoria, me parece mejor no insistir en la ficha F14 sino dejarla para retomar después de Navidad, junto con la pregunta voluntaria del Examen.

26 Noviembre 93:

.Plan previsto:

Examen correspondiente a la Fase de "Números Racionales".

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Valoración:

-Después de una primera lectura y reflexión sobre los resultados del examen, observo:

Las notas del examen son curiosas: una gran mayoría de notas muy deficientes y algunos sobresalientes y notables altos; sólo tres o cuatro suficientes. Esto parece indicar que hay una diferencia importante de nivel y capacidad entre los alumnos del grupo (lo cual parece coherente con los resultados obtenidos en el pretest). Este desnivel de rendimiento y capacidad de aprovechamiento por parte de los alumnos constituye también un factor importante para la dificultad en la coordinación general de la clase; incluso hay niños que han cuestionado el hecho de que a otros compañeros les cueste un trabajo tremendo intentar entender algo que "está claro" y no lo consigan, y que "no se puede mantener este ritmo".

Un factor que se suma al bajo rendimiento intelectual de bastantes alumnos es la falta de atención y constancia; sin embargo, también hay resultados positivos a este respecto, como el caso de algunas alumnas no muy brillantes pero preocupadas, que han conseguido aprobar el examen.

Por otro lado, algunos de los niños con buen rendimiento en el plano conceptual son bastante conflictivos en el comportamiento.

Todas estas circunstancias contribuyen a provocar en mí un estado de agotamiento debido a la continua tensión.

-Ante este estado de cosas, me planteo seriamente la pertinencia de continuar la investigación con un grupo de alumnos que presenta unas características tan especiales (principalmente de desnivel de conocimientos previos y de aspectos de disciplina y atención), y con los que no hemos conseguido establecer un equilibrio y una confluencia de intereses que permita un avance significativo en el terreno conceptual.

-Un profesor del centro, a cuyos alumnos había pasado la prueba del pretest, me ofrece la posibilidad de cambiar de grupo y comenzar de nuevo con la experiencia después de las vacaciones de Navidad. El Dr. Rico me advierte de los inconvenientes de rechazo a un nuevo profesor que pueden presentarse con el cambio de grupo.

.Toma de decisiones:

Finalmente, decidimos no rechazar la propuesta, pero posponer la decisión hasta ver cómo se desarrolla la nueva etapa correspondiente al tema de Combinatoria.

-16 Diciembre 93:

.Plan previsto:

Corrección del Examen correspondiente a los "Números Racionales".

.Ejecución:

He propuesto a Carmen, que hasta ahora sólo había participado en la monitorización del trabajo de los grupos que corrigiera el examen y ha aceptado.

.Valoración:

Ha sido una sesión muy interesante. Me he sentado en el lugar de los alumnos y he comprobado lo molesto que es el ruido y el ritmo tan lento que se genera entre las dificultades de comprensión de tantas personas y la distracción de todo el resto; es cansino.

Creo que con los alumnos de esta edad hay que procurar que trabajen en pequeños grupos resolviendo cosas durante más tiempo para que la dinámica sea más acorde con su momento, y también hay que prestar atención a este aspecto durante las Puestas en común y marcar un ritmo que los mantenga más ocupados.

IV. 2 Observación y Resultados

Una vez descrita la Implementación de la Fase de Acción 1, pasamos a la etapa correspondiente a Observación y Efectos de nuestra espiral de Investigación-Acción, descrita en el Capìtulo I. Tal como detallamos en el Capítulo III, dicha Observación está centrada en los Focos de Investigación, se concreta mediante las Cuestiones de Investigación, y su estudio se realiza mediante las Unidades de Análisis elaboradas para las dos aristas del triángulo didáctico Contenido-Alumnos-Profesora siguientes:

-Arista Alumnos-Contenido.

-Arista Profesora-Alumnos.

Los datos sobre los que se realiza la Observación de la arista Alumnos-Contenido proceden de las siguientes fuentes: *Documentos Escritos* que los alumnos han ido produciendo a lo largo de las sesiones descritas en la implementación, tanto en las Cuestiones de Investigación específicas como en las Complementarias y *Diario* de la Profesora-investigadora, al que se incorporan transcripciones de las *Grabaciones en Audio*.

Para realizar la Observación de la arista Profesora-Alumnos contamos con las siguientes fuentes de datos: *Grabaciones en Vídeo,* para considerar la interacción didáctica

que ha tenido lugar en el aula en las sesiones correspondientes a las Cuestiones de Investigación específicas y *Diario* de la Profesora-investigadora.
El momento de la investigación en que nos encontramos queda resumido mediante la siguiente tabla:

Tabla 4.2 Momento de la investigación.

Fase en estudio:	Nivel de los Números Racionales o Fase de Acción 1
Etapa de la Investigación:	Observación y Efectos
Focos de Investigación:	Notación numérica y Representación geométrica; se concretan mediante 2 Cuestiones específicas para el Primer Foco y 7 Cuestiones específicas para el Segundo (apartados III. 2. 2 y III. 3. 2)
Material sobre el que se plantean las Cuestiones de Investigación:	-Cuestiones de Investigación específicas: Pretest; ficha 12; Examen -Cuestiónes Complementarias de investigación: Fichas 1, 2, 8, 10, 11, 13 y 15.
Concrección final de las Cuestiones de Investigación en la Fase de Acción 1:	-Cuestiones de Investigación específicas: Pretest; ficha 12; Examen -Cuestiónes Complementarias de investigación: Fichas 1, 2, 8 y 10

La siguiente tabla indica los materiales utilizados como fuentes de recogida de datos sobre los que se va a realizar un estudio más detallado de los Focos de Investigación, que se han considerado en la Fase de Acción 1.

Tabla 4.3: Material considerado para analizar las Cuestiones de Investigación de la Fase de Acción 1.

PRETEST	Pruebas escritas de los alumnos
Actividad F1	Documentos escritos de los alumnos
Actividad F2	Documentos escritos de los alumnos
Actividad F8	Documentos escritos de los alumnos
Actividad F10	Documentos escritos de los alumnos
Actividad F12	Documentos escritos de los alumnos Grabación en vídeo
Examen (Preguntas 2, 4, 5 y Voluntaria)	Pruebas escritas de los alumnos

Nuestra observación se dirige a presentar detalladamente las producciones de los alumnos sobre las actividades mencionadas. En estas actividades se concretan algunos de los puntos conflictivos sobre representación numérica e interpretación geométrica de los números racionales, que tienen especial importancia para la posterior comprensión de los números irracionales. Una organización sistemática de las producciones de los alumnos nos permitirá realizar un análisis posterior de las mismas.

Llevaremos a cabo este estudio de las producciones de los alumnos relativas a las Cuestiones de Investigación (tanto específicas como complementarias) siguiendo el orden cronológico de realización de las tareas correspondientes. Para realizar el análisis utilizaremos las 9 Unidades de Análisis establecidas para la Comprensión del Contenido en el nivel de los Numeros Racionales (apartado III.6.3), en lo relativo a las tareas correspondientes al Pretest y a las Cuestiones de Investigación específicas (enmarcadas en negrita en la tabla anterior), y las Unidades de Análisis de Interacción Didáctica (apartado III.7.1). Por lo que respecta a las Cuestiones Complementarias de investigación (enmarcadas en doble línea en la tabla anterior), utilizaremos las observaciones y reflexiones realizadas por la Profesora investigadora durante el transcurso del proceso didáctico, a partir de la lectura de los documentos escritos de los alumnos.

Los cuatro apartados en que se organiza esta segunda parte del capítulo están dedicados, respectivamente a:

Observación y resultados del Pretest (IV.2.1).

Observación y resultados de las Cuestiones Complementarias (IV.2.2).

Observación y resultados de la Conmensurabilidad de longitudes (IV.2.3).

Observación y resultados del Examen (IV.2.4).

Los cuatro apartados, conjuntamente, organizan la etapa de Observación y Resultados en nuestra espiral de investigación en esta Fase de la investigación (Fase de Acción 1), centrada en los Números Racionales.

IV. 2. 1 Observación y resultados del Pretest

-Instrumento:

Este instrumento aparece en el Anexo III.5.

-Características del Instrumento e implementación:

El pretest consta de 11 items relacionados con los Números Racionales, que ha sido propuesto a los alumnos al comienzo del trabajo de campo.

-Objetivos:

Con esta prueba pretendemos explorar los conocimientos adquiridos en EGB sobre Números Racionales por los alumnos del grupo con el que vamos a trabajar, en relación a los Focos de Investigación 1 y 2 de este estudio. Con ello nos proponemos delimitar ciertos aspectos de los conocimientos que estos alumnos poseen, a partir de los cuales empezar nuestro trabajo. Todos los items se refieren a Números Racionales.

-Unidades de análisis:

Las Unidades de análisis para la Comprensión del Contenido correspondientes a este nivel de contenidos, que utilizaremos para esta prueba, se presentaron en los apartados III.6.1 y III.6.2.

-Valoración de los items:

La valoración de los items del Pretest se hace mediante una escala específica de valoración para cada uno de los items, que concreta, en cada caso, las unidades de análisis. Las escalas consideradas constan de seis valores distintos, cada uno de ellos determinado por un tipo de respuesta. Las escalas elaboradas se presentan junto con los enunciados de cada item y se continúan con la clasificación correspondiente de las respuestas de los alumnos, que aparecen en el siguiente apartado.

IV. 2. 1. 1 Resultados del Pretest

Los resultados generales del Pretest aparecen recogidos en la tabla 1 del Anexo IV.1. A continuación, pasamos a presentar el enunciado de cada item, las escalas de valoración correspondientes junto con las frecuencias obtenidas por el total de los alumnos en cada uno de los valores asignados por las escalas; se concluye con una reflexión general sobre los conocimientos de los alumnos en cada caso:

Item 1.

Enunciado: Calcula la expresión decimal del número 1/6.

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Distingue entre notación finita e infinita recurrente como resultado de la operación de dividir[2] .
2. No hace la distinción anterior, y da un resultado finito. Divide bien.
3. No hace la distinción anterior, y da un resultado finito. Se queda en 0,1 (puede que no sepa avanzar más en la operación).
4. No hace la distinción anterior, y da un resultado finito. Divide mal.
5. No sabe qué es expresión decimal o no entiende bien la pregunta.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.4: frecuencias del item 1 en los valores de la escala propuesta[3] .

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
7+1*	3	3	8	1+(2)	6+(1)

Resultados globales: El 25% de los alumnos distingue entre notación decimal finita e infinita recurrente como resultado de la operación de dividir. Llama la atención el porcentaje de

2 Si falla en el algoritmo de la división se señalará con un *, para Observaciones.

3 En esta tabla, así como en las que vienen a continuación, la fila de valores en negrita corresponde al valor de la escala y la fila de abajo a las frecuencias de respuestas para cada valos considerado.

alumnos que aplican mal el algoritmo de la división y dan un resultado finito (25%), o que no entienden bien la pregunta o no contestan (31%).

Item 2a.

Enunciado: ¿Cuál es el número decimal con más cifras que conoces?

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Números periódicos e irracionales.
2. Sólo irracionales
3. Números periódicos.
4. No conoce ningún número con infinitas cifras.
5. Otras.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.5: Frecuencias del item 2a en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
0	2	9+2	1	6+2	10

Resultados globales: Son bastantes los alumnos que no contestan verbalmente a la pregunta, sino que dan algún o algunos ejemplos. El 34% de los alumnos contestan con los decimales periódicos; un 6% contestan con irracionales como π o $\sqrt{2}$; un alumno (3%) dice no conocer decimales infinitos no periódicos. Un 31% de los alumnos no contesta la pregunta.

Item 2b

Enunciado: ¿Conoces algún número con infinitas cifras?[4]

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Decimal.
2. No especifica.
3. Entero.
4. No conoce.
5. Otras.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

[4] Cuando el alumno no especifica verbalmente que los números con infinitas cifras sean decimales pero los ejemplos que da son todos decimales, se incluyen en la categoría 1. Sli lo explicitan verbalmente se le añade un *.

Tabla 4.6: Frecuencias del item 2b en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
11+(1)	1	1	1	6	11

Resultados globales: El 37% de los alumnos afirma conocer números infinitos: los decimales. Un alumno (3%) dice conocer números enteros con infinitas cifras. El resto de los alumnos de ambos cursos no conoce números con infinitas cifras, o no contesta a la pregunta o dan respuestas más confusas (56%). Se detecta confusión entre los conceptos infinitas cifras-infinitos números-infinito-indefinido, etc.

Item 2c

Enunciado: ¿Por qué motivo aparece?

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Proceso irracional.
2. Fracción.
3. División.
4. "Del periodo".
5. Otras.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.7: Frecuencias del item 2c en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
0	0	3	5	5	19

Resultados globales: La proporción de alumnos que atribuye a los decimales infinitos la procedencia de una división es del 9%. Llama la atención que varios alumnos (16%) afirmen que las infinitas cifras vienen "del periodo", lo cual puede denotar cierta ambigüedad en la pregunta. El resto de los alumnos (75%) dan respuestas más difusas o no contestan.

Item 3

Enunciado: ¿Es cierto que todo decimal se puede expresar en forma de fracción? ¿Sólo algunos? ¿Ninguno? Justifica la respuesta.

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Algunos: los finitos y periódicos. Los infinitos no periódicos no tienen representación en fracción.
2. Todos. Argumentando que los periódicos pueden expresarse en fracción mediante un procedimiento (puede referirse o no al caso de los finitos).

3. Todos. Argumentos falaces.

   a) Dando a entender que considera todos los decimales como finitos (en términos numéricos).

   b) Dando a entender que los decimales son lo mismo que las fracciones porque expresan partes o fraccionamientos de la unidad (o similares).

   c) "p implica q, entonces q implica p".

   d) Los números decimales son fracciones expresadas en forma decimal / Los decimales son el resultados de una división

4. Todos o algunos. Sin argumentar.
5. Todos o Algunos. Argumentos erróneos / Ninguno.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.8: Frecuencias del item 3 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
0	2+1	1a / 1b 3c / 2d	12+(2)	2	6

Resultados globales: La proporción de respuestas correctas y argumentadas es bastante escasa: 6%. Varios niños piensan que todos los decimales pueden expresarse en forma de fracción, pero se basan en argumentos falaces (22%); por otra parte, bastantes alumnos se limitan a dar su opinión simplemente, sin ningún tipo de argumento (44%).
Una observación importante es que hay alumnos que dicen que todos los decimales se pueden expresar en forma de fracción excepto los números enteros o el cero. También es interesante notar que hay un alumno que afirma que ningún decimal se puede expresar en forma de fracción porque "No se le puede quitar el valor de ese número para expresarlo en fracción".

Item 4

Enunciado: Representa en la recta numérica los siguientes números:

0,25 1/4 -3/2 2/8 -6/4 0,3333... -0,75 2,164 0,250 -1,36
-12/6 0,3

Nota.- Si en algunos casos te resulta engorroso dibujarlo o es prácticamente imposible, explica cómo lo harías.

Escala: ; valores asignados y tipos de respuesta[5] :

5 A partir del valor 2 todos los demás se consideran con la salvedad de 0,3333... (ningún alumno ha representado este número correctamente).
-No ha habido ningún alumno que represente los decimales explicitando un procedimiento correcto de división en las partes correspondientes o diciendo cómo lo harían en los casos no factibles, por tanto, esta salvedad se tendrá en cuenta para todos y se dará por buen la respuesta siempre que se aproxime plausiblemente.

1. Bien.
2. Bien salvo 0,333...
3. Fallo en
   a) Decimales
   b) fracciones equivalentes
   c) fracciones impropias
   d) distintas representaciones de un mismo racional.
4. Falla en más de uno de los apartados anteriores.
5. Entiende la representación en la recta como una ordenación de números de menor a mayor en el sentido derecha-izquierda, pero no manifiestan ninguna noción de correspondencia número-punto de la recta .[6]
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.9: Frecuencias del item 4 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
0	1+(1)	1a, 1ac, 1c	10+(1)	1+2*	10+(3)

Resultados globales: La proporción de respuestas correctas o correctas salvo el caso del decimal periódico es muy escasa: 6%. Algunos alumnos tienen fallos correspondientes a un tipo de representación determinado, pero una gran parte no manifiesta noción de correspondencia entre los números y los puntos de la recta, aparte de la de ordenación de menor a mayor- izquierda a derecha o tienen varios errores en dicha correspondencia (44%). Bastantes alumnos de ambos grupos no contestan a esta pregunta (41%).

Por lo que respecta a las observaciones, hay alumnos que representan los distintos números en distintas rectas y otros que pasan todos los números a su representación fraccionaria o, al contrario, pasa todos los números a su representación decimal.

Item 5

Enunciado: Indica cuáles de las siguientes parejas de fracciones son equivalentes:

2/3 y 3/4 2/5 y 5/2 8/6 y 12/9 4/1 y 12/3 7/3 y 9/5

Justifica en cada caso que lo son.

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Bien. Argumenta que tienen el mismo valor, o halla expresión decimal.
2. Bien. Productos cruzados, otros procedimientos o procedimiento sin especificar.

6 Si ordena mal se señalará con *. Ver observación a este item en el curso 1ºG.

3. Sólo reconoce 4/1 y 12/3.
4. Mal. Se equivocan al operar utilizando bien un procedimiento.
5. Mal. Carecen de procedimiento, aplican mal el que conocen o no lo explicitan.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.10: Frecuencias del item 5 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
2	11	6	0	13	0

Resultados globales: La mayor proporción de respuestas de los alumnos se situa en la categoría que corresponde a averiguar qué parejas de fracciones son equivalentes mediante el empleo de una técnica en la que no se tienen en cuenta los valores de ambos números: 34% de los alumnos. La proporción de alumnos que asignan a las fracciones equivalentes un mismo valor numérico es escasa (6%). El resto de los alumnos (60%) han dado en su gran mayoría respuestas incorrectas. Este item ha sido contestado por la totalidad de los alumnos.

Item 6

Enunciado: ¿Qué diferencias hay entre número racional y fracción?

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. El número racional es un conjunto de fracciones equivalentes entre sí.
2. Son lo mismo.
3. Argumentos del tipo: fracción es una división, o un quebrado de dos números, y número racional es un decimal.
4. Argumentos del tipo: fracción es una división, o un quebrado de dos números, y no dice lo que es un número racional o dice algo incorrecto.
5. Distinciones incorrectas.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.11: Frecuencias del item 6 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
2+(1)	6+(1)	(1)	1+(5)	3	12

Resultados globales: Un 37% de los alumnos no contesta a la pregunta. De los alumnos que contestan, sólo un número bastante escaso en ambos grupos define correctamente el número racional como un conjunto de fracciones equivalentes entre sí, relacionando correctamente los dos conceptos en cuestión (9%); el resto, o bien los asimila o bien hacen distinciones incorrectas.

Es interesante observar que hay dos alumnos (6%) que identifican los números racionales con los positivos y negativos.

Item 7

Enunciado: Señala algún criterio para distinguir un número racional de uno irracional.

Escala: [7]

1. Distinciones correctas y significativas.
2. Distinciones no incorrectas, pero no significativas.
3. Distinciones incorrectas.
6. No sabe, no contesta

Resultados:

Tabla 4.12: Frecuencias del item 7 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	6
0	1+(1)	6	24

Resultados globales: La gran mayoría de los alumnos dejan esta pregunta sin contestar (75%), y aquellos que aventuran alguna distinción entre números racionales e irracionales dan respuestas incorrectas o señalan algún rasgo no incorrecto pero irrelevante al respecto.

En cuanto a las observaciones, resulta curioso el que varios alumnos asimilen la distinción racional-irracional a la distinción positivos-negativos. Un alumno piensa que lo irracionales son aquellos números a los que no se les puede hacer la raiz cuadrada, como $\sqrt{-3}$, mientras que a $\sqrt{3}$ lo clasifica como racional.

Item 8

Enunciado: Ordena de menor a mayor:

0,2 0,13 0,013 0,131 0,130 0,31

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Bien
2. Fallo en 0,13 y 0,130 o no explicita la igualdad.

[7] En este item, junto con el 9 y el 11, la escala sólo presenta un rango de cuatro valores, ya que debido al carácter de las preguntas nos es imposible hacer una gradación más fina. El cuarto valor de la escala se numera con 6 porque es el código correspondiente en todos los items a la respuesta "No sabe - no contesta".

3. Ordena por grupos según número de cifras decimales, y ordena bien inter e intra grupos[8] .
4. Igual que la categoría anterior, pero consideran 0,013 el menor[9] .
5. Desordenados, sin las especificidades anteriores.
6. No sabe, no contesta.

Resultados:

Tabla 4.13: Frecuencias del item 8 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
3	5	3	8+1*	10+(1)	1

Resultados globales: La proporción de alumnos que ordenan bien los números presentados es de un 25%; la proporción de alumnos que ordenan mal los números, pero lo hacen siguiendo unos ciertos criterios lógicos es del 37%. En total, la proporción de alumnos que ordena mal los números, sin atender aparentemente a ningún tipo de criterio lógico es de otro 37%.

Item 9

-Enunciado: Calcula el resultado de la siguiente operación:

0,3 + 0,005 + 0,23 + 0,79

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Bien.
2. Mal. Descuido en operación.
3. Mal. Otros motivos. (O no se sabe el motivo)
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.14: Frecuencias del item 9 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	6
27	2	1+(1)	1

Resultados globales: La gran mayoría de los alumnos contestan bien esta pregunta.

Item 10

[8] Algunos alumnos ordena de menor a mayor número de cifras (o viceversa) y dentro de cada grupo de menor a mayor número después de la coma decimal (puede que piensen que si está dividido en centésimas es menor que si está dividido en décimas). Ambos casos se incluyen dentro de esta categoría).
Otra posibilidad es ordenar de mayor a menor número de cifras (o viceversa) y dentro de cada grupo de menor a mayor número después de la coma (o viceversa); en este caso se considerará dentro de esta categoría pero se señalará con *.

[9] Los que vengan de 3* se codificarán como 4*.

Enunciado: ¿Cuántos números diferentes hay entre 0,41 y 0,42?

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Infinitos / Muchísimos, miles de millones y similares.
2. Nueve. Diez.
3. Uno.
4. Ninguno.
5. Otras.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

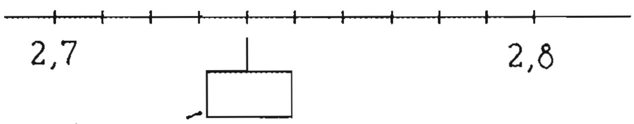
Tabla 4.15: Frecuencias del item 10 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	4	5	6
7	10	0	5	2	8

Resultados globales: Una buena parte de los alumnos (31%) se inclina a creer que entre 0,41 y 0,42 hay nueve o diez números; el 22% da una respuesta correcta. El resto de las respuestas se distribuye entre las otras opciones.

Item 11

Enunciado:



¿Qué número es éste?

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. 2,74.
2. 2,75 ó 2,73.
3. Mal.
6. No sabe - no contesta.

Resultados:

Tabla 4.16: Frecuencias del item 11 en los valores de la escala propuesta.

1	2	3	6
21	0	4	7

Resultados globales: La proporción de alumnos que contesta correctamente a este item es de un 66%, y el resto de respuestas son incorrectas o nulas.

IV. 2. 1. 2 Reflexión general sobre los resultados del Pretest

En vista de los resultados obtenidos con las escalas de valoración aplicadas, registraremos item a item los puntos que nos parece interesante tener en cuenta para trabajar con los alumnos en torno a nuestros dos focos de investigación[10] en el nivel de los números racionales. De la observación de los datos anteriores destacamos los siguientes puntos:

1º. La distinción entre notación decimal finita e infinita como resultado de la operación de dividir parece resultar significativa, en principio, al 25% del total de alumnos.

2º. A la pregunta de si conocen decimales con infinitas cifras los alumnos no contestan con categorías nominales (como "los decimales periódicos"), sino a través de ejemplos. Algo menos de la mitad de ellos dan como ejemplo de decimales infinitos los decimales periódicos. Sólo 2 alumnos ponen ejemplos de expresiones decimales de números irracionales. Sin embargo, una buena parte de los alumnos no tienen clara la distinción entre los decimales infinitos y los números con infinitas cifras y se registra confusión entre conceptos como infinitos números- infinitas cifras- infinito-indefinido. Un alumno propone un número entero como ejemplo de número con infinitas cifras. Tampoco parece estar clara la cuestión de la procedencia de los decimales infinitos; aunque algunos alumnos la atribuyen a las fracciones o a las divisiones, la mayoría no dan respuestas claras o. incluso, afirman que las infinitas cifras vienen "del periodo", lo cual da idea de que la pregunta puede resultar confusa o ambigua.

3º. Los alumnos parecen tener tendencia a pensar que todos los decimales vienen de, o se corresponden con, una fracción; sin embargo, carecen de argumentos para explicar su opinión. Una observación interesante es que, algunos niños, señalan como excepción los números enteros y el cero. Otro caso que llama la atención es el de un alumno que identifica la representación del número con su "valor" y, por tanto, atribuye a la representaciones fraccionaria y decimal de un número distintos valores, con lo que le resulta imposible identificarlas.

4º. Es muy importante notar que *la gran mayoría de los alumnos tiene un nivel muy deficiente a la hora de representar números racionales en la recta numérica.* Este será un punto en el que habrá que insistir, dado que uno de nuestros dos focos de investigación principales es, precisamente, la correspondencia entre los números reales y los puntos de la recta.

---

[10] Se ha hecho una comparación entre los resultados de los alumnos de nuestra clase y los de otro grupo de 1º de BUP por los motivos expuestos al comienzo. Los resultados de dicha comparación no permiten detectar diferencias significativas, ni apuntan a características especiales por lo que se refiere al nivel de conocimientos previos de nuestro grupo de alumnos. El análisis comparado de los resultados puede verse en el Anexo IV.1.

5º. Algo menos de la mitad de los alumnos son capaces de averiguar qué parejas de fracciones son equivalentes mediante la técnica de productos cruzados aprendida durante la EGB; sin embargo, sólo 2 alumnos comprueban que las fracciones equivalentes tienen el mismo valor. Más de la mitad de los alumnos sólo es capaz de identificar fracciones equivalentes triviales, como máximo.

6º. Sólo tres alumnos parecen tener clara la relación entre los conceptos de fracción y número racional y expresan que número racional es el conjunto de todas las fracciónes equivalentes entre sí. El resto no tiene clara la diferencia y varios alumnos tienden a identificar ambos conceptos.

7º. Ningún alumno conoce alguna característica que permita distinguir un número racional de un irracional. La gran mayoría no contestan a la pregunta y es curioso que haya alumnos que identifquen la diferencia racional-irracional con positivo-negativo. Hay una alumna que considera irracionales los números imaginarios, como $\sqrt{-3}$.

8º. Sólo 1/3 de los alumnos ordena bien la serie de decimales propuesta o bien la ordena con algún criterio aparentemente lógico. No obstante, resulta curioso que varios alumnos, prescindiendo del criterio de ordenación empleado en los demás números de la serie, señalen el decimal 0,013 (el único que aparece con la cifra 0 inmediatamente a la derecha de la coma decimal) como el menor.

9º. No hay problemas con esta pregunta.

10º. Las respuestas a esta cuestión están bastante dispersas. Algo menos de 1/4 de los alumnos contestan correctamente, alrededor de 1/3 piensan que hay nueve o diez números entre ambos decimales y el resto no contesta o piensa que no hay ninguno.

11º. Llama la atención que en una pregunta tan sencilla aparentemente para este nivel, aproximadamente 1/3 del total de alumnos no conteste (a pesar de ser la última pregunta no hubo límite de tiempo), o dé resultados extraños.

IV. 2. 2 Observación y resultados de las Cuestiones Complementarias de Investigación

Pasamos a estudiar las ideas detectadas en los alumnos sobre sistemas de representación numéricos de Números Racionales y su conexión con la medida, obtenidas mediante las Cuestiones Complementarias de Investigación, que aparecen en el Anexo III.3.

La información que presentamos proviene de las observaciones que realizó la profesora-investigadora a raiz de la lectura de los trabajos escritos de los alumnos correspondientes a las Cuestiones Complementarias de investigación, durante el transcurso del proceso didáctico. Estos trabajos escritos fueron recogidos después de haber realizado el trabajo en pequeño grupo y la correspondiente Puesta en Común.

La organización de la información, que corresponde a las actividades indicadas en la tabla 4.3, se articulará ,en cada caso, mediante los apartados:

Objetivo de la actividad;

Ideas detectadas: puntos que se dominan, errores, incoherencias, conexiones interesantes, y otros;

Características del trabajo realizado;

Valoración e interpretación.

IV. 2. 2. 1 Actividad F1 (preguntas 3 y 4):

-Objetivo de la actividad:

-Poner de manifiesto la existencia de números decimales positivos menores que cualquier número dado ("números tan pequeños como queramos"). Uso del sistema decimal de numeración para construir un número menor que otro dado. Carácter potencialmente indefinido del proceso: infinito potencial.

-Destacar la existencia de números con infinitas cifras decimales. Uso del sistema decimal de numeración para simbolizar tales números.

-Ideas detectadas (puntos que se dominan, errores, incoherencias, conexiones interesantes, etc):

-De la pregunta 3 obtenemos la siguiente información:

.Puntos que se dominan:

La gran mayoría de los alumnos afirma que no existe el número más pequeño; algunos argumentan que para cualquier número dado, siempre se puede poner un número más pequeño.

.Ideas erróneas:

Algunos alumnos se refieren a ∞. Otros dan respuestas como 0,999..., -0,999... y similares.

-A partir de la pregunta 4 obtenemos la información siguiente:

.Puntos que se dominan:

Los alumnos suelen dar ejemplos de decimales periódicos, que se obtienen a partir de divisiones inexactas. Algún alumno hace mención del número π. Otros alumnos escriben expresiones decimales con cifras arbitrarias; un alumno dice que surgen "de la imaginación de los matemáticos".

.Puntos que no se dominan:

Para varios alumnos, no está clara la diferencia entre "que haya infinitos números" y "que un número tenga infinitas cifras".

.Ideas erróneas:

Hay bastantes alumnos que se refieren al número "infinito", a un número infinito, a infinito. Algunos de ellos dicen que "el infinito es un número con infinitas cifras".

-Características del trabajo realizado:

-En las respuestas escritas de los alumnos a las cuestiones formuladas se observa, en general, bastante imprecisión; por ej. a la pregunta de si existe el número más grande o más pequeño hay alumnos que contestan que "son infinitos". También se observa falta de profundidad en la reflexión y en los argumentos dados, e incluso falta de motivación para concluir argumentos que empezaron a formular a partir de las discusiones mantenidas en la Puesta en Común. Por otra parte, se aprecia la persistencia en las ideas erróneas señaladas en el apartado anterior a pesar de que fueron discutidas en la Puesta en Común.

-Valoración / Interpretación:

La persistencia en las ideas erróneas señaladas en apartados precedentes por parte de los alumnos, aún después de haberlas discutido y corregido explícitamente en la Puesta en Común, ponen de manifiesto un dominio deficiente del Sistema Decimal de notación en lo que se refiere al uso del infinito. La idea de Infinito es algo que queda para ellos en el terreno de lo indefinido y no parecen poner ningún cuidado en su definición ni en su delimitación.

Sin embargo, buena parte de los alumnos manifiesta haber comprendido que no existe el número más pequeño, especialmente los que justifican tal afirmacion con el argumento que para cualquier número dado siempre se puede encontrar otro más pequeño. Esto parece indicar que la idea de infinito potencial presenta algunas facetas asumibles, en principio, para alumnos de este nivel.

IV. 2. 2. 2. Actividad F2 (pregunta 1):

-Objetivo de la actividad:

-Poner de manifiesto la existencia de números positivos mayores que cualquier número dado ("tan grandes como queramos"). Uso del sistema de notación decimal para construir un número mayor que otro. Carácter potencialmente indefinido del proceso: infinito potencial.

-Destacar la no existencia de números enteros con infinitas cifras. Limitaciones del sistema decimal.

-Ideas detectadas (puntos que se dominan, errores, incoherencias, conexiones interesantes, etc.):

.Puntos que se dominan:

La mayoría de los alumnos afirman que no existe el número más grande. Algunos explican que siempre se puede poner un número más grande.

.Ideas erróneas:

Algunos alumnos siguen considerando como el número más grande a expresiones como 9999..., 888..., 666...

-Características del trabajo realizado:

En el trabajo realizado por los alumnos se observan las mismas características que en la actividad anterior.

-Valoración / Interpretación:

De nuevo, algunos alumnos persisten en sus intuiciones erróneas relativas a que el número más grande existe y puede formarse poniendo infinitas cifras enteras, a pesar de haberse corregido en clase.

Vuelve a ponerse de manifiesto que bastantes alumnos tienen una noción correcta del infinito potencial, en especial los que afirman que no puede existir el número más grande porque para cualquiera dado, siempre podemos poner otro mayor.

IV. 2. 2. 3. Actividad F8:

-Objetivo de la actividad:

-Ampliar la noción de medida, restringida habitualmente a la medida en el sistema decimal, para preparar el terreno a la conmensuración de longitudes.

-Observar que la medida de una superficie depende de la unidad de medida elegida. Sin embargo, el número racional que expresa la proporción entre dos cantidades de superficie es invariable, sea cual sea la unidad elegida para conmensurarlas.

-Descubrir la correspondencia entre el modelo gráfico y la expresión numérica y utilizarla para deducir propiedades, como el mantenimiento del orden y la proporción, cualquiera que sea la unidad de medida.

-Ideas detectadas (puntos que se dominan, errores, incoherencias, conexiones interesantes, etc...):

.Puntos que no se dominan:

Los alumnos siguen sin explicitar la unidad con la que miden.

Ningún alumno ha advertido que las fraciones que resultan al expresar la relación entre las parejas de superficies cuando varía la unidad de medida, son equivalentes (lo cual implicaría que se mantiene la proporción).

.Puntos que se dominan:

Algunos alumnos que han hecho los dos últimos ejercicios se han dado cuenta de que, al ser la nueva unidad 4 veces más pequeña, el resultado es 4 veces más grande.

.Ideas erróneas:

Algunos alumnos contestan la última pregunta en términos de diferencias, es decir, "las figuras se diferencian en tantas unidades; se llevan más o menos según elijamos la unidad de medida...". También esto pasa cuando tienen que comparar F y G; parece que aquí esta interpretación es menos frecuente porque tienen que expresar la comparación por medio de un número; pero podrían pensar, análogamente, que la relación entre G y F es 1, puesto que G = 5A y F = 6A, así que se diferencian en una unidad.

-Características del trabajo realizado:

-La insistencia en que la unidad con la que se mide debe ser siempre explicitada, ya que si no, no sabemos qué significa el número que se da como medida, no resulta significativa para los alumnos, que siguen expresando medidas simplemente asignando un número.

-La pregunta sobre qué varía y qué se mantiene en las series de medidas de las superficies dadas cuando varía la unidad, resulta confusa para la casi totalidad de los alumnos. Esta pregunta estaba formulada para alcanzar el segundo objetivo, pero parece que no es comprendida por los alumnos en los términos en los que se plantea.

-Los alumnos suelen expresar la relación numérica entre dos figuras a través de una unidad en la forma "F y G = 5 y 6". Después de la Puesta en común, nadie registra la forma "F/G = 5/6", y varios registran "F = 5/6G".

-Valoración / Interpretación:

-Los alumnos no parecen encontrar significativa esta actividad en torno a la medida. Una de las razones para ello puede ser el hecho de que las figuras aparecían ya medidas, es decir, subdivididas según una unidad de medida, y se privaba así a los alumnos de una parte manipulativa, dedicada a la medición de las superficies, que quizás hubiera dotado de sentido a la necesidad de explicitar la unidad.

-Por otra parte, la cuestión relativa a las proporciones entre las figuras y a su mantenimiento, sea cual sea la unidad de medida, pasa también desapercibida para los alumnos. Un hecho curioso, es que establezcan la comparación entre las figuras en términos de diferencias, es decir, mediante comparaciones aditivas indicando cuántas unidades tiene una más que otra o cuántas unidades tienen una y otra, y no mediante comparaciones multiplicativas o relaciones de proporcionalidad. El hecho de que esto haya sido más frecuente en la última pregunta puede deberse a que no fue corregida en la Puesta en Común.

IV. 2. 2. 4. Actividad F10:

-Objetivos de la actividad:

-Recordar reglas para establecer la correspondencia fracción-decimal periódico y razonar el procedimiento por el que se establece la conversión de la expresión decimal en fracción.

-Justificar, sobre esa base, la correspondencia fracciones (equivalentes)-decimales periódicos.

-Tomar contacto con distintas expresiones decimales infinitas y explicitar las concepciones en torno a las peculiaridades de cada una de ellas; reconocer la ayuda de las regularidades para el control de las expresiones decimales. Poner atención al caso particular de los nueves periódicos y a las notaciones decimales infinitas no periódicas.

-Ideas detectadas (puntos que se dominan, errores, incoherencias, conexiones interesantes, etc.):

.Ideas de los alumos sobre el nueve periódico:

Un alumno dice que 7,999...= 8 porque "no le falta nada", y otro por la conversión a través de la regla. También hay otro alumno que apunta que "es el número más próximo".

Dos alumnos afirman que 0,89999.... no existe en fracción.

En general, los alumnos no establecen conexión entre la conversión decimal periódico-fracción y el primer ejercicio, relativo a 7,9999...= 8, (a pesar de que se llamó la atención en la Puesta en Común). El ejercicio 2, sobre la regularidad en las expresiones decimales de 1/9, 2/9, 3/9, ..., 8/9, 9/9, que lleva por extensión a establecer que 9/9 = 0,9999..., tampoco resulta significativo para los alumnos.

.Ideas erróneas:

Hay bastantes alumnos que piensan que 0,123456789101112...= 0,123456789101112/1000000000000000; algunos olvidan los puntos suspensivos y otros los ponen también en la fracción.

.Intuiciones de los alumnos:

Hay alumnos que afirman que 0,123456789101112... no tiene fracción que le corresponda.

-Características del trabajo realizado:

-Los ejercicios se hacen como compartimentos estancos y no se tienen en cuenta resultados establecidos en apartados anteriores para establecer conexiones entre nuevos resultados y los que aparecen en ejercicios precedentes.

-Por lo que respecta al último de los objetivos pretendidos con esta actividad, ningún alumno toma interés en el último ejercicio (relativo a regularidades de expresiones decimales y control de las mismas), ni utiliza los resultados anteriores para establecer las conexiones necesarias.

Tampoco en lo que respecta a la cuestión de los nueves periódicos; en este sentido, hay alumnos que dicen que 0,89999...no tiene una fracción que le corresponda, aunque luego no mantienen la coherencia y en la siguiente pregunta dicen que todo decimal puede ponerse en forma de fracción.

-Valoración/Interpretación:

-Parece que los alumnos contestan a las preguntas sobre la base de destrezas y reglas aprendidas, sin asumir aspectos conflictivos ni profundizar en su reflexión.

-Los alumnos intentan reproducir el argumento mediante el cual a cualquier fracción le corresponde un decimal finito o periódico sin entenderlo realmente; casi nadie hila un razonamiento con todas las premisas necesarias. Creo que la "Correspondencia fracciones-decimales finitos y periódicos" no se ha establecido de forma consistente, o por lo menos, con un nivel de consistencia aceptable. Hay que insistir y profundizar en ella.

-En cuanto a los distintos tipos de expresiones decimales infinitas, sus paradojas, peculiaridades y el control de las mismas, no resultan de interés para los alumnos, que no se implican en una actividad indagadora y sólo llegan a establecer resultados inconexos, que no resultan significativos.

-Por lo que respecta a los nueves periódicos los alumnos, en general, permanecen en su intuición primitiva de que 7,999... no es 8 y de que la regla para convertir expresiones decimales en fracciones aproxima o no es válida en el caso de los nueves periódicos. Los que aceptan la igualdad, parece que lo hacen como conocimiento decretado, que han de dominar.

IV. 2. 2. 5 Reflexión general sobre la cuestiones complementarias

Las cuatro cuestiones complementarias de investigación presentadas en las fichas que hemos analizado tienen interés intrínseco y proporcionan información relevante sobre las concepciones de los alumnos respecto a los tópicos trabajados.

Las dos primeras fichas presentan los límites del sistema decimal de numeración en cuanto nos proponen la escritura del número más pequeño (entre los números positivos) y del número más grande, permitiendo así hacer un análisis de la viabilidad sobre el empleo de infinitas cifras en la escritura de números. De las observaciones realizadas tenemos:

1º Con mayor o menor precisión, la mayoría de los alumnos tienen claro que no hay el número más pequeño (entre los positivos) ni el número más grande; en la justificación de esta idea se observa un uso adecuado del infinito potencial.

2º. Se presentan deficiencias importantes en el dominio del sistema decimal de numeración cuando se hace intervenir un número infinito de cifras; el infinito actual presenta dificultades en su uso y comprensión. Las ideas erróneas detectadas son persistentes

3º El concepto de infinito se usa inadecuadamente en distintos contextos, sin precisión y confudiendo distintas interpretaciones.

La tarea F8 es una tarea de refuerzo para el problema de la conmensurabilidad, en la que se detectan algunas dificultades para la comprensión del concepto de número real según el planteamiento realizado por nosotros. Entre ellas destacamos:

4º No es usual que se explicite la unidad al realizar una medida, incluso cuando se hace evidente su necesidad; los alumnos tienen una gran dificultad en captar que la relación entre dos cantidades cualesquiera no cambia al cambiar la unidad. A estas alturas no han superado dificultades de los primeros niveles de enseñanza.

5º Detectamos, una vez más (Castro, 1994), la interferencia de las comparaciones aditivas en situaciones en las que se presentan relaciones multiplicativas

Finalmente, la tarea F10 propone un repaso de las reglas de conversión entre fracciones y decimales junto con un análisis del periodo como expresión controlada de una notación infinita y una conideración especial para el periodo 9. Hemos detectado las dificultades siguientes:

6º La aceptación del periodo 9 presenta fuertes resistencias. Por un lado, en cuanto a su existencia ya que no procede de una división; por otro lado, en cuanto a su conversión en un decimal exacto. Las discusiones y actividades realizadas no consiguen integrar adecuadamente estas notaciones en la red de conocimientos que tienen los alumnos.

7º Los decimales infinitos no periódicos, y los casos periódicos de cierta complicación, suelen abordarse limitando sus cifras a aquellas que aparecen explícitamente escritas; se suele rechazar la conversión de los decimales periódicos complicados a fracciones.

IV. 2. 3 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación F12

-Instrumento:

El instrumento elaborado para estudiar las intuiciones e ideas de los alumnos sobre la conmensurabilidad de longitudes, así como los procedimientos que utilizan para obtener la medida de un segmento con respecto a otro dado, es la Ficha de Trabajo F12 cuyo contenido se presentó en el Apartado III. 3. 3, y que aparece en el anexo III.3.

-Características del instrumento e implementación:

Como se detalla en el desarrollo de la etapa correspondiente a la Implementación, esta actividad fue propuesta a los alumnos con el formato presentado en anexo mencionado, para que la trabajaran por parejas. Posteriormente, se realizó una Puesta en Común sobre el trabajo realizado, que fue grabada en vídeo.

-Objetivos:

Tal como especificamos en su momento, en la mayoría de los casos, los alumnos no se han planteado previamente la cuestión de si dos longitudes cualesquiera pueden ser conmensurables o no. Con esta actividad pretendemos que los alumnos expliciten sus intuiciones sobre la conmensurabilidad antes de plantear cualquier conflicto al respecto, que podría producirse con la aparición de longitudes inconmensurables.

IV. 2. 3. 1 Criterios que concretan las unidades de análisis

Para estudiar las respuestas a las dos cuestiones planteadas en la actividad conviene tener en cuenta que la primera de ellas es procedimental: consiste en obtener un procedimiento para establecer una relación entre dos longitudes, mientras que la segunda es conceptual: ¿los números racionales expresan la relación entre dos segmentos cualesquiera? Pero tanto una como otra cuestión son complejas, y sus respuestas tienen multitud de matices que queremos recoger. Por ello, para nuestro estudio y análisis utilizaremos una serie de criterios, que pasamos a presentar diversificados en preguntas, mediante los que se concretan las unidades de análisis de esta investigación.

Tanto en esta cuestión de investigación específica como en las correspondientes a la Fase de Acción 2, la elaboración de los criterios que concretan las unidades de análisis y las escalas de valoración correspondientes, que presentaremos en el apartado siguiente, han sido elaboradas a partir de las respuestas de los alumnos en los documentos escritos.

-Pregunta I:

Capacidad para entender la cuestión acerca de la conmensurabilidad, que puede mostrarse por el hecho de concebir acciones y procedimientos mediante los cuales expresar numéricamente la relación entre dos longitudes, para casos concretos. Consideraremos:

1. Claridad de la respuesta dada por el alumno.
2. Procedimiento ideado; tipo de procedimiento y mantenimiento del mismo.
3. Precisión en la medida.

-Pregunta II:

Generalización a la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera. Consideraremos:

1. Claridad de la respuesta dada por el alumno.
2. Respuesta a la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera (existencia de un número que exprese la relación entre ellas) y argumento con el que los alumnos justifican dicha respuesta.
3. Tipo de número mediante el cual expresan la relación.
4. Coordinación entre el nivel geométrico y el nivel numérico.

IV. 2. 3. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

Los criterios mencionados para las dos preguntas de la cuestión de investigación admiten la consideración de diferentes aspectos o apartados,y cada uno de ellos permite elaborar una escala para su valoración. Pasamos a detallar estos aspectos con sus correspondientes escalas:

-Pregunta I. Atendiendo a los tres criterios, tenemos:

1. Claridad de la Respuesta dada por el alumno.

Se valorarán tres aspectos, según las escalas que se indican:

-Explicación Verbal **(EV):**

1. Explicación con nivel de claridad aceptable
2. Explicación con indicios que permiten una interpretación
3. Explicación insuficiente o nula

-Representación Gráfica **(RG):**

1. Aporta información significativa a la explicación verbal
2. No aporta información significativa a la explicación verbal
3. Arroja dudas sobre la explicación verbal

-Valoración de la Claridad Global (CG):

1. Permite una interpretación clara o bastante probable
2. La interpretación es dudosa
3. No es posible hacer interpretaciones.

2. Procedimiento utilizado. En este caso se valoraran dos aspectos: el tipo de procedimiento empleado, y el mantener o no un mismo procedimiento para los distintos ejemplos propuestos.

-Tipo de Procedimiento **(TP):**

1. *Diferencias sucesivas:* Averiguar cuántas veces está contenida la unidad en el segmento que ha de medirse (el que va del punto 0 al punto al que se ha de asignar un número); cuando no está contenida exactamente, volver a encajar el trozo que sobra (o falta) sucesivamente, hasta encontrar una parte alícuota al segmento unidad (el que va del punto 0 al punto 1) y al que se mide (es decir, que encaje exactamente en los dos segmentos).
2. *División de los segmentos:* Dividir los segmentos en cuestión (el segmento de extremos 0, 1 y el segmento de extremos 0 y el punto al que se ha de asignar un número) para encontrar una parte alícuota a los dos.

2.1. Bisección en uno de los segmentos (generalmente el más pequeño) hasta encontrar una parte alícuota con el otro.

2.2. División de uno de los segmentos (generalmente el más pequeño) en 2, 3, 4... partes, hasta encontrar una parte alícuota[11] con el otro.

2.3. Estimar el número de divisiones que hay que realizar en uno y otro segmento para que queden divididos en partes de igual longitud, pero no se sabe cómo realizan la estimación, o no se sabe claramente.[12]

3. *Mixto:* Empezar con el primer procedimiento pero Terminar con el segundo.

4. No puede reconocerse un procedimiento.

-Mantenimiento del Procedimiento **(MP):**

1. Resuelve cuatro o cinco casos:

 1a. Mantiene el procedimiento

 1b. Cambia de procedimiento (en cuyo caso codificaremos el utilizado para los últimos casos, por ir en orden de complejidad)

2. Resuelve los tres primeros casos:

 2a. Mantiene el procedimiento

 2b. Cambia de procedimiento (en cuyo caso codificaremos el utilizado para los últimos casos, por ir en orden de complejidad)

3. Precisión en la medida **(P).** Finalmente, se tendrá en cuenta la precisión en la ejecución, como valoración general

1. Nivel de precisión aceptable
2. Se nota bastante imprecisión

-Pregunta II. Para la valoración de esta pregunta se tendrán en cuenta cuatro criterios:

1. Claridad de la Respuesta dada por el alumno (C), con las siguientes valoraciones:

   1. Explicación con nivel de claridad aceptable
   2. Explicación con indicios que permiten una interpretación
   3. Explicación insuficiente o nula

2.Existencia de un número que expresa la relación entre dos longitudes cualesquiera, y tipo de número en caso de que exista, se consideran dos aspectos:

[11] Ningún alumno conocía el teorema de Thales, ni sabía ninguna técnica para dividir en partes iguales un segmento.

[12] No hay indicios en los documentos de que los alumnos hayan estimado a través de instrumentos graduados, sin embargo, en la realización en clase de la taréa, hubo que llamar la atención de los alumnos varias veces con este motivo.

-Existencia (E):

1. Sí
2. No
3. No sé

-Tipo de número (TN):

0. Olvidan contestar al tipo de número
1. Racional
2. Fracción
3. Decimal

3. Tipo de argumento utilizado (A):

1. Utiliza la existencia de una parte alícuota
   a. Existe
   b. Puede no existir
2. Alude a problemas de aproximación y a dificultad o imposibilidad de precisión por esta causa.
3. Generalizaciones injustificadas.

4. Nivel de coordinación entre la representación geométrica y la numérica (CR):

1. Los alumnos explican el paso, la conexión entre el procedimiento geométrico y el resultado numérico.
2. Los alumnos se quedan en el procedimiento geométrico y no explican el paso, la conexión entre éste y el resultado numérico.
3. Los alumnos entremezclan la representación numérica y la geométrica indiscriminadamente.

En resumen, la Observación de las respuestas de los alumnos a la cuestión específica de investigación queda organizada y recogida según los 10 aspectos o apartados enumerados, que aparecen en la siguiente tabla; para cada uno de ellos hemos enunciado la correspondiente escala de valoración.

Tabla 4.17: Apartados para observar la cuestión específica de investigación.

Criterios: Preguntas:	Claridad de la respuesta	Procedimiento/argumento utilizados	Precisión/ tipo de número utilizado	Coordinación entre representaciones
Pregunta I	EV- RG- CG	TP- MP	P	_______
Pregunta II	C	E- TN	A	CR

IV. 2. 3. 3 Resultados de la Cuestión de Investigación F12

Los resultados generales del la actividad F12 según los apartados considerados aparecen recogidos en la tabla 16 del Anexo IV.1. A continuación, pasamos a presentar algunos resultados parciales que nos parecen especialmente interesantes para nuestro estudio, ya que ponen de manifiesto algunas conexiones o carencias que se desprenden de las respuestas de los alumnos a la actividad F12:

Pregunta I:

-Claridad de la respuesta y procedimiento ideado

Tabla 4.18: Relación entre la claridad de respuesta y el procedimiento ideado[13] .

CG **TP**	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	5	3	0	8
2.1	0	0	0	0
2.2	1	0	0	1
2.3	2+1E	6	0	9
3	0	1	0	1
4	0	0	12	12
Total	9	10	12	**31***

E: Dentro del procedimiento 2.3, hemos considerado el caso de un alumno que procede erróneamente, dividiendo siempre el segmento más pequeño por la mitad y el más grande con trozos de longitud similar a esas mitades, pero con una enorme falta de precisión.

*De los 32 alumnos de que se compone el curso, 1 de ellos copia el ejercicio (tanto en la primera pregunta como en la segunda) de otros compañeros; por consiguiente, en esta cuestión trabajaremos, en principio sobre los documentos de 31 alumnos.

Resultados globales:

-Los procedimientos más frecuentes ideados por los alumnos son el de Diferencias Sucesivas (26% del total) y el de División de los segmentos mediante procedimientos que no explicitan hasta encontrar una parte alícuota (29%). Dentro de estos dos procedimientos, hay más alumnos que se expresen con claridad en el primero que en el segundo.

-El resto de los procedimientos sólo son empleados por un alumno (3%), salvo el de bisección sucesiva, que en este curso no ha sido empleado por ninguno (aunque este procedimiento fue empleado por otros alumnos en cursos anteriores).

-En cuanto a la claridad de expresión, el 29% de los alumnos pueden ser interpretados con bastante claridad, el 32% permite una interpretación dudosa, y el 39% no permiten una

[13] En esta tabla, así como en las correspondientes a los demás apartados, los valores en negrita corresponden a los valores de la escala para cada unidad de análisis considerada, y los valores en letra normal a las frecuencias de respuestas para cada casilla.

interpretación de sus trabajos, debido a la falta de claridad con la que se expresan o a la ausencia de información sobre el trabajo que han realizado.

Aunque no queda constancia por escrito, durante el trabajo en clase varios alumnos intentaron estimar a través de instrumentos graduados en numerosas ocasiones. (Ver transcripción de la sesión en Anexo IV.2).

-Tipo de procedimiento ideado y mantenimiento del mismo

Tabla 4.19: Relación entre procedimiento ideado y mantenimiento del mismo.

MP / TP	1		2		Total
	1a	1b	2a	2b	
1	4	1	2	1	8
2.2	0	1	0	0	1
2.3	7+1E	1	0	0	9
3	1	0	0	0	1
Total	13	3	2	1	19

Resultados globales:

-De los 19 alumos cuyos trabajos tienen un nivel de claridad suficiente, que permite hacer una interpretación, el procedimiento de División de la Unidad es mantenido en la casi totalidad de los casos en los que se emplea (89%); mientras que en el caso del procedimiento de Diferencias Sucesivas, la proporción de alumos que mantiene el procedimiento es algo menor (62%) y además, el 33% de éstos lo mantienen sólo en los casos más sencillos.

-Tanto el alumno del procedimiento mixto como el del procedimiento erróneo, los mantienen para todos los ejercios o la mayoría.

-Precisión

Tabla 4.20: Nivel de precisión en la pregunta I.

Precisión	1	2
	6	13

Resultados globales:

Por lo que respecta al nivel de precisión, de los 19 alumnos cuyos trabajos permiten una interpretación, un 31% cuida la precisión y tienen un nivel aceptable; sin embargo, el resto de los niños son bastante descuidados en lo que a precisión se refiere.

PREGUNTA II:

-Claridad de la respuesta

Tabla 4.21: Claridad de la respuesta en la pregunta II.

C	1	2	3
	25	6	0

Resultados globales:

En esta pregunta, el nivel de claridad con el que se han expresado los alumnos es notablemente mayor. Todas las respuestas han sido susceptibles de interpretación y un 81% de los alumnos se ha expresado con bastante claridad.

-Argumento con el que los alumnos justifican la conmensurabilidad de dos longitudes

Tabla 4.22: Argumentos con los que justifican la conmensurabilidad de dos longitudes.

E / A	SI	NO	Total
1a	22+1*	0	23
1b	0	1	1
2	0	3	3
3	4	0	4
Total	27	4	31

Resultados globales:

-El 87% del total de alumnos piensa que siempre hay un número que expresa la relación entre dos longitudes cualesquiera. Casi todos los alumnos piensan que para dos longitudes cualesquiera existirá un número que exprese la relación entre ambas, debido a que las dos longitudes tendrán una parte alícuota. El resto de las respuestas afirmativas corresponde a generalizaciones injustificadas.

Como observación interesante, destacaremos que hay un alumno que dice: "*Siempre aparecerá el Máximo Común Divisor (entre los dos segmentos), por lo tanto la relación está en el número de segmentos con ese máximo común divisor en un segmento y el otro*".

También es importante notar el hecho de que varios alumnos utilizan en sus razonamientos observaciones relativas al sistema métrico decimal, como si las divisiones, por pequeñas que fueran, tuvieran que ser décimas, centésimas, millonésimas... Incluso en la respuesta a la primera pregunta, un alumno se refiere al trozo sobrante al intentar conmensurar una pareja de segmentos como "una décima", cuando en realidad se trata de 1/3.

-Sólo 4 alumnos de 31 (13%) piensan que puede no existir un número que exprese la relación entre dos longitudes cualesquiera. De ellos, 3 aluden a problemas de aproximación, y solamente 1 alumno argumenta que puede no existir una parte alícuota.

-Tipo de número

Tabla 4.23: Tipo de número que los alumnos asignan a la medida de una longitud.

TN	0	1	2	3	Total
	25	1	4+1*	1	31

*Este alumno contestó con los tipos de número 2 y 3, por tanto sólo se cuenta una vez para el total.

Comentarios:

-La mayoría de los alumnos (80%) se olvidan contestar a esta pregunta.

-De entre los que contestan, la mayoría piensan que los números que expresan la relación entre dos longitudes cualesquiera son Fracciones. Sólo 1 alumno opina que son racionales y otro que pueden ser fracciones y decimales.

-Coordinación entre la representación numérica y la geométrica

Tabla 4.24: Nivel de coordinación entre representaciones.

CR	1	2	3	Total
	(1)	17	9	27*

*El resto de alumnos no pueden ser valorados en este apartado debido a que hicieron generalizaciones injustificadas.

Resultados globales:

-Gran parte de los alumnos se queda en el plano geométrico y no explicita la conexión con el plano numérico. Sólo 1 (4%) establece dicha conexión, o parece dar indicios de establecerla.

-Un 30% de los alumnos entremezclan indiscriminadamente el plano numérico y el geométrico, utilizando los términos con imprecisión como en los siguientes ejemplos: "Siempre se puede dividir el segmento en números más pequeños", "Al dividir un segmento siempre hay un número que sale exacto y encaja en el otro segmento", etc...).

IV. 2. 3. 4 Reflexión general sobre la comprensión en la Cuestión de Investigación F12, a partir de los documentos escritos

-En la Pregunta I, un 60% de los trabajos de los alumnos son susceptibles de interpretación y solamente la mitad de ellos permite una interpretación clara del proceso que han seguido para conmensurar varias parejas de longitudes.

Los procedimientos más frecuentes han sido el de Diferencias Sucesivas y el de División del segmento más pequeño mediante estimación para encontrar una parte alícuota. Dentro de estos dos procedimientos, hay más alumnos que se expresan con claridad en el primero de ellos. Cada uno de estos dos procedimientos ha sido utilizado por una proporción similar de alumnos: 26% y 29%, respectivamente. En suma, *la mitad de los alumnos han logrado idear un procedimiento para conmensurar parejas de longitudes, si bien algo menos de la mitad de los alumnos son capaces de mantenerlo para la mayoría de los casos*,como cabe deducir de la tabla 4.18.

-Un dato que llama la atención en esta primera pregunta es que el *68% de los alumnos cuyos ejercicios son susceptibles de interpretación, son bastante descuidados en cuanto a la precisión se refiere.*

-En la Pregunta II los alumnos se expresan mucho más claramente, todas las respuestas pueden ser interpretadas.

La gran mayoría de los alumnos piensa que siempre hay un número que expresa la relación entre dos longitudes (hasta ahora los alumnos sólo se han movido en el ámbito de los Números Racionales). *Un 74% de los alumnos afirma que dadas dos longitudes cualesquiera, tendrán una parte alícuota*; incluso hay un alumno que sostiene su afirmación mediante el argumento del máximo común divisor entre las dos longitudes. Sin embargo, es importante notar el hecho de que varios alumnos utilizan en sus razonamientos observaciones relativas al sistema métrico decimal, como si las divisiones, por pequeñas que fueran, tuvieran que ser décimas, centésimas, millonésimas. En la respuesta a la primera pregunta, un alumno se refiere al trozo sobrante al intentar conmensurar una pareja de segmentos como "una décima", cuando en realidad se trata de 1/3.

Sólo 4 alumnos de 31 (13%) admiten que pudiera no existir un número que expresara exactamente la relación entre dos longitudes cualesquiera; de ellos, 3 aluden a problemas de precisión, y *solamente uno argumenta que pudiera no existir la parte alícuota.*

Por lo que respecta al tipo de número con el que expresar la relación entre dos longitudes, la mayoría de los alumnos no contestan a este punto específico; nuestra interpretación es que esto se produce por olvido, ya que esta cuestión no presenta una dificultad especial, hecho lo anterior, y sin embargo no se destaca suficientemente como pregunta específica.

En cuanto a la coordinación entre el plano numérico y el geométrico, sólo un alumno establece claramente la conexión entre ambos, y varios alumnos, en cambio, entremezclan indiscriminadamente los dos planos.

IV. 2. 3. 5 Estudio de la Interacción en la Cuestión de Investigación F12

La Puesta en Común sobre la actividad, llevada a cabo después de que los alumnos hubieran realizado y entregado la Ficha de trabajo F12 en la sesión correspondiente al 11-11-93, fue grabada en vídeo y aparece transcrita en el Anexo IV.2.

El análisis de la interacción didáctica que tuvo lugar a raiz de la Actividad F12 se realiza mediante las determinación de los segmentos en que se estructura el desarrollo de dicha sesión y la tipificación de cada uno de estos segmentos mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica, descritas en el apartado III.7. A continuación presentamos un esquema del desarrollo de la sesión, seguido de los datos globales sobre la misma referidos a las Unidades de Análsis de la Interacción Didáctica y a sus distintas categorias.

-Etapas de la interacción, estructuradas según los contenidos:

<u>1. Realización de la tarea:</u>

1.1. Propuesta de la tarea

-Ejemplo

-Directrices, dudas, aclaraciones.

1.2. Ejecución:

Trabajo por parejas. Directrices, dudas y aclaraciones.

<u>2. Puesta en Común:</u>

2.1. Caso b)

-Primeros resultados, método, contraste de resultados.

-Elección de la relación numerador-denominador, en función del segmento unidad.

-Método de las Diferencias Sucesivas. Traducción en términos numéricos.

-Método de las Diferencias Sucesivas.

2.2. Caso c)

-Discrepancias de resultados.

-Método de las Diferencias Sucesivas. Traducción en términos numéricos.

-Elección de la relación numerador-denominador en función del segmento unidad.

-Discrepancia de resultados.

-Método de las Divisiones Sucesivas.

-Datos globales sobre las Unidades de Interacción Didáctica encontradas:

De acuerdo con la transcripción de la puesta en común de la actividad F12 y la tipificación de los segmentos que la componen en términos de las categorias para el análisis de la interacción didáctica, elaboramos la siguiente tabla, en la que se resumen las frecuencias encontradas para cada una de las categorias, según el esquema del desarrollo de la sesión que hemos considerado.

Tabla 4.25: Interacción didáctica sobre la actividad F12.

Etapa Categorías	1.1	1.2	2.1	2.2	Total
1.PO	6	10	12	8	36
1.PP	0	0	0	0	0
1.PE	4	2	0	0	6
1.PV	0	0	1	0	1
1.PA	1	2	0	0	4
1.AS	0	0	0	2	3
1.AP	1	0	0	0	1
1.AE	0	0	0	0	0
1.AV	0	1	0	0	1
1.AR	0	0	0	0	0
2.PO	1	0	3	3	7
2.PP	0	0	0	0	0
2.PE	0	2	0	0	2
2.PV	0	0	0	0	0
2.PI	0	0	0	1	1
2.AS	0	0	2	0	2
2.AP	0	0	0	0	0
2.AE	0	0	0	0	0
2.AV	0	0	0	0	0
2.AI	0	0	2	1	3
3.POC	5	7	0	1	11
3.PIS	6	3	12	17	38
3.PDC	6	2	1	4	18
3.PVI	7	4	2	11	23
3.PSC	0	0	0	0	0
3.AAI	8	0	12	22	41
3.AIS	5	0	0	3	9
3.AMC	4	1	6	5	15
3.AVI	1	0	4	3	9
3.AEC	0	0	0	0	0
Total	56	35	57	81	229
CA	7	8	11	14	41

Como resumen de la tabla anterior, agrupamos las categorias de Interacción Didàctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de esta memoria y consideramos los porcentajes de interacciones correspondientes a cada una de tales finalidades

Tabla 4.26: Distribución en porcentajes de las interacciones según etapas y finalidades.

Tareas / Finalidades	1.1	1.2	2.1	2.2
1	0,21	0,45	0,25	0,13
2	0,02	0,06	0,12	0,06
3	0,77	0,49	0,63	0,81

Igualmente, resumimos las interacciones considerando los porcentajes relativos a cada uno de los tipos de actuaciones establecidos en el apartado III.8 para caracterizar las interacciones.

Tabla 4.27: Distribución en porcentajes de las interacciones según etapas y actuaciones

Tareas / Actuaciones	1.1	1.2	2.1	2.2
Fijar Normas	0,36	0,49	0,51	0,40
Establecer Significados	0,46	0,30	0,33	0,41
Enjuiciar	0,16	0,15	0,12	0,17
Intervenir	0,02	0,06	0,04	0,02

-Reflexión sobre la interacción didáctica producida a partir de la Cuestión de Investigación:

En cuanto a la distribución de frecuencias de interacción por etapas según las finalidades, Tabla 4. 25, se observa que en la primera etapa, correspondiente a la Propuesta de la tarea, el 77% de las acciones están encaminadas a la construcción de conocimiento (de ellas un 45% parten de la profesora y un 32% de los alumnos), un 21% a la gestión del trabajo (un 20% de las acciones parten de la profesora y sólo un 1% de los alumnos); esto se produce porque hay en principio bastantes dificultades por parte de los alumnos para entender la tarea que tienen que realizar.

La siguiente etapa está dedicada a la ejecución de la actividad por escrito por parte de los alumnos, mientras la profesora supervisa el trabajo y da indicaciones generales. En esta etapa se produce un equilibrio entre las acciones encaminadas a fijar normas y las encaminadas a la construcción de conocimiento (alrededor de un 50% en ambos casos); esto es debido a que la construcción de conocimiento se realiza principalmente por escrito en esta fase y se registran las observaciones (casi exclusivamente de la profesora) en lo que se refiere a pautas de trabajo y cuestiones relativas a la comprensión o a las deficiencias de comprensión de los alumnos, cuya realización de la tarea propuesta está observando la profesora.

La Puesta en Común está dividida en dos partes principales, correspondientes a la realización de dos ejercicios distintos. En el primero, vuelve a decrecer la frecuencia de acciones encaminadas a la gestión del trabajo en el aula (25%) frente a la frecuencia de acciones encaminadas a la construcción del conocimiento (63%). Aún así, el porcentaje de acciones dirigidas a la gestión del trabajo en el aula resulta alto para tratarse de una Puesta en Común. Las acciones encaminadas a gestionar el trabajo en el aula parten casi exclusivamente de la profesora, mientras que en lo relativo a la construcción de conocimiento se produce un equilibrio en la interacción, con cierta superioridad en las actuaciones por parte de los alumnos (26% profesora-37% alumnos). En la segunda pregunta, sigue disminuyendo la frecuencia de las acciones encaminadas a gestionar el trabajo en el aula (13%) y aumenta la frecuencia de las que tienen por objeto la construcción de conocimiento (81%); también aquí las acciones en torno a la gestión del trabajo parten de la profesora, casi en su totalidad, y hay un equilibrio en la interacción por parte de la profesora y de los alumnos en lo que respecta a la construcción de conocimiento.

Las acciones encaminadas a gestionar el desarrollo del contenido tienen poco peso en el total, y aumentan ligeramente al comienzo de la Puesta en Común.

Pasamos ahora a analizar la distribución de frecuencias de interacción por etapas, atendiendo a las actuaciones generales. En general, se observa que el peso fundamental en la interacción corresponde a las actuaciones de Fijar normas y Establecer significados (alrededor del 80% de las acciones en las diferentes tareas). A las actuaciones de Enjuiciar e Intervenir corresponde, por consiguiente, un 20% de las acciones, de las cuales, además, alrededor del 15% en cada una de las distintas tareas, corresponde a la actuación general de Enjuiciar.

Si centramos nuestra atención en las actuaciones correspondientes a Fijar normas y Establecer significados, observamos que en la primera de las etapas que componen esta actividad, correspondiente a la Propuesta de la tarea, hay una mayor frecuencia de actuaciones destinadas a Establecer significados (46%) que de actuaciones destinadas a Fijar Normas (36%) (la distribución de actuaciones entre profesora y alumnos resulta equilibrada). Sin embargo, en la tarea siguiente, correspondiente a la Ejecución de la actividad, se invierten en gran medida estas frecuencias, pasando a ser prioritario el Fijar normas (alrededor del 50%) frente al Establecimiento de significados (alrededor del 30%). Es importante notar que esta alteración se mantiene también en la primera parte de la Puesta en Común y sólo se equilibra en la segunda parte de la misma. Este es un punto importante que ha de tenerse en cuenta, ya que la frecuencia de las interacciones destinadas a Fijar normas corresponde (pasada la primera etapa de la clase) casi a la mitad del total de interacciones que han tenido lugar, en detrimento de acciones como Establecer significados y Enjuiciar. Si bien hemos de tener en cuenta que en la Puesta en Común, especialmente en la segunda parte, un buen número de las intervenciones destinadas a

Fijar normas o convenios están dentro de la finalidad correspondiente a la Construcción de Conocimiento en el Aula y corresponden a las actuaciones de los alumnos aportando información. También en esta segunda parte de la Puesta en Común se consigue establecer un equilibrio entre la fijación de normas y el establecimiento de los significados.

En cualquier caso, las actuaciones encaminadas a Fijar Normas ocupan un porcentaje de frecuencia alto en relación a las demás; en este sentido, es conveniente llegar a unos términos de acuerdo y buen hábito en cuanto a normas se refiere, con objeto de poder dedicar más esfuerzos y energía a actuaciones más productivas por lo que a la Comprensión del Contenido se refiere.

En lo que respecta a la Categoría Clima de Aula, también hemos de notar que se observa un incremento de ruido a lo largo del desarrollo de la clase, especialmente conforme nos acercamos al final. Esto puede ser debido a que las dos últimas etapas corresponden a la fase de Puesta en Común, donde es lógico que se produzca este incremento por tratarse de una actividad destinada a la participación conjunta de todo el grupo de clase. El que se produzca un incremento de ruido en la segunda parte de la Puesta en Común puede ser debido a la inquietud de los alumnos al acercarse el final de la sesión de clase.

IV . 2. 4. Observación y resultados del Examen 1

-Instrumento:

Dentro del Examen Final correspondiente a la Fase de Acción 1, las Preguntas 2, 4, 5 y Voluntaria del Examen constituyen parte del material considerado para obtener información de los alumnos sobre las Cuestiones de Investigación de esta Fase (tabla 4.3). El Examen aparece en el Anexo III.4, y los enunciados de cada una de las preguntas mencionadas aparecen a continuación.

-Características del instrumento e implementación:

Las preguntas propuestas a los alumnos en el Examen realizado al finalizar la etapa correspondiente al estudio de los Números Racionales, se aprovecharon para analizar la evolución de la comprensión de los alumnos en torno a ciertas cuestiones que fueron planteadas en el Pretest, al comienzo del trimestre. Concretamente la pregunta 2, referida al orden en los decimales y a la densidad de los racionales (representados tanto con notación decimal como con notación de fracción); la pregunta 4, referida a la representación en la recta de números racionales; y, por último, la pregunta 5 que podemos utilizar para explorar las nociones de los alumnos sobre el concepto de Número Racional y sus representaciones. Además, se planteó la cuestión de si los alumnos consideran que los números racionales llenan la recta, en forma de pregunta voluntaria.

-Objetivos:

Tal como hemos señalado, nuestra intención es explorar qué evolución se ha producido en la comprensión de los alumnos en relación a algunos de los aspectos de nuestros focos principales de investigación, y detectar los principales cambios ocurridos con respecto a la situación existente a principio de curso, antes de comenzar nuestro proceso didáctico.

IV. 2. 4. 1 Criterios que concretan las unidades de análisis

Por lo que se refiere a las unidades de análisis de la comprensión, respecto a las prreguntas de este examen, se han considerado especialmente:

En relación con el Primer Foco de Investigación:

-Orden en los decimales

-Densidad de los números racionales, a través de sus representaciones fraccionaria y decimal.

En relación con el Segundo Foco de Investigación se ha considerado la correspondencia Números Racionales-puntos de la recta, teniendo en cuenta:

-Manejo de dicha correspondencia en términos de aplicación; valoraremos la asignación de un punto de la recta a las representaciones decimal y fraccionaria de los Números Racionales.

-Manejo de la correspondencia números racionales-puntos de la recta como una aplicación bien definida. Valoraremos la asignación de un punto de la recta a las distintas representaciones de un mismo Número Racional (fraccionaria y decimal, fracciones equivalentes).

-Manejo de la correspondencia números racionales-puntos de la recta como una aplicación inyectiva. Para valorarla tendremos en cuenta la asignación del mismo punto de la recta a las notaciones decimales periódicas y a su fracción correspondiente, es decir, a la no identificación del punto correspondiente a un decimal periódico con el correspondiente a una aproximación finita de dicho decimal.

-Interpretación por los alumnos de la sobreyectividad de la correspondencia números racionales-puntos de la recta. En esta unidad analizaremos:

.Concepciones de los alumnos sobre si los Números Racionales llenan o no la recta numérica y argumentos con los que justifican su respuesta:

.Conexión de la correspondencia Números Racionales-recta con su probable aceptación de la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera.

.En caso de que logren hacer la conexión señalada en el apartado anterior y piensen que a todo punto de la recta le corresponde un Número Racional, analizaremos si sobre esta base aceptan que los números racionales llenan la recta o la concepción del continuo interfiere y añade matices a la simple consideración de la sobreyectividad números racionales-puntos de la recta.

Sobre los puntos mencionados establecemos las correspondientes escalas de valoracion, mediante las que presentamos los resultados del examen.

IV. 2. 4. 2 Resultados del Examen

Pregunta 2

Enunciado:

2. a) Ordena de menor a mayor:

3,32; 3,302; 3,3012; 3,3018; 3,3025; -3,32; -3,302

b) ¿Cuántos números enteros hay entre 0,174 y 0,175? Si hay uno o más, da ejemplos (0,5 ptos,)

c) ¿Cuántos números racionales hay entre 0,174 y 0,175? Si hay uno o más, da ejemplos. (0,5 ptos.)

d) ¿Cuántos números racionales hay entre 2/5 y 3/5? Si hay uno o más, da ejemplos. (0,5 ptos.)

Nota.- Los números 3,3012 y 3,3018 del ejercicio 2, tienen la última cifra periódica. Igualmente 0,4 en el ejercicio 4.

Escala: valores asignados y tipos de respuesta[14]

2. a)

1. Bien.
2. Se equivoca en periodos o no los tiene en cuenta.
3. Se equivoca en negativos.
4. Falla los dos anteriores, o en uno de ellos y otro fallo.
5. Desordenados, sin las especificidades anteriores.
6. No sabe / No contesta.

2. b)

1. Ninguno.
2. Infinitos, con ejemplos racionales. (Supongo que el alumno no ha tenido en cuenta el matiz "Enteros" y está considerando todos los números que conoce, es decir, los racionales).
3. Muchos, varios y similares, con ejemplos racionales correctos.
4. Infinitos sin ejemplos.
5. Un número finito, con o sin ejemplos racionales.
6. No sabe / No contesta.

[14] En el apartado a) se han modificado los valores de la escala con respecto al pretest porque una categoría importante en éste: la de las reglas de ordenación por número de cifras decimales y orden inter e intra grupos, ya sólo aparece aquí en dos alumnos.
.La diferencia de escala entre los apartados c) y d) se debe a que la pregunta c) se trabajó explícitamente en clase, pero la d) sólo se mencionó de pasada.
.Con respecto a la pregunta hecha en el pretest se ha variado en lo siguiente:
.Afinamos la distinción entre "Infinitos, todos los que se quiera y similares)" y "Varios, muchos y similares".
.Ya no aparece el caso "Nueve, diez, (once)" como diferenciado del caso "Un número finito" porque sólo un alumno da la primera respuesta.

2. c)

1. Infinitos, todos los que se quiera y similares, con ejemplos correctos.
2. Muchos, varios y similares, con ejemplos correctos.
3. Infinitos, sin ejemplos.
4. Un número finito, con ejemplos correctos o sin ejemplos.
5. Ninguno / Ejemplos erróneos (que permitan deducir que la respuesta es incoherente, o bien sin otra indicación aparte de los ejemplos).
6. No sabe / No contesta.

2. d)

1. Infinitos, todos los que se quiera y similares, con ejemplos correctos.
2. Muchos, varios y similares, con ejemplos correctos.
3. Infinitos, sin ejemplos o con ejemplos erróneos pero coherentes.
4. Un número finito, sin ejemplos o con ejemplos erróneos pero coherentes.
5. Ninguno / Ejemplos incoherentes
6. No sabe / No contesta.

Pregunta 4

Enunciado:

4. Representa en la recta numérica:

-1; 5/4; 0,4; -0,75; 10/8; 1,25

Escala: valores asignados y tipos de respuesta

1. Bien, con todas las representaciones, incluyendo las de los decimales.
2. Bien. No representa decimales, pero los explica.
3. Bien salvo 0,444....(puede incluir la matización del apartado 2).
4. Fallo en:
   a) Decimales
   b) fracciones equivalentes
   c) fracciones impropias
   d) distintas representaciones de un mismo número racional.
   (Puede incluir las matizaciones de los apartados 2 y 3).
5. Falla en más de uno de los apartados anteriores.
6. No sabe / No contesta.

Nota.- En el Pretest se incluye la categoría de entender la representación en la recta como una ordenación. Hay que ver si ya no se produce aquí.

Pregunta 5

Enunciado:

5. a) ¿Qué son los Números Racionales?

b) Escribe todas las notaciones y representaciones que conozcas del número racional 3/4. [15]

Escala:

5. a)

1.Los que se representan por una fracción y todas sus equivalentes, y por el único número decimal, finito o periódico, que les corresponde, y por único punto de la recta númerica que les corresponde.

2. Igual que en el caso anterior pero sin hacer la aclaración de que el decimal ha de ser finito o periódico; o sin hacer la referencia al punto de la recta.

3. Igual que en el caso anterior pero sin las dos referencias mencionadas en el valor 2 anterior.

4. El alumno no ha captado algún punto significativo de la definición dada en clase o no ha hecho las conexiones pertinentes / Definición del colegio de las fracciones equivalentes. La definición es correcta pero el alumno no ha incorporado la información de este curso.

5. Comprensión muy vaga o errónea de la definición dada en este curso / Definición primitiva o errónea. (El alumno no ha incorporado la información de este curso, ni tampoco ha aprendido una definición correcta en su etapa anterior del colegio, sino que permanece con su definición intuitiva, incompleta y a menudo errónea).

6. No sabe / No contesta.

5. b) [16]

1. La fracción, sus equivalentes y el punto de la recta.

2. Igual que en el caso anterior pero sin mencionar las equivalentes o el punto de la recta, o equivocándose en uno de ellos.

3. Sólo la fracción.

4. No sabe hallar la fracción correctamente, pero menciona equivalentes y/o punto de la recta.

5. No sabe hallar la fracción correctamente y no hace nada de lo demás/ Otras respuestas incorrectas. (6). Responden a 3/4.

6. No sabe / No contesta.

De acuerdo con las escalas establecidas, recogemos los resultados obtenidos en las cuestiones consideradas del Examen 1, que presentamos en las siguientes tablas.

15 En la realización del ejercicio de Examen se dijo a los alumnos que cambiaran 3/4 por 0,366666...

16 Si la fracción no es correcta por errores de operación, se considerará como correcta; si falla en el procedimiento o el resultado es incorrecto y no explicita el procedimiento, la consideraré como incorrecta.

Tabla 4.28: Resultados de las preguntas 2, 4 y 5 del Examen [17].

Escala Preguntas	1	2	3	4	5	6
2a	10+(1)	1	8	1	7	1
2b	17	6	3	1	1	1
2c	16+(1)	2	5	1	1	3
2d	8+(1)	2	9	3	3	2+(1)
4	3+(1)	0	6	6a/1c/1d	11	0
5a	2	3	4	1+(1)	15+(2)	1
5b	3+(1)	5	1	1	6	9+(3)

Resultados Pregunta 2-a:

Se observa bastante mejoría en la ordenación de decimales. Casi todos los alumnos ordenan bien o se equivocan sólo en los negativos (concretamente 8 alumnos, 27%, se equivocan en los negativos solamente); 7 alumnos no saben ordenar y uno no contesta, lo cual supone que otro 27% de los alumnos sigue teniendo problemas con esta cuestión.

Resultados Pregunta 2-b:

Más de la mitad de los alumnos (59%) afirma correctamente que no hay ningún número entero entre 0,174 y 0,175, y un 21% dice que hay infinitos (estos últimos no tomando en cuenta el matiz enteros, ya que los ejemplos que dan son racionales no enteros). Otro 21% de los alumnos da respuestas claramente incorrectas.

Resultados Pregunta 2-c:

La mayoría de los alumnos (83%) se mueven en las tres primeras categorías, lo cual implica un buen nivel de comprensión en esta cuestión; además, más de la mitad de los alumnos contestan correctamente.

Resultados Pregunta 2-d:

Aquí ya sólo 8 alumnos, es decir, un 27% del total, contestan completamente bien. Sin embargo, es notable que un grupo de alumnos (21%) contestan con ejemplos incorrectos, pero coherentes, ya que en clase este ejercicio se había indicado de forma rápida cuando la mayoría de los alumnos no estaban prestando mucha atención; algunos de los ejemplos dados son: "2,2/5; 2,3/5; 2,4/5;...."; "2/6"; "2/52; 2/53;...."; "2/54367....".

Resultados Pregunta 4:

Sólo un 14% de los alumnos realiza este ejercicio correctamente. Se observan bastante fallos en Decimales (esta es la notación numérica que presenta más dificultad a los alumnos a la hora de representar en la recta), bastantes alumnos no "representan" los decimales,

[17] Los resultados se analizan con referencia al total de los 29 alumnos que se presentaron al examen.

sino que aproximan su valor, de forma plausible pero, por ejemplo, sin cuidar de representar unidades de referencia.

Un 38% del total de alumnos sigue sin saber representar números racionales (expresados con diferentes notaciones numéricas) en la recta numérica. Uno de los problemas que se observa es que bastantes niños hacen marcas en la recta, pero no toman unidades iguales. Dado que la correspondencia números reales-puntos de la recta es uno de nuestros principales focos de interés, es importante volver a incidir sobre esta cuestión e intentar subsanar los fallos al respecto.

Además, un 21% de los niños representan los decimales periódicos mediante una aproximación finita de los mismos; sólo un 3% tiene problemas en asignar un mismo punto de la recta a distintas representaciones del mismo número racional.

Para futuras exploraciones sobre el nivel de los alumnos, conviene tener en cuenta que, tal como hemos formulado la cuestión esta vez, los números elegidos para que los alumnos representaran pertenecían a la vez a más de una categoría de las que se quería analizar, con lo que el solapamiento impedía ver qué puntos específicos presentan dificultades para los niños.

Resultados Pregunta 5-a:

Aproximadamente un 30% del total de alumnos parecen haber captado la definición dada en clase, o aspectos importantes de la misma. Sin embargo, una gran mayoría mantiene las intuiciones difusas que se ponían de manifiesto en el pretest.

Resultados Pregunta 5-b:

Aquí también hay muchos fallos y olvidos. Sólo hay 4 alumnos que contesten correctamente a la pregunta (14%). Además, una alumna confunde número racional con sus representaciones; es interesante tener esto en cuenta para volver a trabajar sobre ello.

Pregunta VOLUNTARIA

Enunciado:

VOLUNTARIO: (Siempre sube nota. Más o menos, dependiendo de lo bien argumentada que esté la respuesta).

-Un genio ha colocado todos los números racionales en los puntos correspondientes de la recta numérica. ¿Crees que esos puntos llenarían toda la recta, o que, por el contrario, habría puntos sin marcar?

Argumenta tu respuesta lo mejor que puedas.

Escala: valores asignados y tipos de respuesta:

1. Los Números Racionales NO llenan la recta numérica.
   a) Es imposible ponerlos todos, por la infinitud.
   b) No tiene por qué haber números para todos los puntos, o respuestas similares.
   c) Densidad.
   d) Problemas de exactitud.

e) Faltaría recta para poder ponerlos todos.

f) También están los enteros. (Esta categoría puede considerarse incluída como NO o SI, si tenemos encuenta de que los enteros son racionales, aunque algunos alumnos los consideren como un conjunto aparte).

2. Los Números Racionales SI llenan la recta numérica.

a) Todos los puntos de la recta representan (una longitud, por tanto) un número / La recta se llenaría con las divisiones (y esto es lo que indican los números racionales).

b) Densidad.

c) Hay tantos números como puntos de la recta y similares.

3. Otras, de interpretación difícil.

4. NC: No contesta.

Tabla 4.29: Resultados de la pregunta Voluntaria del Examen.

1a	1b	1bc	1d	1e	1f	2a	2ac	2b	2c	3	4
9	1	1	1	1	2	2	1	5	2	2	2

Resultados:

-Prácticamente la mitad de los alumnos (si tenemos en cuenta la observación relativa a la categoría 1f), piensan que los números racionales llenan la recta numérica y la otra mitad, que no la llenan. Este resultado coincide con los obtenidos en cursos previos.

-Algo que llama la atención es la cantidad de alumnos (31% del total) que piensan que los racionales no llenan la recta debido a la necesidad de actualizar un proceso infinito, cuando precisamente la pregunta estaba formulada intentando evitar ese obstáculo (que también había aparecido en cursos anteriores) mediante la figura del "genio" que ya ha colocado los números en la recta.

-También sorprende que sólo un niño (3%) haya utilizado la densidad para decir que no, en comparación con el porcentaje de respuestas obtenido para esta categoría en cursos precedentes (Romero, 1993. Memoria de Tercer Ciclo). En este curso, en cambio, la densidad es el argumento más utilizado a favor de que los racionales llenen la recta.

-Como en otros cursos, también aquí es bastante escaso (10%) el número de alumnos que justifican su respuesta con un argumento que se centra en la correspondencia de los números racionales con los puntos de la recta, a través de la medida de longitudes o de divisiones de longitudes.

IV. 2. 4. 3 Reflexión general sobre los resultados del Examen

El concepto de orden en los números decimales y la densidad de los mismos han evolucionado de forma satisfactoria. Sin embargo, hay más dificultades en relación con la representación en la recta de los números racionales, que sigue siendo bastante deficiente;

se trata de un tema clave, que es necesario dominar para avanzar al nivel de los números irracionales.

Por lo que respecta a la definición de Número Racional a través de las distintas representaciones y la interrelación entre ellas, parece que también es un aspecto difícil de integrar y asimilar para la mayor parte de los alumnos. Dado el nivel que se observa en los alumnos en torno a esta pregunta, quizás convenga retomar la pregunta 6 del pretest referente a la diferencia entre número racional y fracción, y profundizar en este aspecto concreto, antes de pasar a integrar el resto de las representaciones de los racionales.

IV. 3 Reflexión sobre la Fase de Acción 1 y Toma de Decisiones

Estudiamos en esta tercera parte del capítulo la etapa de Reflexión y Toma de decisiones de nuestra espiral de Investigación-Acción, correspondiente a la Fase de Acción 1 que venimos considerando. La Reflexión la centramos en la Comprensión del Contenido y en los Aspectos Actitudinales; la Comprensión la analizamos, en primer lugar, para cada uno de los Focos de Investigación considerados y, a continuación, conjuntamente para ambos. Concluimos este apartado haciendo mención explícita de las decisiones adoptadas a la conclusión del trabajo con los Números Racionales, correspondientes a la Fase de Acción 1.

IV. 3. 1 Reflexión sobre la Comprensión del Contenido

A continuación, pasamos a analizar la comprensión del contenido por parte de los alumnos en esta Fase de Acción 1, atendiendo a cada uno de los Focos de Investigación planteados y haciendo uso de los datos disponibles a partir de los resultados de la Observación y Reflexión sobre las Cuestiones de Investigación específicas, las Cuestiones Complementarias de investigación y el Diario de la profesora-investigadora.

Foco de Investigación 1:

La idea de infinito en el sistema de notación decimal:

-En el Pretest se puso de manifiesto, al comienzo del curso, que *los alumnos tenían un dominio deficiente del Sistema Decimal de notación en lo que se refiere al uso del infinito.* Para una gran parte de ellos no parecía resultar significativa la diferencia entre notación decimal periódica y finita, ni su origen en los distintos resultados de la operación de dividir. Las ideas en torno a los decimales infinitos, números de infinitas cifras, el propio concepto de infinito aplicado a números o cifras de un número, etc estaban bastante confusas y mezcladas; *aunque sí parecía estar clara para una parte de los alumnos la existencia de decimales periódicos y la infinitud de cifras de los mismos.*

-Después del *planteamiento de ejercicios y cuestiones destinados a poner en juego las intuiciones en torno al infinito en el ámbito numérico* (Fichas de trabajo F1 y F2), de la discusión sobre estas intuiciones, aclaración de puntos conflictivos y corrección de ideas erróneas, muchos alumnos persistían en sus intuiciones primitivas, confusas o erróneas: seguía habiendo niños que se referían al número "infinito", a un número infinito o, simplemente, a infinito de forma confusa; otros alumnos no discriminaban entre que haya "infinitos números" y que un número tenga "infinitas cifras"; algunos, después de mucha insistencia por parte de la profesora en la delimitación de sus ideas, afirmaban que "el infinito es un número con infinitas cifras", o daban como ejemplo del "número inifinito" un entero con (infinitas) cifras arbitrarias.

En suma, *la idea de Infinito en general quedaba para los alumnos en el terreno de lo indefinido y no manifiestaban ninguna necesidad de delimitarla.*

Sí *estaba clara para buena parte de los alumnos la idea de infinito potencial,* lo cual se ponía de manifiesto cuando explicaban que no existe el número más pequeño ya que, para cualquier número dado, siempre se puede encontrar otro más pequeño, y también cuando afirmaban que no puede existir el número más grande porque, para cualquier número dado, siempre podemos encontrar otro mayor.

Otros alumnos, sin embargo, encontraban especial dificultad en comprender la diferencia entre "no saber si existe el número más pequeño" y "saber que no existe". Esta es una dificultad que persistió a pesar de los intentos de aclaración. Pudo rastrearse de nuevo en la discusión de la existencia del número racional siguiente a uno dado; a juicio de algunos alumnos "que no podamos decir el número siguiente (ya que para cualquiera que mencionemos siempre podemos decir otro que esté entre ambos), no quiere decir que no exista".

También *para gran parte de los alumnos estaba clara desde el principio la existencia de decimales periódicos y la infinitud de las cifras en este tipo de números.* Hubo más problemas en determinar la no existencia de números enteros con infinitas cifras; en un primer momento esta cuestión se presenta a los alumnos como un hecho establecido.

-*A raiz de las actividades con números de infinitas cifras, algunos alumnos dieron ejemplos de decimales infinitos no periódicos, como el número π o decimales con cifras arbitrarias.* Con el número π surgió, desde el principio, una cuestión interesante: π tiene infinitas cifras no periódicas y, sin embargo, proviene de una división (la de la longitud de la circunferencia entre su diámetro).

Igualmente, se puso de manifiesto que la exploración de los distintos tipos de expresiones decimales infinitas, sus paradojas, peculiaridades y el control de las mismas, no resultaron de interés para estos alumnos, que no se implicaron en una actividad investigadora. Esto pudo estar mediado, en gran medida, por los problemas actitudinales del curso, pero, en cualquier caso, dado que los alumnos de este nivel y en el ambiente escolar dominante tienen poca iniciativa en este terreno, en general, habría que dedicar tiempo de clase y atención sistemática a este tipo de exploraciones si pensamos que el trabajo en este aspecto es útil y tiene relevancia para nuestros objetivos.

Correspondencia entre la notación fraccionaria y decimal de los Números Racionales:

-En el *Pretest* se detecta que *la mayoría de los alumnos tienen tendencia a pensar que todos los decimales se corresponden con fracciones, pero carecen de argumentos para fundamentar su postura.* Se observa la inclinación a separar entre fracciones y enteros y hay algún alumno que tiene dificultad en asignar un mismo valor numérico a representaciones distintas. Igualmente, pocos alumnos parecen advertir que las fracciones equivalentes tienen el mismo valor.

-A raiz de los *ejercicios* planteados para trabajar la *conversión fracción-decimal periódico y viceversa* salieron a la luz las siguientes *dificultades*:

.Primera: La intuición de los alumnos de que decimales como 0,6666666666895 no pueden provenir de una división (y por tanto de una fracción), ya que su experiencia al hacer las divisiones es que una vez que las cifras del cociente empiezan a repetirse, ya se repetirán siempre; que la razón de tal fenómeno radique en la repetición de los restos no resulta significativo para ellos.

.Segunda: El argumento que permite establecer que todo decimal que proviene de una fracción será finito o periódico, a través de los restos de la división presenta mucha dificultad de comprensión para los alumnos; en principio, intentan reproducirlo sin entenderlo realmente y prácticamente ninguno de ellos es capaz de organizar un razonamiento con las premisas e implicaciones necesarias. Por otra parte, hay alumnos que afirman que a un decimal infinito no periódico no le corresponde ninguna fracción, pero sin dar justificación alguna de ello.

Pensamos que en este tipo de argumento hay varios pasos que se deben tener en cuenta para enlazarlos debidamente, y los alumnos de este nivel no están acostumbrados, o no tienen aún la madurez suficiente, para moverse en el terreno del razonamiento lógico deductivo.

.Dado que la mayoría de los alumnos se encuentran todavía en un nivel muy concreto de razonamiento, sería necesario trabajo repetido, con ejemplos concretos, que permitiera avanzar en los distintos puntos de dificultad del argumento. Estos puntos aparecen detallados en los aspectos relacionados con la comprensión, en la fecha 5-11-93 del Diario de la profesora-investigadora.

.Tercera: El caso del periodo nueve merece una consideración explícita detallada. Sobre este particular los alumnos, en general, mantienen su intuición primitiva de que 7,999... *no es igual que* 8 y de que la regla para convertir expresiones decimales en fracciones aproxima o no es válida en el caso del periodo nueve. El resto de las actividades destinadas a proporcionar argumentos a favor de la igualdad entre

7,9999... y 8, se realiza aisladamente y, aún cuando se explicitan las conexiones, éstas no resultan significativas para los alumnos. Los que aceptan la igualdad, parece que lo hacen sobre la base de que es un conocimiento establecido que deben dominar.

-En suma, no fue posible lograr que los alumnos establecieran de forma consistente la correspondencia fracciones-decimales finitos o periódicos.

Orden y densidad de los Números Racionales a través de la notación decimal:

-En el *Pretest* se detectan *bastantes problemas para ordenar decimales, y pocos alumnos advierten, en principio, la densidad de los decimales.*

-En el Examen realizado *al finalizar la Fase de Acción 1* los resultados obtenidos mostraron, sin embargo, que *los alumnos habían evolucionado de forma satisfactoria* en lo relativo al orden de los decimales y a la densidad, y no aparecieron problemas globales con respecto a estos puntos.

-En este sentido, podemos señalar que *los ejercicios planteados en la Ficha F11 resultaron muy interesantes en su tratamiento con los alumnos*, y que la estrategia ideada por ellos para comparar decimales (consistente en buscar el decimal con mayor número de cifras a la derecha de la coma y nombrar cuantas décimas, centésimas, milésimas, diez milésimas, etc. tenía, para luego hacer lo mismo con el resto de las expresiones decimales) resultó muy efectiva. Una vez encontrado un criterio para estudiar el orden en los decimales, resultó sencillo para los alumnos establecer la cuestión de la densidad. A través del reconocimiento de la densidad para los decimales, es fácil extrapolar al caso de las fracciones, pero esta conexión, que supone la previa identificación de las representaciones decimal y fraccionaria, no resultó inmediata para los alumnos.

Foco de Investigación 2:

La medida de superficies. El número racional como expresión de proporciones:

Este aspecto fue trabajado con los alumnos a partir de la ficha F8. A través de ella pudimos detectar que los alumnos se encontraban, en principio, desconcertados en el terreno de la medida de superficies. Asociaban el concepto de medir con "dar un resultado a través de una fórmula" o también, en un lenguaje más coloquial, "saber el espacio que ocupa algo", pero no eran capaces de delimitar algún procedimiento para averiguarlo.

Cuando estos niños realizaron actividades de medición, la tendencia inmediata fue medir con las unidades estándar del Sistema Decimal. *No se planteaban la necesidad de explicitar la unidad de medida; es curioso notar que un elemento tan importante para la propia definición de la medida, como es la unidad de medida, pase completamente desapercibido para los alumnos.* Esto puede ser debido a que en la EGB el tema de la medida se trabaja fundamentalmente a través del sistema métrico decimal y las fórmulas métricas. Para avanzar en este punto específico sería necesario plantear actividades que dieran a los alumnos oportunidad de realizar mediciones a través de distintas unidades, incluso escogidas por ellos mismos, de manera que tuvieran que enfrentarse con la necesidad de explicitar la unidad de medida como referencia y, al mismo tiempo, a la relatividad de la misma. *Pensamos que este es un punto importante para la comprensión de los números racionales en su aspecto geométrico, fundamental para avanzar hacia la comprensión de los números irracionales (ya que está en la base del problema de la inconmensurabilidad).*

Por otra parte, la cuestión relativa a las proporciones entre las figuras y a su mantenimiento, sea cual sea la unidad de medida, pasa también desapercibida para los alumnos. En principio, los niños establecen la comparación entre las figuras en términos aditivos, mediante diferencias, es decir, considerando cuántas unidades tiene una más que otra o cuántas unidades tienen una y otra, y no mediante proporciones.

Hemos de señalar también que la ficha F8, que nos ha permitido detectar estas deficiencias, no ha resultado demasiado efectiva para solucionarlas. A tal efecto convendría diseñar nuevo material.

<u>Conmensurabilidad de segmentos y expresión de su relación mediante un número:</u>

Este punto fue trabajado con los alumnos a través de la ficha F12 (Cuestión de Investigación específica). Por lo que respecta a la conmensuración de parejas de segmentos concretas, la mitad de los alumnos han logrado idear un procedimiento para encontrar dicha medida común, aunque no todos ellos han sido capaces de mantener el procedimiento conforme los casos avanzaban en dificultad. *Los procedimientos más frecuentes han sido el de Diferencias Sucesivas y el de División del segmento más pequeño mediante estimación para encontrar una parte alícuota.* Un dato que llama la atención es que *una gran parte de los alumnos son bastante descuidados en cuanto a precisión se refiere.*

La gran mayoría de los alumnos piensa que siempre hay un número que expresa la relación entre dos longitudes (hasta ahora los alumnos sólo se han movido en el ámbito de los Números Racionales). Una buena parte de ellos afirma que dos longitudes cualesquiera tendrán una parte alícuota. Muy pocos niños piensan que pudiera no existir un número que expresara exactamente la relación entre dos longitudes cualesquiera (13% del total); casi todos aluden a problemas de precisión, y *solamente uno argumenta que pudiera no existir la parte alícuota.*

Por lo que respecta al tipo de número con el que expresar la relación entre dos longitudes, la mayoría de los alumnos no contestan a este punto específico. Nuestra interpretación es que esto se produce por olvido, ya que esta cuestión no presenta una dificultad especial, visto el trabajo anterior y, sin embargo, no se destaca suficientemente como pregunta específica.

En cuanto a la coordinación entre el plano numérico y el geométrico, sólo un alumno establece la conexión entre ambos; en cambio, varios alumnos entremezclan indiscriminadamente los dos planos.

De lo anteriormente expuesto se deduce que la gran mayoría de los alumnos admiten la existencia de una parte alícuota para dos longitudes cualesquiera, es decir, admiten que dos longitudes cualesquiera son siempre conmensurables. En una primera interpretación, podríamos pensar que los alumnos están reproduciendo el mismo obstáculo que ya tuvieron los pitagóricos, y al que que se enfrentaron con la construcción de medidas inconmensurables. Sin embargo, hay varias cuestiones importantes que matizan esta primera impresión:

.Los alumnos en general trabajan y se contentan con un nivel de precisión bastante bajo y, por otra parte, uno de los dos procedimientos mayoritarios para conmensurar longitudes se basa en una aproximación. Esto no es causa de conflicto para ellos (ni siquiera la discrepancia de resultados) y, en ningún momento, surge la necesidad de precisión, ni de establecer la unicidad del resultado ni de discutir sobre los criterios para obtener el resultado correcto. No se plantean la necesidad de trascender el plano físico. Además, varios alumnos aluden al Sistema Métrico Decimal al referirse a la división de segmentos: "una millonésima parte", "aunque sea un milímetro" (refiriéndose a una parte muy pequeña, "le sobre una décima" (cuando, en realidad, el trozo sobrante corresponde a 1/3 del total)....

En estas circunstancias, ***el aparato conceptual y procedimental con el que los alumnos habrán de abordar el problema de la inconmensurabilidad se muestra indudablemente débil,*** *ya que en la aparición de medidas inconmensurable, la preocupación por la precisión y la trascendencia del plano físico juegan un papel fundamental.*

.Por otra parte, la ***falta de conexión entre los sistemas de representación geométrico y numérico****, más o menos sistemática, también puede constituir un obstáculo importante a la hora de iniciar el estudio de la Irracionalidad, lo cual presenta muchos más problemas por lo que a coordinación entre el plano numérico y el geométrico se refiere, debido a la presencia sistemática de los procesos infinitos.*

No tenemos claro hasta qué punto la propia formulación de la pregunta, en los términos aseverativos en que la hemos planteado, induce a una respuesta afirmativa sobre la existencia de una parte alícuota ya que, de hecho, pedimos el número que expresa la relación; tampoco está claro en qué términos podría formularse para evitar esta confusión y con un enunciado que permitiera que fuese comprendida, discutida y trabajada por los alumnos. Por otra parte intuimos que, a cualquier nivel en que se formule la pregunta por primera vez, se planteará el mismo problema.

Estaremos atentos a las implicaciones que los aspectos mencionados puedan tener para la comprensión de la inconmensurabilidad de longitudes en la fase correspondiente a la introducción de los números irracionales.

Representación en la recta de números racionales expresados a través de distintas notaciones:

-Ya en el *Pretest* se detecta que *la gran mayoría de los alumnos tienen un nivel muy deficiente para representar los números racionales (expresados a través de diferentes notaciones) en la recta numérica.* Esta es una deficiencia que se intenta subsanar desde un principio, para poder avanzar en el Foco de Investigación 2. También se observa un nivel bajo de asociación entre las notaciones numéricas de los racionales y el modelo de la recta, que impide a una gran parte de los alumnos asociar un número a una división decimal de la recta.

-Los resultados del examen realizado al final del proceso didáctico muestran que los alumnos continúan teniendo mucha dificultad en la representación en la recta de números racionales escritos en distintas notaciones, especialmente en la notación decimal, a pesar de la instrucción recibida; *uno de los problemas que se observa es que bastantes niños hacen marcas en la recta, pero no toman unidades iguales.* Este aspecto, el de la *aplicación números racionales-puntos de la recta* es importante, y se le ha de prestar especial atención para poder avanzar en el estudio de las características de dicha aplicación (bien definida, inyectiva, no sobreyectiva).

Sobreyectividad de la correspondencia Números Racionales-puntos de la recta:

-Asignación de un número a un punto cualquiera de la recta numérica, en la que están marcados el cero y el uno:

.Aunque la actividad correspondiente a esta cuestión (ficha F14) no se pudo desarrollar y concluir tal como se tenía previsto, en el comienzo de su realización se observó que *hasta aquel momento,* ***los alumnos no eran conscientes del criterio con que asignaban números a puntos de la recta****; esta actividad ayuda a algunos de ellos a explicitar el criterio de la medida de longitudes.*

.Un aspecto que llama la atención es que esta actividad resultó más problemática de lo previsto, a pesar de su similitud con la dedicada a la conmensuración de longitudes.

En el Examen 1, realizado *al final del proceso didáctico*, se planteó una pregunta voluntaria, destinada a explorar las intuiciones de los alumnos acerca de si los números racionales llenan o no la recta numérica, es decir, si en la intuición de los alumnos el modelo de la recta podía corresponder a los números racionales. *En principio, esta pregunta estaba formulada con la expectativa de que, después de la actividad sobre la conmensurabilidad de segmentos, los alumnos pudieran establecer una correspondencia entre puntos de la recta-longitudes-números y, dado que la mayoría de ellos pensaban* *que dos longitudes cualesquiera son conmensurables, establecieran que todos los puntos de la recta corresponden a números racionales.*

Las respuestas de los alumnos, sin embargo, revelaron otros aspectos .Uno de los puntos más destacados es la *creencia de que los racionales no llenan la recta debido a la necesidad de finalizar el proceso infinito de colocarlos todos y a la imposibilidad de hacerlo* (especialmente cuando este obstáculo, detectado en experiencias anteriores, se había intentado evitar planteando la pregunta de manera que un "genio" hubiera ya colocado todos los números en la recta). Nuestra interpretación es que *la propia formulación de la pregunta, en términos de números llenando o completando la recta, era mucho más compleja de lo que habíamos supuesto.* ***Los argumentos expresados por los niños ponen de manifiesto que la cuestión, así formulada, hace aflorar sus intuiciones más primitivas sobre la estructura del continuo lineal, sobre la correspondencia entre esta estructura y sus nociones acerca de los números, sobre el cardinal de los conjuntos infinitos y la correspondencia entre ellos y, en especial, sobre la no existencia de un final para los procesos infinitos.*** Estos son puntos clave para la comprensión del concepto de Número Real y de su estructura topológica, sin embargo, *el trabajo al respecto con alumnos de este nivel resulta uno de los puntos más abiertos y problemáticos de nuestra investigación*, ya que supone el manejo de instrumentos matemáticos basados en el uso riguroso de los procesos infinitos, y por tanto, con un gran nivel de sofisticación.

Nuestra decisión con respecto al tratamiento de este punto en concreto consiste en avanzar en la línea de establecer unas bases sólidas de la correspondencia números-puntos de la recta, pero prestando especial interés a los problemas, matices e intuiciones en torno al continuo lineal y a la correspondencia con el modelo de los números reales que puedan surgir en el transcurso de nuestro proceso.

Focos de Investigación 1 y 2:

<u>Concepto de Número Racional, distintas representacciones y su interrelación:</u>

-En el *Pretest* se advierte que muy pocos alumnos parecen tener clara la relación entre los conceptos de fracción y número racional.

-A partir de las actividades con las que se trabaja sobre las distintas representaciones de los números racionales y la interrelación entre ellas, *los alumnos pudieron captar que* ***las distintas representaciones de un racional tienen el mismo valor,*** *y que* ***las distintas representaciones tienen razón de ser, ya que permiten o facilitan el trabajo en diferentes situaciones.*** *A pesar de ello, la definición de Número Racional mediante sus distintas representaciones y las relaciones entre ellas sólo llegaban a captarlas los alumnos más adelantados*; al resto les costaba bastante trabajo ampliar la noción que tenían de cursos anteriores (identificación de números racionales con fracciones; o con fracciones y decimales en general, sin especificar de qué tipo; exclusión de los enteros del conjunto de los racionales porque no se consideran como fracciones, etc).

-En los resultados del *Examen 1* vuelve a ponerse de manifiesto que ***la asimilación y la integración de las distintas representaciones de los números racionales y las conexiones existentes entre ellas,*** *de modo que den lugar a la construcción del concepto de Número Racional,* ***resulta un tema complejo para estos alumnos.***

Concepto de Número Racional y relación con los distintos conjuntos numéricos manejados:
-A lo largo de distintas actividades realizadas se detectaron los siguientes problemas: a los alumnos les costaba trabajo asimilar que un entero sea también racional (parece que establecen una dicotomía entre entero y fracción, y que tienden a identificar este último concepto con el de racional), que los números negativos puedan ser otra cosa que enteros, y que el cero pertenezca a un conjunto numérico (puesto que, en opinión de algunos alumnos, "es neutro").

Primeras nociones sobre el concepto de Número Irracional:
-En el Pretest, ningún alumno puede identificar características que permitan distinguir entre números racionales e irracionales; con respecto a esta cuestión se observan fallos como identificar la oposición racional-irracional con positivo-negativo, o identificar los números irracionales con los imaginarios.

IV. 3. 2 Reflexión sobre los Aspectos Actitudinales

A continuación, pasamos a resumir los aspectos más importantes en relación al comportamiento y la actitud del grupo de alumnos a lo largo de esta Fase de acción 1:

-Ya desde los comienzos del curso la actitud y el comportamiento de los alumnos resultó problemática. Desde el principio, la Puesta en Común se veía muy dificultada debido a intervenciones desordenadas de los niños, a su falta de reflexión sobre la pertinencia o no de las intervenciones propias y falta de atención a las de los compañeros. La postura que la profesora tomó en un principio con respecto a esta cuestión fue la de detener la clase cuando se presentaban actitudes contraproducentes, explicitarlas, e intentar recuperar al final el tiempo perdido.

Sin embargo, las medidas tomadas por la profesora no desbloqueaban la postura de los alumnos de falta de responsabilidad y estímulos basados en sanciones externas, además de que no mejoraban la dinámica de la clase y, por consiguiente, no favorecían el avance en el trabajo conceptual.

Uno de los factores que se detectaron como causa de los problemas de dinámica del grupo fue el desnivel existente en el ritmo de aprendizaje entre diversos sectores de alumnos del grupo, así como la diferencia en el grado de madurez de unos y otros niños. Algunos alumnos empezaron a destacarse como especialmente conflictivos.

Por otra parte, empezó a extenderse un cierto malestar entre los alumnos con respecto al material que la profesora-investigadora atribuyó, fundamentalmente, a dos motivos: por una parte, los alumnos no estaban acostumbrados a hacer esfuerzos sin la completa conducción del profesor y no eran capaces de asumir esta reponsabilidad; por otra, la presentación del material podía resultar monótona y poco estimulante para niños de esa edad. En este sentido, se observaba en los trabajos escritos el desinterés por contestar a las cuestiones planteadas de forma significativa y aprovechando el trabajo en común, así como la tendencia a responder puntual y aisladamente a las diferentes cuestiones, sin proponerse establecer relaciones ni conexiones entre distintos aspectos tratados en una situación que pudieran estar interrelacionados.

Toda esta serie de conflictos planteó la necesidad de delimitar los problemas y dificultades surgidos, buscar sus posibles causas y tomar una serie de decisiones mediante las que superar los bloqueos e inhibiciones detectados. Para ello la profesora-investigadora solicitó de los alumnos su opinión sobre los problemas surgidos en la dinámica de trabajo en el aula y las actitudes del grupo, sus iniciativas para resolverlos y su compromiso al respecto; además, informó con regularidad a la tutora y al jefe de estudios del estado de la cuestión. Puesto que los problemas de comportamiento eran comunes también en otras asignaturas, el jefe de estudios llamó seriamente la atención al respecto en el grupo.

A pesar de una ligera mejoría a raiz de las actuaciones anteriores, seguía habiendo problemas en establecer una dinámica apropiada para la Puesta en Común. Cuando un concepto resultaba algo complicado, los alumnos protestaban, y la mayor parte de ellos tendía a explicar lo que entendían o no entendían en sus círculos más próximos. Resultaba muy difícil para la profesora mantener el orden y la operatividad en gran grupo e ir desarrollando en los alumnos actitudes de autodisciplina y conciencia de grupo. En relación a esta cuestión, el análisis de la interacción didáctica correspondiente a la sesión en que fue realizada la acitividad F12 muestra los siguientes datos:

-El porcentaje de acciones dirigidas a la gestión del trabajo en el aula resulta alto en la Puesta en Común. Las acciones encaminadas a gestionar el trabajo en el aula parten casi exclusivamente de la profesora, mientras que en lo relativo a la construcción de conocimiento se produce un equilibrio en la interacción con una ligera superioridad en las actuaciones de los alumnos.

-En general, se observa que el peso fundamental en la interacción corresponde a las actuaciones de Fijar normas y Establecer significados (alrededor del 80% de las acciones en las diferentes tareas). Además, después de la primera etapa de la clase, pasa a ser prioritario Fijar normas frente a Establecer significados. Este es un dato importante que ha de tenerse en cuenta, ya que la frecuencia de las interacciones destinadas a Fijar normas corresponde (pasada la primera etapa de la clase) a la mitad del total de interacciones que han tenido lugar, en detrimento de acciones como Establecer significados y Enjuiciar. Si bien hemos de tener en cuenta que en la etapa correspondiente a la Puesta en Común, especialmente en la segunda parte, un buen número de las intervenciones destinadas a Fijar normas o convenios están dentro de la finalidad correspondiente a Construcción de Conocimiento en el Aula, es conveniente llegar a unos términos de acuerdo y buen hábito en cuanto a normas se refiere, con objeto de poder dedicar más esfuerzos y energía a actuaciones más productivas relativas a la Comprensión del Contenido.

A mediados del trimestre, los alumnos más adelantados y más interesados comenzaron a expresar su descontento por el ritmo que llevábamos y su insatisfacción con el bajo nivel del grupo en general; algunos pensaban que las cosas que hacíamos eran irrelevantes y planteaban que había varios compañeros a los que les costaba un trabajo tremendo entender "cosas que estaban claras" y que "no se podía trabajar así". Este descontento era compartido por la profesora y, a medida que avanzaba el tiempo y el clima actitudinal no presentaba una evolución significativa, aumentó su preocupación porque el trabajo conceptual se veía enormemente dificultado, el avance era muy lento, con resultados bastante pobres en los alumnos y con muchísimo esfuerzo para ir desarrollando el plan previsto. Alrededor del 25 de Noviembre empezó a plantearse serias dudas sobre la viabibilidad de continuar con la Fase de Acción 2, ya que los conceptos que se habían de tratar en ella eran demasiado complejos como para ser abordados con la dinámica que se venía manteniendo en el grupo.

Ante este estado de cosas, la profesora-investigadora y el director del trabajo de investigación se plantearon la pertinencia de continuar el trabajo iniciado. El desnivel entre los alumnos y los problemas de disciplina y atención podían estar originados por esta causa, además de por otros factores, como el hecho de que los contenidos fueran poco estimulantes para los alumnos por resultarles familiares de la etapa de EGB, y el que se hubiera dedicado bastante tiempo a la discusión en gran grupo, siguiendo una dialéctica que quizás resultara excesivamente prolija para alumnos de esta edad, que estaban más predispuestos para un trabajo práctico y procedimental.

-En suma, la actitud de los alumnos a lo largo del desarrollo de la Fase de Acción 1 ha resultado ser un factor de extrema importancia, hasta el punto de habernos hecho cuestionar la viabilidad de nuestra investigación con este grupo de alumnos.

Los *principales problemas* detectados han sido:

.La falta de disciplina, autocontrol y la falta de atención de gran parte de los alumnos hacia sus compañeros, que ha dificultado especialmente las Puestas en Común.

.Desinterés bastante generalizado de los alumnos por abordar las tareas propuestas y descontento con el material didáctico.

.Insatisfacción de algunos con el propio proceso de aprendizaje, que encontraban lento y poco significativo.

.Tensión y agotamiento de la profesora-investigadora por sus dificultades para resolver los problemas que se iban planteando.

Algunas *explicaciones de esta situación* las podemos encontrar en los siguientes datos:

.Importante desnivel entre los alumnos del grupo en su formación conceptual, así como en el grado de madurez e interés por el proceso didáctico.

.Desinterés por el tópico de estudio, motivado por su similitud con contenidos estudiados durante la anterior etapa de EGB. Al no ser conscientes de sus deficiencias conceptuales y del objeto que tenía subsanarlas, los alumnos tenían la sensación de que no se producían avances en su aprendizaje.

.La novedad de la metodología y la falta de costumbre de los alumnos en el trabajo autónomo y la participación en un proceso dialéctico para la construcción del aprendizaje.

.La falta de recursos por parte de la profesora para ir adaptando la metodología prevista a las posibilidades reales de los alumnos, a través de procedimientos que estimularan positivamente el cambio de actitud en los niños; en lugar de pretender provocar un cambio a partir de procedimientos coercitivos, cuando el intercambio de opiniones y la discusión con el grupo en torno a los problemas actitudinales se revelaba como poco efectiva.

Todas estas circunstancias han sido factores determinantes de un avance conceptual bastante escaso y limitado con respecto al plan previsto. El bajo nivel alcanzado por los alumnos y las dificultades en la dinámica de trabajo hacían prever serios obstáculos para abordar un tema de la complejidad conceptual como la que presenta la introducción a la irracionalidad y al concepto de Número Real.[18]

IV. 3. 3 Toma de decisiones

Una decisión fundamental se tomó en relación con el problema actitudinal, cuyo descontrol continuado habría tenido serias repercusiones sobre el avance conceptual previsto.

En un principio, se consideraron dos opciones:

.Suspender el trabajo de investigación con el grupo con el que lo habíamos iniciado y repetir la experiencia a partir del segundo trimestre con otro grupo de alumnos.

.Posponer la Fase de Acción 2 e introducir un nuevo tópico de trabajo para dedicarnos a superar los problemas actitudinales y de comportamiento, sin estar sometidos a la presión del contenido y del plan previsto en la investigación; caso

[18] Además, hemos de contar con otra variable importante: el alto porcentaje de suspensos en las asignaturas conceptuales de nuestro grupo de alumnos en relación a los otros grupos de 1º de B.U.P. del Instituto Albaycín. Esto puede verse en los resultados comparados de la 2ª y 3ª evaluación, en el Anexo IV.5. (No hay datos disponibles en este sentido de la 1ª evaluación).

de que la evolución en la cuestión actitudinal lo hiciera factible, continuar con la Fase de Acción 2 en el mismo grupo de partida.

Decidimos elegir la segunda opción por los siguientes motivos:

.El cambio de grupo podía suponer dificultades añadidas de rechazo por parte de los alumnos al cambio de profesor, metodología, etc., además de la adaptación a dicho cambio.

.Las razones a favor de esta opción se basaban en argumentos de poca entidad (una ligera superioridad de resultados en el pretest del grupo contraste), o bien subjetivos (frustración de la profesora-investigadora con respecto al grupo asignado)

.El cambio de grupo de alumnos no implicaba garantía de éxito en el problema detectado y si había grandes posibildades de un nuevo rechazo, reforzado por un fracaso previo, asumido públicamente.

Puesto que una de las causas principales detectadas del mal funcionamiento del grupo había sido el desinterés por el contenido, se consideró conveniente un cambio de tópico, en particular el cambio al tópico de Combinatoria, que se había revelado como novedoso y estimulante para los alumnos en años precedentes y que, posiblemente, facilitara la superación de los problemas actitudinales y de dinámica de grupo. También, liberar a los alumnos de la presión de una planificación y a la profesora del interés específico y la tensión vinculadas al desarrollo de la investigación, podían permitir centrar la atención en el aspecto actitudinal y en su mejora por parte de todos los agentes implicados.

Caso de que no se produjera una evolución satisfactoria y fuera realmente inviable continuar nuestra investigación con el grupo de alumnos asignado, quedaba la posibilidad de retomar la primera opción.

Otra dificultad que consideramos fue que la interrupción del trabajo sobre el contenido específico de nuestra investigación podía provocar un retroceso en algunos de los conocimientos y destrezas sobre los Números Racionales, a duras penas madurados por los alumnos. Este inconveniente, que en un primer momento arrojó dudas sobre la conveniencia de una interrupción del proceso previsto, podía subsanarse mediante un repaso de los principales puntos de interés al retomar nuestra investigación. Incluso este aplazamiento podría suponer una ventaja adicional, evitando la saturación de los niños, al revisar los puntos problemáticos con los números racionales, que convenía aclarar y madurar, de modo que permitieran un buen avance en los aspectos previstos a continuación, referidos a números irracionales y Números Reales.

La Fase Intermedia entre las Fases de Investigación 1 y 2, correspondiente en nuestro esquema de Investigación-Acción a la Espiral Adyacente destinada a solucionar problemas actitudinales y de dinámica en la interacción del grupo (apartado I.7) está descrita en el Anexo IV.3.

Al término de dicha fase intermedia se había observado una evolución positiva significativa. La profesora-investigadora consiguió una mejora en su manera de afrontar las cuestiones referidas a la dinámica del grupo: afianzó progresivamente su capacidad de percibir y aislar motivos concretos causantes de alteraciones y rupturas en la dinámica de clase y, al mismo tiempo, de idear y poner en práctica medidas determinadas para su gestión adecuada. Se puso de manifiesto un avance progresivo en su control de la situación y en la confianza en sí misma para dominar los problemas que se iban presentando. En cuanto a los alumnos, también respondieron favorablemente a esta modificación y, a pesar que los cambios no resultaron espectaculares, las mejoras fueron estimulantes para ellos llegando a encontrarse más cómodos que al principio. Por ello, transcurridas unas semanas, tomamos la decisión de proseguir nuestra investigación con este grupo de alumnos.

En la Fase de Acción 1 se habían puesto de manifiesto deficiencias en la comprensión de varios de los aspectos considerados dentro de nuestros Focos de Investigación sobre Números Racionales. Esta información previa de las limitaciones y dificultades de los alumnos nos aportó un conocimiento profundo de la situación de partida con el que abordar la introducción de los números irracionales y los Números Reales (Fase de Acción 2). Además, estimamos que el nivel de comprensión alcanzado por los alumnos en diversos aspectos de los Focos de Investigación relativos a los Números Racionales, junto con la progresiva adaptación de los agentes del estudio a un esquema de trabajo interactivo, hacían posible, e incluso estimulaban, una profundización en los siguientes Focos de Investigación, relativos a los Números Reales.

Merece la pena destacar que las anteriores consideraciones se refieren al grupo-clase, en general. Es decir, no hemos basado nuestra valoración exclusivamente en los alumnos más avanzados (que han evolucionado favorablemente en la comprensión de los puntos de interés trabajados en la Fase de Acción 1), ni tampoco en los más retrasados (aquellos cuyo nivel de asimilación y comprensión no haría viable un avance real hacia contenidos más sofisticados). Lo que resulta valioso y es significativo, bajo nuestro punto de vista, es que sea el grupo-clase, como tal, el que haya generado condiciones (bajo la dirección de la profesora-investigadora) que permitan seguir hacia delante en la profundización de la comprensión conceptual respecto al tema que nos ocupa.

IV.4 Revisión del plan general de investigación a partir de los resultados de la Fase de acción 1

Como hemos señalado en el apartado anterior, después de la interrupción del plan previsto al finalizar la Fase de Acción 1 para dedicarnos a trabajar sobre los problemas principales que habían surgido en dicha fase (especialmente a nivel actitudinal), se decidió que la evolución experimentada por los alumnos y por la profesora permitía continuar nuestra investigación en la Fase de Acción 2.

Para pasar a la siguiente fase (Fase de Acción 2), se retomaron los resultados y reflexiones que configuraban el estado de la cuestión al finalizar la Fase de Acción 1, esencialmente los referidos a la Comprensión del Contenido por parte del grupo de alumnos. A partir de dichos resultados, se revisaron explícitamente los puntos fundamentales sobre Números Racionales que era conveniente conocer para avanzar hacia la construcción de los conceptos de Número Irracional y Número Real, intentando aclarar aquellos aspectos que se habían registrado como problemáticos. Además, estos resultados y las reflexiones sobre ellos, en especial los relativos a las cuestiones de investigación específicas, fueron tenidos en cuenta por la profesora-investigadora para abordar la comprensión de los alumnos y el tratamiento del contenido en la siguiente fase.

En concreto, los puntos que quedaban pendientes al retomar esta nueva fase de acción eran los siguientes:

-Repasar los contenidos que en la Fase de acción 1, correspondiente a los Números Racionales, se detectaron como más importantes o más problemáticos para los alumnos, y cuyo dominio convenía consolidar a la hora de avanzar en la construcción de los conceptos de número irracional y Número Real. Para ello se elaboró un <u>Cuestionario de Repaso</u> que los alumnos trabajaron en su casa durante el periodo de vacaciones de Navidad y tuvieron que entregar al regreso. La Fase de Acción 2 comenzó con la Puesta en Común sobre el Cuestionario de Repaso.

-Volver a realizar la <u>actividad Ficha 14</u>, que quedó pendiente de finalizar en la Fase de Acción 1.

En principio esta actividad, en la que había que hacer corresponder un número a un punto señalado en la recta en la que estaba marcada la unidad, se pensó para ser realizada en el ámbito de los Números Racionales. El objetivo principal era comprobar si los niños establecían dicha correspondencia a partir de la medida de longitudes y, sobre esta base, pensaban que todos los puntos de la recta correspondían a números racionales (puesto que la gran mayoría de los alumnos pensaban que dos longitudes cualesquiera eran conmensurables).

Al tener que introducir la actividad en la Fase de Acción 2 teníamos dos opciones: realizarla al comienzo, antes de que fueran introducidos los números irracionales, o intercalarla en otro momento del plan diseñado al principio del curso.

Debido a que uno de los principales problemas de la etapa anterior había sido el rechazo de los alumnos hacia el material y hacia unos contenidos que les parecían aburridos por su poca novedad, pensamos que era mejor no comenzar esta nueva fase de investigación con actividades a las que los alumnos habían sido reacios en la anterior etapa, sino aprovechar para empezar la novedad de la introducción de los números irracionales. La Ficha 14 se retomaría pues más adelante, aunque los objetivos previstos en principio pudieran ser modificados por la consideración de los números irracionales por parte de los alumnos.

Así pues, el plan previsto en un principio para la Fase de Acción 2 quedaba tal como había sido diseñado, con las modificaciones correspondientes a la realización del Cuestionario de Repaso al comienzo y la realización de la actividad F14 dentro del desarrollo del programa, tal como puede verse en el siguiente cuadro:

Tabla 4. 30: Revisión de la Planificación para la Fase de Acción 2.

Actividades	**Tiempo**
Cuestionario Repaso	1 sesión
Actividad sobre Raíces Cuadradas	1 sesión y parte de otra
Cuestión de Investig. 1	1 sesión
Actividad sobre El Número de Oro	1 sesión
Actividad F16	1 sesión
Actividad F14	1 1/2 sesión
Actividad F17	11/2 sesión
Actividad Tangram	1 sesión
Cuestión de Investig. 2	1 sesión y parte de otra
Cuestión de Investig. 3	1 sesión y parte de otra
Actividad sobre El Número Pi	1 sesión
Cuestión de investig. 1 (bis)	1 sesión
Actividad F18	1 sesión
Actividad F19	1 1/2 sesión
Examen	1 sesión

En el anexo IV.4 damos cuenta en detalle de la planificación de las dos nuevas actividades introducidas.

CAPITULO V
FASE DE ACCION 2:
IMPLEMENTACION, OBSERVACION Y RESULTADOS, REFLEXION

V. 1. Implementación

De acuerdo con el esquema general de nuestra investigación (Capítulo I, apartado I.7), una vez analizados los resultados, tomadas las correspondientes decisiones y realizado los reajustes pertinentes al concluir la Fase de Acción 1 con respecto al plan primitivo, pasamos a describir la Implementación de la Fase de Acción 2, correspondiente a los Números Irracionales y los Números Reales.

V.1.1 Instrumentos de observación

Los instrumentos para la recogida de información en esta fase han sido los previstos en la Planificación, cuyas características y funciones fueron descritos en el apartado IV. 1. 1. Brevemente, dichos instrumentos han sido:

-Diario de la profesora: con las funciones de

.Recoger el plan previsto y las observaciones realizadas en cada sesión.

.Observar y dejar constancia de la evolución del proceso; reflexionar sobre la práctica y realizar su ajuste.

. Reconstruir el proceso didáctico.

-Producciones escritas de los alumnos:

.Se han recogido las producciones escritas de los alumnos correspondientes a un total de nueve actividades realizadas en clase y al examen realizado al final de esta Fase de Acción 2.

.Estas producciones escritas corresponden a las respuestas de los alumnos a cuestiones y ejercicios planteados y aportaciones realizadas durante el proceso de corrección, análogas a las descritas en la fase de acción anterior; serán analizadas y estudiadas con los mismos criterios empleados en la Fase de Acción 1.

-Grabaciones en audio y vídeo:

.Se dispone de un total de seis grabaciones en audio, correspondientes a sesiones de clase en las que se trataron cuestiones complementarias de la investigación; y de siete grabaciones en vídeo, correspondientes a la realización de una Cuestión de Investigación específica (estas grabaciones en vídeo aparecen transcritas íntegramente en el Anexo V.3).

.Las grabaciones en audio y vídeo tienen la misma función que en la anterior fase de acción y serán analizadas de forma análoga.

V.1. 2 Balance entre la Planificación y la Acción

La siguiente tabla presenta la estructura general de las Actividades, el Tiempo y los Instrumentos de Observación previstos en la Planificación de la Fase de Acción 2, y compara este plan con su realización. Para cada sesión se marcan unos instrumentos de observación y se señalan los finalmente utilizados.

Tabla 5.1: Esquema general del desarrollo de la Fase de Acción 2.

PLANIFICACION			IMPLEMENTACION		
Actividades	**Tiempo**	**Instrumentos de Observación**	**Actividades**	**Tiempo**	**Instrumentos de Observación**
Cuestionario Repaso	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo Documentos	Cuestionario Repaso	1 sesión: 2-2-94	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo: 45´
Actividad sobre Raíces Cuadradas	1 sesión y parte de otra	-Diario -Grabación audio	Actividad sobre Raíces Cuadradas	13/4 sesión: 3-2-94 4-2-94 (3/4 sesión)	-Diario -Grabación audio: 35´
Ver Descripción Sesiones: 2-2-94			Tarjeta 1 Cuestionario Repaso	1/4 sesión: 4-2-94 (1/4 sesión)	-Lectura y archivo Documentos
Cuestión de Investigación nº 1	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo	Cuestión de Investigación nº 1	21/2 sesiones: 8-2-94 9-2-94 10-2-94 (1/2 sesión)	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo: 34´+23´+26´
Actividad sobre El Numero de Oro	1 sesión	-Diario -Grabación audio	Ver Descripción Sesiones: 9-2-94		
Actividad F16	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación en audio.	Actividad F16	1 sesión: 10-2-94 (1/2 sesión) 11-2-94 (1/2 sesión)	-Diario -Lectura Documentos -Grabación audio: 25´

Actividad F14	1 sesión y parte de otra	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo	Actividad F14	1sesión: 11-2-94 (1/2 sesión) 15-2-94 (3/4 sesión)	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo: 46´
Ver Descripción Sesiones: 2-2-94			Comentarios a Tarjeta 1 Cuestionario Repaso	1/4 sesión: 15-2-94 (1/4 sesión)	-Diario
Ver Descripción Sesiones: 2-2-94			Tarjeta 2 Cuestionario Repaso	1 sesión: 16-2-94	-Diario -Grabación audio: 30´
Actividad F17	11/2 sesión	-Diario -Lectura y archivo Tarjeta ? -Grabación audio	Actividad F17 (Falta finalizar corrección)	2 sesiones y parte de otra: 17-2-94 18-2-94	-Diario -Grabación audio: 65´
Actividad Tangram	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo Tarjeta ? -Grabación audio	Actividad Tangram	1 sesión y parte de la siguiente: 22-2-94 (23-2-94)	-Diario
			-Finalizar actividad Tangram -Finalizar actividad F17	1 sesión: 23-2-94	-Diario
Ver Descripción Sesiones: 9-2-94			Exposición trabajos sobre "El Número π"	11/4 sesión: 24-2-94 25-2-94 (1/4 sesión)	-Diario -Lectura Documentos
Ver Descripción Sesiones: 9-2-94			Exposición trabajos sobre "El Número de Oro"	1/2 sesión: 25-2-94	-Diario -Grabación vídeo: 22´
Cuestión de Investigación nº 2	1 sesión y parte de otra	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo	Cuestión de Investigación nº 2	1 sesión: 1-3-94	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo: 58´
Cuestión de Investigación nº 3	1 sesión y parte de otra	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo			Ver Descripción Sesiones: 1-3-94 y 3-3-94

Actividad El Número π	1 sesión	-Diario -Grabación audio			Ver Descripción Sesiones: 9-2-94
Cuestión de investigación nº 1 (bis)	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo	Cuestión de Investigación nº 1 (bis)	1 sesión: 2-3-94	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo: 17´
Ver Descripción Sesiones: 1-3-94			Visionado de vídeos con los alumnos	1 sesión: 3-3-94	-Diario
-Actividad F18 -Tarjeta con Cl4	1 sesión	-Diario -Lectura de Documentos -Lectura y archivo de Tarjeta -Grabación en audio.	Actividad F18	1 sesión y parte de la siguiente: 4-3-94 (8-3-94)	-Diario -Grabación en audio: 30´
Actividad F19	1 1/2 sesión	-Diario -Grabación audio			Ver Descripción Sesiones: 3-3-94
Cuestión de Investigación nº 3	1 sesión y parte de otra	-Diario -Lectura y archivo Documentos -Grabación vídeo	Cuestión de Investigación nº 3	Parte de una sesión: (8-3-94)	-Diario -Lectura y archivo Documentos
Ver Descripción Sesiones: 9-3-94			-Repaso del contenido con Mapas Conceptuales	2 sesiones: 9-3-94 10-3-94	Grabación en audio: 30´
Examen	1 sesión	-Diario -Lectura y archivo de Documentos	Examen	1 sesión: 11-3-94	-Diario -Lectura y archivo de Documentos

Las actividades correspondientes a Cuestiones Investigación específicas están enmarcadas en negrita, y las correspondientes a cuestiones complementarias, en doble línea.

Globalmente estaban previstas 18 sesiones, pero son necesarias 23 sesiones para implementar el plan previsto. Se observa un incremento notable del tiempo empleado con respecto del planificado en la Cuestión de Investigación 1 y en la actividad F17. Además, en esta Fase de Acción se observan mayores desajustes con respecto al plan previsto que en la fase anterior; la justificación de estas alteraciones vendrá indicada en la correspondiente descripción de las sesiones.

V.1. 3 Desarrollo de la Acción

Pasamos a describir el desarrollo de esta Fase de Acción 2, transcurrida entre el 2 de Febrero y el 11 de Marzo de 1994. Como en el caso de la Fase de Acción 1, la reconstrucción se ha llevado a cabo a partir del Diario de la profesora investigadora y de las grabaciones en audio de algunas de las sesiones, utilizadas para ilustrar algunos de los puntos expuestos. También describiremos aquellas sesiones de clase que resulten significativas para presentar el desarrollo del proceso, con los mismos criterios y mediante los mismos epígrafes que en la fase de acción anterior (apartado IV. 1. 3).

V.1. 4 Descripción de las sesiones

-2 Febrero 94:

.Plan previsto:

Puesta en Común sobre el Cuestionario de Repaso, que los alumnos tenían que completar en las vacaciones de Navidad.

.Ejecución:

El cuestionario se ha terminado con excepción de la pregunta relativa a la densidad en el conjunto de los racionales; la pregunta sobre la representación de números racionales en la recta ha tenido un tratamiento muy superficial.

.Aspectos actitudinales:

Sólo ha sido necesaria una parada al principio de clase, después el orden ha ido bastante bien.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Se ha suscitado una vez más la discusión sobre si el número más grade "existe pero no podemos saber cuál es" o "sabemos que no puede existir"; parece que entre los mismos alumnos se han decantado por la segunda alternativa. El argumento definitivo lo ha proporcionado un alumno: "Suponte que hay uno que es el más grande, le llamo x, entonces x+1 es más grande".

-Sigue habiendo duda de si los números enteros son racionales y fracciones. Parece que saben (como algo establecido) que los enteros son racionales, pero no que sean fracciones. Hemos quedado en que son las fracciones 2/1 = 4/2 =... y los decimales 2,0 (y 1,9999...). .Hemos establecido también que los enteros tienen un número finito de cifras, que las fracciones son cocientes de números enteros y que los decimales infinitos no periódicos no pueden expresarse en forma de fracción porque no vienen de una fracción; esto último lo ha argumentado una alumna.

-Para resolver la duda de si 4,5888...era mayor que 4,637 (o similares), los alumnos han tenido la iniciativa de escribir el último número de la forma 4,637000..., con lo cual se ha resuelto la duda automáticamente.

-Sólo dos alumnas han preguntado dudas después de clase.

.Valoración:

-Los alumnos en general, no entienden bien la pregunta sobre la diferencia entre un número racional y una fracción, pero parece que entienden mucho mejor la respuesta (es decir, el que las fracciones equivalentes correspondan al mismo número racional). Estoy de acuerdo con la opinión de una alumna de que "es difícil preguntar esa respuesta".

-Por lo que respecta a la cuestión de que los decimales infinitos no periódicos no corresponden a números racionales porque no pueden ponerse en forma de fracción, al ser la expresión decimal proveniente de cualquier fracción finita o periódica, no sé cuantos son capaces de seguir la argumentación. Parece que hay más alumnos capaces de hacer la correspondencia fracciones-decimales finitos o periódicos y dejar aparte los infinitos no periódicos.

-En la discusión relativa a si los números enteros son también racionales, he olvidado llamar la atención sobre el hecho de que lo son porque tienen los atributos de los racionales: se pueden representar en forma de fracción y en forma decimal.

-El tiempo ha venido muy justo y he decidido tomar tiempo del recreo para acabar con lo previsto. Pienso, sin embargo, que es importante respetar el ritmo natural y el tiempo de la clase, más que intentar adaptarse artificialmente a los planes previstos.

.Toma de decisiones:

-Después de revisar los documentos escritos de los alumnos sobre el Cuestionario de Repaso (apartado V.2.1), he tomado la decisión de comentar con ellos los errores generales y pasar dos Tarjetas, para que sean contestadas individualmente:

.Tarjeta 1: sobre la definición de los números racionales, a partir de sus distintas representaciones: fraccionaria -teniendo en cuenta las fracciones equivalentes-, y decimal -finita o periódica.

.Tarjeta 2: sobre la representación en la recta de números racionales: distintas representaciones de un mismo número racional: fracciones y representaciones decimales, fracciones equivalentes; y representación exacta de decimales periódicos a través de su expresión fraccionaria.

-3 Febrero 94:

.Plan previsto:

Realizar actividad sobre Raíces Cuadradas: Definición de la raiz cuadrada, búsqueda de un procedimiento para calcularla, expresión decimal de las raíces cuadradas, otras expresiones decimales infinitas no periódicas.

.Ejecución:

No ha habido alteraciones con respecto al plan previsto.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos conciben √a como una <u>operación</u> para hallar el número que multiplicado por sí mismo da a; la operación puede ser exacta o no. Para nada se habla de √a como un número, sino como una operación. A sugerencia mía también han dicho que era "el lado de un cuadrado de área a",

-En la cuestión relativa a la invención de un procedimiento para calcular √7 explicitando cada paso (ver Actividad "Raíces cuadradas", en el Anexo III.3), <u>todos</u> los alumnos intentan expresar el algoritmo tradicional para el cálculo de la raiz cuadrada en pasitos cortos; resulta muy difícil sacarlos de ahí. Tengo que insistir mucho en que se imaginen que cada uno es un extraterrestre que está buscando un número que multiplicado por sí mismo da 7 y que no sabe nada de reglas. Al final, la mayoría de los grupos van haciendo encajes sucesivos de decimales, por exceso y por defecto.

-En la tercera cuestión (sobre el resultado de √2 en la calculadora, que multiplicado por sí mismo no da 2), los alumnos dicen que la calculadora redondea. Para comprobar si realmente da 2, propongo multiplicarlo a mano. De pronto una alumna dice que el decimal tiene que ser infinito, porque si fuera finito al multiplicar la última cifra por sí misma no podría dar 0! Esto siempre es verdad para las raíces enteras, es decir, si no son exactas son infinitas.

<u>.Valoración:</u>

El argumento propuesto por la alumna sobre la expresión decimal de √2 es muy interesante, porque creo que puede ser fácilmente comprendido por los demás compañeros.

<u>.Toma de decisiones:</u>

Volver sobre el argumento mencionado en la Puesta en Común de mañana, y plantear las preguntas: ¿Cómo sabéis que la expresión decimal de √2 es infinita? ¿Puede ser periódica?

-4 Febrero 94:

<u>.Plan previsto:</u>

-Finalizar Puesta en común de la actividad sobre Raíces Cuadradas

-Plantear a los alumnos una Tarjeta (Tarjeta 1) con la cuestión sobre la correspondencia entre los números racionales-fracciones-decimales periódicos, formulada de manera que tengan que elegir entre varias opciones posibles.

<u>.Ejecución:</u>

No hay contratiempos con respecto al plan previsto.

<u>.Aspectos relacionados con la Comprensión:</u>

-Para los alumnos en general, la raiz de un número sigue siendo "una operación".

-Varios niños me han dicho antes de empezar la clase que la tarde anterior habían estado buscando muchas cifras decimales de √2. Alguno de ellos estaba bastante interesado en cómo sería la expresión decimal. No es inmediato establecer, inspirándome en sus ideas del día anterior, que la expresión decimal, si no es entera, no puede ser finita. Pero al fin parece que se comprende el razonamiento del producto, viendo lo que pasa con las últimas cifras.

-Pasamos entonces a discutir si la expresión decimal, que ya sabemos que tiene que ser infinita (si la raiz no es exacta), puede ser periódica. Un alumno opina que no puede ser infinita no periódica porque eso no existe.

"(P) Cuando yo hago la raiz de un número y empiezan a salir decimales, como por ejemplo √7, ¿qué pasa? ¿son finitos? √7 era 2,6457... ¿cuántos decimales voy a estar sacando? ¿acabaré alguna vez de sacar decimales?

(A) No

(P) No, ¿por qué?

(A) Porque no.

(A) Yo creo que sí, porque no puede haber números infinitos, ... nada más que los periódicos. Puede que tenga muchas cifras, pero siempre habrá un límite.

(A) Es que en una raiz cuadrada nunca van a acabar los decimales.

(P) ¿Por qué no?

(A) Porque no viene de una división."

Cuando saco a la luz que si la expresión de √7 es periódica, entonces se podrá expresar como una fracción, los alumnos, en general, dicen que entonces no puede ser periódica.

(P) Si √7 fuera periódico, se podría expresar como una fracción. Se podría expresar como a/b...

(A) Es que √7 no es una fracción, ni mucho menos. Por eso, no puede ser periódico.

(A) Sí se podría expresar como una fracción, porque una división puede dar muy próximo a 7, como 6,9999...

(A) No, próximo no. Yo digo exactamente.

(A) Entonces no puede llegar a 7; no hay número exacto.

(A) Si es infinito, ¿cómo va a haber un número exacto?

(A) No puede ser periódico porque entonces tendría una fracción, y el 7 no tiene un número que multiplicado por sí mismo dé 7; no exactamente."

-Otro argumento importante es el de extrapolar el argumento de los decimales finitos, intentando multiplicar por sí mismos decimales infinitos. Vemos como no podemos empezar a multiplicar, pero la niña que ha lanzado la idea sugiere que empecemos por el medio, a ver cómo va, digo que no podemos, que tenemos que empezar a multiplicar por el último.

-Al final parece que se llega a que la expresión decimal de √7 tiene que ser infinita no periódica, pero los niños no piden una demostración del argumento clave, que es que no puede ser expresada en forma de fracción.

-Valoración:

Al parecer, para los alumnos, las fracciones entran en la categoría de "números exactos", y como algunos de ellos creen que no hay un número exacto que multiplicado por sí mismo dé 7 (a raiz de su experiencia al buscarlo), establecen a partir de aquí que √7 no puede ponerse como una fracción. Otros intuyen que no puede ponerse como una fracción porque una raiz es algo distinto de una fracción ("√7 no es una fracción, ni mucho menos"), y de ahí establecen que la expresión de √7 no puede ser periódica. Lo que sí es claro es que,en ningún caso los alumnos parecen tener necesidad de una demostración.

.Toma de decisiones:

-Debido a las dificultades que tienen los alumnos con la expresión decimal de raíces de números enteros, decido no introducir la cuestión de las raíces de racionales expresados en forma decimal.

-Decido no avanzar en la discusión sobre la multiplicación de decimales infinitos, debido a que los alumnos en este nivel carecen de los instrumentos necesarios para abordarla.

-A pesar de que los alumnos no muestran ningún interés en saber por qué la √2 no puede ser expresada en forma de fracción, propongo como ejercicio voluntario la actividad "Demostración de que √2 no puede escribirse en forma de fracción" (ver Anexo III.3), que conduce a la demostración.

-8 Febrero 94:

.Plan previsto:

Realizar la Cuestión de Investigación 1: Tipos de decimales infinitos conocidos por los alumnos, status de números que tiene a su juicio las distintas expresiones decimales y características que lo otorgan.

.Ejecución:

-Los alumnos estaban en una conferencia en la clase anterior y tardan unos diez minutos más de lo previsto en llegar, además, algunos de ellos (unos ocho o diez) no aparecen.

-El vídeo tiene problemas de funcionamiento al principio, pero se consigue arreglarlo para grabar casi toda la Puesta en Común.

.Toma de decisiones:

A pesar del retraso y las faltas, decido plantear la Cuestión de Investigación, ya que no hay otras actividades previstas que puedan reemplazarla y al día siguiente puedo volver a retomar el tema con todos los alumnos.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Parece que los alumnos se quedan un poco desconcertados con la Cuestión propuesta, me parece observar que especialmente con lo de si son números o no. De todos modos, van escribiendo y en un tiempo que parece razonable recojo.

-Los argumentos para conceder estatus de número a las expresiones decimales son: que se pueda operar con ellas, que están formadas por cifras, que vengan de una operación, que se puedan representar en la recta; es curioso que muy pocos de estos argumentos los hayan puesto por escrito.

-Por lo que se refiere a los decimales infinitos no periódicos. Parece que algunos alumnos van discriminando entre las cifras arbitrarias, de invención, y las infinitas cifras pero determinadas (de las raíces).

A favor de que los decimales infinitos correspondientes a las raíces cuadradas son números se alude a que:

.tienen un nombre,

.se pueden hacer operaciones con estas expresiones,

.se pueden representar en la recta (mediante encajes sucesivos).

En defensa a ultranza de que no son números están:

.la incontrolabilidad de esa expresión,

.la imposibilidad de concebir como un "algo" una cosa que no acaba y se pierde en una nube de infinitud,

.la inexistencia de $\sqrt{2}$ porque un número con infinitas cifras no lo puedes multiplicar por sí mismo para que dé 2.

-Al final de la clase se quedan los dos niños de los bandos contrarios, a favor y en contra de que $\sqrt{2}$ sea un número. Discuten sobre qué tipo de número es $\sqrt{2}$, y uno de ellos argumenta que si es un número, tiene que pertenecer a un grupo. Cuando pregunta a su interlocutor que "dónde está, si no pertenece a los racionales", éste responde que "No está en el "grupo" de los racionales sino en el de los "radicales"".

-Trabajando con dos alumnas que han intentado el ejercicio voluntario sobre la imposibilidad de expresar $\sqrt{2}$ en forma de fracción, me doy cuenta de que el razonamiento es demasiado sofisticado para ellas, que son dos alumnas inteligentes y con interés.

De todas formas, parece que algunos alumnos dan por asumido que $\sqrt{2}$ no es una fracción porque *"un radical no puede ser lo mismo que una fracción"*, y no ven necesidad de demostrar nada.

.Valoración:

.Creo que en la Puesta en Común han surgido bastantes puntos de interés.

-9 Febrero 94:

.Plan previsto:

Finalizar Puesta en Común de la Cuestión de Investigación 1

.Ejecución:

No hemos podido acabar la Puesta en Común, debido a que la discusión ha resultado más densa de lo previsto. Han faltado por analizar los aspectos relativos a la representación en la recta.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Hoy la clase se ha centrado en establecer la tipología de los decimales, dando criterios de discriminación entre los distintos tipos, y en clasificar los tipos en grupos; los alumnos han establecido dos grandes grupos periódicos-no periódicos, y dentro de éstos les ha llamado la atención el subgrupo arbitrarios-no arbitrarios; parece que no es demasiado problemático hacer esta última discriminación.

-En cuanto a las razones por las que los decimales infinitos no periódicos sean números o no, nos hemos centrado en las razones a favor.

-Los niños han demostrado mucha curiosidad por el número π. He aprovechado para proponer un trabajo de investigación al respecto, inmediatamente después de la clase ya se han ofrecido algunas parejas. También he aprovechado para proponer la opción de hacer el trabajo de investigación sobre el Número de Oro y otros alumnos se han interesado por este tema. De esta forma, los contenidos sobre el número π y el Número de Oro serán tratados a través de los trabajos de investigación de los alumnos y su exposición en clase.

.Valoración:

-Sigue costando trabajo razonar la no periodicidad de la expresión decimal de la raíces, principalmente porque no se maneja con soltura la correspondencia decimal periódico-fracción, y los alumnos utilizan este argumento de forma circular para justificar lo que intuyen: que las raíces no exactas tienen infinitas cifras no periódicas. Aún así, hay niños que siguen manifestando sus sospechas de que no puedan obtener un periodo; la verdad es que no llegan a establecer un argumento con rigor y sin circularidad. Parece que los alumnos utilizan cualquier idea de los compañeros para apoyar sus intuiciones, y que yo construyo mi discurso lógico sobre estas ideas aisladas expuestas por algunos de ellos.

-10 Febrero 94:

.Plan previsto:

-Finalizar Puesta en Común de Cuestión de Investigación 1.

-Al discutir sobre los distintos resultados, parece ser que los alumnos los atribuyen a errores; piensan que a un punto sólo puede corresponderle un número y, además, es el mismo aunque se halle por procedimientos distintos.
-A la hora de discutir la generalización de la asignación de un número a un punto cualquiera de la recta se plantean las dudas de un alumno sobre si √2 tiene una representación en la recta y de una alumna sobre el caso de los decimales infinitos no periódicos. Hay muchos alumnos que piensan que los únicos números que corresponden a puntos de la recta son los enteros, naturales, fracciones, decimales periódicos (insisto en que los reconozcan y los aglutinen a todos como Racionales); los decimales infinitos no periódicos no pueden corresponder a puntos de la recta. Otro alumno dice, sin embargo, que él considera que sí y hay alguno más que lo apoya, pero a todos les resulta difícil explicar por qué sostienen lo que creen; entonces el alumno que piensa que a los decimales infinitos no periódicos les corresponde un punto de la recta, argumenta su postura con las aproximaciones sucesivas y yo retomo el argumento con los segmentos encajados.
Dejamos la discusión sin establecer conclusiones definitivas y pido a los alumnos que cada uno exprese su opinión, pero que no borren la primera que han escrito, en caso de que quieran añadir algo o incluso modificarla.
.Valoración:
-Debido a la opción de enfocar la atención en el procedimiento de las diferencias sucesivas y en su rigor, he perdido la oportunidad de conocer más a fondo cuáles son los presupuestos con los que los alumnos asignan números a los puntos de la recta. Sin embargo, he considerado que en el proceso didáctico ha sido más conveniente en este momento la convergencia, sobre todo por mantener un ritmo adecuado en la clase; de otro modo, he observado que los alumnos tienen mucha tendencia a distraerse cuando los compañeros expresan intuiciones con poco nivel de claridad, y yo pretendo profundizar más en los supuestos implícitos.
No obstante, en la discusión han salido a la luz intuiciones importantes, como la opinión mayoritaria de que a un punto dado de la recta no puede corresponderle un decimal infnito no periódico y la duda de algunos alumnos al respecto; también el hecho de que para avanzar sobre su duda los alumnos mencionados pregunten si √2 tienen una representación en la recta; en este caso, el punto dado para asignarle un número podría ser el correspondiente a √2. Otra cuestión es si a través de los procedimientos que hemos trabajado podríamos realizar la asignación correcta, más aún, teniendo en cuenta que en el apartado previo a la pregunta general los puntos en cuestión han sido presentados para que se les asigne un número mediante un proceso físico, y no indicando, por ejemplo, la relación que tiene la longitud a la que corresponde con la longitud unidad. Es conveniente tener en cuenta esta última reflexión para el diseño de futuras actividades al respecto.

-16 febrero 94:

.Plan previsto:

-Pasar a los alumnos la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Investigación, relativa a la representación en la recta de números racionales presentados con distintas notaciones: fraccionaria, decimal finita, decimal periódica. Esta tarjeta se contestará individualmente y se calificará.

-Corregir la Tarjeta 1, relativa a la correspondencia entre las distintas representaciones de los números racionales.

-Comenzar actividad F17: Construcción geométrica de cuadrados de área dada, medida de sus lados.

.Ejecución:

No ha habido tiempo de comenzar la actividad F17. La he entregado a los alumnos para que avancen sobre ella en casa.

.Aspectos actitudinales:

Sigue habiendo problemas de orden y de disciplina en la Puesta en Común.

.Aspectos relacionados con la comprensión:

-Antes de pasar la Tarjeta 2, al comentar los problemas que yo había detectado con el Cuestionario de Repaso, los alumnos siguen teniendo dificultad en los siguientes puntos:

.La representación en la recta de fracciones impropias con números grandes (ej. 364/99). Algunos alumnos apuntan que "se tardaría un siglo en contar" (supongo que se refieren al procedimiento habitual para representar fracciones en la recta), otros tienen la idea de pasar la fracción a su expresión decimal, pero esto no nos vale en el caso de que el decimal sea periódico. Planteo entonces el averiguar cuántas unidades enteras completas habría que coger para representar ese decimal y qué parte faltaría de la siguiente unidad; este procedimiento no resulta fácil de captar para la mayoría de los alumnos.

.Una dificultad importante que se ha detectado es la resistencia por parte de los alumnos a aceptar que los decimales periódicos se representen exactamente a través de una fracción. Hay un conflicto a la hora de aceptar que sean representaciones de un mismo número si uno es exacto y el otro no llega.

.Otra duda que se plantea, aunque no supone mayor problema una vez aclarada, es que las distintas representaciones de un mismo número racional corresponden al mismo punto.

-Los alumnos tienen problemas con la representación de los racionales en la recta: tardan bastante más de lo previsto y parecen inseguros en la realización del ejercicio; incluso después de recoger todos los ejercicios, hay alumnos que no han quedado satisfechos con lo que han hecho y han pedido volverlo a hacer en casa y entregarlo de nuevo al día siguiente; me ha parecido conveniente aceptar esta propuesta.

-En la corrección de la Tarjeta 1, una alumna ha planteado la siguiente cuestión acerca de la representación de los decimales periódicos: si éstos no se pueden representar exactamente en la recta porque nunca llego al final, el representarlos exactamente en forma de fracción es como una trampa (no estás representando lo mismo). He intentado explicarle que las distintas aproximaciones decimales son números con cifras finitas, distintos de 3,666...., son aproximaciones todas distintas de ese número, el cual considerado en sí, es decir, con sus infinitas cifras decimales sí es exactamente 33/9.

-Los niños siguen muy interesados en sus trabajos sobre el números π.

.Valoración:

La dificultad detectada sobre la exactitud de la correspondencia entre los decimales periódicos y las fracciones es muy interesante. El conflicto surgido tiene razón de ser, y es difícil de solucionar porque implica el paso de considerar una expresión decimal infinita como proceso, es decir, en términos de infinito potencial, a considerarla como un ente, en términos de infinito actual.

-17 Febrero 94:

.Plan previsto:

Realizar actividad F17

.Ejecución:

la realización de esta actividad está resultando muy lenta con respecto a lo previsto.

.Aspectos actitudinales:

-A los alumnos les cuesta bastante trabajo mantener la atención y esto provoca que aumente la indisciplina.

-Una alumna propone cambiarse de grupo, para lo cual se ha puesto de acuerdo con otro compañero; no tengo inconveniente en principio. Pero luego hay más alumnos que quieren hacer lo mismo; les explico que esto puede afectar al equilibrio de los grupos y no lo permito, aunque estoy abierta a revisar casos en que los alumnos tengan motivos justificados.

.Aspectos relacionados con la comprensión:

-Al comenzar la actividad, en el ejercicio donde había que medir el cuadrado construido sobre uno de área 4 y otro de área 9, cuando los lados de los tres cuadrados son lados de un triángulo rectángulo, los alumnos no sabían si el área había que medirla en milímetros; algunos alumnos lo estaban intentando así con la longitud del lado del cuadrado y otros medían ésta a cuadritos de hoja de papel. Les he llamado la atención a todos de que ese cuadrado no estaba solo, sino en relación a otros dos con área 4 y 9. Les he preguntado qué medirían los lados de dichos cuadrados y han dicho que 2 y 3, les he preguntado que si 2 y 3 centímetros, milímetros, cuadritos o qué, y les he dicho que

medían 2 y 3 unidades; con las unidades cuadradas correspondientes, como en el caso de 4 y 9, había que medir el área y el lado del cuadrado.
Los alumnos quedan desconcertados y no se les ocurre cómo se puede medir entonces; un alumno ha apuntado que por el Teorema de Pitágoras, y les he dicho que trabajaran sobre ello. A algunos grupos les ha costado más trabajo que a otros. A los que primero habían solucionado el problema teóricamente, les he dicho que lo midieran "a mano" con esas unidades. Un niño ha optado por conmensurar tal como habíamos hecho otras veces.
-En la Puesta en Común, los alumnos establecen que la longitud del lado del cuadrado de área 13 es √13, a través del teorema de Pitágoras; el que su expresión decimal sea infinita no periódica es aceptado por los alumnos, en general. Aunque ha habido un niño que dijera "la expresión exacta" de raiz de 13 con un número finito de decimales, los demás le han corregido enseguida.
Pero cuando pregunto que si lo midieran con esa unidad de medida y con los procedimientos que han utilizado en experiencias anteriores qué resultado podría dar, se establece la siguiente discusión:

"(A) No daría justo.

(P) ¿Pero si se pudiera dibujar muy bien dibujado, con la punta del lápiz muy fina, ¿te sale justo?

(A) No

(P) ¿Y qué número te saldría?

(A) √13

(P) La √13 no te sale.

Hay mucho ruido de fondo y eso entorpece la discusión.

(P) ¿Tú qué habías dicho?

(A) Había dicho que saldría una fracción, pero me he equivocado, porque entonces no sería infinito no periódico."

Algunos alumnos han intentado conmensurar √13 y dan resultados en forma de fracción, pero los resultados no son próximos a √13. Pregunto entonces que, aún si lo hiciera bien por los procedimientos que conocemos para conmensurar longitudes, ¿me podría salir alguna vez exacto?, y algunos alumnos dicen que no, pero con muchas dudas. Al final llegamos a establecer que si mido la longitud del lado del cuadrado de área 13 físicamente con medidas muy precisas, salen aproximaciones finitas más o menos largas de √13, pero aproximaciones. A propósito de esto, empiezo a hablar sobre las limitaciones de la realidad, y el razonamiento que estamos llevando a cabo se refiere a figuras y longitudes ideales, que sólo son "perfectas" en nuestra cabeza, pero los alumnos no entienden nada.

"(P) Si tengo unos medios (físicos) buenísimos, por muy buenos que los tenga, ¿hasta dónde podré llegar?

(A) (Dudas)

(P) Hasta unos cuantos decimales.

(P) Entonces, ¿qué pasa con estas medidas que son así? (me refiero a las inconmensurables, es decir, a las correspondientes en este caso a raíces irracionales). Que cuando las mido "a mano", ¿qué pasa?

(A) Que da más o menos preciso.

(P) Que da más o menos preciso. Pero, ¿alguna vez va a poder dar "lo que es"?

(A) No

(P) Da aproximaciones finitas, más o menos precisas según los instrumentos de medida, el dibujo...

Pero los teoremas, los teoremas ¿a qué se aplican? ¿a figuras ideales o a este cuadrado que yo he pintado aquí, que está torcido aquí el lado? ¿o al cuadrado perfecto que yo pensaría?

(A) Al cuadrado perfecto.

(P) Al cuadrado perfecto que yo pensaría. El teorema de Pitágoras no está escrito para éste, sino para el que todos entendemos, como el cuadrado que yo me imagino. Pues lo mismo pasa con estas longitudes, que si yo las mido "a mano" no dan lo que dan en realidad, en el cuadrado que yo me imagino de área 13.

(A) (Silencio).

(P) ¿Alguien entiende esto?

(A) (Risas nerviosas).

(P) ¿Alguien entiende lo que acabo de decir?

(A) No, no , no...

(P) El terorema de Pitágoras se refiere a los cuadrados perfectos, que yo imagino, pero los que yo pinto, los que yo pinto, ¿esto es un cuadrado perfecto? Si me pongo a mirarlo bien, no. Pero todos nos imaginamos lo que es, ¿no?

(P) Las longitudes que vosotros tenéis ¿miden $\sqrt{13}$ con infinitas cifras no periódicas?

(A) No, no

(P) En la hoja, no. ¿Y en tu cabeza?

(A) (Silencio)

(P) ¿En tu cabeza, ¿qué miden?

(A) (Silencio y risas nerviosas a l final).

-Una alumna muestra reticencias a dibujar el cuadrado de área 2 con dos de área 1, porque el lado tendría que medir $\sqrt{2}$, es decir, una medida con infinitas cifras no periódicas, y eso no se podía dibujar; ¡no quería unir los extremos de los catetos!!! Y una vez unidos se resistía a creer que eso tuviera área 2 porque tenía conflicto con el lado (ya que este era un segmento finito y acabado, y la expresión de su medida era infinita no periódica).

.Valoración:

El comentario filisófico acerca de los cuadrados ideales y verdaderos en contraposición a las figuras físicas imperfectas y a la imposibilidad de determinar su "verdadera" medida con medios físicos resulta fuera de lugar. En realidad, me he entretenido en mis cavilaciones metafísicas, en lugar de prestar atención al problema de comprensión de los alumnos. Este radica en la dificultad de comparar la información procedente de medir a través de dos técnicas distintas: medida de un segmento con la regla y medida de la longitud de una hipotenusa mediante la aplicación del teorema de Pitágoras; el conflicto surge de identificar los resultados en términos de notaciones diferentes: notación decimal y notación radical.

Además, algún alumno pone de manifiesto la resistencia a identificar los resultados obtenidos mediante las distintas técnicas, debido a no aceptar que un procedimiento infinito y, en cierto sentido, indeterminado (la medida a través de aproximaciones decimales sucesivas) se corresponda con un resultado bien delimitado y tangible (la longitud de una diagonal).

El establecer las conexiones entre ambas técnicas de medida e intentar abordar los conflictos subyacentes es una cuestión que **queda pendiente en estos momentos.**

-18 Febrero 94:

.Plan previsto:

Finalizar actividad F17.

.Ejecución:

-Hemos empezado con la Puesta en Común bastante tarde, y no se ha podido finalizar.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos están muy inquietos con respecto a la cuestión del permiso que me pidieron algunos para poder cambiar de grupo, y me han planteado el tema nada más comenzar la clase. Les he dicho que hoy había que terminar la ficha 17 en los grupos que se empezó y el próximo día, antes de empezar la nueva tarea, lo reconsideraría. He tenido que dejar bien claro al principio de la clase que hay que dedicarse a trabajar más las matemáticas en lugar de delegar la responsabilidad en los demás y en el grupo. Cada uno tiene que asumir la responsabilidad del propio trabajo y hacerlo lo mejor que pueda.

Muy pocos alumnos habían intentado acabar la actividad F17 en casa, tal como yo había encargado. La mayoría ni siquiera lo habían intentado. Les he dicho que hoy había que finalizar la actividad y que al día siguiente la tenían que entregar para ser calificada.
-Los alumnos, en general, no parecían interesados por atender a las explicaciones de los compañeros sobre dudas planteadas al principio de la clase, aunque éstos se estuvieran expresando con bastante claridad. He tenido que ponerme seria, y ordenarles que hicieran el esfuerzo de entender. Parece que han reaccionado bien y se han puesto a trabajar.
.Aspectos relacionados con la Comprensión:
-En la Puesta en Común cuesta trabajo hacer ver a los alumnos la diferencia entre cuadrados construibles directamente a partir de sus lados (enteros) y aquellos que no podemos construir directamente a partir de sus lados, porque éstos no corresponden a medidas enteras o racionales. Parece que los alumnos aprenden el proceso de construcción de cuadrados de área dada como una técnica, pero sin discriminar bajo qué condiciones es necesario aplicar este proceso de construcción y por qué.

"(P) Si intentara construir directamente un cuadrado de área 3 a partir de su lado, no podría. Sería una aproximación, porque el lado sería aproximado; sólo podría aproximar hasta un decimal finito, pero así no sale exacto."

Aún así, da la impresión de que a los alumnos no les resulta muy significativa esta puntualización.
-Más adelante surge la siguiente discusión, en la que vuelve a ponerse de manifiesto que los alumnos separan las raíces irracionales de los números racionales; las raíces irracionales tienen expresiones decimales infinitas no periódicas y la diferencia con los decimales periódicos la establecen en la existencia de una regla para convertir a éstos últimos en fracciones:

"(P) Un cuadrado de área 12, ¿se puede construir a partir del procedimiento anterior?
(A) Sí, sí
(P) Vale. Y una vez que lo construyo, ¿qué mide su lado?
(A) √12
(P) Esta longitud mide √12. ¿Y √12 qué expresión decimal tiene?
(A) Infinita no periódica.
(P) ¿Es racional √12?
(A) No
(A) No se puede poner como una fración.
(P) ¿√12 se puede poner como una fracción?
(A) No
(P) No, ¿por qué?

(A) Porque no se sabe cuando acaba, no se sabe cuántos ceros le vas a tener que poner debajo.

(P) Pero un periódico tampoco se sabe cuántos ceros le vas a tener que poner debajo.

(A) Un periódico, sí; porque tienes tu regla.

(P) ¿Y quién dice que no hay una regla para pasar los decimales infinitos no periódicos a fracción?

(A) Si no sabes cómo acaba...

(P) Tampoco sabes cómo acaba un periódico...

Bueno, un infinito no periódico no tiene regla para pasarse a fracción; pero es porque si yo tuviera una regla para pasarlo a fracción, ¿su expresión decimal cómo sería?

(A) Finita o periódica.

(P) Luego entonces no puede ser."

-También se ha visto que el punto 2 en la recta quería decir dos unidades, y análogamente los puntos 3, 1/2, ¡y $\sqrt{2}$! Entonces he construido un cuadrado de área 2, a partir de dos cuadrados de área1 (una unidad de la recta) y parece que han convenido en que si traslado esa longitud el punto extremo es $\sqrt{2}$, no sín antes expresar alguna reticencia:

"(A) Es que infinito no periódico, no lo puedes dibujar.

(P) Infinito no periódico no lo puedes dibujar directamente, pero a través del lado del cuadrado sí lo puedes dibujar. "

.<u>Valoración:</u>

-No sé si todos los alumnos han captado que el cuadrado cuya diagonal trasladamos para dibujar $\sqrt{2}$ en la recta tiene que tener como lado la unidad de la recta. Esto me recuerda la cuestión de las unidades, que no están puestas en la ficha, y ahora creo que está bien que no lleven escrita la u de unidad, porque eso ha dado pie para plantearnos la relatividad de las unidades.

-El hecho de que haya cuadrados que se pueden construir directamente, ya que puedo construir el lado, y otros cuyo lado no puedo construir directamente, razón por la cual tengo que utilizar una técnica para construir este tipo de cuadrados a partir de otros construibles directamente, no parece resultar significativo para los alumnos; concentran sus energías en aprender la técnica, ya que en el nivel en que se encuentran resulta un proceso que no es obvio para ellos y cuyo dominio les resulta estimulante.

.<u>Toma de decisiones:</u>

He planteado a los alumnos la última cuestión tratada en el apartado anterior y les pedido que expliquen en la ficha su comprensión sobre ella.

-22 Febrero 94:

.Plan previsto:

-Concretar con los alumnos los gupos que van a exponer al día siguiente su trabajo sobre el número π.

Realizar actividad "Tangram": Construcción de un cuadrado con las piezas del tangram chino, medida de todos los lados de las piezas del tangram tomando como unidad la longitud de uno de ellos.

.Ejecución:

-Se han presentado cinco grupos para exponer sus trabajos sobre el número π. Tendrán un cuarto de clase cada uno, empezando mañana.

-No se ha podido terminar la Puesta en Común de esta actividad.

.Aspectos actitudinales:

La actividad manipulativa ha mantenido a los alumnos muy entretenidos.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

Por lo que respecta a la medida de los lados de las piezas:

-Los alumnos no han hecho ademán de medirlas con regla, sino que han elegido uno de los lados como longitud unidad, tal como se pedía. Según el triángulo más pequeño, unos han cogido el cateto y otros la hipotenusa.

-Al no dar exactas las medidas, dos grupos han conmensurado; uno ha dado el resultado en forma de fracción y el otro en forma de decimales.Cada uno de estos grupos ha elegido una unidad distinta de las dos mencionadas.

Los demás grupos parece que estaban más despistados.

-Ya en la pizarra, un alumno dice que, eligiendo de unidad de medida el cateto pequeño, el cateto del grande mide dos, pero la hipotenusa mide entre dos y tres; parece que los demás compañeros están de acuerdo (aunque algunos habían medido tres). Cuando pregunto cómo averiguar esa medida al alumno de la pizarra, éste dice que con el teorema. de Pitágoras, y da $\sqrt{8}$ = 2,8284... La conmensuración del grupo que ha dado el resultado en decimales es 2,75. Los alumnos parecen admitir sin problema que $\sqrt{8}$ es la medida exacta y la otra una aproximación.

-Seguidamente, el grupo que ha tomado como unidad la hipotenusa pequeña dice sus medidas: el cateto pequeño mide 8/11. Les pregunto si esa es la medida exacta; ése es un triángulo rectángulo y podemos aplicar el teorema de Pitágoras. Toca el timbre y dejo pendiente averiguar qué mediría exactamente ese cateto.

-Al final de la clase, una de las alumnas del último grupo viene a consultar conmigo la cuestión que he dejado pendiente, y otro compañero que también está interesado en el asunto sugiere que se podría hacer con el teorema de Pitágoras <u>al revés</u>. Lo hacemos y da $1/\sqrt{2}$ = 0,707... (¡8/11=0,72!).

.Valoración:

-Creo que el que los alumnos piensen que la medida exacta de la hipotenusa es $\sqrt{2}$, en lugar de la aproximación decimal obtenida a partir de la conmensuración con el lado, se debe a que ellos consideran las fórmulas matemáticas como exactas. No creo que capten la cuestión de la existencia de longitudes inconmensurables con la unidad (existencia que, por otra parte, sólo puede concebirse en el plano ideal). Los alumnos trabajan con dos sentidos diferentes del término medir: averiguar la medida a través de una fórmula geométrica y conmensurar dos longitudes, a través de diferencias sucesivas, divisiones sucesivas o aproximaciones decimales sucesivas. Los niños diferencian entre estos dos sentidos del término medir, pero no les plantea ningún problema la dualidad en los resultados: aceptan $\sqrt{n}$ como expresión de una construcción geométrica y, por tanto, como medida exacta y cuando conmensuran piensan que la medida es aproximada. Lo que no se plantean es la integración conceptual de ambas informaciones: no es una cuestión problemática para ellos.

Cuando yo intento diferenciar entre el plano físico, en el que están llevando a cabo la conmensuración, y el plano ideal, en el que dicha conmensuración se prolongaría infinitamente, ya que no existiría una parte alícuota que permitiera dar un resultado en forma de fracción, de forma que se puedan integrar ambos modos de medida, los alumnos quedan fuera de este tipo de discurso; si bien es curioso señalar que, en un momento en que yo estaba hablando sobre la medida en el plano ideal, un alumno me ha preguntado si "entonces, no existiría ningún cuadrado de verdad físico" (!).

-23 Febrero 94:

.Plan previsto:

-Finalizar actividad del Tangram.

-Comentar con los alumnos mis observaciones después de corregir sus escritos sobre la actividad F17.

.Ejecución:

Ha habido problemas con el aparato de audio y no se ha podido grabar la sesión.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos han llegado más tarde de lo habitual de la clase de Educación Física. Además no han hecho las actividades que quedaron pendientes para que finalizaran en casa.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-La longitud que uno de los grupos de ayer midió con el número 8/11, resulta ser (a partir del cálculo algebraico) $1/\sqrt{2}$. He pedido que comparen ese número con la medida 8/11 y algunos alumnos han pasado las dos expresiones a decimal, mediante la calculadora, resultando que se aproximaban mucho. Les he preguntado entonces cuál de las dos expresiones era la correcta y, en general, han dicho que la de la fórmula. Cuando he preguntado por qué, algún alumno ha dicho que porque venía de una fórmula. Pero cuando he intentado de nuevo sacar a la luz el conflicto y les he preguntado por qué las dos cosas salían diferentes, se han quedado perplejos. Han empezado entonces a manifestar dudas con respecto a la manipulación algebraica del teorema de Pitágoras. La he vuelto a explicar paso a paso, pero hay una carencia de relación entre esta manipulación algebraica y el significado del término "medir", incluso tampoco establecen conexiones entre las fórmulas para averiguar superficies, por ejemplo, y el significado del término "medir". En cuanto a la diferencia de resultados, creo que no podemos discutir en más profundidad ni avanzar sobre las primeras opiniones: las fracciones y decimales finitos son aproximaciones y la fórmula da el resultado correcto.

-Luego hemos pasado a hacer los cálculos con la unidad cateto pequeño, y les cuesta mucho esfuerzo comprender que otra longitud mida $2\sqrt{2}$ unidades "cateto". Algunos lo entienden muy rápido, pero la mayoría se desespera. Les digo que hay pocas longitudes diferentes (algunos apuntan que sólo 4), que intenten hacerlo en casa.

-Pasamos a los comentarios sobre la actividad F17:

-La mayoría de las opiniones expresadas están sin justificar, a pesar de haber reiterado la importancia de la justificación y de su expresión por escrito. El motivo puede ser la falta de hábito y la dificultad inherente de reflexionar sobre el propio pensamiento y organizarlo de forma coherente, tal como se requiere en la expresión escrita.

-Comenzamos con la posibilidad de operar con raíces cuadradas. Intentan entonces justificarla, aludiendo al libro, a $\sqrt{12} + \sqrt{12} = \sqrt{24}$, a $\sqrt{12} * \sqrt{12} = 12$, a sus clases de antes, a $2\sqrt{2}$, etc... Les digo que me parece bien que me lo justifiquen así, pero que lo justifiquen. Les llamo la atención sobre la expresión $\sqrt{12} + \sqrt{12} = \sqrt{24}$, al ratillo comprueban que no y dicen $2\sqrt{12}$.

-Por lo que respecta a la representación en la recta, se adelantan los alumnos que trasladan longitudes. Ponemos sin problema incluso $2\sqrt{3}$. Les pregunto qué unidad tiene que tener el cuadrado de área 1 y dicen que la marcada en la recta. Les llamo la atención sobre eso.

-Planteo entonces qué número le puede corresponder a un punto cualquiera de la recta, y ahora convienen en que también $\sqrt{2}$. Cuando pregunto si estiman que entre esa longitud y la unidad se podrá buscar una parte que encaje aunque sea muy pequeña, contestan que "Claro". Cuando insisto, algunos sospechan y sacan a la luz el carácter infinito de la expresión de esos números. Les explico cómo si hubiera una parte que encajara, eso daría lugar a una fracción y entonces no sería un decimal infinito no periódico.

-Para finalizar, una alumna plantea que los decimales infinitos no periódicos que provienen de una raiz sí se pueden poner en la recta pero, ¿y los otros infinitos no periódicos? Les planteo la convergencia de la expresión decimal, pero la cuestión queda en si llega o no llega. Les digo que cualquier aproximación finita no llega pero se acerca cada vez más; para llegar tendrían que considerarse las infinitas cifras.

.Valoración:

-Creo que hay varios alumnos que son capaces de asociar los números irracionales con la no existencia de una parte alícuota con la unidad de medida, quizás basándose en la idea de su expresión decimal infinita no periódica y la no existencia de una parte decimal alícuota. Sin embargo, en el nivel en que nos encontramos y tratándose de nuestra primera a proximación al tema, resultaría excesiva la profundización en conexiones más profundas y específicas entre ambos conceptos.

-En cuanto a la petición de considerar las infinitas cifras en forma actual, creo que está fuera del nivel de los alumnos de esta edad, y que el tratamiento de este tema excede nuestras posibilidades.

-24 Febrero 94:

.Plan previsto:

Exposición de los alumnos de sus trabajos sobre el número π.

.Ejecución:

El componente de uno de los grupos que exponen (una pareja) está indispuesto; por este motivo aplazo su exposición hasta el día siguiente.

Sólo uno de los grupos ha preparado la exposición. El resto de los grupos quieren hacerla otro día, pero al no haber motivos justificados, suspendo estas exposiciones, aunque dejo abierta la posibilidad de que los alumnos entreguen el trabajo por escrito.

.Aspectos actitudinales:

-Pido opinión a los alumnos sobre si quieren ayudar a dar nota o no. Una gran parte no quiere pero otros dicen que sí. No obligo, pero dejo la posibilidad de que lo haga el que quiera con unas normas previas.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Los alumnos del primer grupo que expone dan la definición de π y los cálculos que han hecho ellos: explican cómo han medido un lapicero y un bote y les da 3,151515.... y 3,2. Y planean la siguiente cuestión: después de hacer muchos cálculos de esos, les surge la pregunta de cómo se sabe cuál es la verdadera y que el valor verdadero es 3,14159.... Les devuelvo la pregunta diciendo que si no lo han encontrado y dejándola también para el resto de la clase. Cuando la recuerdo al final, una alumna aventura que porque coincidirían la mayoría de los que realizaron esa medida.

-Luego pasan a dar varios valores históricos de π, y cuentan como cuanto más incultos son los pueblos más basta es la aproximación. Dicen la aproximación de Arquímedes. Yo suscito la cuestión de qué ventajas tiene el aproximar con polígonos de cada vez más lados y, aunque convienen en que se va acercando cada vez más a la circunferencia y se acerca muchísimo, creen que es mejor, claro, medir la circunferencia. Llamo la atención sobre la unidad de medida, que es un trozo, y los trozos cada vez más pequeños que puedo obtener con los polígonos, y entonces me dice Katerina que divida los milímetros.

-Uno de los alumnos que exponen apunta cómo mucha gente dedicó mucho tiempo a buscar la expresión decimal finita o periódica de π , hasta que en el s. XVII se demostró que era infinito no periódico. También explica que los cálculos de decimales de π (aunque ya se sepa que es infinito no periódico) se mejoran y aceleran muchísimo a partir de las máquinas de calcular.

-En este punto doy por finalizada la exposición de este primer grupo, pero como los otros grupos no tienen preparada la suya, aprovecho para retomar algunas de las cuestiones que han surgido.

-Vuelvo a la cuestión de la expresión decimal de π, pero no parece que estén muy interesados. Algunos alumnos plantean cómo se puede demostrar que una cosa va a ser infinita "¡no terminarías nunca!" Les cuento que se tarda muchos siglos y es muy difícil demostrarlo, pero insisten. Entonces les recuerdo que es mucho más fácil demostrar que el lado del cuadrado tiene infinitas cifras no periódicas pero no lo entendían.

-Por último, enlazo con el tema de las medidas y pregunto si de la medida de la longitud de la circunferencia puede dar cuenta un racional. Puesto que es una razón, considero como unidad de medida el diámetro e intento explicar cómo la longitud de la circunferencia (es decir, π) es inconmensurable con respecto a dicha unidad.

.Valoración:

La exposición ha resultado interesante y han surgido cuestiones importantes, algunas de ellas estimo que con bastante dificultad de comprensión para los alumnos. Por ejemplo, creo que no llegan a captar el sentido del procedimiento de medida de la circunferencia de Arquímedes y creo que tampoco la inconmensurabilidad de la longitud de la circunferencia con respecto al diámetro (irracionalidad de π en el terreno geométrico).

-25 Febrero 94:

.Plan previsto:

-Exposición del trabajo de una pareja de alumnos sobre el número π.

-Exposición del trabajo de una pareja de alumnos sobre el Número de Oro.

-Planteamiento de la Cuestión de Investigación 2, para que los alumnos finalicen su contestación en casa.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-En la exposición sobre π de este segundo grupo de alumnos, prácticamente se tocan los mismos puntos que en la exposición anterior. Vuelve a suscitar interés el cálculo de las cifras decimales de π. No está tan claro que los alumnos diferencien el hecho de que se calculen muchísimas cifras decimales de π del hecho de que se ha demostrado que su expresión decimal es infinita no periódica. Vuelve a surgir la cuestión de cómo se puede demostrar que una cosa va a ser infinita no periódica (no se acabaría nunca de demostrar); los alumnos insisten aún más que el día anterior en que haga la demostración, y tengo que repetirles varias veces que antes habría que empezar por demostrar la infinitud y no periodicidad de las cifras de $\sqrt{2}$, ya que es mucho más fácil.

-En la exposición sobre el Número de Oro, las alumnas comienzan explicando la proporción áurea y pasado un tiempo, los compañeros están desconcertados porque hablan del "número de Oro", pero no aparece ningún número. En este punto me parece oportuno intervenir yo, y explicarles que en el rectángulo áureo, si tomamos el lado pequeño como unidad, el lado grande mide el número de oro: $(2+\sqrt{5})/2$. A raiz de eso, un alumno plantea la cuestión de cómo en el pentágono y la estrella de cinco puntas, las figuras van siendo cada vez más grandes o más pequeñas y, sin embargo, pueden medir el mismo número. Explico entonces el cambio de unidad en las sucesivas figuras y el mantenimiento de las proporciones, y les recuerdo la actividad del Tangram en la que también surgió el tema de las proporciones .

-En cuanto a la Cuestión de Investigación, los alumnos no tienen muchas ganas y queda poco tiempo; actúo según lo previsto e intento aclarar las dudas, sobre todo intento aclarar lo más posible el enunciado de la segunda cuestión, y les ordeno terminar la tarea en casa.

.Valoración:

-Es curiosa la insistencia de los alumnos en la demostración de la infinitud y no periodicidad de la expresión decimal de π, porque esta cuestión había pasado totalmente desapercibida en el caso de $\sqrt{2}$, y no habían planteado entonces ninguna necesidad de demostración.

La exposición sobre el Número de Oro resulta interesante y bonita, se dan datos muy curiosos y, al final los niños aplauden, creo que porque reconocen que ha estado bien. Lo cierto es que las alumnas han tomado mucho interés y tenían ilusión; han preparado dos posters para explicar a sus compañeros, y ellas mismas estaban realmente interesadas en el tema. Los alumnos más sensibles, creo que han llegado a captar esto y se han mostrado bastante interesados, aunque otra parte de los compañeros resulta, como de costumbre, pasiva y apática.

-Con respecto a la comprensión del mantenimiento de las proporciones, ya la pregunta de cómo un mismo número puede expresar la medida de longitudes de diferente tamaño me parece todo un logro. No sé si muchos alumnos llegarán a entender la respuesta en términos de mantenimiento de proporciones y unicidad del número que las expresa, pero el haber manejado unidades no estandarizada nos permite hablar en ese lenguaje de forma natural, y a algunos alumnos entender lo que se está explicando y resolver sus dudas al respecto. Creo que esto es todo un logro.

-1 Marzo 94:

.Plan previsto:

-Recoger las respuestas de los alumnos a la Cuestión de Investigación 2: Existencia de un punto en la recta correspondiente a los distintos tipos de decimales infinitos. Diferencias y semejanzas de distintos tipos de decimales infinitos en el plano numérico y en el geométrico. Hacer la Puesta en Común de esta cuestión.

-Plantear la Cuestión de Investigación 3.

.Ejecución:

La mayoría de los alumnos no habían terminado la segunda parte de la Cuestión de Investigación 2: Diferencias y semejanzas de distintos tipos de decimales infinitos en el plano numérico y en el geométrico. He optado por recoger la primera parte y dejar la segunda para que los alumnos la contesten a raiz de la Puesta en Común.

La Puesta en Común de la Cuestión de Investigación 2 ha consumido todo el tiempo y no se ha podido plantear la Cuestión de Investigación 3.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Las primeras complicaciones han surgido a partir del segundo ejemplo (correspondiente a la representación decimal de √3). En principio no está claro cuál es la unidad con la que hay que construir el cuadrado de área 3, cuya longitud trasladaremos luego a la recta para representar el número √3. Luego algunos alumnos apuntan que tiene que ser la unidad de la recta y al final parece que eso queda claro.

Algunos alumnos plantean que √3 tiene infinitas cifras no periódicas y entonces no puede dibujarse exactamente, parece ser que porque no acabaría nunca de perfilar el extremo. Otros alumnos arguyen que igual pasa con 0,666... y su fracción, pero los anteriores sostienen que no es lo mismo. Resuelvo volver a la construcción geométrica a partir de cuadrados de área 1. Los alumnos aceptan que esos cuadrados tienen exactamente área 1 y sus lados miden exactamente 1, pero cuando llegamos al que tiene área 3, los alumnos aceptan que el área es exactamente 3, pero "¡su lado ya no puede medir exactamente √3, porque es infinito no periódico!"

Hay algún alumno que sí cree que mide exactamente √3, por el teorema de Pitágoras, pero otros opinan que el teorema de Pitágoras puede dar aproximado, y se asombran cuando digo que "está demostrado", y que es "exacto". En realidad, no está claro lo que estamos entendiendo cada una de las partes, ni el significado que estamos atribuyendo a estos términos

-Con el número π se produce el mismo problema, pero además se añade la dificultad de la "fracción" entre la longitud de la circunferencia y el lado, que no puede ser una fracción porque tiene infinitas cifras no periódicas. Intento explicar que eso quiere decir que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es inconmensurable (es decir, que no hay una parte que encaje en las dos exactamente), pero no parece resultarles significativo. Al final, un alumno me pregunta que si las fracciones que no son fracciones son las que tienen decimales arriba y abajo. Vuelvo a explicarle la cuestión de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad, con detenimiento. Lo relacionamos con el número de oro en los distintos pentágonos, la diagonal de los distintos cuadrados y la razón de las distintas circunferencias, y el alumno se refiene a lo que tienen en común con el término "Proporción".

Una alumna sugiere que para dibujar el número π en la recta podemos cortar la circunferencia y trasladar su longitud. Pregunto cuál circunferencia, y dicen que da igual. En poco tiempo se dan cuenta de que no da igual (una circunferencia más grande tiene más longitud que una circunferencia pequeña), pero les resulta muy difícil comprender cuál; la inmensa mayoría de los alumnos ya no siguen la argumentación.

Paso a llamarles la atención sobre las sucesivas aproximaciones, pero no se pasa de ahí, de que son aproximaciones. Se discute y aunque intento retomar la sugerencia de la alumna acerca de cortar la circunferencia, ya es muy difícil converger.

.Igual pasa con los no construibles, aunque llame la atención de que las aproximaciones convergen; éste término lo uso en un sentido coloquial, sin entrar en su significado en la teoría de límites.

-Al llegar a este punto, estamos saturados. Intento explicar cómo tienen que contestar a la segunda parte de la cuestión y les pido que la contesten para entregar al día siguiente.

.Valoración:

-La cuestión de la exactitud de la medida de los lados de los cuadrados es realmente interesante. Porque se llega a que la medida de un lado es un número que multiplicado por sí mismo da 3, y ese número no tiene una expresión decimal exacta, ni siquiera controlable. Entonces la exactitud de la medida del lado no puede establecerse en el terreno numérico, sino que se refiere en última instancia a que un lado multiplicado por sí mismo da como resultado el área, es decir, entramos en el terreno del razonamiento puramente geométrico. Este punto es realmente sutil y queda totalmente fuera del alcance de trabajo con alumnos de este nivel.

-Con respecto al término "Proporción", acuñado por el alumno para nombrar a las razones irracionales, parece un hallazgo importante, pero no estoy segura de que puedan dar todavía el paso de la proporción a la medida de una de las longitudes fijando la otra como unidad, que enlazaría directamente con la inconmensurabilidad y la expresión numérica de los irracionales.

-Estoy realmente intranquila. Estamos haciendo discusiones prácticamente filosóficas sobre cosas que los alumnos no son capaces de comprender, y no estoy dando herramientas a su nivel para que tengan armas de discusión; temo que eso llevaría mucho tiempo. Me siento en un callejón sin salida, dadas las circunstancias reales del proceso didáctico. Hacer metafísica sin herramientas no es hacer matemáticas.

.Toma de decisiones:

-Comento mi preocupación con el director de trabajo y decidimos que ha llegado el momento de finalizar el proceso, puesto que ya hay mucha información y no es conveniente forzar las cosas más de un nivel razonable.

"El investigador debe tener en cuenta los efectos del agotamiento provocado por la investigación en los participantes y en él mismo ... y resistir a la tentación de sobresaturar el lugar que se está estudiando". A partir de ahora dedicaré mis esfuerzos a cerrar las cuestiones que quedan pendientes y son susceptibles de ser cerradas, antes de concluir.

-Me parece que este es un buen momento para tomar un respiro y ver con los alumnos algunos de los vídeos de las clases, puesto que ellos lo llevan pidiendo bastante tiempo. No obstante, como mañana tenemos clase a una hora temprana de la mañana y pasado mañana tenemos a última hora, aprovecharé mañana para pasar la Cuestión de Investigación 1 (bis), que estaba prevista como parte de conclusión del proceso y pasado mañana dedicaré la sesión a ver los vídeos

-No obstante, la Cuestión de Investigación 3 queda pospuesta por si en algún momento posterior hubiera ocasión para plantearla a los alumnos.

-2 Marzo 94:

.Plan previsto:

Realizar la Cuestión de Investigación 1 (bis): Volver a considerar todos los tipos de decimales infinitos estudiados, clasificarlos y volver a retomar la cuestión de cuáles de ellos pueden ser considerados como números y a partir de qué características o atributos.

.Ejecución:

Los alumnos trabajan productivamente en la contestación de la Cuestión durante bastante tiempo y, prácticamente, sólo da tiempo a comenzar la Puesta en Común.

.Aspectos actitudinales:

Los alumnos trabajan con interés la Cuestión planteada.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Uno de los grupos me pregunta sobre la posibilidad de operar con los decimales infinitos no periódicos. A partir de la notación habitual, podemos discutir significativamente (por ejemplo al multiplicar y sumar $\sqrt{2}$), y la expresión decimal sirve de apoyo para verificar conjeturas. Además de las raices se plantea la cuestión de π, de qué es 4π. Discuten sobre las operaciones desde sus apoyaturas de significado para esos números; esto es algo que no se habían planteado hasta ahora. También observo otro grupo planteando cuestiones de operaciones y comprobando a partir de la expresión decimal.

-A falta de un cuarto de hora para terminar la clase, recojo los ejercicios y doy comienzo a la Puesta en Común. Bastantes quieren salir a poner su clasificación. Saco a cuatro, que es lo que admite la pizarra. Les digo a los demás compañeros que se trata de ver qué clasificación es la más completa y mejor estructurada para tomarla como base y completarla con las demás. Esta idea la repito bastante, pero cuando terminan y tenemos que elegir, da la impresión de que los niños se fijan en general en la clasificación que tiene mejor caligrafía, no en la estructura. Aunque llame la atención sobre que lo más importante es la estructura y la organización y haya una clasificación claramente mejor que las demás, sólo la reconocen dos o tres alumnos.

Resulta complicado organizar la elección y la toma de decisiones para ser operativos y comenzar a trabajar; el tiempo de clase concluye sin que consigamos habernos puesto de acuerdo sobre la elección de una clasificación.

.Valoración:

-Es curioso que los alumnos trabajen con tanto ánimo sobre una cuestión que yo había temido en un principio que resultase demasiado repetitiva y cansina. Pero los veo discutir y explorar a partir de cosas que han ido saliendo en las clases precedentes, para llegar a establecer sus conclusiones.

-También me sorprende que, después de haber hecho varias veces clasificaciones de los decimales infinitos no periódicos "entre todos", en la Puesta en Común, a los alumnos les resulte tan dificil discriminar entre clasificaciones que a mi juicio tienen calidades claramente distintas en cuanto a estructura y tiendan a elegir las que son menos complicadas y tienen mejor caligrafía. Creo que éste es un aspecto significativo y que da idea que la competencia para la clasificación no se consigue viendo a la profesora clasificar en la pizarra, aunque se apoye en las indicaciones de los alumnos más capaces.

-3 Marzo 94:

.Plan previsto:

Ver nuestros vídeos y repartir la Cuestión de Investigación 3 para que los alumnos la contesten en casa.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

Los alumno se divierten mucho viéndose en los vídeos, resulta una sesión agradable y distendida.

.Toma de decisiones:

A patir de este momento ya sólo queda atar los cabos significativos del trabajo que hemos venido realizando. He decidido hacerlo a partir de la actividad F18 y el repaso para el Examen. En cuanto a la actividad F19: organización de los contenidos sobre Números Reales, con el esquema habitual: Origen, Definición intuitiva, Notación-representaciones, Orden, Operaciones y propiedades de las operaciones, después de la experiencia del dia anterior acerca de las clasificaciones, creo que podemos prescindir de ella, ya que los alumnos, en su mayoría, la rellenarían a modo de formulario. En lugar de eso, prefiero partir de los rasgos que a ellos les llamen la atención y subrayar los importantes (añadiendo lo que se considere pertinente), dando coherencia a un nivel más cercano al de ellos.

-4 Marzo 94:

.Plan previsto:

-Recoger Cuestión de Investigación 3.

-Hacer la clasificación de los Números Reales a partir de su expresión decimal que estaba pendiente en Cuestión de Investigación 1 (bis). Dada la premura de tiempo seré yo quien organice la clasificación y no discutiremos los criterios de clasificación de los alumnos.

-Realizar actividad F18: Clasificación de los distintos tipos de números reales que han aparecido a lo largo del proceso didáctico: conjunto al que pertenecen, notación habitual y decimal, representación en la recta. Ventajas y desventajas de unas notaciones sobre otras. Diferencia entre Racionales e Irracionales. Aportación de los Números Reales a los Números Racionales en el ámbito numérico y en el ámbito geométrico. Idea de completitud.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-En la Puesta en Común, empezamos clasificando los decimales periódicos y los infinitos no periódicos; dentro de estos últimos, entramos en el apartado correspondiente a los decimales infinitos no periódicos "que vienen de algo". Según los alumnos, vienen de raíces, de ecuaciones y de proporciones, incluso vienen de teoremas, como el teorema de Pitágoras; les aclaro que éstos son las raíces cuadradas. Me doy cuenta de que en este último apartado, la clasificación se solapa, por ejemplo, $\sqrt{2}$ pertenece a todos estos grupos), y de que además en el apartado proporciones clasifican a π y al número de oro.

-Al poner ejemplos de ecuaciones, planteo la siguiente cuestión:

"(P) ¿Todos los que vienen de ecuaciones son raíces?

(A) No, no tienen por qué estar elevados al cuadrado.

(P) Por ejemplo, $x^3 = 2$, ¿esto tiene infinitas cifras no periódicas?

(A) (Dudas)

(A) Sí

(P) O sea, que hay muchos números que aún no hemos tocado."

Otro ejemplo que se me ocurre es $2x^2 = 3$, y claro, los niños se preguntan si la solución es infinita no periódica y cómo podemos saberlo; les sugiero que buscando un número que multiplicado por sí mismo dé 3/2 (porque dividir decimales infinitos no sabemos). Ensayamos algunas soluciones en voz alta, pero no nos detenemos demasiado en este punto (podíamos haber hecho en la calculadora $\sqrt{3}/\sqrt{2}$, para tener una buena aproximación decimal a partir de la cual ir encajando, pero esto hubiera consumido bastante más tiempo del previsto).

Por otra parte, también los alumnos se dan cuenta que las raíces se solapan con las ecuaciones. No quiero entrar en la diferenciación dentro de las "proporciones", pero sí hago alusión a que $\sqrt{2}$ es una proporción también. Estamos mezclando el terreno de la medida con el algebraico y el numérico para distinguir tipos, cuando la medida y las "proporciones" abarcan, por decirlo así, todos los tipos. Pero no ha lugar discutir esto; cierro la cuestión englobándolos a todos en "los que vienen de algo", tal como los alumnos habían propuesto.

-Los alumnos están de acuerdo en que los decimales infinitos no periódicos que "vienen de algo" son números, pero los de cifras arbitrarias suscitan dudas y división de opiniones; finalmente, se inclinan más por el No.

-Luego pasamos a la clasificación en Racionales, Irracionales y Reales. Y ahora los niños vuelven a preguntar que si los infinitos que no vienen de nada son números. Les digo que sí lo son, aunque ellos no lo puedan razonar, porque los matemáticos pueden operar con ellos (están muy intrigados en saber cómo, pero les digo que ellos no lo pueden saber todavía porque para comprenderlo hace falta saber otras cosas), y aludo también a la representación en la recta; intento explicarles la cuestión de los intervalos encajados que se van acercando cada vez más, "¿a qué?", pregunto yo. "A ese número", contesta una alumna, y otra le replica: "A un número que no existe" (!). En general no puede concretarse el "¿a qué?". Yo les digo que a un único punto, a un único número, y por esas y otras razones los matemáticos consideran a ésos como números, aunque nosotros no podamos saber muy bien por qué.

Entonces una alumna dice que "entonces, para nosotros, no son números". Contesto que ellos tienen que saber que sí son números, aunque no puedan entender las razones todavía.

-Otro punto que se trata es la distinción entre Números Reales y No Reales (por ejemplo, $\sqrt{-2}$). Entonces un alumno establece la siguiente conclusión:

"(A) Entonces los Reales son los que tienen solución segura, aunque no sepamos cuál es, y los No Reales no tienen solución."

-Otra alumna me vuelve a preguntar por la representación en la recta de los decimales infinitos arbitrarios.

"(A) Seño, ¿los decimales infinitos que te inventas se pueden representar en la recta?"

Vuelvo a explicar lo de los intervalos encajados y la convergencia, y parece que le parece bien en el caso de los que tienen regularidad (porque sabes las cifras que tienes que ir encajando), pero *"¿qué pasa con los que son al azar?"*

"(P) Digamos que el punto existe, pero tú no puedes llegar a él "a mano", porque tendrías que dar infinitos pasos... No le déis más vueltas."

La pregunta es sutil y la respuesta es compleja porque implica, una vez más, la consideración del infinito actual: un número real con cifras arbitrarias es la suma de una serie, en la que sus términos, aunque sean infinitos, están dados. Sin embargo, no pretendemos descender a tal grado de profundidad con alumnos de este nivel.

-También se plantea la cuestión de que los Números Reales son entonces todos los que existen. Y yo les informo de la existencia de otros números: los complejos y les pongo algún ejemplo de raíces de números negativos diferenciándolos de las raíces negativas. Con esto aprovecho para comentar el caso de los irracionales negativos (como $-\pi$).

-En cuanto a la caracterización del número real, les digo que lo intenten describir de la forma más completa posible a alguien que no lo sepa.

.Valoración:

Creo que la última cuestión de describir lo que es un número real de la forma más completa posible es algo bastante difícil para los alumnos (aún con la consigna de que lo hagan como si se lo tuvieran que explicar a alguien que no lo supiera), porque les falta perspectiva con respecto de este concepto.

-8 Marzo 94:

.Plan previsto:

Finalizar la Puesta en común de F18, y avisar de que el Examen será el día 11 de Marzo.

.Ejecución:

.Aspectos actitudinales:

Se empieza la clase con inquietud. A causa de un cambio de grupo realizado, los alumnos de este grupo se dedican a entorpecer la clase incitando a otro que se suma a esta actitud. Después de varios avisos, persisten en su actitud y se empiezan a mandar notas con el otro grupo. Entonces envió a uno de los incitadores al Jefe de estudios, ¡y no quiere irse! Lo presiono diciendo que no seguiré la clase hasta que se marche, entonces obedece.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-En la pregunta sobre las diferencias entre Racionales e Irracionales, los alumnos aluden a las diferencias en sus expresiones decimales y diferencias de origen (divisiones/ raíces, ecuaciones, proporciones). Un alumno se da cuenta del solapamiento y pregunta si de todas las ecuaciones salen raíces, yo le pongo el ejemplo de una solución habitual de una de segundo grado y hablamos de si eso es un número; otro alumno opina que ese es el número "exacto", y yo apoyo su opinión.

-Yo introduzco las diferencias en representación en la recta, y vuelve asurgir el tema de si π puede representarse exactamente. No diferencio entre el plano físico y el ideal porque considero que tienen que ser ellos los que saquen la problemática cuando la tengan. Hay quien dice que π se puede representar exactamente en la recta con la longitud de una circunferencia de diámetro unidad, hay quien dice que el punto de π existe pero no se puede llegar a él; la mayoría de los alumnos parecen no entender.

-También introduzco las diferencias en la medida. Al principio cuesta un poco entendernos, pero parece que la diferencia entre longitudes conmensurables e inconmensurables no resulta sorprendente. Pongo varios ejemplos.

-En la siguiente pregunta vemos lo que los Irracionales aportan. Los alumnos aluden a las medidas, una alumna apunta que todo se relaciona con la medida, y también otorgan bastante peso a las proporciones. Yo apunto la cuestión de los puntos de la recta, y también sale la cuestión de la solución de ecuaciones.

Tambien apunto la complitud de la escritura decimal, pero esto no les resulta en absoluto significativo, ni sé si lo llegan a entender.

-En cuanto a las características globales de los Números Reales, los alumnos dicen que éstos miden todas las medidas (y proporciones) y que llenan la recta. Entonces una alumna plantea el siguiente dilema: "Si entre dos números reales siempre hay otro, ¿cómo van a llenar la recta?"; prefiero no entrar en esa cuestión, así que establezco el discurso en términos de correspondencia con los puntos de la recta, es decir, en lugar de establecer que los Números Reales llenan la recta establezco que a todos los puntos de la recta corresponde un número real y viceversa. Una vez más introduzco que los Números Reales abarcan todas las notaciones decimales posibles.

-En cuanto a los Conjuntos numéricos, los alumnos vuelven a mezclar fracciones, decimales, enteros... Establezco la diferencia entre Representaciones y Conjuntos; alguien dice bien los conjuntos y luego trato de que les den estructura; cuesta un poquito, pero en seguida establecen bien las relaciones de inclusión. Luego dibujo diagramas, con ejemplos dentro para dar idea.

Cuando se trata de incluir ejemplos concretos el problema aparece, como de costumbre, en identificar negativo con entero; intento dejarlo claro. También intento dejar claro lo relativo a las raíces negativas.

-Paso a tratar la Cuestión de Investigación 3, que plantea qué tipo de número puede corresponderle a un punto cualquiera de la recta, y los alumnos dicen que cualquier número real. Cuando intento plantear el conflicto con su creencia en la conmensurabilidad, una alumna contesta que eso era antes, pero que ahora saben que pueden no encontrar nunca una parte que encaje. Prefiero no plantear la diferencia entre el plano físico y el ideal.

-Un alumno establece una diferencia abismal entre el infinito potencial de los periódicos, que se puede ver, y el de π por ejemplo, que le resulta imposible actualizar. Creo que esta es una dificultad generalizable por lo que he visto en otros alumnos de la clase.

.<u>Valoración:</u>

La verdad es que los grupos estaban muy equilibrados y uno o dos cambios deshacen el equilibrio, que se pensó con mucho cuidado. El grupo que ha dado problemas es realmente malo y eso no lo pensé al permitir los cambios. Sin embargo, ahora que el cambio está hecho, no creo conveniente "sacrificar" a otros niños y quitarlos de dónde están para ponerlos a trabajar en peores condiciones.

-Por lo que respecta a la comprensión, me parece importante el que haya algún alumno que haya conseguido conectar la cuestión de la inconmensurabilidad de las medidas irracionales con la representación en la recta. Sin embargo, no creo que este sea un logro generalizable.

-Otra pregunta muy interesante es la formulada en estos términos: "Si entre dos números reales siempre hay otro, ¿cómo van a llenar la recta?", que pone una vez más de manifiesto que la correspondencia Números Reales- Continuo lineal es bastante más compleja que la mera correspondencia Números Reales- puntos de la recta, sin tener en cuenta la estructura de dichos puntos en cuanto conforman el continuo lineal

.<u>Toma de decisiones:</u>

.Debido a la decisión que se tomó en días precedentes (1-3-94) acerca de interrumpir el proceso de investigación, a causa de la saturación de los alumnos, y limitarnos a cerrar las cuestiones pendientes en el tereno didáctico, no hemos planteado la Cuestión de Investigación 4, que estaba prevista en el plan inicial. Tampoco se ha estimado necesario recoger los trabajos de los alumnos, ya que se considera suficiente la información obtenida a partir de la Puesta en Común.

.Por lo que respecta al grupo conflictivo, he resuelto poner al alumno que es especialmente problemático solo y advertir seriamente a los demás.

-9 Marzo 94:

.<u>Plan previsto:</u>

Repaso de los contenidos del Examen através de la actividad sobre los Mapas Concepuales:

.Se parte de un mapa elaborado por mí, que relaciona Números Reales (racionales e irracionales), Medida de Longitudes (conmensurables -inconmensurables), Representación en la Recta y Notación Numérica (Notación habitual operatoria: fracciones, irracionales varias, y Notación Decimal: periódica y finita, infinita no periódica). Este mapa, finalmente, se desglosa en tres apartados o submapas, que corresponden a: relaciones a nivel numérico; relaciones particulares a nivel geométrico; relaciones globales entre números reales y representaciones.

.En principio establezco gráficamente las conexiones y pretendo que los alumnos las expliquen. Luego pienso que es mejor que las conexiones sean establecidas también por los alumnos.

<u>.Ejecución:</u>

No ha habido modificaciones con respecto al plan previsto.

<u>.Aspectos actitudinales:</u>

.Había claros en clase y los niños estaban muy nerviosos porque tenían el único examen de historia del trimestre. Querían que los dejara estudiar y los he visto tan nerviosos que, en contra de mis principios, he pactado con ellos que si hacíamos el trabajo concentrado, les dejaría el último cuarto de hora. Aún así he tenido que llamar alguna vez la atención.

<u>.Aspectos relacionados con la Comprensión:</u>

.Los Mapas Conceptuales han costado trabajo. Al principio los alumnos no entendían qué tenían que hacer y he tenido que poner más de un ejemplo de relaciones (por ejemplo, en el primer cuadro no cerraban el triángulo decimales finitos y periódicos- fracciones).

"(P) Coged, por ejemplo, la hoja 1, para que veáis lo que hay que hacer.

Yo voy a ver lo que comprendéis del Número Real cuando vea qué relaciones establecéis y en qué profundidad las establecéis. Entonces, por ejemplo, que alguien diga la relación entre dos elementos de los que aparecen ahí.

(A) ¿Cómo?

(P) Por ejemplo, los Racionales, ¿con qué los relacionaríais vosotros?

(A) Con las fracciones.

(A) Con los decimales finitos y periódicos.

(P) Vamos a fijarnos en una relación. Por ejemplo, Racionales-fracciones. Entonces, entre ellos me ponéis una flecha y ponéis 1: esa es la relación1. Y entonces en el 1, me decís qué relación hay entre los decimales y las fracciones; ¿cómo se relacionan los Racionales y las fracciones?

(A) Que todos los Racionales pueden escribirse como fracción.

(P) Y todas las fracciones son representaciones de Números Racionales, ¿vale? Otra relación: Racionales-decimales finitos y periódicos. Esa puede ser la relación 2. ¿Y cómo se relacionan los Racionales y los decimales finitos y periódicos?

(P) Más relaciones.

(A) Irracionales con cifras arbitrarias.

(A) Irracionales con PI, Número de Oro, etc...

(A) Irracionales con decimales infinitos no periódicos.

(A) Y ya está, ya no hay más relaciones.

(P) ¿No?

(A) Después Números Reales con Racionales e Irracionales.

(P) ¿Y ya está? ¿Entre las fracciones y los decimales finitos y periódicos no hay relación? ¿Cuál es la relación entre las fracciones y los decimales finitos y periódicos?
Pero fijaros bien, una cosa es el números de relaciones que haya y otra cosa es lo bien que las expliquéis. Porque, por ejemplo, si cogéis la relación entre las fracciones y los decimales finitos y periódicos, a ver quién me la explica lo mejor que sepa.
Porque en el examen yo puedo decir que me pongáis una relación, o más de una, y que me las expliquéis."

También ha costado bastante trabajo explicar el sentido de la globalidad del último cuadro.

"(P) Si os fijáis en la última hoja, la última relaciona los Números Reales con la escritura habitual, con la medida de longitudes, con los decimales y con la recta numérica. Entonces, las relaciones globales, como la que ha dicho Sergio: que los Reales corresponden a todos los puntos de la recta, eso es mejor que lo dejéis para la última hoja; en la última ponéis las relaciones globales, y en éstas hacéis las parciales, las de Racionales e Irracionales separadamente. En la tercera hoja, las relaciones más globales de todos los Números Reales, sin distinguir entre Racionale e Irracionales."

Hay que explicarlo varias veces y poner ejemplos; aún así, los alumnos no parecen entender y se tarda un buen rato en negociar y aclarar significados.
-Los alumnos han planteado la propuesta de que los mapas sirvieran como "chuleta" para el Examen. Me ha parecido peligroso, porque entonces podía tomarse la actividad en el sentido de acumular información indiscriminadamente cuando lo que yo pretendía era estimular la comprensión. Por eso les he dicho que tendrían que entregar los mapas antes del Examen, aunque ellos podían decidir si querían que ese trabajo fuera calificado e influyera en la calificación.

.<u>Valoración:</u>

.Puesto que la actividad de los Mapas Conceptuales requiere bastante trabajo por parte de los alumnos, pretendo que el esfuerzo les sea fructífero de cara al Examen, y también que éste sea un incentivo para su interés. Después de discutir la forma en que podríamos conseguir esto con el director del trabajo de investigación, opto por establecer las siguientes consignas: todos los alumnos utilizarán los mapas para repasar y algunas de las relaciones que han de establecer pueden ser preguntadas en el Examen. El mapa lo entregarán en el examen y los alumnos indicarán si quieren que no influya en la nota, valga la mitad de la nota o un tercio de la misma.

-Creo que una de las dificultades para que los alumnos entendieran lo que había que hacer en los cuadros, se debe a que mi concepción de los mismos es bastante particular. La elaboración de los cuadros ha sido el resultado de un proceso en el que comencé por establecer un cuadro único de relaciones globales y luego desglosé en tres subcuadros, debido a la complejidad de dichas relaciones. Sin embargo, creo que esto puede no ser compartido por alguien ajeno al proceso. En este sentido, un alumno (con mucha razón) quería establecer relaciones globales ya en los primeros cuadros.

-10 Marzo 94:

.Plan previsto:

Finalizar el repaso a partir de los Mapas Conceptuales.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Aspectos actitudinales:

.Faltaban algunos alumnos. No sé si es porque corría el rumor de que yo iba a poner vídeos o por la primavera y las vacaciones próximas, pero parece que últimamente están bastante más revueltos. Se plantean problemas de conducta con algunos alumnos concretos.

.Toma de decisiones:

La prioridad de esta semana es finalizar el tema de Números Reales. Estoy demasiado cansada y prefiero no dedicar más energías de las necesarias a los temas de conducta que, por otra parte, sólo se han presentado al final en esta segunda fase de acción. Mañana, con el Examen, finaliza la última fase de acción del trabajo de investigación. Entonces, cuando esté menos tensa con respecto a los objetivos de comprensión del contenido, intentaré atajar lo más sanamente posible los focos de incomodidad.

.Aspectos relacionados con la Comprensión:

-Hay bastante confusión en los alumnos con respecto a lo que se espera que hagan con los Mapas Conceptuales. Tampoco tienen claro algunos de los términos empleados, como el de "escritura habitual", ni qué sentido tiene el tercer mapa después de los dos anteriores (lo que yo pretendía con el tercer mapa era que se explicitara la idea de completitud de los Números Reales, en varios ámbitos: notación decimal, medida, modelo de la recta).

.Valoración:

Por lo que respecta a los mapas conceptuales, creo que tanto la terminología como las ideas relativas a las conexiones son exclusivamene mías y no resulta fácil que sean compartidas por los alumnos. En cualquier caso, no pretendo profundizar en este tema, sino que los alumnos aprovechen lo que puedan de esta actividad, según su nivel de comprensión, para concluir el tema con el Examen de mañana.

.Aspectos especiales de la sesión:

Los alumnos están muy preocupados por la Valoración y la calificación en esta segunda fase de acción. Sale a la luz el hecho de que no se han propuesto apenas actividades voluntarias, y de que yo he recogido la mayor parte de las fichas, con lo cual ellos tenían pocas posibilidades de elegir entre sus trabajos para presentarme los que querían que fueran calificados.

Con respecto a este tema, digo a los alumnos que se concentren en el examen y que la semana que viene precisaremos los porcentajes de la calificación.

-11 Marzo 94:

.Plan previsto:

Examen correspondiente a la segunda fase de acción, sobre todo el trabajo realizado alrededor de los Números Reales.

.Ejecución:

No ha habido contratiempos con respecto al plan previsto.

.Valoración:

Después de la tensión de esta fase de acción, en la que me he concentrado en la recopilación y revisión de los trabajos de los alumnnos de cara a observar su Comprensión sobre diversos focos de Contenido, me he dado cuenta de que he descuidado el aspecto de su evaluación con arreglo a los criterios establecidos en la fase de acción anterior.

He hecho una reestructuración de los porcentajes de valoración de las distintas actividades realizadas en esta segunda fase de acción y la he pasado a los alumnos. No estoy satisfecha de este aspecto, porque me parece que los alumnos no han tenido participación en su evaluación, tal como yo pretendía, pero dadas las circunstancias, no he podido concentrarme en este aspecto en la forma en que en principio deseaba.

.Toma de decisiones:

La Valoración ha quedado como sigue:

Segunda Evaluación:

-Combinatoria (35%):

-Números (65%):

.Fichas (20%):

.Voluntario (10%):

.Examen (30%):

.Portafolio (5%):

-Total:

-Otro punto es el de la valoración concreta de los trabajos. Dar valoración cuantitativa supondría ahora mismo demasiado esfuerzo, así que he optado por:

.Dar apreciación cualitativa, además de nota, en los trabajos voluntarios.

.Por lo que respecta al Mapa Conceptual, no he establecido Criterios de Valoración porque creo que los alumnos están bastante saturados con el tema y hacer la valoración de manera que les resultara significativa supondría un trabajo y un tiempo del que no dispongo; tambien mayor manejo en este sentido por mi parte, porque el tema, y más con mapas coneptuales es muy complejo. No obstante, he devuelto el trabajo calificado cuantitativamente y he dejado opción a comentarlo conmigo los que estén interesados.

.Dar apreciación cualitativa en la nota de la Segunda Evaluación.

V. 2 Observación y Resultados

Una vez presentada la Implementación de la Fase de Acción 2, pasamos a la etapa correspondiente a Observación y Resultados de nuestra espiral de Investigación-Acción. Como en la Fase de Acción 1, esta observación está centrada en los Focos de Investigación y se realiza sobre las dos aristas del triángulo didáctico Contenido-Alumnos-Profesora siguientes:

-Arista Alumnos-Contenido.

-Arista Profesora-Alumnos.

Para documentar la Observación de la arista Alumnos-Contenido contamos con:

.*Documentos Escritos* que los alumnos han ido produciendo a lo largo de las sesiones descritas en la implementación, tanto en las Cuestiones de Investigación específicas como en las Complementarias;

.*Diario* de la profesora-investigadora, en el que se incorporan transcriciones de las *Grabaciones en Audio*; y transcripciones de las grabaciones en vídeo de las Cuestiones de Investigación.

Además se incluirá el contenido de algunas sesiones, grabadas en vídeo, que se consideraron interesantes en cuanto a comprensión y que no estaban previstas, en principio, en nuestro estudio: exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número π y el Número de Oro.

Para realizar la Observación de la arista Profesora-Alumnos contamos con:

.Grabaciones en Vídeo de las sesiones correspondientes a las Cuestiones de Investigación específicas;

.Diario de la Profesora-investigadora.

El momento de la investigación en que nos encontramos queda resumido mediante la siguiente tabla:

Tabla 5.2: Momento de la investigación.

Fase en estudio:	Nivel de los Números Irracionales y Números Reales o Fase de Acción 2
Etapa de la Investigación:	Observación y Efectos
Focos de Investigación:	Notación numérica y Representación geométrica. Se concretan mediante 8 Cuestiones específicas para el Primer Foco y 8 Cuestiones específicas para el Segundo Foco (apartados III.2.2 y III.3.2)
Material sobre el que se plantean las Cuestiones de Investigación:	-Cuestiones de Investigación específicas: Cuestionario de repaso; Cuestiones de Investigación 1, 2, 3, 1 (bis); ficha 14; Examen. -Cuestiones Complementarias de investigación: Fichas 16, 17, 18 y Tarjeta con Cuestión de Investigación 4.
Concreción final de las Cuestiones de Investigación de la Fase de acción 2:	-Cuestiones de Investigación específicas Cuestiones de Investigación 1, 2, 3, 1 (bis); ficha 14; Examen. -Cuestiones Complementarias de investigación: Cuestionario de Repaso; Tarjetas 1 y 2 sobre Cuestionario Repaso; fichas 16, 17; exposición de trabajos de los alumnos sobre número π y número de oro.

La siguiente tabla indica las Cuestiones de Investigación, relativas a los Focos de Investigación, que se han considerado en la Fase de Acción 2 y las fuentes de recogida de datos sobre los que se va a realizar un estudio más detallado:

Tabla 5.3: Material considerado para analizar las Cuestiones de Investigación de la Fase de Acción 2.

CUESTIONARIO DE REPASO	-Documentos escritos de los alumnos -Grabación en vídeo
Tarjetas 1 y 2 sobre el Cuestionario de Repaso.	Documentos escritos de los alumnos
CUESTION DE INVESTIGACION 1	-Documentos escritos de los alumnos -Grabación en vídeo
Actividad F14	-Documentos escritos de los alumnos -Grabación en vídeo
Actividad F16	-Documentos escritos de los alumnos
Actividad F17	-Documentos escritos de los alumnos
Exposición de trabajos sobre "El número π" y "El Número de Oro"	Grabación en vídeo
CUESTION DE INVESTIGACION 2	-Documentos escritos de los alumnos -Grabación en vídeo
CUESTION DE INVESTIGACION 1 (BIS)	-Documentos escritos de los alumnos
CUESTION DE INVESTIGACION 3	Documentos escritos de los alumnos
Examen 2: Preguntas 1, 4 y 6	Pruebas escritas de los alumnos

Llevaremos a cabo el análisis de las Cuestiones de Investigación, tanto específicas como complementarias, siguiendo el orden cronológico de su presentación en el aula. Realizamos este trabajo a partir de las 12 Unidades de Análisis establecidas para la Comprensión del Contenido en el nivel de los Números Reales (apartado III.6.3), en lo relativo a las Cuestiones de Investigación específicas (enmarcadas en negrita en la tabla anterior); utilizaremos tambien algunas de las escalas de valoración que concretaron las Unidades de Análisis en la fase anterior para interpretar los resultados de la Tarjeta 2 sobre el cuestionario de Repaso. Igualmente, utilizaremos las Unidades de análisis de Interacción Didáctica (apartado II.7.1).

Por lo que respecta a las Cuestiones Complementarias de investigación (enmarcadas en doble línea en la tabla anterior) utilizaremos las observaciones y reflexiones realizadas por la profesora-investigadora durante el transcurso del proceso didáctico, a partir de la lectura de los documentos escritos por los alumnos y organizaremos la información siguiendo los mismos epígrafes que en la actividad anterior (Objetivos, Ideas detectadas, Fenómenos observados, Valoración-Interpretación, Toma de decisiones). Realizaremos también un análisis a partir de las grabaciones en vídeo, en el caso de las sesiones correspondientes al Cuestionario de Repaso, a la exposición de los alumnos sobre sus trabajos del número π y el número de Oro.

Los apartados en que se organiza esta segunda parte del capítulo están dedicados, respectivamente a:

.Observación y Resultados del Cuestionario de Repaso (V.2.1).

.Observación y Resultados de la Tarjeta 1 sobre el Cuestionario de Repaso (V.2.2).

.Observación y Resultados de la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso (V. 2. 3).

.Observación y Resultados de la Cuestión de Investigación 1 (V.2.4).

.Observación y Resultados de la ficha 14 (V.2.5).

.Observación y Resultados de la ficha 16 (V.2.6).

.Observación y Resultados de la ficha 17 (V.2.7).

.Observación y Resultados de las exposiciones de los alumnos sobre sus trabajos de el número π y el número de Oro (V.2.8).

.Observación y Resultados de la Cuestión de Investigación 2 (V.2.9).

.Observación y Resultados de la Cuestión de Investigación 1 (bis) (V.2.10).

.Observación y Resultados de la Cuestión de Investigación 3 (V.2.11).

.Observación y Resultados del Examen (V.2.12).

Estos apartados organizan conjuntamente la etapa correspondiente a la Observación y Resultados en nuestra espiral de investigación-acción, en esta Fase de acción 2, dedicada a los Números Irracionales y los Números Reales.

V. 2. 1 Observación y Resultados del Cuestionario de Repaso

-Instrumento:

El Cuestionario de Repaso sobre la Fase de Acción 1 aparece en el Anexo V.1 y fue pasado a los alumnos al comienzo de la Fase de Acción 2. Se trata, como puede verse en la tabla 5.3 de la página anterior, de una Cuestión Complementaria de investigación

-Objetivo de la actividad:

-Repasar los puntos fundamentales sobre los Números Racionales que hay que dominar para avanzar hacia la construcción de los conceptos de Número Irracional y Número Real, y aclarar aquellos aspectos que se registraron como problemáticos en la Fase de Acción 1:

.La idea de infinito en el sistema de notación decimal: no existencia del número más grande, no existencia del número más pequeño, no existencia del número positivo más pequeño, números con infinitas cifras, diferencia entre que un número tenga infinitas cifras y que haya infinitos números.

.Correspondencia entre la notación fraccionaria y decimal de los números racionales.

.Densidad en los números racionales expresados a través de notación fraccionaria.

.Representación en la recta de números racionales en distintas notaciones.

.Concepto de Número Racional a través de sus distintas representaciones y la interrelación entre ellas.

-Reconocer esos puntos como importantes para avanzar en la comprensión de los contenidos correspondientes a la Fase de Acción 2 y hacer un esfuerzo por fijarlos.

-Detectar el nivel de comprensión de los alumnos en los puntos mencionados.

<u>-Ideas detectadas (errores, incoherencias, conexiones interesantes, puntos que se dominan, etc...):</u>

<u>.Puntos que no se dominan:</u>

Los alumnos tienen especial dificultad en:

-La representación en la recta de los Números Racionales.

En muchos casos, las unidades y las divisiones de éstas las toman desiguales (por ejemplo, para representar 3/4, se divide la unidad en cuatro partes notablemente desiguales. Incluso hay alumnos que indican más o menos por dónde estaría el número, pero no indican las divisiones de la unidad que han tenido que realizar y qué número de estas divisiones han tomado); por consiguiente, no se guarda proporción (ni simetrías entre las partes positiva y negativa de la recta).

La representación de las expresiones decimales presenta problemas especiales: en los decimales finitos no se tiene en cuenta, en general, la precisión (y no se indica el procedimiento que se ha utilizado para asignar un lugar al decimal, aunque en algunos casos, las aproximaciones sean plausibles); en los decimales no periódicos, se representan aproximaciones finitas.

Los alumnos no dominan la representación en la recta de fracciones impropias con números grandes (ej. 364/99).

-Establecer la diferencia entre números enteros, racionales y decimales y la relación entre ellos.

-Algunos alumnos tienen dificultad en la densidad de las fracciones; cuestión que no fue tratada en la Puesta en Común.

<u>.Puntos que se dominan:</u>

-Algunos alumnos han establecido la densidad de las fracciones a través de su conexión con la expresión decimal (con esta última expresión es fácil de establecer).

-Fenómenos observados:

Algunos alumnos han tenido la idea de representar las expresiones con dos o más cifras decimales, ampliando sucesivamente, mediante una lupa imaginaria, las décimas (para dividirlas en diez partes y obtener las centésimas), las centésimas para dividirlas en diez partes y obtener las milésimas, etc... Así por ejemplo, el número 0,45, es representado dividiendo la unidad en diez partes, tomando el intervalo entre la cuarta y la quinta división, ampliándolo y dividiéndolo en diez partes y tomando cinco de ellas.

-Valoración / Interpretación:

Las dificultades con la representación en la recta de los números racionales, y aquellas relativas a establecer la relación entre los números enteros y racionales y la expresión decimal de estos últimos, son puntos fundamentales en los que es necesario tener un mayor dominio antes de pasar al estudio de los Números Reales:

Por una parte, parece necesario un mayor nivel de claridad y precisión en la comprensión de la correspondencia entre los números racionales y los puntos de la recta, por lo que respecta a las distintas representaciones numéricas de un mismo racional, y por lo que respecta a la representación exacta de decimales infinitos periódicos a través de su expresión fraccionaria. A partir de estos pilares, podremos intentar abordar la representación de expresiones decimales infinitas no periódicas a través de la construcción de longitudes indicadas por las notaciones habituales operatorias (como el caso de las raíces cuadradas y de π), y discutir el caso de las expresiones infinitas no periódicas que no corresponden a longitudes construibles.

Además, para abordar una delimitación del concepto de número irracional y de número real, es preciso clarificar la definición de número racional a través de sus distintas representaciones y las relaciones entre ellas, así como los conjuntos numéricos que incluye el conjunto de los números racionales, a partir de la definición.

-Toma de decisiones:

A la vista de estas dos deficiencias fundamentales observadas a partir de la revisión de los documentos escritos de los alumnos, hemos tomado la decisión de intentar aclarar con los alumnos los errores generales y pasar dos Tarjetas, para que sean contestadas individualmente:

.Tarjeta 1: sobre la definición de los números racionales, a partir de sus distintas representaciones (fraccionaria -teniendo en cuenta las fracciones equivalentes-, y decimal -finita o periódica).

.Tarjeta 2: sobre la representación en la recta de números racionales (distintas representaciones de un mismo números racional: fracciones y representaciones decimales, fracciones equivalentes; y representación exacta de decimales periódicos a través de su expresión fraccionaria).

(El contenido de ambas tarjetas puede verse en el Anexo V.1).

-Estudio de la *Interacción didáctica* en el Cuestionario de Repaso

Como ya indicamos en la organización del apartado V.2, aunque no es habitual que se registre en vídeo la interacción didáctica de las Cuestiones Complementarias de investigación, en este caso sí disponíamos de una grabación, y nos ha parecido pertinente realizar un análisis de la misma, tanto en aquellos Aspectos relacionados con la Comprensión, como en los relativos a las Actuaciones propiamente dichas (este último análisis lo realizaremos mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica presentadas en el apartado III.7 de este trabajo).

Aspectos relacionados con la comprensión:

La Puesta en Común, destinada a plantear y resolver las dudas en torno a las cuestiones propuestas en el Cuestionario de Repaso de los Números Racionales, aparece transcrita en el Anexo V.2. A partir de dicha transcripción se observaron los siguientes puntos de interés para la comprensión de los alumnos:

-Conversión de los decimales acabados en nueve periódico a fracción:

-Los alumnos encuentran el resultado de convertir este tipo de decimales en fracción aplicando la regla habitual extraño o paradójico.

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita a partir del minuto 1:02, en la transcripción de la sesión correspondiente al Cuestionario de Repaso: Anexo V.3).

-Los alumnos parecen pensar que "la regla aproxima", aunque la profesora establece que el resultado es "exacto" (Por otra parte, no tenemos instrumentos para discutir esta cuestión en más profundidad).

(Ver el segmento señalado a continuación del anterior en la mencionada transcripción).

-Los alumnos piensan que los decimales infinitos no periódicos no pueden provenir de una fracción, pero se suscitan dudas al respecto: ¿qué ocurre con el número π?.

(El siguiente segmento de la transcripción que venimos utilizando se ubica a partir del minuto 1:11).

"(P) ¿O de una fracción puede salir un decimal que no tenga periodo, que empiece a hacer cosas raras, y nunca tenga periodo?

(A) .../ El número π

(P) ¿El número π viene de una fracción?

(A) No

A) No, pero...

(P) Dice Asenjo "El número π"

4.5. Representación de las distintas notaciones de un mismo número (fraccionaria y decimales) en el mismo punto.

-Datos globales sobre las Unidades de Interacción Didáctica encontradas:

A partir de la transcripción de la puesta en común del Cuestionario de Repaso y de la tipificación de segmentos que la componen en términos de las categorías para el análisis de la interacción didáctica, elaboramos la siguiente tabla, que muestra las frecuencias encontradas para cada una de las categorías, según el esquema del desarrollo de la sesión que hemos considerado.

Tabla 5.4: Interacción didáctica sobre puesta en común del Cuestionario de Repaso.

Etapa Categorías	**1**	**2**	**3**	**4**	**Total**
1.PO	7	2	0	1	10
1.PP	1	0	0	0	1
1.PE	0	0	0	1	1
1.PV	0	0	0	0	0
1.PA	0	1	0	0	1
1.AS	0	2	0	0	2
1.AP	0	0	0	0	0
1.AE	0	0	0	0	0
1.AV	0	0	0	0	0
1.AR	0	0	0	0	0
2.PO	4	7	0	13	24
2.PP	0	0	0	0	0
2.PE	2	0	0	0	2
2.PV	0	0	0	0	0
2.PI	0	0	0	1	1
2.AS	0	0	0	0	0
2.AP	0	0	0	0	0
2.AE	0	0	0	0	0
2.AV	0	0	0	0	0
2.AI	2	2	0	0	4
3.POC	9	4	0	4	17
3.PIS	32	19	14	14	79
3.PDC	21	9	6	14	51
3.PVI	11	4	3	8	25
3.PSC	0	4	4	1	9
3.AAI	33	27	9	12	81
3.AIS	5	9	2	1	17
3.AMC	16	7	5	8	36
3.AVI	7	4	1	1	13
3.AEC	0	1	0	2	3
Total	150	102	44	81	377
CA	26	16	9	12	63

A continuación, agrupamos las categorías de Interacción Didáctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de este trabajo, y consideramos los porcentajes de interacciones correspondientes a cada una de tales finalidades.

Tabla 5.5: Distribución en porcentajes de las etapas y finalidades en el Cuestionario de Repaso.

Etapa / Finalidades	1	2	3	4
1	0,05	0,05	0,00	0,03
2	0,05	0,09	0,00	0,17
3	0,90	0,86	1,00	0,80

Del mismo modo, resumimos las interacciones considerando los porcentajes relativos a cada uno de los tipos de actuaciones establecidos en el apartado III.8 para caracterizar dichas interacciones.

Tabla 5.6: Distribución en porcentajes de las etapas y actuaciones en el cuestionario de Repaso.

Etapa / Actuaciones	1	2	3	4
Fijar Normas	0,35	0,41	0,21	0,37
Establecer Significados	0,52	0,43	0,61	0,47
Enjuiciar	0,12	0,08	0,09	0,11
Intervenir	0,01	0,08	0,09	0,05

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En cuanto a la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Finalidades, se observa que en la primera etapa, correspondiente al paso de la notación decimal a la fraccionaria en los Números Racionales, la mayor parte de las acciones (casi el 90%) están encaminadas a la construcción de conocimiento; es insignificante el porcentaje de acciones destinado a la gestión del trabajo o a la gestión del desarrollo de los contenidos. En la siguiente etapa, dedicada al estudio de la correspondencia entre la notación fraccionaria y decimal de los Racionales. En esta etapa, también la mayor parte de las acciones tienen como objetivo la construcción de conocimiento (86%) del total. En la tercera etapa, correspondiente a la discusión sobre la relación entre los conceptos de decimal, fracción y Número Racional, el total de las acciones se dirigen a construir conocimiento. Por último, en la etapa final, en la que se repasa la representación en la recta de números racionales expresados en distintas notaciones, se sigue observando la misma tónica, aunque hay un incremento de la gestión del desarrollo de los contenidos por parte de la profesora (17%), lo cual es debido a la premura de tiempo que motiva que sea necesario gestionar un avance lo más rápido posible en las distintintas notaciones decimales que se han de representar en la recta.

Dentro de la finalidad general correspondiente a la construcción de conocimiento, en la primera etapa hay bastante equilibrio entre el número de actuaciones que provienen de los alumnos y las que que provienen de la profesora, aunque con superioridad de estas últimas (41%-49%); las acciones más frecuentes por parte de la profesora están encaminadas a indagar significados, seguidas de las encaminadas a desarrollar conocimientos, y las de los alumnos a aportar información, seguidas de las dirigidas a manifestar comprensión; en esta primera etapa no hay acciones encaminadas a sistematizar los conocimientos. En la segunda etapa también hay un equilibrio entre el número de acciones de la profesora y el número de las de los alumnos, si bien la superioridad corresponde en este caso a los alumnos; se mantiene la frecuencia mayor de acciones destinadas a indagar significados por parte de la profesora y de los alumnos a aportar información, esta vez con notable diferencia respecto a los otros tipos de actuación específicos; en esta etapa sí se producen algunas sistematizaciones de conocimiento. En la tercera etapa el número de acciones de la profesora vuelve a ser superior al número de actuaciones de los alumnos, y entre las acciones específicas de ésta destaca la frecuencia de las encaminadas a indagar significados. En la última etapa se acentúa la superioridad de las actuaciones de la profesora frente a las de los alumnos (51%-30%); esta vez la frecuencia de las actuaciones dirigidas a indagar significado es la misma que la de las destinadas a desarrollar comprensión, y el mayor número de actuaciones por parte de los alumnos sigue correspondiendo a aportar información; la sistematización de conocimiento sigue siendo bastante escasa, aunque con un leve incremento de parte de los alumnos en esta última etapa.

Pasamos ahora a analizar la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Actuaciones Generales. En general, se observa que el peso fundamental en la interacción corresponde a las actuaciones Fijar normas y Establecer significados (algo menos del 85% de las acciones en las diferentes tareas). A las actuaciones de Enjuiciar e Intervenir corresponde, por consiguiente, un 15% de las acciones aproximadamente, de las cuales, además, el mayor peso corresponde a la actuación de Enjuiciar.

Si centramos nuestra atención en las actuaciones correspondientes a Fijar normas y Establecer significados, observamos que en todas las actividades hay una mayor frecuencia de actuaciones destinadas a establecer significados que de actuaciones destinadas a fijar normas; esto se acentúa en la tercera etapa (correspondiente al establecimiento de las conexiones entre los conceptos de decimal, fracción y Número Racional) (60%-21%) y resulta poco significativo en la segunda (correspondiente a establecer la correspondencia decimales-fracciones) (43%-41%). En cuanto al equilibrio entre las actuaciones que provienen de la profesora y las que provienen de los alumnos, hay en general un mayor porcentaje de actuaciones que provienen de la profesora, en especial en lo que se refiere a las actuaciones encaminadas a establecer significados.

En suma, se observa que el mayor porcentaje de actuaciones está encaminado a construir conocimiento (alrededor del 90% del total) y, para ello, tiene una importancia especial el establecimiento de significados (en torno al 85% de las actuaciones totales); dentro de este apartado, llama la atención la frecuencia de las actuaciones de la profesora dirigidas a indagar significados y, por consiguiente, de los alumnos a aportar información, en detrimento de finalidades como la de sistematizar conocimento.

En lo que respecta a la categoría Clima de Aula, se mantiene el nivel de ruido en las primeras etapas de la clase (en torno al 15% del total de actuaciones en cada etapa), y se produce un leve descenso en la última, quizás porque la profesora impone un poco más de disciplina en esta etapa con objeto de finalizar la actividad.

V. 2. 2 Observación y Resultados de la Tarjeta 1 sobre el Cuestionario de Repaso

-<u>Instrumento:</u>

Recordamos que se trata de una Cuestión Complementaria de investigación, tal y como aparece en la tabla 5.2., surgida a raiz de las deficiencias de comprensión de los alumnos detectadas en el Cuestionario de Repaso, y que aparece enunciada en el Anexo V.1.

-<u>Objetivo de la actividad:</u>

-Observar la comprensión de los alumnos sobre la definición de número racional a través de sus distintas representaciones (fraccionaria -teniendo en cuenta las fracciones equivalentes-, y decimal -finita o periódica), y las relaciones entre dichas representaciones.

-Aclarar las dificultades y errores que surjan al respecto.

-<u>Ideas detectadas (errores, incoherencias, conexiones interesantes, puntos que se dominan, etc...):</u>

-22/32 alumnos (algo más de un tercio de los alumnos) eligen la respuesta correcta. Sin embargo, a la hora de justificar su elección, sólo 4 alumnos (es decir 1/8 del total) argumentan bien, discriminando los errores o las carencias de las demás definiciones.

El resto de los alumnos cometen fallos al criticar los errores o carencias de las demás opciones, o hacen juicios del estilo mejor/peor, sin criticar las demás definiciones. En este sentido, es importante notar que son muchos los alumnos que descartan la opción d), en la cual se establece que los racionales pueden tener una representación decimal infinita no periódica, por motivos de incompletitud, y no por la razón fundamental (a nuestro juicio).

-Un alumno escoge la respuesta b), que no hace ninguna alusión a la representación decimal de los racionales.

-Dos alumnos escogen la respuesta e), que no hace alusión a las fraciones equivalentes y a su correspondencia al mismo decimal y al mismo número racional, pero llama la atención de que los números enteros son racionales.

-Finalmente, 5/32 (casi 1/6 de los alumnos) aceptan que los racionales pueden tener una expresión decimal infinita no periódica.

-Fenómenos observados:
Hay problemas con la inclusión del conjunto de los números enteros en el de los números racionales. Buena parte de los alumnos separa los conceptos decimal-entero y/o fracción-entero.

-Valoración / Interpretación:
-La separación establecida por los alumnos entre decimal-entero, fracción-entero dificulta el que los alumnos consideren a los números enteros como racionales; o también puede darse el caso de que, al establecer el hecho de que los enteros sean también racionales, separen a los numéros racionales de los decimales y/o de las fracciones, y quede confusa la relación entre racional-decimal-fracción.
-Es importante llamar la atención de los alumnos, una vez más, sobre la representación decimal de los números racionales, que sólo puede ser finita o periódica, nunca infinita no periódica (por el razonamiento a partir del algoritmo tradicional de la división, que ha sido trabajado y revisado en clase).
-Por otra parte, el análisis de las respuestas correctas dadas por los alumnos, plantea que habría que mejorar el diseño de la pregunta para futuras ocasiones, ya que bastantes de ellos se decantan por la opción correcta porque está claramente más elaborada (tambien tiene mayor longitud) que las demás, pero sin discriminar los errores e incluso las carencias del resto de las opciones.

V. 2. 3 Observación y Resultados de la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso

-Instrumento:

El instrumento elaborado para estudiar la evolución de los alumnos en lo que respecta a colocación de números racionales en la recta numérica, después de la revisión realizada en el Cuestionario de Repaso, es la Tarjeta 2 sobre dicho Cuestionario de Repaso; su contenido aparece en el Anexo V.1.

La Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de Repaso es también una Cuestión Complementaria de investigación. Sin embargo, debido a que coincide con una de las Cuestiones de Investigación específicas de la Fase de Acción anterior, disponemos de escalas de valoración elaboradas para su análisis y, por esta razón, en lugar de realizar un análisis a partir de las reflexiones de la profesora-investigadora, como es habitual en las Cuestiones Complementarias, haremos uso de dichas escalas para realizar un análisis más detallado de las producciones de los alumnos, es decir, hemos analizado los documentos de los alumnos sobre la Tarjeta 2 del Cuestionario de Repaso de la misma forma que una cuestión de investigación específica.

-Características del instrumento e implementación:

Esta cuestión fue planteada a los alumnos para ser contestada individualmente y por escrito en una sesión de clase. Los ejercicios serían evaluados y la nota contribuiría a la calificación total de la evaluación.

-Objetivos:

-Observar el nivel de comprensión de los alumnos sobre la representación en la recta de los números racionales: Distintas representaciones de un mismo números racional: fracciones y representaciones decimales, fracciones equivalentes; y representación exacta de decimales periódicos a través de su expresión fraccionaria.

-Aclarar las dificultades que surjan al respecto.

V. 2. 3. 1 Criterios que concretan las unidades de análisis:

Para valorar la comprensión de los alumnos sobre la correspondencia números racionales-puntos de la recta, utilizaremos de nuevo las unidades de análisis elaboradas con tal fin, apartado III.6.2, que concretamos con los siguientes criterios:

1. Interpretación y manejo de dicha correspondencia en términos de aplicación por parte de los alumnos. Valoraremos la asignación de un punto de la recta a distintas notaciones numéricas.

2. Interpretación y manejo de la correspondencia números racionales-puntos de la recta como una aplicación bien definida. Para valorarla tendremos en cuenta la asignación de un punto de la recta a distintos tipos de representaciones numéricas: fracciones equivalentes; distintas representaciones de un mismo racional (fraccionarias y decimales); distintas expresiones decimales de un mismo racional (ej. 0.2 y 0,200) y el caso particular de los racionales negativos

V. 2. 3. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

Los dos criterios mencionados para esta cuestión admiten la consideración de diferentes aspectos o apartados, y cada uno de ellos permite elaborar una escala para su valoración. Tanto estos apartados como las escalas correspondientes fueron enunciados en dos momentos distintos: en un primer momento, para los resultados de la prueba del Pretest, y en un segundo momento, fueron matizados y ampliados con objeto de registrar la evolución de la comprensión de los alumnos a raiz del proceso didáctico. En esta ocasión, las respuestas de los alumnos muestran que se ha producido una nueva evolución, de forma que es posible realizar un análisis más fino sobre los puntos previstos en un principio en las Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido correspondientes a este punto. Presentamos los aspectos con las correspondientes escalas elaboradas con tal fin.

1. Asignación de un punto de la recta a cada una de las siguientes notaciones de los números racionales, y procedimiento mediante el cual se le asigna, Se valoran cuatro aspectos , según las escalas que se indican:

<u>Fraciones Propias</u> **(FP)**:

1. división de la unidad en las partes que indica el denominador y marca el punto correspondiente a la última parte del las que indica el numerador
2. pasar a expresión decimal
3. utilizar distintos procedimientos según ejemplos concretos
4. no puede saberse el procedimiento utilizado
5. otras
6. NS / NC

<u>Fracciones Impropias</u> **(FI)**:

1. igual que en el caso de las fracciones propias, pero tomando cuantas unidades se requieran para dividirlas en las partes que indica el denominador y marcar el punto correspondiente a la última parte de las que indica el numerador
2. pasar la fracción impropia a número mixto, tomar las unidades indicadas y representar en la unidad siguiente la fracción propia tal como se indicó en el valor 1
3. pasar a expresión decimal
4. utilizar distintos procedimientos según ejemplos concretos
5. no puede saberse el procedimiento utilizado
6. otras
7. NS / NC

<u>Decimales Finitos</u> **(DF)**

1. tomar las unidades indicadas en la parte entera; dividir la siguiente en décimas, centésimas, milésimas...según el número de cifras decimales y marcar el número de décimas, centésimas.... indicado en la parte decimal.
2. hallar la expresión fraccionaria del decimal y representarlo según lo indicado en la escala anterior.
3. estimar el punto correspondiente (bien o mal)
4. utilizar distintos procedimientos
5. no puede saberse el procedimiento utilizado
6. otras
7. NS / NC

<u>Decimales Periódicos</u> **(DP)**:

1. hallar la expresión fraccionaria del decimal y representarlo
2. estimar el punto correspondiente a una aproximación finita del decimal (bien o mal)
3. utilizar distintos procedimientos

4. no puede saberse el procedimiento utilizado
5. otras
6. NS / NC

2. Asignación de un punto de la recta a distintas representaciones numéricas de un mismo número racional, y procedimiento mediante el que hace la asignación:

Fracciones Equivalentes **(FE)**

1. asigna a todas el mismo punto
2. asigna puntos distintos a fraciones equivalentes
3. no se puede decidir
4. NS / NC

Distintas expresiones Decimales de un mismo Racional (ej. 0.2 y 0,200) **(RD)**:

1. asigna a todas el mismo punto
2. asigna puntos distintas expresiones decimales de un mismo número
3. no se puede decidir
4. NS / NC

Distintas Representaciones de un mismo Racional, fracción y decimal (**RR**):

1. asigna a todas el mismo punto
2. asigna puntos distintas expresiones de un mismo número racional
3. no se puede decidir
4. NS / NC

Racionales Negativos (**RN**):

1. no falla
2. falla

V.2.3.3 Resultados de la Tarjeta 2 sobre el Cuestionario de repaso

Los resultados generales obtenidos en la Tarjeta 2, de acuerdo con las escalas establecidas, se presentan en las tablas 18 y 19 del Anexo V.2. A continuación, presentamos dichos resultados atendiendo a cada uno de los aspectos en que se han concretado las unidades de análisis.

Asignación de un punto de la recta a las Fracciones Propias:

Tabla 5.7: Asignación de un punto de la recta a las fracciones propias.

FP	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	14+2*	3	0	2	8E	0

Resultados globales:

Aproximadamente la mitad de los alumnos representa las fracciones propias mediante el procedimiento de dividir la unidad en las partes que indica el denominador y tomar las que indica el numerador[1] .

Alrededor de 1/4 de los alumnos utilizan procedimientos erróneos. El más frecuente (más de la mitad de los alumnos equivocados) consiste en situarse en la unidad que indica el numerador y dividir la siguiente unidad en las partes que indica el denominador: por ejemplo, 4/8 se representaría como 4,8 (con diversas variantes en la representación de la supuesta parte decimal). Otros procedimientos erróneos tienen que ver, en general, con las divisiones de la unidad: un alumno siempre divide la unidad en 10 partes y toma las que indica el numerador, y otros tampoco tienen bien en cuenta las partes en que se ha de dividir la unidad.

Del resto de los alumnos, hay algunos (3 concretamente) que optan por pasar las fracciones a su representación decimal y otros (2) de los que no puede determinarse el procedimiento que han utilizado.

Asignación de un punto de la recta a las Fracciones Impropias:

Tabla 5.8: Asignación de un punto de la recta a las fracciones impropias. Frecuencias en la escala propuesta.

FI	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	10+1*	0	6	2	3	1+6E	0

Resultados globales:

En el caso de las fracciones impropias, el número de alumnos que las representa por el procedimiento de dividir la unidad en las partes que indica el denominador y tomar las que indica el numerador decrece ligeramente (algo más de 1/3) y aumenta, en cambio, el número de los que deciden pasar la fracción a su expresión decimal y representarla a partir de dicha notación (alrededor de 1/5 de los alumnos)

Ningún alumno pasa las fracciones impropias a números mixtos para representarlas.

Los procedimientos erróneos son básicamente los mismos que los que se producen en el caso de las fracciones propias.

Asignación de un punto de la recta a los Decimales Finitos:

[1] Los casos especiales (marcados con *) se refieren a un alumno que explica bien el procedimiento verbalmente pero no marca bien las divisiones en el dibujo, y a otro alumno que también tiene descuidos al hacer las divisiones que indica el denominador.

Tabla 5.9: Asignación de un punto de la recta a los decimales finitos.

DF	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia	6+(2)	1	2+(2)	1	11	1	3

Resultados globales:

La asignación de un punto de la recta a los decimales, aún tratándose de los decimales finitos, presenta más problemas que el caso de las fracciones.

Alrededor de 1/4 de los alumnos toma las unidades indicadas en la parte entera y divide la siguiente en décimas, centésimas, etc., para marcar el número indicado por la parte decimal. Un alumno opta por pasar los decimales a su expresión fraccionaria y otro utiliza distintos procedimientos según los casos.

En una gran parte de los alumnos (algo más de 1/3) no puede saberse el procedimmiento que han utilizado, o se ve que estiman el punto (4 alumnos), bien o mal.

Mientras que las notaciones fraccionarias fueron representadas, por un procedimiento u otro, por los alumnos, en el caso de las notaciones decimales finitas hay 3 alumnos que ni siquiera intentan representar esta notación.

Asignación de un punto de la recta a los Decimales Periódicos:

Tabla 5.10: Asignación de un punto de la recta a los decimales periódicos. Frecuencias en la escala propuesta.

DP	1	2	3	4	5	6
Frecuencia	10	7	0	1	2+1E	8

Resultados globales:

En este tipo de notación sube el porcentage de alumnos que no contesta: más de 1/4 del total.

Aproximadamente 1/3 de los alumnos contesta bien a la pregunta. Pero otros (alrededor de 1/4 del total) estiman el punto correspondiente a una aproximación finita del decimal en cuestión.

De los alumnos que utilizan otros procedimientos, el procedimiento erróneo es personal y bastante caótico.

Asignación de un punto de la recta a las Fracciones Equivalentes:

Tabla 5.11: Asignación de un punto de la recta a las fracciones equivalentes.

FE	1	2	3	4
Frecuencia	19	6+1*	0	3

Resultados globales:

Aproximadamente 2/3 de los alumnos asignan el mismo punto a fracciones equivalentes. El resto asigna puntos distintos (debido a los fallos de representación de las fracciones vistos en los primeros apartados, que hacen asignar valores distintos a fracciones equivalentes), o bien no contesta.

Una alumna (*) asigna el mismo valor en principio a las fracciones equivalentes, pero luego las representa en puntos distintos a causa de su error en la representación de la fracción a/b como el decimal a,b.

Asignación de un punto de la recta a distintas representaciones decimales de un mismo racional:

Tabla 5.12: Asignación de un punto de la recta a distintas representaciones decimales de un mismo racional.

RD	1	2	3	4
Frecuencia	14	5+(1)	5	4

Resultados globales:

En esta cuestión, aproximadamente la mitad de los alumnos contestan bien. El resto se distribuye a partes prácticamente iguales entre los que asignan puntos distintos a representaciones decimales de un mismo racional, no se puede interpretar bien la respuesta, o no contestan.

Asignación de un punto de la recta a distintas representaciones (fracciones y decimales) de un mismo racional:

Tabla 5.13: Asignación de un punto de la recta a distintas representaciones (fracciones y decimales) de un mismo racional.

RR	1	2	3	4
Frecuencia	16+(1)	9	0	3

Resultados globales:

Más de la mitad de los alumnos (entre la mitad y 2/3) asignan el mismo punto a representaciones distintas de un mismo racional. El resto asigna puntos distintos o no contesta.

Asignación de un punto de la recta a racionales negativos:

Tabla 5.14: Asignación de un punto de la recta a racionales negativos.

RN	1	2	3
Frecuencia	11+1*	7+(1)+2*	5

Resultados globales:

Algo más de 1/3 de los alumnos representa bien los racionales negativos (el caso especial es el de una niña que representa algunos de los números positivos que se habían dado como números negativos, y lo hace bien).

Aproximadamente otro tercio de los alumnos representa mal los racionales negativos, si bien hay un caso especial en el que el alumno utiliza bien el criterio de simetría y el motivo de que no represente bien los racionales negativos es el de sus errores en los positivos; otro caso especial es el de un alumno que representa mal los enteros negativos (situa -1 en algún lugar de la recta negativa, y a la derecha de éste -2, -3, -4, etc. hasta hacer corresponder el 0 con -6), pero representa bien los racionales, salvando ese error.

El resto de los alumnos no contesta.

V. 2. 3. 4 Reflexión sobre los resultados de la Tarjeta 2

-Algo más de la mitad de los alumnos representa bien en la recta las notaciones fraccionarias de los números racionales (entre 1/2 y 2/3 del total). Un error importante que se detecta es el procedimiento que consiste en situarse en la unidad que indica el numerador y dividir la siguiente unidad en las partes que indica el denominador: por ejemplo, 4/8 se representaría como 4,8 (con diversas variantes en la representación de la supuesta parte decimal). Podemos señalar el matiz de que hay algunos alumnos que optan por pasar las fracciones a notación decimal para asignarles un punto de la recta y que el número de alumnos que utiliza este procedimiento aumenta en el caso de las fracciones impropias.

-La representación en la recta de la notación decimal de los racionales presenta sin duda más problemas. En el caso de los decimales finitos, sólo1/4 de los alumnos aproximadamene toma las unidades indicadas en la parte entera y divide la siguiente en décimas, centésimas, etc., para marcar el número indicado por la parte decimal.

En el caso de los decimales periódicos, los resultados son quizá algo mejores, debido al procedimiento discutido en clase de pasar el decimal periódico a notación fraccionaria para poder hacer la representación exacta. No obstante, hay alumnos que persisten en estimar el punto correspondiente a aproximaciones finitas del decimal periódico en cuestión.

Por lo que respecta a la asignación de un punto de la recta a distintas representaciones numéricas de un mismo número racional, aumenta la proporción de alumnos que parecen tener claro este aspecto y asignan el mismo punto a distintas notaciones de un mismo número racional. Si bien se suscita algo más de problema, de nuevo, en la representación de distintas notaciones decimales de un mismo número.

En general, el nivel de los alumnos en la cuestión de la asignación de puntos de la recta a distintas representaciones numéricas de los racionales evoluciona lentamente a pesar de la instrucción dada en el proceso didáctico, y el punto más problemático lo constituye la representación en la recta de las notaciones decimales. Esto último se ve reforzado por los resultados de los niños que decidieron repetir la prueba en casa (algo menos de 1/4 del total), los cuales, sin embargo, mejoran su nivel después de las aclaraciones en clase y a nivel individual por parte de la profesora (ver Anexo V.2).

V. 2. 3. 5 Toma de decisiones a partir de los resultados de la Tarjeta 2

A pesar de que el manejo de la asignación de un punto de la recta a los números racionales por parte de los alumnos del grupo, en general, no es el idóneo para seguir avanzando de forma sólida sobre otros aspectos relacionados con la cuestión, creo que ha llegado un punto en que el tema ha sido planteado un buen número de veces y que insistir sobre él produciría un efecto de saturación en los alumnos que no facilitaría avances significativos; hemos de tener en cuenta también que hay un sector de los alumnos con un nivel considerablemente bajo desde el comienzo del curso, debido a diversas circunstancias que no se han superado con el tiempo).

Así pues, avanzaremos sobre el tema a partir de ese nivel de comprensión que, si bien no es el idóneo, si que ha supuesto una evolución desde el principio del proceso didáctico y es susceptible de permitir, por otra parte, el avance consistente de una parte de los alumnos.

V. 2. 4 Observación y Resultados de la Cuestión de Investigación 1.

Como se indicó en la tabla 5.3 (pg. 251), se trata de una Cuestión de Investigación específica.

-Instrumento:

Este instrumento ha sido elaborado para estudiar explorar los tipos de representaciones decimales que conocen los alumnos, su procedencia, el status de número que les conceden y cómo las clasifican. El contenido de esta cuestión de investigación se presentó en el apartado III.2.3 de esta memoria y aparece en el Anexo III.3.

-Características del instrumento e implementación:

La Cuestión de Investigación 1 (CI1) se pasó a los alumnos por escrito en una sesión de clase, para ser contestada individualmente. Los alumnos estaban colocados con el

agrupamiento usual, pero se les pidió que contestaran a la pregunta de forma individual, por su carácter exploratorio, para organizar el trabajo a partir de sus conocimientos e ideas previas, y por el fin de la actividad, que era tener una información lo más veraz posible de la situación.
Después de que los alumnos hubieron contestado a la pregunta por escrito, se recogieron los trabajos y se realizó una Puesta en Común.

-Objetivos:

Con esta Cuestión de Investigación pretendemos explorar cuáles son los conocimientos e ideas previas de los alumnos sobre las diversas expresiones decimales con las que han tenido contacto antes de comenzar el estudio específico de los números irracionales. Concretamente, nos interesa averiguar:

1. ¿Qué expresiones decimales conocen los alumnos y cómo las clasifican?
2. ¿Qué argumentos utilizan para aceptar o rechazar, según los casos, el que determinadas expresiones decimales infinitas representen números?

V.2.4.1 Criterios que concretan las unidades de análisis

Las unidades de análisis para la comprensión por parte de los alumnos de esta cuestión aparecen en el apartado III.6.1. A partir de dichas unidades de análisis, hemos elaborado los siguientes criterios de concreción para esta cuestión específica:

1. Expresiones decimales infinitas consideradas

- 1.1. Tipos de expresiones decimales propuestas por los alumnos
- 1. 2. Ejemplos dados de los distintos tipos de expresiones decimales

2. Diferenciación entre los distintos tipos de decimales infinitos a partir de su procedencia

- 2.1. Decimales periódicos.
- 2.2. Decimales infinitos no periódicos:

3. Argumentos empleados (y consistencia con la que se emplean) para:

- 3.1. Otorgar status de número a distintas expresiones decimales.
  - a). Caso de los Decimales Periódicos
  - b). Caso de los Decimales Infinitos No Periódicos:
- 3.2. Rechazar el status de número para algunas expresiones decimales:
  - a). Caso de los Decimales Periódicos:
  - b). Caso de los Decimales Infinitos No Periódicos.

V. 2. 4. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

Los criterios mencionados para esta cuestión admiten la consideración de diferentes aspectos o apartados; para cada uno de ellos elaboramos una escala de valoración. Pasamos a presentar estos aspectos con las correspondientes escalas, atendiendo a los criterios presentados en el apartado anterior.

1. Tipos distintos de expresiones decimales infinitas consideradas por los alumnos y ejemplos de cada tipo:

Tipos (**T**):

0. "Enteros con infinitas cifras" (de creación arbitraria, siguiendo un patrón o sin seguirlo)

1. Decimales Periódicos
    a) (Decimales finitos)
    b) Decimales periódicos puros*
    c) Decimales periódicos mixtos

*Incluido el caso especial del periodo nueve.

2. Decimales Infinitos No Periódicos:
    a) Con cifras determinadas:
        1. Expresión decimal de raíces cuadradas
        2. Expresión decimal de otros irracionales conocidos: π, número de oro, etc
    b) Con cifras arbitrarias:
        1. Siguiendo un patrón
        2. Sin seguir ningún patrón.

Ejemplos (**E**):

Se valorarán según la misma escala del apartado anterior.

2. Diferenciación entre los distintos tipos de decimales infinitos a partir de su procedencia:

Decimales Periódicos (**DP**):

1. Provienen de fracciones o divisiones.
2. Otras

Decimales Infinitos No Periódicos (**INP**):

a) Con cifras determinadas:

1. Provenientes de un algoritmo para la resolución numérica de una ecuación (concretamente el caso de las raíces cuadradas en las ecuaciones de segundo grado, que son las únicas que trabajan los alumnos).
2. Provenientes de razones entre longitudes (inluye el caso de las raíces cuadradas, número de oro, π).
3. Otras. (Dentro de este apartado, incluímos el caso en que se atribuye a π la procedencia de una fracción; se señalará con 3´).

b) Con cifras arbitrarias:

1. Siguiendo un patrón
2. Sin seguir ningún patrón
3. Otras. (Si la respuesta es No sé, se codificará con NS).

3. Criterios empleados para:

Aceptar el status de número de expresiones:

Periódicas (**AEP**)

1. Criterios de escritura:
   a) Finitud de las cifras
   b) Periodicidad de las cifras
   c) Posibilidad de nombrarlos (de representarlos mediante una fracción)
   d) Estar compuestos de cifras
   e) Otras
2. Carácter operatorio de los números:
   a) Los números surgen a partir de acciones; en el caso de los correspondientes a decimales periódicos, surgen a partir de: operaciones aritméticas o algebraicas (2a1); medida de longitudes (conmensurables con la unidad) u otras (2a2).
   b) Con los número se realizan operaciones.
   c) Otras
3. Motivos de representación: correspondencia con puntos de la recta[2]
4. Se otorga status de número sin explicitar motivo.

Infinitas No Periódicas (**AEI**):

1. Criterios de escritura:
   a) Regularidades y patrones para su control
   b) Posibilidad de nombrarlos
   c) Estar compuestos de cifras
   d) Otras
2. Carácter operatorio de los números:
   a) Los números surgen a partir de acciones; en el caso de los correspondientes a decimales infinitos no periódicos, pueden surgir a partir de: operaciones aritméticas o algebraicas (raíces cuadradas, resolución de ecuaciones, acceso a algoritmos de aproximación a partir del "nombre"...) (2a1), medida de longitudes (inconmensurables con una longitud unidad dada) u otras (2a2).
   b) Con los número se realizan operaciones.
   c) Otras
3. Motivos de representación: correspondencia con puntos de la recta [3]

[2] Esta correspondencia se realiza a través de la medida, pero no es obvio para muchos alumnos que la establecen de forma arbitraria una vez que ciertas expresiones han alcanzado para ellos el status de número por otros motivos.

[3] Esta correspondencia se realiza a través de la medida*, pero no es obvio para muchos alumnos que la establecen de forma arbitraria una vez que ciertas expresiones han alcanzado para ellos el status de número por otros motivos.
*Para los construibles; ¿qué ocurre en el caso de los no construibles?

4. Se otorga status de número sin explicitar motivo.

Rechazar el status de número de expresiones:

Periódicas **(REP)**:

1. Criterios de escritura:
   a) Infinitud de las cifras
   b) Otras
2. Carácter operatorio de los números:
   a) Las expresiones decimales infinitas no corresponden a la medida de ninguna longitud.
   b) Otras
3. Motivos de representación: A las expresiones decimales infinitas no les corresponde ningún punto de a recta.
4. Se rechaza sin motivo.

Infinitas No Periódicas **(REI)**

1. Criterios de escritura:
   a) Imposibilidad de control sobre la escritura en el caso de las notaciones infinitas no periódicas.
   b) Imposibilidad de nombrarlos.
   c) Infinitud de las cifras. Imposibilidad de saber el final.
   d) Otras
2. Carácter operatorio de los números:
   a) Las expresiones decimales provienen sólo de la creación arbitraria, sin tener origen en una operación aritmética.
   b) Las expresiones decimales no corresponden a la medida de ninguna longitud.
   c) Otras
3. Motivos de representación: A las expresiones decimales no les corresponde ningún punto de a recta.
4. Se rechaza sin motivo.

V.2.4.3 Resultados de la cuestión de investigación

Los resultados generales obtenidos en la Cuestión de investigación 1, de acuerdo con las escalas establecidas, se presentan en la tabla 20 del Anexo V.2. A continuación, presentamos dichos resultados atendiendo a cada uno de los criterios de concreción de las unidades de análisis. El recuento de datos se ha realizado indicando las frecuencias para cada valor de la escala (en cada uno de los mencionados criterios). Sin embargo, hemos de tener en cuenta que, de acuerdo con los criterios correspondientes a esta cuestión, un alumno puede situarse en más de un valor de la escala.

1.1. Tipos de expresiones decimales:

Tabla 5.15: Tipos de expresiones decimales consideradas por los alumos en la CI1.

T	0	1	1a	1b	1c	2	2a1	2a2	2b1	2b2	NC
	1	8	3	21	25	13	1	0	0	0	1

-Resultados globales:

Alrededor del 80% de los alumnos menciona los decimales periódicos mixtos y periódicos puros, algunos de ellos añaden los decimales finitos. Un 27% del total de alumnos sólo alude a decimales periódicos (sin especificar si puros o mixtos), algunos de ellos hace la distinción entre periódicos y periódicos mixtos.

En cuanto a los decimales infinitos no periódicos, un 43% de los alumnos explicitan el tipo "decimales infinitos no periódicos", y sólo 1 especifica como tipo los que provienen de raíces cuadradas (los demás dan ejemplos de diversos tipos pero no establecen una tipología para distinguirlos).

1.2. Ejemplos de expresiones decimales:

-No hay problemas con los ejemplos de decimales periódicos.

-En cuanto a los ejemplos de decimales infinitos no periódicos:

Tabla 5.16: Ejemplos de expresiones decimales dadas por los alumnos en la CI1.

E	2			
	a1	a2	b1	b2
	5	4	8	5

-Resultados globales:

En cuanto a los ejemplos de expresiones decimales infinitas dados por los alumnos, no hay ningún problema con los ejemplos de decimales periódicos (puros y mixtos), (aunque señalamos la respuesta de una niña que pone el ejempo 0,9999... y dice que es "la representación periódica de 1", tal como se estableció en clase).

Los alumnos dan ejemplos de decimales infinitos no periódicos de diversos tipos: expresión decimal de raíces cuadradas (17% de los alumnos), expresión decimal de π (13% de los alumnos) y decimales con cifras arbitrarias, tanto siguiendo un patrón (27% de los alumnos) como sin seguirlo (17% de los alumnos).

Todos los alumnos que contestan a la cuestión el segundo día, excepto una alumna, en total un 20% de los alumnos, mencionan decimales infinitos no periódicos de distinto tipo. Este es un dato importante para tener en cuenta en relación con el recuento de frecuencias hecho en el párrafo anterior.

2. Procedencia

2.1. Decimales Periódicos

Tabla 5.17: Procedencia de los decimales periódicos, a juicio de los alumnos.

DP	1	2
	23+1*	5

*La observación se refiere a un alumno que no sabe de dónde vienen los decimales con 9 periódico.

2.2. Decimales No Periódicos

Tabla 5.18: Procedencia de los decimales no periódicos, a juicio de los alumnos.

INP	a			b		
	1	2	3	1	2	3
	5+2*	0	2´+1E	5	2	3NS

E: El error en la clave 3 consiste atribuir la procedencia de un decimal infinito no periódico a una división.

*Las dos observaciones que hay en la clave 1 se refieren a niños que atribuyen a un decimal con cifras arbitrarias la procedencia de una raiz cuadrada.

-Resultados globales:

-No hay problema con la procedencia de los decimales periódicos: un 80% de los alumnos dicen que proviene de fracciónes o de divisiones. En cuanto al resto, las respuestas no son significativas, salvo el caso en que un alumno piensa que son "inventados". Sí merece la pena señalar el caso del alumno que no sabe de dónde surgen los decimales con periodo 9.

-Por lo que respecta a la procedencia de los decimales infinitos no periódicos, un 23% de los alumnos atribuye a estos decimales la procedencia de una raiz cuadrada, 2 de ellos atribuyen esta procedencia erróneamente a decimales infinitos con cifras arbitrarias y 1 alumno atribuye erróneamente a los decimales infinitos no periódicos la procedencia de una división. Dos alumnos atribuyen a π la procedencia de una fracción. Un 17% de los alumnos atribuyen a los decimales infinitos con cifras arbitrarias su procedencia de la invención, y un 10% no sabe de dónde proceden.

3. Argumentos empleados por los alumnos para:

-Aceptar los decimales periódicos como números:

Tabla 5.19: Criterios empleados por los alumnos para aceptar los decimales periódicos como números.

AEP	1a	1b	1c	1d	1e	2	2a1	2b	2c	3	4
	0	0	3	10	3	1	4	0	1	2	5

-Aceptar decimales no periódicos como números:

Tabla 5.20: Criterios empleados por los alumnos para aceptar los decimales no periódicos como números.

AEI	1a	1b	1c	1d	2a	2a1	2a2	2b	2c	3	4
	1	0	1	4	1	3+1*	1**	0	0	1	0

*La observación se refiere a que piensa ue un decimal infinito no periódico cualquiera puede salir de un radical.
**La observación se refiere a que intenta dar una definición escolar de π que no recuerda muy bien.

-Rechazar decimales periódicos como números:

Tabla 5.21: Criterios empleados por los alumnos para rechazar los decimales periódicos como números.

REP	1a	1b	2a	2b	3	4
	1	0	0	0	0	0

-Rechazar decimales no periódicos como números:

Tabla 5.22: Criterios empleados por los alumnos para rechazar los decimales no periódicos como números.

REI	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3	4
	1	0	3	0	0	0	0	0	0

-Resultados globales:

-Los alumnos emplean más criterios para aceptar como números a los decimales periódicos que para aceptar o rechazar a los infinitos no periódicos, y en el caso de estos últimos hay una ligera superioridad en el número de criteriós de aceptación que de rechazo. La proporción es: aceptar periódicos (24)/ aceptar no periódicos (7) / rechazar periódicos (1) / rechazar no periódicos (4).

-Un 33% de los alumnos aceptan que los decimales periódicos son números porque están compuestos de cifras, curiosamente este criterio sólo es mencionado en una ocasión para aceptar como números a los decimales infinitos no periódicos.

-Un 17% de los alumnos acepta a los decimales periódicos como números sin explicitar motivos, cosa que sólo ocurre para un alumno en el caso de los infinitos no periódicos. El que los decimales periódicos surjan de operaciones es mencionado por un 13% de los alumnos, aunque hay dos alusiones más de carácter operatorio; y el criterio de representación en la recta, en dos casos.

-El criterio más empleado para aceptar a los decimales infinitos no periódicos como números es que provengan de una operación (13% de los alumnos). Un alumno añade como razón el que tengan un lugar en la recta, y otra alumna el que provengan de una definición (que en este caso tiene que ver con la medida, y no recuerda bien). El resto de criterios entran dentro del apartado de Varios.

V.2.4.4 Reflexión general sobre la comprensión de la Cuestión de Investigación 1, a partir de los documentos escritos de los alumnos

-Alrededor de un 80% de los alumnos conoce los decimales periódicos (con diversas distinciones: puros y/o mixtos, decimales finitos), y no tienen problema con dar ejemplos de este tipo de decimales ni con determinar su procedencia: fracciones o divisiones (en esta última cuestión hemos de señalar el caso de un alumno que explicita no saber de dónde surgen los decimales con 9 periódico).

Todos los alumnos excepto uno consideran que los decimales periódicos son números, pero los criterios de aceptación mayoritarios no son significativos: estar compuestos de cifras, o no explicitan motivos para la aceptación. Sólo 4 de 30 alumnos aluden como motivo para aceptar a los decimales periódicos como números el que éstos provienen de operaciones, 2 más a que puede operarse con ellos, y otros 2 a que pueden ser representados en la recta numérica.

-Por lo que respecta a los decimales infinitos no periódicos, la mitad de los alumnos explicita la existencia de dicho tipo de expresiones decimales y dan ejemplos de diversos tipos: principalmente expresiones decimales de raíces cuadradas y decimales con cifras arbitrarias (el motivo de que aparezca este tipo de ejemplos puede ser las alusiones a ellos por parte de la profesora en la presentación de la actividad y el hecho de que varios alumnos contestaron a la cuestión un día después y prácticamente todos ellos aludan a este tipo de decimales: ver tabla de resultados generales de la CI1 en Anexo V.2); también algunos alumnos mencionan la expresión decimal de π.

Más problemas parece haber para determinar la procedencia de este tipo de expresiones decimales; sobre todo la procedencia de π (que se atribuye a una fracción, quizás por la definición habitual "Longitud de la circunferencia / Diámetro") y la de los decimales con infinitas cifras arbitrarias, cuya procedencia no se sabe o incluso se atribuye a las raíces cuadradas.

La proporción más significativa de alumnos atribuye la procedencia de los decimales infinitos no periódicos en general a las raíces cuadradas.

Los alumnos emplean menos criterios para definirse por la aceptación o el rechazo de que las expresiones decimales infinitas no periódicas correspondan a números que en el caso de las periódicas. Curiosamente, los criterios arbitrarios o no significativos que se empleaban para justificar que los decimales periódicos eran números prácticamente no son empleados aquí; ahora los alumnos que contestan a este apartado buscan razones significativas para argumentar su respuesta: que los decimales infinitos no periódicos surgen de operaciones, que puede operarse con ellos y que pueden representarse en la recta (parece que toman como referencia el caso de las raíces cuadradas).

En suma, parece que los alumnos tienden a dar por sentado que los decimales periódicos son números, puesto que se trata de un conocimiento escolar establecido, y quedan más desconcertados ante el caso de las expresiones decimales infinitas no periódicas, cuyo tratamiento didáctico específico aún no ha sido abordado, intentando en este caso buscar criterios que otorguen el carácter de "números" a los números, lo cual puede ser un buen punto de partida para profundizar en el concepto de Número en general y de Número Real en particular[4] .

V.2.4.5 Estudio de la Interacción didáctica en la Cuestión de Investigación 1

La Puesta en Común, llevada a cabo después de que los alumnos hubieran realizado y entregado la Cuestión de Investigación1, aparece transcrita en el Anexo V.3.

---

4 Al final de las tres Puestas en Común a las que dio lugar esta sesión, se recogieron los apuntes que habían tomado los alumnos al respecto.

En un principio se tenía la intención de revisar los trabajos y analizarlos de acuerdo con las categorías, pero luego se desistió de la primera intención, porque después de una revisión de los documentos se consideró que analizar como los niños "copiaban" las clasificaciones hechas a raiz de la Puesta en Común no aporta demasiado acerca de su comprensión. Se observó que los alumnos en general copian correctamente la estructuración de los conocimientos que realiza la profesora, salvo en el caso de los argumentos a favor y en contra de que ciertas expresiones decimales sean consideradas como números; al ser tratadas estas últimas varias veces y con interrupcions entre las distintas Puestas en Común, en algunos alumnos se observan incoherencias (atribuidas principalmente a la falta de interés) e irregularidades.

De forma análoga a como hemos procedido anteriormente, y procederemos en lo sucesivo, la utilizaremos para reseñar puntos relevantes en lo que respecta a la comprensión del contenido por parte de los alumnos y para analizar las actuaciones propiamente dichas.

Aspectos relacionados con la comprensión:

A partir de la mencionada transcripción se observaron los siguientes puntos de interés para la comprensión de los alumnos:

-<u>Una de las características que otorgan, a juicio de los alumnos, status de número a los decimales periódicos es la posibilidad de realizar operaciones con ellos; para que esto sea posible, es necesario pasar a la representación fraccionaria de los mismos:</u>

(El segmento siguiente aparece ubicado a partir del minuto 0:22 en la transcripción correspondiente a la fecha 8-2-94, Anexo V.3).

"(A) Un momento,/ esos dos números se pueden restar.

(P) ¿Se pueden restar?

(A) Sí

(P) ¿Y por dónde empiezas?

(A) Pones 3,8888 (cuatro ochos) y 4,7777 (cuatro sietes)...

(A) Seño, puedes pasarlo a fracción

(P) ¡Puedes pasarlo a fracción!"

-<u>La procedencia de decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias plantea problemas para algunos alumnnos, que piensan que pueden provenir de operaciones:</u>

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita a partir del minuto 0:24, en la transcripción que venimos manejando).

-<u>El doble carácter finito e infinito de $\sqrt{2}$ plantea problemas para los alumnos, tanto en lo relativo a su expresión numérica como en lo relativo a su representación en la recta:</u>

<u>.Problema de nombrar-actualizar una expresión infinita. Paradoja que plantean las distintas representaciones: finita e infinita, controlada e incontrolable, de un mismo objeto:</u>

(El segmento siguiente aparece ubicado a partir del minuto 0:28 en la transcripción que venimos manejando).

"(A) Puede representarse en forma de raiz cuadrada

(P) ¿Puede representarse? ¿Cómo?

(A) ...

(A) ¡Pero es que es la respuesta de una raiz cuadrada!

(A) ... representar una raiz cuadrada, venga.

(A) ¿Qué? ¿Que cómo puedo representar una raiz cuadrada? Pues...

(P) Quizás lo que quiere decir Asenjo es que lo puedes nombrar. Este se llama "raiz de 2".

(A) Exactamente; ese número, es que ese número; espérate, ese número, al igual que un periódico puro puede "disfrazarse" con una división, este resultado de infinito no periódico puede disfrazarse en forma de radical, ¿eh?

/A) No

(P) Es decir, se puede representar como radical. Tú cuando dices √2 estás diciendo lo mismo que cuando dices esto.

(A) Eso es, lo mismo que cuando dices 3,8888... dices 9...

.<u>Representación en la recta: problemas que plantean las distintas representaciones, exacta y aproximada, de un mismo objeto:</u>

(El segmento siguiente aparece ubicado a partir del minuto 0:31 en la transcripción que venimos manejando).

"(A) Pues lo que no entiendo yo es como va a ser igual una fracción que su número, [decimal periódico] porque en una línea eso no se puede representar, sin embargo su fracción sí. Ahora ya no entiendo por qué son los dos iguales.

(P) ¿Tú no entiendes porque estos dos son el mismo número?

(A) Son el mismo, pero es que en realidad ese número en una línea recta no se puede representar y el otro sí. Ahora no entiendo por qué son los dos iguales.

(P) Eso es lo que decíamos. Este es un vestido del mismo número, y su fracción es otro vestido./

Cuando quiero representarlo en la recta, ¿qué vestido le pongo?

(A) El de la fracción

(P) El de la fracción,/pero estás representando, son representaciones de la misma cosa. Es la misma cosa.

(A) Seño, el 3,8888.... lo puedes representar en la recta porque sabes cuál es su periodo. Sin embargo el otro [√2] no sabes cuales son las cifras que vienen.

(...)

(P) ¿Qué mide el lado de esto?

(A) La raiz de 2.

(P) Y si yo esto lo cojo, aquí está el 0, y me pongo esto, me lo traslado y me lo pongo aquí./ ¿Este punto qué es?

(A) ...

(A) La raiz de 2, pero no sabes la medida exacta.

(A) ...

(P) La medida exacta: esto. Esa es la medida exacta. Exacta.

(A) Pero eso es una operación, pero no sabes el final.

(...)

(A) Que la raiz cuadrada no tiene final, que tú puedes saber... Si la trasladas, sí va a ser la raiz cuadrada de 2, pero, que no sabes el número exacto."

-Los alumnos no parecen tener mucho problema en aceptar siguiente argumento que nos permite establecer la infinitud de la expresión decimal de algunas raíces cuadradas: si el número de cifras de una expresión decimal es finito, la última cifra que resulta de multiplicarlo por sí mismo tiene un número finito de posibilidades, que en la mayoría de los casos no coinciden con la última cifra del número cuya raiz queremos hallar. Sin embargo, el razonamiento que permitiría establecer que la expresión decimal de esas raíces cuadradas tampoco podría ser periódica: si los fuera correspondería a una farcción, que multiplicada por sí misma daría una fracción también, nos lleva finalmente a si $\sqrt{2}$ puede expresarse o no en forma de fracción:

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita que comienza un poco antes del minuto 1:34, en la transcripción correspondiente a la fecha 9-2-94).

.Finalmente se recurre al conocimiento establecido de la imposibilidad de poner $\sqrt{2}$ en forma de fracción, lo cual implica que su expresión decimal es infinita no periódica (después de que los alumnos intenten comprender el conocimiento establecido mediante el argumento de reducción al absurdo que aparece en su libro de texto y no lo consigan):

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita a partir del minuto 1:36, en la transcripción que venimos manejando).

-Para justificar la representación en la recta y la posibilidad de operar con expresiones decimales infinitas no periódicas correspondientes a raíces cuadradas, los alumnos establecen, en distintos momentos, una analogía con el caso de los decimales periódicos y su representación en forma de fracción, aunque en este último caso los alumnos expresan más reticencias que en el caso de los decimales periódicos:

(El segmento siguiente aparece ubicado a partir del minuto 1:59 en la transcripción correspondiente a la fecha 10-2-94).

(P) ¿Tiene una representación en la recta?

(A) No

(A) Sí, sí

A) Son dos números infinitos. ¿por qué un periódico sí y el resultado de una raiz no, siendo infinitos los dos?

.(...)

(A) No se puede operar con ellos

(A) ¿Cómo se va a poder operar con una raiz cuadrada?

(P) Mira lo que dice Katerina.

(A) Que con los periódicos puros no se puede operar, se opera con las fracciones; lo mismo pasa con los radicales. No se opera con el número infinito, se opera con el radical.

(A) Exactamente. Exactamente.

(A) Es que la fracción es lo mismo que el decimal. Es lo mismo...

(A) Y el radical también es lo mismo...

(A) Y con eso ¿que es lo qué tú me quieres decir?, ¿que no se puede operar con números radicales? Pues ya está.

P) No, tú no dices nada. ¡Asenjo! Ya está bien, eh. Tú no dices nada hasta que yo te diga. Por que hay gente que estaba diciendo cosas importantes, y ahora se le ha olvidado. ¿Está claro?/ Decía Katerina...

(A) ¡Ah! que la fracción ha dicho que es igual que su número decimal. Digo que un radical es igual al número que resulta, aunque sea infinito, pero es igual a eso.

(A) Pues entonces sí se puede..."

Análisis de las Actuaciones:

El análisis de las actuaciones propiamente dichas que tuvieron lugar en la Puesta en Común sobre la Cuestión de Investigación 1 se realizará a partir de la grabación en vídeo de las tres sesiones correspondientes (8-2-94, 9-2-94, 10-2-94) (Anexo V:3), mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica descritas en el capítulo 3.

A continuación presentaremos un esquema del desarrollo de la sesión, seguido del análisis de la misma mediante las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica.

-Etapas de la interacción desde estructuradas según los contenidos:

8-2-94

1.Planteamiento de la actividad:

1.1. Propuesta de Trabajo:

Planteamiento de la Cuestión Escrita, directrices para realizarla y aclaraciones preliminares.

1.2. Ejecución:

Contestación por escrito de los alumnos a la Cuestión planteada. Aclaraciones al hilo de la actividad.

2.Puesta en Común:

2.1. Ejemplos de Decimales Periódicos. Procedencia. Estatus de número, características que lo otorgan:

-Posibilidad de hacer operaciones. Cambio de representaciones (paso de la representación decimal a la fraccionaria.

-Representación en la recta.

-Estar formado por cifras.

-Ser conocimiento establecido.

2.2. Ejemplos de Decimales Infinitos No Periódicos.

-Problemas con la infinitud de las cifras.

-Problemas con el estatus de número.

-Prodedencia. Posibilidad de hacer operaciones.

-Distinción entre:

.Decimales infinitos con cifras arbitrarias. (Estatus de número)

.Decimales infinitos procedentes de raíces: $\sqrt{2}$.

Problemas con la procedencia de los decimales con infinitas cifras no periódicas.

2.3. Estatus de número de $\sqrt{2}$, características que lo otorgan:

.Estar formado por cifras (en dos momentos de la discusión)

.Proceder de una operación.

.Posibilidad de nombrar-actualizar una expresión infinita:

Problemas que plantean distintas representaciones, finita-infinita, controlada-incontrolable, de un mismo objeto.

.Representación en la recta:

Problemas que plantean las distintas representaciones, exacta-aproximada, de un mismo objeto.

9-2-94

<u>3. Puesta en Común</u>

3.1. Repaso de las Expresiones Decimales aparecidas en la sesión anterior:

-Decimales Periódicos: Ejemplos y Procedencia.

-Decimales Infinitos No Periódicos. Raíces Cuadradas:

.Diferenciación entre raíces cuadradas enteras e infinitas no periódicas.

.Discusión sobre la Periodicidad o no periodicidad de la expresión decimal de las raíces cuadradas. Dificultades de comprensión. Se recurre al conocimiento establecido: Imposibilidad de poner $\sqrt{2}$ en forma de fracción, por tanto, expresión decimal infinita no periódica.

3.2. El número π

-Discusión sobre su expresión decimal.

-Significado y procedencia.

-PROPUESTA DE TRABAJO VOLUNTARIO FUERA DEL AULA.

3.3. Decimales infinitos con cifras arbitrarias

-----------------Ruptura de la grabación 3-4 minutos----------------------

3.4. Repaso de las Razones por las que los Decimles Periódicos son números:

-Se pueden hacer operaciones (cambiando de representación).

-Provienen de una operación.

-Se pueden representar en la recta (cambiando de representación). (En dos momentos de la discusión).

-Es un conocimiento establecido.

3.5. Repaso de la discusión sobre el estatus de número de √2 y características que lo otorgan:

-Proviene de una operación.

-Se representa con un radical.

-Discusión sobre su representación en la recta: Analogía con los Decimales Periódicos.

10-2-94

4. Cuestiones de orden, disciplina.

5. Puesta en Común.

5.1. Repaso de los tipos de Decimales Infinitos. Clasificación.

-Periódicos (Puros y mixtos).

-Infinitos No Periódicos:

.Procedentes de una operación (raíces cuadradas y π)

.Con cifras arbitrarias (con regularidad y sin regularidad)

5.2. Separación Racionales-No Racionales. Clarificación de la distinción.

5.3. Discusión del estatus de número de √2.

-Se pospone la cuestión de la representación en la recta.

-Razones en contra del estatus de número de √2:

.No se puede pasar a fracción. ¿No se puede representar en la recta?

.No es un número racional. (En dos momentos de la discusión. En el segundo momento se habla de "números radicales").

.No tiene final.

.Discusión sobre la posibilidad de Operar con Decimales Infinitos: Analogía decimales periódicos-fracción /decimales no periódicos-radical.

-Datos globales sobre las Unidades de Interacción Didáctica encontradas:

A partir de las transcripciones de las puestas en común correspondientes a la Cuestión de Investigación 1 y de la tipificación de segmentos que la componen es de un tópico nuevo. La misma tónica se observa en la segunda etapa destinada al tratamiento de decimales no periódicos, concretamente al caso específico de la √2.

Pasamos ahora a analizar la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Actuaciones Generales. En la primera etapa de la clase, en la que se propone la tarea, las acciones corresponden en su gran mayoría al establecimiento de significados (81%) y a la fijación de normas. A partir de esta primera etapa, las acciones correspondientes a fijar normas se sitúan en torno al 40% y las correspondientes al establecimiento de significados fluctúan entre el 30 y el 40%. Durante la ejecución de la tarea el resto de las acciones corresponde a intervenciones realizadas durante dicha ejecución para clarificar aspectos relacionados con la misma, y en la Puesta en Común el resto de las acciones corresponde en su mayoría (alrededor del 20%) a la realización de valoraciones.

En lo que se refiere al Clima de Aula, el nivel de ruido oscila entre el 10 y el 15% del total de segmentos categorizados, normalmente, en las distintas etapas, correspondiendo los niveles más altos a la ejecución de la tarea y al final de la clase.

9-2-94

Analizamos a continuación la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Finalidades que corresponden a la Segunda Sesión dedicada a la Puesta en Común sobre la Cuestión de Investigación 1. En general, la gran mayoría de las acciones (alrededor del 90%) se dirigen a construir conocimiento; salvo en la segunda etapa, en la cual este porcentaje disminuye hasta el 70% mientras que aumenta el de las acciones de gestión del trabajo en el aula, debido a que en la discusión sobre el número Pi la profesora aprovecha para proponer a los alumnos un trabajo voluntario sobre el mismo y fija normas al respecto.

En las actuaciones de gestión, hay un claro predominio de las que provienen de la profesora, y se mantienen un equilibrio entre las destinadas a gestión del trabajo y las destinadas a la gestión del desarrollo del contenido (este equilibrio se hace más patente en las etapas con mayor número de actuaciones). En las actuaciones encaminadas a la construcción de conocimiento, se observa un equilibrio entre las que provienen de la profesora y las que parten de los alumnos. En general, en todas las etapas, las actuaciones de los alumnos corresponden en su mayor parte a la aportación de información y la manifestación de comprensión, si bien en ocasiones indagan significados (sobre todo en las dos primaras etapas, dedicadas al repaso de la clase anterior y a la discusión sobre el número π y, con menor frecuencia, valoran ideas. Las acciones de la profesora se dirigen sobre todo a indagar significados, desarrollar comprensión y, con menor frecuencia, a valorar ideas y organizar la comprensión; la sistematización de contenidos tiene un porcentaje bajo en comparación.

En la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Actuaciones Generales se observa que las actuaciones correspondientes a fijar normas se sitúan en torno al 30% y las correspondientes a establecer significados en torno al 50% en todas las etapas, salvo en la penúltima, en la que aumenta el establecimiento de significados hasta casi un 80% en detrimento de las actuaciones correspondientes a fijar normas; en esta etapa se repasan las razones por las cuales los decimales periódicos son números, que parece que es un tema que los alumnos dominan, más que el repaso de la estructura de la clase anterior, el número Pi, los decimales con infinitas cifras arbitrarias, y el repaso sobre la discusión acerca de la raiz de 2, a los que corresponden el resto de las etapas. En el resto de las actuaciones, siguen predominando las de enjuiciar con respecto a las de intervenir.

Por lo que respecta a la categoría Clima de Aula, el nivel de ruido se mantienen en torno al 10% del total de entradas categorizadas en las distintas etapas, salvo en la segunda, en la que se eleva a un 28%, debido al interés que suscita en los alumnos la discusión sobre el número π.

10-2-94

Pasamos, por último, a analizar la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Finalidades que corresponden a la Tercera Sesión dedicada a la Puesta en Común sobre la Cuestión de Investigación 1.
La primera etapa de la clase (de escasa duración) se dedica a cuestiones de orden y disciplina; por ello, las acciones pertenecen exclusivamente a la gestión del trabajo en el aula y parten de la profesora. Una vez iniciada la Puesta en Común sobre las cuestiones que quedaban por discutir sobre la Cuestión de Investigación 1, la mayoría de las acciones están dirigidas, como en las sesiones anteriores, a la construcción de conocimiento (en torno al 75 u 80%), y el resto corresponde en su mayoría a la gestión del trabajo en el aula, aunque en la última etapa se equilibran el número de actuaciones destinadas a gestionar el trabajo con el de las que se dirigen a gestionar el desarollo de los contenidos (esta última etapa resulta algo más polémica porque se vuelve a discutir el estatus de número de $\sqrt{2}$).
En las actuaciones de gestión dominan de nuevo las que parten de la profesora, aunque en esta ocasión se observa un leve incremento en las que proceden de los alumnos, sobre todo en lo que se refiere a sugerencias de trabajo en el aula. En las acciones dirigidas a la construcción de conocimiento, sigue habiendo equilibrio entre las que provienen de la profesora y las que provienen de los alumnos, e incluso un ligero predominio de estas últimas (especialmente en la última etapa, de la discusión sobe el estatus de número de $\sqrt{2}$). En las actuaciones de los alumnos siguen predominando la aportación de información y la manifestación de comprensión, pero se produce un incremento en la indagación de significados y la valoración de ideas; este incremento es

muy notable en la etapa de la discusión sobre el estatus de número de √2, sobre todo en lo que se refiere a la indagación de significados, lo cual es significativo ya que da muestras de un mayor interés e iniciativa por parte de los alumnos en este nuevo tópico, que les resulta polémico. En las actuaciones de la profesora, se observa un incremento en la valoración de ideas y en la etapa de la discusión sobre √2 un aumento notable de las acciones destinadas a organizar el conocimiento, motivado por el interés de los alumnos y el aumento de su iniciativa. Siguen siendo muy escasas las acciones de sistematización; esto llama la atención en etapas como la segunda de la Puesta en común, destinada a clarificar las diferencias entre números racionales y no racionales.

Por lo que respecta a la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Actuaciones Generales, podemos ver que en la primera etapa, dedicada a cuestiones disciplinarias, todas las acciones parten de la profesora; la mayoría corresponden a fijar normas y el resto a intervenir (concretamente, amonestando).

En la Puesta en Común, el porcentaje de acciones correspondientes a fijar normas y establecer significados oscila entre el 73 y el 84% del total. En la primera etapa de la Puesta en Común es mayor el número de actuaciones de establecimiento de significados con respecto al de actuaciones de fijación de normas; esto se invierte en la segunda etapa y hay un equilibrio en la tercera. En la primera y tercera etapa hay un predominio de las actuaciones de la profesora en lo que se refiere a fijación de normas, mientras que las actuaciones de los alumnos son más numerosas en lo correspondiente a establecimiento de significados; en este sentido llama la atención la alta frecuencia de acciones de los alumnos destinadas a indagar significados en la última etapa, en la que se discute el status de número de √2. En la segunda etapa de la Puesta en Común, en la que se clarifica la distinción entre los números racionales y los no racionales, el mayor porcentaje de actuaciones de la profesora corresponde a indagar significados, y el de los alumnos a aportar información y a manifestar comprensión.

Como en las sesiones anteriores, de las acciones correspondientes a enjuiciar e intervenir, el mayor porcentaje pertenece a enjuiciar, salvo en la segunda etapa, en la que se equilibran. El porcentaje de actuaciones que provienen de la profesora y de los alumnos fluctúa según las etapas en ambos tipos de actuaciones generales.

En esta sesión, por lo que se refiere a la categoría Clima de Aula, encontramos que el nivel de ruido es alto en comparación con las sesiones anteriores: oscila entre el 15 y el 20% del total de segmentos categorizados. Esto puede deberse al cansancio y la inquietud de los alumnos después de dos sesiones de discusión sobre esta cuestión, ya que los temas discutidos en esta sesión no resultan más polémicos que los tratados en las sesiones anteriores, salvo quizás el correspondiente a la última etapa: discusión sobre el status de número de √2, en la cual el nivel de ruido se mantiene como en las etapas anteriores de la clase.

Globalmente, a lo largo de las tres sesiones pueden detectarse las siguientes pautas generales:

-Por lo que respecta a la distribución de acciones atendiendo a las Finalidades, la proporción de las mismas dirigidas a construir conocimiento fluctúa alrededor del 80% del total, mientras el 20% restante corresponde a actuaciones de gestión (tanto de la clase como del desarrollo de las discusiones sobre el contenido).

En las actuaciones destinadas a la construcción de conocimiento se observa un equilibrio entre el número de las que provienen de la profesora y las que provienen de los alumnos. Las actuaciones de la profesora en las que se registra mayor frecuencia son las que tienen por objeto indagar significados y la mayor frecuencia en las actuaciones de los alumnos corresponde a aportar información y manifestar comprensión, lo cual es lógico si tenemos en cuenta que se trata de una cuestión de investigación destinada a sacar a la luz el punto de partida en los conocimientos de los alumnos sobre distintos tipos de notaciones decimales. Aún así, cuando se discuten tópicos nuevos, concretamente relacionados con los decimales infinitos no periódicos, puede detectarse un incremento en el número de acciones de los alumnos destinadas a indagar significados (y en menor medida a valorar ideas), y un correspondiente aumento de las actuaciones de la profesora dirigidas a desarrollar comprensión; ademas el número de acciones de los alumnos resulta entonces ligeramente superior al de acciones de la profesora, quizás debido al aumneto de interés por parte de estos últimos.

se observa una frecuencia bastante baja en lo que se refiere a sistematización de conocimientos.

-Por lo que respecta a la distribución de acciones atendiendo a las Actuaciones Generales, alrededor de un 80% de las acciones corresponden a fijar normas y establecer significados (en general hay una oscilación del 30 al 50% en el predominio de una u otra categoría según etapas y sesiones). El otro 20% de acciones corresponde a enjuiciar e intervenir, con un claro predominio de las acciones de enjuiciamineto o valoración (salvo algunas excepciones, éstas provienen con mayor frecuencia de la profesora).

V. 2. 5 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación F14

-Instrumento:

El instrumento elaborado para estudiar la comprensión de los alumnos al tratar de asignar un número a un punto señalado en una recta en la que se ha marcado la unidad, teniendo en cuenta los procedimientos que utilizan para realizar tal asignación, es la Ficha de Trabajo F14, cuyo contenido se presentó en el apartado III.3.3 y que aparece en el Anexo III.3. Se trata de una Cuestión de Investigación específica, correspondiente a la Fase de Acción 2 que venimos estudiando.

-Características del instrumeno e implementación:

La Ficha 14 estaba previsto trabajarla con los alumnos en la etapa de los Racionales. El 24 de Noviembre de 1993 se llevó a cabo la primera sesión de trabajo con los niños, en la que se detectaron varios problemas:

-El desconcierto ante el tipo de actividad

-Las limitaciones físicas y la preocupación de los alumnos por llegar "al resultado" y comparar con los compañeros los números. Su objetivo no era encontrar un procedimiento y un criterio de asignación; los medios eran menos importantes que "el resultado".

-La dinámica de la clase en general dificultaba enormemente cualquier intento de avance en lo conceptual.

La continuación de la actividad estaba prevista para el día siguiente, pero los niños tenían una actividad extraescolar de la que la profesora no había sido avisada previamente. No se estimó conveniente retrasar el examen que estaba previsto para inmediatamente después, y se tomó la decisión de posponer la actividad a la espera de un momento más adecuado en la etapa correspondiente a la Fase de Acción 2: números irracionales y Números Reales. Al plantear esta segunda fase correspondiente a la aparición de los números irracionales y el estudio de los números reales, se consideró conveniente no empezar directamente por la Ficha14 para que los alumnos no tuvieran actitudes de rechazo desde el principio, ante una tarea "ya conocida" y que no había tenido buena aceptación.

En la fecha en que se propuso finalmente la actividad, los alumnos trabajaron sobre ella por parejas, tal como estaba previsto en un principio. El hecho de que la actividad se haya planteado en un contexto diferente del inicialmente previsto, en el cual ya han hecho su aparición los números irracionales[5] , introduce este nuevo factor que puede resultar importante para el análisis de la cuestión planteada[6] .

---

5 En el momento de ser planteada la cuestión, los alumnos habían trabajado sobre la existencia de números cuya expresión decimal era infinita no periódica y habíamos representado longitudes cuya expresión numérica correspondía a decimales infinitos no periódicos (concretamente, el caso de la $\sqrt{2}$).

6 Además, en la implementación de esta actividad, tuvimos en cuenta una serie de observaciones a raiz de lo ocurrido en la actividad F12 (conmensurabilidad de segmentos), que dan lugar a varias consignas para los alumnos:

1. Apuntar parejas.
2. PRIMERA PREGUNTA:

.La consigna es que hay que idear un procedimiento que sirva para cualquiera de los casos (puede que algunos casos sean más largos, más pesados, pero el PROCEDIMIENTO tiene que ser único y valer para todos).

.Hay que explicar muy bien ese procedimiento (si queréis, ayudándoos de dibujos o recurriendo a la parte gráfica).

.No olvidéis que se pregunta por un número. No os quedéis en la parte de medir. Hay que llegar a lo que se pregunta.

-Objetivos:

-Explorar las cuestiones detalladas en las unidades de análisis para la comprensión.

-Plantear, si es pertinente, el siguiente dilema: "Nosotros hemos dibujado la longitud $\sqrt{2}$. Suponed que el punto elegido es el correspondiente a trasladar la longitud $\sqrt{2}$ desde el punto 0. A este punto, ¿le corresponderá un número racional? ¿cuál?"

-Observar:

.si la creencia en la inyectividad de la correspondencia números-recta plantea problemas, a este nivel más profundo, y qué papel tiene la dificultad de trascender el plano físico.

.si se apela al criterio de medida para establecer la correspondencia inversa.

.si, a partir del dilema, se distingue entre medidas racionales e irracionales.

.si este nuevo dilema lleva a plantear dudas sobre la no racionalidad de $\sqrt{2}$ y, en general de las raíces irracionales, y a solicitar algún tipo de demostración (que profundice en la mera distinción racional-irracional a través de la expresión decimal).

-Plantear la posibilidad de un Seminario de demostraciones sobre la irracionalidad de $\sqrt{2}$, si hubiera alumnos interesados.

V. 2. 5. 1 Criterios que concretan las unidadesd de análisis

Las unidades de análisis para esta cuestión de investigación aparecen en el apartado III. 6. 2 (puntos II.5 y II.13) de esta memoria. Además, a raiz de los resultados de la actividad F12, sobre la conmensurabilidad de segmentos, hemos añadido otros matices que queremos explorar en esta cuestión; en suma, las unidades para analizar la presente cuestión de investigación se matizan y amplían del modo siguiente:

-Pregunta 1:

-¿Llegan los alumnos a establecer un procedimiento para asignar un número a un punto dado en la recta, establecidos el punto 0 y el punto 1?

-En caso afirmativo, ¿establecen los mismos procedimientos que para conmensurar parejas de segmentos? ¿añaden otros?

-¿Cómo influye la aproximación decimal en esta situación, a diferencia de la anterior?

-A partir del conflicto suscitado por los distintos resultados, ¿son capaces los alumnos de trasladarse al plano de una recta ideal y un procedimiento sin limitaciones físicas? ¿Tienen los alumnos problemas con este planteamiento? ¿de qué tipo?

-Suponiendo que el traslado al plano ideal sea viable, ¿piensan que a un punto dado de la recta siempre le correspondería un número? ¿piensan que sería un sólo número y el

3. SEGUNDA PREGUNTA:
.Argumentad, dad razones (acordaos de lo que habéis hecho en la pregunta anterior, o idear otras cosas que sirvan para razonar y argumentar). Ya no podemos quedarnos en la intuición difusa.
.Nuevamente se pregunta por un NUMERO. Avanzar hasta aquí y no quedarse a medio camino.
¿Qué relación tiene lo que habéis hecho con lo que se pregunta?
. No olvidéis contestar al TIPO DE NUMERO.

mismo, sea cual sea el procedimiento utilizado para asignárselo (suponiendo que conciban varios)?

-Pregunta 2:

-¿Son capaces, entonces, de establecer entonces un criterio para la correspondencia entre un punto cualquiera de la recta y un número?

-¿Explicitan el criterio de la medida del segmento determinado por el punto y el origen, con respecto del segmento unidad? ¿Explicitan algún otro criterio? ¿Cuál?

-Si llegamos a establecer como criterio el de la medida, ¿logran conectar con su creencia en la conmensurabilidad (en caso de los alumnos que la tienen) y, sobre esta base, aceptan que a todo punto de la recta corresponde un número racional? ¿Sostienen esto último aunque no logren establecer las conexiones lógicas precisas con su supuesta creencia en la conmensurabilidad? ¿Cómo justifican su creencia?

-En caso afirmativo para la cuestión anterior, ¿admiten, entonces, que los números racionales llenan la recta?

-¿Se suscita algún tipo variación y conflicto con la creencia intuitiva (manifestada en la pregunta del Examen1 sobre si la recta estaba llena con los números racionales)? Esta cuestión se suscitará si se considera oportuno, y los alumnos no están saturados sobre el tema.

-¿Qué lugar ocupan los números irracionales, recién aparecidos, en el ámbito de esta cuestión?

Todas estas preguntas se concretan en los siguientes criterios para el análisis de las respuestas escritas de los alumnos:

-Pregunta 1:

Capacidad para entender la cuestión de si a un punto cualquiera de la recta numérica (en la que está señalada la unidad) le corresponde siempre un número, que puede mostrarse por el hecho de concebir procedimientos mediante los cuales realizar dicha asignación. Consideraremos:

1. Claridad de la respuesta dada por el alumno.
2. Procedimiento ideado; tipo de procedimiento y mantenimiento del mismo.
3. Precisión en la medida.

-Pregunta 2:

Generalización a la correspondencia de un número a un punto cualquiera de la recta, en la que se ha señalado la unidad. Consideraremos:

1. Claridad de la respuesta dada por el alumno.
2. Respuesta a la existencia de un número que corresponda a un punto cualquiera señalado en la recta, y argumento con el que los alumnos justifican dicha respuesta.

3. Tipo de número que puede corresponder a un punto cualquiera de la recta, según los alumnos.
4. Coordinación entre el nivel geométrico y el nivel numérico.

V. 2. 5. 2 Apartados para observar y valoración de respuestas

Los criterios mencionados para las dos preguntas de esta cuestión de investigación llevan la consideración de diversos aspectos; cada uno de ellos permite elaborar una escala para su valoración, que presentamos a continuación. Estos aspectos y escalas son coincidentes con los elaborados en el apartado IV. 2. 3. 2, para el estudio de la ficha sobre conmensurabilidad de longitudes.

-Pregunta 1.

1. Claridad de la Respuesta dada por el alumno.

Se valorarán tres aspectos, con sus correspondientes escalas:

-Explicación Verbal **(EV):**

1. Explicación con nivel de claridad aceptable
2. Explicación con indicios que permiten una interpretación
3. Explicación insuficiente o nula

-Representación Gráfica **(RG):**

1. Aporta información significativa a la explicación verbal
2. No aporta información significativa a la explicación verbal
3. Arroja dudas sobre la explicación verbal

-Valoración de la Claridad Global **(CG):**

1. Permite una interpretación clara o bastante probable
2. La interpretación es dudosa
3. No es posible hacer interpretaciones.

2. Procedimiento utilizado

Como en el caso de la conmensurabilidad de segmentos, se valorarán dos aspectos: el tipo de procedimiento empleado, y el mantener o no un mismo procedimiento para los distintos ejemplos propuestos.

-Tipo de Procedimiento **(TP):**

1. Diferencias sucesivas: Averiguar cuántas veces está contenida la unidad en el segmento que ha de medirse (el que va del punto 0 al punto al que se ha de asignar un número); cuando no está contenida exactamente, volver a encajar el trozo que sobra (o falta) sucesivamente, hasta encontrar una parte alícuota al segmento unidad (el que va del punto 0 al punto 1) y al que se mide (es decir, que encaje exactamente en los dos segmentos).

2. División de los segmentos: Dividir los segmentos en cuestión (el segmento de extremos 0, 1 y el segmento de extremos 0 y el punto al que se ha de asignar un número) para encontrar una parte alícuota a los dos.

2.1. Bisección en uno de los segmentos (generalmente el más pequeño) hasta encontrar una parte alícuota con el otro.

2.2. División de uno de los segmentos (generalmente el más pequeño) en 2, 3, 4... partes, hasta encontrar una parte alícuota[7] con el otro.

2.3. Estima el número de divisiones que hay que realizar en uno y otro segmento para que queden divididos en partes de igual longitud, pero no se sabe cómo realizan la estimación, o no se sabe claramente[8] .

3. Mixto (empiezan con el primer procedimiento pero derivan en el segundo).

4. No puede reconocerse un procedimiento.

-Mantenimiento del Procedimiento **(MP):**

1. Resuelve seis casos o más:

1a. Mantiene el procedimiento

1b. Cambia de procedimiento (en cuyo caso codificaremos el utilizado para los últimos casos, por ir en orden de complejidad)

2. Resuelve menos de seis casos:

2a. Mantiene el procedimiento

2b. Cambia de procedimiento (en cuyo caso codificaremos el utilizado para los últimos casos, por ir en orden de complejidad)

- Precisión en la medida **(P)**

1. Nivel de precisión aceptable

2. Se nota bastante imprecisión

-Pregunta 2. Para la valoración de esta pregunta se tienen en cuenta los cuatro criterios mencionados en el apartado anterior:

1. Claridad de la respuesta dada por el alumno **(C)**, con las siguientes valoraciones:

1. Explicación con nivel de claridad aceptable

2. Explicación con indicios que permiten una interpretación

3. Explicación insuficiente o nula

[7] Ningún alumno conocía el teorema de Thales, ni sabía ninguna técnica para dividir en partes iguales un segmento.

[8] No hay indicios en los documentos de que los alumnos hayan estimado a través de instrumentos graduados, sin embargo, en la realización en clase de la taréa, hubo que llamar la atención de los alumnos varias veces con este motivo.

2.Existencia de un número correspondiente a un punto cualquiera de la recta numérica. Se consideran dos aspectos

-Existencia **(E):**

1. Sí
2. No
3. No sé

-Tipo de número **(TN):**

0. Olvidan contestar al tipo de número
1. Racional
2. Fracción
3. Decimal Finito
4. Decimal Periódico (puede incluir o no explícitamente a los finitos)
5. Decimal de cualquier tipo o sin especificar
6. De todo tipo, salvo decimales infinitos
7. De todo tipo salvo infinitos no periódicos
8. De todo tipo, incluidos infinitos no periódicos
9. Otros

3. Tipo de argumento utilizado **(A):**

1. Utilización de la existencia de una parte alícuota
    a. Existe
    b. Puede no existir
2. Creencia en la biyección Números-Puntos de la recta (puede aludir a la infinitud de ambos conjuntos para justificarla).
3. Confusión de la cuestión de que a todo número le corresponda un punto de la recta con la de que a todo punto de la recta le corresponda un número. Es decir, confunde el carácter de aplicación de la correspondencia números-puntos de la recta con el carácter sobreyectivo de la misma.
4. Los decimales infinitos no periódicos no pueden representarse en la recta, pero tienen su punto en la recta.
5. Generalizaciones injustificadas.
6. Otras.

4. Nivel de coordinación entre el plano geométrico y el plano numérico **(CR):**

1. Los alumnos explican el paso, la conexión entre el procedimiento geométrico y el resultado numérico.
2. Los alumnos se quedan en el procedimiento geométrico y no explican el paso, la conexión entre éste y el resultado numérico.
3. Los alumnos mezclan el plano numérico y el geométrico indiscriminadamente.

En resumen, la Observación de las respuestas de los alumnos a esta cuestión específica de investigación queda organizada según 10 aspectos o apartados, que aparecen en la siguiente tabla; para cada uno de ellos hemos enunciado la correspondiente escala de valoración.

Tabla 5.28: Apartados para observar la cuestión específica de investigación F14.

Criterios: Preguntas:	Claridad de la respuesta	Procedimiento /argumento utilizados	Precisión/tipo de número utilizado	Coordinación entre repre-sentaciones
Pregunta 1	EV- RG- CG	TP- MP	P	----
Pregunta 2	C	E- TN	A	CR

V. 2. 5. 3 Resultados de la cuestión de Investigación F14

Los resultados generales de la actividad F14 , según los criterios y apartados considerados aparecen recogidos en la tabla 21 del Anexo V.2. Seguidamente, presentamos algunos de los resultados parciales que nos parecen especialmente relevantes:

Pregunta 1:

-Claridad de la respuesta y procedimiento ideado

Tabla 5.23: Relación entre la claridad de la respuesta y el procedimiento ideado[9] .

CG / TP	**1**	**2**	**3**	**Total**
1	4	0	0	4
2.1	0	1	0	1
2.2	0	2	0	2
2.3	1	6	0	7
3	1	2	0	3
4	0	0	10	10
Total	6	11	10	27*

*De los 32 alumnos de que se compone el curso, 3 están ausentes y 2 de ellos copian el ejercicio de otros compañeros con seguridad; por consiguiente, en esta cuestión trabajaremos, en principio sobre los documentos de 27 alumnos.

9 En esta tabla, así como en las siguientes, los valores en negrita corresponden a los valores de la escala para cada unidad de análisis considerada, y los valores en letra normal a las frecuencias de respuesta para cada casilla.

Resultados globales:

-El procedimiento más frecuentemente utilizado por los alumnos en esta ocasión es el de División de las unidades de medida mediante estimación, por procedimientos que no explicitan, hasta encontrar una parte alícuota* (33% del total); le sigue el de Diferencias Sucesivas (alrededor de un 15% del total). Con respecto a la actividad de la conmensurabilidad de segmentos se observa, al trasladarnos al caso de la recta, un aumento de la frecuencia de utilización del procedimiento de División de las unidades de medida. De nuevo, dentro de estos dos procedimientos, hay más alumnos que se expresan con claridad en el primero que en el segundo.

-3 alumnos han empleado un procedimiento mixto y 1 el procedimiento de bisecciones sucesivas. En alrededor de un 37% de los alumnos no es posible interpretar el procedimiento que han utilizado debido a la falta de claridad en la expresión. En este sentido no parece haber mejora con respecto a la actividad referida a la conmensurabilidad de segmentos (en contra de lo que podría esperarse).

Hemos de notar aquí que aproximadamente un 33% de los niños asigna números decimales a los puntos de la recta (aunque la mayoría sólo lo hace en algunos casos y sólo 1 alumno lo hace para todos los casos), sin que nos sea posible averiguar cómo lo hacen y por qué razón asignan decimales en esta actividad cuando en la conmensuración de longitudes sólo habían asignado fracciones; la excepción la presenta una alumna que pasa la fracción a expresión decimal en uno de los casos.

Aunque no queda constancia por escrito, durante el trabajo en clase se observa que varios alumnos siguen teniendo tendencia a estimar a través de instrumentos graduados en numerosas ocasiones. (Ver transcripción de la sesión en el anexo V.3).

-Tipo de procedimiento ideado y mantenimiento del mismo

Tabla 5.24: Relación entre el procedimiento ideado y el mantenimiento del mismo.

MP / TP	1		2		Total
	1a	1b	2a	2b	
1	3	0	1	0	4
2.1	0	1	0	0	1
2.2	2	0	0	0	2
2.3	6	0	1	0	7
3	1	0	2	0	3
Total	12	1	4	0	17

Resultados globales:

.En los 17 alumos cuyos trabajos tienen un nivel de claridad que permite hacer una interpretación, se observa un considerable incremento en lo que se refiere al mantenimiento del procedimiento elegido con respecto al ejercicio de la conmensurabilidad de segmentos. Todos los alumnos, salvo el que aplica el método de bisecciones sucesivas mantienen el procedimiento; la mayor parte de los alumnos lo mantienen para la mayoría de los casos y no sólo para los más sencillos.

-Precisión

Tabla 5.25: nivel de precisión en la pregunta 1.

P	1	2
Frecuencia	8	9

Resultados globales:
Por lo que respecta al nivel de precisión se observa una mejora, aunque la mitad de los alumnos, aproximadamente, siguen siendo bastante descuidados.

Pregunta 2:

-Claridad de la respuesta

Tabla 5.26 Claridad de respuesta en la pregunta II.

CG	CG1	CG2
Frecuencia	24	4

Resultados globales[10]:
En la pregunta general por la existencia o no de un número que corresponda a un punto cualquiera señalado en la recta, el nivel de claridad con el que se expresan los alumnos es notablemente mayor. Todas las respuestas han sido susceptibles de interpretación y un 83% de los alumnos se expresan con bastante claridad.

- Argumento con el que los alumnos justifican su respuesta a la existencia de un número correspondiente a cualquier punto de la recta :

10 Para esta segunda pregunta se consideran las respuestas de un total de 28 alumnos; esto es debido a que los 3 alumnos que copiaron la primera parte no coinciden con el alumno que ha copiado en la segunda (seguimos incluyendo en el recuento a los dudosos), aparte de las ausencias.

Tabla 5.27: Argumentos con los que se justifican las respuestas a la existencia de un número correspondiente a un punto cualquiera de la recta.

E / A	SI	NO	Total
1a	8	0	8
1b	0	0	0
2	2	0	2
3	6	1	6
4	0	1	1
5	8	0	8
6	2	0	2
Total	26	2	28

<u>Resultados globales:</u>

-Casi todos los alumnos piensan que existe un número que corresponde a cualquier punto dado de la recta (90% del total).

-Sin embargo, la razón con la que justifican su opinión ya no es (como ocurría en el caso de la conmensurabilidad de longitudes) prioritariamente la existencia de una parte alícuota a la unidad de medida y a la longitud que va desde el punto 0 al punto en cuestión; este argumento se esgrime ahora en un 29% de los casos. Para asignar un número a un punto de la recta entran en juego otros aspectos, además de la medida de longitudes (la conmensuración de la longitud que va desde el 0 al punto en cuestión y la longitud unidad, que hace corresponder al punto la medida de dicha longitud con respecto a la unidad). Entre los aspectos mencionados se encuentran: 1º) la confusión entre "que a todo número le corresponda un punto de la recta" y "que a todo punto de la recta le corresponda un número", es decir, la confusión entre el carácter de aplicación de la correspondencia números-puntos de la recta con su carácter sobreyectivo: (21%); 2º) la creencia en la biyección números-puntos de la recta (7%); 3º) las generalizaciones injustificadas (29%).

En cuanto a las dos respuestas negativas a la cuestión, una está dentro del apartado de los que confunden aplicación-sobreyectividad y corresponde a una alumna que piensa que los decimales infinitos no periódicos no tienen un punto en la recta; a partir de las dos premisas deduce que no a todos los puntos de la recta corresponde un número.

La otra corresponde a un alumno que piensa que los decimales infinitos no periódicos tienen su punto en la recta pero no pueden representarse (a nivel fáctico). Este mismo argumento es expuesto por otros 2 alumnos que, sin embargo, piensan que a todo punto de la recta corresponde un número (ambos se encuentran en la categoría de confusión aplicación -sobreyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta)[11] .

-Tipo de número

Tabla 5.28: Tipo de número que puede corresponder a un punto cualquiera de la recta.

TN	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Frec.	2	3	1	3	2	1	9	1	2+1E

Resultados globales:

Las respuestas de los alumnos no se organizan de acuerdo con el criterio racional- no racional, que nosotros habíamos previsto en principio. Para ellos, los tipos de números no corresponden a conjuntos numéricos, sino más bien, al parecer, a tipos de notaciones numéricas. Incluso se observa confusión notación numérica- conjunto numérico, como en el caso de un alumno que da la respuesta "racional y fracción". También se registra la tendencia de los alumnos a discriminar entre números enteros y decimales o fracciones.

La respuesta más frecuente es "de todo tipo salvo infinitos no periódicos" (32%) y respuestas similares, como fracciones y decimales periódicos (14%), o finitos (1 alumno), o racionales (2 alumnos).

Otra variante corresponde a la respuesta "de todo tipo salvo decimales infinitos" (sin diferenciar entre periódicos y no periódicos): 1 alumno. Finalmente hay 2 alumnos que contestan simplemente decimales.

Y se observa el caso especial de 1 alumno que admite que a un punto de la recta puede corresponderle un decimal infinito no periódico, uno de los que decían que fácticamente no podíamos representarlo. A esto hemos de añadir el matiz de 2 alumnas, que declaran que los irracionales tienen su punto en la recta, pero no es posible realizar la correspondencia en sentido fáctico; es clara la afirmación de una de ellas: "No siempre (hay un número que corresponda a un punto dado de la recta) porque, por ejemplo, en el caso de los irracionales nunca llegan a coincidir, aunque tienen su punto en la recta". Otros 2 alumnos declaran no saber si a un punto de la recta pueden corresponderle decimales infinitos no periódicos porque en clase quedó pendiente la respuesta de si $\sqrt{2}$ puede representarse en la recta.

En general se observa confusión notación numérica-conjunto numérico; de hecho, ambas interpretaciones caben al referirnos a "tipo de número". Tambien se observa una fuerte tendencia por parte de los alumnos a rechazar que a los puntos de la recta puedan

[11] Señalaremos aquí que, a diferencia de la actividad F12 (relativa a la conmensuración de longitudes), en la que varios alumnos utilizaban en sus razonamientos observaciones relativas al sistema decimal de medida, en esta actividad, sólo un alumno dice que dado un punto en la recta, el número que le corresponde "si no es entero, será decimal y se podrán ir sacando más y más cifras por distintos procedimientos".

corresponderle decimales infinitos no periódicos, o incluso decimales infinitos en general. Se observa el caso especial de un alumno que sí admite dicha correspondencia y el de otros dos que manifiestan sus dudas al respecto porque desconocen si √2 puede o no representarse en la recta numérica.

-Coordinación entre la representación numérica y la geométrica

Tabla 5.29: Nivel de coordinación entre representaciones.

CR	**1**	**2**	**3**	**Total**
Frec.	0	9	14	23*

*El resto de alumnos no pueden ser valorados en este apartado debido a que hicieron generalizaciones injustificadas.

-Resultados globales:

Gran parte de los alumnos entremezclan indiscriminadamente el plano numérico y el geométrico (alrededor del 60%). El 40% restante se queda en el plano geométrico y no explicita la conexión con el plano numérico; casi todos los alumnos que pertenecen a esta categoría han dado como argumento para su creencia en la existencia de un número correspondiente a cualquier punto dado el de la existencia de una parte alícuota a la longitud unidad y a la longitud delimitada por el punto 0 y el punto en cuestión.
Ningún alumno explicita el paso, la conexión entre el procedimiento geométrico y el resultado numérico.

V. 2. 5. 4 Reflexión general sobre la comprensión en la actividad F14, a partir de los documentos escritos de los alumnos

Para resolver el ejercicio de asignar un número a un punto señalado en la recta, en donde está marcada la unidad, los alumnos utilizan básicamente los mismos procedimientos que ya emplearon para expresar con un número la relación entre dos longitudes. Sin embargo, en esta ocasión se observa un aumento de la frecuencia de utilización del procedimiento de División de las unidades de medida en detrimento del procedimiento de Diferencias sucesivas. Esto puede venir influenciado por los métodos para representar números racionales en la recta que los alumnos han aprendido en niveles anteriores.

Se observa una mejora en el mantenimiento del procedimiento para los alumnos que han sido capaces de utilizar uno de ellos.

-A diferencia de la Cuestión sobre la Conmensurabilidad de Longitudes, en la que los alumnos siempre expresaban la relación entre dos longitudes mediante fracciones, ahora, un 33% de los alumnos asigna números decimales a los puntos de la recta. No nos es posible averiguar cómo lo hacen ni porqué razón asignan decimales en esta actividad cuando en la conmensuración de longitudes sólo habían asignado fracciones (salvo una alumna que pasa la fracción a expresión decimal en uno de los casos). También es interesante señalar que, mientras que en la actividad relativa a la conmensuración de segmentos, varios alumnos hacen alusiones en su argumentación al sistema decimal (por ejemplo, refiriéndose a décimas, centésimas, millonésimas para denotar divisiones muy pequeñas que podría ser necesario realizar para encontrar la parte alícuota), en esta situación dichas alusiones sólo las realiza un alumno.

-El nivel de precisión también ha mejorado ligeramente, pero sigue habiendo un buen número de alumnos a los que no les resulta significativa esta cuestión. Por otra parte, a pesar de las discrepancias de los resultados de los distintos alumnos en las asignaciones de un número a un punto de la recta, no hay alusiones a ningún tipo de conflicto o duda por esta causa en los documentos escritos.

-Por lo que respecta a la segunda parte de la actividad, casi todos los alumnos piensan que a cualquier punto dado de la recta le corresponde un número. Sin embargo, una buena parte no basa su afirmación en una generalización de los procedimientos utilizados para asignar números a puntos de la recta en casos concretos, sino que apela a intuiciones acerca de la correspondencia números-puntos de la recta como la creencia injustificada en la biyectividad de dicha correspondencia y la creencia en que el hecho de que a todo número corresponda un punto de la recta implica el recíproco.

-En cuanto al tipo de número que corresponde a un punto cualquiera de la recta, en general, se observa confusión notación numérica-conjunto numérico (de hecho, ambas interpretaciones caben al referirnos a "tipo de número") que hace que los alumnos se refieran a fracciones y decimales (periódicos o no), todo tipo de decimales, todo tipo de decimales salvo infinitos no periódicos, incluso racionales y fracciones. En cualquier caso hay una fuerte tendencia por parte de los alumnos a rechazar que a los puntos de la recta puedan corresponderle decimales infinitos no periódicos, o incluso decimales infinitos en general. Sin embargo, se observa el caso especial de un alumno que sí admite que a un punto de la recta puede corresponderle un decimal infinito no periódico; el de 2 alumnas, que declaran que los irracionales tienen su punto en la recta, pero no es posible realizar la correspondencia en sentido fáctico, y el de otros 2 alumnos que declaran no saber si a un punto de la recta pueden corresponderle decimales infinitos no periódicos porque en clase quedó pendiente la respuesta de si $\sqrt{2}$ puede representarse en la recta.

-Por otra parte, los alumnos no explicitan de forma sistemática un criterio de correspondencia que permita justificar sus opiniones acerca de la correspondencia entre los números y los puntos de la recta; los que más se acercan son aquellos que establecen la existencia de una parte alícuota entre la unidad de medida y la longitud que va desde el punto 0 al punto al que se ha de asignar un número, pero no explicitan la correspondencia número asignado al punto- medida de la longitud del segmento (cuyo extremo es el punto) con respecto al segmento unidad.

Ningún alumno explicita el paso, la conexión entre el procedimiento geométrico y el resultado numérico. Algunos entremezclan indiscriminadamente ambos planos, y otros (mayoritariamente los que establecen el argumento de la parte alícuota) se quedan en el plano geométrico y no explicitan la conexión con el numérico.

No hemos confrontado a los alumnos con el aparente conflicto entre las respuestas a esta cuestión y las respuestas que dieron en el Examen 1 a la pregunta voluntaria sobre si los números racionales llenaban la recta numérica: casi todos los alumnos han respondido en esta pregunta que los puntos de la recta son racionales (fracciones, decimales finitos o periódicos, etc.) y, sin embargo, aproximadamente la mitad de ellos pensaban que los números racionales no llenaban la recta.

La razón para no enfrentar a los alumnos ante este dilema ha sido nuestra seria duda acerca de plantear un problema cuyo tratamiento didáctico sigue estando muy abierto para nosotros, en un nivel en que los alumnos carecen de instrumentos para resolverlo. Esto podía haber originado en los niños más confusión que otra cosa, en un proceso didáctico de por sí complicado.

V. 2. 5. 5 Estudio de la Interacción Didáctica en la actividad F14

La Puesta en Común sobre la actividad, llevada a cabo después de que los alumnos hubieran realizado y entregado la Ficha de trabajo F14, tuvo lugar en la sesión correspondiente a la fecha 15-2-94, fue grabada en vídeo y aparece transcrita en el Anexo V.3.

Aspectos relacionados con la Comprensión:

A partir de la mencionada transcripción, se observaron los siguientes puntos de interés en la comprensión de los alumnos:

-Con respecto a la cuestión de si existen en la recta puntos correspondientes a números irracionales, aunque no podamos representarlos a través de su expresión decimal infinita no periódica, se observa bastante confusión:

"(A) Que yo creo que no porque si es un número (racional) puede que no sea...

(P) ¿A este punto puede que no le corresponda un número?

(A) Si da la casualidad que es un número (irracional) no coincide.

(....)

(A) Tienes que tener un número finito para poder representarlo.

(A) Claro que sí, hay números infinitos y puntos infinitos, pues cada número corresponde a un punto.

(A) Claro

(A) Eso sí

(A) Es que como no sabes el número, no puedes saber el punto.

(...)

(A) Si te dan un número irracional y te dicen que lo representes en la recta, a lo mejor no puedes, pero un punto sí que lo puedes/

(A) ...

(P) O sea, que puede haber un punto que no le podamos averiguar el número, digamos así a mano...

(A) No, no

(A) Sí"

-<u>La discusión sobre si los decimales no periódicos están o no en la recta lleva a los alumnos a plantear si el caso concreto de √2 puede representarse en la recta. Al no conocer la construcción geométrica de √2, los alumnos se centran en las aproximaciones decimales finitas, y reconocen correctamente que cualquier aproximación decimal será finita y, por tanto, no corresponderá a √2:</u>

"(A) .... Estamos en el mismo caso que raiz de 2.

(A) Pero no se puede representar.

(A) ¿Se puede representar raiz de 2 en la recta?

(A) Pero es que no se sabe.

(A) Pero no se trata de √2, se trata de un punto, no de √2.

(P) ¿Qué, Sergio?

(A) √2 sí se puede representar

(A) Por ejemplo, representa1,4, y un poquillo más a la derecha estaría el 1,41 y un poquillo más a la derecha estaría el 1,451 y un poquillo más a la derecha, y así podríamos estar...

(A) Y así no acabamos.

(A) Y así nunca se acabaría.

(A) 1,41, pues ya es finito porque acaba, y si sigues añadiendo también ..."

En la discusión con los alumnos de esta cuestión de investigación salieron a la luz aspectos que no habíamos tenido en cuenta al formularla. En principio, nuestra pregunta parte de los puntos de la recta, y pretende indagar si hay números que puedan hacerséles corresponder; desde esta posición las respuestas que habíamos considerado posibles eran:

1ª Existe una parte alícuota con el segmento unidad.

2ª A partir de divisiones sucesivas alcanzamos el punto.
(Ambas darían lugar a suponer que existe un número que corresponde a cualquier punto dado de la recta y éste es racional).

3ª Puede no existir una parte alícuota con el segmento unidad.

4ª Podríamos estar dividiendo indefinidamente sin llegar a alcanzar el punto.
(Ambas darían lugar a dos conclusiones posibles:
.Hay puntos en la recta a los que no les corresponde ningún número.
.Hay puntos en la recta a los que corresponden números irracionales (no racionales)).

Sin embargo, en la Puesta en Común con los alumnos, pudimos observar que sus respuestas no se plantean en estos términos, sino que su interés principal consiste en averiguar si podemos realizar la correspondencia entre $\sqrt{2}$ y un punto de la recta, ya que eso les permitiría ver que no a todos los puntos de la recta les corresponden números racionales. Se desenfoca, por tanto, la atención de la primera pregunta, es decir, de si dado un punto cualquiera de la recta existe un número que le corresponda (y con qué criterios podemos afirmar, o negar, esta correspondencia), y se pasa directamente a discutir sobre la segunda, es decir, de qué tipo será el número que corresponda a un punto cualquiera de la recta. Y es en la respuesta a esta segunda pregunta donde salen a la luz diversas intuiciones de los alumnos sobre la imposibilidad de realizar una correspondencia que implique un proceso infinito, sobre la posible analogía con el caso de los decimales periódicos (cuya correspondencia sí podía actualizarse a pesar de ser infinitos), y sobre la asociación intuitiva número-punto de la recta, a la que nos podemos acercar por aproximaciones sucesivas.

Análisis de las Actuaciones:

Mediante la transcripción de la Puesta en Común sobre la ficha F14 (fecha 15-2-94, Anexo V.3) hemos realizado también un análisis de las actuaciones que se produjeron a lo largo de la misma, haciendo uso para ello de las Unidades de Análisis de la Interacción didáctica expuestas en el apartado III.7 de esta memoria.

A continuación presentaremos un esquema del desarrollo de la sesión, seguido del análisis de la misma en lo que se refiere actuaciones propiamente dichas.

-Etapas de la Interacción estructuradas según los contenidos:

<u>Puesta en Común</u>

<u>1.</u> Discusión a propósito del concepto de <u>Punto</u>: ¿tienen dimensiones los puntos? Distinción entre las representaciones físicas y el plano ideal.

<u>2. Primera Pregunta: Asignación de un número a varios puntos señalados en la recta en la que se han indicado los puntos 0 y 1.</u>

2.1. Avance de resultados (en notación fraccionaria y decimal).

2.2. Método de las diferencias sucesivas en el caso trivial. Estimación (confuso) en los casos más complicados. A partir de aquí no se distinguen bien en la grabación los sucesivos apartados de la primera pregunta; sí, en cambio, los métodos para obtenerlos.

2.3. Método de las mediatrices sucesivas.

2.4. Método de encontrar una parte alícuota mediante estimación.

2.5. Método de las diferencias sucesivas, en casos no triviales: alusiones a la exactitud, interferencias de la exactitud en nivel de los medios físicos.

2.6. Interrupción por motivos de <u>conducta</u>.

2.7. Método de las diferencias sucesivas, en casos no triviales.

2.8. Creencia en la existencia de una parte alícuota en todos los casos que puedan presentarse.

2.9. Discrepancia de resultados en el último apartado.

3. Segunda Pregunta: Generalización del apartado anterior: ¿a cualquier punto de la recta, en la que están señalados el 0 y el 1, corresponde un número? ¿de qué tipo?

3.1. Contestación en clase.

3.2. -Respuestas Afirmativas a la pregunta. Razones:

.Existencia de una parte alícuota.

.Todos los números tienen una representación en la recta, y esto implica el recíproco.

.Hay infinitos números e infinitos puntos.

.Los números irracionales "están en la recta", son puntos de la recta, pero no podemos representarlos, no podemos llegar a asignarlos.

3.3. Discusión:

.Los números que tienen su representación en la recta son "Todos menos los infinitos no periódicos".

.Los infinitos no periódicos "están" en la recta:

Un número infinito no periódico no se puede representar de hecho.

Físicamente no existen medidas irracionales, no podemos asignar un punto de la recta a un infinito no periódico. Pero, ¿existen idealmente?:

.No

.¿Se puede representar $\sqrt{2}$ en la recta?

.Sí: Aproximaciones sucesivas.

.No: las aproximaciones sucesivas son sólo aproximaciones.

.Diferencia entre "poderse representar" y "estar".

-Datos globales sobre las Unidades de Interacción Didáctica encontradas:

De acuerdo con la transcripción de la Puesta en Común de la actividad F14 y la tipificación de los segmentos que la componen en términos de categorías para el análisis de la interacción didáctica, elaboramos la siguiente tabla, en la que se resumen las frecuencias encontradas para cada una de las categorías, según el esquema del desarrollo de la sesión que hemos considerado.

Tabla 5.30: Interacción didáctica sobre la actividad F14.

Etapa / Categorías	1	2	3	Total
1.PO	1	7	11	19
1.PP	0	0	4	4
1.PE	0	0	2	2
1.PV	0	0	0	0
1.PA	0	1	3	4
1.AS	0	2	2	4
1.AP	0	3	2	5
1.AE	0	0	3	3
1.AV	0	0	0	0
1.AR	0	0	0	0
2.PO	0	5	0	5
2.PP	0	1	0	1
2.PE	0	1	0	1
2.PV	0	1	0	1
2.PI	0	5	2	7
2.AS	0	1	0	1
2.AP	0	0	0	0
2.AE	0	0	0	0
2.AV	0	2	0	2
2.AI	0	1	2	3
3.POC	0	7	11	18
3.PIS	8	32	22	62
3.PDC	4	16	10	30
3.PVI	0	10	4	14
3.PSC	1	1	1	3
3.AAI	14	47	27	88
3.AIS	2	16	9	27
3.AMC	2	15	30	47
3.AVI	3	4	8	15
3.AEC	0	0	1	1
Total	35	178	154	367
CA	3	28	20	51

Análogamente a como hemos procedido en el análisis de situaciones anteriores, presentamos dos tablas resumen de la anterior, en las que se agrupan las categorías de interacción didáctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de esta memoria y según los tipos de actuaciones, respectivamente.

Tabla 5.31: Distribución en porcentajes de las etapas y finalidades en la actividad F14.

Etapa / Finalidades	1	2	3
1	0,03	0,07	0,17
2	0,00	0,10	0,03
3	0,97	0,83	0,80

Tabla 5.32: Distribución en porcentajes de las etapas y actuaciones en la actividad F14.

Etapa / Actuaciones	1	2	3
Fijar Normas	0,43	0,39	0,33
Establecer Significados	0,46	0,47	0,53
Enjuiciar	0,08	0,10	0,08
Intervenir	0,03	0,04	0,06

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En cuanto a distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Finalidades, en general, se observa que en las distintas etapas la frecuencia de acciones que tienen por objeto construir conocimiento se sitúa entre el 80 y el 97%. En todas las etapas hay un mayor número de acciones con la finalidad de construir conocimiento que parten de los alumnos, y la frecuencia mayor en las finalidades concretas corresponde a aportar información y manifestar comprensión, aunque también hay un buen número de actuaciones destinadas a indagar significados; también los alumnos valoran ideas, aunque en menor medida, pero sólo en una ocasión estructuran conocimiento. Por parte de la profesora, la finalidad concreta más frecuente en las tres etapas es la de indagar significados, seguida de desarrollar comprensión y organizar el conocimiento; con menor frecuencia valora ideas, y sistematiza conocimiento en un porcentaje bastante bajo de actuaciones.

El porcentaje de actuaciones destinadas a gestión se sitúa entre el 3 y el 20% del total, siendo bastante más numerosas las que parten de la profesora (tanto en el primer nivel como en el segundo); la gama de actuaciones de gestión, tanto por parte de la profesora como por parte de los alumnos, es variada.

Por lo que respecta al cómputo de frecuencias de actuación por etapas atendiendo a las Actuaciones Generales, en todas ellas la mayor parte de las acciones (alrededor del 85 ó 90%) corresponden a fijar normas y establecer significados. Desde la primera a la última etapa el número de acciones destinadas a fijar normas decrece de un 43 a un 33%, mientras que crece en proporción similar el número de acciones destinadas a establecer significados. En general, hay un equilibrio entre las acciones que parten de la profesora y las que parten de los alumnos, que sólo se altera en el apartado de fijar normas debido a la frecuencia con la que estos últimos aportan información.

El resto de actuaciones generales, que corresponden a enjuiciar e intervenir, oscila entre el 11 y el 14% y, como viene siendo habitual, es mayor el número de ellas que corresponden a actuaciones de valoración o enjuiciamiento. En el apartado de enjuiciamiento la mayor frecuencia de acciones corresponde alternativamente a los alumnos o a la profesora, según las etapas, mientras que en el apartado de intervención es la profesora la que toma la iniciativa la mayor parte de las veces en todas las etapas.

En lo que se refiere a la categoría de Clima de Aula, las interrupciones debidas a este motivo oscilan entre el 8 y el 13% del número total de segmentos clasificados en las distintas etapas.

V. 2. 6 Observación y resultados de la actividad F16

Como se indicó en la tabla 5.3 de la página 251, se trata de una Cuestión Complementaria de investigación.

-Objetivo de la actividad:

-Explorar:

.Las intuiciones de los alumnos en torno a la "existencia" de longitudes irracionales, basándonos en la idea de una transformación continua.

.Los problemas que surgen al tratar de expresar numéricamente dichas longitudes.

.Cómo influyen los problemas de expresión numérica (decimal infinita no periódica) en las intuiciones sobre la existencia de determinadas longitudes y en las intuiciones del continuo lineal, y viceversa.

.¿Qué papel juega la notación habitual ($\sqrt{12}$) como puente entre las dos ideas?

-Toma de decisiones:

Debido a que en esta segunda fase de nuestro proceso de investigación-acción el número de trabajos que han de entregar los alumnos se ha incrementado considerablemente, a juicio de la profesora se aprecia que esto puede dar lugar a una situación de tensión excesiva, tanto por parte de los alumnos como por parte de la propia profesora. Por este motivo, se decide no pedir los documentos escritos de los alumnos para esta actividad, y posponer su revisión para cuando sean recuperados a partir de los Portafolios que han de entregar los alumnos para la evaluación.

.Fenómenos observados:

Al revisar los portafolios, sólo un 30% de los alumnos ha realizado la actividad F16 (esto puede ser debido a que la primera parte de la ficha se hizo en grupo y la segunda parte consta de sólo dos cuestiones, que muchos alumnos no se cuidan de contestar.

-Ideas detectadas (errores, incoherencias, conexiones interesantes, puntos que se dominan, etc...):

De los alumnos cuyos trabajos pudieron ser recuperados, todos salvo 2 afirman que no puede existir un cuadrado de área 12 porque sus lados no pueden tener infinitas cifras, o porque no hay ningún número que multiplicado por sí mismo dé 12 (daría un número infinito). Las 2 excepciones corresponden a :

.el alumno que ya había manifestado en la Puesta en Común (11-2-94) su creencia en la existencia de un cuadrado de área 12. Por escrito argumenta que dentro de la curva determinada por los vértices de los rectángulos de área 12 habría un cuadrado, pero que como el lado tiene infinitas cifras no periódicas no sabe cómo puede representarlo, aunque reitera que existe.

.la otra excepción corresponde a una niña que, aunque en principio pensaba que no existía el cuadrado de área 12 porque su lado tenía una expresión decimal infinita no periódica, rectifica su opinión a raiz de la construcción de cuadrados de cualquier área dada hecha en la actividad siguiente.

-Valoración / Interpretación:

A la hora de decidir la existencia o no de un cuadrado de área 12, los alumnos razonan dentro del ámbito numérico y de forma constructiva: como no hay ningún número exacto que multiplicado por sí mismo dé 12, no existe un cuadrado de área 12 (el número en cuestión tendría infinitas cifras, y entonces "no podría medir el lado del cuadrado").

En la Puesta en Común de esta actividad se intentó razonar en el ámbito geométrico apelando a la transformación continua de todos los rectángulos de área 12, que daría lugar a un cuadrado; también en el mismo ámbito geométrico los alumnos estuvieron de acuerdo en que la superficie bajo la curva formada por los vértices de los rectángulos de área 12 estaría "llena" (lo cual supone admitir la existencia de un cuadrado dentro de la curva). Sin embargo, a pesar de este cambio del ámbito numérico al ámbito geométrico para abordar el problema de la existencia de un cuadrado de área 12 con otra óptica, la persistencia de los alumnos en el argumento de que no pueda existir "un lado que tenga infinitas cifras no periódicas" es muy fuerte: Sólo un alumno es capaz de mirar el problema desde otro ángulo y afirmar la existencia del cuadrado de área 12 sobre la base de una transformación continua (aunque no sepa cómo representar un número con infinitas cifras no periódicas); además, otra alumna es capaz de rectificar su primitiva idea numérica a partir de la construcción explícita de cuadrados de área 12.

V. 2. 7 Observación y resultados de la actividad F17

Esta actividad corresponde a una Cuestión Complementaria de investigación.

-Objetivo de la actividad:

-Una vez construido el cuadrado de área 12, retomar la discusión sobre:

.la existencia de $\sqrt{12}$ y su localización en la recta

.su expresión decimal

.su condición de número*.

Observar las concepciones de los alumnos en torno a estas cuestiones, poniendo atención a si se modifican las creencias manifestadas a partir de la actividad anterior (Ficha 16).

-En caso de que el punto* no resulte demasiado conflictivo, plantear si este número es racional y por qué. Observar las concepciones de los alumnos al respecto.

-Plantear la localización en la recta de los puntos correspondientes a los números que expresan las medidas de las longitudes (irracionales) recién construidas y algunas medidas racionales. Los números correspondientes a estas últimas se presentan en notación fraccionaria y decimal periódica; la demanda de "exactitud" en la representación obligará en este caso a pasar por el puente de la notación fraccionaria.

-Observar si los alumnos diferencian las raíces (irracionales) de los números racionales, y si establecen significativamente criterios de diferenciación:

.En el ámbito numérico: los racionales son los que se representan mediante fracciones que, a su vez, corresponden en notación decimal a los decimales finitos o periódicos, mientras que las raíces se caracterizan por tener notación decimal infinita no periódica.

.En el ámbito geométrico: los racionales miden las longitudes conmensurables con la unidad y las raíces (irracionales) son inconmensurables con el segmento unidad, ya que no hay una fracción que exprese su medida en relación a la unidad -en tal caso su representación decimal sería periódica-.

Estaremos especialmente atentos en este punto a las reacciones de los alumnos y a su comprensión de que las raíces (irracionales) no pueden expresarse en forma de fracción. Suponiendo que comprendan, observar en qué grado aceptan el resultado o desconfían y piden demostraciones más "evidentes".

Establecer, si es pertinente, que las raíces se representan en la recta por otros procedimientos que los conocidos para los números racionales.

-Una vez considerados números no racionales, observar si los alumnos encuentran otros números pertenecientes a su misma categoría (de no racionales); por ejemplo π, y explicitan sus características en función de los criterios anteriores.

-Observar si la resolución de ecuaciones de segundo grado, constituye para los alumnos otro motivo de aceptación como números de algunos irracionales: los cuadráticos (que incluyen a las raíces cuadradas).

-Observar en qué medida resulta significativo el establecimiento de una nueva clase de números: Irracionales, y si los alumnos son capaces de explicitar criterios de diferenciación entre los números racionales e irracionales, y cuáles son estos criterios.

-Ideas detectadas (errores, incoherencias, conexiones interesantes, puntos que se dominan, etc...):

-Con respecto a la construcción de cuadrados de área dada partiendo de cuadrados de lado entero y utilizando el teorema de Pitágoras, los alumnos parecen dominar el procedimiento y sólo hay algunos fallos de utilizar cuadrados no construidos previamente. La mayoría parecen seguir bien el proceso, pero ninguno explicita que no se puede construir directamente un cuadrado de lado no entero y que esa es la razón de tener que recurrir a un procedimiento indirecto; tenemos la impresión de que, a pesar del dominio de los aspectos técnicos del procedimiento, un punto tan importante como éste, pasa desapercibido para la mayoría de los alumnos.

-Con respecto a la pregunta 2, la gran mayoría de alumnos contesta sin problemas a los apartados que se refieren a la medida del lado del cuadrado de área 12: $\sqrt{12}$, a su expresión decimal: infinita no periódica, y a que dicha expresión no corresponde a un número racional.

Sin embargo, en el apartado correspondiente a si $\sqrt{12}$ es un número, la mayoría de los alumnos responden afirmativamente, pero las razones aducidas son bastante arbitrarias y sin relación con la actividad que acaban de realizar: sólo un niño da la razón de que se puede construir o dibujar; bastantes dicen que se puede representar en la recta pero muy pocos remiten a la representación y varios ni siquiera hacen dicha representación, aunque hayan aludido a ella; una razón muy esgrimida es la de que se puede operar con él, pero los alumnos no dicen en qué se basan para dar esta razón; también hay niños que mencionan que viene de una operación y que puede nombrarse o expresarse con un radical; otro alumno dice que se puede contar. ¡Y casi nadie se da cuenta de que sirve para medir longitudes!

En general, las razones que dan los alumnos son arbitrarias, y no les ha resultado significativo lo que acaban de hacer, o no lo relacionan con los conocimientos anteriores, como pretendíamos.

-Con respecto a la representación en la recta de los radicales, bastantes alumnos dejan el apartado sin contestar, otros los representan a través de aproximaciones decimales finitas y algunos alumnos los representan bien, o casi bien porque trasladan las longitudes que han dibujado en el apartado 1 de la ficha, sin tener en cuenta la nueva unidad.

-Los alumnos en general distinguen las representaciones de números racionales y las de números irracionales sin problema; pero no se acuerdan de otros irracionales además de los radicales recién vistos, ni siquiera de π, sobre el que se supone que están trabajando.

-Los alumnos tampoco tienen problemas en resolver las ecuaciones de segundo grado planteadas pero, de nuevo, no relacionan esta actividad con las razones para que los radicales sean números, tal como era nuestra intención.

-Con respecto a la última pregunta, a la mayoría de los alumnos les pasa desapercibida. Una razón puede ser el hecho de que carezca de interrogaciones, y la constatada tendencia de los alumnos a hacer las tareas escolares por el interés de cumplir las órdenes de la profesora y no por un interés intrínseco en la propia actividad. No obstante, hay un alumno que sí contesta a esta cuestión, y distingue muy concienzudamente entre racionales ¡y radicales! Esto es bastante natural teniendo en cuenta que son los únicos irracionales que hemos tratado sistemáticamente y que no se ha hecho Puesta en Común de esta parte de la Ficha.

-<u>Fenómenos observados:</u>

-Una alumna manifiesta por escrito la siguiente preocupación: "¿Cómo puede existir una representación finita y acabada (la longitud de un segmento) de algo que no tiene fin y no se sabe cómo acaba (un decimal infinito no periódico)?"

-<u>Valoración / Interpretación:</u>

-El punto que más llama la atención en relación con la comprensión de los alumnos acerca de esta actividad es la escasa o nula conexión que los alumnos establecen entre las situaciones que habíamos propuesto para justificar el carácter de número de los irracionales construibles (su posibilidad de construcción y de representación en la recta a partir del traslado de las longitudes construidas) y los irracionales cuadráticos (ser soluciones de ecuaciones con coeficientes racionales). Más bien parece que la tendencia observada por parte de los alumnos a afirmar que las raíces cuadradas son números (modificando sus negativas o sus dudas primitivas) se debe al hecho de ser manejadas en el proceso didáctico, de hacer ejercicios en los que tienen ocasiones de manipularlas, y no a una sistematización coherente de las características que soportan el estatus de número de ciertas notaciones numéricas. Los alumnos ahora se inclinan a pensar que las raíces cuadradas son números, pero las razones que aducen parecen arbitrarias, o por lo menos no tienen conexión con los ejercicios realizados con el fin de proporcionar justificaciones para este cambio de opinión. Por otra parte, puede que estos alumnos necesitaran alargar el periodo de ejercicio con este tipo de expresiones en distintos contextos, de manipulación de las mismas en procesos de distinto tipo, para que fueran capaces de producir,con cierta coherencia y sistematización, las conexiones deseadas.

-Otro punto importante es la preocupación reiterada de una alumna por el conflicto: "¿Cómo puede existir una representación finita y acabada (la longitud de un segmento) de algo que no tiene fin y no se sabe cómo acaba (un decimal infinito no periódico)?". Este es uno de los puntos en donde se pone de manifiesto la paradoja a la que nos enfrentamos al tratar aspectos relacionados con los números irracionales: su doble cara, que muestra lo finito y lo infinito según nos acerquemos a ellos desde un ángulo u otro; y la dificultad que presenta para los alumnos (y que ha presentado para la historia de la matemática y del pensamiento occidental en general) hacer compatible esa doble naturaleza.

V. 2. 8 Exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número π y el número de Oro

En esta actividad complementaria (ver pg. 251, tabla 5.3), varios alumnos tuvieron ocasión de exponer a la profesora y a sus compañeros los trabajos que habían realizado en pequeño grupo sobre el número π y sobre el número de Oro. En principio no estaba previsto realizar una observación de las sesiones correspondientes a la misma; sin embargo, se efectuó la grabación en vídeo de dichas sesiones: una sesión completa y 36 minutos de otra, correspondientes a las fechas 24-2-94 y 25-2-94, que aparecen transcritas íntegramente en el Anexo V.3. Dado que resultaron especialmente fructíferas en lo que se refiere a Comprensión de Contenido y también a Interacción Didáctica, hemos decidido considerarlas en este apartado, correspondiente a observación y reflexión.

V. 2. 8. 1 Primera Sesión (24-2-94)

Aspectos relacionados con la Comprensión:

Durante esta sesión, un grupo de alumnos expuso el trabajo que había realizado sobre el número π. A lo largo de la exposición, se suscitaron la siguientes cuestiones de interés en lo relativo a la comprensión del contenido:

-Los alumnos manifiestan perplejidad cuando la profesora intenta enfocar su atención hacia la cuestión de si es posible medir la longitud de una circunferencia con respecto a su diámetro mediante una fracción. Cuando la profesora intenta conectar este punto con la posibilidad de hacer algo análogo en el caso de la diagonal y el lado del cuadrado, a través de la existencia o no de una parte alícuota entre ambas longitudes, los alumnos manifiestan mucha confusión y no entienden el lenguaje de la profesora. Según los alumnos, la diagonal y el lado del cuadrado no pueden medirse mediante una fracción porque su medida "no es exacta", esto es, "no se puede medir mediante un número exacto (decimal finito o fracción). La cuestión de la no existencia de una parte alícuota en ambos casos entre las parejas de longitudes que se pretenden conmensurar aún no puede ser planteada a los alumnos de una forma tan genérica:

"(P) Y la longitud, cuando el diámetro es una unidad, ¿la longitud se puede medir con una fracción o no?

(A) ¿Y por qué no?

(P) ¿O con un número entero?

(A) No (tímido)

(A) No se oye bien (parece que expresan duda).

(...)

(P) Ayer salieron, en la F17 salieron longitudes que eran las raíces. ¿Esas longitudes se pueden expresar como fracciones o no?

(A) No

(A) Sí

(P) ¿Sí o no?

(...)

(P) Dada la √2 ¿qué le pasa? ¿la √2 se puede expresar esa medida como una fracción?

(A) No

(A) No, porque no es exacta.

(A) No, porque... no es exacta.

(P) Porque es un decimal infinito no periódico. ¿Y si se pudiera expresar con una fración qué daría? Pues uno finito o uno periódico./ Entonces, lo mismo que veíamos que los naturales nos servían para contar, los racionales nos servían para contar y para

medir, y éstos ¿nos sirven para algo?/ ¿Para medir todas las longitudes son suficientes los racionales o no?

(A) No, no.

-Los alumnos convienen que no todas las longitudes pueden medirse mediante los números racionales (porque saben que esto no es posible por ejemplo en el caso de los lados de muchos cuadrados). Sin embargo, apuntan una observación muy interesante: si no sabemos que vienen de una cuadrado (es decir, si no sabemos la relación en abstracto entre la longitud y la unidad), entonces sí se podría:

"(P) ¿Para medir todas las longitudes son suficientes los racionales o no?

(A) No, no

(P) Porque hay longitudes como éstas, que no se pueden medir con los racionales.

(A) Pero eso no lo sabemos ... si no sabemos que viene de un cuadrado pues lo medimos siempre con los racionales.

(P) Pero si sabes que viene de un cuadrado...

(A) Ah, entonces sí.

-Los alumnos han intentado calcular π midiendo longitudes y diámetros de distintas circunferencias y les da aproximaciones distintas a la expresión decimal de π que ellos conocen. Por otra parte, las aproximaciones de π han variado a lo largo de la historia. ¿Cómo se sabe que la aproximación decimal que manejamos actualmente es correcta hasta las cifras que tomemos?:

(E2) ¿Cómo se sabe que el π que han hallado es el correcto y el exacto, y no ése?

(A) ¿Cómo, cómo?

(....)

(E1) No, que cómo saben que es el exacto 3,1415...

(E3) ¿Tú qué preguntas, que de dónde lo sacamos los números?

(E1 y E2) No. Que cómo se sabe cuál el exacto.

(P) Que la pregunta que me habéis preguntado a mí, ¿se os ha ocurrido últimamente o habéis intentado buscarla?

(E2) No. Fue cuando lo estuvimos preparando, entonces no nos dio tiempo.

(E1) Porque como nos estábamos equivocando cada dos por tres cada vez que lo medíamos, decíamos y ¿cómo sabemos no es el exacto, que el bueno es el nuestro, y no el de...?

(P) El de Arquímedes, o el de...

(E2) Ah, una cosa que... También otro procedimiento para encontrar πpodría ser...

(A) ...

(P) Esa pregunta queda pendiente, ¿eh?/ A ver si la vais buscando."

-Los alumnos no comprenden las ventajas del método de Arquímedes para medir la longitud de la circunferencia a través de una sucesión de aproximaciones poligonales. Piensan que es más exacto medirla con un instrumento graduado directamente (porque, según ellos, un polígono siempre es una aproximación, mientras que con un instrumento graduado tú te puedes aproximar todo lo que quieras a la medida de la longitud primitiva que se pretende medir). No discriminan entre la medida a nivel teórico y la medida a través de procedimientos físicos. La profesora tampoco deriva la discusión hacia ese terreno, sino que insiste en que la aproximación por medio de polígonos permite reducir la unidad de medida tanto como se quiera; los alumnos ven simplemente que, entonces, se trata de una aproximación. No se advierte que la medida a través de medios físicos comporta un margen de error que, por medios teóricos, es controlable y susceptible de hacerse tan pequeño como se quiera; por otra parte, no se sabe si este tipo de razonamiento sería comprensible para los alumnos de este nivel:

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita que comienza a partir del minuto 12:48 en la transcripción correspondiente a la fecha 24-2-94, del que copiamos un fragmento a continuación).

(P) ¿Es más exacto estirar la circunferencia y medirla con milímetros?

(A) Sí

(A) Sí, claro.

(P) ¿O ir inscribiéndole polígonos muy chiquitines y medir el perímetro de ese polígono?

(A) ...

(A) Es más exacto el de la otra.

(A) El primero

(P) ¿El de los milímetros?

(A) Sí

(A) Coger la circunferencia y medirla con milímetros."

-Se plantea el dilema de si se sabe que la expresión decimal de π es infinita, o no se sabe si va a acabar a alguna vez; discriminar entre ambas opciones no resulta inmediato para los alumnos. Cuando se establece finalmente que se sabe que es infinita (uno de los datos históricos que se manejan es que fue demostrado en el siglo XVIII), los alumnos manifiestan interés en conocer Cómo se puede saber que es infinita. La profesora establece que la respuesta a esa cuestión es demasiado difícil para el nivel en que estamos y establece el resultado en términos de un argumento de autoridad (basado en los datos históricos que han encontrado los alumnos)[12] :

"(A) Pero en la enciclopedia, dice que no estaba seguro de que fuera irracional, sino que se seguían sacando muchos decimales y no estaban seguros.

(...)

(A) Pero, Jose, ¿cómo sabes que no se va a acabar nunca?

12 Quizá hubiera debido establecer el argumento no en términos de dificultad sino de que carecemos de las herramientas necesarias. Cuando los alumnos tienen realmente interés en una cuestión están dispuestos a esforzarse y poner más de su parte en intentar comprenderla, aunque sea difícil; el esfuerzo parece merecerles más la pena que cuando se trata de una cuestión más sencilla pero sin gran interés para ellos.

(P) Eso es lo que dice Nieto/ que se demostró en el siglo XVII. Que no se iba a acabar nunca. En el siglo XVII se demostró que ese decimal era infinito, y no le va a salir periodo jamás.

(E1) Y antes del siglo XVII se tiraban sacando un montón de decimales ... con la esperanza de que en algún momento de los decimales diera un periodo ...

(...)

(A) ¿Y cómo demostraron que no puede salirle un periodo y no va a cabar nunca?

(A) Eso no puede

(P) ¿Qué cómo lo demostraron? Es muy difícil, se tiraron más de 20 siglos para demostrarlo.

(A) ¿Y no nos lo puede contar aunque sea más sencillo?

(P) Hombre, yo os lo puedo contar, pero no lo vais a entender./ Porque fijaros, es mucho más fácil demostrar que el lado del cuadrado de área 2 tiene infinitos decimales y no le va a salir periodo nunca, y no se va a acabar nunca; es mucho más fácil demostrarlo, eso ya lo sabían los griegos, y vosotros no lo entendéis, que ya os he intentado yo demostrarlo y no lo entendéis.

(A) ..."

Análisis de las Actuaciones:

Seguidamente presentamos un esquema del desarrollo de la sesión sobre la exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número π, realizada el 24-2-94 y un análisis de la misma en lo que se refiere a las actuaciones propiamente dichas, realizado mediante las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica.

-Etapas de la interacción estructuradas según los contenidos:

Puesta en Común

1. Longitudes Inconmensurables:

- Dudas acerca de la posibilidad de medir la longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro mediante una fracción.

-Perplejidad ante el intento de conexión con la existencia de una parte alícuota para diagonal y el lado del cuadrado. La diagonal y el lado del cuadrado no pueden medirse mediante una fracción, porque las raíces cuadradas tienen una expresión decimal infinita no periódica, y entonces no pueden expresarse en forma de fracción.

-No todas las longitudes pueden medirse con los números racionales. Pero una alumna señala que "si no sabemos que vienen de un cuadrado, entonces, sí las podríamos medir con números racionales". Si nos situamos en ese plano, todas las longitudes son lados de cuadrados. Pero algunas sí pueden ser expresadas con números racionales, porque hay cuadrados cuyos lados son racionales (Ej. el cuadrado de área 4).

2. Directrices para las Exposiciones:

-Discusión sobre la forma de calificación de las Exposiciones.

-Directrices sobre el tiempo asignado a cada exposición.

-Directrices sobre la evaluación de los contenidos expuestos.

3. Exposición 1: El número π:

3.1. Definición de π.

3.2. Cálculos de π hechos por los alumnos a partir de la definición:

.Valdrían con cualquier circunferencia, porque π es una constante.

.Dan resultados distintos, y distintos de 3,14, porque son aproximaciones.

¿Cómo se sabe cuál es el resultado correcto?

.Porque los resultados de los matemáticos son los corrrectos.

.Distintos matemáticos dan distintas aproximaciones a lo largo de la Historia.

.No se resuelve la duda. Se propone la exploración.

3.3. El Método de Arquímedes para el cálculo de π mediante inscripción de polígonos regulares en una circunferencia:

.Explicación del método.

.¿Qué ventajas tiene el método de Arquímedes sobre medir directamente la longitud de la circunferencia?

A juicio de los alumnos, ninguna, porque los polígonos son siempre aproximaciones por pequeñísimos que sean los lados.

4. Discusión sobre el siguiente grupo que debe realizar la exposición:

-Quedan suspendidas varias exposiciones por falta de preparación para la fecha prevista.

-Por falta de los grupos previstos para la sesión, se continúa la discusión con el grupo que estaba exponiendo.

5. Sobre la expresión decimal infinita no periódica del número π:

-Búsqueda de expresión racional hasta que en el siglo XVII se demuestra que el número π es "trascendente", y por tanto, irracional.

-Se conocen muchas cifras decimales de π, pero se sabe que su expresión decimal es infinita no periódica.

-Inconmensurabilidad de la longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro. Los alumnos parecen quedarse en el nivel de la expresión decimal infinita. Parece difícil conectar este nivel con el nivel de la medida, es decir con el nivel de la conmensuración o posible existencia de un aparte alícuota.

-¿Se sabe que la expresión decimal de π es infinita, o no se sabe si va a acabar a alguna vez? Se sabe que es infinita. ¿Cómo se sabe que es infinita?. La pregunta es demasiado difícil para el nivel en que estamos.

-A efectos prácticos, yo puedo tomar tantos decimales como necesite, o me convenga.

-Datos globales sobre las Unidades de Interacción Didáctica:

Presentamos la tabla en la que se resumen las frecuencias encontradas para cada una de las categorías de interacción didáctica, según el esquema del desarrollo de la sesión que acabamos de considerar.

Tabla 5.33: Interacción didáctica sobre los trabajos de los alumnos.

Etapa / Categorías	1	2	3	4	5	Total
1.PO	0	6	3	8	2	19
1.PP	0	6	1	2	0	9
1.PE	0	3	0	3	5	11
1.PV	0	1	0	5	0	6
1.PA	0	0	2	0	2	4
1.AS	0	6	3	5	1	15
1.AP	0	4	0	4	3	11
1.AE	0	1	0	0	0	1
1.AV	0	1	0	5	1	7
1.AR	0	0	2	0	1	3
2.PO	0	0	4	2	1	7
2.PP	0	0	0	0	0	0
2.PE	0	0	0	0	0	0
2.PV	0	0	0	0	0	0
2.PI	0	0	5	0	1	6
2.AS	0	0	4	1	0	5
2.AP	0	0	0	0	0	0
2.AE	0	0	6	0	0	6
2.AV	0	0	0	0	0	0
2.AI	0	0	8	0	2	10
3.POC	1	0	1	0	1	3
3.PIS	11	0	15	0	17	43
3.PDC	7	0	7	0	21	35
3.PVI	3	0	5	0	6	14
3.PSC	1	0	1	0	2	4
3.AAI	15	0	26	0	14	55
3.AIS	1	0	14	0	10	25
3.AMC	2	0	31	0	11	44
3.AVI	3	0	9	0	5	17
3.AEC	0	0	1	0	0	1
Total	44	28	148	35	106	361
CA	2	5	22	3	22	54

Presentamos las dos tablas resumen, a partir de la anterior, en las que se agrupan las categorías de interacción didáctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de esta memoria y según los tipos de actuaciones, respectivamente.

Tabla 5.34: Distribución en porcentajes de las etapas y finalidades en la exposición de los trabajos.

Etapa Finalidades	1	2	3	4	5
1	0,00	1,00	0,08	0,91	0,14
2	0,00	0,00	0,18	0,09	0,04
3	1,00	0,00	0,74	0,00	0,82

Tabla 5.35: Porcentajes de las etapas y actuaciones en la exposición de los trabajos.

Etapa Actuaciones	1	2	3	4	5
Fijar Normas	0,36	0,43	0,28	0,46	0,18
Establecer Significados	0,48	0,50	0,50	0,26	0,63
Enjuiciar	0,14	0,07	0,09	0,28	0,11
Intervenir	0,02	0,00	0,13	0,00	0,08

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En cuanto a la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Finalidades podemos observar una fluctuación según las distintas etapas. En la primera, destinada a hacer aclaraciones de tipo conceptual, el total de las acciones se dirige a construir conocimiento. En la segunda etapa, la profesora da las directrices para la exposición de los trabajos y los alumnos hacen preguntas y sugerencias al respecto; por tanto, la totalidad de las actuaciones tienen como fin la organización del trabajo en el aula. En ambas etapas hay un equilibrio entre el número de acciones que parten de la profesora y el número de acciones que parten de los alumnos. Por lo que respecta a las finalidades específicas, en la primera etapa hay, como es habitual, un predominio de las correspondientes a indagar significados por parte de la profesora, seguida de las correspondientes a desarrollar comprensión, mientras que en los alumnos predominan las de aportar información; en la segunda etapa las acciones que predominan son las de organizar y preguntar por parte de la profesora y sugerir y responder por parte de los alumnos.

A continuación, en la tercera etapa, el primer grupo de alumnos expone su trabajo; aquí, la mayoría de las acciones (aproximadamente el 75%) se dirige a construir conocimiento, y el resto se dirige sobre todo a gestionar el desarrollo del contenido, lo cual da idea de que había un clima de respeto y buena organización en los alumnos en lo tocante a la disciplina, que permitía dedicar los esfuerzos al desarrollo de los temas conceptuales. En esta etapa hay, lógicamente, un predominio del número de actuaciones que provienen de los alumnos frente al número de actuaciones que provienen de la profesora (70% frente al 30%), y es notable la iniciativa de los alumnos en cuanto a gestión del desarrollo del contenido. En cuanto a las finalidades particulares, no se produce una variación significativa de la tónica que viene siendo habitual en las fases normales en las que predomina la construcción de conocimiento en el aula; si acaso, un ligero incremento en las actuaciones de valoración de ideas por parte de los alumnos, que puede venir motivada por el hecho de que dichas ideas sean manifestadas por otros compañeros y no por la profesora.

En la cuarta etapa la profesora vuelve a tomar el protagonismo para organizar el turno de las exposiciones siguientes; es por ello que la gran mayoría de las acciones se dirigen a gestionar el trabajo en el aula (90%) y hay un mayor número de acciones que provienen de la profesora. En esta ocasión, la mayor frecuencia de acciones particulares corresponde a organizar el trabajo y hacer valoraciones, tanto por parte de la profesora como por parte de los alumnos.

En la quinta y última etapa, debido a la falta de grupos que debían exponer sus trabajos, se dedica el tiempo a discutir sobre la expresión decimal infinita no periódica de π. En esta etapa, la mayor parte de las acciones está destinada a la construcción de conocimiento (82%), y el resto se dirige sobre todo a gestionar el trabajo en el aula (esto puede ser debido a que se trata de una situación no prevista). Tanto en las actuaciones de gestión como en las de construcción de conocimiento hay un ligero predominio de la profesora sobre los alumnos, quizás por la misma razón que acabamos de señalar. Por lo que respecta a las finalidades particulares se observa un incremento de las actuaciones de la profesora destinadas a desarrollar comprensión, que corresponde a un aumento de la indagación de significados por parte de los alumnos, lo cual puede venir motivado por la curiosidad, a la vez que la dificultad, que despierta en ellos el tema tratado.

Pasamos ahora a analizar la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Actuaciones Generales. Tal como se ha observado en los anteriores análisis de la interación didáctica, la mayor parte de las actuaciones generales corresponden a fijar normas y establecer significados (entre un 70 y un 95% aproximadamente, según las distintas etapas). El número de actuaciones destinadas a fijar normas es mayor en todas las etapas salvo en la cuarta (correspondiente a la organización de las exposiciones siguientes), y esta superioridad es más notable en la última etapa (quizás por el interés y los conflictos que suscita el tema de la representación decimal de π). En las etapas prioritariamente dedicadas a la construcción de conocimiento hay predominio de las actuaciones de los alumnos en lo que corresponde a la fijación de normas producida, sobre todo, por la acción concreta de aportar información; mientras que las acciones de la profesora predominan en el establecimiento de significados, excepto en la etapa en la que los alumnos realizan su exposición.

Como viene siendo normal, el mayor numero de actuaciones restantes corresponde a enjuiciar frente a intervenir, en todas las etapas salvo en la tercera, en la que los alumnos exponen su trabajo y se incrementa el número de intervenciones por parte de la profesora y de los demás compañeros (especialmente de estos últimos). También se nota un incremento en las actuaciones de valoración por parte de los alumnos, que se mantienen en todo momento equilibradas e incluso, en la etapa de exposición de los compañeros, superan al de la profesora.

Por lo que se refiere, al Clima de Aula, el nivel de "ruido" es más bajo en la primera etapa de la clase, pero sube en las siguientes para situarse en torno al 15% del total de segmentos categorizados.

V. 2. 8. 2 Segunda Sesión (25-2-94)

Aspectos relacionados con la Comprensión:

Durante ésta sesión, celebrada el 25-5-94 y que aparece transcrita íntegramente en el Anexo V.3, una pareja de alumnos expuso el trabajo que había realizado sobre el número π y una pareja de alumnas expuso su trabajo alrededor del número de Oro. A lo largo de estas exposiciones, se suscitaron la siguientes cuestiones de interés en relación con la comprensión de los alumnos:

-No está claro que los alumnos comprendan realmente, o acepten, que la razón entre la longitud de cualquier circunferencia y su diámetro sea constante:

> *"(A) La longitud... entre la longitud de la circunferencia y π es constante. No, perdón, entre la longitud de la cirunferencia y el diámetro; es constante, y se llama pi./ Es siempre..., bueno, algunas veces varía."*

-Vuelve a ponerse de manifiesto la dificultad que tienen los alumnos para discriminar entre que no se sepa si la expresión decimal de π será infinita no periódica y que se sepa de hecho que es de esta manera, aunque esta vez ya se asume que la expresión decimal de π es infinita y la duda se centra en la cuestión de la posibilidad de ser periódica. Una vez que se determina que se sabe que π tendrá una expresión decimal infinita y sin periodo, los alumnos manifiestan de nuevo su interés en saber cómo es posible saber eso. La profesora vuelve a utilizar un argumento de autoridad:

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita que comienza a partir del minuto 6:45 de la transcripción correspondiente a la fecha 25-2-94, del que copiamos un fragmento a continuación).

> *"(P) Pero se sabe que no le va a salir nunca un periodo; eso se sabe.*
>
> *(A) ¿Cómo lo han podido demostrar?*
>
> *(A) Si no nunca...*
>
> *(A) ...*
>
> *P) Un momentico. ¿Qué, Rocío?*
>
> *(R) ¿Que cómo han demostrado que no le sale periodo al final?*
>
> (...)

(E1) ...10. 000 millones de decimales, pero nunca llegará a hacerse periodo; entonces, pues....

(A) Pero, ¿tú cómo sabes que no se va a repetir?

E1) Porque lo ha dicho Isabel.

(P) No, porque lo he dicho yo no, porque se ha demostrado, que pi nunca va a tener periodo.

(A) ¿Cómo?

(A) Porque hasta donde se sabe no le ha salido periodo..."

-<u>También surge una vez más la cuestión de cómo se sabe que las cifras decimales que actualmente manejamos de π son las correctas. Dada la dificultad de tratamiento de este punto al nivel en que se encuentran los alumnos, la profesora sigue optando por dejar la cuestión abierta:</u>

"(E1) ¿Que cómo sabemos...

(P) ¿Que cómo se sabe que lo de los egipcios no era verdad y ésta sí? Que estas cifras son correctas hasta donde se ha llegado.

(E1) Es que a lo mejor, dentro de 500 años, haya otra.

(P) ¿Puede cambiarle las primeras..., ese 3,1415 le van a cambiar alguna vez, o no, o esas ya son?

(A) ...

(E1) Seño, entonces lo que yo digo es una cosa. Si éste por ejemplo es el exacto (señalando a la expresión de Vieta), y éste tampoco ... , entonces puede ocurrir que no sea exacto ..."

-<u>Las alumnas que exponen su trabajo sobre el Número de Oro, comienzan hablando de proporciones, pero pasado un rato no ha aparecido en su exposición ningún número; los compañeros manifiestan su extrañeza al respecto, puesto que el título de la exposición es "el Número de oro". A raiz de esta duda, la profesora establece la conexión número-proporciones:</u>

"(E2) ... las proporciones, y las aplicaciones que tiene. Bueno, a partir de esta estrella se pueden hacer rectángulos (Han puesto en la pizarra otro poster, de la estrella de cinco puntas con un desarrollo en las puntas y el dibujo de un sobre)

(P) Un momentico,/ dice Yanira.../ Un momento,/ es que es para que se entienda un poquito más./

Mirad, si... la proporción que hay entre esto es el número de oro, dice Yanira que es (1+√5)/2./ ¿Tú sabes de dónde se saca esto, Yanira?

(A) Pues...

P) ¿De dónde sale que el número de oro es precisamente éste; que la proporción es precisamente ésta?

(A) Es que no lo sé bien.

(P) Bueno, la proporción es la que tienen entre éste y éste, por ejemplo. O sea, que si tú mides esto con esta unidad, te sale este número, que es el número de oro. Y podéis ver con la calculadora algunas cifras decimales."

-Un alumno se plantea la siguiente cuestión: "¿Cómo dos longitudes que tienen distinto tamaño son medidas por el mismo número?". La profesora aclara que la respuesta está en el concepto de Proporción: medida de distintas longitudes con la misma proporción con respecto a las unidades de medidas respectivas. Los alumnos manifiestan su comprensión estableciendo la analogía con el número π :

"(P) Ah, mira lo que pregunta Pablo./ Si sale..., ¿cómo que el número no es el mismo?

(A) Es el mismo, ¿no?, pero ...

(E2) Tiene las mismas proporciones

(P) Porque ¿qué quiere decir proporción?/ Dice Pablo que si es más pequeño, ¿cómo va a salir el mismo número?

(E2) Porque es que no es que salga el mismo número, sino que salen las proporciones de ese número, o sea ...

(A) ¿Números equivalentes a ése?

(P) No, números equivalentes no.

(E2) Que guardan las mismas proporciones.

(...)

(E1) Es como pi, o sea, siempre la división de esto siempre sale lo mismo. Pues lo mismo es esto."

-Se pone de manifiesto la confusión de la alumna que expone en relación con el infinito: el hecho de que la proporción áurea se mantenga infinitamente en figuras semejantes hechas a partir del pentágono regular lo cual considera razón para que la expresión decimal del número de Oro sea infinita no periódica[13] :

"(E1) Infinitos rectángulos, o sea, siempre se puede sacar rectágulo, porque mira, de la estrella se ... con triángulos; de los triángulos, esta parte de los triángulos, los dos lados se abren, y entonces, y entonces forma otro rectángulo con las proporciones de oro. Entonces, ¿cómo se puede saber que es infinita? Pues vemos que en el pentágono puede caber otra estrella. Sería así.

(...)

(E1) Entonces, esto vuelve a abrirse así.

(E2) Y otra vez ... para que salga el rectángulo con las proporciones.

(E1) Bueno, más o menos así, pones el lápiz así ...

(P) Y además , dentro de ese pentágono se puede poner la estrella ...

(E1) ...

13 En detalles como éste se pone de manifiesto que la justificación de la no periodicidad en irracionales es un punto negro para los alumnos.

(P) Haces otra estrella...

(E2) Por eso este número es un número infinito no periódico."

Análisis de las Actuaciones:

El análisis de las actuaciones que tuvieron lugar con motivo la exposición de los trabajos de los alumnos sobre el número π y el número de Oro (25-2-94), se realizó a partir de la grabación en vídeo de la sesión correspondiente (Anexo V.3), mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica descritas en el capítulo III. Seguidamente presentamos, como es habitual, un esquema del desarrollo de la sesión y un análisis de la misma mediante las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica.

Etapas de la Interacción estructuradas según los contenidos:

Puesta en Común:

1. Exposición 1: El número π:

1.1. Definición de π. Referencia a distintos métodos para calcularlo. Distintas cifras para π a lo largo de la Historia.

1.2. Expresión decimal infinita no periódica de π: Se sabe que π es un número infinito no periódico; número de cifras que han llegado a calcularse. Resultados a lo largo de la Historia.

1.3.¿Se sabe que la expresión decimal de π es infinita no periódica? ¿Cómo se puede saber?. Sigue habiendo dudas en la distinción "no se sabe si alguna vez tendrá periódo"- "se sabe que nunca va a aparecer un periodo". Y, sobre todo, curiosidad por cómo puede saberse que no va a tener nunca periodo.

1.4. La medida de la longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro es inconmensurable, porque π no es racional. En el recíproco prima el razonamiento numérico.

1.5. ¿Cómo se sabe que las cifras que ahora manejamos de π son las correctas?

1.6. Sobre las aproximaciones de π que utilizamos. Redondeo.

2. Exposición 2: El Número de Oro:

2.1. Definición:

-Nombre. Infinitud de sus cifras. Origen: Proporciones.

-¿Dónde está el número? ¿Cuál es?

-Conexión número-proporciones. ¿Cómo dos longitudes que tienen distinto tamaño son medidas por el mismo número?. Proporción: medida de distintas longitudes en la misma proporción con respecto a las unidades de medidas respectivas.

2.2. El Número de Oro en la Naturaleza:

-En el hombre (Ideal). Preocupación por los casos particulares.

-Aclaración de la Definición. Conexión con el concepto de proporción, aparecido anteriormente.Analogía con π.

-Otros ejemplos en la Naturaleza.

2.3. El número de Oro en Arte y Arquitectura:

-Ejemplos

-Algunas especulaciones sobre la proporción áurea.

Datos globales encontrados:

Análogamente a como hemos procedido en el resto de las sesiones, presentamos la tabla en la que se resumen las frecuencias encontradas para cada una de las categorías de interacción didáctica, según el esquema de desarrollo de la sesión que hemos presentado.

Tabla 5.36: Interacción didáctica sobre la exposición de trabajos de los alumnos

Etapa Categorías	1	2	Total
1.PO	5	4	9
1.PP	0	0	0
1.PE	0	1	1
1.PV	0	0	0
1.PA	0	1	1
1.AS	1	1	2
1.AP	0	0	0
1.AE	2	0	2
1.AV	0	0	0
1.AR	0	0	0
2.PO	2	0	2
2.PP	0	0	0
2.PE	0	0	0
2.PV	1	0	1
2.PI	5	6	11
2.AS	0	3	3
2.AP	0	0	0
2.AE	0	8	8
2.AV	0	0	0
2.AI	2	2	4
3.POC	3	0	3
3.PIS	11	13	24
3.PDC	16	26	42
3.PVI	10	5	15
3.PSC	1	0	1
3.AAI	9	13	22
3.AIS	12	26	38
3.AMC	26	58	84
3.AVI	5	14	19
3.AEC	0	0	0
Total	111	181	292
CA	18	28	46

Tal como es habitual en nuestro análisis de las interacciones, presentamos las dos tablas resumen, a partir de la anterior, en las que se agrupan las categorías de interacción didáctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de esta memoria y según los tipos de actuaciones, respectivamente.

Tabla 5.37: Distribución en porcentajes de las etapas y finalidades

Etapa / Finalidades	1	2
1	0,07	0,04
2	0,09	0,10
3	0,84	0,86

Tabla 5.38: Distribución en porcentajes de las etapas y actuaciones

Etapa / Actuaciones	1	2
Fijar Normas	0,18	0,12
Establecer Significados	0,60	0,73
Enjuiciar	0,15	0,10
Intervenir	0,07	0,05

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En cuanto a la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Finalidades, podemos ver que tanto en la primera como en la segunda etapa, dedicadas a la exposición del trabajo de una pareja de alumnos sobre el número π y a la exposición del trabajo de una pareja de alumnas sobre el número de Oro, respectivamente, la mayoría de las actuaciones están dirigidas a la construcción de conocimiento (en torno al 85% del total). En ambas etapas, bastante más notoriamente en la segunda, el número de actuaciones que provienen de los alumnos es superior al número de las que provienen de la profesora dentro de esta finalidad.

El resto de las actuaciones se dedican a gestionar el desarrollo del contenido y el trabajo de clase. En la primera exposición hay bastante equilibrio entre ambos tipos de gestión, y las actuaciones provienen en su mayoría de la profesora. En la segunda, el número de actuaciones destinadas a la gestión de la discusión es mayor y proviene en su mayoría de las alumnas, mientras que la gestión del trabajo en clase sigue estando en manos de la profesora, aunque el porcentaje dentro de las actuaciones totales sea muy pequeño).

Por lo que respecta a las finalidades particulares, dentro del apartado correspondiente a construcción de conocimiento, se observa que en ambas exposiciones, la mayoría corresponde a manifestación de comprensión por parte de los alumnos, pero con respecto a sesiones de interacción anteriores se nota un aumento de actuaciones destinadas a indagar significados por parte de los niños y, sobre todo en la segunda exposición, un incremento notable en la valoración de ideas; este aumento de iniciativa de los alumnos en actuaciones como preguntar y valorar puede ser debido al hecho de que el conocimiento fuera puesto en juego por otros compañeros, a los cuales no se suponía el nivel de autoridad en el terreno conceptual de la profesora.

Sin embargo, si atendemos a la distribución de las actuaciones según los tipos generales, observamos un descenso considerable en el apartado correspondiente a fijar normas con respecto a las sesiones habituales. En las dos exposiciones, la parte fundamental de las actuaciones corresponde a establecer significados. Este descenso en el apartado de fijar normas, con el consiguiente aumento del apartado de establecer significados, puede dar idea del nivel de madurez y el clima respeto con el que los alumnos han actuado durante las exposiciones de los compañeros. En los apartados de enjuiciar e intervenir se mantiene la tónica que viene siendo habitual.

Por lo que respecta a la categoría Clima de Aula, el nivel de distorsión es uniforme en las dos exposiciones y se sitúa en torno al 14% del total de actuaciones categorizadas.

V. 2. 9 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación 2

En la Etapa de Planificación hicimos la presentación de las diferentes cuestiones de investigación para cada uno de los Focos o subobjetivos de nuestro estudio. En el apartado III.3.3 se presentan las cuestiones correspondientes al segundo Foco y, entre ellas, se encuentran las cuestiones correspondientes a la Fase de los números irracionales y los números Reales, para la que se enuncian un total de ocho cuestiones (de la II-8 a la II-15). Las cuestiones II-10 y II-11 corresponden al estudio de la sobreyectividad de la aplicación de los números reales en la recta numérica; estas dos cuestiones constituyeron en la Etapa de Implementación la denominada Cuestión de Investigación 2, que es una Cuestión de Investigación específica (ver tabla 5.3, pg. 251) centrada en el estudio de la sobreyectividad de la mencionada aplicación entre el conjunto de los números estudiados y la recta numérica.

Instrumento:

El instrumento elaborado consta de 2 preguntas, la primera con 5 apartados y la segunda con 2; estas dos preguntas se presentaron como cuestiones II-10 y II-11 en el apartado III.3.3 mencionado. Los correspondientes enunciados se presentan a continuación, junto con las escalas elaboradas para el estudio de las respuestas de los alumnos.

-Características e implementación:

La Cuestión de Investigación 2 (CI2) se pasó a los alumnos el 25-2-94, quiénes comenzaron a contestarla en clase individualmente y por escrito y finalizaron su contestación fuera de la hora lectiva. El 1-3-94 se recogieron los trabajos de los alumnos y, seguidamente, se realizó la Puesta en Común sobre esta Cuestión de Investigación.

-Objetivos:

-Para la pregunta 1: Explorar la comprensión de los alumnos sobre la correspondencia números reales-puntos de la recta. Para valorarla tendremos en cuenta los puntos que se especifican en los criterios y escalas para la comprensión del contenido.

-Para la pregunta 2: Observar cómo discriminan los alumnos entre los distintos tipos de expresiones decimales infinitas correspondientes a los Números Reales:

-En el ámbito Numérico

-En el ámbito Geométrico

V. 2. 9. 1 Criterios que concretan las Unidades de Análisis

-Pregunta 1:

1. Manejo de la correspondencia números reales-puntos de la recta en términos de aplicación por parte de los alumnos.

Valoraremos la asignación de un punto de la recta a los Números Reales aparecidos en el trascurso del proceso didáctico, según la tipología establecida a partir de las especificidades de las distintas expresiones decimales en cuanto a su representación gráfica (prescindiremos de los racionales cuya representación decimal es finita, por haberse realizado ya bastantes exploraciones al respecto).

Asímismo, valoraremos el procedimiento mediante el cual se realiza la asignación.

-Decimales Periódicos:

a) Fracciones cuya expresión decimal es periódica

-Decimales Infinitos No Periódicos:

b) Irracionales construibles: raíces cuadradas

c) Irracionales no construibles pero correspondientes a proporciones: π.

d) Irracionales de creación arbitraria.

2. Manejo de la correspondencia números reales-puntos de la recta como una aplicación bien definida. Para valorarla tendremos en cuenta la asignación de un mismo punto de la recta a las distintas representaciones (decimal y notación numérica habitual) del mismo número real

3. Manejo de la correspondencia números reales-puntos de la recta como una aplicación inyectiva. Para valorarla tendremos en cuenta:

- Asignación de el mismo punto de la recta a la representación habitual de los irracionales y a su expresión infinita, no a ninguna de sus aproximaciones finitas.
- Comprensión de que a los puntos correspondientes a los irracionales no puede corresponderle ninguna fracción (en contra de lo que podría suponerse debido a la

creencia mayoritaria en los alumnos de la conmensurabilidad de todas las longitudes).

- Pregunta 2:

Diferencias establecidas por los alumnos entre los distintos tipos de expresiones decimales infinitas correspondientes a los Números Reales:

-En el ámbito Numérico

-En el ámbito Geométrico

V. 2. 9. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

Los criterios que hemos enumerado para las preguntas de la cuestión de investigación tienen diferentes apartados que pueden observarse y, por cada uno de ellos, hemos elaborado una escala de valoración. Pasamos a presentar estos apartados con sus correspondientes escalas.

Pregunta 1:

a) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a 0,6666...?¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

b) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a $\sqrt{3}$ = 1,7320508...?¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

c) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a π = 3,14159...?¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

d) ¿Existe un punto en la recta correspondiente a 0,1234567891011...?¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

e) ¿Existe un punto en la recta correpondiente a 2,149875936508....?¿Puedes dibujarlo? Indica cómo.

Para cada apartado de la pregunta valoraremos las respuestas de los alumnos sobre los siguientes puntos:

-Existencia de un punto de la recta para la notación numérica dada **(E)**:

1. Sí
2. No
3. No sabe-no contesta

-Razones con las que argumentan su respuesta a la Existencia **(R)**:

SI:

1. Los racionales están en la recta.
2. Todos los números están en la recta.
3. Otras.
4. No da razones (además de la representación gráfica)

NO:

1. No proviene de un radical (y/o fracción). No proviene de operaciones: 1´.
2. Es infinito no periódico.

3. Es infinito.
4. Otras.
5. No da razones (además de la representación gráfica)

-Método de Dibujo o representación en la recta de los números en cuestión **(D)**:

apartado a), decimal periódico:

1. Pasar a fracción y dibujar la fracción. Si lo hace mal: 1´.
2. Indica que sólo se puede aproximar.
3. Lo dibuja aproximado, pero sin indicar que es una aproximación.
4. Otras

apartado b), radical cuadrático:

1. Construye un cuadrado de área 3 y traslada el lado. Si lo hace mal: 1´. Si no toma la misma unidad en la recta y en el lado del cuadrado o no puede saberse si el alumno tienen claro ese aspecto: 1u.
2. Indica que sólo se puede aproximar.
3. Dibuja el cuadrado pero piensa que es una aproximación.
4. Lo dibuja aproximado, pero sin indicar que es una aproximación.
5. Otras.

apartado c), número π:

1. Construye la circunferencia de diámetro unidad e indica que trasladaría a la recta la medida de la longitud.
2. Indica que sólo se puede aproximar.
3. Lo dibuja aproximado, pero sin indicar que es una aproximación.
4. Otras.

apartado d), irracional con criterio para sus cifras:

1. Indica que sería un punto a donde convergieran las aproximaciones sucesivas.
2. Indica que sólo se puede aproximar.
3. Manifiesta que podría representarse si diera la casualidad que proviniera de un radical, y en caso contrario no.
4. Lo dibuja aproximado, pero sin indicar que es una aproximación.
5. Otras.

apartado e), irracional sin criterio para sus cifras:

1. Indica que sería un punto a donde convergieran las aproximaciones sucesivas.
2. Indica que sólo se puede aproximar.
3. Manifiesta que podría representarse si proviniera de un radical, y en caso contrario no.
4. Lo dibuja aproximado, pero sin indicar que es una aproximación.
5. Otras.

Pregunta 2:

a) ¿Qué DIFERENCIAS encuentras en la escritura numérica y el origen de las expresiones decimales anteriores?
b) ¿Qué DIFERENCIAS encuentras en la representación en la recta de las expresiones decimales anteriores?

Para cada apartado de la pregunta valoraremos las respuestas de los alumnos sobre los siguientes puntos:

-Diferencias en la Escritura Numérica **(DEN):**

1. Hace todas las discriminaciones: Periódicos-Infinitos no periódicos, y dentro de éstos, los prodecentes de un cálculo*, y los arbitrarios y sin regularidad en sus cifras. Y argumenta bien las características de cada grupo.
*Si discriminan entre entre raíces y π por venir de sitios distintos, lo señalaremos con 1´.
2. Igual que la categoría 1, pero no argumenta bien.
3. Hace todas las discriminaciones pero no discrimina entre los de cifras arbitrarias**. Y argumenta bien las caracterísitias de cada grupo.
**Si discriminan entre entre raíces y π por venir de sitios distintos, lo señalaremos con 3´.
4. Como en la categoría 3, pero no argumenta bien.
5. Sólo distingue entre periódicos e infinitos no periódicos.
6. No discrimina entre periódicos y no periódicos, sino que se fija en algún rasgo de los no periódicos (y distingue éstos de los arbitrarios o de invención).
7. Alude a que son distintos, pero no explicita diferencias.
8. Otras.
9. No sabe-no contesta.

-Diferencia en la Representación Gráfica **(DRG):**

1. Discrimina entre Racionales - Irracionales construibles* - Irracionales no construibles. O entre Construibles (Racionales, raíces y π*) y No construibles.
* Si se refiere a las distintas construcciones, lo señalaremos con 1´.
2. Igual que la categoría 1 pero incluye a π en los no construibles. O no alude a él (en este caso, lo señalaremos con 2´).
3. Discrimina entre Racionales (periódicos) e Irracionales (infinitos no periódicos).
4. Discrimina entre Racionales (periódicos) y radicales o raíces.
5. Alude a que tienen distintas representaciones en la recta, pero no explicita ninguna.
6. No discrimina.
7. Otras.
8. No sabe-no contesta.

V. 2. 9. 3 Resultados de la Cuestión de Investigación 2

-Pregunta 1:

Estudiamos para cada uno de los apartados de la Pregunta 1 la relación entre la Existencia del punto por cada número considerado, el Razonamiento utilizado para justificarlo y el tipo de Dibujo propuesto para obtener la representación. El total de alumnos sobre el que se ha realizado el recuento de frecuencias para todos los apartados es de 29. De los 32 alumnos que componen el curso, hay 2 ausentes y 1 alumna que copia la actividad.

a) Representación en la recta de Decimales Periódicos (0,66666...)

Tabla 5.39: Representación en la recta de Decimales Periódicos.

E	**sí**				**no**					**nc**		**D**			
R	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**			**1**	**2**	**3**	**4**
	2	(1)	1*	23	0	0	0	1	0			16			
T	27				1					1		+6´	4	0	3

Resultados:

Casi todos los alumnos (93%) piensan que los decimales periódicos (concretamente 0,6666....) tienen su punto correspondiente en la recta. La mayoría no da argumentos verbales (simplemente lo dibuja); entre los argumentos verbales dados por los alumnos está el de que "todos los números racionales tienen su punto en la recta"; otro alumno expone el argumento de que "todo punto de la recta tiene su número", es decir, contesta a la sobreyectividad de la correspondencia números-puntos de la recta y no a si ésta es una aplicación.

Sólo un alumno responde que no existe ningún punto en la recta correspondiente a 0,6666...., la razón que aduce es que "el decimal periódico no se puede representar exactamente, aunque sí su fracción). Tal como está formulada la pregunta, no podemos decir que el alumno establezca una disociación entre dos representaciones de un mismo número. Otro alumno no contesta.

En cuanto al método de representación, hemos de señalar que sólo un 55% de los alumnos representa correctamente 0,6666... en la recta, es decir, le asigna el punto exacto que le corresponde. El resto dibuja aproximaciones, indicando o no explícitamente que lo sean.

b) Representación en la recta de Irracionales Cuadráticos ($\sqrt{3}$):

Tabla 5.40: Representación en la recta de Irracionales Cuadráticos.

E	sí				no					nc		D				
R	1	2	3	4	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5
	0	1+ (1)	0	19	0	2	2	0	1			11+ 1´				
T	21				5					3		+5u	5	2	0	1

Resultados:

El número de alumnos que piensan que existe un punto en la recta correspondiente a los irracionales construibles (concretamente √3) decrece algo (72%). La gran mayoría de ellos tampoco da argumentos verbales, sino que representa el número en la recta.

Aumenta el número de alumnos que piensan que no existe un punto en la recta correspondiente a los irracionales construibles (17%), y las razones aducidas se refieren a la infinitud de sus cifras. Un 10% no sabe (o no contesta) a esta cuestión.

En cuanto al método de representación, la mayor parte de los alumnos (59%) construyen un cuadrado de área 3 y trasladan el lado; 1 alumno lo hace mal y un 17% no toma la misma unidad en la recta y en el lado del cuadrado, a pesar de haberse tratado esta cuestión explícitamente en clase.

Otro 17% del total de alumnos indica que √3 sólo se puede representar mediante aproximaciones y un 7% de los alumnos representa √3 mediante el método de trasladar el lado del cuadrado de área 3, pero parece ser que piensan que es una aproximación.

De todas formas, el hecho de que la representación exacta de √3 en la recta haya sido un tema específicamente tratado en clase como contenido nuevo, parece influir bastante en el porcentaje de respuestas correctas de los alumnos.

c) Representación en la recta de Decimales Infinitos No Periódicos que provienen de una proporción (π):

Tabla 5.41: Representación en la recta de Decimales Infinitos No Periódicos que provienen de una proporción (π).

E	sí				no					nc		D			
R	1	2	3	4	1	2	3	4	5			1	2	3	4
	0	4+ (1)	0	2	5+ 3´	9	2	4	0			1	9+ 1*	0	2+ (2)
T	7				18 ^					4					

^Algunos alumnos dan más de una razón

Nota.- Todos los alumnos que dice que existe el punto dibujan, y también algunos (8 en total) de los que afirman que no existe.

Resultados:

Cuando se trata de los irracionales no construibles que provienen de una proporción y que se han trabajado extensamente en clase (como el número π), la proporción de alumnos que piensan que no existe un punto en la recta que le corresponda aumenta considerablemente: un 62% del total, frente al 24% que piensan que sí existe. Un 14% no saben o no contestan.

Los alumnos que justifican verbalmente su respuesta afirmativa (17%) se basan en la identificación número-punto, y afirman que todos los puntos tienen su sitio en la recta (esta razón aparece en una proporción más escasa en apartados anteriores).

Los dos argumentos mayoritarios esgrimidos por los que responden negativamente a la cuestión son el hecho de que no provenga de operaciones (27%), y el que sus cifras sean infinitas y no periódicas (38%).

Por lo que respecta a la representación gráfica de π en la recta, sólo una alumna construye una circunferencia con diámetro la unidad de la recta e indica que trasladaría a la recta la medida de la longitud de la circunferencia, aún cuando este tema fue tratado en clase. El resto dibuja, en su mayoría, aproximaciones.

d) Representación en la recta de irracionales cuya expresion decimal sigue un patrón:

Tabla 5. 42: Representación en la recta de irracionales cuya expresion decimal sigue un patrón.

E	sí				no					nc		D				
R	1	2	3	4	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5
	0	5	0	1	4+ 2´	10	0	0	7			0	8	5	2	1+ (1)
T	6				20					3						

Nota.- Todos los alumnos que dice que existe el punto dibujan, y también algunos de los que afirman que no existe.

Resultados:

Las proporciones en las repuestas de los alumnos sobre la existencia de un punto correspondiente a los irracionales representados por decimales de infinitas cifras construidos siguiendo un patrón son muy similares a las de los irracionales no construibles que provienen de una proporción. No existe: 69%, sí existe: 21%. Un 10% no sabe o no contesta.

Casi todos los alumnos que afirman que existe el punto en cuestión, lo hacen sobre la base de la identificación número-punto, y afirman que todos los puntos tienen su sitio en la recta. La razón mayoritaria (34%) utilizada por los alumnos que afirman que no existe tal punto es, de nuevo, la infinitud (y no periodicidad) de las cifras. También un 21% aduce que los decimales de este tipo no provienen de ninguna operación.

Por lo que respecta a la representación en la recta, la mayoría lo hace mediante aproximaciones (indicando o no que lo sean): 34%. También es importante señalar que un 17% de los alumnos manifiesta que podría representarse "si diera la casualidad que proviniera de un radical ; en caso contrario, no".

e) Representación en la recta de irracionales de procedencia desconocida y cuya expresión decimal no sigue un patrón:

Tabla 5. 43: Representación en la recta de irracionales de procedencia desconocida y cuya expresión decimal no sigue un patrón.

E	sí				no					nc		D				
R	1	2	3	4	1	2	3	4	5			1	2	3	4	5
	0	4+ (1)	0	1	2	9	1	2	7			0	8	4	2	1
T	6				21					3						

Nota.- Todos los alumnos que dice que existe el punto dibujan, y también algunos de los que afirman que no existe.

Resultados:

No hay variaciones significativas con respecto al apartado anterior, salvo quizás que decrece el número de alumnos que argumentan que no existe un punto correspondiente al decimal en cuestión porque no proviene de una operación, y aumenta ligeramente el número de los que dicen que es infinito o dan otras razones.

Resultados globales para la Pregunta 1:

Casi todos los alumnos piensan que existe punto en la recta correspondiente a los decimales periódicos (aunque sólo un 55% lo representa correctamente). Una parte importante de los alumnos (72%) piensa que existe un punto en la recta correspondiente a los irracionales construibles, y asignan correctamente el punto al número en cuestión en una proporción similar al caso de los racionales.

Sin embargo, al tratarse de los irracionales no construibles, aunque provengan de una proporción, como es el caso del número π, se produce una inversión en las respuestas de los alumnos: la proporción de alumnos que piensan que no existe un punto en la recta que le corresponda aumenta considerablemente: un 62% del total, frente al

24% que piensan que sí existe. A pesar de que en clase se trató el tema de cómo podríamos resentar la longitud π en la recta, a través de una circunferencia de diámetro la unidad, sólo una alumna recoge esta idea en su respuesta; al resto de los alumnos parece no haberles sido significativo.

Esta inversión en la proporción de respuestas se acentúa ligeramente en el caso de los irracionales representados por decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias, no hay distinción entre que sigan un patrón o no lo sigan. No existe: 69%, sí existe: 21%. En cualquier caso, los alumnos afirman que sólo se pueden representar aproximaciones.

Las razones más importantes aducidas por los alumnos para negar que existan puntos en la recta correspondientes a los irracionales no construibles es la infinitud de sus cifras y también que éstos no provengan de operaciones, incluidas las raíces cuadradas. En cuanto a las razones para justificar respuestas afirmativas, es interesante señalar que en varias ocasiones, los alumnos se basan en una identificación número-punto y afirman que todo punto tiene su lugar en la recta.

-Pregunta 2:

Tabla 5.44

D E N									D R G							
1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8
2´	0	1+ (2) +2´ +1*	1´	2	3	1	0	17	1´+ 1´*	2+ 3´	0	1+ 1E	2+ (1)	2	3	14

Resultados:

A la hora de discriminar entre las diferencias de los decimales infinitos anteriores (periódicos y no periódicos: provenientes de una operación, o de una proporción, o con cifras arbitrarias, con o sin regularidad), la mayor parte de los alumnos: 59%, deja la pregunta sin contestar. Sólo 2 alumnos (7%) hacen todas las discriminaciones correctamente.

Un 24% hacen bien las discriminaciones, pero no distinguen, dentro de los decimales con infinitas cifras arbitrarias, los que siguen un patrón de los que no lo siguen. Otro 7% de los alumnos sólo discriminan entre decimales periódicos e infinitos no periódicos, y un 10% no discrimina entre periódicos y no periódicos, sino que se fija en algún rasgo de los no periódicos (y en algunos casos, distingue éstos de los arbitrarios o de invención).

No nos estamos refiriendo en este caso a la constructibilidad con regla y compás, sino a que los alumnos dispongan de algún método para construir los números en cuestión.
Por lo que se refiere a la discriminación en el terreno de la representación gráfica (Construibles: racionales e irracionales construibles / No Construibles: irracionales no construibles), un 24% de los alumnos hacen esta discriminación. Si bien, el caso de π es considerado algunas veces como construible y otras como no construible.
El resto de los alumnos discrimina entre racionales e irracionales (7%), o entre racionales y raíces (10%); aunque uno de los niños de este grupo cree que π viene de una fracción (longitud de la circunferencia / Diámetro), o aluden a que tienen distintas representaciones en la recta pero no explicitan ninguna, o no discriminan (7%). Un 48% de los alumnos no contesta a la pregunta.
En suma, una gran parte de los alumnos deja la cuestión sin contestar.
Una proporción bastante escasa de alumnos discrimina correctamente, tanto en el ámbito de la notación numérica como en el ámbito de la representación gráfica, y el resto hace discriminaciones primitivas (especialmente entre racionales e irracionales. Debido a que el ejercicio anterior se refiere al ámbito de la representación gráfica, hay un aumento en la calidad de la discriminación en este aspecto de las diferentes expresiones numéricas por parte de los alumnos.

V. 2. 9. 4 Estudio de la Interacción Didáctica en la Cuestión de Investigación 2

Aspectos relacionados con la Comprensión:

La Puesta en Común, llevada a cabo después de que los alumnos hubieran contestado la Cuestión de Investigación 2 y entregado sus respuestas, aparece transcrita en el Anexo V.3. A partir de dicha transcripción se observaron los siguientes puntos de interés en lo que respecta a la comprensión de los alumnos:

-<u>Los alumnos en un principio no parecen tener claro que la unidad del cuadrado de área tres unidades cuadradas que hay que construir para representar en la recta $\sqrt{3}$, trasladando la longitud de su lado, ha de ser la misma que la unidad marcada en la recta; al final parece quedar clara la cuestión:</u>

"(P) ¿Os acordáis que hacíamos un cuadrado de área 3? 3 ¿qué? ¿centímetros?

(A) 3 unidades

(P) ¿3 unidades de cuáles?

(...)

(A) De las que quieras

(P) Pero 3 unidades, ¿qué unidades? ¿3 palmos?

(A) 3 unidades cuadradas.

(...)

(A) ... la misma unidad de la recta.

(A) Que cojas de unidad para hacer el cuadrado, en lugar del centímetro, la unidad de la recta, y coges ...

(P) ¿Eso se entiende o no?

(A) Sí"

-El que una expresión decimal infinita se represente exactamente a través del lado de un cuadrado o de un radical plantea un dilema para los alumnos. Hay posturas a favor de que dicha representación es viable y otras en contra. Las posturas a favor se apoyan en la analogía con las fracciones y los decimales periódicos; las posturas en contra se basan en que no es posible construir un cuadrado que tenga área 3 exactamente, porque no puede tener lados finitos y acabados, cuando la expresión decimal correspondiente al lado es infinita:

"(P) ¿Y qué le pasa a la expresión decimal con respecto de este radical?¿Está cerca? ¿Sería la misma, o cómo?/ Pues pasa lo mismo que con los periódicos puros y las fracciones./¿Qué pasa?

(A) Que sí esa fracción representa a ese periódico puro exactamente, pues ese radical representa a ese decimal exactamente.

(P) ¿A todo el decimal?

(A) Exacto. Aunque sea infinito.

(P) ¿Esto se entiende o no?

(A) No, no

(A) Yo no lo entiendo, yo no lo entiendo.

(...)

(P) Por orden,/ un momento, a ver./Javier y Ramón dicen que es que el cuadrado de área 3 nunca no lo puedo pintar exacto.

A: No, no lo puedes pintar exacto

(...)

(P) ¿Por qué, Pablo, tú crees que no se puede dibujar?

(A) Porque como no es exacto, no es exacto lo que mide, siempre va a haber una desigualdad entre sus lados, aunque sea muy pequeña.

(P) ¿Cómo que no es exacto...

(A) En realidad no es exacto.

(...)

(A) Si hay infinitos decimales en la recta no lo puedes representar porque si hay infinitos...

(P) No paras y no paras que cada vez te acercas más aquí al filillo, pero ese punto nunca terminas de ponerlo.

(A) Claro."

-Los alumnos se resisten, a nivel intuitivo a considerar análogo el caso de los decimales periódicos-fracción con el caso de los infinitos no periódicos-radical, a causa de las siguientes razones:

.El periodo es controlable.

.El periodo no es una aproximación de su fracción. En cambio, √3 es exacto pero su expresión decimal, no. Son dos cosas distintas.

*.El dibujo de un cuadrado de área 3 no puede ser exacto, porque acumula errores en la construcción.

.Separación entre la construcción en el plano físico y la construcción ideal.

.Discusión:

El lado mide √3 exactamente en la mente	"Es distinto un infinito de un exacto" también en la mente
Analogía con fracciones-dec. periódicos*	Rechazo de la analogía
Teorema de Pitágoras	El teorema de Pitágoras puede aproximar
Aceptación de la analogía* Extensión de la analogía* al terreno de las Operaciones: analogía fracciones-raíces, en lugar de decimales infinitos	Rechazo de la analogía

(Ver el segmento señalado mediante paréntesis en negrita que comienza un poco antes del minuto 0:19, en la transcripción correspondiente a la fecha 1-3-94).

-La profesora intenta aprovechar el número π para que sirva de puente entre el caso de irracionales claramente construibles para los alumnos y el caso de irracionales no construibles. Para ello pretende llamar la atención sobre los encajes sucesivos de las aproximaciones decimales y la convergencia hacia el punto que correspondería a la medida de la longitud de la circunferencia de diámetro unidad con respecto a dicho diámetro. Sin embargo, como se verá en apartados posteriores, los alumnos no captan esta intención, sino que algunos piensan en la existencia de el punto que corresponda a π que correspondería a la medida de la longitud de la circunferencia de diámetro unidad, y otros no tienen clara esta cuestión y sostienen, correctamente, que las aproximaciones decimales son sólo aproximaciones, pero no avanzan de este punto:

"(P) ¿Dónde está π ?

(A) Entre el 3,1 y el 3,2

(P) Entre el 3,1 y el 3,2

(A) Entre el 3,14 y el 3,15

(A) ...

(P) Un momento./ ¿Está claro que aquí podemos ir encajando...

(A) Sí, pero ...

(P) Pero cada encaje de aquí. Este número ¿es π?

(A) No

(A) Es una aproximación.

(P) Y éste, ¿es π?

(A) No

(P) Y si tiene 20.000 cifras ¿es π?

(A) No"

-<u>Hay alumnos que piensan que es posible localizar un punto en la recta correspondiente al número π: dicho punto correspondería a trasladar la longitud de la circunferencia. En principio no está claro si esa circunferencia podría ser cualquiera, pero luego se logra establecer que sería la circunferencia de diámetro la unidad de la recta, ya que esa longitud mide π por el diámetro (aunque este resultado no parece comprensible para la mayoría de los alumnos):</u>

"(P) Pero ¿existe un punto que corresponda exactamente a π?

(A) No, no

(A) Como la raiz. Por ejemplo, mides la circunferencia con un portalápiz y pones la medida, y eso ya sería π según el teorema.

(P) A ver, mido la circunferencia.(Dibujo circunferencias de distinto tamaño en la pizarra)/ ¿Esta, o ésta, o cuál?

(A) La que te dé la gana.

(....)

(P) Si cojo una circunferencia, la longitud ¿qué mide?

(A) ¿La longitud?, ¿la longitud?

(P) Mide π por el diámetro,/ ¿no?

(A) Sí

(P) Si yo cojo la circunferencia, la longitud de la circunferencia mide π por su diámetro, ¿sí o no?

(A) Sí

(P) Bueno, pues entonces, decía Katerina: yo me parto la circunferencia y me la traslado ahí./ ¿Cualquier circunferencia? ¿Una chica?/ Porque una chica no tiene la misma longitud que una grande./¿Cuál es la que cojo?

(A) El radio tendría que ser la misma unidad de esa, ¿no?

(P) ¿Qué es lo que tendría que ser la misma unidad que esa? El radio o el diámetro?, ¿cuál?

A: Sería el diámetro.

(P) Si el diámetro es una unidad, pues la longitud de la circunferencia mide π unidades, y yo cojo y me la traslado. La corto por aquí y me la traslado.

(A) Murmullo.

(P) ¿Eso lo entendéis o no? (Creo que están perplejos)".

-Sin embargo, hay alumnos que no conciben la Longitud como razón con la unidad de medida: según ellos, la longitud correspondiente a π no puede hallarse porque no puede realizarse la operación aritmética que prescribe la fórmula, ya que habría que multiplicar por un número infinito:

"(P) Ahora dice Marta que un número no se puede multiplicar por π, porque π como tiene infinitas cifras no periódicas, pues π no se puede multiplicar por un número.

(A) ...

(A) Es que una aproximación es 3,14, pero lo que es/

(A) ... no se puede multiplicar.

(P) ¿Y vosotros no habéis visto nunca 4π?/ ¿Esto qué quiere decir?

(A) 4 veces π, pero nunca pondré el resultado..

(A) Lo simplificamos.

(P) Porque el resultado, fijaros que en Matemáticas... En Física sí cortan el π, ponen 3,14, pero en Matemáticas ponen 4π. Porque la expresión de π, la podéis poner a mano, la decimal.

-Se plantea la cuestión de si π = Longitud de la circunferencia/ Diámetro es una fracción. Se aclara que hay razones que no pueden expresarse en forma de fracción: se establece la analogía con la razón entre diagonal y lado en el cuadrado de área 2:

"(P) ¿π tiene una fracción?

(A) No, no

(A) ...

(A) Pero no sería exacta.

(P) Si es una fracción ... Pablo, π es la razón entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

(A) Entonces es una fracción.

(P) Es una fracción siempre que aquí hay un número entero y aquí otro número entero.

(A) ah

(P) Si yo puedo poner esto como un número entero aquí arriba y un número entero aquí abajo, ¿qué le pasa a su expresión decimal?

(A) Que será periódica.

(...)

(P) A ver, π es la relación entre la longitud de la circunferencia y el diámetro, pero estáis cansados de leer que esa relación no es una fracción, porque tiene infinitas cifras no periódicas."

-Cuando en el caso de los decimales infinitos no periódicos no construibles, la profesora intenta retomar la intención expresada con motivo del número π de llamar la atención de los alumnos sobre la convergencia de los encajes sucesivos, éstos sólo centran su atención en que las aproximaciones son aproximaciones y la existencia de un punto correspondiente al número no viene determinada por una construcción:

"(P) ¿Y donde van los decimales? ¿A dónde van? ¿Qué hacen? ¿Cada uno para un lado?

(A Entre 0,1...

(P) Entre 0,1 y 0,2. Entre 0,12 y 0,13.

(A) 0,13

(P) Y ahora cogemos una lupa, y vamos encajando. Y esto, ¿hacia dónde va?

(A) Aproximando

(A) ...

(P) ¿A qué me aproximo? ¿A qué?

(A) Nunca llega

(P) ¿A este número?

(A) Sí, pero nunca llega.

(A) Pero ¿qué número es ese?

(A) Si no lo sabemos, si no sabemos su representación; eso no viene del π ni de las raíces cuadradas, no sabemos nada."

-Análisis de las actuaciones:

El análisis de la interacción didáctica que tuvo lugar en la Puesta en Común sobre la Cuestión de Investigación 2 se realiza a partir de la grabación en vídeo de la sesión correspondiente (1-3-94), mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica descritas en el capítulo 3. La transcripción de dicha grabación en vídeo aparece en el Anexo V.3.

A continuación presentamos un esquema del desarrollo de la sesión, seguido del análisis de la misma mediante las Unidades de Análisis de la Interacción Didáctica.

-Etapas de la interacción estructuradas según los contenidos:

Puesta en común:

Existencia y localización en la recta de los puntos correspondientes a

1. Decimales Periódicos (0,666...):

-A través de la fracción correspondiente.

-Distinción entre 0,6 y 0,666....

2. Raíces Cuadradas Irracionales ($\sqrt{3}$):

2.1. Existe un punto en la recta correspondiente a $\sqrt{3}$.

2.2. Para representarlo, hay que trasladar el lado de un cuadrado que mide 3 unidades cuadradas (construido en F17). Discusión de qué unidad.

2.3. La expresión decimal infinita, ¿se representa exactamente a través del lado del cuadrado o del radical?

-SI: Analogía con las fracciónes y su expresión decimal infinita.

-NO:

.No se puede construir un cuadrado de área 3 exactamente, porque no puede tener lados finitos, acabados, cuando la expresión decimal de la longitud correspondiente al lado es infinita.

.Los alumnos se resisten, a nivel intuitivo a considerar análogo el caso de los decimales periódicos-fracción con el caso de los infinitos no periódicos-radical:

.El periodo es controlable.

.El periodo no es una aproximación de su fracción. En cambio, $\sqrt{3}$ es exacto pero su expresión decimal, no. Son dos cosas distintas.

*.El dibujo de un cuadrado de área 3 no puede ser exacto, porque acumula errores en la cônstrucción.

-Separación entre la construcción en el plano físico y la construcción ideal. .Discusión:

El lado mide $\sqrt{3}$ exactamente en la mente	"Es distinto un infinito de un exacto" también en la mente
Analogía con fracciones-dec. periódicos*	Rechazo de la analogía
Teorema de Pitágoras	El teorema de Pitágoras puede aproximar
Aceptación de la analogía*	Rechazo de la analogía
Extensión de la analogía* al terreno de las Operaciones: analogía fracciones-raíces, en lugar de decimales infinitos	

3. Punto correspondiente a π :

3.1. Duda sobre la existencia de un punto en la recta correspondiente a π:

SI:

.Las sucesivas aproximaciones llegará un momento en que lo alcancen

.Se traslada la longitud de la circunferencia. ¿De cualquier circunferencia?

NO:

.Las aproximaciones siempre son aproximaciones

3.2. π es L/D. ¿Es una fracción?

.Si lo fuera, su expresión sería periódica.

.Hay razones que no pueden expresarse en forma de fracción. (Ej. la existente entre la diagonal y el lado del cuadrado).

3.3. Procedimiento de (localización de π en la recta), mediante el traslado de la longitud de una circunferencia, de diámetro la unidad de la recta, ya que esa longitud mide π por el diámetro. Los alumnos no conciben Longitud como razón con la unidad de medida. Según algunos, esa longitud no puede hallarse porque no se puede multiplicar por un número infinito.

3.4. Permanece la duda sobre si hay un punto en la recta que corresponda exactamente a π, aunque sí hay aproximaciones.

4. Decimales Periódicos con cifras arbitrarias:

-No tienen un punto en la recta, sólo aproximaciones.

-Ni siquiera vienen de un radical o de una operación.

-Las aproximaciones son sólo aproximaciones, nunca llegan... "a Nada", porque ese "número" no sabemos cuál es.

-Distintas opiniones sobre si estas expresiones decimales son números o no. Comparación con π.

-Resultados de la Cuestión de Investigación 2:

Tabla 5.45: Interacción didáctica sobre la Cuestión de Investigación 2.

Etapa / Categorías	1	2	3	4	Total
1.PO	0	16	2	2	20
1.PP	0	0	0	0	0
1.PE	0	0	0	0	0
1.PV	0	0	0	0	0
1.PA	0	2	0	1	3
1.AS	0	1	0	1	2
1.AP	0	0	0	0	0
1.AE	0	0	0	0	0
1.AV	0	0	0	0	0
1.AR	0	1	0	0	1
2.PO	2	4	4	2	12
2.PP	0	0	0	0	0
2.PE	0	0	0	0	0
2.PV	0	0	0	0	0
2.PI	1	1	1	0	3
2.AS	0	1	2	0	3
2.AP	0	0	0	0	0
2.AE	0	0	0	0	0
2.AV	0	0	0	0	0
2.AI	0	1	1	1	3
3.POC	0	2	2	0	4
3.PIS	9	68	28	18	123
3.PDC	1	34	23	6	64
3.PVI	3	15	5	4	27
3.PSC	1	3	0	0	4
3.AAI	5	103	37	31	176
3.AIS	0	7	9	1	17
3.AMC	3	29	10	0	42
3.AVI	0	25	9	4	38
3.AEC	0	0	0	0	0
Total	25	313	133	71	542
CA	3	28	18	8	57

Análogamente a como hemos procedido en el análisis de situaciones anteriores, presentamos dos tablas resumen de la anterior, en las que se agrupan las categorías de interacción didáctica según las finalidades generales consideradas en el apartado III.8 de esta memoria y según los tipos de actuaciones, respectivamente.

Tabla 5.46: Porcentajes de etapas y finalidades en la Cuestión de Investigación 2.

Etapa / Finalidades	1	2	3	4
1	0,00	0,06	0,02	0,06
2	0,12	0,02	0,06	0,04
3	0,88	0,92	0,92	0,90

Tabla 5.47: Porcentajes de las etapas y actuaciones en la Cuestión de Investigación 2.

Etapa / Actuaciones	1	2	3	4
Fijar Normas	0,28	0,40	0,35	0,51
Establecer Significados	0,52	0,44	0,53	0,35
Enjuiciar	0,12	0,13	0,11	0,11
Intervenir	0,08	0,03	0,01	0,03

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Finalidades, se observa que la frecuencia de actuaciones encaminadas a construir conocimiento se sitúa en torno al 90% en todas ellas. Salvo en la primera, dedicada a la discusión de la existencia de un punto en la recta correspondiente a un decimal periódico, hay un predominio del número de actuaciones que parten de los alumnos.

En la primera etapa, la mayor frecuencia de actuaciones de la profesora corresponde a la finalidad específica de indagar significados y, en los alumnos, a aportar información y mostrar comprensión. En la segunda, destinada a discutir la existencia de un punto en la recta correspondiente a una raiz cuadrada irracional, se mantiene una tónica similar, aunque aumenta el número de actuaciones de la profesora dirigidas a desarrollar comprensión (lo cual es lógico si pensamos que se trata de una cuestión polémica y nueva en este curso para los alumnos); por otra parte se observa un notable aumento en la valoración de ideas, sobre todo por parte de los alumnos, lo cual puede ser un indicador del interés que suscita para ellos este tema. En la tercera etapa, destinada a la discusión sobre la existencia de un punto correspondiente al número π, no se registran variaciones sustanciales respecto de la tónica observada en la etapa anterior. Y en la última etapa, correspondiente a un decimal infinito no periódico, sí hay una variación, que consiste en un aumento de las actuaciones de la profesora destinadas a indagar significados, que se corresponde con las numerosas actuaciones de aportación de información por parte de los alumnos; este último punto fue sin duda el más difícil de tratar y no fue posible establecer una discusión más a fondo.

La escasez de actuaciones destinadas a la sistematización de conocimientos vuelve a ponerse de manifiesto en todas las etapas, con ausencia total de las mismas en las dos últimas (correspondientes al tratamiento de decimales infinitos no periódicos, sobre los que, progresivamente, es más dificil decidir sobre la existencia o no de un punto en la recta que les corresponda).

En las actuaciones que tienen como finalidad la gestión, tanto del trabajo como del desarrollo discurso hay una fluctuación entre el predominio de acciones de uno u otro tipo según las etapas, y un claro predominio de las que provienen de la profesora.

Por lo que respecta a la distribución de frecuencias de interacción por etapas atendiendo a las Actuaciones Generales, podemos observar una vez más la tónica que viene siendo habitual en las sesiones de interacción didáctica sobre las cuestiones de investigación; esto es, la mayoría de las actuaciones (en torno a un 80 u 85%) corresponden a los apartados de fijar normas y establecer significados, y el resto, a los apartados de enjuiciar e intervenir, con un claro predominio del número de actuaciones correspondientes a enjuiciar.

Por lo que respecta a los dos primeros apartados, hay una superioridad del número de actuaciones correspondientes a establecer significados, salvo en la etapa final en la que se invierte esta tendencia; en cualquier caso, hemos de tener en cuenta que la mayor parte de las acciones de fijar normas parten de los alumnos y tienen como finalidad aportar información.

En el resto de los apartados predomina el número de actuaciones que provienen de la profesora, excepto en el apartado de valoración de ideas, en el que llama la atención la iniciativa tomada por los alumnos, especialmente en las etapas correspondientes a la discusión sobre la existencia de un punto en la recta correspondiente a raíces irracionales y al número πi; esto puede dar idea del interés que se suscita en los alumnos por tratarse de temas que han venido trabajando y que les resultan conflictivos (más que el caso de los racionales, aunque tengan expresión decimal periódica), y sobre los cuales han formado opiniones o han adquirido elementos que les permiten hacer valoraciones de ideas, de modo que la discusión puede mantenerse a un nivel más rico y profundo.

En lo referente a la categoría Clima de Aula, el nivel de distorsión se mantienen alrededor del 10% del total de segmentos categorizados, con ligeras variaciones entre las etapas.

V. 2.10 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación específica 1 (bis)

Realizadas las tareas anteriores, volvemos a plantear de nuevo la Cuestión de Investigación 1 (Cuestión de Investigación específica; ver tabla 5.3, pg. 251), en la que se pide a los alumnos que hagan una clasificación de los distintos tipos de expresiones decimales que conocen e indiquen su procedencia.

Con objeto de evitar una pérdida de información debido a la falta de sistemática y/o memoria en los alumnos en cuanto a los tipos de expresiones decimales aparecidos en el transcurso del proceso didáctico, efectuaremos en primer lugar una revisión de dichos tipos, para ver si los alumnos consideran que tales expresiones decimales corresponden a números y qué razones aducen para ello (Pregunta 1).

Instrumento:

1/ a) ¿Corresponde la expresión 9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

b) ¿Corresponde la expresión 0,9999... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

c) ¿Corresponde la expresión $\sqrt{2}$ =1,4142135... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

d) ¿Corresponde la expresión Número de Oro= $(1+\sqrt{5})/2$ = 1,618034... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

e) ¿Corresponde la expresión π = 3,14159... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

f) ¿Corresponde la expresión 1,0100100010000100... a un número? Justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

2/ a)¿Qué tipos de decimales infinitos conoces? Da ejemplos de cada uno y di de dónde surgen.

TIPO DE DECIMAL INFINITO	EJEMPLO	DE DONDE SURGE

b)¿Cualquiêr decimal infinito corresponde a un número? En el caso de que algunos lo sean y otros no, decir cuáles sí y cuáles no, y en todos los casos justifica tu respuesta lo mejor que puedas.

-Características del Instrumento e Implementación:

La Cuestión de Investigación 1 (bis) (CI1(bis)) se pasó a los alumnos para trabajarla en grupo y contestarla por escrito individualmente en una sesión de clase.

Después de que los alumnos hubieron contestado a la pregunta por escrito, se recogieron los trabajos y comenzó la Puesta en Común, que no concluyó debido a motivos de tiempo y de planificación con vistas a concluir el tema (Ver en el apartado de Implementación las notas correspondientes a la fecha 2-3-94)

-Objetivos:

Con esta Cuestión de Investigación pretendemos explorar si, como resultado del proceso didáctico:

1. Los alumnos han ampliado el espectro de las expresiones decimales que consideran posibles.
2. Los alumnos han construido criterios, o han modificado los que ya tenían, que les permitan aceptar o rechazar el que determinadas expresiones decimales respondan o no a una noción de número.

También pretendemos explorar:

3. Qué noción de Número Real han construido los alumnos sobre la base de los criterios anteriores y de la tipología establecida.

V. 2. 10. 1 Criterios que concretan las Unidades de Análisis

Para valorar la comprensión de los alumnos sobre estos puntos precisamos una serie de criterios que concretan las Unidades de Análisis de Comprensión de los alumnos sobre el contenido indicado. Dichas criterios son:

1. Consideración de los alumnos sobre el status de número de los siguientes tipos de expresiones decimales:

a) "Enteros con infinitas cifras"

b) Decimales periódicos

c) Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: raíces cuadradas

d) Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número π.

e) Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número de Oro

f) Decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias

2. Argumentos empleados y consistencia con la que se emplean para:

2.1. Otorgar status de número a distintas expresiones decimales.

2.1.a. Caso de los Decimales Periódicos;

2.1.b. Caso de los Decimales Infinitos No Periódicos;

2.2. Rechazar el status de número para algunas expresiones decimales:

2.1.a. Caso de los Decimales Periódicos;

2.1.b. Caso de los Decimales Infinitos No Periódicos.

3. Tipos de expresiones decimales infinitas:

3.1. Tipos distintos de expresiones consideradas por los alumnos

3.2. Ejemplos dados de los distintos tipos de expresiones decimales

4. Diferenciación entre los distintos tipos de decimales infinitos a partir de su procedencia

4.1. Decimales periódicos.

4.2. Decimales infinitos no periódicos:

a) Con las cifras determinadas.

b) Con cifras arbitrarias.

5. Comprensión del concepto de número real a partir de la tipología establecida y los criterios que confieren status de número:

5.1. Discriminación Racional-Irracional, a través de la notación decimal.

5.2. Distinción de tipos de irracionales, a través de la notación decimal.

5.3. Número de criterios empleados para otorgar carácter de número a los números reales, y consistencia con la que se emplean.

V. 2. 10. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

Pasamos a presentar los diferentes apartados que vamos a observar en cada pregunta, junto con la escala de valoración elaborada para cada caso. Las escalas para aceptar o rechazar el status de númerode las expresiones decimales y la de los tipos de expresiones son las ya utilizadas en el apartado V.2.4.2

Pregunta 1:

1. Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de las expresiones decimales consideradas en cada uno de los apartados **(EN)**:

1. Sí
2. No
3. No sabe-no contesta

2. Criterios empleados para:

2.1 Aceptar el status de número de expresiones:

Periódicas **(AEP)**

1. Criterios de escritura:
   a) Periodicidad de las cifras
   b) Posibilidad de nombrarlos (de representarlos mediante una fracción)
   c) Estar compuestos de cifras
   d) Otros
2. Carácter operatorio de los números:
   a) Los números surgen a partir de acciones; en el caso de los correspondientes a decimales periódicos, surgen a partir de: operaciones aritméticas o algebraicas (2a1); medida de longitudes (conmensurables con la unidad) u otras (2a2); otras (2a3).
   b) Con los número se realizan operaciones: aritméticas (2b1); construcción de medidas (2b2); otras (2b3).
   c) Otros
3. Motivos de representación: correspondencia con puntos de la recta [14]
4. Se otorga status de número sin explicitar motivo.
5. Otros.

Infinitas No Periódicas **(AEI)**:

1. Criterios de escritura:
   a) Regularidades y patrones para su control
   b) Posibilidad de nombrarlos
   c) Estar compuestos de cifras

[14] Esta correspondencia se realiza a través de la medida, pero no es obvio para muchos alumnos que la establecen de forma arbitraria una vez que ciertas expresiones han alcanzado para ellos el status de número por otros motivos.

d) Otras

2. Carácter operatorio de los números:

a) Los números surgen a partir de acciones; en el caso de los correspondientes a decimales infinitos no periódicos, pueden surgir a partir de: operaciones aritméticas o algebraicas (raíces cuadradas, resolución de ecuaciones, acceso a algoritmos de aproximación a partir del "nombre"...) (2a1), medida de longitudes (inconmensurables con una longitud unidad dada) u otras (2a2).

b) Con los números se realizan operaciones: aritméticas (2b1); construcción de medidas (2b2); otras (2b3).

c) Otros

3. Motivos de representación: correspondencia con puntos de la recta [15]

4. Se otorga status de número sin explicitar motivo.

5. Otros.

<u>2.2 Rechazar el status de número de expresiones:</u>

<u>Periódicas</u> **(REP)**:

1. Criterios de escritura:

a) Infinitud de las cifras

b) Otros

2. Carácter operatorio de los números:

a) Las expresiones decimales infinitas no corresponden a la medida de ninguna longitud.

b) En el caso de los "enteros con infinitas cifras": no proviene de operaciones y/o no se puede operar con ellos.

c) Otros

3. Motivos de representación: A las expresiones decimales infinitas no les corresponde ningún punto de la recta.

4. Se rechaza sin motivo.

5.Otros.

<u>Infinitas No Periódicas</u> **(REI)**

1. Criterios de escritura:

---

[15] Esta correspondencia se realiza a través de la medida*, pero no es obvio para muchos alumnos que la establecen de forma arbitraria una vez que ciertas expresiones han alcanzado para ellos el status de número por otros motivos.
*Para los construibles; ¿qué ocurre en el caso de los no construibles?

[4] Tanto para este número como para las raíces cuadradas, hay alumnos que explicitan que la representación exacta en la recta no se realiza a través de la expresión decimal, sino a través de la fraccionaria y de la raiz cuadrada, respectivamente. (Estos alumnos aparecen codificados con una R en el apartado de observaciones, y constituyen un 17%).

a) Imposibilidad de control sobre la escritura en el caso de las notaciones infinitas no periódicas.

b) Imposibilidad de nombrarlos.

c) Infinitud de las cifras. Imposibilidad de saber el final.

d) Otros

2. Carácter operatorio de los números:

a) Las expresiones decimales provienen sólo de la creación arbitraria, sin tener origen en una operación aritmética.

b) Las expresiones decimales no corresponden a la medida de ninguna longitud.

c) Otros

3. Motivos de representación: A las expresiones decimales no les corresponde ningún punto de a recta.

4. Se rechaza sin motivo.

<u>Pregunta 2:</u>

1.<u>Tipos distintos de expresiones decimales infinitas consideradas por los alumnos y ejemplos de cada tipo:</u>

<u>Tipos</u> **(T)**:

0. "Enteros con infinitas cifras" (de creación arbitraria, siguiendo un patrón o sin seguirlo)

1. Decimales Periódicos

a) (Decimales finitos)

b) Decimales periódicos puros*

c) Decimales periódicos mixtos

*Incluido el caso especial del periodo nueve.

2. Decimales Infinitos No Periódicos:

a) Con cifras determinadas:

1. Expresión decimal de raíces cuadradas

2. Expresión decimal de otros irracionales conocidos: π, número de oro, etc

b) Con cifras arbitrarias:

1. Siguiendo un patrón

2. Sin seguir ningún patrón.

<u>Ejemplos</u> **(E)**:

Se valorarán según la misma escala del apartado anterior.

2. <u>Diferenciación entre los distintos tipos de decimales infinitos a partir de su procedencia:</u>

2. 1. <u>"Enteros con infinitas cifras"</u>

1. De invención
2. Otras

2.2. Decimales Periódicos (**DP**):

1. Provienen de fracciones o divisiones.
2. Otras

2.3. Decimales Infinitos No Periódicos: (**INP**):

a) Con cifras determinadas:

1. Provenientes de un algoritmo para la resolución numérica de una ecuación (concretamente el caso de las raíces cuadradas en las ecuaciones de segundo grado, que son las únicas que trabajan los alumnos).
2. Provenientes de razones entre longitudes (inluye el caso de las raíces cuadradas, número de oro, π).
3. Otros. (Dentro de este apartado, incluímos el caso en que se atribuye a π la procedencia de la fracción; se señalará con 3´).

b) Con cifras arbitrarias:

1. Siguiendo un patrón
2. Sin seguir ningún patrón
3. Otras. (Si la respuesta es No sé, se codificará con NS).

3. Consistencia entre los tipos de decimales infinitos y los ejemplos dados (**CE**):

1. Hay coherencia entre los tipos de decimales mencionados y los ejemplos dados, sin ninguna otra observación al respecto.
2. Los ejemplos dados son más específicos que los tipos de números que el alumno discrimina.
3. El alumno pone menos ejemplos que los tipos de números decimales que ha mencionado.
4. El alumno equivoca los tipos de decimales que da y los ejemplos de los mismos.
5. Los ejemplos dados por el alumno permiten deducir que considera (algunos) subgrupos con categoría de grupos. Por ejemplo, pone al mismo nivel Decimales infinitos no periódicos y número π.

4. Nivel de discriminación entre los distintos tipos de decimales infinitos (**ND**):

1. Discrimina todos los tipos, tal como están especificados en el apartado1.
2. Discrimina entre decimales Periódicos y No Periódicos y, dentro de estos últimos, los subgrupos a y b, pero sólo menciona los subgrupos a su vez de uno de ellos (se indicará el subgrupo de los decimales infinitos no periódicos cuyos subgrupos se mencionen).
3. Discrimina entre decimales Periódicos y No Periódicos y, dentro de éstos, los dos subgrupos a y b, pero sin mencionar los subgrupos dentro de ellos.

4. Discrimina entre decimales Periódicos y No Periódicos y, dentro de éstos, subgrupos sueltos de los dos subgrupos a y b (pero sin referenciarlos dentro de ellos).
5. Discrimina entre decimales Periódicos y No Periódicos y, dentro de éstos, alguno de los dos subgrupos: a ó b.
6. Discrimina entre decimales Periódicos y No Periódicos y, dentro de éstos, algún subgrupo dentro de los subgrupos a ó b.
7. No discrimina.

Nota.- Si no hace diferenciación de los decimales periódicos puros y periódicos mixtos, lo codificaremos con el número del apartado al que pertenezcan y una ´.

V. 2. 10. 3 Resultados de la Cuestion de Investigación 1 (bis)

Los resultados generales obtenidos en esta cuestión de investigación aparecen en las Tablas 24 y 25 del Anexo V.2. Presentamos a continuación aquellos resultados que permiten establecer la red de conceptos y relaciones que tienen los alumnos en este momento de nuestro estudio, en relación con los distintos tipos de representaciones decimales infinitas que se utilizan para los números.

El recuento de datos se ha realizado sobre un total de 24 alumnos (de los 32 que componen el curso hay 2 ausentes y 6 copian), indicando las frecuencias para cada valor de la escala (en cada uno de los criterios anteriormente expuestos). No obstante, hemos de tener en cuenta que, de acuerdo con los criterios correspondientes a esta cuestión, un alumno puede situarse en más de un valor de la escala.

Pregunta 1:

a) Consideración de los alumnos sobre elestátus de número de los "Enteros Periódicos" (concretamente el caso de 9999...) y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.48: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los "Enteros Periódicos".

NO: 22						**SI: 2**	
1a	**1b**	**2a1**	**2b**	**3**	**5**	**1a**	**1c**
9	1+1E	1	16	5	2*	1	1*

Resultados:

-Un 92% de los alumnos piensa que los enteros con infinitas cifras (concretamente el caso de "9999....") no son números, frente al 8% que piensa que sí lo son.

-En el caso de los alumnos que piensan que sí son números, uno de ellos es un caso especial porque considera como números la primera expresión y la última, por estar formados de cifras, y no considera números a las raíces cuadradas o a π porque los considera operaciones; el otro alumno piensa que "9999..." es un número por la periodicidad de sus cifras.

-La razón más frecuente aducida por los alumnos (67%) para considerar que "9999...." no es un número es que no proviene de una operación y/o no se puede operar con él. Le sigue con una frecuencia del 37% el que no se pueda representar mediante una fracción. La razón de que no pueda representarse en la recta es considerada por un 21% de los alumnos. Es interesante destacar entre las razones clasificadas en el apartado de "Otras" la de una alumna, que dice lo siguiente: "en 0,999...puedes hacer una aproximación como 0,999 y no se diferencia mucho entre 0,999 y 0,9999, pero en 999... no es lo mismo 9 que 99 que 999, etc...". Pensamos que es muy interesante porque se acerca a la idea de convergencia de las aproximaciones decimales sucesivas en el caso de los decimales infinitos y a la divergencia en el caso de los supuestos "enteros con infinitas cifras".

b) Consideración de los alumnos sobre el status de número de los Decimales Periódicos (concretamente el caso de 0,999...) y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.49: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los Decimales Periódicos.

SI: 22								**NO: 2**	
1b	**1c**	**2a1**	**2b**	**2b1**	**3**	**4**	**5**	**1a**	**1b**
10	4	10E	10+1* +1R	2	10+ 1R*	(1)	2	1	1E

Resultados:

-Para el caso de los Decimales Periódicos (concretamente el caso de 0,999...) un 92% de los alumnos piensa que sí es un número y un 8% piensa que no.

-Las razones para rechazar que 0,999...sea un número son la infinitud de sus cifras y una razón errónea: que no pueda pasarse a fracción. Quizá esta última sea la única que merezca la pena ser considerada en el caso de que el alumno pensara que la fracción correspondiente a 0,999...= 1 no corresponde exactamente a esa expresión decimal, tal como se había discutido en clase anteriormente.

-La razón más frecuentemente utilizada para justificar que 0,999... es un número se refiere de nuevo a que con este número se pueden realizar operaciones (46% de los alumnos) y se puede representar en la recta[16] (41%), junto con la de que pueda ser

16 Tanto para este número como para las raíces cuadradas, hay alumnos que explicitan que la representación exacta en la recta no se realiza a través de la expresión decimal, sino a través de la fraccionaria y de la raiz cuadrada, respectivamente. (Estos alumnos aparecen codificados con una R en el apartado de observaciones, y constituyen un 17%).

representado como una fracción (37%). La razón de que está compuesto de cifras también se utiliza (17%). Y es importante señalar que otro 37% de los alumnos dice, erróneamente, que 0,9999.... viene de una operación. Un alumno dice que es un número porque es un decimal periódico. Pensamos que esta razón puede subyacer a los argumentos de la mayoría de los alumnos, que atribuyen a 0,9999.... las características generales de los Decimales Periódicos, que tienen un status de número consolidado.

c) Consideración de los alumnos sobre el status de númerodse los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: raíces cuadradas (concretamente el caso de √2) y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.50: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: raíces cuadradas.

SI: 21 + (1)							NO: 2	
1c	2a1	2a2	2b1	2b2	3	5	1a	5
7	12	2	14+4R	1	12+1E +1*	1	1	1

Resultados:

-De nuevo, un 92% del total de alumnos piensa que los Decimales Infinitos No Periódicos que provienen de raíces cuadradas son números, frente al 8% que piensa que no.

-En el caso de las respuestas negativas, una de ellas pertenece a la alumna que mencionamos anteriormente (que considera que 1,4142136...= √2 es el resultado de una operación y no es un número), y la otra al alumno que alude a la infinitud de sus cifras.

-Entre las justificaciones de las respuestas afirmativas, la más frecuente es la de que con ella pueden realizarse operaciones de tipo aritmético o algebraico (83%); este es un dato importante, porque no se han hecho ejercicios en clase sobre este aspecto, que desde el principio parece tener un gran peso para los alumnos. Otra razón empleada por bastantes alumnos (58%) es que puede representarse en la recta; sin embargo hemos de notar que uno de estos alumnos explicita que él cree que sólo pueden representarse aproximaciones aunque la profesora dice que puede representarse exactamente y otro afirma que se puede representar en la recta cuando conozcamos todas sus cifras; es decir, parece traslucirse aquí el que los alumnos pueden hacer uso de un conocimiento establecido en clase, pero sus intuiciones acerca del infinito potencial y de representar en la recta exactamente el número √2 no están de acuerdo con ese conocimiento "oficial".

El que √2 surja a partir de una operación también es una razón utilizada por una buena parte de los alumnos (54%). Un alumno dice que es un número porque pertenece al conjunto de los radicales.

Las razones de que √2 surja de la medida de una longitud y de que con ella puedan realizarse operaciones en el terreno de la medida sólo son empleadas por un alumno, a pesar de ser el aspecto sobre el que más se insistió en clase. El hecho de que es una expresión que esté compuesta de cifras es utilizado como argumento por un 33% de los alumnos.

d) Consideración de los alumnos sobre el status de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número de Oro, y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.51: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número de Oro.

SI: 21								**NO: 2**		**NS: 1**
1b	**1c**	**2a1**	**2a2**	**2b1**	**2b2**	**3**	**4**	**1a**	**5**	
5	3	8	5	11 +2R	3	10 +1E	2	1	1	

Resultados:

-Por lo que respecta a la consideración de los alumnos sobre si la expresión decimal del número de Oro corresponde a un número, un 87% piensa que sí, un 8% piensa que no y un 4% no sabe o no contesta.

-Las respuestas negativas corresponden de nuevo a los alumnos que respondieron negativamente en el apartado anterior y por las mismas razones.

-En cuanto a las razones con las que los alumnos justifican sus respuestas afirmativas, la más frecuente vuelve a ser la de que con el número en cuestión se pueden hacer operaciones aritméticas o algebraicas (42%); le sigue, tal como ocurre en el apartado anterior el que pueda representarse en la recta (33%) y el que surja de una operación aritmética o algebraica (29%). También en este caso, a pesar de que en la introducción al número de Oro que se realizó en clase mediante la exposición del trabajo de los alumnos se destacaron casi exclusivamente los aspectos geométricos (ver transcripción de vídeo correspondiente a la fecha 25-2-94), sólo dos alumnos (8%) mencionan que el número de Oro sirve para realizar operaciones en el terreno de la medida, y un alumno menciona que surje a partir de la medida de longitudes.

La razón de que pueda nombrarse (incluso que su propio nombre indique que es un número, como señalan algunos alumnos) es utilizada por un 21% del total de alumnos.

e) Consideración de los alumnos sobre el status de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número π, y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.52: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras determinadas a partir de su procedencia: el número π.

SI: 18								NO: 4			NS: 2			
1b	1c	2a	2a1	2a2	2b1	3	5	1a	4	5	2a	2c	3	4
3	4	2	9+1*	3	11 +1R	2	2	1	2	1*	1	1	1	1

Resultados:

En cuanto a la expresión decimal correspondiente al número π, un 75% de los alumnos piensan que corresponde a un número, un 17% piensan que no corresponde a un número y un 8% no sabe o no contesta.

-Las razones de las respuestas negativas son el que esté compuesto por infinitas cifras, como en el caso anterior, y el caso de un alumno que dice que "π es una constante, no un número"; no hemos profundizado en cual diferencia habrá entre ambos conceptos para el alumno.

-Por lo que se refiere a las respuestas afirmativas, las frecuencias más altas vuelven a corresponder a que con π pueden realizarse operaciones (54%) y a que surje de una operación aritmética o algebraica (50%), lo cual no es cierto, aunque es posible que los alumnos lo consideren de esta forma debido a la definición del número π como la Longitud de la circunferencia partido su Diámetro. El que esté compuesto de cifras y que pueda nombrarse es mencionado por un 17% y un 12% de los alumnos, respectivamente. El que π surja a partir de medir una longitud, no conmensurable con la unidad, es mencionado por un 17% de los alumnos (algo más que en los casos anteriores, pero aún una proporción escasa si se tiene en cuenta el tratamiento dado al tema en clase (ver transcripciones de vídeo correspondientes a las fechas 24-2-94 y 25-2-04).

f) Consideración de los alumnos sobre el status de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias, aunque siguiendo una regularidad, y criterios empleados para justificar su consideración:

Tabla 5.53: Consideración de los alumnos sobre el estatus de número de los Decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias.

SI: 9						NO: 10			NS: 5						
									SI		NO				
1a	1c	2b1	4	5	1a	2a	2c	3	1a	1c	1a	1b	2a	2c	3
4	4	1	1	1 +1* +(1)	2	8	7	9	1	1	2	1	6	4	6

Resultados:

Finalmente llegamos al caso de los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias, aunque en este caso siguiendo un patrón. Aquí, las proporciones de respuestas de los alumnos varían con respecto de los casos anteriores. Un 42% de la clase piensa que estas expresiones decimales no corresponden a números, un 37% piensa que sí, y un 21% no sabe o no contesta.

-Entre los alumnos que están indecisos, se barajan razones a favor y en contra. A favor se encuentra el que esté formado por cifras y el que exista una regularidad que permita su control; en contra, las más frecuentes son el que no se pueda representar en la recta, el que provenga de una creación arbitraria sin tener origen en una operación aritmética y el que no puedan realizarse operaciones con ellas.

-Asímismo, estos tres argumentos son también los más utilizados para justificar las respuestas negativas, con frecuencias de 29%, 33% y 29%, respectivamente.

-Los argumentos más frecuentes para justificar las respuestas afirmativas son, igualmente, el que estén compuestos de cifras y que exista una regularidad que permita su control (17%). Un 8% de los alumnos se refiere a que "los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias están dentro de los irracionales".

Reflexión general:

Por lo que se refiere al conocimiento establecido, hay que señalar el alto porcentaje de respuestas correctas en cuanto al estatus de número de todas las expresiones decimales presentadas, salvo la última, correspondiente a los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias; en este caso hay una parte importante de los alumnos (62%) que considera que este tipo de decimales no son números o tienen dudas al respecto. También hemos de mencionar que en el caso de π la proporción de respuestas negativas y dudas aumenta ligeramente en los alumnos (un 25% del total).

En cuanto a las razones aducidas para justificar sus consideraciones, no se detectan incoherencias notables, aunque sí hay dos alumnos que destacan porque, a pesar del proceso didáctico, siguen manteniendo lo que podríamos denominar unas concepciones primitivas en sus consideraciones sobre el estatus de número de las expresiones decimales presentadas. Uno de ellos considera número a toda expresión que esté formada por cifras por el mero hecho de estarlo; el segundo caso se refiere a una alumna que considera número a las expresiones que están formadas por cifras, salvo el caso de aquellas que provengan de operaciones, en cuyo caso las considera como resultados de una operación y no como números.

Por lo que se refiere al resto de los alumnos, podemos observar que en los tres apartados centrales, correspondientes a la expresión decimal de raíces cuadradas, número de Oro y número π, la razón que se utiliza con más frecuencia es, definitivamente, la de que con ellos pueden realizarse operaciones aritméticas o algebraicas; esto ha constituido un punto clave para los alumnos desde el comienzo del proceso didáctico, a pesar de que durante el mismo no se ha trabajado específicamente sobre este aspecto. También son razones importantes para los alumnos el que estas expresiones decimales provengan de operaciones y puedan representarse en la recta. En contraste, llama la atención la muy escasa alusión a aspectos relacionados con la medida, a pesar de que el tratamiento didáctico estaba especialmente enfocado a introducir a los alumnos este aspecto.

En el caso de las expresiones decimales correspondientes a "Enteros con infinitas cifras", da la impresión de que la gran mayoría de los alumnos saben (porque se trata de un conocimiento establecido) que no son números, y entonces aducen justificaciones del tipo de las que se vienen manejando en clase pero en sentido negativo; la justificación que sí resulta interesante es la de una alumna que argumenta: "en 0,999...puedes hacer una aproximación como 0,999 y no se diferencia mucho entre 0,999 y 0,9999, pero en 999... no es lo mismo 9 que 99 que 999, etc...", ya que parece acercarse a la idea de convergencia de las aproximaciones decimales sucesivas en el caso de los decimales infinitos y a la divergencia en el caso de los supuestos "enteros con infinitas cifras".

En los decimales con infinitas cifras arbitrarias hay, como hemos mencionado al principio, un sector importante de alumnos que no las considera números o tiene dudas al respecto, y las razones resultan bastante coherentes (no poderse realizar operaciones con ellos ni provenir de ninguna operación y no poderse representar en la recta); mientras que las dadas por el sector de alumnos que responden afirmativamente (37%) parecen menos sólidas: estar compuestos de cifras y que esas cifras presenten regularidad, y sí parece más fuerte el argumento de dos alumnos que afirman que son números irracionales, como conocimiento establecido (que puede que esté subyacente en más de una respuesta a firmativa).

Pregunta 2:

2.1. Tipos

Tabla 5.54: Tipos de decimales infinitos explicitados por los alumnos.

T	0	1	1b	1bc	2	2a1	2a2	2a12	2b	2b2	2b12
	1*	11	1	15	22 +1*	2	3	5	4	2	2

Resultados:

-Todos los alumnos excepto 1 (4%) mencionan los Decimales Periódicos como uno de los tipos de expresiones decimales infinitas. Un 55% distingue entre Puros y Mixtos, un 37% no hace tal distinción y un alumno sólo distingue el tipo Periódico Puro.

-En cuanto a los decimales infinitos no periódicos, un 81% de los niños distingue a los Decimales Infinitos No Periódicos como uno de los tipos de decimales infinitos; pero además añaden, bien como subtipos o bien sin especificar que sean subtipos, las raíces cuadradas (30%), irracionales conocidos como π y el número de Oro (18%) y decimales con cifras arbitrarias (37%): siguiendo un patrón (11%) y/o sin seguirlo (19%). La distribución entre tipos y subtipos que mencionan los alumnos es muy variada. Hay un alumno que menciona como tipo de decimal infinito a los "Enteros con infinitas cifras"; este mismo alumno se refiere a los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias con el nombre de "Infinitos Mixtos".

-En general, se observa un alto porcentaje de alumnos que distiguen entre los Decimales Periódicos y los Infinitos no Periódicos aunque, a partir de aquí, la distribución entre tipos y subtipos que mencionan los alumnos presenta bastante variación.

2.2. Ejemplos:

-No hay problemas con los ejemplos de los decimales periódicos, salvo el caso de 2 alumnos que dan respuestas erróneas, que consisten en dar ejemplos de decimales periódicos (con las cifras extendidas y sin signo de periodo) como ejemplos de decimales infinitos no periódicos, mientras que los ejemplos de decimales periódicos son números periódicos con la indicación del signo de periodo.

-En cuanto a los ejemplos de decimales infinitos no periódicos:

Tabla 5.55: Ejemplos de decimales infinitos suministrados por los alumnos.

E	2a1	2a2	2b	2b1	2b2
	17	23	1	14	6

E: El error consiste en dar como ejemplo de decimal infinito no periódico a π, pero poner una aproximación decimal finita: 3,14.

Resultados:

Como ya hemos señalado, no hay problemas relevantes en lo que respecta a los ejemplos de decimales periódicos dados por los alumnos.

Por lo que respecta a los decimales infinitos no periódicos, los alumnos dan ejemplos de expresiones decimales de raíces cuadradas (63%) y/o de expresiones decimales de irracionales conocidos, como π y el número de Oro (85%), y/o de decimales infinitos no periódicos que siguen una regularidad (52%) o que no la siguen (22%).

-En general, llama la atención el alto número de ejemplos de expresiones decimales infinitas no periódicas dadas por los alumnos, y se nota una mayor propensión en los alumnos a dar ejemplos de decimales infinitos no periódicos que siguen una regularidad (aunque como tipo de decimal infinito es mencionado con menos frecuencia).

2.3. Procedencia:

-Decimales Periódicos

Tabla 5.56: Procedencia de los decimales periódicos, a juicio de los alumnos.

DP	1	2	NC
	24 (15+9)	3	1

-Decimales No Periódicos

Tabla 5.57: Procedencia de los decimales infinitos no periódicos, a juicio de los alumnos.

INP	1	2a1	2a2	2a3	2b	2b1	2b2	2b3	NC
	2E	18	7+5*	7+7´ +1E	17	1	1	1+1E	1

Resultados:

-La gran mayoría de los alumnos atribuye a los decimales periódicos la procedencia de una fracción o de una división (89%); pero hay que señalar que un buen número de alumnos atribuye también esta procedencia al caso de 0,9999... (nuestra interpretación es que extrapolan el conocimiento general de la procedencia de los decimales periódicos al caso de los nueves periódicos sin advertir la particularidad de este caso). Un 7% de los alumnos atribuye a los decimales periódicos la procedencia de una operación sin especificar cual (pero diferenciando de los decimales finitos, de los cuales sí especifican que provienen de una división). Un 4% de los alumnos no contesta.

-En cuanto a los decimales infinitos no periódicos, los alumnos atribuyen correctamente la procedencia de las raíces cuadradas al algoritmo correspondiente (67%); y a los números como π y el número de Oro la procedencia a partir de razones entre longitudes (44%), entre ellos tenemos que señalar que sólo un 7% atribuye esta procedencia también a las raíces cuadradas; y/u otras procedencias entre la que destaca la atribución de la procedencia de π a una fracción o división: Longitud de la circunferencia/Diámetro de la misma (37%). Los decimales infinitos con cifras arbitrarias son atribuidos a la invención (66%), salvo el caso de 2 alumnos (7%) que afirman erróneamente que pueden venir de una división. Un 7% de los alumnos atribuye erróneamente a los decimales infinitos no periódicos la procedencia de una fracción. Un 4% de los alumnos no contesta a la pregunta.

-En general, se observa una correcta atribución de la procedencia en el caso de los decimales periódicos (teniendo en cuenta la extrapolación en el caso de 0,999....). Y también un buen índice de respuestas correctas en las raíces cuadradas y en el caso de los decimales infinitos no periódicos de creación arbitraria; llama la atención el que haya bastantes alumnos (cerca de la mitad) que atribuyan correctamente la procedencia de π y el número de Oro a proporciones; sin embargo, muy pocos atribuyen también esta procedencia a irracionales como las raíces cuadradas. En el caso del número π, se observa que bastantes alumnos piensan que proviene de una fracción (Longitud de la circunferencia/Diámetro de la misma), que es una respuesta sobre cuya interpretación habría que profundizar con los alumnos para ver hasta qué punto podemos considerarla correcta o incorrecta. Algunos alumnos (15%) atribuyen erróneamente la procedencia de una fracción o división a decimales infinitos no periódicos, especialmente en caso de que tengan cifras arbitrarias.

2.4. <u>Consistencia entre los tipos de decimales infinitos y los ejemplos dados de cada uno.</u>

Tabla 5.58: Consistencia entre los tipos de decimales infinitos y los ejemplos dados de cada uno.

CE	1	2	3	4	5
	7	5	0	1	14

<u>Resultados:</u>

-La forma de asignar los ejemplos permite deducir que una buena parte de los alumnos (52%), no discrimina entre el tipo "Decimal Infinito No Periódico" y los subtipos dentro de este tipo: "Raíces cuadradas", "Irracionales conocidos que provienen de proporciones", "Decimales Infinitos con cifras arbitrarias"; y ponen el tipo principal y uno o varios subtipos al mismo nivel.

-En un 26% de los alumnos hay coherencia entre los tipos de decimales que distinguen y los ejemplos que dan; en un 18% de los niños, los ejemplos son más específicos que los tipos que discriminan a nivel verbal.

-Sólo un alumno (4%) equivoca los ejemplos y el tipo de expresión decimal infinita a que corresponden.

-En general, se observa que los alumnos tienen una buena noción de tipos de decimales infinitos y no tienen problema en presentar un buen número de ejemplos pero, a efectos de una clasificación estructurada, se notan deficiencias; la deficiencia más importante consiste en no discriminar entre tipos y subtipos de decimales infinitos, y ponerlos al mismo nivel unos y otros; también hay alumnos que son capaces de dar ejemplos más específicos que los tipos de decimales infinitos que pueden discriminar a nivel verbal. A este respecto efectuaremos un análisis más detallado en el próximo apartado.

2.5. Nivel de discriminación en los tipos de decimales infinitos:

Tabla 5.59: Nivel de discriminación en los tipos de decimales infinitos.

ND	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
	4	1 a 7+2´ b 1´	0	4	a 2	a 1	5

Resultados:

-Sólo un 15% de los alumnos discrimina todos los tipos de decimales infinitos y los estructuran tal como están especificados en nuestras unidades de análisis para el contenido.

-Un 41% de los alumnos discrimina entre decimales periódicos y no periódicos y, dentro de estos últimos, distinguen los que provienen de algo y los de creación arbitraria; sin embargo, sólo mencionan un subgrupo de alguno de ellos, el más frecuente es el que corresponde a las raíces cuadradas (33%).

-Otro 15% de los niños hace lo mismo que se ha descrito en el apartado anterior, pero sin distinguir que las raíces cuadradas son un subgrupo dentro de los decimales infinitos no periódicos que provienen de alguna operación.

-Un 7% de los alumnos discrimina entre decimales periódicos y no periódicos, y dentro de éstos el grupo de los que provienen de alguna operación; un 4% discrimina entre decimales periódicos y no periódicos y dentro de éstos las raíces cuadradas.

-Por último, un 18% de los alumnos pone diversos tipos, pero sin estructurar ninguna clasificación.

-En general, tal como ya se observaba en el apartado anterior, los alumnos tienen más dificultades en clasificar y hacer una estructuración de la tipología de decimales infinitos aparecidos en el proceso didáctico que en recordar diversos tipos y suministrar ejemplos de ellos, lo cual es lógico por otra parte, puesto que supone un paso más en el nivel de abstracción. Sólo un 15% de los alumnos discrimina todos los tipos de decimales infinitos y los estructura tal como están especificados en nuestras unidades de análisis para el contenido, pero también hay que contar con un 41% de los alumnos que tienen un buen nivel en lo que a clasificación se refiere puesto que son capaces de discriminar entre decimales periódicos y no periódicos, dentro de estos últimos, distinguen los que provienen de algo y los de creación arbitraria, y dentro de los que provienen de alguna operación, las raíces cuadradas.

V. 2. 10. 4 Estudio de la Interacción Didáctica en la Cuestión de Investigación 1 (bis)

El trabajo didáctico sobre la Cuestión de Investigación 1 (bis) es breve e incompleto; sólo se realiza un primer intento de Puesta en Común, en el cual se percibe la complejidad de la actividad planteada: que los alumnos hagan una clasificación común de los distintos tipos de números reales aparecidos en el proceso didáctico, a partir de sus expresiones decimales y de las clasificaciones particulares realizadas para contestar a la cuestión escrita. Debido a que la profesora-investigadora y el director del trabajo habían decidido no prolongar la investigación más allá de lo estrictamente necesario para cerrar el tema a nivel didáctico, la Puesta en Común sobre esta actividad quedó inconclusa y no volvió a retomarse. No obstante analizaremos la breve interacción didáctica que tuvo lugar, correspondiente a la fecha 2-3-94, mediante las Unidades de Análisis para la Interacción Didáctica habituales.

La transcripción de dicha grabación en vídeo aparece en el Anexo V.3. A continuación presentaremos un esquema del desarrollo de la sesión, seguido del análisis de la misma.

-Etapas de la interacción:

-Discusión sobre las clasificaciones hechas por cuatro alumnos:

.Mis criterios de valoración no coinciden con los que deduzco son los suyos, a partir de las elecciones que hacen.

.Intento que presten atención a mi criterio fundamental de valoración (estructura), pero no parecen llegar a entender. Siguen viendo por sus criterios.

-Se acaba el tiempo.

-Datos globales sobre Unidades de Interacción Didáctica encontradas:

Tabla 5.60: Interacción didáctica sobre la Cuestión de Investigación 1 (bis).

Categorías	Frecuencias
1.PO	2
1.PP	0
1.PE	0
1.PV	0
1.PA	0
1.AS	0
1.AP	0
1.AE	0
1.AV	0
1.AR	0
2.PO	0
2.PP	0
2.PE	0
2.PV	0
2.PI	1
2.AS	0
2.AP	0
2.AE	0
2.AV	0
2.AI	0
3.POC	3
3.PIS	4
3.PDC	5
3.PVI	2
3.PSC	0
3.AAI	15
3.AIS	1
3.AMC	0
3.AVI	2
3.AEC	0
Total	35
CA	1

Tabla 5.61: Porcentajes de las etapas y finalidades en la Cuestión de Investigación 1 (bis).

Finalidades	
1	0,06
2	0,03
3	0,91

Tabla 5.62r: Porcentajes de las etapas y actuaciones en la Cuestión de Investigación 1 (bis).

Actuaciones	
Fijar Normas	0,57
Establecer Significados	0,29
Enjuiciar	0,11
Intervenir	0,03

-Reflexión general sobre las actuaciones:

En cuanto a la distribución de frecuencias de interacción atendiendo a las Finalidades, se registra la tónica habitual en sesiones precedentes: la gran mayoría de las actuaciones (sobre el 90%) tienen como finalidad la construcción de conocimiento. Hay una ligera superioridad en el número de actuaciones que parten de los alumnos, las cuales corresponden, sobre todo, a aportar información; las actuaciones que provienen de la profesora se dirigen principalmente a desarrollar comprensión e indagar significados; hay un equilibrio entre ambas partes por lo que respecta a valoración de ideas (aunque el porcentaje con relación a los otros tipos de actuaciones es escaso). No se producen acciones de sistematización de conocimiento.

Si atendemos a la distribución por Actuaciones Generales, observamos que la mayoría de ellas (57%) corresponden a fijar normas, lo cual es lógico si tenemos en cuenta que se trata de una interacción en la que profesora y alumnos tratan de fijar las bases sobre las que avanzar la tarea. El 30% de las actuaciones corresponden a establecer significados. En la fijación de normas, la mayor parte de las actuaciones provienen de los alumnos que aportan información; en el establecimiento de significados predominan fuertemente las acciones que parten de la profesora.

Como ha sido habitual a lo largo de las distintas sesiones, el número de actuaciones correspondientes a enjuiciar e intervenir es menor (se sitúa entre las dos en torno al 15%), hay mayor número de actuaciones que corresponden a enjuiciar, siendo equilibrada la interacción entre profesora y alumnos. En lo relativo a la categoría Clima de Aula, el nivel de distorsión es muy bajo: 3% del total de los segmentos categorizados.

V. 2. 11 Observación y resultados de la Cuestión de Investigación 3

La Cuestión de Investigación 3 (CI3) estaba prevista para ser contestada por los alumnos individualmente y por escrito en clase y para ser realizada posteriormente una Puesta en Común sobre ella. Sin embargo, para la fecha en que estaba prevista su realización, se había producido una saturación en los alumnos sobre los contenidos tratados y se había estimado oportuna la conclusión del proceso de investigación (Ver en apartado correspondiente a Implementación las notas de la fecha 1-3-94). Aún así, la profesora-investigadora aplazó la recogida de información mediante la Cuestión de Investigación 3 por si en algún momento resultaba factible realizarla, y así completar la información sobre los puntos que se habían previsto en un principio.

-<u>Instrumento:</u>

En el apartado III.3.3 se presentan las Cuestiones de Investigación Específicas; los enunciados correspondientes a las cuestiones II-13, II-14 y II-15 corresponden a la Cuestión de Investigación 3, cuyo enunciado incluimos:

a) Dado un punto cualquiera de la recta ¿siempre le corresponde un numero? En caso de que así sea, ¿de qué tipo? Di todos los tipos de número que pueden corresponderle y qué representación decimal tiene cada uno de ellos.

b) ¿Qué números llenan por completo la recta? (Especificar todos los tipos).

-Características del instrumento e implementación:

En la fecha 3-3-94 se consideró apropiado encargar a los alumnos la contestación de esta Cuestión de Investigación individualmente y fuera de horas lectivas. Se recogieron sus respuestas escritas pero debido a que, como hemos señalado antes, se había optado por concluir el proceso de investigación y las actividades realizadas a partir de ese momento iban encaminadas a ese fin, no se realizó la Puesta en Común sobre la Cuestión de Investigación 3.

-Objetivos:

-Explorar la comprensión de los alumnos en torno a la sobreyectividad de la correspondencia Números Reales-Puntos de la Recta a través de las unidades de análisis elaboradas para tal fin.

-Explorar si los alumnos establecen alguna diferencia entre la correspondencia números reales-puntos de la recta y la correspondencia números reales-continuo lineal.

V. 2. 11. 1 Criterios que concretan las Unidades de Análisis

Pregunta a). Sobreyectividad de la correspondencia Números Reales-Puntos de la Recta. Queremos observar:

1. Si los alumnos consideran que dado un punto cualquiera de la recta, existe un número que corresponde a dicho punto.
2. Los tipos de números reales que los alumnos consideran que pueden corresponder a un punto cualquiera de la recta; en principio pueden estar dentro de los siguientes grupos:
   - -Racionales
   - -Construibles
   - -Números Reales de cualquier tipo

   Nota.- Para que los alumnos sistematicen la clasificación, se pide la representación decimal de cada uno de los tipos de números a los que aludan.

Pregunta b). Diferencias entre la correspondencia números reales-puntos de la recta y la correspondencia números reales-continuo lineal. Queremos observar:

1 Los tipos de números reales que los alumnos consideran que llenan la recta. (En principio, pueden estar dentro de los mismos grupos que se señalaron en el apartado anterior).

2 El argumento mediante el que justifican su respuesta:

focos específicos de nuestra investigación. En concreto, son las preguntas 1, 4 y 6 del examen las que se utilizan para nuestra investigación.

-Instrumento

1. a) Escribe lo que sepas acerca de las relaciones entre los Números Racionales, su escritura habitual en forma de fracciones y su escritura decimal.

b) Escribe lo que sepas acerca de las relaciones entre los Números Irracionales, su escritura habitual y su escritura decimal.

4. Representa en la recta numérica:

$\sqrt{2}$ 0,75 0,333..... $-\sqrt{2}$ -0,333.... 11/4 2,75 3/4 $3\sqrt{2}$

6. Un alumno dice que a todo punto de la recta le corresponde una fracción, por el siguiente razonamiento:

.Cuando le señalan un punto en la recta numérica, él toma la longitud desde ese punto hasta el cero y la llama L. Considera también la longitud unidad (del cero al uno).

.Divide ambas longitudes hasta encontrar una longitud (aunque sea muy pequeña) que encaje en las dos longitudes exactamente.

.Cuenta el número de veces que la longitud común encaja en la unidad y en la longitud L. Y así obtiene el numerador y el denominador de la fracción correspondiente al punto.

-¿Crees tú que a todo punto de la recta numérica le corresponde una fracción?

-¿Es correcto el razonamiento del alumno? Si no estás de acuerdo con él, explícale porqué no estás de acuerdo con su razonamiento.

-Características de la actividad e implementación:

La pregunta 1 plantea las relaciones existentes entre el concepto de número racional y sus notaciones decimal y fraccionaria y las relaciones existentes entre los números irracionales y sus notaciones habitual operatorias; la pregunta 4 se refiere a la representación en la recta de números reales*; y, por último, la pregunta 6 pretende poner en conflicto la creencia mayoritaria de los alumnos acerca de la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera y el hecho de que no todos los puntos de la recta correspondan a números racionales.

*Nota: Esta pregunta se preparó con vistas al ejercicio de examen exclusivamente; por esta razón no se tuvo en cuenta el barrido de todos los casos posibles expuestos en las unidades de análisis sobre la representación en la recta de los números reales; así pues, se aprovecharán para el análisis los casos que se evaluaron sin pretender exhaustividad.

-Objetivos:

Nuestra intención es explorar qué evolución se ha producido en la comprensión de los alumnos en relación a algunos de los aspectos de nuestros focos principales de investigación, después de la Fase de Acción 2. Se han considerado los puntos que se detallan en los criterios y apartados para observar.

V. 2. 12. 1 Criterios que concretan las Unidades de Análisis

Por lo que se refiere a este Examen consideramos que los aspectos relevantes a estudiar son, globalmente, los siguientes:

-Concepto de número racional, a través de sus distintas representaciones numéricas y la interrelación entre ellas.

-Concepto de número irracional, a través de sus distintas representaciones numéricas y la interrelación entre ellas.

-Correspondencia números reales-puntos de la recta, a partir de sus distintas notaciones numéricas: habitual operatoria y decimal.

-Conflicto que se plantea a raiz de la creencia en la conmensurabilidad de dos longitudes cualesquiera y la existencia de puntos de la recta que no corresponden a números racionales.

V. 2. 12. 2 Apartados para observar y valoración de las respuestas

<u>Pregunta 1:</u>

<u>Apartado a): Concepto de Número Racional</u> **(CQ)**

1. Menciona todos los tipos de notaciones decimales correspondientes a los números racionales y las fracciones equivalentes como representantes del mismo número racional y correspondientes al mismo decimal*. Diferencia entre número y representación numérica (o al menos, no se explicita confusión en este sentido).
2. Igual que la categoría anterior, pero no menciona las fracciones equivalentes.
3. Menciona todos los tipos de notaciones decimales correspondientes a los números racionales y las fracciones equivalentes como representantes del mismo número racional y correspondientes al mismo decimal. Sin embargo, se observa confusión entre el concepto de número racional y sus representaciones.
4. Igual que la categoría anterior, pero no menciona las fracciones equivalentes.
5. Sólo hace alusión a una de las notaciones de los números racionales: fraccionaria o decimal.
6. Señala rasgos o ejemplos concretos, sin ninguna caracterización sistemática.
7. respuestas erróneas.
8. No sabe-no contesta.

<u>*Nota.-</u> Ningún alumno explica las razones de la correspondencia fracciones - decimales finitos o periódicos.

<u>Apartado b): Concepto de Número Irracional</u> **(CI)**

1. Menciona las distintas notaciones habituales operatorias de los números irracionales aparecidos en el transcurso del proceso didáctico, indica que la expresión

decimal de los irracionales es infinita no periódica*. Diferencia entre número y representación numérica (o al menos, no se explicita confusión en este sentido).

2. Igual que la categoría anterior, pero no menciona todas las notaciones habituales operatorias de los números irracionales aparecidos en el transcurso del proceso didáctico.

3. Menciona distintas notaciones habituales operatorias de los números irracionales aparecidos en el transcurso del proceso didáctico (todas o algunas) e indica que la expresión decimal de los irracionales es infinita no periódica. Sin embargo, se observa confusión entre el concepto de número racional y sus representaciones.

4. Sólo hace alusión a una de las notaciones de los números irracionales: habitual operatoria o decimal.

5. Señala rasgos o ejemplos concretos, sin ninguna caracterización sistemática.

6. respuestas erróneas.

7. No sabe-no contesta.

*Nota.- Ningún alumno explica las razones de la correspondencia irracionales - decimales infinitos no periódicos.

Pregunta 4: Se considera la asignación de un punto de la recta a las siguientes representaciones numéricas de los números reales y procedimiento mediante el cual se le asigna; en total son ocho apartados, con las correspondientes escalas:

a) Las fraciones propias **(FP):**

1. Divide de la unidad en las partes que indica el denominador y marca el punto correspondiente a la última parte del las que indica el numerador.
2. Pasa a expresión decimal (ver casos c y d)
3. Utiliza distintos procedimientos según ejemplos concretos.
4. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
5. Otras.
6. NS / NC

b) Las fracciones impropias **(FI):**

1. Igual que en el caso anterior, pero tomando cuantas unidades se requieran para dividirlas en las partes que indica el denominador y marcar el punto correspondiente a la última parte de las que indica el numerador.
2. Pasa la fracción impropia a número mixto, toma las unidades indicadas y representa en la unidad siguiente la fracción propia tal como se indicó en a).
3. Pasa a expresión decimal (ver casos c y d)
4. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
5. Otras.
6. NS / NC

c) Los decimales finitos **(DF):**

1. Toma las unidades indicadas en la parte entera; divide la siguiente en décimas, centésimas, milésimas... según el número de cifras decimales y marca el número de décimas, centésimas.... indicado en la parte decimal.
2. Halla la expresión fraccionaria del decimal y lo representa según lo indicado en casos a y b.
3. Estima el punto correspondiente, bien.
4. Estima el punto correspondiente, mal.
5. Utiliza distintos procedimientos.
6. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
7. Otras.
8. NS / NC

d) Los decimales periódicos **(DP):**

1. Halla la expresión fraccionaria del decimal y lo representa.
2. Estima el punto correspondiente a una aproximación finita del decimal, bien.
3. Estima el punto correspondiente a una aproximación finita del decimal, mal.
4. Utiliza distintos procedimientos.
5. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
6. Otras.
7. NS / NC

e) Distintas notaciones (fraccionaria y decimal) del mismo número racional **(FD):**

1. Asigna a todas el mismo punto
2. Asigna puntos distintas expresiones de un mismo número racional
3. No se puede decidir
4. NS / NC

f) Las raíces cuadradas **(RC):**

1. Traslada a la recta del lado de un cuadrado de área n a partir del 0, para representar $\sqrt{n}$. El cuadrado de área n está construido con la misma unidad de medida que la recta.
2. Utiliza una aproximación decimal (estimación plausible).
3. Traslada a la recta del lado de un cuadrado de área n a partir del 0, para representar $\sqrt{n}$. El cuadrado de área n no está construido con la misma unidad de medida que la recta.
4. Utiliza una aproximación decimal errónea.
5. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
6. Otras.

7. NS / NC

g) Las expresiones numéricas con raíces cuadradas **(NRC):**

1. Construye el número a partir de la construcción de las raíces, sumando o restando longitudes unidad, y también multiplicando y dividiendo longitudes. El cuadrado de área n está construido con la misma unidad de medida que la recta.
2. Utiliza una aproximación decimal (estimación plausible).
3. Construye el número a partir de la construcción de las raíces, sumando o restando longitudes unidad, y también multiplicando y dividiendo longitudes. El cuadrado de área n no está construido con la misma unidad de medida que la recta.
4. Utiliza una aproximación decimal errónea.
5. No puede saberse el procedimiento que utiliza y la respuesta no puede considerarse correcta o es incorrecta claramente.
6. Otras.
7. NS / NC

h) Racionales Negativos **(RN):**

1. No falla
2. Falla
3. NS/NC

i) Irracionales Negativos **(IN):**

1. No falla
2. Falla
3. NS/NC

Pregunta 6: En la que se consideran tres apartados

a) ¿A todo punto de la recta le corresponde una fracción?

1. Sí
2. No
3. No sabe- no contesta

b) ¿Estás de acuerdo con el argumento del alumno?

1. Sí
2. No
3. No sabe- no contesta

c) Argumento empleado por el alumno **(A):**

1. Argumento basado en la existencia de la inconmensurabilidad
   1a. En términos de longitudes (o proporciones)
   1b. En términos numéricos
   1c. Relacionando correctamente ambas vertientes.
2. Argumento basado en la existencia de puntos de la recta correspondientes a números irracionales (sólo en forma de decimales infinitos no periódicos: 2´).

3. Argumento basado en el conocimiento establecido de que la recta numérica la llenen los números reales (racionales e irracionales).
4. Argumento basado en las limitaciones físicas.
5. Alusión a que en un principio pensaba igual que el alumno, sin especificar por qué ha cambiado de opinión.
6. Adopción del argumento del alumno.
7. Rechazo del método del alumno por incorrecto (o inapropiado).
8. Otros.
9. No entiende la pregunta: interpreta que se pregunta si a toda fracción le corresponde un punto de la recta.
10. No argumenta.

Observaciones:

1. Alusión a la existencia de irracionales, pero a la imposibilidad de alcanzar más que aproximaciones.
2. Alusión a la imposibilidad de alcanzar más que aproximaciones en la recta de los irracionales, lo cual implica la no existencia de puntos en la recta correspondientes a este tipo de números.
3. Alusión a la infinitud de los números irracionales y a la infinitud de los puntos de la recta.

V. 2. 12. 3 Resultados del Examen 2

Los resultados generales de las tres preguntas del Examen 2, que venimos consoderando, se encuentran en las tablas 26 y 2 del Anexo V.2. Tenemos respuestas de un total de 31 alumnos.

Presentamos a continuación los resultados de valorar cada una de las preguntas del examen, según los aspectos indicados anteriormente.

-Pregunta 1:

Tabla 5.64: Concepto de Número racional y su expresión decimal.

CQ	1	2	3	4	5	6	7	8
Frec.	7	4	2	4	5	1	3	5

Resultados:

Un 23% de los alumnos responde correctamente, mencionando el tipo de notación decimal de los números racionales (finita o periódica) y la notación habitual de estos números, en forma de fracción, teniendo en cuenta que todas las fracciones equivalentes son representaciones del mismo número racional y tienen la misma expresión decimal. Aún así, ninguno de ellos menciona explícitamente las razones por las cuales a una

NRC							RN			IN		
1	2	3	4	5	6	7	1	2	3	1	2	3
7 +(3)	4	0	1	3	1	12	25	1	5	26	1	3 +1*

Resultados:

-Para asignar un punto de la recta a las fracciones propias (concretamente a la fracción 3/4) un 48% de los alumnos utilizan el procedimiento de dividir la unidad en las partes que indica el denominador y marcar el punto correspondiente a la última parte del las que indica el numerador, y un 29% pasa la fracción a su expresión decimal. Un 13% asigna un punto de la recta a esta fracción, pero no es posible interpretar mediante qué procedimiento y las asignaciones son claramente incorrectas o no pueden considerarse como correctas. Un 10% de los alumnos sigue cometiendo el error detectado en el pretest que consiste en representar 3/4 como si fuera 3,4. En general, podemos decir que la asignación de un punto de la recta a las fracciones propias no presenta problemas para la mayoría de los alumnos (77%).

-En el caso de las fracciones impropias (concretamente la fracción 11/4) el número de respuestas correctas desciende ligeramente (68%): un 42% de los alumnos contesta correctamente utilizando el procedimiento que consiste en dividir la unidad como en el caso de las fracciones propias pero tomando cuantas unidades sean necesarias, un 26% utilizando el procedimiento de pasar la fracción a su expresión decimal. Los alumnos de los cuales no es posible interpretar el procedimiento que utilizan ni considerar sus respuestas como correctas ascienden al 16%).

Disminuye el número de niños que utiliza el procedimiento erróneo anteriormente mencionado de asignar a 11/4 el punto correspondiente a 11,4, y aumenta en cambio el porcentaje de alumnos que no contesta: 13%. Ningún alumno utiliza el procedimiento de pasar la fracción impropia a número mixto, tomar las unidades indicadas y representar en la unidad siguiente la fracción propia.

-Por lo que respecta a la asignación de un punto de la recta a los decimales finitos (concretamente a los ejemplos de 0,75 y 2,75), un 42% de los alumnos utilizan el procedimiento de tomar las unidades indicadas en la parte entera; dividir la siguiente en décimas, centésimas, milésimas... según el número de cifras decimales y marcar el número de décimas, centésimas.... indicado en la parte decimal; concretamente, la estrategia utilizada por la gran mayoría consiste en dividir la unidad correspondiente en 10 partes y señalar el punto situado en la mitad de la 7ª y la 8ª división. Sin embargo, hemos de notar que un 10% de los alumnos que usan este procedimiento son casos especiales porque explican verbalmente que dividirían la unidad en 100 partes y cogerían 75, pero son incapaces de representar de hecho el número.

Un 26% de los alumnos pasa la expresión decimal a notación fraccionaria, pero esto puede ser debido en gran medida a los ejemplos concretos que se proponen (la asociación de 0,75 y 2,75 con su expresión fraccionaria parece más propicia que en otros decimales no tan habituales).

En un 23% de los casos no puede saberse qué procedimiento utilizan los alumnos para asignar un punto de la recta a los decimales propuestos y sus asignaciones no son correctas. Un 10% utiliza procedimientos encuadrados dentro de la categoría de Otros y un 3% no contesta.

En general, el número de alumnos que asigna correctamente un punto a los decimales finitos es del 68%, aunque este número puede estar influenciado por el hecho de que el decimal elegido sea bastante habitual.

-Los decimales periódicos son representados corretamente, pasando el decimal a su expresión fraccionaria, por un 48% de los alumnos. Sin embargo un 35% sigue representando una aproximación decimal finita, a pesar de la insistencia en clase sobre la cuestión de la exactitud de la representación en la recta de este tipo de decimales, que sólo es posible a través de su representación fraccionaria; en un 3% de los casos la aproximación finita es, además errónea. En un 3% de los casos no puede saberse qué procedimiento utilizan los alumnos para asignar un punto de la recta a los decimales propuestos. Un 6% utiliza procedimientos encuadrados dentro de la categoría de Otros y un 3% no contesta.

-En el apartado correspondiente a asignar el mismo punto de la recta a distintas notaciones (fraccionaria y decimal) de un mismo racional, un 77% de los alumnos contesta correctamente. Sólo un 6% asocia puntos distintos a distintas representaciones numéricas del mismo númeor racional.

Un 3% de los alumnos no contesta a este apartado y en un 13% de los casos no es posible decidir si el alumno asigna o no el mismo punto o puntos distintos por diversos motivos (por ejemplo, los alumnos que dicen cómo representarían los decimales pero no los representan).

-Las raíces cuadradas (concretamente √2) son representadas correctamente por el procedimiento de construir un cuadrado de área 2 y trasladar su lado por un 39% de los alumnos; un 3% no tiene en cuenta que la unidad de medida tiene que ser la misma en la recta que en el cuadrado construido y, por consiguiente, lo representa mal. En este caso, el número de alumnos que representa una aproximación finita del decimal infinito no periódico el de un 13%, proporción considerablemente menor que en el caso del decimal periódico. No sabemos a qué puede deberse este resultado: quizás a que la representación decimal de √2 se ha introducido por primera vez en en este curso, haciéndose hincapié en el método de representación exacta y a que para los alumnos está también más reciente que el caso de 0,333..., cuya representación, por otra parte, puede que hicieran de forma aproximada en cursos anteriores .

En el 26% de los casos no puede saberse el procedimiento que los alumnos utiizan para representar √2 en la recta y las representaciones no son correctas. Un 6% utiliza otros procedimientos y un 10% no contesta.

-En el caso de las expresiones numéricas con raíces cuadradas (como es el caso de 3√2), un 32% de los alumnos contesta correctamente trasladando tres veces a partir de 0 la medida que previamente habían calculado para √2 a través del cuadrado de área 2. De nuevo, un 13% utiliza una aproximación decimal finita plausible y un 3% utiliza una aproximación decimal finita errónea. En un 10% de los casos no es posible determinar qué procedimiento emplean los alumnos para asignar un punto de la recta a este número en cuestión. Un 3% da respuestas situadas en la categoría de Otras. Y, finalmente, en este apartado aumenta considerablemente el número de alumnos que no contestan (39%); esto puede ser debido a que no se hizo hincapié en clase sobre la representación de este tipo de irracionales.

-Por último, en lo que respecta a la asignación de puntos de la recta a números negativos (racionales e irracionales), un 80% de los alumnos aproximadamente no tiene ningún problema al respecto; alrededor del 15% no contesta, y hemos de señalar como casos especiales el de un alumno que representa los negativos a la izquierda del 0, pero tomando como punto de partida la unidad negativa y poniento -0,333.... a partir de ésta tomando la distancia hacia la derecha; y el caso de otro alumno que expone el siguiente argumento "no se podría poner en la recta -√2 porque no se puede dibujar un cuadrado de área 2 que tenga de lado -√2; y, finalmente, el de un niño que representa bien los números, pero con el problema de la lateralidad invertida (los números positivos a la izquierda del 0 y los negativos a la derecha), constatado en el pretest.

-Pregunta 6:

Tabla 5.67: Frecuencias sobre la biyección racionales- puntos de la recta.

a)			b)			c)									
1	2	3	1	2	3	1	2	3	4	5	6	7	8	8	10
11+ (1)	17+ (1)	1	10+ (1)	16+ (1)	3	2	5	2	3	3	6+ 4´+ 1*	2 +3 a +1 b+ 2c	3+ 3*	0	2

<u>Resultados:</u>

Llama la atención el porcentaje de respuestas afirmativas a la pregunta sobre la creencia de que a todo punto de la recta corresponda una fracción (39%), frente al de respuestas negativas (58%); 1 alumno no contesta. Las respuestas al segundo interrogante (sobre si están de acuerdo con el argumento de que todas las medidas son conmensurables con la unidad y, por tanto, a todo punto de la recta correspondería una fracción) son coherentes con las respuestas a la pregunta anterior; incluso en el caso de 2 alumnos (6% del total) que creen que a todos los puntos de la recta corresponden a fracciones, pero no están de acuerdo en que todas las longitudes sean conmensurables con la unidad; la razón de esta aparente paradoja es que para representar números en la recta, algunos podemos calcularlos exactamente y otros sólo podemos poner su aproximación.

-En cuanto a los argumentos:

-El argumento en contra del empleado por el supuesto alumno ("todos los puntos de la recta corresponden a fracciones, puesto que todas las longitudes son conmensurables con la unidad") que más emplean los alumnos es el de la existencia de puntos en la recta correspondientes a números irracionales: 35%; algunos de los niños se refieren a los números irracionales sólo en forma de decimales infinitos no periódicos, y la observación corresponde a un alumno que se refiere a los números irracionales como "irreales".

-Otra buena parte de los alumnos (26%) hace referencia a la existencia de longitudes inconmensurables, bien en términos de medida o proporciones, o en términos numéricos o incluso relacionando correctamente el ámbito numérico y el geométrico. Algunos de estos alumnos añaden también el argumento anterior.

-Un 10% alude al conocimiento establecido de que la recta la llenan los Números Reales. Otro 10% hace alusión a las limitaciones físicas con las que nos encontramos a la hora de decidir sobre la conmensurabilidad-inconmensurabilidad de las longitudes y su representación en la recta, y un 6% se limita a decir que, en principio, pensaban igual que el alumno sin explicitar porqué motivo han cambiado de opinión.

-Además, hay un 6% de respuestas incorrectas en las que los alumnos rechazan el método del alumno por considerarlo erróneo.

-En cuanto a la justificación de las respuestas afirmativas, la mayoría pertenece a alumnos que adoptan, sin más, el argumento expuesto y a otros que no dan explicación o dan argumentos situados en el apartado de Otros, entre los que podemos señalar como ejemplo el de un alumno que dice que "los irracionales tienen otra recta" o el de otro que afirma que"hay infinitos números al igual que hay infinitas cifras por lo que a todo punto le corresponde un número".

En general, aunque es alto el número de alumnos que después del trabajo didáctico dedicado all aspecto geométrico de los números irracionales, siguen pensando que todas las medidas son conmensurables con la unidad y que a todos los puntos de la recta corresponderían fracciones (39%), es importante notar que también hay un número considerable de alumnos que ha superado esta creencia y argumenta en términos de existencia de longitudes inconmensurables con la unidad (26%), lo cual puede considerarse un logro en cuanto a comprensión en alumnos de este nivel; además hasta un 35% de los alumnos esgrimen el argumento de que existen puntos en la recta correspondientes a números irracionales.

En suma, aunque las respuestas erróneas a la cuestión tengan una frecuencia elevada, es importante constatar la coherencia de los argumentos dados por una buena parte de los alumnos al conflicto entre la primitiva creencia en la conmensurabilidad de todas las longitudes y el hecho de que los números racionales no llenen la recta numérica, más aún teniendo en cuenta que este conflicto no había sido planteado previamente en clase y que los niños han tenido que poner en juego conexiones entre los conceptos de conmensurabilidad-fracciones/decimales infinitos no periódicos- números irracionales-medidas inconmensurables/puntos de la recta, que no habían sido explicitadas con anterioridad.

V. 3 Reflexión y toma de decisiones sobre la Fase de Acción 2

V. 3. 1 Reflexión sobre la Comprensión del Contenido

A continuación, realizaremos una reflexión sobre la Comprensión de los alumnos en torno a los contenidos del Número Real que se han planteado en la Fase de Acción 2. Para ello, analizaremos diversos aspectos relativos a los dos Focos de Investigación planteados, haciendo uso de los datos disponibles, localizados en la Observación a partir de las Cuestiones de Investigación específicas, las Cuestiones Complementarias de investigación y el Diario de la profesora-investigadora.

Foco de Investigación 1: Representaciones simbólicas de los Números Reales

Tipología de expresiones decimales que los alumnos consideran posibles, significado que atribuyen a las mismas, y discriminación de distintas clases de Números Reales a partir de esta tipología. Evolución de la comprensión a lo largo del proceso didáctico:

-En la *primera ocasión en que se plantea esta cuestión* a los alumnos (Cuestión de Investigación 1) se observa que:

.En general, éstos están familiarizados con los *decimales periódicos* y *no tienen problemas* en suministrar ejemplos de los mismos, ni en determinar su procedencia.

.Por lo que respecta a los *decimales infinitos no periódicos, la mitad de los niños explicita la existencia* de este tipo de expresiones decimales, y los *ejemplos* que suministran corresponden en su mayoría a *raíces cuadradas* y a *decimales con cifras arbitrarias* (aunque este último tipo de ejemplos puede venir infuenciado por los comentarios de la profesora-investigadora al comienzo de la actividad); también *aparece el número* π

La *procedencia* de los decimales infinitos no periódicos se atribuye, en general, a las *raíces cuadradas (incluso en el caso de bastantes expresiones con cifras arbitrarias)*; otros alumnos *no saben* la procedencia, y algunos *atribuyen la procedencia de* π *a una fracción* (interpretando la definición: longitud de la circunferencia/diámetro).

En la interacción didáctica hubo ocasión de matizar la interpretación que los alumnos hacen de la procedencia de los decimales infinitos no periódicos, en general, que atribuyen erróneamente a las raíces: *algunos niños pensaban que los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias podían provenir de operaciones (aunque no se supiera qué operación determinada, en concreto, da lugar a esa expresión determinada). Nuestra interpretación es que, al tratarse de un discurso especulativo, los niños especulan y no ven necesidad de delimitar los términos ni de ajustarse a datos concretos; esto es razonable si se tiene en cuenta que los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias no han sido generados por ellos a raiz de operaciones, ni siquiera como una extrapolación lógica, sino que son entes a los que los hemos enfrentado nosotros (bien por comentarios de la profesora, o bien mediante el contacto que hayan tenido con estas expresiones en los libros de texto), y sobre los que hemos pedido una interpretación.*

-Cuando, en las *proximidades del final del proceso didáctico*, se vuelve a plantear esta cuestión (Cuestión de Investigación 1, bis), se observa que:

.Al recopilar y clasificar todos los tipos de decimales infinitos que conocen, un *alto porcentaje de alumnos distingue entre los Decimales Periódicos y los Infinitos no Periódicos, aunque dentro de estos últimos la distribución entre tipos y subtipos que se mencionan es muy variada.*

.Por lo que respecta a los ejemplos suministrados para los distintos tipos de expresiones decimales, *sigue sin haber problemas relevantes en los ejemplos de decimales periódicos* dados por los alumnos.

Los *porcentajes más altos en los decimales infinitos no periódicos corresponde por orden a expresiones decimales de irracionales conocidos, como* π *y el número de Oro, raíces cuadradas, y decimales infinitos no periódicos que siguen una regularidad*; *disminuye notablemente el número de ejemplos de decimales infinitos no periódicos que no siguen una regularidad.*

.En cuanto a la *procedencia* de los distintos tipos de expresiones decimales infinitas, *la mayoría de los alumnos responde correctamente en el caso de los decimales periódicos* (aunque algunos extrapolan la procedencia a partir de una división al caso de 0,999..., sin tener en cuenta la particularidad del mismo).

También hay un *buen índice de respuestas correctas en las raíces cuadradas y en el caso de los decimales infinitos no periódicos de creación arbitraria*. Llama la atención el que haya *bastantes alumnos (cerca de la mitad) que atribuyan correctamente la* *procedencia de π y el número de Oro a proporciones*; sin embargo, muy pocos atribuyen también esta procedencia a irracionales como las raíces cuadradas. En el caso del número π, se observa que *varios niños piensan que proviene de una fracción* (Longitud de la circunferencia/Diámetro), que es una respuesta sobre cuya interpretación habría que profundizar con los alumnos para precisar los términos que hacen esta respuesta correcta o incorrecta. *Algunos alumnos atribuyen erróneamente la procedencia de una fracción o división a decimales infinitos no periódicos, especialmente en caso de que tengan cifras arbitrarias.*

.Por lo que respecta a la organización de la clasificación, se observa que, en general, *los alumnos tienen una buena noción de tipos de decimales infinitos y no tienen problema en presentar un buen número de ejemplos, pero a efectos de una clasificación estructurada, se notan deficiencias.* La más importante consiste en no discriminar entre tipos y subtipos de decimales infinitos no periódicos, y ponerlos al mismo nivel unos y otros; también hay alumnos que son capaces de dar ejemplos más específicos que los tipos de decimales infinitos que pueden discriminar a nivel verbal.

En la Puesta en Común de la actividad F18, se observó además que, dentro del apartado correspondiente a *los "decimales infinitos no periódicos que vienen de algo", los alumnos dividían en diferentes subtipos: los que vienen de raíces, de ecuaciones, de proporciones, e incluso los que vienen de teoremas; esta subclasificación, fruto de su experiencia con distintos tipos de actividades, se solapa (aunque resulta significativa a efectos didácticos).*

-En general, se observa que los alumnos no tienen, desde un principio, dificultad para discriminar entre los decimales periódicos y los no periódicos. Dentro de los primeros, no tienen problemas relevantes para suministrar ejemplos e indicar su procedencia, con la excepción mencionada de la procedencia de una división al caso de los decimales con periodo 9.

Dentro de los decimales infinitos no periódicos, podemos ver que se produce una evolución en la comprensión de los alumnos durante esta fase de acción. En un principio, sólo la mitad de los alumnos reconoce la existencia de los decimales infinitos no periódicos y los ejemplos que suministran corresponden principalente a raíces cuadradas, aunque también se mencionan decimales no periódicos con cifras arbitrarias (fruto quizás del estímulo de la profesora-investigadora al comienzo de la actividad) y alguna alusión al número π. Sin embargo, hay bastante confusión y lagunas por lo que se refiere a la procedencia de estas expresiónes decimales, la cual se atribuye en la mayoría de los casos a las raíces cuadradas.

Hacia el final del proceso didáctico, los niños están familiarizados con decimales infinitos no periódicos de diversos tipos, y mencionan especialmente el número de Oro y el número π (sobre los que han realizado trabajos varios grupos), junto con las raíces cuadradas y los decimales con cifras arbitrarias que siguen una regularidad. En este sentido, llama la atención la disminución en el suministro de decimales infinitos con cifras *arbitrarias con respecto al comienzo del tratamiento didáctico; esto puede deberse a que, una vez que los alumnos han trabajado con diversos tipos de decimales no periódicos atendiendo a su origen, su utilidad y su razón de ser, tengan preferencia o resulten más significativos, incluso en el caso de que el motivo de su aparición sea el estar construidos con arreglo a una regularidad, que aquellos que según ellos, no responden más que a dar cifras al azar. En este caso los alumnos actúan de acuerdo con una intuición acertada: si no se conoce el procedimiento para obtener las sucesivas cifras de un número, tal número no está bien definido y, por tanto, las cifras aportadas no son suficientes para decir que hay un número; de esas expresiones lo único admisible es considerarlas como una aproximación.*

También los alumnos han progresado en su capacidad de identificar el origen de decimales infinitos no periódicos de distinto tipo: raíces cuadradas, proporciones, solución de ecuaciones. Aunque se observa que esta clasificación se solapa y los alumnos tienden a atribuir al caso de las raíces cuadradas, por ejemplo, una sola procedencia (aquella con la que están más familiarizados). En cualquier caso, desde el punto de vista didáctico, resulta positiva esta primera clasificación, fruto del trabajo de los alumnos en distintas situaciones. Se detectan también algunos errores en este punto; los más importantes corresponden a atribuir la procedencia de una fracción a decimales infnitos no periódicos (que sigue persistiendo en algunos alumnos que no han sido capaces de seguir el ritmo general), y la atribución de la procedencia de π a una fraccion o división: la longitud de la circunferencia entre su diámetro; sobre este punto volveremos más adelante en el a partado correspondiente a la medida de longitudes.

Como observación final, señalaremos que aunque los alumnos, en general, tienen una buena noción de tipos de decimales infinitos y no tienen problema en presentar un buen número de ejemplos, así como en asignarles una procedencia, a efectos de una clasificación estructurada, se aprecian deficiencias, que serán comentadas más adelante.

Correspondencia entre la notación habitual operatoria y decimal de los Números Reales:

-Al principio de la Fase de Acción 2, en el Cuestionario de Repaso, se detecta que *hay bastantes alumnos que son capaces de hacer la correspondencia fracciones-decimales finitos o periódicos, y dejar aparte los infinitos no periódicos. Sin embargo, no parece que muchos de ellos sean capaces de seguir el argumento* que establece que los decimales infinitos no periódicos no corresponden a números racionales porque no pueden expresarse en forma de fracción, al ser la expresión decimal proveniente de una fracción necesariamente finita o periódica.

A pesar de que, *en general, los niños opinan que los decimales infinitos no periódicos no pueden provenir de una fracción*, se suscitó desde el primer momento la *duda sobre el número π*, porque alguno recordó que este número es infinito no periódico y proviene de la "división entre la longitud de la circunferencia y su diámetro".

-En la primera actividad en la que se trabajó con raíces cuadradas (sesión del 3-2-94), salio a la luz que hay alumnos que concebían $\sqrt{a}$ como una operación para hallar el número que multiplicado por sí mismo da a; la operación podía dar un resultado exacto o no pero, en cualquier caso, para estos niños, $\sqrt{a}$ era una operación y su expresión decimal era el resultado de una operación, no un número.
Al intentar hallar $\sqrt{2}$ con la calculadora se obtiene una expresión decimal finita. Para comprobar si esa es la expresión exacta de $\sqrt{2}$, la profesora-investigadora propuso multiplicar el número decimal por sí mismo por el algoritmo tradicional; entonces una alumna dedujo que la expresión decimal de $\sqrt{2}$ tenia que ser infinita, porque si fuera finito, al multiplicar la última cifra por sí misma no podría dar 2.
También en esta actividad se planteó el hecho de si $\sqrt{7}$ podía ser periódica; cuando se estableció que si fuera periódica se podría expresar como una fracción, los alumnos, en general, afirmaron que entonces no podía ser periódica. *Al parecer, para ellos, las fracciones entraban en la categoría de "números exactos", y como se había establecido que no hay ningún número exacto que multiplicado por sí mismo dé 7, deducían a partir de ahí que $\sqrt{7}$ no puede ponerse como una fracción. Otros intuían que no puede ponerse como una fracción porque "un radical es algo distinto de una fracción", y de ahí deducían que la expresión de $\sqrt{7}$ no puede ser periódica.*
En cualquier caso, los alumnos no tenían necesidad de una demostración. A pesar de ello, la profesora propuso como ejercicio voluntario la prueba formal a partir de una actividad; dos alumnas bastante adelantadas intentaron hacerlo, pero el razonamiento resultó demasiado sofisticado para ellas, incluso con la ayuda de la profesora.
-En otra actividad posterior se observa que *los alumnos no tuvieron mucho problema en aceptar el argumento propuesto por una compañera en la actividad anterior, que nos permite establecer la infinitud de la expresión decimal de algunas raíces cuadradas: si el número de cifras de una expresión decimal es finito, la última cifra que resulta de multiplicarlo por sí mismo tienen un número finito de posibilidades, que en la mayoría de los casos no coinciden con la última cifra del número cuya raíz queremos hallar. Sin embargo, el razonamiento que permitiría establecer que la expresión decimal de esas raíces cuadradas tampoco podría ser periódica: si lo fuera correspondería a una fracción, que multiplicada por sí misma daría una fracción también, nos llevaba finalmente a si $\sqrt{2}$ puede expresarse o no en forma de fracción.*
Después de que los alumnos intentaran comprender el argumento mediante reducción al absurdo que aparecía en su libro de texto y no lo consiguieran, y después del intento fallido de algunos alumnos por comprender la actividad voluntaria para demostrar que $\sqrt{2}$ no puede ponerse en forma de fracción, *la profesora-investigadora optó por tomar simplemente el resultado establecido, sin intentar que los alumnos fueran capaces de seguir un argumento justificativo, en principio. Parece que éstos se perdían en la necesidad de la profesora-investigadora de establecer rigor; a ellos les bastaba con su*

intuición de que las raíces cuadradas no exactas tienen una expresión decimal infinita y en general, no periódica; aunque había alumnos que seguían manifestando sus sospechas de que le pudiera salir periodo alguna vez.

-En una de las exposiciones de los trabajos de los alumnos sobre el número π se planteó el *dilema de si se sabe que la expresión decimal de π es infinita, o no se sabe si va a acabar a alguna vez; discriminar entre ambas opciones no resultaba inmediato para los alumnos*. Cuando se estableció que se sabe que es infinita (uno de los datos históricos que se manejan es que fue demostrado en el siglo XVIII), *los alumnos manifestaron interés en saber cómo se puede saber que es infinta.* La profesora estableció que la respuesta a esa cuestión era demasiado difícil para el nivel en que estábamos, ante lo cual los alumnos siguieron insistiendo; quizás se hubiera debido enfocar su justificación, no en términos de dificultad, sino en que carecemos de las herramientas necesarias a este nivel.

Más adelante, en el curso de una exposición posterior, los alumnos establecieron el *dilema de si puede saberse que la expresión decimal de π nunca será periódica y, sobre todo, ¿cómo puede llegar a saberse eso, tratándose de una expresión decimal infinita? Los alumnos fueron muy insistentes en este punto, y se suscitó en ellos un interés que no había surgido hasta entonces por ninguna cuestión conceptual.* De nuevo la profesora-investigadora determinó la imposibilidad de comprensión en el nivel en el se realizaba la experiencia.

-Desde un principio, los alumnos parecen asociar los decimales periódicos con las fracciones y los números racionales, y establecer, en general, que los decimales infinitos no periódicos no pueden provenir de una fracción. De manera intuitiva, establecen una dicotomía entre las raíces cuadradas no exactas y las fracciones y, por este motivo, atribuyen a las raíces una expresión decimal infinita no periódica. Sin embargo, en la gran mayoría de los alumnos, como estas conexiones no están bien sustentadas por razonamientos lógicos (muy difíciles de asimilar por los niños del nivel en que nos encontramos), surgen dudas e inseguridades al enfrentarse con preguntas como la de si es posible saber que la expresión decimal de las raíces cuadradas no enteras y del número π serán infnitas (a diferencia de no saber si lo serán o no), y como saber si en la expresión decimal de estos números podrá surgir un periodo alguna vez.

A nuestro juicio se detectan varias dificultades en relación con la correspondencia entre la notación habitual de los irracionales y su notación decimal infinita no periódica:

.La correspondencia biunívoca fracción-decimal periódico es establecida por los alumnos, en general, a un nivel intuitivo, sin estar sustentada por una justificación es términos de razonamiento lógico-deductivo. El razonamiento por el que se ha intentado en diversos momentos establecer esta conexión se ha mostrado difícil de asimilar y manejar con cierta soltura para la mayoría de los niños.

.Los alumnos establecen una dicotomía entre las raíces no enteras y las fracciones; no necesitan demostración al respecto. Esta conexión se establece, por tanto, de forma muy débil, y aunque la profesora intenta reforzarla introduciendo a algunos alumnos (voluntarios) en la demostración, el resultado es que este tipo de razonamiento se muestra excesivamente sofisticado, incluso par los alumnos más avanzados. La debilidad de esta conexión, hecha sólo en términos de conocimiento establecido, saldrá a la luz en momentos posteriores y se revelará como un obstáculo para avanzar sobre otros aspectos.

.No es inmediata la conexión entre la dicotomía raiz cuadrada-fración, y el que la expresión decimal de las raíces cuadradas no pueda ser periódica. Algunos alumnos establecen esta conexión, pero otros siguen teniendo dudas al respecto. (Esto puede tener su origen en la dificultad señalada en el primero de estos puntos).

.En el caso de otros irracionales, como el número π no se ha establecido la dicotomía con las fracciones (es más, la misma definición puede llevar a confusión). Después de haber explorado en torno al concepto de π, a estos niños les ha resultado mucho más intrigante determinar cómo puede saberse que su expresión decimal será infinita y que nunca podrá aparecer un periodo. El interés conceptual suscitado por esta cuestión y la insistencia de los alumnos en profundizar en ella ha tenido que quedar en suspenso en esta etapa inicial.

Ninguno de estos problemas parece sencillo de solucionar trabajando en una clase de alumnos de un nivel similar al de nuestra exprериencia de campo.

-Mención aparte merece el *caso del periodo nueve*. En la interacción didáctica sobre el Cuestionario de Repaso, se vio que los alumnos eran capaces de establecer que 0,999....= 1, y de extrapolar este resultado al caso de cualquier decimal acabado en "periodo 9 ". Pero encontraban paradójico este resultado, que obtenían al aplicar la regla habitual para transformar las expresiontes periódicas en fracción, y pensaban, en general, que la regla "aproximaba". La profesora era consciente de la *carencia de instrumentos para discutir la cuestión con más profundidad (y de la dificultad de establecerlos con alumnos de este nivel)*, y optó por establecer la igualdad en términos de conocimiento decretado.

<u>La construcción del concepto de Número Real, a través de sus distintas representaciones numéricas y la interrelación entre las mismas:</u>

-En el Cuestionario de Repaso se pone de manifiesto que los alumnos tienen dificultades para establecer la diferencia entre los conceptos de número entero, racional y decimal, y la relación entre ellos. Además en la Puesta en Común se observó que *no eran capaces de discriminar las distintas opciones que se presentaban sobre la correspondencia fracciones- decimales periódicos- números racionales* .

-A raiz de las deficiencias observadas en el Cuestionario de Repaso, y después de haber discutido e intentado subsanar dichas deficiencias, se propuso a los alumnos la contestación a una pregunta (Tarjeta 1) sobre la definición de los números racionales; dicha *definición pretendía incorporar las distintas representaciones numéricas de los racionales (fraccionaria -teniendo en cuenta las fracciones equivalentes-, y decimal finita o periódica).* Los resultados mostraban que *sólo un 12% de los alumnos era capaz de discriminar los errores o carencias de distintas opciones de definición,* y que *más del 17% de ellos aceptaban que los racionales podían tener una expresión decimal infinita no periódica.*

Es importante aclarar estos aspectos, relacionados con la comprensión del concepto de número racional, para avanzar en la construcción del concepto de Números Real.

-En una de las actividades iniciales de la Fase de Acción 2 propiamente dicha (Ficha F16), algunos niños volvieron a manifestar dudas sobre si los decimales infinitos no periódicos corresponden a números racionales. Otros compañeros explicaron que el no tener periodo implica que no vienen de una división (aunque no especifican por qué es así, es decir, el razonamiento que permite deducir que toda expresión decimal que proviene de una división será finita o periódica) y, por tanto, no les corresponde una fracción.

Otro de los argumentos utilizados por los alumnos para justificar que los decimales infinitos nos periódicos no corresponden a fracciones: el que no hay regla para convertirlos es falaz; el que ellos no la conozcan no quiere decir que no exista. Este argumento se vuelve a esgrimir en la siguiente actividad (Ficha F17), pero es difícil que los alumnos adviertan la falacia.

-En el Examen realizado al final de la Fase de Acción 2, los resultados muestran que sólo un 25%, aproximadamente, de los alumnos son capaces de asociar correctamente los números racionales e irracionales a sus notaciones respectivas (tanto habitual operatoria como decimal). Unos pocos más olvidan mencionar las fracciones equivalentes como correspondientes al mismo racional y/o no son exhaustivos a la hora de mencionar todos los subtipos de notaciones decimales infinitas no periódicas.

Es importante señalar que hay alumnos en los que se observa confusión entre el concepto de número y sus representaciones, ej: "Las fracciones forman parte de los racionales". Esto se registra en un 6% del total de niños, tanto en el caso de los racionales como en el de los irracionales.

Más de un 40% de la clase tienen una comprensión bastante pobre de los conceptos de número racional e irracional en relación a sus representaciones numéricas: sólo son capaces de asociar los números racionales o irracionales a una de sus representaciones, o no son capaces de hacer algún tipo de caracterización sistemática y sólo dan rasgos o ejemplos aislados, o bien hacen asociaciones incorrectas o no contestan a la pregunta.

No ha sido posible determinar a partir de la pregunta formulada en el examen la calidad de los razonamientos mediante los cuales los alumnos hacen sus asociaciones.

-La definición del concepto de número racional, que se ha pretendido hacer a partir de las correspondencia biunívoca entre las representaciones fraccionaria (teniendo en cuenta que todas las fracciones equivalentes representan un mismo número racional) y decimal finita o periódica de los números racionales, no resulta fácil de asimilar para los alumnos. Estos tienen bastantes dificultades en discriminar los errores o carencias en las conexiones establecidas entre dichas representaciones en distintas definiciones que se proponen como alternativas, e incluso hay una parte de los alumnos que sigue pensando que los racionales pueden tener una expresión decimal infnita no periódica. Los argumentos mediante los cuales otros compañeros intentan justificar que esto no es posible translucen falta de rigor e incluso falacias, como el que "este tipo de decimales no pueden pasarse a fracción porque no hay una regla para convertirlos"; sin embargo, en un nivel general que permita un ritmo de clase razonable, la profundización en el rigor de las conexiones queda fuera de nuestro alcance con estos alumnos. Este es uno de los puntos que se registró como problemático en el apartado anterior, y que se revela como fundamental para la comprensión del concepto de número racional.

Con estas consideraciones, ***la comprensión del concepto de Número Real sobre la base de su representación simbólica, mediante la conexión entre las distintas notaciones numéricas resulta algo pobre****. Al final del proceso didáctico se observa que alrededor del 25% de los alumnos son capaces de asociar correctamente los números racionales e irracionales a sus notaciones respectivas, tanto habitual operatoria como decimal, sin que eso signifique que puedan razonar dichas asociaciones o conexiones. Más de un 40% de los alumnos del grupo lsólo son capaces de asociar los números racionales o irracionales a una de sus representaciones, no logran hacer algún tipo de caracterización sistemática y sólo dan rasgos o ejemplos aislados, o bien hacen asociaciones incorrectas o no contestan a la pregunta.*

También hemos de señalar que hay alumnos en los que se sigue observando confusión entre el concepto de número y sus representaciones, ej: "Las fracciones forman parte de los racionales".

<u>La idea de infinito en el sistema de notación decimal:</u>

-Después de la primera fase de acción, sigue sin estar clara la disyuntiva sobre si el número más grande "existe pero no podemos saber cuál es" o "sabemos que no existe". Los alumnos parecen decantarse por la segunda opción, pero el argumento definitivo lo proporciona uno de ellos que razona así: "Suponte que hay alguno que es el más grande, le llamo x, entonces x + 1 es más grande". El que los alumnos sean capaces de manejar argumentos como éste es un punto importante, porque en principio el "infinito" era para

ellos un terreno bastante nebuloso, y progresivamente se pone de manifiesto cómo van siendo capaces de articular una discusión y delimitar el lenguaje en torno a este tema.
-Sin embargo, en la exposición del trabajo de unas alumnas sobre el número de Oro, es interesante notar la confusión que se observa cuando una alumna explicita la siguiente conexión errónea relativa al infinito: el hecho de que la proporción aúrea se mantenga infinitamente en figuras semejantes hechas a partir del pentágono regular es la razón de que la expresión decimal del número de Oro sea infinita no periódica.
-Con respecto a la noción de infinito, parece que hay un progreso en los alumnos en cuanto a la articulación del lenguaje y la determinación y manejo de elementos en relación con el Infinito Potencial.
Sin embargo, en lo que se refiere al Infinito Actual, y más concretamente a la conexión entre una notación operatoria y su expresión decimal infinita no periódica, se ha ido poniendo de manifiesto a lo largo del proceso didáctico un punto conflictivo para la comprensión de los alumnos; a nuestro juicio, esto es debido a que el razonamiento por reducción al absurdo, sobre el que se sustenta esta conexión, es demasiado sofisticado para estos alumnos, ya que implica un desarrollo del pensamiento lógico deductivo que está lejano al nivel que actualmente poseen estos alumnos.

Foco de Investigación 2: Medida de longitudes en el ámbito de los Números Reales
Capacidad de los alumnos para conectar la conmensurabilidad de una longitud con respecto a otra tomada como unidad con la expresión racional (fracción, decimal periódico) de dicha longitud en esa unidad.
Capacidad para establecer la consiguiente inconmensurabilidad con respecto a la unidad de longitudes cuya expresión no es racional (lados de cuadrados de área dada, longitud de la circunferencia con respecto a su diámetro, lados de figuras con las proporciones áureas...):
Antes de comenzar la reflexión sobre este punto, recordamos que, dada la dificultad de la demostración de la inconmensurabilidad de longitudes en el terreno geométrico (Apartado II.2.2), decidimos introducir dicho concepto basándonos en la correspondencia expresión fraccionaria - longitudes conmensurables con la unidad de medida, y deduciendo a partir de la existencia de longitudes cuya expresión decimal es infinita no periódica, que por tanto no corresponde a fracciones, el que dichas longitudes no son conmensurables con la unidad de medida, es decir, son inconmensurables. Con este tratamiento, los aspectos más interesantes en relación a la comprensión de los alumnos son los siguientes:
-En la actividad F17 (realizada a mediados del proceso didáctico), los alumnos tenían que *medir el cuadrado construido sobre otros dos de áreas 4 y 9.* En principio comenzaron a hacerlo a través de instrumentos graduados: regla con milímetros, hoja de papel con cuadricula. Ante la llamada de atención de la profesora sobre que el cuadrado que había que medir estaba en relación a otros dos, algún alumno apuntó que podía medirse

mediante el *teorema de Pitágoras*. Después de trabajar sobre él, la profesora-investigadora propuso que se midieran las longitudes con respecto a la misma unidad de los otros dos cuadrados; algunos alumnos intentaron entonces *conmensurar con los procedimientos que habían ideado* para otras actividades (F12 y F14).

Cuando la profesora preguntó si por los procedimientos para conmensurar longitudes podría obtenerse alguna vez la medida exacta, hubo alumnos que respondieron negativamente, pero con mucha inseguridad. Al final, se llegó a establecer que si se mide la longitud del lado de un cuadrado de área 13 a través de nuestros procedimientos físicos de conmensuración obtenemos resultados que pueden ser muy precisos, pero nunca exactos, porque se trata de aproximaciones finitas. Aún así, parece que el tema no quedó demasiado claro.

-La actividad sobre el Tangram, planteó de nuevo el tema de la medida de longitudes irracionales. En esta ocasión, para medir los lados de las piezas del Tangram, los alumnos no hicieron ademán de utilizar la regla, sino que tomaron como unidad el cateto o la hipotenusa de la pieza más pequeña de tangram. Dos grupos conmensuraron con los procedimientos habituales, y otro midió a partir del teorema de Pitágoras. *Los resultados obtenidos a partir de los procesos de conmensuración eran buenas aproximaciones de los obtenidos mediante el teorema de Pitágoras*, y es interesante señalar que hubo alumnos capaces de conectarlos tomando distintas unidades de medida. Cuando la profesora-investigadora preguntó a los alumnos cuáles eran los resultados correctos, si los obtenidos a partir del teorema de Pitágoras o los obtenidos mediante la conmensuración, *los alumnos estuvieron de acuerdo en que los obtenidos por el teorema, pero para ellos la razón no es que se trate de medidas inconmensurables, ¡sino que las fómulas son las que dan el resultado correcto! Cuando la investigadora intentó profundizar, preguntando por qué los dos resultados salían diferentes, los alumnos se quedaron perplejos y comenzaron a manifestar dudas sobre si el teorema de Pitágoras era "exacto" y sobre la manipulación algebraica en el teorema de Pitágoras.* La discusión al respecto encierra una complejidad que excedía los límites que nos habíamos propuesto en la dinámica de nuestro trabajo.

Más adelante en esta misma actividad, después de manipular las raíces cuadradas, los alumnos convinieron en que $\sqrt{2}$ tiene un punto en la recta que le corresponde. *Cuando la profesora les preguntó si creían que entre esa longitud y la unidad se podrá buscar una parte que encajara, aunque fuera muy pequeña, los alumnos contestaron que "Claro". Ante la insistencia de la profesora-investigadora, algunos niños empezaron a sospechar y sacaron a colación el carácter infinito de la expresión decimal de esos números. La profesora les explicó que si hubiera una parte que encajara en ambas longitudes, eso daría lugar a una fracción, y entonces no sería un decimal infinito no periódico. Nuestra intuición en este caso es que los alumnos no son capaces de entender la correspondencia rigurosamente establecida entre la expresión decimal infinita no* *periódica y la no existencia de una parte alícuota, sino que asocian ambas ideas intuitivamente (quizás apoyándose en la idea de que no existe una parte decimal alícuota).*

-A raiz de la exposición de los trabajos sobre el número π se observa que:

En un principio es difícil plantear a los alumnos de forma genérica la pregunta de si la longitud de una circunferencia con respecto a su diámetro puede medirse con una fracción, ni siquiera estableciendo la analogía con el caso de la diagonal y el lado de ciertos cuadrados, que ellos ya habían estudiado. Esto parece lógico a posteriori, puesto que *hemos visto que no resulta fácil para los alumnos la conexión entre la expresión decimal infinita no periódica correspondiente a la medida de una longitud y la no existencia de una parte alícuota entre dicha longitud y la unidad de medida*. La profesora intentó hacer aflorar esta conexión entre los alumnos, pero éstos no compartían sus supuestos implícitos y se mostraron perplejos (ej: no se mide con una fracción, "se mide con una regla"). *En este sentido, cabe destacar la enorme importancia que tiene la construcción de un lenguaje común para poder plantear y discutir determinados aspectos en el proceso de construcción del Número Real, en especial aquellos que se refieren al terreno de la medida. En este terreno, los alumnos permanecen circunscritos a su experiencia con la medición a través de instrumentos graduados y a través de fórmulas algebraicas; si queremos tratar el problema de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad de longitudes, ha de construirse y consolidarse un lenguaje común con los alumnos, a través de experiencias al respecto.*

A partir de la discusión del caso de ciertas raíces cuadradas, los niños convinieron en que no todas las longitudes pueden medirse mediante números racionales.

Sin embargo, a lo largo del desarrollo de la exposición, se detectó que había alumnos que no concebían la medida de una longitud como la expresión de la razón de la misma a a una unidad de medida; según ellos, la longitud correspondiente a π no puede hallarse porque no puede realizarse la operación aritmética que prescribe la fórmula, ya que habría que multiplicar por un número infinito *(esto vuelve a poner de manifiesto la importancia de la observación anterior)*. La profesora-investigadora intentó partir de la definición de π en términos de la relación (o razón) existente entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, y planteó si dicha relación puede ser expresada mediante una fracción; entonces intentó aclarar que hay razones que no pueden expresarse en forma de fracción y estableció la analogía con la relación entre la diagonal y el cuadrado de área 2, aunque los alumnos no parecían seguir su discurso en su mayoría.

-A raiz de la exposición de los trabajos sobre el *número de Oro* de una pareja de alumnas, surgió la oportunidad de establecer la *conexión número-expresión de proporciones*, debido a la extrañeza que se manifiestaba en clase porque un trabajo sobre un número (el número de oro), no mencione cifras por ninguna parte, y sólo hable de proporciones. Uno de los puntos más interesantes fue la siguiente *cuestión, planteada* *por un alumno: ¿Cómo dos longitudes que tienen distinto tamaño son medidas por el mismo número?* La profesora-investigadora aclaró que respuesta estaba en el concepto de Proporción: medida de distintas longitudes en la misma proporción con respecto a las unidades de medidas respectivas. *Los alumnos manifiestaron su comprensión estableciendo la analogía con el número* π.

Con respecto a la comprensión del mantenimiento de las proporciones y de la unicidad de el número que las expresa, pensamos que, aunque lo más probable es que no todos los alunmos llegaran a tener una idea clara al respecto, el haber manejado unidades no estándar y realizado experiencias en el terreno de la conmensuración de longitudes (F12, F14, F17, Actividad Tangram) nos ha permitido hablar en ese lenguaje de forma natural, y a algunos alumnos, incluso entender las explicaciones a resultados que consideraban paradójicos o confusos.

-Con motivo de la Cuestión de Investigación 2 volvió a suscitarse la dificultad relativa a la "fracción" entre la longitud de la circunferencia y el lado, que no puede ser una fracción porque tiene infinitas cifras no periódicas. La profesora intentó explicar que eso quiere decir que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro es inconmensurable (es decir, que no hay una parte que encaje en las dos exactamente), pero no parecía resultar significativo para los alumnos. Al final, uno de ellos preguntó si "las fracciones que no son fracciones son las que tienen decimales arriba y abajo". *La profesora volvió a explicar la cuestión de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad, con detenimiento. Lo relacionó con el número de Oro en los distintos pentágonos, la diagonal de los distintos cuadrados y la razón de las distintas circunferencias, y el alumno se refierió a lo que tienen en común con el término "Proporción". Consideramos la utilización de este término por parte del alumno para nombrar las razones irracionales como un hallazgo importante, pero no estamos seguros de que los alumnos pudieran, en ese momento, dar el paso de la proporción a la medida de una de las longitudes fijando la otra como unidad, que enlazaría directamente con la inconmensurabilidad y la expresión numérica de los irracionales.*

-Cuando, con motivo de la actividad F18, la profesora se refirió a la dicotomía racional-irracional en términos de la oposición conmensurable-inconmensurable (con respecto a la unidad de medida), poniendo varios ejemplos, los alumnos ya parecían encontrarse más cómodos con el discurso.

-En el Examen 2, planteado al finalizar el proceso didáctico, se propone un dilema en el que los alumnos han de definirse ante la afirmación de que "puesto que todas las longitudes son conmensurables con respecto a la unidad, la recta real la llenan los números racionales". En los resultados, se observa que *una buena parte de los alumnos (26%) hace referencia a la existencia de longitudes inconmensurables, bien en términos de medida o proporciones, o en términos numéricos o incluso relacionando correctamente el ámbito numérico y el geométrico*; alguno hacen alusión a las limitaciones físicas con las que nos encontramos a la hora de decidir sobre la conmensurabilidad-inconmensurabilidad de las longitudes con respecto a la unidad y su representación en la recta. En general, *aunque es alto el número de alumnos que después del trabajo didáctico dedicado al aspecto geométrico de los números iracionales, siguen pensando que todas las medidas son conmensurables con la unidad (alrededor del 40%), es importante notar que también hay un número considerable de alumnos que han superado este nivel de comprensión y argumentan en términos de existencia de longitudes inconmensurables con la unidad, lo cual puede considerarse un logro en cuanto a comprensión con alumnos de este nivel.*

-Haciendo una revisión general de la evolución de la comprensión de los alumnos en torno a este punto, podemos decir que, si bien no resulta fácil entender el concepto de inconmensurabilidad de ciertas longitudes con respecto a otra tomada como unidad a través de su expresión decimal infinita no periódica (y por tanto no correspondiente a una fracción), sí es cierto que el trabajo sobre determinadas situaciones didácticas, conjugando la conmensuración de longitudes y la expresión de sus medidas a través de fórmulas o relaciones teóricas (correspondiente a decimales infnitos no periódicos), unidas a las explicaciones de la profesora sobre el concepto de inconmensurabilidad en términos geométricos, han hecho posible la construcción de un lenguaje común (cuyo término principal es la palabra "proporción", para referirse a razones inconmensurables) que ha permitido a varios alumnos tener una buena noción de la inconmensurabilidad, la cual son capaces de poner en juego para resolver situaciones problemáticas a las que no habían sido enfrentados con anterioridad.

<u>Capacidad para comprender la no existencia en el plano físico de longitudes inconmensurables y de cuestionarse la existencia en otro plano:</u>

-A partir de la exposición de los trabajos sobre el número π, para ayudar a la comprensión del significado de las longitudes inconmensurables, se planteó la discusión del caso de ciertas raíces cuadradas; los niños convinieron en que no todas las longitudes pueden medirse mediante los números racionales. Sin embargo, apuntaron una observación muy interesante: "si no sabemos que vienen de una raiz cuadrada, entonces sí se podría". *Es decir, hay alumnos que han llegado a captar que en el plano físico no podemos hablar de longitudes inconmensurables, sino que sólo es posible plantear esta cuestión cuando se conoce la relación en abstracto entre la longitud que se quiere medir y la unidad de medida.*

-También en el trabajo sobre el número π, los alumnos encontraron información sobre el método de Arquímedes para medir la longitud de la circunferencia a través de una sucesión de aproximaciones poligonales y lo registraron como un dato importante, estudiando incluso la técnica y exponiéndola con detalle a los compañeros. Sin embargo, no llegaron a comprender el valor de la aproximación de Arquímedes: pensaban que es más exacto medir la longitud de la circunferencia con un instrumento graduado directamente. El argumento empleado consideraba que un polígono siempre es una aproximación, mientras que con un instrumento graduado uno puede aproximarse todo lo que quiera a la medida de la longitud primitiva que se pretende medir. *En este momento no se discutió que la medida por procedimientos físicos comporta un margen de error que es más fácilmente controlable, y susceptible de reducirse cuanto se quiera por procedimientos teóricos. No se llegó a discriminar entre la medida a nivel teórico (a partir de las relaciones geométricas abstractas entre las longitudes) y la medida a través de procedimientos físicos;* si bien la profesora tampoco hizo intentos de derivar la discusión hacia este terreno, al intuir la falta de experiencia y de recursos de los alumnos para discutir sobre la conmensuración de longitudes a nivel teórico, trascendiendo el plano físico.

-*En este punto se pone de manifiesto una de las lagunas más importantes en el estudio del concepto de Número Real: en el terreno geométrico, la irracionalidad sólo aparece cuando somos capaces de trascender el apoyo constituido por la figura geométrica en el sentido físico y podemos razonar sobre ella en términos abstractos. Este tipo de razonamiento requiere un grado de madurez que los alumnos de este nivel aún no han alcanzado (no olvidemos que históricamente, la geometría nace en una sociedad, la griega, en donde el pensamiento lógico-deductivo había alcanzado un nivel de desarrollo muy importante). Por otra parte, también es cierta la carencia de formación específica que tienen los escolares de este nivel sobre razonamiento geométrico deductivo; una de las mayores lagunas del currículo actual de matemáticas para la Enseñanza Obligatoria es la inexistencia de la geometría como disciplina deductiva. Esta falta de formación en un modo específico de razonamiento se hace evidente al enfrentarnos con los problemas mencionados de la conmensurabilidad.*

<u>Representación en la recta de los Números Reales</u>

<u>Carácter de aplicación de la correspondencia Números Reales-puntos de la recta. Asignación de un punto de la recta a las distintas notaciones de los números racionales e irracionales. Procedimientos para realizar esta asignación:</u>

-En el *Cuestionario de Repaso*, hecho al comienzo de la Fase de Acción 2, se pone de manifiesto que los alumnos tienen *especial dificultad en la representación en la recta de los Números Racionales.* Para la representación de fracciones son bastantes los niños que dividen la unidad de forma desigual, e incluso toman unidades desiguales.

En general, *los alumnos no dominan la representación en la recta de las fracciones impropias con números grandes*. Cuando se trató este punto en la Puesta en Común, hubo algunos que afirmaron que "se tardaría un siglo en contar" (refiriéndose al procedimiento habitual para representar fracciones impropias en la recta); otros tenían la idea de pasar la fracción a su expresión decimal, pero esto no vale en el caso de que el decimal sea periódico. La profesora planteó entonces averiguar cuántas unidades enteras completas habría que coger para representar ese decimal y qué parte faltaría de la siguiente unidad; este procedimiento no resulta fácil de captar para los alumnos cuando se explica de forma expositiva pero, no obstante, pensamos que no sería difícil que los alumnos lo asimilaran diseñando ejercicios adecuados para tal fin.

La representación en la recta de las *expresiones decimales* presenta problemas especiales:

.En los decimales finitos no se tiene en cuenta, en general, la precisión; y no se indica el procedimiento que se ha utilizado para asignar un lugar al decimal, aunque en algunos casos, las aproximaciones sean plausibles.

.En los decimales no periódicos, se representan aproximaciones finitas.

.Aún así, es de destacar que algunos alumnos han representado las expresiones con dos o más cifras decimales, ampliando sucesivamente, mediante una lupa imaginaria, las décimas (para dividirlas en diez partes y obtener las centésimas), las centésimas para dividirlas en diez partes y obtener las milésimas, etc... Así, por ejemplo, el número 0,45, es representado dividiendo la unidad en diez partes, tomando el intervalo entre la cuarta y la quinta división, ampliándolo y dividiéndolo en diez partes y tomando cinco de ellas.

-En la tarjeta que se pasó a los alumnos *después de haber llamado la atención sobre las deficiencias observadas en el Cuestionario de Repaso*, los resultados mostraron que:

.En general, *la representación en la recta de la expresión decimal de los números racionales presenta bastante más dificultad para los alumnos que la representación de la expresión fraccionaria. Pensamos que esto puede deberse a que en la etapa de EGB se hace más hincapié en la notación fraccionaria que en la decimal a la hora de representar los números racionales en la recta numérica; sin embargo, nuestra experiencia muestra que la representación en la recta de las expresiones decimales sirve de apoyo para comprender el significado de esta notación y, además, resulta imprescindible para abordar la representación en la recta de los números irracionales.*

.La *expresión fraccionaria* suele representarse dividiendo la unidad en las partes que indica el denominador y tomando las que indica el numerador, si bien en el caso de las fracciones impropias aumenta el número de niños que pasan la fracción a su expresión decimal. *Un error cometido por algunos alumnos consiste en situarse en la unidad que indica el numerador y dividir la siguiente unidad en las partes que indica el denominador.* En el caso de la *representación en la recta de los decimales*, sólo un 25% de los alumnos toma las unidades indicadas en la parte entera y divide la siguiente en décimas, centésimas, etc..., para marcar el número indicado en la parte decimal. También aquí hemos de señalar el caso de alumnos que explican el proceso teóricamente, pero no son capaces de llevarlo a cabo a efectos prácticos. *Para los decimales periódicos, los* *creencia en que el hecho de que a todo número corresponda un punto de la recta implica el recíproco.*

Los alumnos no explicitan de forma sistemática un criterio de correspondencia que permita justificar sus opiniones acerca de la correspondencia entre los números y los puntos de la recta. Parece que los que más se acercan son aquellos que establecen la existencia de una parte alícuota entre la unidad de medida y la longitud que va desde el punto 0 al punto al que se ha de asignar un número; pero no explicitan la correspondencia "número asignado al punto"-"medida de la longitud del segmento cuyo extremo es", con respecto al segmento unidad. Tampoco en la Puesta en Común se trata este tema en más profundidad, sino que se enfoca la atención el apartado siguiente de la pregunta, es decir en el tipo de número.

.En cuanto al tipo de número que corresponde a un punto cualquiera de la recta, en general se observa confusión notación numérica-conjunto numérico (de hecho, ambas interpretaciones caben al referirnos a "tipo de número"). Pero *hay una fuerte tendencia por parte de los alumnos a rechazar que a los puntos de la recta puedan corresponderle decimales infinitos no periódicos, o incluso decimales infinitos en general.*

Un punto importante que merece la pena señalar es que algunos alumnos piensan que los irracionales, o los decimales infinitos no periódicos tienen su lugar en la recta, pero que a esos puntos "no se les puede hacer corresponder" (en el sentido fáctico) un número, puesto que tienen infinitas cifras no periódicas "y no se sabe cómo acaban". Con respecto a este último punto, en la interacción didáctica también se establece una discusión complicada, en la que se observa bastante confusión e incapacidad para delimitar el lenguaje utilizado. No obstante, salen a la luz diversas intuiciones de los alumnos sobre la imposibilidad de realizar una correspondencia que implica un proceso infinito, sobre la posible analogía con el caso de los decimales periódicos (cuya correspondencia sí podía actualizarse a pesar de ser infinitos), y sobre la asociación intuitiva número-punto de la recta, a la que nos podemos acercar por aproximaciones sucesivas.

En cualquier caso, el problema de la existencia de un número correspondiente a cualquier punto de la recta y el criterio mediante el cual se establece dicha correspondencia permanece sin abordar; no se hace uso del criterio de la medida de longitudes y, por tanto, no se plantea el problema de que puedan existir puntos de la recta a los que no les podamos asociar un número, o a los que podamos asociar un número que no se le puede hacer corresponder en la práctica, (puntos correspondientes a longitudes inconmensurables), ni el conflicto entre la creencia de algunos alumnos en la existencia de un punto de la recta correspondiente a $\sqrt{2}$ *y la posible creencia en la existencia de una parte alícuota para dos longitudes cualesquiera, ni tampoco se establece la conexión entre la existencia o no de una parte alícuota para dos longitudes* *cualesquiera y la posibilidad de alcanzar el punto de la recta en cuestión a partir de divisiones sucesivas de la unidad (y no sólo mediante divisiones decimales).*

-A lo largo del proceso didáctico, en la actividad F16 se observó que *los niños daban por supuesto implícitamente que a cada punto de la recta le corresponde un número*.
En la actividad F17 los niños explicitaron que el punto 2 en la recta quiere decir 2 unidades, y a partir de ahí extrapolaron a los puntos 3, 1/2, ¡y $\sqrt{2}$! *Después de haber construido cuadrados de área dada, los alumnos pensaban que a las radicales cuadráticosí les corresponde un punto de la recta.*
-En la Cuestión de investigación3, planteada *al final del proceso didáctico*, se detecta que todos los alumnos piensan que dado un punto cualquiera de la recta existe un número que corresponde a dicho punto. *Una pequeña parte de la clase piensa que el número que le corresponde siempre es racional, alrededor del 40% de los alumnos piensa que puede ser racional o irracional construible y alrededor del 50% piensa que puede ser racional o irracional de cualquier tipo.*
Los argumentos que dan para justificar sus respuestas, además del conocimiento establecido, o la falta de justificación (que tienen una proporción importante), se basan en sus intuiciones sobre la relación continuo lineal-números, como que los decimales infinitos no periódicos tienen su punto en la recta asignado mediante aproximaciones sucesivas y que la recta se llena por aproximaciones de números-puntos. *Sólo dos alumnos justifican su respuesta estableciendo la correspondencia números-puntos de la recta en términos de medidas de longitudes* (uno de ellos piensan que los números reales son los que miden todas las longitudes, y otro que son los racionales, porque sigue pensando que todas las longitudes son conmensurables).
-En general se observa que los alumnos consideran que a todo punto de la recta corresponde un número. Sin embargo, se detecta que esta creencia responde a una intuición, en la gran mayoría de los casos sin fundamentar y sin delimitar o establecer en términos más o menos sistemáticos. Un número muy escaso de alumnos es capaz de justificar esta creencia estableciendo la correspondencia números-puntos de la recta en términos de medidas de longitudes, a pesar de que en alguna de las actividades realizadas hay alumnos que se tornan conscientes de esta correspondencia (que no habían advertido durante toda la etapa en la que habían representado números racionales mediante procedimientos estándar y no tratando de buscar proccedimientos para asignar números a puntos de la recta).
En cuanto al tipo de número que puede corresponder a un punto cualquiera de la recta real, se observa una evolución en las concepciones de los alumnos. En un principio, éstos rechazan, el que a un punto de la recta puedan corresponderle decimales infinitos. Después de construir longitudes inconmensurables, piensan que a unpunto de la recta también puede corresponderle un irracional construible. Al final del proceso didáctico,

aproximadamente la mitad de los alumnos piensan que a un punto dado de la recta puede corresponderle un número racional o irracional construible (aunque hay algunos que creen que sólo le puede corresponder un número racional), y la otra mitad piensan que puede corresponderle cualquier tipo de decimal, esto es, cualquier número real. Consideramos que esta última respuesta puede venir influenciada por el conocimiento establecido de que "los números reales son los que llenan la recta real".

Correspondencia Números Reales- Recta:

-En la actividad F14, casi todos los alumnos responden que a todos los puntos de la recta corresponden números racionales (fracciones, decimales finitos o periódicos, etc.). Sin embargo, en las respuestas dadas en el Examen 1 a la pregunta voluntaria sobre si los números racionales llenaban la recta numérica, aproximadamente la mitad de ellos pensaban que los números racionales no llenaban la recta (por varias razones en las que salían a la luz intuiciones sobre el continuo lineal y su relación con los números conocidos). En un principio, decidimos no confrontar a los alumnos con el aparente conflicto entre las respuestas a estas dos cuestiones. La razón fue nuestra seria duda acerca de plantear un problema cuyo tratamiento didáctico sigue estando muy abierto para nosotros, en un nivel en que los alumnos carecen de instrumentos para resolverlo. Esto podía haber originado en los niños más confusión que otra cosa, en un proceso didáctico de por sí complicado.

-No obstante, en la Cuestión de Investigación 3, que se propuso casi al final de la Fase de Investigación 2 y como cuestión aparte del proceso didáctico, decidimos aprovechar la pregunta por la sobreyectividad de la correspondencia números reales-puntos de la recta, para indagar un poco más sobre las diferencias entre dicha correspondencia y la de la correspondencia números reales-recta (continuo lineal). Sobre este último aspecto, *cuando la pregunta por la sobreyectividad de la correspondencia números-recta se formula en términos de números que llenan la recta (y no en términos de números que corresponden a los puntos de la recta), existe una variación de las respuestas de los alumnos. Alumnos que afirmaban que a un punto dado de la recta sólo pueden corresponder números construibles dicen ahora que los números que llenan la recta son todos los reales; el argumento que aducen es un conocimiento establecido sobre que "los números que llenan la recta son los números reales".* Es importante mencionar que hay *tres alumnos que cambian de parecer, y pasan de decir que a un punto dado de la recta pueden corresponderle números racionales o construibles a afirmar que ningún conjunto de números puede llenar la recta; dos de ellos dan un argumento importante: se refieren a la densidad: si entre dos números (reales, decimales de cualquier tipo) siempre hay otro, es imposible que los números puedan llenar la recta.*

En total, la respuesta mayoritaria de los alumnos sobre qué números llenan la recta es que son los Números Reales, 62%. Un 8% de los alumnos piensan que son los *racionales, y un 12% que son los construibles. Otro 12% de los alumnos piensan que no hay ningún conjunto numérico que llene la recta.*

-A raíz de una de las últimas actividades realizadas en la Fase de Acción 2, F18, una alumna volvió a plantear *el dilema "Si entre dos números reales siempre hay otro, ¿cómo van a llenar la recta?"*. Dado que se trataba de una actividad destinada a cerrar cuestiones, con vistas al Examen y a la conclusión definitiva del proceso didáctico, la profesora-investigadora optó por no profundizar en este punto, y enfocó el discurso en términos de correspondencia números reales-puntos de la recta. *A pesar de ello, pensamos que se trata de una cuestión importante, que ha aparecido repetidamente a lo largo de la historia en la reflexión de los pensadores que se han ocupado del contínuo, y sobre cuyo tratamiento en el terreno didáctico hemos de profundizar.*

-En la cuestión 6 del Examen 2, en la que los alumnos han de definirse ante la afirmación de que "puesto que todas las longitudes son conmensurables, la recta real la llenan los números racionales", se realizaron las siguientes observaciones en relación al punto que nos ocupa:

.Alrededor del 40% de los alumnos está de acuerdo con la afirmación, y en torno al 60% en desacuerdo.

.El argumento en contra más empleado por los alumnos es el de la existencia de puntos en la recta correspondientes a números irracionales (35%). Otra buena parte de los alumnos (26%) hace referencia a la existencia de longitudes inconmensurables; algunos de estos alumnos añaden también el argumento anterior. Un 10% alude al conocimiento establecido de que la recta la llenan los Números Reales y otro 10% hace alusión a las limitaciones físicas con las que nos encontramos a la hora de decidir sobre la conmensurabilidad-inconmensurabilidad de las longitudes y su representación en la recta. *En suma, aunque las respuestas erróneas a la cuestión tengan un número elevado, es importante constatar la coherencia de los argumentos dados por una buena parte de los alumnos al conflicto entre la primitiva creencia en la conmensurabilidad de todas las longitudes y el hecho de que los números racionales no llenen la recta numérica, más aún teniendo en cuenta que este conflicto no había sido planteado previamente en clase y que los alumnos han tenido que poner en juego conexiones entre los conceptos de conmensurabilidad- fracciones/ decimales infinitos no periódicos- números irracionales-medidas inconmensurables/ puntos de la recta, que no habían sido explicitadas con anterioridad.*

Focos de Investigación 1 Y 2: Conexión entre representaciones de los Números Reales

Características que otorgan la condición de número a diversos tipos de expresiones decimales, a juicio de los alumnos. Evolución de la comprensión a lo largo del proceso didáctico:

aspectos relacionados con la medida, a pesar de que el tratamiento didáctico estaba especialmente enfocado a introducir a los alumnos este aspecto. No nos es posible, en un principio, hacer interpretaciones al respecto; puediera ser que los alumnos hayan trabajado durante mucho tiempo con los números utilizándolos para hacer operaciones aritméticas casi exclusivamente y les resulte difícil ubicar otros atributos, propiedades y utilidades de los números al mismo nivel, en poco tiempo.

En el caso de las *expresiones decimales correspondientes a "Enteros con infinitas cifras"*, da la impresión de que la gran mayoría de los alumnos saben, porque se trata de un conocimiento establecido, *que no son números*, y entonces aducen justificaciones del tipo de las que se vienen manejando en clase pero en sentido negativo. *(La justificación que sí resulta interesante es la de una alumna que argumenta: "en 0,999...puedes hacer una aproximación como 0,999 y no se diferencia mucho entre 0,999 y 0,9999, pero en 999... no es lo mismo 9 que 99 que 999, etc...", ya que parece acercarse a la idea de convergencia de las aproximaciones decimales sucesivas en el caso de los decimales infinitos y a la divergencia en el caso de los supuestos "enteros con infinitas cifras").*

En los *decimales con infinitas cifras arbitrarias*, las razones aducidas por los alumnos para contestar negativamente son, de nuevo, no poder realizar operaciones con ellos ni provenir de ninguna operación y no poderlos representar en la recta. Las razones aducidas para contestar afirmativamente parecen menos sólidas: estar compuestos de cifras y que esas cifras presenten regularidad; sí parece más fuerte el argumento de dos alumnos que afirman que son números irracionales, como conocimiento establecido (que puede que esté subyacente en más de una respuesta afirmativa).

-En la actividad F18, realizada inmediatamente después de plantear la cuestión de investigación anterior, los alumnos estuvieron de acuerdo en que *los decimales infinitos no periódicos "que vienen de algo" son números, pero los de infinitas cifras arbitrarias seguían suscitando dudas y división de opiniones; finalmente, se inclinaron más por el No.* Cuando preguntaron a la profesora-investigadora, ésta les dice que sí lo son, aunque ellos no lo puedan razonar, porque los matemáticos pueden operar con ellos (están muy intrigados en saber cómo, pero la profesora-investigadora les dice que ellos no lo pueden saber todavía porque para comprenderlo hace falta saber otras cosas), y alude también a la representación en la recta; *intentando explicarles la cuestión de los intervalos encajados que se van acercando cada vez más, "¿a qué?", pregunta. "A ese número", contestó una alumna, y otra le replicó: "A un número que no existe" (!). En general no pudo concretarse el "¿a qué?".* La profesora indicó que a un único punto, a un único número, y por esas y otras razones los matemáticos consideran a ésos como números, aunque nosotros no podamos establecer bien por qué. Una alumna enunció que "entonces, para nosotros, no son números". La profesora-investigadora contestó que ellos tenían que saber que sí son números, aunque no pudieran entender las razones todavía.

-En suma, los alumnos parecen dar por sentado desde un primer momento que los decimales periódicos son números. En cuanto a los decimales infinitos no periódicos, la necesidad de decidir sobre su status de número les lleva a explorar distintas características que otorgan dicho status. A pesar de que el proceso didáctico está enfocado para llamar la atención de los niños sobre las características de los números reales (en especial los construibles) en el ámbito geométrico, con énfasis en la medida de longitudes, los alumnos centran insistentemente su atención en el terreno de las operaciones aritméticas y, en segundo lugar en la representación en la recta. Pensamos que esto puede deberse a su experiencia más dilatada en estos ámbitos a lo largo de la EGB, y a que su experiencia en el terreno de la geometría, que se reduce exclusivamete a este curso, aún no ha tenido tiempo de sedimentar.

En principio, las dudas sobre que cualquier tipo de decimal infinito no periódico fuera un número eran muy fuertes. Más adelante, los alumnos fueron aceptando el status de número de los decimales correspondientes a irracionales construibles y al final del proceso didáctico, un alto porcentaje de alumnos conviene en esta aceptación; en el caso del número π, este porcentaje disminuye ligeramente. Hemos de señalar que, aunque esta aceptación se produce a partir la manipulación de estos números en situaciones didácticas, las razones aducidas por los alumnos no tienen conexión directa con el trabajo concreto realizado en las mismas, sino que más bien parecen ser fruto de que, simplemente, han sido utilizadas en el contexto didáctico.

En el caso de los decimales infinitos no periódicos con cifras arbitrarias, la mayor parte de los alumnos se mantienen reacios a aceptar que sean números, en especial aquellos cuyas cifras no tienen ninguna regularidad. La discusión profunda sobre el status de número de este tipo de expresiones decimales precisa de instrumentos que están fuera de nuestro alcance a este nivel.

<u>Comprensión de los alumnos del concepto de Número Real sobre la base de la tipología establecida para las expresiones decimales, de las características que otorgan estatus de número a dichas expresiones decimales, y de su comparación y clasificación tanto en el ámbito numérico como en el geométrico:</u>

-En la Cuestión de Investigación 1 (bis) se observa que *hay más dificultades en clasificar y hacer una estructuración de la tipología de decimales infinitos aparecidos en el proceso didáctico, que en recordar diversos tipos y suministrar ejemplos de ellos*, lo cual es lógico por otra parte, puesto que supone *un paso más en el nivel de abstracción*. Sólo un 15% de los alumnos discrimina todos los tipos de decimales infinitos y los estructura tal como están especificados en nuestras unidades de análisis para el contenido, pero también hay que contar con un 41% de los alumnos que tienen un buen nivel en lo que a clasificación se refiere puesto que son capaces de discriminar entre decimales periódicos y no periódicos; dentro de estos últimos, distinguen los que provienen de algo y los de previstos en nuestro sistema de categorías. Registramos a continuación los que nos parecen más destacables:

Conflicto entre la finitud actual de la longitud irracional y la infinitud potencial de su expresión decimal:

-El conflicto se presenta ya con los *decimales periódicos*. En efecto, a partir de la representación en la recta de los números racionales expresados en distintas notaciones, planteada en el Cuestionario de Repaso, hubo alumnos que manifestaron su dificultad para aceptar que un decimal periódico pueda representarse exactamente en la recta a través de una fracción, puesto que al terner infinitas cifras nunca podría llegar a representarse exactamente.

-En el ámbito de las *medidas irracionales*, el problema apareció por primera vez al realizar la actividad F16. Se detectó que a la hora de decidir la existencia o no de un cuadrado de área 12, los alumnos razonaban dentro del ámbito numérico y de forma constructiva: como no hay ningún número exacto que multiplicado por sí mismo dé 12, no existe un cuadrado de área 12 (el número en cuestión tendría infinitas cifras, y entonces "no podría medir el lado del cuadrado").

En la Puesta en Común de esta actividad se intentó razonar en el ámbito geométrico apelando a la transformación continua de todos los rectángulos de área 12, que daría lugar a un cuadrado. También en el mismo ámbito geométrico los alumnos estuvieron de acuerdo en que la superficie bajo la curva formada por los vértices de los rectángulos de área 12 estaría "llena" (lo cual supone admitir la existencia de un cuadrado dentro de la curva). Sin embargo, a pesar de este cambio del ámbito numérico al ámbito geométrico para abordar el problema de la existencia de un cuadrado de área 12 con otra óptica, la persistencia de los alumnos en el argumento de que no pueda existir "un lado que tenga infinitas cifras no periódicas" era muy fuerte. Sólo un alumno fue capaz de mirar el problema desde otro ángulo y afirmar la existencia del cuadrado de área 12 sobre la base de una transformación continua (aunque no sepa cómo representar un número con infinitas cifras no periódicas); además, otra alumna fue capaz de rectificar su primitiva idea numérica a partir de la construcción explícita de cuadrados de área 12.

-En la actividad F17, una alumna mostró reticencias a dibujar el cuadrado de área 2 con dos cuadrados de área 1, porque el lado tendría que medir $\sqrt{2}$, es decir, una medida con infinitas cifras no periódicas, y eso no se podría dibujar; !la niña no quería unir los dos catetos! E, incluso, una vez unidos, se resistía a creer que esa figura tuviera área 2 porque tenía conflicto con el lado, ya que éste era un segmento finito y acabado, y la expresión de la medida era infinita no periódica.

Este es uno de los puntos en donde se pone de manifiesto la paradoja a la que nos enfrentamos al tratar aspectos relacionados con los números irracionales: su doble cara, que muestra lo finito y lo infinito según nos acerquemos a ellos desde un ángulo u otro; y la dificultad que presenta para los alumnos (y que ha presentado para la historia de la *matemática y del pensamiento occidental en general) hacer compatible esa doble naturaleza.*

-El problema surgió de nuevo cuando, en la Cuestión de Investigación 2, los alumnos tenían que representar en la recta la longitud √3. Algunos plantearon que √3 tiene infinitas cifras no periódicas y, por consiguiente, no puede dibujarse exactamente. Otros expusieron que pasaba lo mismo que con 0,6666... y su fracción, pero los anteriores sostenían que no era lo mismo. La profesora resolvió volver a la construcción geométrica a partir de cuadrados de área 1. Explicitando que prescindíamos de los errores de precisión (que, según los alumnos, se acumulaban a lo largo de la construcción), los alumnos aceptaron que estos cuadrados tenían exactamente área 1 y sus lados medían exactamente 1, pero cuando llegamos al de área 3, los alumnos aceptaron que el área es exactamente 3, pero !"su lado ya no puede medir exactamente √3, porque es infinito no periódico"! Algún alumnoaceptaba que medía exactamente √3, por el teorema de Pitágoras, pero otros compañeros cuestionaron si el teorema de Pitágoras puede aproximar.

La cuestión de la exactitud de la medida de los lados de los cuadrados es realmente interesante. Porque se llega a que la medida de un lado es un número que multiplicado por sí mismo da 3, y ese número no tiene una expresión decimal exacta ni controlable. entonces la exactitud de la medida del lado de un cuadrado no puede establecerse en el tereno numérico, sino que se refiere en última instancia a que un lado multiplicado por sí mismo da como resultado el área; es decir, entramos en el terreno del razonamiento puramente geométrico. este punto es realmente sutil y queda totalmente fuera del alcance de nuestro trabajo a este nivel.

-En definitiva, por lo que se refiere al conflicto que se plantea a los alumnos ante la expresión decimal infinita de determinadas medidas finitas y delimitadas, creemos qué este tiene razón de ser, y es difícil de solucionar porque implica el paso de considerar una expresión decimal infinita como un proceso, a considerarla como un ente, en términos de infinito actual.

<u>La medida de longitudes. El problema del contexto:</u>

-En el trabajo que realizaron los alumnos sobre π, al intentar calcularlo midiendo longitudes y diámetros de distintas circunferencias y obtener aproximaciones distintas a la expresión decimal de π que ellos conocían, y al darse cuenta de que las aproximaciones de π habían variado a lo largo de la historia, a los alumnos les surgió una duda que se reiteró a lo largo de las exposiciones sobre π en distintos momentos: ¿Cómo se sabe que la aproximación decimal que manejamos actualmente es correcta hasta las cifras que tomemos?

-Si recordamos que en la actividad F12, dedicada a la conmensuración de parejas de segmentos, los niños no mostraron interés por contrastar los distintos resultados que