UNIVERSIDAD DE GRANADA
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA
DE LA MATEMÁTICA

MODELIZACIÓN Y CALCULADORA GRÁFICA EN LA ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA. ESTUDIO EVALUATIVO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

TESIS DOCTORAL

Que presenta D. José Ortiz Buitrago, realizada bajo la dirección de los Doctores D. Luis Rico Romero y D. Enrique Castro Martínez del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, España.

Fdo. José Ortiz Buitrago

V°B° de los Directores:

Fdo.: Luis Rico Romero　　　　Fdo.: Enrique Castro Martínez

Granada, 2002

Esta investigación se ha realizado en el marco de trabajo del Grupo de Investigación "Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico" de la Universidad de Granada, del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía (FQM0193).

Í N D I C E

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

INTRODUCCIÓN

La formación inicial de los profesores de matemáticas constituye un área de investigación de interés en educación matemática, particularmente en lo referente a las competencias didácticas requeridas por los docentes para lograr que sus alumnos comprendan, apliquen y valoren el conocimiento transmitido en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. Contar con planes de formación que incluyan, además de los conocimientos disciplinares de las matemáticas, conocimiento didáctico de los contenidos matemáticos, de manera que los futuros profesores adquieran competencia para el desempeño de sus funciones, constituye una de las preocupaciones centrales en lo que a formación de profesores de matemáticas se refiere. Esto implica dotar al profesor de la habilidad para elegir y conocer el por qué elige hacer lo que hace. Con lo cual el profesor podría seleccionar con criterio fundado un conocimiento particular para aplicarlo en la situación de enseñanza que considere pertinente para el logro de los objetivos planteados.

Orientados por la importancia que tiene el tema desarrollamos la presente investigación, en la cual se indaga respecto a las competencias didácticas puestas en práctica por los profesores en formación cuando diseñan actividades didácticas y las actitudes manifiestas hacia los componentes de un programa de formación propuesto denominado Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal (MCA), dirigido a futuros profesores de matemáticas.

En esta investigación tomamos como referencia el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, y fundamentalmente lo relativo a la formación didáctica ofrecida en la asignatura Didáctica de la Matemática en el

Bachillerato. A tal efecto, la investigación esta dirigida a responder a cuestiones de carácter cognitivo y actitudinal.

Para realizar la investigación se ha optado por utilizar la metodología de evaluación de programas. En ese sentido se evalúa el diseño, implementación y los resultados del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria MCA. Los componentes que estructuran dicho programa MCA son la modelización matemática, la calculadora gráfica, la estructura conceptual del álgebra lineal escolar y la integración de estos organizadores del currículo en el diseño de actividades didácticas.

En la evaluación del programa MCA se contempló tanto la complejidad de sus componentes como lo relacionado con el contexto de su implementación. Partimos de la consideración que la evaluación tiene un papel relevante en los procesos de intervención de formación del profesorado, de manera que los agentes involucrados puedan recabar información útil para tomar decisiones adecuadas. Nos planteamos un trabajo de investigación orientado a profundizar en el conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas, puesto en práctica como resultado de las competencias adquiridas producto del programa MCA.

Es importante destacar que en esta investigación la evaluación tiene como propósito desvelar información concerniente al programa en sí mismo, visto como una estructura lógica articulada de manera sistemática en lo relativo a sus dimensiones curriculares, así como conocer qué ha logrado aportar el programa a los profesores en formación en lo relativo al propósito de sus contenidos.

El proceso de evaluación de programas lo consideramos en los momentos del diseño, desarrollo y resultados. En la evaluación del diseño del programa MCA se evalúa su calidad, pertinencia y viabilidad. Para la evaluación del desarrollo consideramos los niveles de aprovechamiento de los contenidos (objetivos y subjetivos) y la puesta en práctica del programa. En la evaluación de resultados analizamos los logros cognitivos didácticos (objetivos y subjetivos), las variaciones actitudinales, los rasgos estructurales del programa y el funcionamiento logístico. La evaluación del desarrollo y la de resultados las exponemos conjuntamente, diferenciando en ambas la evaluación de la dimensión objetiva y subjetiva. Los resultados y análisis de estas dimensiones se presentan en capítulos separados en consonancia con las cuestiones de investigación formuladas en el capítulo I.

La información contenida en el presente trabajo se estructura en seis capítulos los cuales se sintetizan a continuación:

En el capítulo I se expone la motivación y ubicación del problema en cuestión, así como la formulación del mismo y los objetivos generales y específicos que se persiguen en el estudio.

La revisión de la literatura y los basamentos teóricos que soportan el estudio se presentan en el capítulo II, en particular se enfatiza en el conocimiento didáctico, los organizadores del currículo, la modelización matemática, la calculadora gráfica como recurso didáctico y la estructura conceptual del álgebra lineal escolar.

El capítulo III comprende el enfoque metodológico utilizado en la investigación. Específicamente nos referimos a la metodología general de evaluación de programas. Se realiza un análisis de los modelos más usuales en evaluación de programas con el objeto de decantar una propuesta propia para aplicarla en este estudio. Asimismo se describe el programa MCA que es objeto de evaluación, su puesta en práctica con profesores en formación inicial y la propuesta de evaluación del programa MCA. Finalmente se describen las técnicas e instrumentos empleados para la recogida de información y el procedimiento seguido en el análisis de los datos. Respecto al análisis de las producciones y opiniones, éste se efectuó siguiendo orientaciones de la teoría fundamentada.

Los capítulos IV y V están dedicados a la presentación, análisis y discusión de los resultados de la evaluación del programa MCA. En el capítulo IV se recogen los resultados relativos a la dimensión objetiva y el capítulo V está dedicado a los resultados de la dimensión subjetiva.

En el capítulo IV, en primer lugar se expone la evaluación del diseño del programa MCA, después la evaluación de las dimensiones estructurales, de funcionamiento operativo-logístico y la dimensión de puesta en práctica. Y posteriormente se presenta el análisis y discusión de la evaluación del desarrollo y los resultados. De estos últimos, tal como señalamos arriba, se considera específicamente la dimensión cognitivo objetiva. Para cada uno de estos aspectos se dedica un apartado en el cual se exponen los detalles del proceso de evaluación, los procedimientos seguidos en la recogida de la información respectiva y su consecuente análisis y discusión. Por último se articula la evaluación de cada uno de los momentos del programa en una valoración global del mismo como un todo.

En cuanto al capítulo V, en éste se presenta el análisis y discusión de la información correspondiente a la evaluación de la dimensión subjetiva considerada en la evaluación del programa MCA. El análisis se efectúa a partir de las opiniones emitidas por los participantes en las hojas de notas diarias y en la escala de actitudes. Además del análisis de las opiniones, en este capítulo se incluye el análisis de entrevistas aplicadas a participantes del programa MCA, en ejercicio profesional. Tales entrevistas aportaron información acerca de posibles efectos del programa en la práctica profesional.

Finalmente, en el capítulo VI se presentan, en primer lugar, las conclusiones relacionadas con la evaluación del programa MCA y las implicaciones de su aplicación en el ámbito de las competencias didácticas y las actitudes de los participantes. En segundo lugar presentamos algunas recomendaciones para ediciones futuras del programa MCA e indicamos algunas implicaciones y limitaciones del estudio.

Consideramos que los resultados de la presente investigación podrían servir de referencia para la toma de decisiones relacionadas con programas de formación inicial de profesores de matemáticas. En particular consideramos que el basamento empírico, de los tres organizadores del currículo puestos de manifiesto en esta investigación, ayuda a consolidar y confirmar la potencialidad didáctica del modelo teórico de los organizadores del currículo tanto para la investigación como para la enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO

I

El Problema

1.1. Presentación

La reforma educativa realizada en España y formulada en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), promulgada el 3 de Octubre de 1990, le otorga al profesor un papel activo, dinámico y de toma de decisiones en su desempeño profesional. En cuanto a los requisitos exigidos para ejercer la docencia, los artículos 24 y 28 de la LOGSE establecen que la educación secundaria (obligatoria y bachillerato) será impartida "...por licenciados, ingenieros y arquitectos o quienes posean titulación equivalente a efectos de docencia..." Además, en los mismos artículos se establece que "...para impartir las enseñanzas de esta etapa será necesario, además, estar en posesión de un título profesional de especialización didáctica. Este título se obtendrá mediante la realización de un curso de cualificación pedagógica, con una duración mínima de un año académico...". Podemos observar que en estos requisitos no hay mención a una formación o carrera específica para desempeñar el trabajo docente, sino que se establece una especialización didáctica de postgrado, que se adquiere mediante la realización de un Curso de Cualificación Pedagógica (CCP) que viene a sustituir al actual Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP).

Respecto a dicha especialización se menciona su duración pero no se establecen sus directrices, tampoco se establecen materias ni se señalan créditos, ni se especifican sus contenidos temáticos, salvo por lo que se refiere a la realización de un periodo de prácticas.

El título profesional de especialización didáctica (BOE 268/95 de 9 de noviembre de 1995) está regulado en el Real Decreto 1692/1995, de 20 de octubre. Sin embargo, a efectos de su aplicación, en Andalucía aún no ha entrado en vigor ya que sigue vigente la Orden de 11 de diciembre de 1985, por la que se regula el curso para la obtención del Certificado de Aptitud Pedagógica en las universidades de la comunidad autónoma de Andalucía.

La Universidad de Granada (2001) expide el Certificado de Aptitud Pedagógica (CAP) teniendo dentro de sus premisas que

> *La adecuada formación pedagógica del profesorado de secundaria es un instrumento orientado a mejorar la calidad de la enseñanza, aunque sus resultados se produzcan a medio plazo.* (p.4)

En el momento de realizar el trabajo de investigación que aquí se presenta el Plan de Estudios vigente en la Universidad de Granada para la Licenciatura en Matemáticas procede de mediados de los 70. El Plan se estructura en dos Ciclos, el primero de materias comunes y tres años de duración (BOE 17.09.1973). El segundo ciclo se organiza en dos cursos (BOE 15.07.1977) y ofrece tres especialidades: Matemática Fundamental, Metodología y Estadística e Investigación Operativa. Los licenciados en estas especialidades son potenciales profesores de matemáticas de educación secundaria. En el plan de formación de los futuros licenciados de la especialidad de Metodología se contemplan asignaturas que son impartidas por el Departamento de Didáctica de la Matemática. Entre esas asignaturas está incluida Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, la cual tiene como finalidad iniciar la formación del estudiante de la Licenciatura de Matemáticas en Didáctica de la Matemática para la educación secundaria. En esta asignatura se enfatiza la actividad de planificación de la enseñanza de las matemáticas. Dada la importancia que tiene dicha actividad en el proceso de enseñanza y aprendizaje, centramos en ella nuestro interés, entendiendo que la planificación de las actividades didácticas es el momento en el cual el profesor reflexiona acerca del diseño y elaboración de las actividades a desarrollar en el aula. Es decir, en la planificación es donde entra en juego la aplicación del conocimiento de la didáctica de la matemática para analizar y estructurar los conocimientos que intervendrán en su proceso de enseñanza y aprendizaje. Es donde el profesor conjetura los posibles itinerarios que seguirá en el aula para que sus alumnos logren el aprendizaje esperado (Simon, 1995).

El plan de formación para el curso académico 2000-2001, que contempla la asignatura "Didáctica de la Matemática en el Bachillerato" de la licenciatura de matemáticas de la Universidad de Granada, sirve de marco orientador de esta investigación en virtud que, tal como señalamos anteriormente, en esta asignatura los futuros profesores de matemáticas adquieren nociones básicas en su formación didáctica. El programa de esta asignatura contempla: 1) Una reflexión general sobre el currículo de matemáticas, 2) una reflexión sobre nociones de didáctica de la matemática (aprendizaje de las matemáticas, resolución de problemas y evaluación, entre otros tópicos) y 3) la puesta en práctica de conceptos específicos que se utilizan como elementos *organizadores* del diseño de unidades didácticas. Dentro de esos conceptos específicos u organizadores tenemos los contenidos matemáticos, la modelización, los materiales y recursos, las representaciones, la historia de los conceptos matemáticos y los errores y dificultades de los conceptos matemáticos.

De este marco orientador consideramos tres de esos organizadores para el diseño de un programa, que denominamos MCA (Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra Lineal), dirigido a profesores en formación. Tales organizadores son la modelización, los materiales y recursos, y la estructura conceptual de los contenidos matemáticos considerados. En este programa se incorporan la calculadora gráfica y la modelización matemática, como ejes centrales, para la reflexión en torno a la enseñanza del álgebra lineal en secundaria.

El programa MCA está estructurado teniendo en cuenta las siguientes componentes curriculares: objetivos, contenidos, metodología y evaluación. La naturaleza de los objetivos le dan al programa una orientación donde la teoría y la práctica se conjugan en la búsqueda de nuevas propuestas de enseñanza de las matemáticas. Los contenidos enfatizan el análisis de situaciones problema que involucran conceptos y procedimientos del álgebra lineal de secundaria. En la metodología se proponen actividades individuales y grupales con la finalidad de lograr el intercambio de reflexiones didácticas entre los participantes y los profesores que lo imparten. La evaluación, como componente curricular, tiene en este programa una orientación formativa dirigida a encauzar las competencias didácticas de los participantes durante su ejecución.

Los elementos que componen la base del programa MCA son: a) La calculadora gráfica dentro del organizador de materiales y recursos; b) La modelización matemática, como medio para acercarnos a los aspectos aplicados de las matemáticas mediante la vinculación de los fenómenos con las situaciones y con los conceptos matemáticos y, c) El álgebra lineal como contenido matemático, que ejemplifica el tercer organizador relativo a la estructura conceptual, y que brinda riqueza en aplicaciones que permiten interrelacionar los tres componentes. Con el programa se persigue la interrelación de esos componentes con el propósito de generar en los profesores en formación una reflexión, en torno a la planificación de actividades didácticas, que les proporcione fundamentos para diseñar actividades didácticas de contenido algebraico. Es decir, con la aplicación del programa se crea un espacio de actuación donde indagar acerca del grado de interrelación de esos componentes en el diseño de actividades didácticas. Fundamentalmente prestamos atención a los cambios cognitivos y actitudinales en los participantes, durante el desarrollo del programa. Los cambios cognitivos se refieren a la aplicación del conocimiento disciplinar en didáctica de la matemática cuando los participantes diseñan actividades didácticas de contenido algebraico para supuestos alumnos de secundaria. Los cambios actitudinales se refieren a aquellos que se manifiestan durante la aplicación del programa.

En particular, para identificar los cambios cognitivos de los profesores en formación se toman en cuenta sus acciones al proponer y resolver situaciones del mundo físico y social, utilizar la calculadora gráfica y diseñar actividades de álgebra lineal. Es decir, la atención se centra en las producciones referidas al diseño de actividades didácticas de álgebra lineal con la utilización de la calculadora gráfica y la modelización matemática.

El programa en cuestión fue implementado en un grupo de futuros profesores mediante un curso-taller cuya descripción se presenta en el capítulo III de este trabajo.

El programa MCA pretende:

- Motivar a los profesores en formación a la integración didáctica de la modelización matemática y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza de las matemáticas.
- Actuar en el ámbito de la formación inicial de los profesores de matemáticas aportándoles conocimientos y estrategias didácticas de la modelización matemática y la calculadora gráfica para la enseñanza de las matemáticas.
- Propiciar la reflexión, en los profesores en formación, acerca de las potencialidades de la modelización matemática y la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas.

Para determinar la utilidad práctica de los componentes del programa y tomar decisiones relativas al diseño, la gestión e implementación, logros e incluso su modificación, el programa fue sometido a evaluación.

Las principales funciones de la evaluación que se han considerado en este trabajo son:

1) Detección de la validez del programa. Esta función sirve para conocer si el programa está respondiendo o no para lo que fue diseñado y favorece

la aplicación de correctivos en torno a: la pertinencia de las actividades y tareas propuestas para la reflexión didáctica, los recursos utilizados, distribución del tiempo, actuación y desempeño del grupo de apoyo al desarrollo del programa MCA, participación de los agentes y en general la dinámica seguida en cada sesión de trabajo.

2) Mejoramiento en la metodología de desarrollo del programa. Esta función contribuye a percibir la pertinencia, tanto de los recursos utilizados como de las estrategias utilizadas en la ejecución del programa. Por ejemplo, la conveniencia acerca de la asignación de tareas para la casa, la presentación y discusión de resultados, por parte de los participantes, ante el grupo clase después de cada bloque de actividades.

3) Recepción de información durante el desarrollo del programa. De esta manera, la evaluación ayuda a evidenciar el nivel de las reflexiones didácticas en cada actividad realizada, así como su pertinencia y adecuación en el programa. Es decir, contribuye a percibir fortalezas y debilidades del programa durante su desarrollo, con la finalidad de mejorarlo a partir de la crítica permanente. Es una función de captura de información recíproca, como resultado de las interacciones entre los agentes del programa.

4) Identificación de limitaciones y alcances. Esta función considera desde los aspectos contextuales, como el entorno físico y los recursos didácticos, hasta las producciones individuales de cada participante durante la ejecución o resolución de cada actividad propuesta en el programa.

1.1.1. Las actitudes en esta investigación

El trabajo contempla dos dimensiones de análisis que lo soportan: la cognitiva y la actitudinal. La primera se refiere a las competencias del profesor de matemáticas en la planificación de la enseñanza, más específicamente en el diseño y elaboración de actividades didácticas, de contenido algebraico, con la utilización de la calculadora gráfica y la modelización como organizadores curriculares. La dimensión actitudinal está dirigida a identificar el grado y tipo de disposición en cada uno de los participantes (los usuarios) respecto al desarrollo del programa.

Se da por supuesto que hay diferentes acepciones del término “actitud”. En la presente investigación lo consideramos para referirnos a respuestas afectivas de intensidad moderada y relativa estabilidad. Además, partimos de la consideración que la actitud es un constructo en el cual hay una interrelación de componentes cognitivas, afectivas y teleológicas. Esta última está referida a las finalidades que podrían estar presentes en determinadas actitudes.

La incorporación del análisis de las actitudes en la investigación se justifica porque las nuevas tecnologías han generado en algunos sectores cierta resistencia hacia su uso en el aula, por ello consideramos de interés estudiar las actitudes de los profesores en formación en torno a la potencialidad didáctica de la calculadora gráfica, para la enseñanza del álgebra lineal, a partir del proceso de modelización de situaciones del mundo físico o social. La incorporación de las nuevas tecnologías en educación matemática requiere de un profesor competente, el cual podría conseguirse con una sólida formación inicial en su campo profesional, es decir, en lo didáctico y en lo disciplinar (McLeod, 1993). En el proceso de enseñanza y aprendizaje las actitudes de rechazo de los profesores, hacia las nuevas tecnologías, pueden afectar negativamente las actitudes de los alumnos hacia el uso de las calculadoras gráficas, las cuales jugarían un rol importante en el mejoramiento de actitudes hacia las matemáticas (McLeod, 1992). De ahí la significación que se le ha dado en esta investigación.

1.2. Contexto de la investigación

El contexto en el cual emerge la investigación lo conforman, por una parte, las investigaciones dentro del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico en tanto que referente teórico importante en el estudio y, por la otra, los resultados de la aplicación, en años recientes, del programa oficial vigente de formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad de Granada, el cual nos proporciona referencias empíricas. Ambos referentes contribuyen a soportar la realización de una investigación de esta naturaleza.

1.2.1. Grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico

En lo concerniente al referente teórico la investigación está inserta en la línea de investigación de Pensamiento Numérico y Algebraico, liderizada por el grupo del mismo nombre, adscrito a la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Este grupo parte de la consideración que existe una diversidad de vínculos entre el conocimiento numérico y el algebraico y que los problemas que surgen de la enseñanza y aprendizaje en estos dos campos son similares y las bases teóricas y metodológicas para su estudio tienen elementos comunes (Socas, 1999).

En lo concerniente al pensamiento numérico, Rico, Castro, Castro, Coriat & Segovia (1997) afirman que

> *…comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas*. (p.282).

Respecto al pensamiento algebraico, Socas (1999) sostiene que el mismo estudia e investiga acerca de

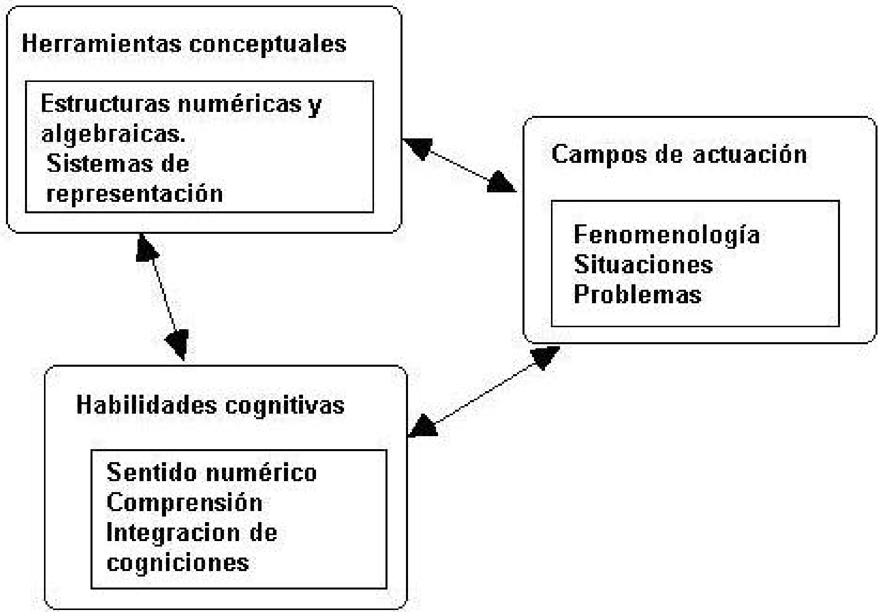
...los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de los conceptos algebraicos en el sistema educativo y en el medio social... (p.261)

En el Grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, se desarrolla una línea de indagación y estudio en Didáctica de la Matemática sobre los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y utilización de conceptos numéricos, algebraicos y analíticos, tanto en el medio escolar como en el medio social. El campo general en que se desenvuelve la investigación en pensamiento numérico y algebraico comprende el estudio de los diferentes sistemas cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significado utilizando diferentes estructuras numéricas y algebraicas.

El marco conceptual, en el que se sitúa el pensamiento numérico y algebraico, contempla la valoración del currículo como un plan de formación con diferentes niveles de reflexión e implementación. Asimismo, hay una marcada preocupación por las cuestiones derivadas de la evaluación escolar. En este marco también encontramos indagación respecto a la formación inicial y permanente del profesorado de matemáticas.

Rico, Castro, Castro, Coriat & Segovia (1997) proponen un modelo funcional para orientar las investigaciones en pensamiento numérico y algebraico. Dicho modelo, representado en la figura 1.1, está conformado por unos instrumentos conceptuales (sistemas simbólicos estructurados), unos modos de uso de los sistemas simbólicos (funciones cognitivas) y un campo de actuación (fenómenos, cuestiones y problemas).

Figura 1.1. *Modelo de actuación en pensamiento numérico y algebraico*
Fuente: Rico, Castro, Castro, Coriat & Segovia (1997, p.284)



Un aspecto fundamental en el grupo pensamiento numérico y algebraico lo constituye el desarrollo de investigaciones que involucran calculadoras y ordenadores. Al respecto Socas (1999) hace énfasis en el rol trascendente que debe jugar la tecnología en la enseñanza de las matemáticas. Este autor sostiene que la incorporación adecuada de la calculadora puede contribuir a lograr un aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos. Por otra parte, también se refiere a la investigación en ambientes computacionales como un dominio emergente que requiere de más investigación dentro del grupo pensamiento numérico y algebraico.

1.2.2. Programa de formación de profesores de matemáticas en la Universidad de Granada

El plan de formación de profesores de matemáticas, establecido formalmente como el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Granada (Ministerio de Educación y Ciencia, 1973) está subdividido en dos ciclos. El primer ciclo (de tres cursos académicos: primero, segundo y tercero) contempla las asignaturas siguientes: análisis matemático, geometría, álgebra, cálculo de probabilidades y estadística, topología, física general y cálculo numérico. En el segundo ciclo (dos cursos académicos: cuarto y quinto) se presentan tres especialidades, a saber: metodología, matemática fundamental y estadística e investigación operativa (Ministerio de Educación y Ciencia, 1977). Concretamente la opción de metodología es la que esta orientada para la salida como profesor de matemáticas en secundaria. Esta especialidad incluye, en el cuarto curso, las siguientes asignaturas: análisis, topología, álgebra, supuestos de la educación y métodos estadísticos aplicados a la educación. En el quinto curso se tienen establecidas las asignaturas siguientes: análisis, topología, geometría, lógica e historia de la matemática, didáctica de la matemática en el bachillerato y prácticas de enseñanza en institutos. Estas dos últimas están a cargo del departamento de Didáctica de la Matemática.

La asignatura "Didáctica de la Matemática en el Bachillerato", es obligatoria con una asignación de tres horas semanales durante todo el curso, lo cual corresponde a una valoración de 9 créditos. Dentro de sus objetivos se encuentra conocer los materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos y criterios de evaluación. Respecto de sus contenidos, la asignatura tiene una fundamentación y un marco de referencia sustentados en los organizadores del currículo de matemáticas, los cuales incluyen la modelización matemática y los materiales y recursos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además, en los contenidos de la asignatura se incluye el análisis didáctico y el diseño de unidades didácticas, para lo cual se da una lista de temas, entre los que se incluyen las ecuaciones e inecuaciones lineales y los sistemas lineales con su resolución.

La importancia de considerar los aspectos antes señalados obedece a que nuestra investigación se incardina en la reflexión acerca de los aportes de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, como eje de la formación didáctica de los futuros profesores de matemáticas en la Universidad de Granada. Y es precisamente nuestro interés la indagación acerca de la integración sistemática de la calculadora gráfica y la modelización matemática en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. En consecuencia, se diseña, desarrolla y evalúa un programa, con estas últimas componentes, para analizar las competencias didácticas puestas en juego por los participantes al diseñar actividades didácticas de contenido algebraico.

Como señalamos en líneas anteriores, tanto el Grupo Pensamiento Numérico y Algebraico como el programa de formación de profesores de matemáticas en la Universidad de Granada sirven de marco contextual a la presente investigación. El primero por los aportes de sus campos de actuación y el segundo porque es en ese programa de formación, específicamente en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, donde los participantes reflexionan en torno a nociones del currículo y de la didáctica de la matemática, así como sobre el análisis didáctico, para concluir con la elaboración de unidades didácticas.

1.3. Orígenes del estudio

En el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada se han desarrollado varios trabajos de investigación relativos a la formación de profesores de matemáticas, entre los que se incluyen proyectos docentes, memorias de tercer ciclo y tesis doctorales. En el año 1998, se da inicio al proyecto de calculadoras gráficas en la enseñanza secundaria (dirigido a profesores en formación, del último curso de la licenciatura de matemáticas), a cargo de D. Evelio Bedoya Moreno y bajo la dirección de los Dres. D. Luis Rico Romero y D. José Gutiérrez Pérez. En el marco de este proyecto, en el año 1999, se dictó el curso "Calculadoras gráficas y enseñanza de funciones en el currículo de secundaria". El desarrollo de este curso suscitó inquietudes tales como investigar acerca de los cambios producidos en el conocimiento didáctico de los participantes como consecuencia de la incorporación de la tecnología en el diseño de actividades didácticas. Por otra parte, la metodología de investigación empleada, las actividades realizadas en cada sesión de trabajo, el papel de los observadores y el apoyo permanente del Departamento de Didáctica de la Matemática y del Grupo de investigación en Pensamiento Numérico y Algebraico, abrieron fuentes de reflexión para continuar con experiencias similares incorporando otros componentes conceptuales.

En efecto, las reuniones del Grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, durante los años 1999 y 2000, contribuyeron a consolidar la presente investigación, tanto por las valiosas críticas realizadas a los avances del trabajo de investigación como por las sugerencias y aportes para su enriquecimiento.

Otro factor importante en el origen del presente estudio fue la asistencia, del autor de este trabajo, a las clases de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, Facultad de Ciencias, impartida por los profesores Dr. D. Luis Rico Romero y Dr. D. Isidoro Segovia Alex, durante los cursos académicos 1998-1999 y 1999-2000. Esta experiencia contribuyó a interactuar con los estudiantes y profesores del curso, conocer la metodología seguida por los profesores y los contenidos desarrollados en cada una de las clases, así como también las diferentes actividades de evaluación que se llevaban a efecto en cada unidad de estudio. Todas esas observaciones fueron orientando y ayudando a consolidar el planteamiento de la presente investigación, de tal manera que surgió la necesidad de introducir la modelización en el diseño de unidades didácticas. En relación con el contexto matemático se asumió el contexto matemático del álgebra lineal porque favorece la puesta en práctica de la modelización matemática.

En el año 2001 se aplicó el programa objeto de la presente investigación, el cual se ejecutó mediante el curso-taller titulado "Calculadoras Gráficas y Enseñanza del Álgebra en el Currículo de Secundaria", dirigido a profesores en formación y ofertado a través del Centro de Formación Continua de la Universidad de Granada. En dicho programa se incorporó la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. Para el diseño del referido programa se tomaron en cuenta las conclusiones y recomendaciones producto de la evaluación de un programa similar aplicado en el año 2000, tales como incremento del tiempo, mayor interacción con la calculadora y mayor énfasis en las propuestas de evaluación de los participantes en su futuro campo profesional (Ortiz, 2000a).

Durante el proceso de investigación también contamos con el asesoramiento y la opinión de expertos internacionales tales como el Dr. Fernando Hitt del centro de investigaciones CINVESTAV, México, en el año 2000, el Dr. Jeremy Kilpatrick de la Universidad de Georgia, USA, en el año 2001 y el Dr. Antonio Quesada de la Universidad de Akron, Ohio, USA, en el año 2002. El primero nos sugirió aspectos metodológicos como dejar libertad, a los participantes, en la utilización o no de la calculadora gráfica en el proceso de modelización. El segundo, es decir el Dr. Kilpatrick, nos recomendó acudir a la técnica de las entrevistas, específicamente aplicadas a los participantes del programa que, después de realizar el curso-taller, estén ejerciendo de profesores de matemáticas en centros educativos, con la finalidad de identificar en sus clases actuales algunos elementos o rasgos aportados por el programa. El tercer experto internacional, es decir el Dr. Quesada, nos recomendó hacer una revisión de lo acontecido en las sesiones donde no focalizamos los análisis, para contrastar con los hallazgos derivados de los análisis de las sesiones consideradas. Según este experto, una vez resuelto un problema, siempre es bueno la mirada retrospectiva; esto significaría una búsqueda de otras posibles estrategias de resolución u otras asunciones, lo cual podría ayudar a enriquecer las respuestas encontradas inicialmente.

Este conjunto de hechos, junto al conocimiento de experiencias similares en otras latitudes, orientó el diseño y desarrollo de nuestro proyecto de tesis doctoral. En el marco de este proyecto, se diseñó un programa, el cual se desarrolló en un curso-taller en el año 2001 y finalmente se evaluó dicho programa cuyos resultados se presentan en este documento.

Lo descrito anteriormente recoge los aspectos fundamentales del proceso evolutivo de la investigación que presentamos en esta memoria.

1.4. Avances en la investigación

Los avances preliminares de la investigación y los resultados parciales obtenidos se han traducido en informes presentados en diferentes escenarios académicos para su divulgación y discusión. Las referidas comunicaciones se describen brevemente a continuación:

En febrero de 2000 se presentó en el Tercer Simposio de Pensamiento Numérico y Algebraico, Granada, la comunicación titulada: *Álgebra lineal y Modelización* (Ortiz, 2000b), donde se hace una descripción del problema con la inclusión de una discusión teórica sobre la modelización y la calculadora gráfica.

Los resultados de un estudio con profesores de matemáticas en formación, sobre la incorporación de la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de unidades didácticas, se recogen en la Memoria de Tercer Ciclo titulada: *Modelización y Calculadora Gráfica en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas* (Ortiz, 2000a).

Los hallazgos obtenidos referidos al conocimiento didáctico puesto en juego por profesores en formación, al diseñar actividades didácticas de contenido algebraico incorporando la modelización matemática y la calculadora gráfica, se presentan en el informe de investigación titulado: *Evaluación de un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. Uso de la Calculadora Gráfica y la Modelización* (Rico & Ortiz, 2001), presentado en la decimoquinta Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 15), celebrada en Buenos Aires, Argentina.

Algunos resultados de la aplicación de una escala de actitudes, donde se revelan los cambios favorables, aunque no estadísticamente significativos en profesores en formación, hacia la utilización didáctica de la modelización matemática y la calculadora gráfica, se presentan en la comunicación (short oral communication) titulada: *Attitudes of preservice mathematics teachers towards modeling and the graphic calculator.* (Ortiz, Rico y Castro, 2001), presentada en la vigésima quinta conferencia del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 25), celebrada en Utrecht, Holanda.

Por último, el estudio relacionado con la integración de la calculadora gráfica y modelización en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico, fue expuesto en la comunicación presentada en The 6th Asian Technology Conference in Mathematics, Melbourne, Australia, con el título *Graphic Calculators and Mathematical Modelling in a Program for Preservice Mathematics Teachers* (Ortiz & Rico, 2001).

Los resultados de los estudios citados anteriormente impulsan a seguir profundizando en la evaluación de programas con miras a la búsqueda de la calidad en la formación inicial de los profesores de matemáticas.

1.5. Evaluación de programas y calidad

Las exigencias del mundo globalizado marcan pautas a escala internacional, las cuales inciden en diferentes ámbitos de la vida nacional y local. El sector educativo no escapa de este proceso, siendo llamado, en particular, entre otras pautas, a la incorporación permanente de cambios y mejoras, enmarcados dentro de los esquemas orientadores de búsqueda de calidad, no sólo en la enseñanza y aprendizaje sino, además, respecto a la formación ofrecida en los centros educativos. Un ejemplo de esas exigencias lo marcan los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 1989, 1991, 1995, 2000) los cuales sirven de referencia en el ámbito de la educación matemática. Asimismo, se está exigiendo, crecientemente, una mejor formación matemática para los jóvenes y en consecuencia una mejor formación para sus profesores que deben hacer uso de nuevas estrategias de enseñanza y afinar las ya existentes. Todo ello conduce a una revisión y evaluación permanente del sistema educativo y los elementos que lo conforman. De esta manera podrían generarse acciones que contribuyan a incrementar la calidad de los agentes, de los programas a implantar y de los que están en desarrollo. En fin de cuentas lo que se busca es mejorar la calidad de la educación matemática. En este ámbito la evaluación de programas educativos constituye una de las acciones más inmediatas dirigidas a orientar cambios en pro de la calidad de la enseñanza y el aprendizaje.

Todo proceso de evaluación en educación involucra alguna forma de juicio concerniente a la calidad de un recurso o actividad educativa. En la actualidad uno de los propósitos de la evaluación de programas en educación es contribuir al mejoramiento de la 'calidad' de la educación. La calidad desde los dos puntos de vista planteados por Juran (2001), la que se logra con mayor satisfacción al consumidor y que en general "cuesta más" y la calidad que se relaciona con la ausencia de deficiencias y que en general "cuesta menos", aporta de forma diferencial mejoramiento en la calidad de la educación. Desde el primer punto de vista, la calidad está relacionada con la incorporación de nuevos métodos y estrategias de enseñanza y aprendizaje que conllevan inversiones en técnica y tecnología, bien sea al nivel de infraestructura o de la formación de los recursos humanos para la aplicación de la misma. En el segundo punto de vista se vincula la calidad con el uso adecuado y racional que se hace de los recursos existentes en cada centro educativo, o dicho de otra manera con el mal uso que se hace de los recursos (por ejemplo, desempeño de profesores graduados en una disciplina distinta a la asignatura que dictan o el uso de ordenadores sólo para manejos administrativos, entre otros). Estos puntos de vista son orientativos de lo que se puede perseguir con la 'calidad' y sus implicaciones.

En España, en cuanto a la búsqueda de la calidad de la enseñanza y otros aspectos involucrados con ella, encontramos de manera explícita el título cuarto de la LOGSE, referido a la calidad de la enseñanza, específicamente el Articulo 55 establece que "... los poderes públicos prestarán una atención prioritaria al conjunto de factores que favorecen la calidad y mejora de la enseñanza, en especial a: a) La cualificación y formación del profesorado... d) La innovación y la investigación educativa..., g) La evaluación del sistema educativo...". Estos asuntos de carácter oficial reflejan preocupación de aspectos relativos a la mejora de la calidad de la educación, tanto en el ámbito de la formación del profesor como en las actividades de planificación y gestión de la actividad académica en el aula.

Por otra parte, en el preámbulo de la LOGSE está manifiesto el interés por la evaluación cuando se establece que "... la actividad evaluadora es fundamental para analizar en qué medida los distintos elementos del sistema educativo están contribuyendo a la consecución de los objetivos previamente establecidos." Aquí se evidencia la importancia que en el ámbito oficial se le concede a la evaluación y más específicamente a la evaluación de programas.

De acuerdo a lo antes expuesto se considera que la evaluación de programas educativos persigue entre sus objetivos la búsqueda de la calidad de la educación. En este caso la calidad de la educación matemática enfocada, entre otros aspectos, hacia la formación inicial de profesores de matemáticas. En ese sentido se apoya una propuesta de evaluación de programas que aporte insumos para mejorar la calidad del proceso de planificación de la enseñanza, teniendo como propósito final la mayor comprensión y aplicación de las matemáticas escolares.

Una vez puesto en evidencia el marco de trabajo se procede a delimitar el foco de interés en la presente investigación. A continuación se plantea el problema objeto de estudio.

1.6. Planteamiento del problema

La formación inicial de los profesores de educación secundaria es objeto de estudio de manera creciente en diferentes ámbitos. Son diversos los aspectos de interés que se han investigado sobre este tema. Al respecto; algunos autores (Camacho, Socas & Hernández, 1998; Ferrerés, Jiménez, Barrios & Vives, 1998; Marcelo, 1992; Moral, 2000; Ponte, Matos & Abrantes, 1998; Ryan, 1998; Yanes, 1998) han evidenciado la necesidad de contar con planes de formación que contemplen un adecuado equilibrio entre los contenidos teóricos y los prácticos. Yanes (1998) afirma que en España hay una ausencia de formación inicial profesional para la mayoría de los profesores de secundaria. En relación con el profesorado de matemáticas, son abundantes las críticas realizadas sobre las carencias en la formación inicial (Rico, 1994). A pesar de que en España, el libro blanco de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) establece las condiciones que deben reunir los profesores de matemáticas de secundaria[1] para ejercer eficientemente en el sistema educativo y Rico (1997a) sostiene que, en España, la mayoría de los profesores de matemáticas llegan a su desempeño profesional con una formación inicial soportada en pocas fortalezas competitivas, como consecuencia de una infravaloración de los componentes didácticos y una desorganización estructural. De igual manera, Sánchez-Pérez, García & Sánchez-Pérez (1999) afirman que la formación de profesores de matemáticas, en la mayoría de las universidades españolas, se lleva a cabo con una metodología basada en clases magistrales. Sin embargo Sáez (2000) recomienda recurrir, de manera simultánea, al método magistral de enseñanza junto con otras actividades que estimulen la participación y el trabajo personal y grupal de los alumnos. La importancia de este argumento estriba en la posibilidad de cambio en la enseñanza, pasando del énfasis en la memorización a la consideración de la comprensión y la reflexión, lo cual podría ayudar a establecer otras interacciones en el aula para favorecer la enseñanza y el aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas.

Esta problemática de la carencia de una adecuada formación inicial, en el ámbito didáctico, de los profesores se expresa en las conclusiones del diagnóstico general del sistema educativo (Instituto Nacional de Calidad y Evaluación, 1998b), donde se plantea como uno de los *síntomas preocupantes* que:

> *En su gran mayoría, el profesorado español de educación secundaria obligatoria denuncia una formación inicial y continua insuficiente, escasamente adaptada a las tareas y virtualidades que la sociedad le exige. Puesto que la mejora cualitativa de la educación española depende muy en primer plano de la calidad humana y profesional de sus educadores, la*

[1] La LOGSE, en su artículo 17, establece que la educación secundaria comprende la enseñanza básica de cuatro cursos académicos (12 a 16 años), el bachillerato de dos cursos académicos a partir de los dieciséis años de edad y la formación profesional específica de grado medio.

> *persistencia de la situación actual (que se arrastra desde hace años) hay que considerarla como particularmente dañina y merecedora de medidas prontas y eficaces.* (cap. 7, apartado 97)

Sin embargo, en el mismo diagnóstico citado anteriormente, se afirma que el profesorado español ofrece una imagen de solidez y de gran interés y dedicación hacia sus tareas.

La información antes presentada, además de nuestra observación y análisis de la situación, nos induce a pensar en el requerimiento de una formación inicial para el futuro profesor que le garantice un dominio conjunto del conocimiento específico de la materia que enseña y del conocimiento didáctico de los contenidos matemáticos.[2]

Es decir para lograr un profesional con las competencias mínimas se considera conveniente que, en los planes de formación de los profesores de matemáticas, se prevea un equilibrio entre la formación disciplinar y la formación didáctica en la cual se contemple el currículo como una herramienta fundamental de planificación de la enseñanza de las matemáticas y, además, como medio de investigación que permita el desarrollo de métodos y estrategias metodológicas de enseñanza y aprendizaje.

La presente investigación podría aportar referentes empíricos orientadores de posibles intervenciones en los planes relacionados con la formación inicial de los profesores de matemáticas. Esto estaría en congruencia con lo establecido en el Plan de Calidad Docente 2001-2004, de la Universidad de Granada (2001), donde se contempla que

---

[2] En este trabajo se entiende por conocimiento didáctico aquel que proporciona al profesor unas herramientas conceptuales y funcionales que le permiten reflexionar con criterios fundados sobre la planificación y el desempeño de su trabajo profesional. Y el análisis didáctico se refiere a aquel que se deriva de la aplicación del conocimiento didáctico en el diseño de unidades didácticas y en el desarrollo y evaluación de las actuaciones correspondientes, relacionadas con los contenidos matemáticos contemplados en el currículo de secundaria. Para realizar el análisis didáctico, los profesores de matemáticas acudirán a los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997b).

...antes de emprender determinadas actuaciones de mejora de la calidad, éstas han de estar precedidas por estudios e informes... (p.18)

La situación descrita anteriormente referida a la formación inicial de los profesores de matemáticas, y la reflexión producto de ella, induce a indagar acerca de las competencias didácticas de los profesores en formación; para ello tomamos como referencia el contexto de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria en la Universidad de Granada, y fundamentalmente lo relativo a la formación didáctica ofrecida en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, en la cual se trabaja principalmente con el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997b). Con el propósito de delimitar el estudio y a efectos de esta investigación se consideran los organizadores del currículo estructura conceptual, modelización y materiales y recursos; específicamente se hace referencia a la modelización y la calculadora gráfica (como recurso) en un contexto de álgebra lineal de secundaria.

El interés por estos organizadores responde, en primer lugar, al carácter básico y necesario de analizar la estructura conceptual de cada campo matemático con carácter previo al trabajo escolar sobre el mismo. En segundo lugar a que la aplicación de la modelización ha tenido resultados prometedores en el campo de la educación matemática, pues se ha determinado que es una manera organizada y dinámica de acercar las matemáticas al mundo físico y social del alumno (Bassanezi, 1994; Blum,1991; Brunner, Coskey & Sheehan, 1998; Doerr & Yerushalmy, 2001; Grant & Searl, 2000; Niss, 1988;). En tercer lugar la incorporación de las modernas calculadoras gráficas, en particular la TI-92, como recursos didácticos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, está generando el cambio de una enseñanza tradicional a una enseñanza significativa (Berry & Francis, 2000; Harskamp, Suhre & Streun, 1998;

Kutzler, 2000; Moreno-Armella & Santos, 2001; Schneider, 2000). El álgebra lineal tiene riqueza de aplicaciones importantes en la modelización de situaciones del mundo real, tal como señalan Dorier, Robert, Robinet & Rogalski (2000a), Edwards & Chelst (1999), Harel (1998) y que ya hemos expresado en Ortiz (2000a). Es decir, el álgebra lineal es un contenido matemático susceptible de aplicación de la modelización (Fearnley-Sander, 2000; Tucker, 1993). De igual manera el álgebra lineal es propicia para la incorporación de la calculadora gráfica para la representación de conceptos y establecer conexiones del álgebra con el mundo físico y social (Carlston, Johnson, Lay & Porter, 1993; Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001; Dorier, 2000; Gage, 2002).

Por otra parte, en virtud de la importancia que se le debe prestar al dominio afectivo en la formación inicial de profesores de matemáticas (McLeod, 1992) se considera conveniente en esta investigación indagar respecto a las actitudes de los profesores en formación hacia la modelización y las nuevas tecnologías. La importancia de las actitudes como un factor que podría ralentizar o potenciar la congruencia entre el ser y el deber ser del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ha sido puesta en evidencia en los estudios de Almeqdadi (1997), McLeod (1992, 1993), Mohammad & Tall (1999), Philippou & Christou (1998), Ponte, Matos, Guimaraes, Cunha & Canavarro (1992), Richardson (1996) y Schmidt (1999). En suma, el interés por las actitudes de los profesores en formación reposa también en la importancia que a ésta se le asigna en la legislación educativa en España. Las actitudes forman parte de los objetivos de los programas de estudio de la escuela secundaria. Los estudios del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (1998a, 1998b, 2001), sobre el sistema educativo español en diferentes niveles muestran, entre sus hallazgos relacionados con los profesores de matemáticas, que: 1) los profesores de matemáticas en ejercicio son los que menos valoran y utilizan los medios materiales tales como audiovisuales y ordenadores; 2) los profesores de matemáticas son los menos partidarios de emplear una metodología innovadora y participativa; 3) los profesores valoran más los materiales elaborados por ellos mismos. De lo antes señalado se deduce que los profesores de matemáticas no tienen una actitud positiva hacia la incorporación de cambios en las estrategias de enseñanza y, por tanto, las actitudes de los profesores podrían afectar la puesta en práctica del currículo acorde con la normativa contemplada en la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) vigente en España desde el año 1990.

Lo planteado en el párrafo anterior nos motiva a estudiar las dimensiones del conocimiento didáctico y las actitudes[3] de los profesores en formación con respecto a cuatro componentes que están relacionadas con las necesidades identificadas por los estudios del INCE[4]. Esas componentes son la calculadora gráfica, la modelización, el álgebra lineal y el diseño de unidades didácticas.

Para indagar respecto a las competencias didácticas y las actitudes de los profesores en formación, recurrimos al diseño y aplicación de un programa de formación que incorpora la modelización matemática y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. Dicho programa tiene como propósito ampliar el soporte cognoscitivo, de los participantes, necesario para el diseño de actividades didácticas; es decir, para actuar razonadamente en la toma de decisiones al momento de diseñar las referidas actividades. Asimismo, a efectos de contribuir a identificar aciertos y desatinos del programa MCA (Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal) relacionados con su validez, su pertinencia y adecuación, así como sus limitaciones y alcances, el mismo se evalúa en lo concerniente al diseño,

[3] Compartimos con Valdez (1998) cuando afirma que las actitudes de los sujetos son tan importantes como su buen desempeño. Además sostiene que, si los sujetos son profesores, ellos reflejan ciertas actitudes en sus alumnos que podrían afectar al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En el mismo sentido Hilton (2000, p.83) sostiene que "El atributo más importante de un profesor de matemáticas es una actitud positiva hacia las matemáticas...". Por otra parte Gairín (1987) señala que la percepción y las expectativas que tiene el profesor respecto al estudiante determinan sus actitudes hacia el alumno.

desarrollo y resultados de su aplicación. Dicha evaluación enfatiza el ámbito cognitivo (competencias didácticas) y el ámbito afectivo (actitudes).

Los objetivos del programa MCA están relacionados con la aplicación de la modelización, el manejo de la calculadora gráfica y el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. En consecuencia, en esta investigación, se propone responder a la siguiente interrogante:

¿Cuáles son las competencias didácticas puestas en práctica, por los profesores en formación, cuando diseñan actividades de enseñanza de contenido algebraico, durante su participación en un programa de formación que incorpora la utilización didáctica de la modelización y la calculadora gráfica y qué actitudes manifiestan ante las componentes del citado programa?

En el ámbito cognitivo las cuestiones propuestas son:

* ¿Cuál es el nivel de aplicación del proceso de modelización matemática?
* ¿Cuáles son las competencias alcanzadas por los participantes referidas a la calculadora gráfica?
* ¿De qué manera organizan el contenido algebraico para el diseño de actividades didácticas, acudiendo a la modelización y a la calculadora gráfica?
* ¿Qué papel desempeña la calculadora gráfica como recurso didáctico en el diseño de las actividades previstas?
* ¿Cómo los profesores en formación organizan la estructura conceptual de un tópico algebraico cuando se proponen elaborar actividades didácticas sobre ese contenido?
* ¿Qué tipos de situaciones problema encuentran los profesores en formación para dotar de significado a los contenidos algebraicos?

[4] INCE es la sigla del 'Instituto Nacional de Calidad y Educación' en España.

* ¿Cómo planifican u organizan el trabajo escolar para sus potenciales alumnos?
* ¿Cómo interrelacionan la modelización y la calculadora gráfica con los otros organizadores del currículo?

En relación con el ámbito afectivo, en la investigación interesa conocer la actitud de los profesores en formación ante la calculadora gráfica y la modelización en la elaboración de actividades didácticas de contenido algebraico. De aquí surge la siguiente cuestión:

¿Qué actitudes manifiestan los profesores en formación ante el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con elementos algebraicos?

Esta pregunta se puede desglosar en varias cuestiones:

* ¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia la utilización de la modelización en la enseñanza del álgebra?
* ¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el uso de la calculadora en la enseñanza del álgebra?
* ¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el planteamiento y resolución de problemas algebraicos en la enseñanza de las matemáticas?
* ¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el diseño y elaboración de unidades didácticas en la enseñanza del álgebra?

1.7. Objetivos de la investigación

Generales

A la vista de la descripción del problema y de las cuestiones planteadas, nos planteamos los siguientes objetivos:

1. Diseñar, implementar y evaluar un programa de formación (MCA) que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

2. Analizar las competencias didácticas de los profesores en formación en el diseño de actividades de enseñanza de contenido algebraico.

3. Analizar las actitudes de los profesores en formación hacia el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con el álgebra lineal.

Específicos

Los anteriores objetivos generales se desglosan en los objetivos específicos siguientes:

1. Diseñar un programa que integre el proceso de modelización y la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal.
2. Identificar y caracterizar las competencias, logradas por los profesores en formación, respecto a la calculadora gráfica.
3. Analizar los niveles de aplicación del proceso de modelización matemática.
4. Analizar la estructuración del contenido algebraico utilizado por los participantes, en el diseño de unidades didácticas, acudiendo a la modelización y la calculadora gráfica.
5. Establecer la validez y pertinencia del diseño del programa MCA.
6. Analizar la estrategia de desarrollo del programa MCA.
7. Analizar los resultados del programa MCA.
8. Analizar las actitudes de los profesores en formación hacia las componentes del programa MCA.

CAPÍTULO

II

Marco Teórico

2.1. Conocimiento del profesor

El interés por el qué aprende el profesor y cómo superar la dualidad existente entre la formación conceptual y teórica y la formación práctica en el servicio docente plantea el problema de la formación inicial de cara a la formación profesional, para que los profesores en formación logren las competencias necesarias para desempeñarse adecuadamente en su futuro trabajo profesional (Ensor, 2001).

El conocimiento que cada profesor de matemáticas debe adquirir en su formación inicial, para lograr la competencia que le permita desarrollar su función eficientemente, involucra un dominio disciplinar y un conocimiento didáctico. Es decir, además de los conocimientos matemáticos que adquiere en su formación inicial, el profesor de matemáticas requiere de otros conocimientos relativos a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que le ayudarán a conformar su competencia profesional. Esto significa reconocer la necesidad, entre otras, de dotar al profesor de habilidades y destrezas para: planificar programas de matemáticas escolares, diseñar actividades didácticas, establecer dificultades y obstáculos, diagnosticar y prevenir errores, conducir y evaluar el aprendizaje de los alumnos, enseñar conceptos o procedimientos matemáticos, evaluar innovaciones, reflexionar sobre su actuación y, en general, comprender su papel en la escuela. Ese nivel de preparación del profesor de matemáticas estaría en relación directa con la comprensión matemática y el logro de los alumnos. Todo lo anterior, junto con el conocimiento matemático y las destrezas y conocimiento práctico para la gestión de grupos de alumnos, forma parte relevante de lo que llamamos conocimiento profesional del profesor de matemáticas o, simplemente, conocimiento del profesor de matemáticas.

A efectos del presente trabajo consideramos la competencia como la disposición de conocimiento o habilidades de una persona para realizar apropiadamente una actividad (Short, 1985). De esta manera, la competencia implica elegir y conocer el por qué uno elige hacer lo que hace. Así que, entendemos por *competencia didáctica* la capacidad para seleccionar con criterio fundado un conocimiento particular y/o habilidades para aplicarlas en la situación de enseñanza que se considere pertinente. Esa capacidad de selección requiere de ciertos conceptos básicos para dar inicio a la reflexión y toma de decisiones en el proceso de enseñanza (Cooney, 1994).

Desde nuestra perspectiva el conocimiento del profesor involucra competencias didácticas que contribuyen a que el docente asuma otras alternativas de enseñanza tales como conectar las matemáticas con ellas mismas; es decir, relacionar unos conceptos con otros, representar de diferentes maneras un mismo concepto, probar regularidades y hacer generalizaciones en caso de que sean posibles. Por otra parte, también el profesor puede hacer uso de la matematización, o sea, pasar del mundo físico y social (mundo real) al mundo de los símbolos para abordar y tratar matemáticamente situaciones problema. En la referida matematización se dan procesos que conducen a identificar las matemáticas en otros contextos, formular y visualizar problemas de diferentes maneras y descubrir relaciones y regularidades, entre otros. Con la matematización se le presenta la oportunidad de relacionar las matemáticas con otras ciencias y con la vida cotidiana. Cuando el profesor tiene competencia didáctica puede sacar mayor provecho de la matematización en la enseñanza de las matemáticas. Es decir la competencia didáctica es un elemento clave en el proceso de enseñanza de las matemáticas.

En el presente estudio las competencias didácticas están referidas al conocimiento y habilidades relacionadas con los cuatro componentes principales de esta investigación, es decir: la modelización, la calculadora, la estructura conceptual de los tópicos del álgebra lineal y el diseño de actividades didácticas.

Marcelo (1992) plantea que la poca atención a la formación didáctica del profesor de matemáticas, lo induce a recurrir en su campo profesional al ensayo y error como el principal instrumento para aprender a enseñar. Una manera de contribuir a superar esta limitación sería el establecimiento de programas actualizados en la formación de profesores con la utilización de nuevas tecnologías, lo cual podría inducir cambios en el desempeño de su futura actividad profesional con la incorporación de nuevos dominios de enseñanza que harían mucho más fecundo el proceso de aprendizaje de las matemáticas.

Un aspecto importante a considerar es que el conocimiento que el profesor de matemáticas adquiere durante la formación inicial, podría favorecer la sensibilización de los futuros profesores ante las innovaciones y estimular los deseos de mejora permanente de su actividad, una vez que se encuentren en su campo profesional. Esto significa que la formación inicial recibida podría evitar situaciones como la incomodidad de enfrentarse en el aula con un ambiente caracterizado por las innovaciones tecnológicas para la enseñanza, es decir con el uso de tecnologías informáticas en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, tales como las calculadoras gráficas. Estas limitaciones están muy extendidas entre el profesorado en ejercicio. En efecto, en un informe sobre la educación secundaria en Canadá, los resultados de una encuesta aplicada a profesores de matemáticas revelaron que éstos no utilizan las herramientas de nuevas tecnologías, tales como calculadoras gráficas, exigidas en el nuevo plan de estudios, porque las mismas no están disponibles o porque los profesores no sienten confianza al utilizar la tecnología (Brown & Rushowy, 2001).

Pensar en un conocimiento profesional del profesor de matemáticas significa considerar conocimientos que le aporten opciones para utilizar y valorar un mayor número de herramientas conceptuales, que le permitan determinar y establecer las secuencias metodológicas para presentar y reforzar los conceptos y procedimientos matemáticos y le sugieran nuevas formas de evaluar e interactuar con los alumnos.

Respecto a la investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas en España en los últimos años, Llinares (1998) identifica dos agendas de investigación las cuales denomina aprendizaje del profesor y práctica profesional del profesor de matemáticas. Podríamos afirmar que la primera está vinculada a la formación inicial de los profesores y la segunda a los profesores en ejercicio. En la formación inicial se incluyen diferentes maneras de visualizar el conocimiento matemático con miras a su incorporación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares. En nuestro caso, esas distintas maneras de visualizar y dotar de significado al conocimiento matemático son los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997b, 1998). Por otra parte, en la línea de formación inicial, también se considera la reflexión de los futuros profesores sobre sus teorías y su relación con la práctica (Flores, 1998a, 1998b). Llinares identifica varias problemáticas de investigación que incorporan, entre otros, elementos cognitivos de los profesores en formación relacionados con el conocimiento matemático, con el conocimiento pedagógico específico de las matemáticas y con la resolución de problemas. Dentro de la prospectiva de investigación sobre el conocimiento del profesor, el referido autor señala que la potencialidad de las nuevas tecnologías debería integrarse en los campos de indagación identificados en las investigaciones con las problemáticas evidenciadas en su trabajo.

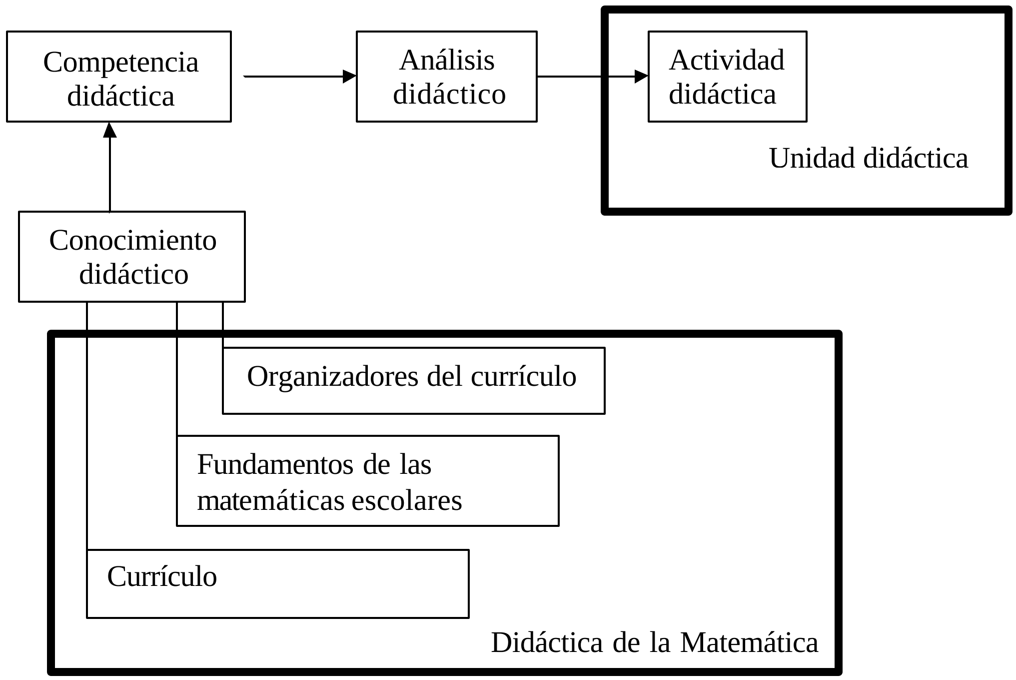
Una parte del conocimiento profesional de los profesores lo constituye su conocimiento didáctico. En este trabajo nos referimos al conocimiento didáctico como el conocimiento necesario para la planificación, puesta en práctica y valoración de actividades didácticas o más en general de unidades didácticas[1]. Es decir, entendemos que el conocimiento didáctico del profesor de matemáticas se manifiesta en la competencia para el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Este trabajo con las unidades didácticas constituye, probablemente, una de las tareas más importantes e interesantes que deben realizar los profesores, ya que en ellas se plasman sus ideas, enfoques y valores con respecto a su materia. Además, esta es una tarea dinámica susceptible de mejora o cambio, que implica la constante reflexión e indagación de los profesores sobre las matemáticas escolares y sobre su labor educativa fundada en su enseñanza y aprendizaje. Marín (1997) afirma que

> *La unidad didáctica es la línea de choque de la planificación educativa con la práctica docente. Por ello debe contener los instrumentos de planificación en su grado más concreto y los indicadores para detectar cómo se va produciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje para facilitar la retroalimentación al profesor y al alumno y el previsible cambio en el diseño de tareas o el uso de recursos.* (p.195).

Esto significa que la unidad didáctica, junto a las actividades didácticas que la conforman, debe ser una verdadera guía de organización y actuación para el docente, en cuanto a la selección, secuencia y estructura de las actividades a desarrollar en el tiempo así como respecto a los objetivos pretendidos en el proceso de enseñanza y aprendizaje. En esa concreción de las unidades didácticas es donde se hace evidente la necesidad de un conocimiento que lo sustente, el conocimiento didáctico, soportado en los organizadores del currículo, y sus manifestaciones en competencias didácticas. Es allí donde el futuro profesor de matemáticas inicia su aprendizaje práctico para su futuro desempeño profesional.

[1] Según la *Guía General de la ESO* (Ministerio de Educación y Ciencia, 1989), la *unidad didáctica* es un "conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado, para la consecución de unos objetivos didácticos. Una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y a la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente delimitado" (p.90).

Figura 2.1.1. *Relación entre el conocimiento didáctico y las unidades didácticas*



Esquemáticamente en la figura 2.1.1 presentamos estas relaciones. En la figura se observa que la didáctica de la matemática ofrece al futuro profesor herramientas conceptuales que requiere para alcanzar el análisis de los conocimientos de las matemáticas escolares y con ello planificar y gestionar sus actividades didácticas. Esas herramientas están vinculadas con tres bloques identificados por el currículo, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo. Estos últimos constituyen la base para realizar el análisis didáctico que se concretará con la elaboración de una actividad didáctica o de una unidad didáctica completa. Gómez & Rico (2002) afirman que cuando se realiza el análisis didáctico, dichas herramientas actúan de manera conjunta y simultánea. Esto ayudaría, en la medida que el profesor de matemáticas adquiera mejor formación, para minimizar la brecha o diferencia entre el currículo de su plan de formación como profesor y lo que él tiene que enseñar a los alumnos en la escuela. En particular los organizadores del currículo de matemáticas (Rico, 1997b) son nociones que, entre otras peculiaridades, ayudan a la búsqueda de relaciones entre los conceptos matemáticos y de éstos con el mundo físico, natural y social así como a comprender el uso de diferentes recursos y representaciones para incrementar la comprensión de las matemáticas escolares. En conclusión, Segovia & Rico (2001) afirman que "Los organizadores son aquellos conocimientos que sostienen los significados contemplados para las matemáticas escolares" (p.88).

2.1.1. El diseño y elaboración de actividades didácticas

Los estándares curriculares (NCTM, 2000) sostienen que los alumnos aprenden con las experiencias que proporcionan los profesores. Asimismo, los referidos estándares aluden a las exigencias en el profesor para lograr que los alumnos aprendan en el acto de enseñar. Con ello se pone de manifiesto que la formación de los profesores es una tarea compleja que requiere tomar en cuenta, entre otros, aspectos como la planificación de las actividades didácticas.

En la planificación de las actividades didácticas se pone de manifiesto la competencia en el desempeño profesional del profesor de matemáticas; de allí que uno de los objetivos de la formación inicial de profesores consista en proporcionarles el conocimiento didáctico necesario sobre el que basar esa competencia. Para diseñar y elaborar las actividades didácticas, el profesor realiza un análisis didáctico de los contenidos matemáticos a enseñar a partir de los organizadores del currículo. En ese análisis didáctico se pone en juego el conocimiento y competencia de quien está diseñando la actividad (Gómez & Rico, 2002). Para proporcionar formación y competencia didáctica a los futuros profesores de matemáticas, en la Universidad de Granada se ofrecen asignaturas relacionadas con el campo disciplinar de didáctica de la matemática, específicamente en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. El objetivo general de esta materia pretende que el futuro profesor adquiera conocimientos, habilidades y destrezas para planificar la enseñanza de las matemáticas escolares. Es decir, que el profesor en formación incremente su conocimiento didáctico mediante el estudio de nociones y conceptos propios de la didáctica de la matemática. Este conocimiento propio de la disciplina didáctica de la matemática, en este trabajo se concreta en los contenidos de la asignatura mencionada, que comprenden la noción de currículo, los conceptos básicos relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo, nociones todas ellas que soportan teóricamente la asignatura didáctica de la matemática en el bachillerato (ver figura 2.1.1)

Cuando diseña actividades didácticas el profesor utiliza conocimientos que le sirven de base para la toma de decisiones que la elaboración de dichas actividades requiere. En educación matemática, Rico (1997b) denomina a esos conocimientos *organizadores del currículo*, los cuales forman parte de la formación didáctica que se le brinda a los futuros profesores de matemáticas en la Universidad de Granada. Esa formación aporta competencias didácticas para realizar el análisis didáctico a partir de los organizadores del currículo, lo cual favorece la concreción de las actividades o unidades didácticas propuestas.

Para el diseño y elaboración de actividades didácticas pueden tenerse en cuenta los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación. Segovia & Rico (2001) aportan recomendaciones para cada una de estas dimensiones curriculares. Entre los objetivos sugieren aquellos que se relacionen con prioridades en el dominio conceptual y procedimental, así como la competencia en la ejecución del proceso de modelización y el empleo de recursos tecnológicos. Entre los contenidos sugieren establecer contenidos que permitan acudir a las competencias en la ejecución de tareas de modelización. En cuanto a la metodología, producto del análisis didáctico con los organizadores del currículo, sugieren: a) seleccionar situaciones que contribuyan a la ejemplificación de los conceptos matemáticos de cada tema, b) plantear conflictos cognitivos y estrategias para su superación, c) diseñar tareas que favorezcan el aprendizaje cooperativo y la discusión de los significados asociados a los conceptos y d) establecer propuestas para motivar a los alumnos por el tema. Finalmente, para la evaluación recomiendan el planteamiento de tareas abiertas para valorar la comprensión global y las estrategias de alto nivel, entre otros.

Las recomendaciones anteriores dadas por Segovia & Rico (2001) orientan el análisis de las producciones de los participantes del programa MCA. Además se incorporan las sugerencias al respecto, de Cathcart & Horseman (1997), Galbraith & Haines (1998), Gómez & Rico (2002), Puig (1997) y Socas (1997), entre otros.

2.1.2. El currículo y los organizadores del currículo

La noción de currículo tiene varias conceptualizaciones. En el Artículo 4, apartado 1 de la LOGSE se entiende por currículo "...el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente".

Para Stenhouse (1991):

> *Un currículo es una tentativa para comunicar los principios y rasgos esenciales de un propósito educativo de forma tal que permanezca abierto a discusión crítica y pueda ser trasladado efectivamente a la práctica* (p.29)

El referido autor resalta la necesidad de establecer los fundamentos para la planificación de las actividades a desarrollar, lo cual significa que el currículo en cuanto a proyecto debe ofrecer:

1. Principios para la *selección* de contenidos: qué es lo que debe aprenderse y enseñarse.
2. Principios para el *desarrollo de una estrategia* de enseñanza: cómo debe aprenderse y enseñarse.
3. Principios acerca de la *adopción de decisiones* relativas a la secuencia, y
4. Principios para *diagnosticar las fortalezas y debilidades* de los individuos.

Estos principios los tomamos como indicadores que orientan el nivel de logro de los objetivos del programa dirigidos a los participantes. Cada uno de esos principios persigue:

1. *¿Qué debe aprenderse y enseñarse?* Con este principio se persigue identificar lo que el profesor en formación establece como objetivos y contenidos sobre los que enfatiza en cada actividad que realiza. Para ello, el participante toma como base los lineamientos dados para realizar las actividades propuestas, como son el nivel escolar o el tópico matemático específico. En este apartado, el profesor en formación toma decisiones que evidencian el interés tanto en los sujetos (alumnos) como en el logro de los objetivos que se plantea alcanzar en cada actividad.

2. *¿Cómo debe aprenderse y enseñarse?* Aquí el profesor en formación muestra su estrategia de enseñanza y aprendizaje. Qué o cuáles actividades propone realizar a los alumnos: trabajo en grupo, responder preguntas sobre gráficas o tablas hechas en la calculadora gráfica o exponer conclusiones sobre modelizaciones realizadas. En este principio queda explícita la metodología del profesor, el uso y disponibilidad de materiales y recursos y el grado de participación del profesor y de los alumnos.

3. *¿Se toman decisiones relativas a la secuencia?* Esta cuestión permite evidenciar la posible toma de decisiones en el desarrollo de una actividad didáctica. Por ejemplo, qué decisiones tomar cuando los alumnos no tienen

los conocimientos previos (conductas de entrada) para abordar el proceso de lograr un objetivo de aprendizaje.

4. *¿Cuáles son las fortalezas y debilidades de los alumnos?* Este aspecto permite detectar cómo planifica el proceso de evaluación, tanto desde el punto de vista diagnóstico y formativo como del sumativo si es el caso.

Los aspectos propuestos por Stenhouse constituyen un referente importante en el diseño del programa objeto de nuestra investigación.

En esta investigación también consideramos el concepto de currículo propuesto Rico (1997b) quien plantea que el currículo es "...toda actividad que planifique una formación..." (p.26). En concordancia con Stenhouse, para este autor todo plan de formación tiende a dar respuesta a las cuestiones siguientes:

¿Qué es, en qué consiste el conocimiento?
¿Qué es el aprendizaje?
¿Qué es la enseñanza?
¿Qué es, en qué consiste el conocimiento útil?

Con el propósito de responder a estas interrogantes, Rico (1997b), establece una plataforma de abordaje que incluye cuatro niveles y cuatro dimensiones. Los niveles contemplados son: a) planificación para los profesores, b) sistema educativo, c) disciplinas académicas y d) teleológico o de finalidades. Las cuatro dimensiones establecidas son: a) cultural/ conceptual, b) cognitiva o de desarrollo, c) ética o formativa y d) social. Lo antes señalado lo resume Rico en la tabla 2.1.3, donde ubica los componentes del currículo y en el que se puede observar la relación entre los niveles y las dimensiones del currículo.

Las acotaciones anteriores son un referente importante para la formación de profesores. Es necesario que cada profesor de matemáticas cuente con una formación en el área curricular de su disciplina, que disponga de una adecuada formación profesional y que posea versatilidad y comprensión de los fenómenos educativos vinculados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Esto significa que las preguntas propuestas arriba, vinculadas con el plan de formación que administra el profesor son un espacio de reflexión en cada profesor de matemáticas.

Tabla 2.1.3. *Relación entre los niveles y las dimensiones del currículo*

		Dimensiones del currículo			
		Cultural/ conceptual	Cognitiva o de desarrollo	Ética o formativa	Social
Niveles	Planificación para los profesores	Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
	Sistema educativo	Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
	Disciplinas académicas	Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del Aprendizaje	Pedagogía	Sociología
	Teleológico o de finalidades	Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales

Tomado de Rico (1997b, p.409)

Organizadores del currículo

Cada día se hace más evidente la necesidad que los profesores de matemáticas posean, no sólo conocimientos matemáticos, sino también conocimientos didácticos para afrontar los procesos de enseñanza y aprendizaje que se producen en el aula. Dentro de esos conocimientos didácticos, Rico (1997b) propone los organizadores del currículo como fundamento para organizar la pluralidad y riqueza de significados del conocimiento matemático, que deben tenerse en cuenta durante el proceso de planificación de las matemáticas escolares. En ese sentido define a estos organizadores como "...aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas" (p.45). Con el objetivo de precisar la delimitación del concepto, Rico plantea que

> *Un organizador debe ofrecer un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas, un espacio de reflexión que muestre la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático y unos criterios para abordar y controlar esa complejidad... (p. 46).*

En definitiva, consideramos el uso de los organizadores del currículo porque contribuyen a la toma de decisiones de los profesores de matemáticas, en la planificación, gestión y evaluación de unidades didácticas. Con la finalidad de concretar su propuesta, Rico (1987b) propone los siguientes organizadores del currículo: a) estructura conceptual, b) errores y dificultades, c) diversidad de representaciones y modelizaciones, d) fenomenología de los conocimientos implicados, e) materiales y recursos y f) evolución histórica de cada campo. Sostiene, además, que con estos organizadores es posible realizar un análisis didáctico de los contenidos matemáticos contemplados en el currículo escolar.

Respecto a la planificación de unidades didácticas del álgebra en educación secundaria, Socas, Camacho & Hernández (1998) reflexionan y proponen un ejemplo sobre el análisis didáctico del lenguaje algebraico y sus implicaciones en la formación inicial de profesores de matemáticas. Para ello analizan los organizadores siguientes: 1) contextualización del currículo de álgebra en la enseñanza secundaria, 2) los contenidos en términos de capacidades, 3) sistemas de representación, 4) materiales y recursos, 5) errores y dificultades y 6) enseñanza del álgebra. En el análisis de los contenidos en términos de capacidades, los autores mencionan competencias a lograr en los alumnos, con sus respectivos indicadores, y que el profesor debe tener en cuenta en el diseño de actividades didácticas. Entre esas competencias se incluye la habilidad para aplicar los conocimientos algebraicos a la resolución de problemas y la comunicación efectiva de ideas matemáticas. Los indicadores propuestos para el caso de la resolución de problemas fueron la formulación de problemas algebraicos, aplicación de diferentes estrategias en la resolución de los problemas algebraicos, verificación e interpretación de soluciones y generalización de resultados. Los indicadores propuestos en la habilidad de utilizar el lenguaje algebraico para comunicar ideas fueron la comunicación oral y escrita, la comprensión de las ideas expresados por otros en lenguaje algebraico y el manejo adecuado de las notaciones algebraicas para representar ideas y para describir modelos matemáticos. En el análisis de los materiales y recursos para la enseñanza del álgebra, los autores enfatizan la utilización de calculadoras y ordenadores, argumentando que los mismos bien empleados pueden ayudar a desarrollar el aprendizaje significativo de los conceptos algebraicos. Finalmente los autores afirman que "…una propuesta metodológica de formación de profesores debe conceder prioridad a las actividades prácticas con participación activa de los alumnos [profesores en formación] y (…) pasa inevitablemente por los organizadores del currículo…" (Socas, Camacho & Hernández, 1998, p.85).

A objeto de la presente investigación se considerarán los organizadores estructura conceptual del contenido matemático, modelización, y materiales y recursos, en la ejecución del programa propuesto para los profesores en formación. El organizador de materiales y recursos está representado por la calculadora gráfica. El análisis que se realiza de las producciones de los profesores en formación está focalizado sobre esos organizadores, es decir, sobre la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal. Por supuesto que no se ignora la presencia de los otros organizadores propuestos por Rico (1997b) sino que por el contrario los consideramos en las actividades realizadas durante el desarrollo del programa MCA (Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal).

2.2. El proceso de modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

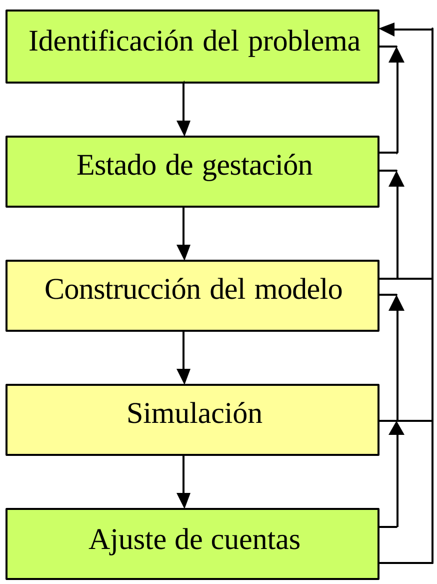
El estudio de los modelos está ligado al universo de la ciencia. Morrison & Morgan (1999), afirman que los mismos requieren el empleo de conceptos y principios científicos, junto a su fuente de explicación y predicción, para intervenir en el mundo real. Además -agregan las autoras- de la construcción del modelo y de su manipulación se aprende más. En ese sentido, Morgan (1999) sostiene que, para ver las aplicaciones de los modelos y cómo ellos pueden enseñarnos cosas, es necesario comprender los detalles de su construcción y su empleo; es decir, el aprendizaje acerca de los modelos ocurre en dos fases: en su construcción y en su utilización.

Debido a que en nuestro trabajo estamos interesados en los modelos matemáticos y en el proceso de modelización matemática desde un planteamiento didáctico, atenderemos a su construcción y utilización (para describir, explicar y predecir hechos o fenómenos del mundo físico y social), con el propósito de alcanzar mayores niveles de logro en la enseñanza de las matemáticas.

El proceso de modelización en educación matemática es un tema de interés que ha tomado espacio en reuniones científicas como la International Conference on the Teaching of Mathematical Modelling and Applications, (ICTMA), (Niss, Blum & Huntley, 1991; Houston, Blum, Huntley & Neill, 1997; Galbraith, Blum, Booker & Huntley, 1998; Matos, Blum, Houston & Carreira, 2001), la International Conference in Mathematics Education (ICME), (Gómez & Waits, 2000), en el International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME), en las ediciones del Asian Technology Conference in Mathematics y en la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME), entre muchas otras.

En educación matemática, los estudios e investigaciones sobre el proceso de modelización (o la modelización) desarrollados en diferentes países por Cross & Moscardini (1985), Blum (1991), Stewart y Pountney (1995), Ríos (1995), Castro & Castro (1997), Galbraith & Haines (1997), Jiang (1998) y Swets & Hartzler (1999), entre otros, han dedicado su interés en conceptualizar este proceso con miras a su comprensión y consecuente aplicación didáctica.

Figura 2.2.1. *Los estados básicos de la resolución de problemas utilizando modelos (Cross & Moscardini, 1985)*

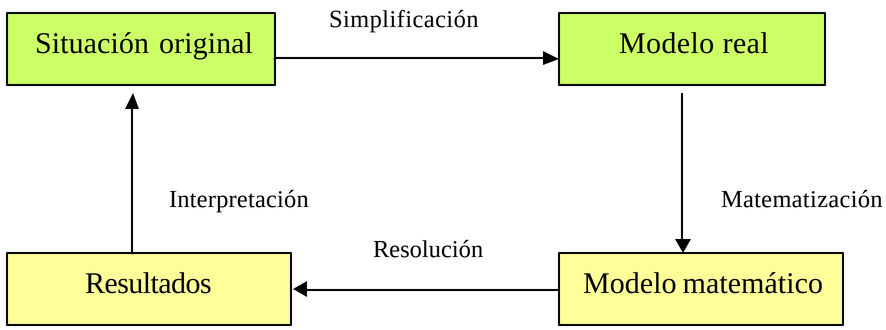


Cross & Moscardini (1985) asumen que, los modelos no son réplicas exactas de la realidad, y contienen sólo algunos de sus elementos esenciales. Es decir, los modelos no deben ser confundidos con la realidad. Para estos autores, la modelización matemática es un arte porque involucra no sólo el desarrollo de un conjunto de habilidades sino también experiencia e intuición. Sin embargo, plantean un esquema, ilustrado en la figura 2.2.1, con los estados básicos de resolución de problemas del mundo real, utilizando la modelización matemática. En dicha figura, cualquier actividad previa a la formulación de un modelo se llama el *estado de gestación*; mientras que el pay-off (ajuste de cuentas) está constituido por lo que sigue a las decisiones hechas como resultado del estado de simulación. En cuanto a la enseñanza de las matemáticas, señalan los autores que, es importante proporcionar un ambiente donde los alumnos puedan adquirir experiencia en modelización matemática para aprender "el arte". En ese mismo sentido, Arora & Rogerson (1991), definen la modelización matemática como "...el arte y ejercicio de construir y trabajar con modelos matemáticos." (pp.111-112). Además, los autores afirman que los modelos de situaciones de la vida real están siendo desarrollados de manera creciente en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Blum (1991) y Blum & Niss (1991) consideran cuatro momentos fundamentales en el proceso de modelización de una situación problemática. En un primer momento, se parte de una situación propuesta que es simplificada, idealizada, estructurada y hecha más precisa por el modelizador; lo cual conduce a un modelo real de la misma. En el segundo momento, el modelo real es matematizado, es decir, sus datos, conceptos, relaciones, condiciones y supuestos son trasladados al lenguaje matemático; hasta resultar un modelo matemático de la situación dada. El tercer momento conlleva la elección de los métodos y contenidos matemáticos a utilizar para la resolución matemática del problema. Finalmente, el cuarto momento es la interpretación de los resultados respecto de la situación original al modelo real. Aquí también se produce una validación del modelo matemático obtenido. Esquemáticamente, la propuesta de estos autores se representa en la figura 2.2.2.

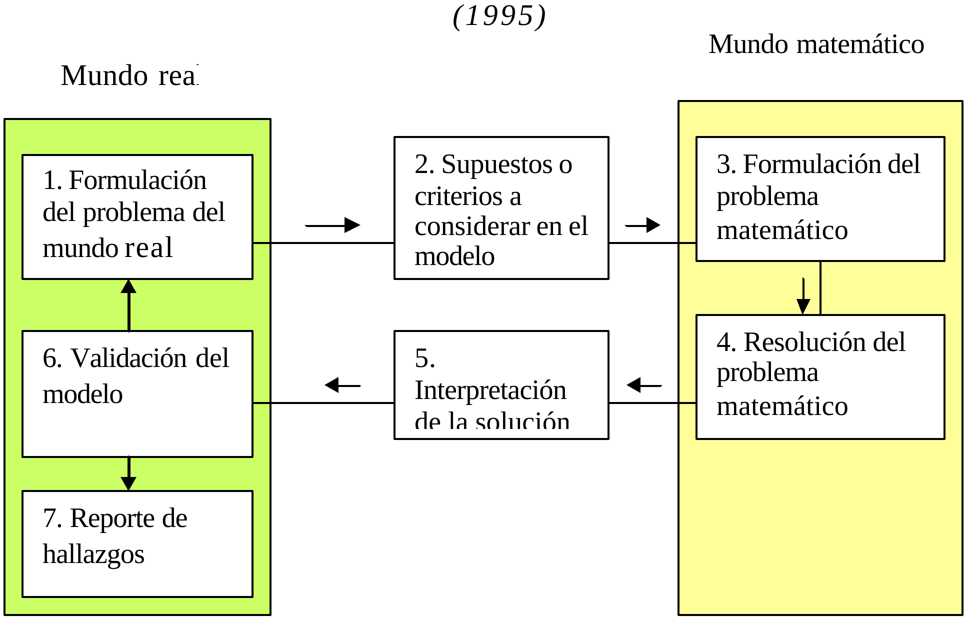
La modelización matemática contribuye a dotar de mayor significado al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas, en tal sentido Blum (1991) sostiene que, existe un consenso de opinión en la comunidad de educación matemática acerca de la inclusión de la modelización matemática como parte integral de la enseñanza de las matemáticas.

Figura 2.2.2. *Proceso de modelización según Blum & Niss (1991)*



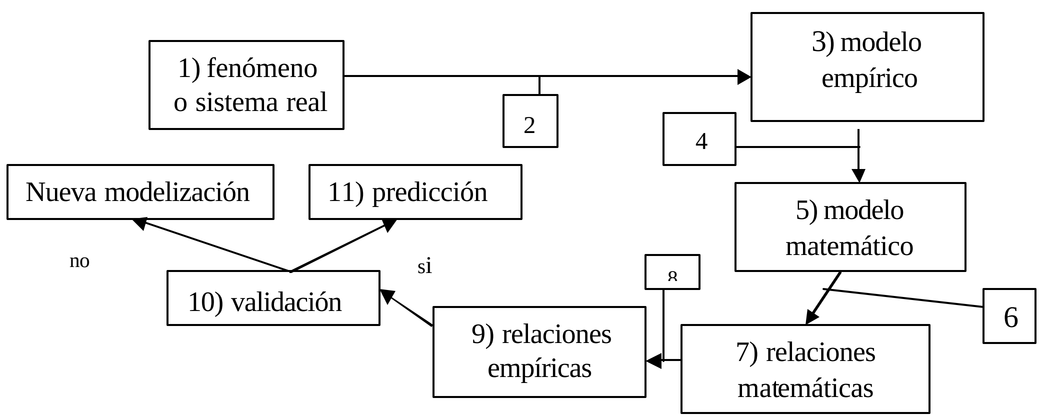
Stewart y Pountney (1995), plantean que la naturaleza abierta de la modelización matemática es la antítesis de la experiencia un problema-una solución. Los autores, proponen una metodología basada en la aproximación de las siete cajas de la Open University, manifestando que es un abordaje ampliamente usado en la enseñanza de la modelización matemática. También Galbraith y Haines (1997) utilizan esta metodología. Veamos este acercamiento, gráficamente en la figura 2.2.3.

Figura 2.2.3. *Proceso de modelización según Stewart & Pountney (1995)*



Para Ríos (1995) la modelización matemática es un proceso que contribuye a realizar una aproximación a problemas del mundo real mediante las matemáticas. En ese sentido sostiene que la modelización matemática “debe ser una fase obligada de la enseñanza de las matemáticas” (p.18). Para llevar a cabo tal proceso de modelización, a partir de la ‘realidad’, este autor considera las etapas siguientes: 1) descripción del problema, sistema o fenómeno real, 2) obtención de información, 3) modelo empírico de relaciones, 4) conceptualización, 5) modelo matemático, 6) proceso lógico deductivo, 7) consecuencias matemáticas del modelo, 8) des-conceptualización, 9) relaciones empíricas, 10) validación y 11) predicción. En la figura 2.2.4 se indican las relaciones entre cada una de esas etapas.

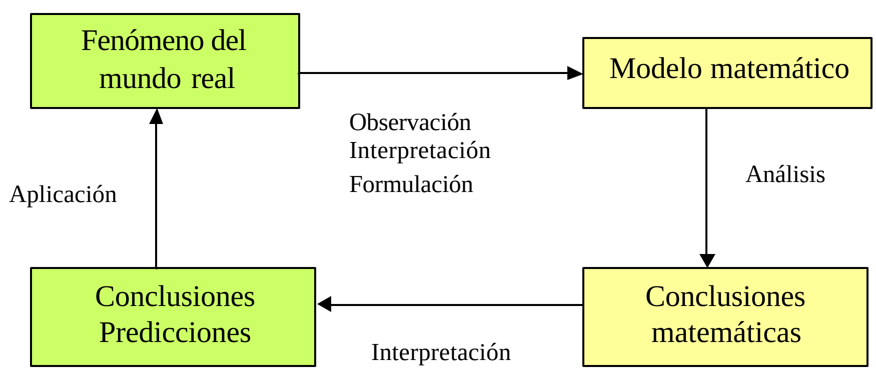
Figura 2.2.4. *Proceso de modelización según Ríos (1995)*



Castro & Castro (1997) afirman que "... la modelización matemática es, fundamentalmente, una forma de resolución de problemas de la vida real; pero no es una forma de resolución cualquiera, sino que conlleva la consideración del problema como un todo." (p.110). En ese sentido, los autores refieren cinco pasos que comparten otros investigadores, como De Lange, para el proceso de modelización matemática. Tales pasos son los siguientes: 1) identificación de un problema real, 2) interpretación del problema matemáticamente (uso de diversos sistemas de representación), 3) empleo de teorías y herramientas matemáticas para resolver el problema, 4) interpretación de la solución y, 5) refinamiento de la solución. En esta propuesta podemos apreciar rasgos invariantes con las citadas anteriormente y que fundamentalmente asocian la modelización con la interacción entre el mundo real y el mundo matemático.

Para Jiang (1998) la modelización matemática es un puente entre el mundo real y las matemáticas. Considera que la modelización matemática empieza con la necesidad de resolver un problema real por medio de las matemáticas, luego se construye un modelo que describe aproximadamente el problema, mediante simplificación y abstracción. Posteriormente, se adoptan herramientas matemáticas, frecuentemente con el apoyo de ordenadores, para resolver el modelo. Finalmente, los resultados son contrastados con la practica real y el modelo será revisado y mejorado. Esta consideración de la modelización matemática es utilizada, según el autor, en el desarrollo vertiginoso de la enseñanza de la modelización matemática en las universidades de China.

Figura 2.2.5. *Proceso de modelización según Swets & Hartzler (1999)*



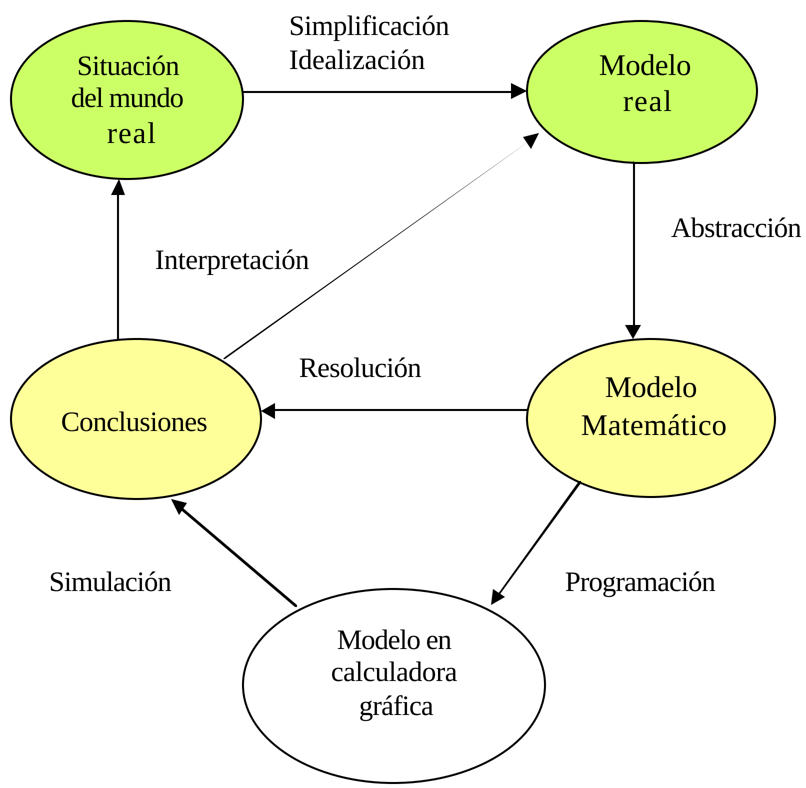
Swets & Hartzler (1999) hacen una introducción a la modelización matemática, empezando por definir los términos. En tal sentido, afirman que "…un modelo matemático es una estructura matemática que se aproxima a las características de un fenómeno. El proceso de concebir el modelo matemático se denomina modelización matemática." (p.1). Además establecen que la modelización matemática es un tipo de resolución de problemas, donde los eventos o fenómenos deben ser interpretados como problemas. También consideran que la modelización matemática es un proceso sistemático que requiere de muchas habilidades y emplea la interpretación, el análisis y la síntesis. En la figura 2.2.5 se representa un ciclo con los cuatro principales estados del proceso de modelización, según estos autores: 1) Identificación de la situación problema dentro de un fenómeno, así como los factores importantes que lo afectan, 2) Conjetura de las relaciones entre factores e interpretación matemática para obtener un modelo para el fenómeno, 3) Aplicación del análisis matemático al modelo, y 4) Obtención e interpretación de resultados en el contexto del fenómeno.

Rico y Gómez (2002) denominan modelo a una terna {estructura, fenómeno, relación} en la que "la estructura expresa el fenómeno de acuerdo con el establecimiento de una relación en la que se identifican aquellas características estructurales del fenómeno que se pueden representar con conceptos y propiedades de la estructura en cuestión" (p.39). En multitud de ocasiones el establecimiento de la relación viene dado por una cuestión problemática que surge de un fenómeno; se trata entonces de encontrar la estructura matemática que representa al problema, y a este proceso se le llama modelización.

En este trabajo nos referiremos a un modelo matemático en el sentido amplio de Rico y Gómez, que ya hemos expresado anteriormente como "...un constructo de carácter dinámico que resulta de la matematización de la realidad, además conserva un isomorfismo con la realidad de la cual procede" (Ortiz, 2000a, p.12). Dicho constructo está constituido esencialmente de fenómenos, estructuras matemáticas y de relaciones entre esos fenómenos y estructuras. Tales relaciones representan aspectos de una situación del mundo real (Niss, 1988). Asumimos la modelización, como el proceso mediante el cual se construye y se estudia una relación entre un fenómeno y una estructura, a partir de una situación o problema del mundo real con la finalidad de aproximarnos a este último. Esto significa que las implicaciones del modelo deben orientarse a la comprensión y resolución del problema correspondiente al mundo real. Esquemáticamente concebimos el proceso de modelización como se visualiza en la figura 2.2.6.

Como se puede observar en la figura 2.2.6, la modelización matemática es un proceso que involucra cuatro grandes momentos:

Figura 2.2.6. *Proceso de modelización matemática*



1) **Identificación de la situación problema**, la cual se entiende como una situación abierta que pertenece al mundo real, susceptible de ser tratada con herramientas matemáticas. En este primer momento se perciben cuestiones e interrogantes procedentes de un mundo de fenómenos, que dan lugar a problemas para cuya respuesta es necesario un proceso de abstracción y simplificación. Es decir, hay que mostrar el interrogante en términos de una estructura matemática que resume y expresa el problema.

Se constituye la imagen de alguna parte objetiva existente en la realidad. Se hace necesario entender la estructura, *idealizar* y precisar el sentido de la situación o problema real, enmarcado sobre la base del contexto en el cual se construirá el **modelo real**. Aquí se incluye la posible toma de datos y su organización para análisis posterior.

2) **Construcción del modelo matemático**, entendido como un constructo que permite describir, predecir y explicar fenómenos o hechos a los cuales refiere. Este es el momento de abstracción, es decir, donde el sujeto focaliza la atención sobre propiedades específicas de la situación dada y considera esas propiedades aisladas de la situación original (Harel & Tall, 1991). Al modelizar se deben establecer los datos, conceptos, relaciones, condiciones y premisas que serán traducidos al lenguaje matemático. De igual manera se identifican los posibles recursos (tecnología) que podrían facilitar dicha construcción.

3) **Elección de los contenidos y métodos matemáticos** apropiados. En este momento se acude a los conceptos y técnicas matemáticas, también se puede recurrir a los recursos tecnológicos para su aplicación operativa o resolución. Las **conclusiones** matemáticas obtenidas serán traducidas del lenguaje de nuestro modelo matemático al lenguaje de la situación del mundo real considerada inicialmente.

4) La **interpretación y validación de las conclusiones** se hace contrastando directamente con la situación del mundo real, que está siendo estudiada, o a través del modelo real configurado en la modelización realizada. Cuando los resultados de esa comparación realidad-modelo son favorables terminamos con el proceso de modelización. En caso contrario reiniciamos el proceso para refinar el modelo existente o para buscar otro diferente a éste, siempre teniendo como norte encontrar un modelo aceptable, para el cual finalmente sería deseable su presentación y discusión ante la clase, con miras a fortalecer en los alumnos sus

habilidades de comunicación de ideas matemáticas en forma oral y escrita, así como otras habilidades intelectuales producto de las argumentaciones tales como la aplicación de los conocimientos matemáticos en el momento de resolución entre otros.

En la figura 2.2.6, se visualiza el carácter cíclico del proceso de modelización, lo cual le confiere una estructura dinámica y flexible que permite su permanente enriquecimiento e incorporación de nuevas interrogantes cada vez que se desea modelizar una situación dada. Por otra parte, en la misma figura se incluye el modelo estructurado en la calculadora gráfica (CG) mediante las potencialidades de programación que ésta posee. De esta manera se puede tener una simulación del modelo, la cual puede contribuir a la comprensión de las conclusiones matemáticas. Dicha construcción del modelo en la CG conllevaría nuevos dominios y exigencias por parte de quien modeliza.

En los momentos mencionados anteriormente debemos tener en cuenta que el sujeto que modeliza podría ser el profesor, el alumno, grupos de alumnos o el profesor conjuntamente con sus alumnos. En todo caso lo propuesto en la figura 2.2.6 debe considerarse inmerso en un contexto de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.2.1. La modelización en la formación del profesorado

Investigar lo relativo a la formación inicial de los profesores de matemáticas es esencial para avanzar en los cambios necesarios que permitan la introducción de nuevos métodos de enseñanza. Según Coxhead (1997) muchos profesores encuentran dificultades al crear o concebir actividades de aprendizaje apropiadas para el desarrollo matemático de los alumnos y proporcionar oportunidades para la evaluación. El acercamiento de los profesores en formación a la modelización matemática podría abrir posibilidades creativas en la enseñanza de las matemáticas.

La modelización matemática es un proceso que contribuye a optimizar la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, representa una opción que permite a los profesores en formación el manejo y uso de conceptos y procedimientos matemáticos para abordar el estudio de situaciones problema recurriendo a una estrategia dinámica de enseñanza y aprendizaje.

El empleo de la modelización matemática en la formación inicial de profesores no solo amplía el conocimiento didáctico sino que desarrolla una manera particular de pensamiento y actuación del profesor. Se transmite conocimiento matemático fusionando abstracciones y formalizaciones, ambas interconectadas a los fenómenos y procesos empíricos considerados como situaciones problema. Para Bassanezi (1994) la modelización matemática favorece la exploración del conocimiento a la luz de las matemáticas, recurriendo a la capacidad explicativa de éstas, para la comprensión y posible modificación de la realidad.

Las bondades del empleo de la modelización matemática en la formación de profesores han quedado de manifiesto en diversas investigaciones. En la Universidad de Montana, USA, Hodgson (1997) suministró un curso de modelización matemática, basado en situaciones abiertas del mundo real, a profesores de secundaria en ejercicio. Encontró que la utilización de situaciones abiertas puede ayudar a facilitar el desarrollo de habilidades para la resolución de problemas, tales como la definición de los mismos y la investigación de la viabilidad de las suposiciones consideradas.

Barbosa (2001) en un programa desarrollado en Brasil con ocho profesores en formación inicial encontró que las principales dificultades para emplear la modelización matemática están referidas al contexto escolar. Esto nos conduce a reflexionar también sobre el contexto de aplicación, es decir, pensar en una formación inicial de profesores de matemáticas que tome en cuenta los contextos del futuro desempeño profesional de los estudiantes para profesores. De esta manera se podría evitar la aparente inconsistencia encontrada por Ensor (2001) entre lo que se ofrece en los cursos de formación inicial y lo que ellos hacen en sus clases al iniciar su actividad profesional.

En general, la modelización en la formación inicial de los profesores de matemáticas podría contribuir a fortalecer en ellos una filosofía de las matemáticas que supere barreras tales como considerar que existe sólo una respuesta correcta a un problema matemático y que sólo hay una manera de encontrar esa respuesta. La modelización ayuda al profesor a conectar el contexto de la vida diaria de los alumnos con las matemáticas, así como a desarrollar en ellos diversas habilidades y destrezas. Se hace cada día más relevante y pertinente la incorporación de la modelización como un proceso complejo en la formación inicial de profesores de matemáticas.

2.2.2. La modelización como organizador del currículo

En los apartados anteriores de este trabajo se han presentado consideraciones teóricas sobre la modelización y su interés creciente en educación matemática. El empleo de la modelización como organizador del currículo adquiere cada vez mayor relevancia en la enseñanza de las matemáticas. La importancia y delimitación del campo de la modelización en educación matemática ha sido puesta de manifiesto por diversos autores, tales como Galbraith, Blum, Booker & Huntley (1998), Houston, Blum, Huntley & Neill (1997), Matos, Blum, Houston & Carreira (2001), Niss, Blum & Huntley (1991) y Ríos (1995). Además la diversidad de trabajos de investigación en esta área y la introducción de cursos y propuestas curriculares para su uso le confieren a la modelización un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas en los diferentes niveles educativos.

Por otro lado, la modelización genera un espacio de reflexión que muestra los procesos de transmisión y construcción del conocimiento matemático. Estas consideraciones nos permiten afirmar que los modelos y el proceso de la modelización satisfacen lo exigido en el planteamiento de Rico (1997b) para que un conocimiento tenga estatus de organizador del currículo.

Como ya se ha dicho, un modelo es una terna {estructura, fenómeno, relación}; por tanto el proceso de modelización establece una relación entre fenómenos y estructuras para dar respuesta a ciertas cuestiones e interrogantes. Uno de los aspectos que caracterizan a la modelización es que permite al profesor considerar el entorno físico y social para abordar situaciones problema dentro de contextos vinculados a los alumnos; es decir, el profesor tendrá en este organizador muchas opciones que le puedan ayudar a relacionar las estructuras y conceptos matemáticos con el mundo real, de tal manera que los alumnos puedan vislumbrar una mayor importancia a los temas de las matemáticas escolares y basar su conocimiento matemático en fenómenos y cuestiones cotidianos. La modelización también ayudará a que los alumnos perciban las matemáticas como una disciplina que puede utilizarse para comprender y modificar la realidad, mediante el planteamiento de situaciones problema del mundo real, lo más cercanas posibles a la sensibilidad del estudiante. Castro & Castro (1997) sostienen que "...la modelización matemática es un poderoso instrumento de aprendizaje significativo, a tener en cuenta para trabajar en el aula." (p.110).

2.2.3. La modelización en el currículo de matemáticas

La inclusión de la modelización en el currículo de matemáticas es producto de múltiples razones, entre las cuales figura la que sostiene que "...las matemáticas sólo son 'útiles' en la medida en que puedan aplicarse a una situación concreta..." (Cockcroft, 1985, p.90). En ese sentido, diferentes trabajos de investigación en educación matemática, tales como los presentados por Bair & Haesbroeck (1998), Blum & Niss (1991), Stewart & Pountney (1995), Swetz & Hartzler (1999), entre otros, centran su atención en la modelización como una estrategia de enseñanza y aprendizaje, que se debe incorporar en los currículos de las matemáticas escolares. La inclusión de la modelización en el currículo de secundaria brinda al alumno la posibilidad para profundizar sus comprensiones de las matemáticas mediante el desarrollo de conexiones entre éstas y el mundo real.

Blum (1991) sostiene que hay consenso para que la modelización matemática sea incorporada en los currículos de todos los niveles escolares. Además, este autor plantea que con la modelización se logra comprender mejor el mundo a nuestro alrededor, comprender con más profundidad los conceptos matemáticos y mejorar las actitudes hacia las matemáticas. Pero al respecto, el mismo autor sentencia que "...el factor más importante para el logro de los efectos citados es el profesor de matemáticas ..." (p.27).

El desarrollo creciente del interés en las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real ha permitido la introducción de la modelización como un componente importante en los currículos de matemáticas, tanto en las escuelas como en las universidades (Arora & Rogerson, 1991). Aunque, afirman estos autores que en los niveles escolares el cambio apenas está incipiente y que ya los modelos de situaciones de la vida real están empezando a ser desarrollados e introducidos en el salón de clases. Concluyen que los ejercicios de modelización en el currículo llegarán a ser más temáticos y culturalmente orientados.

Según Stewart & Pountney (1995) la modelización matemática en el Reino Unido es ahora una componente importante de varias carreras. Esto es consecuencia de las deficiencias en resolución de problemas del mundo real encontradas en los egresados, lo que condujo a incorporar la modelización en el currículo de diferentes niveles escolares.

En educación matemática cada día se incrementa la importancia de la modelización tanto en la docencia como en la investigación. En cuanto a la docencia se está llegando a considerar que la enseñanza debe hacerse tratando que los alumnos se esfuercen en la modelización matemática, como un poderoso instrumento de aprendizaje significativo (Castro & Castro, 1997).

Swetz & Hartzler (1999) afirman que la mayoría de los tópicos matemáticos contemplados en el currículo de la escuela secundaria pueden permitir el desarrollo de modelos específicos. En particular, "...las ecuaciones e inecuaciones lineales son muy útiles en situaciones de modelización." (pp.5-6). Swetz & Hartzler (1999) se preguntan ¿por qué y cómo incorporar la modelización en el currículo de secundaria?.

Respecto a la primera interrogante

> *...se debe preparar la gente joven para trabajar confiada e inteligentemente en situaciones del mundo real (...) los estudiantes involucrados en experiencias de modelización obtienen una gran apreciación de la potencia de las matemáticas*. (p.6)

En cuanto a la segunda cuestión, los autores mantienen que

> *...la modelización debe ser incorporada gradualmente, de una manera mesurada, en el currículo existente. Muchas de las situaciones ya están planteadas, sólo requieren de una orientación ligeramente diferente para que lleguen a ser situaciones de modelización*. (p.6)

Lo antes señalado pone en evidencia la importancia que ha cobrado en los últimos años la incorporación de la modelización en los currículos de las matemáticas, entendido esto como un proceso clave en la mejora de la apreciación y comprensión vinculada al entorno social, de una manera asequible al conocimiento que posee el estudiante.

2.3. Calculadoras gráficas en las matemáticas escolares

La incorporación de las nuevas tecnologías en educación es objeto de interés en diferentes ámbitos. Desde la educación matemática se han realizado esfuerzos para su inclusión en el currículo de una manera sistemática y congruente con las necesidades escolares actuales, de tal manera que se avance en el logro de un aprendizaje significativo de las matemáticas. Esta idea es compartida por Kaput (1992) y Galbraith & Haines (1998) para quienes las nuevas tecnologías informáticas tienen un impacto potencial sobre la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos. Sin embargo, la utilización de las nuevas tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas es objeto de controversia, desde los que sostienen que su empleo únicamente trivializa los procesos hasta los que argumentan, por el contrario, que introduce una complejidad exacerbada. Para autores como Trouche (2000) la introducción de la tecnología no simplifica el trabajo del profesor ni del estudiante, sino que requiere la construcción de una enseñanza compleja y un ambiente de aprendizaje adecuado. Asimismo, este autor agrega que el ambiente con las calculadoras necesita ser construido por los profesores, de manera que potencien en sus alumnos actitudes favorables y una mejor relación con el conocimiento matemático. Si dichos recursos no son utilizados adecuadamente pueden llegar a ocultar más que iluminar las matemáticas en las situaciones del mundo real (Blum & Niss, 1991). En el ánimo de orientar acciones Santos (2000) afirma que los profesores, cuando utilizan las nuevas tecnologías, no necesitan pensar en tareas sofisticadas para lograr interesar a los alumnos por el pensamiento matemático, sino que se debe dar oportunidades para la participación y discusión de sus ideas sobre las tareas.

Uno de los proyectos en marcha, dirigidos a la inclusión de las nuevas tecnologías en los currículos, es el reportado por Usiskin (2000), como director del UCSMP (University of Chicago School Mathematics Project), donde afirma que si se evita la incorporación de la tecnología, condenamos a los alumnos al desconocimiento de gran parte de las matemáticas. Por este motivo, en el UCSMP se contempla la utilización de ordenadores y calculadoras, admitiendo que éstos no solo condicionan la aproximación al contenido matemático, sino también al contenido en sí mismo. En el UCSMP, los profesores y alumnos consideran variaciones de enfoques en los problemas, prueban conjeturas, procesan grandes masas de datos, dibujan figuras geométricas precisas y representan los conceptos de maneras diferentes.

En general, son muchos los retos y las expectativas que se abren con la incorporación de las nuevas tecnologías en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, uno de ellos está en la formación de docentes con el dominio didáctico que les permita el aprovechamiento de las nuevas tecnologías como recursos tanto en la planificación como en la gestión de las actividades didácticas a desarrollar con sus alumnos, con un sentido innovador y crítico. Y entre las nuevas tecnologías están las calculadoras gráficas.

2.3.1 Calculadoras gráficas

En la planificación y la puesta en práctica del currículo entran en juego una serie de elementos entre los que se encuentran los materiales y recursos. Estos podemos considerarlos como los aliados necesarios para optimizar el proceso de enseñanza y de aprendizaje. Entre los recursos [2], que puede disponer el profesor de matemáticas, la calculadora gráfica ha venido ocupando un protagonismo en el entorno educativo como producto de sus características.

[2] Recurso es cualquier material no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento tal es el caso de la calculadora gráfica o el ordenador (Coriat, 1997)

El auge de las calculadoras en educación matemática ha ido perfilándose en diferentes direcciones. La calculadora, desde su aparición, ha generado inquietudes tanto en el ámbito docente como de investigación. Según Dick (1992) si se utiliza la calculadora gráfica en la escuela, ocurrirá un redireccionamiento del currículo hacia una disminución del cálculo numérico y simbólico, lo cual favorecerá la profundización en el aprendizaje conceptual. En ese mismo sentido, Dunham & Dick (1994) afirman que la disponibilidad de calculadoras gráficas ha motivado a reexaminar el cómo enseñar matemáticas. Es decir, para los autores, las calculadoras gráficas pueden facilitar cambios en los roles de los alumnos y de los profesores en el aula, resultando unos ambientes de aprendizaje con mayor interactividad y exploración. En ese sentido la calculadora gráfica puede ser un catalizador y no un obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas.

Dunham & Dick (1994), se preguntan si la calculadora gráfica es sólo para confirmar resultados obtenidos con papel y lápiz, o, para incentivar la exploración y la investigación. Agregan que la sola presencia de la calculadora gráfica no determina su uso, por ejemplo, para relacionar gráficos con sus ecuaciones, interrelacionar sistemas de representación, entre otras acciones de índole cognitiva. Para estos autores la resolución de problemas se puede mejorar porque: 1) las calculadoras gráficas dan más tiempo para la instrucción mediante la reducción de atención a la manipulación algebraica, 2) las calculadoras gráficas suministran más herramientas para la resolución de problemas, especialmente para estudiantes con poca fortaleza en habilidades algebraicas, y 3) los alumnos perciben la resolución de problemas de una manera distinta, concentrándose en la comprensión del problema y en el análisis de la solución.

En cuanto a las necesidades futuras, Dunham & Dick se preguntan acerca de cuáles son las habilidades con papel y lápiz que siguen siendo importantes con la incorporación de la calculadora gráfica. Sobre este último aspecto, Herget, Helmut, Kutzler & Lehmann (2000), se preguntan ¿qué habilidades manuales de cálculo con papel y lápiz necesitan los alumnos cuando utilizan calculadoras gráficas?. Estos autores parten del hecho que los sistemas de cálculo simbólico[3] (CAS), en particular las calculadoras gráficas, llegarán a ser una herramienta estándar para enseñar y aprender matemáticas. En su artículo, consideran que más importante es la distinción entre las metas del "resolver una operación" (que puede ser relegado a una calculadora) y "elegir una estrategia" (que no puede ser hecho por un calculador).

Los autores presentan una lista de hechos para los cuales indican si es necesario usar tecnología, no es necesario o tienen duda para decidir entre el uso o no de tecnología. En el cuadro 2.3, a manera de ejemplo, Herget et al (2000) proponen algunos hechos relativos a los temas de ecuaciones e inecuaciones.

Cuadro 2.3.

Desarrollar sin tecnología	Duda entre usar o no la tecnología	Desarrollar con tecnología
Resolver $5x$-6=15		Resolver $5x$-6=2x+15
Resolver $x+1=x+1$	Resolver 2($x+1)=2x+2$	
Para cuáles x es: x-2<4	Para cuáles x es: x-2<x+3	Para cuáles x es: 3x+1<2x-1
Para cuáles x es: x<x+1		Para cuáles x es: ax<4

Del cuadro 2.3 podríamos deducir que las ecuaciones de la forma $ax+b=c$ donde a, b *y* c son parámetros fijos, los alumnos deberían realizarlas sin acudir a la tecnología, mientras que se debería acudir a la tecnología para resolver las ecuaciones de la forma $ax+b=cx+d$, donde a, b, c, d son parámetros fijos. No se presentan casos de situaciones de duda para utilizar o no la tecnología. Respecto a la resolución de la ecuación $x+1=x+1$ se espera que los alumnos desarrollen sin tecnología. Por otra parte, se presenta duda entre usar o no la tecnología con el caso de la ecuación 2($x+1)=2x+2$. No se

[3] CAS es la sigla que identifica a Computer Algebra System, en la mayor parte de la literatura actual, para referirse a los sistemas de cálculo simbólico, como el soportado por la calculadora gráfica TI-92 o TI-92 plus.

presentan casos de esta naturaleza para ser resueltos con el empleo de la tecnología.

Para el caso de las inecuaciones, podríamos afirmar que los autores proponen que $x+a<b$, con a, b parámetros fijos, se debería resolver sin utilizar la tecnología. Hay dudas para emplear o no la tecnología en la resolución de las inecuaciones del tipo $x+a<x+b$ con a, b parámetros fijos. En el caso de las inecuaciones de la forma $ax+b<cx+d$ con a, b, c, d hay recomendación de utilizar la tecnología. Finalmente, del último caso presentado por los autores, en el cuadro 2.3, podríamos concluir que las inecuaciones de la forma $x<x+a$ con a fijo se debería desarrollar sin tecnología. Para las inecuaciones en x de la forma $ax<b$ donde a es un parámetro fijo y $b\in\mathbb{R}$ se recomienda emplear la tecnología. No se presentan hechos que evidencien duda sobre el uso o no de la tecnología.

Con estos planteamientos los autores pretenden fundamentalmente provocar a los investigadores sobre el tema de las habilidades que deben permanecer cuando usamos tecnología (CAS), en nuestro caso cuando usamos las calculadoras gráficas. Ese es un tema de particular interés cuando se diseñan actividades didácticas con la incorporación de la calculadora, para dar un uso más adecuado a la tecnología. Recomendaciones en ese sentido ayudarían a fortalecer las competencias didácticas de los profesores de matemáticas en formación.

2.3.2. Incorporación de las calculadoras gráficas en los currículos

El interés por alcanzar niveles de aplicación del currículo cada vez más ajustados a las exigencias escolares, ha motivado la búsqueda de recursos que contribuyan a optimizar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De ahí que en estos ámbitos se proponga la incorporación de la calculadora gráfica en los currículos de matemáticas. El informe Cockcroft (1985) constituye un referente clásico importante a considerar, en tanto que experiencia concreta sobre el tema. En el referido informe se plantea que debido al bajo costo de las calculadoras, no es irrazonable que se permita a los alumnos trabajar con ellas, tanto en sus actividades de aprendizaje escolar como en las de evaluación. La recomendación del uso de las calculadoras, en la enseñanza y aprendizaje en la escuela secundaria, se fundamenta en que las mismas pueden ser un elemento auxiliar útil para la enseñanza de las matemáticas, aunque se remarca la necesidad de contar con materiales didácticos complementarios que orienten una adecuada y efectiva incorporación de la calculadora. Ruthven (1996) afirma que, existen varios factores que limitan el uso de las calculadoras en la escuela, sin embargo, plantea salidas factibles a esta problemática, tales como la disposición de centros de préstamo de calculadoras para los miembros de cada comunidad escolar. Resulta paradójico que en estudios realizados en Japón (Watanabe, 2000), a pesar que el uso de las calculadoras es obligatorio en secundaria, el bajo nivel en las destrezas de cálculo en los alumnos ha generado resistencia de los padres al uso de las calculadoras en clase. Esta situación revela la necesidad de efectuar estudios rigurosos respecto a las implicaciones directas o indirectas del empleo de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, a manera de evitar situaciones que distorsionen su presencia en los currículos.

Para Kutzler (2000), el uso de las calculadoras gráficas tiene implicaciones curriculares importantes, en particular la graficación incrementa la importancia de desarrollar comprensión sobre las escalas utilizadas en los ejes y la transformación de gráficos. Asimismo para Kaput (1992) el trabajo con escalas puede coadyuvar el aprendizaje de la linealidad. Por otra parte según Edwards & Chelst (1999), las actuales calculadoras gráficas favorecen el proceso de modelización de ciertos problemas del mundo real. Estos autores muestran aplicaciones concretas de problemas reales de la investigación operativa resueltos eficientemente, por medio de las nuevas tecnologías, en especial por las calculadoras gráficas.

Berry & Francis (2000), en sus investigaciones realizadas en Inglaterra, concluyeron que el uso de la calculadora gráfica mejora las habilidades de investigación matemática de los estudiantes y, en consecuencia, les ayuda en la resolución de problemas del mundo real. En este mismo sentido, los autores afirman que en estos ambientes de aprendizaje los estudiantes empiezan a formularse preguntas que revelan el inicio de la comprensión de los conceptos matemáticos. Sin embargo, Streun, Harskamp & Suhre (2000), mantienen que el uso de la calculadora gráfica por períodos cortos no es suficiente para establecer un sólido conocimiento y comprensión de las matemáticas. Concluyen estos autores que se hace necesario usar la calculadora gráfica en períodos largos de tiempo para mejorar los logros de los alumnos en matemáticas. Además, agregan que los alumnos con preferencia por soluciones gráficas pueden ganar con el uso de la calculadora, mientras que, los que tienen preferencia por soluciones algorítmicas usarán con menos frecuencia la calculadora para resolver problemas.

Hitt (2000) en las experiencias realizadas en México con profesores de matemáticas de escuela secundaria ha encontrado razones a favor y en contra para el empleo de la tecnología en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, específicamente para las calculadoras gráficas. Dentro de los aspectos positivos se mencionan la posibilidad de visualización de los resultados de procesos algebraicos, la manipulación simbólica permite la concentración en tareas de mayor complejidad que promueven más aprendizaje conceptual, y el incremento del interés en el aprendizaje de las matemáticas. Los aspectos negativos se refieren a que la tecnología trivializa algunos problemas y los transforma en ejercicios rutinarios, promueve la búsqueda de respuesta a los problemas mediante el método de ensayo y error y, las representaciones gráficas inhiben el pensamiento analítico. El trabajo de este autor resulta de interés puesto que se realiza con profesores, aunque no especifica si han participado profesores en formación.

Acerca de la evaluación del aprendizaje de los alumnos, con el uso de la calculadora gráfica, Anderson, Bloom, Mueller & Pedler (1999) proponen algunos cambios tales como la preparación cuidadosa de las actividades de evaluación, por ejemplo analizar gráficas de funciones en lugar de solamente trazarlas, es decir acudir a estudios cualitativos de las funciones. Kissane, Kemp & Bradley (2000) afirman que el uso de la calculadora gráfica debe integrarse en todos los aspectos del currículo, lo cual implica su incorporación en las actividades de evaluación tales como tareas, pruebas, y exámenes. Los autores informan que de esta manera fue como los alumnos participantes en sus investigaciones dieron importancia al trabajo con dicha calculadora y, además, fueron dando un uso adecuado en el sentido que decidieron cuándo usarla e interpretar los resultados obtenidos, tanto para describirlos matemáticamente, como para contrastarlos con situaciones problema.

Los principios y estándares para las matemáticas escolares (NCTM, 2000) otorgan suma importancia a la incorporación de la tecnología en la transmisión y comprensión del conocimiento matemático. El principio referido a la tecnología establece que la misma es esencial en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, que influye en las matemáticas que se enseñan y que potencian el aprendizaje de los estudiantes. En cuanto a las calculadoras, se dice que éstas pueden ayudar a los alumnos a examinar más ejemplos o formas de representación que podrían realizarse con papel y lápiz, dejando la posibilidad de hacer y explorar conjeturas con mayor facilidad. En general, debido a las bondades de las calculadoras, los estándares recomiendan su utilización extensiva en el aula de matemáticas. Por supuesto, no se obviará que aunque muchas destrezas pasarán a ser obsoletas, otras seguirán siendo necesarias para las actividades relacionadas con las matemáticas, tal es el caso del cálculo mental (Waits & Demana,1996).

2.3.3. Las calculadoras en la formación del profesorado

La necesidad de actuar de manera efectiva y eficiente en el proceso educativo ha dirigido la atención hacia la formación de los profesores en el empleo didáctico de las calculadoras gráficas. En ese sentido, Waits & Demana (1998), consideran que el profesor de matemáticas es el componente más valioso para la incorporación de las calculadoras en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Opinan que no se pueden esperar cambios fundamentales en sus métodos de enseñanza si no han sido introducidos en el uso de estos dispositivos, a los cuales reconocen como un importante agente de cambio. En ese sentido, en los Estándares se afirma que el uso efectivo de la tecnología en el aula de matemáticas depende del profesor (NCTM, 2000), para lo cual asumen que éste debe tener una formación adecuada en el manejo técnico y didáctico de la tecnología que incorpore en su actividad docente. Asimismo, los Estándares del NCTM (2000) refieren que la tecnología no es una panacea y que su uso efectivo depende del profesor de matemáticas.

Sugerencias de esta naturaleza fueron consideradas en su momento en el informe Cockcroft (1985), donde se plantea la necesidad de contar con materiales que orienten a los profesores sobre las maneras de incorporar las calculadoras en la enseñanza de las matemáticas. Asimismo, Hilton (2000), afirma que la calculadora tiene una influencia sobre lo que se enseña y sobre el cómo enseñamos. Además, para este autor, actualmente los profesores podrían eliminar tanto la monotonía en aritmética elemental, como las manipulaciones simbólicas del álgebra y del cálculo infinitesimal, de tal manera que se pueda dar más énfasis a la construcción de modelos matemáticos surgidos de situaciones del mundo real. De ahí que, el rol del profesor contemplaría crear situaciones de interés que contribuyan al surgimiento de conceptos y relaciones matemáticas (Ruthven, 1992).

Algunas implicaciones de la incorporación de la calculadora en la formación del profesorado son puestas en evidencia en el estudio desarrollado por Bitter & Hatfield (1992), sobre la implementación de calculadoras en educación secundaria en Arizona State University (USA). En el mismo se partió del hecho que las experiencias de aprendizaje de las matemáticas deberían estar diseñadas para “enganchar” a los profesores participantes en una forma de trabajo directa y dinámica cuando participaban como alumnos en un ambiente de aprendizaje colaborativo. En cada actividad, los participantes intercambiaban ideas y compartían estrategias de enseñanza y además discutían sobre problemas y soluciones relacionadas con el uso de la calculadora. Los autores encontraron que los profesores participantes estarían dispuestos a poner en práctica un currículo que tuviese integradas actividades bien planificadas y diseñadas con la calculadora.

Super (1992), revisa la puesta en práctica de tres innovaciones, en los Estados Unidos, que incorporan el uso de las calculadoras. El autor considera dentro de las recomendaciones para los profesores: 1) que las calculadoras sean utilizadas por los alumnos, para realizar cálculos difíciles, relacionados con aplicaciones a la vida real; 2) que las calculadoras no reemplacen la necesidad de hacer uso de las habilidades con papel y lápiz; entre otras. Finalmente, el autor afirma que cuando las estrategias de implementación son serias y bien empleadas, las calculadoras pueden llegar a ser parte integrante del currículo de las matemáticas escolares.

Mohammad (1999) plantea que preparar a los profesores de matemáticas en formación, en el uso de nuevas tecnologías, tiene dos ventajas: 1) los profesores no sentirán aprensión al utilizar la tecnología en sus aulas , y 2) pueden ayudar en la formación tecnológica de sus colegas en servicio en los centros educativos. A partir de su experiencia con 28 estudiantes de educación matemática (University of Illinois at Urbana-Champaign), logró que las competencias en manejo de las calculadoras gráficas, y en otras herramientas tecnológicas como hojas de cálculo, procesadores de textos y construcción de páginas web, mejoraran significativamente. Concluyó que, más que la integración de la tecnología en la formación del profesor de matemáticas, es necesario el trabajo con experiencias de aprendizaje sólidas que incorporen la tecnología. En síntesis, plantea que los programas que se dicten a los profesores en formación deben dirigirse a la adquisición de competencias en tecnología, relacionadas con su futuro campo profesional, buscando los grados de aprovechamiento del programa, en cuanto a las habilidades y destrezas para la enseñanza de las matemáticas con tecnología.

En la Universidad de Granada, España, Bedoya (2002) realizó una investigación evaluativa sobre la enseñanza de funciones con la utilización de calculadora gráfica. En los resultados del estudio, efectuado con profesores de matemáticas en formación, se destaca la caracterización de tres tipologías de futuros profesores estructuradas a partir de rasgos actitudinales relacionados con el programa implementado. En la primera de ellas se incluye el grupo de profesores que se caracteriza por su carácter reflexivo, innovador, autónomo y efectivo frente al uso de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas; es decir, aquellos que muestran actitud favorable al acceso y adaptación de nuevas propuestas tecnológicas en la enseñanza de las matemáticas. El segundo tipo identificado se caracteriza por ser aquiescente y poco autónomo frente a las nuevas propuestas tecnológicas; es decir, aquellos que presentan actitud favorable hacia el uso de las tecnologías pero no muestran efectividad al llevar a la práctica sus intenciones favorables. El tercer tipo se caracteriza por manifestar resistencia a la innovación tecnológica, y presentar una actitud desfavorable hacia la CG; es decir, en este último tipo se agrupa aquellos futuros profesores que se manifiestan explícitamente en contra de las CG a pesar de reconocer su utilidad. Los sujetos de esta tipología opinan que las calculadoras gráficas son "…'peligrosas' y problemáticas como recursos para la enseñanza y aprendizaje con estudiantes de secundaria" (p.434). Este estudio propone indagar acerca del cómo actuar, en las dos últimas tipologías, para contribuir a la integración y al cambio de actitud favorable hacia las nuevas tecnologías en el currículo de matemáticas.

Las consideraciones anteriores contribuyen a crear ambiente de indagación respecto a los aportes de las calculadoras gráficas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

2.3.4. La calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas

Coriat (1997) define recurso como "...cualquier material, no diseñado específicamente para el aprendizaje de un concepto o procedimiento determinado, que el profesor decide incorporar en sus enseñanzas... Son recursos la calculadora sencilla, científica o gráfica..." (p.158). Asimismo, sobre los materiales afirman que "se distinguen de los recursos porque, inicialmente, se diseñan con fines educativos (...) Son ejemplos, las hojas de trabajo preparadas por el profesor en una unidad didáctica y los programas de ordenador de propósito específico..." (p.159). Este autor también señala que no hay una delimitación clara entre lo que es un material didáctico y lo que es un recurso. En cualquier caso los materiales y recursos constituyen un organizador curricular ante el cual el profesor decide su empleo de acuerdo a su método de enseñanza y a la disponibilidad de los mismos.

Rico (1997a) vincula el organizador materiales y recursos principalmente con los contenidos y la metodología, sin restar importancia a su relación con los objetivos y la evaluación. Respecto a los contenidos, este autor señala las diferentes representaciones que determinan un concepto y otorga importancia a los procesos de modelización como espacio de praxis para los procedimientos derivados. En cuanto a la metodología, Rico arguye que los materiales y recursos ayudan a establecer y determinar las secuencias metodológicas de acuerdo a necesidades de ejemplificación o posibles modelizaciones del tema. Respecto a los objetivos, el uso de materiales y recursos conlleva reflexión en torno al qué se quiere lograr en los alumnos.

Por ejemplo, si se dispone de calculadoras gráficas no tiene sentido fijar objetivos sobre la ejercitación en la realización de cálculos. Finalmente, sobre la evaluación Rico afirma que los materiales y recursos conllevan cambios en las actividades de evaluación, específicamente lo relacionado con el uso de diversas representaciones y su enlace entre ellas. Siguiendo el ejemplo de las calculadoras gráficas, las tareas de evaluación serán distintas a las usuales de papel y lápiz, donde el hincapié se hará sobre la comprensión y aplicación de los conceptos y procedimientos de una manera significativa.

La calculadora gráfica tal como ya se ha señalado anteriormente, representa la presencia de las nuevas tecnologías en el aula de matemáticas. Por supuesto, tiene sus ventajas y también sus limitaciones. Algunas limitaciones se ubican en el terreno del nivel de precisión de los cálculos (alcance de la manipulación simbólica), la graficación de ciertas funciones y el uso inadecuado en operaciones que no lo requieren entre otras. Las ventajas están asociadas con su potencialidad simbólica y gráfica (desde el nivel escolar primario hasta el superior). En particular, la calculadora gráfica TI-92 plus permite transformar expresiones, simplificar o resolver ecuaciones y modelizar situaciones problema; esto último conlleva la realización de experimentos, formulación y comprobación de conjeturas; además permite la investigación y exploración de las conexiones entre distintas representaciones de un concepto o de una situación problema. Esta calculadora tiene incorporada una versión del programa *Derive*. Asimismo, dispone de un lenguaje de programación incorporado, el cual podría emplearse para realizar simulaciones de modelos matemáticos una vez realizada la codificación correspondiente.

La TI-92 plus es un recurso híbrido de calculadora gráfica y ordenador que, entre otras, tiene capacidades para operar con listas, vectores y matrices con entradas reales o complejas; además de construir y explorar objetos geométricos de manera dinámica e interactiva, pues tiene incorporada una versión del programa *Cabri-géomètre*. Así que, el uso didáctico de la calculadora gráfica TI-92 plus tiene incidencia en los objetivos, contenidos, metodología y evaluación, lo cual introduce aspectos resaltantes a considerar en la organización del currículo escolar de matemáticas. Cada día, la introducción de la calculadora gráfica en el currículo escolar de matemáticas juega un papel más prominente y alentador para la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina. Waits & Demana (2000), al referirse a la calculadora gráfica, señalan que

> *...nuestro mundo de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no volverá a ser el mismo (...) existe una nueva herramienta que hace posible y práctica la visión del currículo matemático mejorado, basado en la tecnología informática...*" (p.200).

Respecto al diseño de actividades didácticas con la incorporación de la CG consideremos el siguiente ejemplo propuesto por Mayes (1993) y adaptado por nosotros para ser desarrollado en la calculadora gráfica TI-92 plus.

Construcción de una nave industrial: Se desea construir una nave industrial de base rectangular y con techo en forma de prisma triangular como se muestra en la figura 2.3.2.1. La altura de la nave es de 20m y la suma del largo y el ancho es de 100m. Encontrar las dimensiones que generan una nave de volumen máximo.

Figura 2.3.2.1

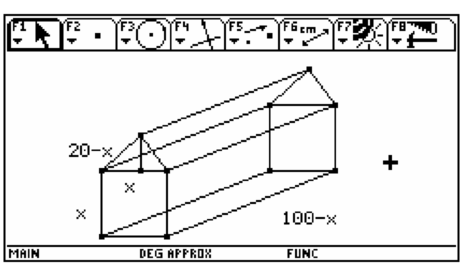
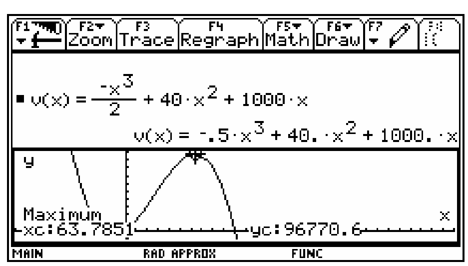


Figura 2.3.2.2



La pantalla mostrada en la figura 2.3.2.1 está realizada utilizando el programa Cabri que trae incorporada la CG. Acudiendo al concepto de volumen de sólidos se encuentra que el volumen de la nave es $V(x) = x^2(100 - x) + \frac{1}{2}x(20 - x)(100 - x)$, el cual se puede apreciar simplificado en la figura 2.3.2.2. La actividad conduce el problema desde un punto de vista algebraico, con el apoyo de la calculadora gráfica. Se realiza la representación gráfica de *V* y luego con el comando `Math` se obtiene el punto máximo tal como se indica en la parte inferior de la pantalla dividida en la figura 2.3.2.2. Mayes (1993) utiliza la actividad para hacer hincapié en lo útil de la multiplicidad de representaciones para guiar a los alumnos en la comprensión de los conceptos algebraicos, a partir del modelo obtenido para la situación real propuesta.

En lo que concierne al uso de la CG en el diseño de unidades didácticas, Bedoya (2002) en su estudio evaluativo encontró que los profesores en formación que participaron en su investigación adquirieron destrezas en el manejo de la CG como recurso para la enseñanza de las matemáticas, producto de la ejecución esperada de la mayoría de las actividades propuestas en el programa. Esta investigación pone de manifiesto la importancia que tiene la puesta en contacto de los futuros profesores con programas de formación dirigidos a fortalecer su formación didáctica con la incorporación de la CG; es decir, aportarles formas innovadoras de elaboración de actividades didácticas para favorecer su competencia didáctica.

2.4. El álgebra lineal en un ambiente de integración entre la modelización y la calculadora gráfica

Previo a las consideraciones sobre el álgebra lineal presentamos unas ideas sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Socas, Camacho, Palarea

& Hernández (1996) mencionan cuatro concepciones del álgebra, a saber: a) como aritmética generalizada, b) como estudio de ecuaciones, c) punto de vista funcional, d) aspecto estructural. En el primer caso las variables son generalizadoras del modelo aritmético, en el segundo caso las variables son vistas como incógnitas específicas, en el tercer caso las variables son argumentos de funciones y, en el último caso, las variables son vistas como símbolos abstractos. Para estos autores cualquier currículo de álgebra debe considerar estas cuatro interpretaciones no aisladas sino integralmente combinadas.

En cuanto a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, Socas et al (1996) señalan principios generales que ayudan a su comprensión y minimizan sus dificultades. Entre ellos tenemos los siguientes:

1. Fomentar un determinado grado de automatización en las operaciones básicas como prerrequisito para desarrollos posteriores.
2. Introducir o establecer la notación formal después de comprender las ideas o técnicas algebraicas.
3. Favorecer la comprensión algebraica en términos de traducción de lenguajes.
4. Introducir técnicas formales de manera gradual.

En los principios anteriores notamos ciertas recomendaciones que van directamente ligadas a la forma de actuación del profesor en la enseñanza del álgebra. Específicamente el referido a la traducción de lenguajes está vinculado estrechamente a la modelización matemática. En ese sentido, los mismos autores sostienen que la modelización engendra esquemas que favorecen el aprendizaje del álgebra. De igual manera consideran que los modelos son una herramienta fundamental que permite pasar de una situación problema del mundo real al mundo matemático.

Esto significa que con una adecuada comprensión de los conceptos del álgebra escolar, los profesores en formación lograrían emplear el álgebra en la enseñanza como lenguaje simbólico, como una herramienta de resolución de problemas, como razonamiento cuantitativo generalizado y como una manera de modelización de situaciones del mundo real tal como lo recomienda el CBMS (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001). De igual manera, recomienda el CBMS que, los futuros profesores deberían alcanzar el desarrollo de la comprensión de los conceptos de variables y funciones, así como comprender la linealidad de funciones y sus relaciones con la proporcionalidad. Las recomendaciones anteriores nos transmiten una preocupación por el álgebra escolar y su papel en la formación inicial de profesores de matemáticas. Se hace cada vez más trascendente que el futuro profesor de matemáticas identifique y valore diferentes significados del conocimiento algebraico para ganar competencia didáctica e incrementar sus posibilidades de éxito en su futuro desempeño profesional.

Socas, Camacho & Hernández (1998) proponen un ejemplo del análisis didáctico del lenguaje algebraico utilizando el marco de los organizadores del currículo. En el mismo se aprecia la riqueza de significados del conocimiento algebraico como consecuencia del análisis realizado. Dicho análisis es muy orientador y podría concretarse en una unidad didáctica para un tópico específico del álgebra escolar, el cual podría incluir conceptos del álgebra lineal, puesto que en secundaria sólo se contempla el núcleo de contenido de álgebra, que incluye los conceptos de álgebra lineal dentro de sus temas (Baena & Marín, 1997)

2.4.1. Consideraciones sobre el álgebra lineal

Algunos autores como Tucker (1993) consideran que el álgebra lineal es la matemática de nuestro mundo tecnológico actual de sistemas multivariables complejos y de ordenadores. Sin embargo, Carlson, Johnson, Lay & Porter (1993) afirman que la importancia del álgebra lineal en campos aplicados no llega a los alumnos porque hay una tendencia a enfatizar en la abstracción lo cual puede implicar que éstos adquieren poca comprensión de los conceptos y procedimientos básicos para la resolución de problemas del mundo físico y social. Ese hincapié en la abstracción podría significar la falta de atención a los niveles de conceptualización algebraica, entendidos estos últimos en el sentido propuesto por Robert (2000). En ese sentido, para lograr salir de la rigidez de la estructura formal se recomienda utilizar la calculadora gráfica. Tal es el caso del empleo de estas últimas para visualizar las representaciones gráficas cuando los alumnos se enfrentan con las dificultades para graficar las ecuaciones algebraicas en la educación secundaria (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000a). Esa representación de conceptos algebraicos en la calculadora gráfica consideramos que podría ayudar a establecer conexiones del álgebra con el mundo físico y social, además de enriquecer la comprensión de los conceptos y procesos algebraicos. La modelización matemática llegaría a tener importancia en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, con lo cual los profesores podrían encontrar más receptividad, en sus alumnos, hacia las actividades de modelización. De forma análoga recomiendan que los profesores en formación comprendan las maneras de utilizar las calculadoras gráficas para explorar ideas y representaciones algebraicas de la información obtenida en la resolución de problemas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001).

Las consideraciones del parágrafo anterior, respecto del álgebra lineal, se corresponden con planteamientos del Linear Algebra Curriculum Study Group (LACSG) (Carlson, Johnson, Lay, & Porter, 1993), el cual fue fundado para encauzar temas que conciernen a la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal. Dentro de las recomendaciones dadas por el LACSG se encuentra el énfasis en las interpretaciones geométricas que se debe realizar en la enseñanza del álgebra lineal. Otra recomendación pedagógica muy importante es considerar las necesidades e intereses de los alumnos en el proceso de aprendizaje.

Labraña, Plata, Peña, Crespo & Segura (1995) afirman que los instrumentos del álgebra lineal constituyen un aparato conceptual de utilidad creciente en todos los campos de aplicación de las matemáticas. Plantean que un desarrollo de los contenidos del álgebra lineal contextualizados en situaciones significativas para el alumno, por su proximidad o por su actualidad científico-social, podría contribuir favorablemente a aumentar las expectativas de éxito de unos contenidos disciplinares, con miras al logro de un aprendizaje significativo. Sin embargo, estos autores afirman que son muy pocas las investigaciones realizadas en didáctica de la matemática sobre la comprensión de los conocimientos del álgebra lineal. Además, destacan la programación lineal como una de las aportaciones más importantes de este siglo al álgebra lineal.

Si bien Labraña et al. (1995) reconocen la importancia de la programación lineal y en consecuencia de la investigación operativa; Edwards y Chelst (1999) afirman que los modelos matemáticos, estructuras y simulaciones son precisamente las herramientas de la investigación operativa. Argumentan que esta disciplina es una fuente rica de situaciones problema del mundo real que los estudiantes pueden relacionar y donde los conceptos matemáticos pueden ser desarrollados o aplicados. Por ejemplo, citan que la resolución de sistemas de ecuaciones o inecuaciones lineales usualmente se enseñan sin un sentido práctico; mientras que en investigación operativa se ofrecen aplicaciones que motivan o refuerzan el aprendizaje de tales conocimientos.

También Edwards y Chelst (1999) enfatizan que los problemas basados en investigación operativa tienen ricas conexiones con el mundo real en donde los estudiantes se desenvuelven. Utilizando este tipo de problemas los profesores pueden mejorar el proceso de instrucción. Finalmente concluyen que tal abordaje permitiría a los estudiantes aprender la matemática escolar. Es decir, mejoraría el proceso de motivación y comprensión de las matemáticas.

Harel (1998, 2000), enuncia el principio de la necesidad en la enseñanza, por medio del cual los estudiantes aprenden conceptos que no son introducidos arbitrariamente, sino con razones por medio de las cuales llegan a comprender el desarrollo del conocimiento matemático. Esto implica diferentes estrategias, tales como el uso de la tecnología. El autor propone este principio para la enseñanza de las matemáticas, específicamente del álgebra lineal. Dicho principio tiene congruencia con el proceso de modelización por su misma naturaleza de estar vinculado a la vida cotidiana y al mundo real del estudiante.

Las consideraciones anteriores resaltan la importancia del álgebra lineal en los currículos y sus bondades y dificultades en su enseñanza y aprendizaje. La modelización aparece como un proceso de natural desarrollo en los campos del álgebra. Una de las maneras para introducir la modelización en los currículos de secundaria es la dedicación de menos tiempo a la ejercitación de ejercicios repetitivos y de algoritmos innecesarios (Quesada, 2000), lo cual se podría lograr al integrar la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En ese mismo sentido Vizmanos (2000), al referirse al álgebra, señala que sería más conveniente enfatizar más en el planteamiento de las ecuaciones (modelos) que a la resolución de dichas ecuaciones, para lo cual se podría contar con una calculadora. Ese énfasis en la construcción de las ecuaciones ayudaría a consolidar estructuras de pensamiento algebraico, tales como el papel de las variables y las relaciones entre ellas. Esto pareciera significarnos que la tecnología tiene en el álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. Al respecto, la opinión de Ruthven (1997) es que en el dominio del álgebra, las calculadoras están creando las condiciones para cambios radicales en la práctica matemática, que tarde o temprano deben influir en el desarrollo del currículo de las matemáticas escolares.

2.5. Significación de las actitudes hacia las innovaciones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

El interés por los factores afectivos cobra cada día más importancia en la investigación educativa. Las actitudes de los sujetos, sean alumnos o profesores, son tan importantes como su buen desempeño (Valdez, 1998). En el informe Cockcroft (1985), se plantea que las actitudes de los alumnos están influidas de manera consciente o inconsciente por los mensajes transmitidos por el profesor. Gairín (1987) afirma que el estudio de las actitudes hacia las matemáticas, queda justificado por la existencia de pocos trabajos de investigación al respecto, por otra parte, la gran cantidad de problemas vinculados al fracaso escolar también le confieren a las actitudes su importancia en educación matemática. Para el autor, en el estudio de las actitudes, la variable profesor involucra el componente matemático y el buen uso de metodologías que conlleven el desarrollo de actitudes positivas hacia las matemáticas; pues esa formación y cambio de actitudes depende en gran medida de las experiencias que se generen en clase, en las cuales se incluye el uso de la tecnología. Es decir, el profesor debe tener una adecuada formación didáctica que complemente su formación disciplinar.

Asimismo, Gairín (1987), plantea que en el aula debe existir un ambiente positivo hacia la enseñanza, un clima que favorezca las actitudes que se quieren consolidar en los alumnos. Este autor insiste en que el trato y la competencia profesional del profesor son fundamentales para esos propósitos. Además, menciona algunos indicadores de esos logros en los alumnos, tales como: dedicación de mayor tiempo de estudio a la materia, petición de bibliografía complementaria, nivel de asistencia a clase, mayor participación en clase, mejoramiento de los resultados escolares, presentación esmerada de sus trabajos.

Además de lo señalado por Gairín, en el estudio de las actitudes de los docentes, es necesario considerar el contexto, tal como señalan Haladyna, Shaughnessy & Shaughnessy (1983) quienes plantean que no se debe estudiar al individuo aislado de su contexto social del aula de clases. A pesar de ello, hay pocos estudios que involucran la variable profesor y la variable ambiente de aprendizaje. Para los autores, el desarrollo de actitudes hacia las matemáticas está probablemente influenciado por el profesor y el ambiente de aprendizaje, es decir, la calidad del profesor, el clima social-sicológico y la gestión-organización afectan las actitudes de los alumnos. En la investigación que realizaron estos autores examinaron las variables causales, profesor y ambiente de aprendizaje, utilizando un instrumento que consideró la motivación del estudiante, la calidad del profesor, el clima socio-psicológico de la clase, el clima de gestión-organización de la clase y las actitudes hacia las matemáticas. Los autores encontraron una fuerte asociación entre la cualificación del profesor, la actitud hacia las matemáticas y la motivación de los estudiantes, observándose que la calidad del profesor está altamente relacionada con la actitud de los alumnos hacia las matemáticas, en todos los grados escolares. Finalmente, los autores recomiendan contemplar la calidad del profesor y el ambiente de aprendizaje en los programas escolares para evaluarlos y mejorarlos.

McLeod (1985), considera que el dominio afectivo incluye los sentimientos, emociones y creencias que tienen alguna relación con el desempeño de los alumnos en las actividades de resolución de problemas. El autor afirma que la actitud y la confianza son dos aspectos muy importantes del dominio afectivo, ligados estrechamente al éxito en la resolución de problemas. Para McLeod (1985), el dominio afectivo debe incluirse en el marco teórico que orienta la investigación en resolución de problemas. Esto queda confirmado en McLeod (1988), cuando afirma que en la resolución de problemas afloran sentimientos de frustración o satisfacción al trabajar con problemas no rutinarios. Además, plantea que es necesario conocer mucho más sobre las maneras en que los factores afectivos interactúan con los diferentes procesos cognoscitivos y con los diferentes procesos de enseñanza. Según McLeod (1988), si se integran adecuadamente las ideas sobre el afecto en la investigación actual, podríamos mejorar la enseñanza de la resolución de problemas para todos los alumnos. Aunque McLeod (1992), señala que no existe dependencia entre la actitud y el desempeño, sino que su interacción es compleja e impredecible. El autor le asigna un rol importante al uso de la tecnología en el mejoramiento de actitudes hacia las matemáticas y, argumenta, que las actitudes pueden ser analizadas mediante técnicas cuantitativas pero sin relegar los datos cualitativos que pueden ayudar a completar la comprensión de relaciones. También insiste en que el dominio afectivo debe recibir más atención en la formación de profesores, en el currículo y en la investigación. En cuanto a los ambientes de innovación en la enseñanza, es decir, donde los estudiantes respondan positivamente a problemas no rutinarios o tareas de alto nivel, McLeod (1993) asegura que los profesores encontrarán serias dificultades, las cuales sólo se lograran afrontar exitosamente con una sólida formación inicial en su campo profesional. Esto último ayudará al profesor a elegir adecuadamente tareas para llegar a plantear experiencias exitosas, donde los alumnos intenten encontrar soluciones por su propia cuenta, además de conocer su propias fortalezas, valorar las matemáticas, tener confianza en ellas y llegar a ser buenos resolutores de problemas.

La experiencia realizada por Ponte, Matos, Guimaraes, Cunha & Canavarro (1992) evidenció que existe una relación entre las visiones y actitudes de los profesores y las de los estudiantes, es decir, cuando los profesores son negativos hacia algo, de igual manera se manifestarán sus alumnos. Por otra parte, el estudio de Ponte et al. (1992) reveló que los alumnos prefirieron los materiales de enseñanza elaborados por sus propios profesores. De lo antes señalado podríamos deducir que el profesor debe tener competencias en el diseño y elaboración de unidades didácticas. Asimismo, los autores sugieren un nuevo currículo con una aproximación más intuitiva a los conceptos matemáticos con énfasis en representaciones gráficas y situaciones del mundo real, recomendando el uso de las calculadoras y el trabajo en grupo. De igual manera, Almeqdadi (1997) estudió las actitudes de los profesores y alumnos hacia las calculadoras gráficas en cuatro secciones de cursos regulares de matemáticas de la Universidad de Ohio, para lo cual recurrió a métodos cualitativos y cuantitativos en la recogida de los datos, mediante escalas de actitud y entrevistas individuales. Los principales hallazgos fueron la actitud positiva hacia la calculadora gráfica, por parte de los alumnos. Respecto de los profesores, éstos mejoraron sus actitudes hacia el uso de la calculadora gráfica en los cursos como consecuencia de la motivación que se evidenció en los alumnos.

Philippou & Christou (1998) afirman que la mayoría de las investigaciones han confirmado la hipótesis que las variables afectivas, tales como concepciones, creencias o actitudes hacia las matemáticas juegan un rol determinante en el desarrollo de las prácticas de enseñanza. Un número limitado de estudios han investigado las actitudes de los profesores en formación, respecto a numerosos estudios que tratan con variables cognitivas. El estudio de Philippou & Christou (1998) estuvo dirigido a un programa que fue diseñado a mejorar las actitudes de futuros profesores hacia las matemáticas. Los autores consideran que las actitudes negativas de los profesores tienen impacto destructivo sobre las actitudes de los alumnos; en ese sentido, consideran que la formación inicial del profesor debe marcar la diferencia, ya que, durante este período los estudiantes son expuestos a experiencias bajo el liderazgo de expertos en el campo de la educación matemática. Se trabajó con un diseño pretest, tratamiento y post-test, con futuros profesores en la Universidad de Chipre. Las conclusiones revelaron que al final del programa hubo cambios actitudinales en los alumnos.

Respecto al estudio de un programa de formación, Mohammad & Tall (1999), desarrollaron un curso de treinta horas en diez semanas en la Universidad de Warwick (UK). Las actitudes de los estudiantes fueron monitoreadas por la observación en clase y un cuestionario de actitudes aplicado a los alumnos. Se conjeturó que la resolución de problemas debería causar un cambio en las actitudes de los estudiantes en la dirección deseada, aunque cabe esperar que esos cambios se reviertan cuando los alumnos regresen a la enseñanza tradicional. Se encontró que los métodos de enseñanza tradicional en la universidad pueden causar cambios de actitudes, en los alumnos, que son lo contrario de lo que los profesores desean.

Kissane, Kemp & Bradley (1995), al aplicar una escala estilo Likert para recoger las actitudes hacia la innovación de los estudiantes de un curso de pregrado (segundo ciclo), en el cual se usaron calculadoras gráficas para complementar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, encontraron que, en general, las actitudes fueron favorables. Las respuestas de los estudiantes indicaron una actitud positiva hacia el uso de la calculadora gráfica y hacia todos los aspectos de la enseñanza del curso y una respuesta positiva al uso permanente de la calculadora gráfica en otros cursos de la universidad. Esto condujo a realizar cambios en el programa oficial de los cursos de matemáticas generales, de manera tal de incluir las calculadoras gráficas hasta en las actividades de evaluación.

Otra evidencia respecto a la importancia que tiene el estudio de las actitudes la encontramos en Galbraith, Haines & Izard (1998), quienes estudian las actitudes de los alumnos hacia las matemáticas y su efecto sobre su rendimiento. Justifican la importancia del estudio de las actitudes hacia la tecnología por la relevancia de su uso en las actividades de enseñanza de las matemáticas y de la modelización matemática. En ese mismo sentido, Galbraith & Haines (1998), realizan un estudio de actitudes de los alumnos, utilizando escalas de actitud hacia el ordenador, la interacción computador-matemáticas y el grado de compromiso en el aprendizaje de las matemáticas. La interacción ordenador- matemáticas resultó más asociada con la confianza en el ordenador y la motivación hacia el ordenador que con las escalas de matemáticas; esto sugiere que las actitudes hacia el ordenador son más influyentes que las actitudes matemáticas en facilitar el compromiso activo de actividades relacionadas con el ordenador en el aprendizaje de las matemáticas. En fin, la influencia del ordenador es dominante en la determinación de actitudes en la interacción ordenador-matemáticas que se espera tengan impacto significativo cuando integramos el uso de ordenadores y calculadoras gráficas en el currículo de pregrado (segundo ciclo).

Además de todo lo antes expuesto consideramos de interés prestar atención a lo planteado por Ruffell, Mason & Allen (1998), quienes señalan que la actitud quizás no sea un constructo estable y confiable porque podría estar influenciado por el contexto social y emocional del sujeto.

El estudio de las actitudes ha tenido también una particular importancia en la investigación evaluativa. En Ortiz (2000a) y Bedoya (2002) se incorpora el estudio de las actitudes en la evaluación de programas. En ambos estudios se observa que conociendo la actitud de los sujetos ante las componentes de un programa, previo a su implementación y posterior a ella, permite identificar aspectos que el programa a podido modificar en la actitud de los sujetos. Bedoya plantea en su estudio que las actitudes desfavorables de los futuros profesores respecto a la integración de la CG en el currículo y la enseñanza de un contenido matemático (funciones) son producto de las creencias, las percepciones y la desinformación que los profesores en formación tienen acerca de la utilidad de la CG en la enseñanza de las matemáticas. Es decir, el estudio de las actitudes favorece el conocimiento del posicionamiento de los sujetos ante los componentes de un programa en particular.

Lo referido anteriormente revela la significación que tienen las actitudes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicha significación ha quedado evidenciada en el estudio de actitudes, tanto de alumnos como de profesores en formación, hacia la enseñanza utilizando modelización matemática y nuevas tecnologías, en particular las calculadoras gráficas.

2.6. Conclusiones sobre el marco teórico

De la revisión teórica presentada en este capítulo se destacan aportes de las diversas investigaciones en la orientación de nuestro estudio. En primer lugar nos ocupamos de lo concerniente al conocimiento del profesor debido al particular interés que este aspecto tiene en nuestra investigación. Se enfatiza en la formación inicial, específicamente en el conocimiento didáctico de los futuros profesores para la planificación y elaboración de unidades didácticas. De los estudios realizados concluimos que conocimiento didáctico es aquel que se manifiesta en el diseño de unidades didácticas y entendemos como competencia didáctica la capacidad del profesor para seleccionar con criterio fundado un conocimiento particular y/o habilidades para aplicarlos en las situaciones de enseñanza que se considere pertinentes. Observamos en la revisión teórica que en general hay consenso en la consideración de la unidad didáctica como una guía del docente, donde el futuro profesor inicia su aprendizaje y práctica para su ejercicio profesional, y es en la didáctica de las matemáticas donde se adquieren los conocimientos curriculares, los fundamentos de las matemáticas escolares y los organizadores del currículo como medio orientador en el diseño de unidades didácticas.

En segundo lugar se hizo una revisión del proceso de modelización y su incorporación en la enseñanza de las matemáticas. La importancia de este aspecto en nuestra investigación radica en la significación que tiene el proceso de modelización en la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal, es decir, en la consideración de que la modelización representa una opción que permite a los profesores en formación, por una parte el manejo y uso de conceptos y procedimientos matemáticos para el abordaje de situaciones problema de una manera no estándar y, por la otra, desarrollar una manera particular de pensamiento y actuación. Asimismo la modelización constituye un organizador del currículo puesto que ofrece un marco conceptual para la enseñanza de las matemáticas.

La revisión de la literatura sobre el tema en el ámbito nacional e internacional nos llevó a conceptualizar la modelización como un proceso cíclico, dinámico y reflexivo que favorece el desarrollo de habilidades que involucran la toma de decisiones en la resolución de problemas del mundo físico y social, la comunicación de ideas matemáticas, la búsqueda de diferentes heurísticos, el manejo de conceptos y estructuras matemáticas, la evaluación crítica de los resultados y la simplificación e interpretación de los mismos. La importancia de la modelización en nuestro estudio radica en que esta contribuye a optimizar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

En tercer lugar nos referimos a las calculadoras como recurso en la enseñanza de las matemáticas. De la revisión sobre este tema concluimos que su inclusión en el currículo de matemáticas se ha manifestado como una necesidad en la enseñanza de las matemáticas escolares. La coincidencia de los diversos autores consultados respecto a la importancia potencial que tiene la CG sobre la comprensión de las matemáticas por parte de los alumnos justifica su incorporación en nuestra investigación, a pesar de la controversia existente entre su posible efecto trivializador delos procesos y la complejización de los mismos.

De allí que en la formación inicial se justifica la incorporación del empleo didáctico de la CG debido a que son los profesores de matemáticas los llamados a impulsar la incorporación de la calculadora en la enseñanza de las matemáticas por ser ellos agentes de cambio. En consecuencia, actuar en el ámbito de la formación inicial favorece la familiarización de los futuros profesores con las nuevas tecnologías y puede contribuir a fomentar el uso de la misma en los centros de enseñanza.

En cuarto lugar nos referimos al álgebra lineal. Producto de la revisión teórica logramos encontrar los fundamentos que justifican la incorporación del álgebra lineal como contenido matemático para la integración de la modelización y la CG en el diseño de unidades didácticas de contenido algebraico. El álgebra brinda posibilidades de estudio de situaciones problema que facilitan las conexiones entre el mundo real y el mundo matemático. Los estudios revisados soportan las bases de su inclusión en nuestro estudio.

En el quinto apartado nos abocamos a la revisión de las actitudes hacia los componentes de nuestra investigación, en virtud que las actitudes de los profesores hacia las innovaciones tienen una importante significación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. La revisión teórica efectuada nos permite concluir que las actitudes están referidas a respuestas afectivas que poseen cierta intensidad y relativa estabilidad. Este constructo se interrelaciona con componentes cognitivos, afectivos y teleológicos. En nuestro estudio la incorporación de las actitudes tiene un particular interés debido a la importancia que tiene la actitud del profesor y su relación con el aprendizaje matemático de sus alumnos.

CAPÍTULO

III

Metodología

En este capítulo se presenta y explica el enfoque metodológico utilizado en el presente trabajo. Se enuncian las conjeturas de investigación. Se describe el programa MCA y la experiencia realizada con profesores en formación así como el diseño de la investigación y la propuesta de evaluación del programa MCA, en la cual se contempla la evaluación del diseño, la evaluación del desarrollo y de sus resultados. Finalmente se describen las técnicas e instrumentos utilizados para la recogida de información y el procedimiento seguido en el análisis de los datos.

3.1. Modelos usuales en la evaluación de programas educativos

Todo modelo de evaluación de programas educativos conlleva una asunción de la naturaleza de dicho programa educativo. En el presente apartado se esclarece la noción de programa educativo de la cual se parte en esta investigación para luego hacer referencia a los modelos más usuales en la evaluación de programas educativos. Partiendo de la noción de Pérez Juste (2000), quien plantea que un programa educativo es "...un plan de acción, por tanto una actuación planificada, organizada y sistemática, al servicio de metas educativas valiosas"(p.268), se asume en este trabajo que un programa educativo es un plan sistemático, elaborado intencionalmente y diseñado por el educador para el logro de metas educativas. Todo ello con el propósito de abordar una problemática educativa identificada en un contexto determinado.

Respecto a la evaluación de programas cabe destacar que su utilización se ha venido incrementando en los últimos años. Las motivaciones que han hecho de este campo de investigación un lugar de interés, cada vez más relevante, son diversas. Entre ellas tenemos la creciente necesidad de conocer los alcances de la aplicación de los programas educativos, así como la búsqueda de información para la definición o redefinición de acciones en el ámbito educativo. De ahí el interés en la evaluación de programas educativos como un proceso de identificación de sus fortalezas y debilidades, de aspectos mejorables en la búsqueda de la calidad del programa en sí y de sus implicaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje, es decir, la mejora de los agentes hacia los cuales está dirigido el mismo.

La evaluación de programas ha tenido diferentes conceptualizaciones. Entre ellas están las propuestas de Fernández-Ballesteros (1996), Colás (1997a) y Pérez Juste (1995, 2000). Fernández-Ballesteros define la evaluación de programas como la sistemática investigación de los efectos, resultados y objetivos de un programa, para tomar decisiones sobre el mismo. Es decir, le otorga a la evaluación un estatus de actividad investigadora, cuyo objeto de estudio es el programa en cuestión. En Colás predomina un enfoque abierto, que contempla la evaluación de programas como una recolección de información para la toma de decisiones con una posición crítica permanente del programa objeto de evaluación. Por su parte Pérez Juste, quien asume la evaluación de programas como una actividad pedagógica, define la evaluación de programas como un proceso sistemático de recogida de información rigurosa orientada a valorar la calidad y los logros de un programa para su mejora y la de su entorno social. Este autor enfatiza el carácter científico y pedagógico de la evaluación de programas en búsqueda de su calidad y sus implicaciones contextuales. En este trabajo de investigación los autores mencionados anteriormente son referentes importantes al momento de estructurar el esquema operativo de evaluación del programa presentado en el apartado 3.7.

En la evaluación de programas se siguen distintos modelos, lo cual ha dado lugar a diversas clasificaciones; en torno a la clasificación de los modelos de evaluación de programas hay un amplio debate y han sido agrupados de diversas maneras, considerando sus bases metodológicas, así como las posiciones ideológicas y políticas de los mismos[1].

[1] En torno a los modelos evaluativos de programas y su clasificación se remite a Stufflebeam & Shinkfield (1995) y a Martínez Mediano (1997, p.119-251), donde se repasa de manera detallada la historia y características de los principales modelos evaluativos de programas educativos.

Es importante destacar que de acuerdo a lo que persiga el evaluador o el fin de la evaluación de programas educativos, ésta se efectúa siguiendo un modelo de evaluación específico. Entre las diversas orientaciones teóricas y metodológicas, que se han diseñado para la evaluación de programas, las más comunes son las de carácter objetivista, subjetivista y crítico (Rebollo, 1997). Al respecto esta autora considera que en el primer caso se ubican los modelos o diseños propuestos por Tyler, Cronbach, Stufflebeam y Scriven. En el segundo caso los modelos de Stake, Parlett & Hamilton y McDonald. Y en el tercer caso, entre otros, los modelos de Farley, Colás y Brown. A continuación se presentan algunos de los aspectos generales que caracterizan a estos modelos, remarcando sus alcances, con el propósito de estructurar un esquema referencial, adaptado a nuestras necesidades, para la evaluación de un programa de formación, es decir, el programa MCA (Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra).

Respecto a los modelos considerados objetivistas, el modelo de Tyler posee un carácter fundamentalmente cuantitativo y está orientado hacia la toma de decisiones. Está centrado en la determinación de la congruencia entre los objetivos del programa y sus resultados. En este modelo la evaluación se caracteriza por su rigidez, pues sólo se ven los cambios en términos de logros de los sujetos.

El modelo de Cronbach, recibe el nombre de modelo de planificación evaluativa porque considera a ésta última como prioritaria. En dicha planificación, el evaluador (y su equipo) tiene en cuenta: unidades (u), tratamientos (t), operaciones de observación (o) y el contexto socioambiental (s) donde se desarrolla y aplica el programa. Estos "utos" son la base para la pretendida generalización de los resultados obtenidos a través de evaluaciones de producto y de proceso.

El modelo de Stufflebeam denominado modelo CIPP, desarrolla un marco conceptual relacionado con cuatro tipos de evaluación y su correspondiente utilidad en la toma de decisiones: 1) La evaluación del Contexto, la cual contribuye a determinar las necesidades de un programa para definir sus objetivos; 2) La evaluación de entrada (Input), dirigida a revelar los recursos, estrategias y planes disponibles para encaminar la aplicación del programa; 3) La evaluación del Proceso, relacionada con las decisiones durante el desarrollo del programa para asegurar los propósitos del mismo; y 4) La evaluación del Producto, orientada a decidir sobre el futuro del programa. Para Stufflebeam "la evaluación es un instrumento para ayudar a que los programas sean mejores para la gente a la que deben servir" (Stufflebeam & Shinkfield, 1993, p.190)

El modelo de Scriven, también llamado modelo sin referencia a objetivos, plantea que de manera intencional, el evaluador pasa por alto los objetivos del programa por considerar que éstos pueden ser un obstáculo en la evaluación del programa. Para Scriven la evaluación está dirigida a valorar los programas de acuerdo a la satisfacción de necesidades de los sujetos involucrados.

En relación con los modelos subjetivistas, el modelo de Stake, denominado modelo de evaluación respondente (responsive evaluation), está centrado en responder a los problemas e interrogantes que son de interés para los implicados en un programa. Su aproximación metodológica es cualitativa y su objetivo es mejorar la práctica local más que la generalización de resultados.

Por su parte el modelo de Parlette & Hamilton, también llamado modelo de evaluación iluminativa, toma en cuenta contextos amplios para descubrir los factores importantes que están latentes durante el desarrollo del programa. Esto significa que los problemas no son definidos previamente por el evaluador sino que emergen durante el transcurso de los hechos. Estudia el funcionamiento del programa y de qué manera es influenciado por el contexto educativo. Este modelo está más orientado hacia la descripción e interpretación que a la medida y a la predicción.

El modelo de McDonald, también conocido como modelo de evaluación democrática. Es producto de una concepción política de la evaluación. El propósito básico de este modelo es facilitar y promover el cambio en los participantes a partir de la recogida de sus concepciones y reacciones ante el programa. Los logros del programa se establecen bajo acuerdo entre el evaluador y los participantes.

Los modelos de evaluación crítica están menos desarrollados en la literatura sobre el tema. Dentro de esta orientación se ubica el modelo de Colás. Desde la perspectiva crítica la evaluación se centra en la transformación de los sujetos implicados, a partir del análisis crítico de las condiciones contextuales de aplicación del programa. El evaluador diseña su propuesta de evaluación tomando en cuenta las necesidades reales de los participantes. De esta manera el evaluador asume un papel de implicación y compromiso con el grupo. Este último marca el ritmo de desarrollo del programa conjuntamente con la dinámica asumida por el evaluador.

Todos estos modelos presentados anteriormente en forma sucinta permiten visualizar algunos de los referentes usualmente orientadores en la evaluación de programas educativos. Su influencia en la evaluación de programas es innegable. En su momento, cada uno ha dado aportes significativos a la investigación evaluativa. Consideramos, sin embargo, que en el campo de la evaluación de programas se está dando paso a posiciones eclécticas que favorecen la comprensión del hecho evaluativo en toda su complejidad. Esto significa pensar en una evaluación de programas que responda a una sociedad cambiante, a un nuevo ambiente científico y tecnológico y a las demandas educativas. Estas últimas referidas al movimiento de reformas, la integración de las tecnologías educativas, a nuevas formas de enseñanza y aprendizaje y a presiones educativas externas. Por lo tanto, en la actualidad estamos frente a una visión de la evaluación de programas, en términos de evaluación sistemática, que persigue el mejoramiento de los componentes y de los resultados finales de los programas educativos bajo criterios de calidad y en correspondencia con el contexto social.

Tabla 3.1.1. *Dimensiones consideradas en los modelos de evaluación de programas*
Tomado de Colás & Rebollo (1997, p.49)

Dimensiones / Modelos	*Finalidad*	*Contenido*	*Unidad de análisis*	*Toma de decisiones*	*Papel del evaluador*
Tyler	Prescribir	Producto	Sujetos	Autoridad	Externo
Cronbach	Prescribir	Proceso/ Producto	Sujetos	Autoridad	Externo
Stufflebeam	Prescribir	Producto/ Proceso/ Contexto/ Diseño	Sujetos	Autoridad	Externo
Scriven	Prescribir	Producto/ Proceso/ Contexto	Sujetos	Contrato/ Autoridad/ Evaluador	Externo
Stake	Describir	Proceso/ Producto	Sujetos/ Centros	Contrato/ Evaluador/ Cliente	Cooperación
Parlett & Hamilton	Describir	Proceso/ Contexto	Centros/ Instituciones	Contrato/ Evaluador/ Cliente	Cooperación
McDonald	Transformar	Proceso/ Contexto	Centros/ Instituciones	Contrato/ Autoridad Evaluador/ Cliente	Cooperación

A manera de síntesis se considera conveniente presentar los aspectos característicos de cada uno de los modelos, todo ello a partir de las dimensiones que sirven de base para describir un modelo de evaluación, propuestas por Rebollo (1997). En la tabla comparativa 3.1.1 se expresan las referidas dimensiones, las cuales son: finalidad, contenido, unidad de análisis, toma de decisiones y papel del evaluador. En estas dimensiones se refleja la orientación del evaluador en la evaluación de programas. El interés en presentar la mencionada tabla obedece a que se estiman importantes las dimensiones que, de cada uno de los modelos, asumimos en la investigación. En este sentido en las casillas sombreadas en la tabla 3.1.1 se indican las componentes consideradas y asumidas en este trabajo relativas a las dimensiones de cada uno de los modelos clásicos anteriores, las cuales están en congruencia con los objetivos de la investigación descritos en el capítulo I. En la tabla 3.1.2 aparecen explícitamente las referidas dimensiones.

Tabla 3.1.2. *Dimensiones consideradas en el programa MCA*

Dimensiones / Modelos	*Finalidad*	*Contenido*	*Unidad de análisis*	*Toma de decisiones*	*Papel del evaluador*
Programa MCA	Describir	Producto/ Proceso	Sujetos	Autoridad	Cooperación

En el apartado siguiente presentamos de forma detallada la estructura seguida en la evaluación de programas y llevada a cabo en la presente investigación.

3.2. Propuesta para la evaluación del programa Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra

Partiendo de las consideraciones de Rebollo (1997), al tomar en cuenta la orientación del evaluador, la propuesta del presente trabajo se enmarca dentro de una posición ecléctica al proponerse integrar aspectos de los diversos modelos, en la búsqueda de una propuesta que pueda responder a la realidad a la cual se aplica.

Aparte de las dimensiones consideradas en el tabla 3.1.1, anteriormente presentada, a continuación se describen los aspectos que caracterizan la propuesta. La finalidad de evaluación en este trabajo está referida a describir, analizar e interpretar el diseño, desarrollo y resultados del programa, incluyendo los cambios de actitudes de los participantes. El contenido de la evaluación incluye la entrada, el proceso de implementación del programa y el producto. La unidad de evaluación en el programa son los participantes, es decir, los profesores en formación. Estos sujetos son vistos a través de sus opiniones y producciones, porque éstas dan cuenta acerca de la percepción y utilización conjunta de los componentes del programa (modelización, calculadora, álgebra lineal y unidades didácticas) en el diseño de las actividades previstas en el programa. El evaluador tiene un papel de cooperante en comunicación continua y fluida con los demás agentes del programa, descubre y genera discusiones acerca de las implicaciones del programa, durante su desarrollo.

De acuerdo a lo antes señalado y tal como se indica en la tabla 3.1.1, en cuanto a la *finalidad* de la evaluación se coincide con el modelo de evaluación respondente de Stake y con el modelo de evaluación iluminativa de Parlett & Hamilton, en virtud que en ambos la finalidad es describir. El *contenido* de la evaluación está enmarcado en el modelo de planificación educativa de Cronbach, el modelo CIPP de Stufflebeam, el modelo sin referencia a objetivos de Scriven y con el modelo respondente de Stake, ya que en su propuesta se evalúa el proceso y el producto. En particular Stufflebeam, además del contexto como Scriven, añade el diseño del programa. La *unidad de evaluación* son los sujetos participantes (a través de sus producciones y opiniones), que está considerada en el modelo basado en criterios de Tyler, en el modelo de planificación educativa de Cronbach, en el modelo CIPP de Stufflebeam, en el modelo sin referencia a objetivos de Scriven y en el modelo de evaluación respondente de Stake. La diferencia con esta última es que no incluimos a los centros. Respecto a la *toma de decisiones* hay identificación con el modelo basado en criterios de Tyler, el modelo de planificación educativa de Cronbach y con el modelo CIPP de Stufflebeam. Se deja la toma de decisiones a la autoridad concerniente. El *papel del evaluador* está enmarcado en el modelo de evaluación respondente de Stake, en el modelo de evaluación iluminativa de Parlett & Hamilton y en la evaluación democrática de McDonald. En la propuesta de este trabajo se considera el rol del evaluador en el proceso de evaluación como cooperante, encausando, propiciando y estimulando a los participantes a mantener una actitud autoreflexiva. En las tablas 3.1.1 y 3.1.2 se resumen los aspectos sobre los cuales se apoya nuestra propuesta de evaluación, los rectángulos sombreados indican las dimensiones tomadas de los modelos clásicos referidos anteriormente, y que son: describir (finalidad), proceso/producto (contenido), sujetos (unidad de análisis), autoridad (toma de decisiones) y cooperación (papel del evaluador).

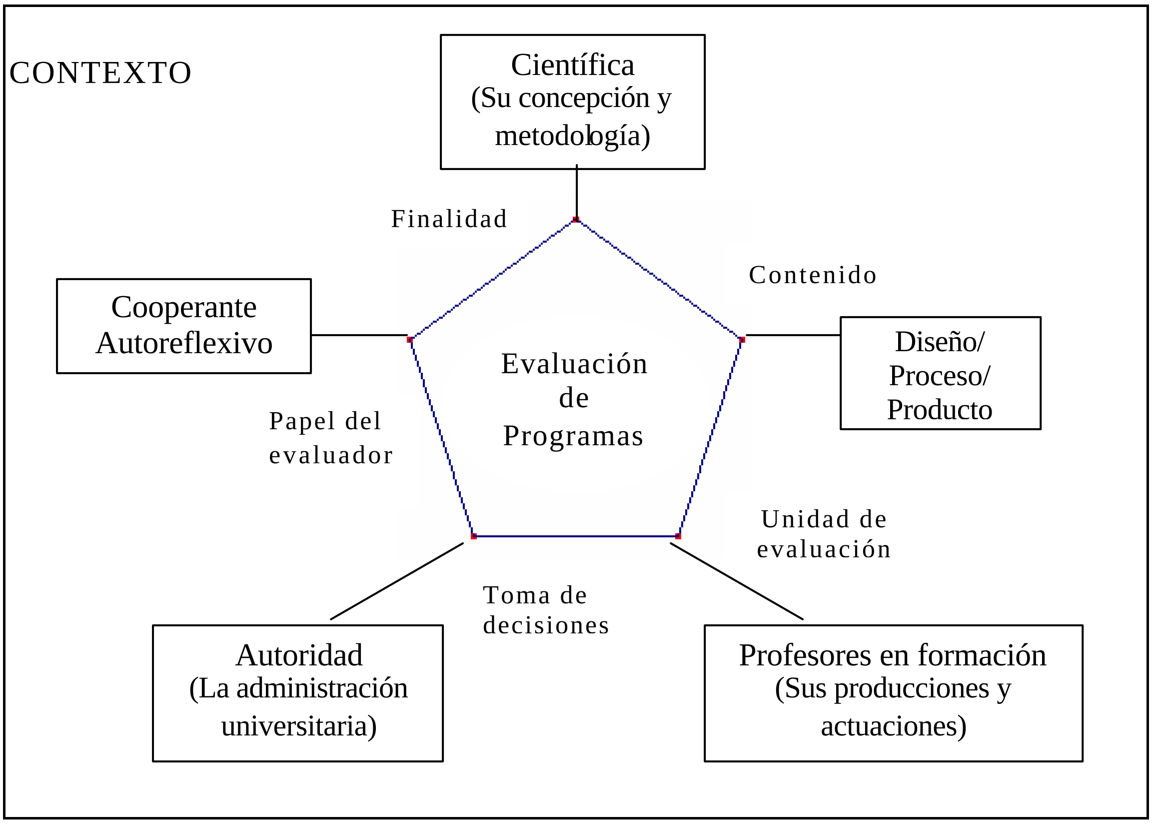
Así pues, la propuesta de evaluación de programas que se plantea en la presente investigación es el producto de la búsqueda de una herramienta conceptual dirigida a evaluar una experiencia particular.

Esquemáticamente, los rasgos generales de la propuesta de evaluación quedan descritos en la figura 3.2.

En síntesis, se parte de la consideración que la evaluación del programa tiene un carácter científico más que técnico. El producto de sus hallazgos será contrastado con los supuestos teóricos que sustentan la investigación. Dicho producto podría orientar nuevas búsquedas. La evaluación de programas es concebida como un proceso holístico donde se analizan las partes como un todo integrado. Esto significa la identificación de tres momentos: el diseño del programa, el desarrollo del programa y los resultados, cada uno de estos momentos sólo tienen un sentido organizativo de carácter cronológico. Estos momentos cobran significación cuando se les analiza de forma integrada, es decir, como una totalidad.

En la propuesta de evaluación que hacemos se considera importante conocer, además, las actitudes de los participantes hacia los aspectos involucrados en el programa, ya que estas actitudes juegan un papel fundamental en la respuesta de los sujetos y sus actuaciones frente a los contenidos del programa. Son esas actuaciones de los sujetos participantes, reflejadas en las producciones, las sugerencias didácticas, la visualización de la proyección y aplicación de los contenidos del programa, los aspectos de peso a considerar en el *proceso o desarrollo del programa*. El momento de *los resultados* es mucho más complejo. En éste se analizan las actitudes de los participantes hacia las componentes del programa con el propósito de enriquecer la evaluación del programa; además de los logros evidenciados en las producciones de los participantes.

Figura 3.2. *Dimensiones de la propuesta de evaluación del programa MCA*



Finalmente, la propuesta de evaluación de programas se estructura a partir de la noción de evaluación, entendida como el proceso sistemático de recogida de información para tomar decisiones, mediante la revisión analítica y crítica permanente del diseño, del desarrollo y los resultados de la aplicación del programa. Es decir, se entiende como un proceso de carácter sistemático y crítico de recogida de información para tomar decisiones en búsqueda de la calidad. A partir de esa conceptualización se presenta una propuesta de esquema operativo de evaluación de programas (ver tablas 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4) cuyas componentes actúan para valorar el programa de manera sistemática, analítica, continua, crítica y autoreflexiva. *Sistemática*, porque la evaluación se efectúa de una manera organizada y rigurosa a partir de un esquema referencial previamente establecido, a lo largo del desarrollo del programa. *Analítica*, porque busca identificar, en cada una de las actividades de los participantes, los elementos implicados en ellas y sus relaciones. Dichos elementos se consideran tanto de forma aislada como integradas al conjunto. *Crítica*, porque en la evaluación se elaboran juicios objetivos respecto a todos los asuntos relacionados con el programa (diseño, recursos, metodología, actividades, etc.). *Continua*, porque la evaluación se efectúa de manera permanente, en cada momento de la ejecución del programa. *Autoreflexiva*, porque se induce a los agentes del programa a reflexionar sobre su propia actuación.

Asimismo, en la propuesta no se pierde de vista la orientación de Pérez Juste (1995, 2000) respecto a que en la elaboración del programa como en su evaluación, se deben considerar las siguientes cuestiones: a) las metas y objetivos, b) la articulación de las metas y objetivos a las características de los destinatarios en su contexto de referencia, c) especificación detallada de los destinatarios, agentes, actividades, decisiones, estrategias, procesos, funciones y responsabilidades del personal, tiempos, manifestaciones esperables, niveles de logro considerados a priori como satisfactorios, y d) un mecanismo de detección de las posibles disfunciones y carencias así como sus causas. Cada uno de estos aspectos sirven de orientación en el diseño, aplicación y evaluación del programa MCA.

Con la evaluación del programa MCA pretendemos dar respuesta a las cuestiones planteadas en el capítulo I. Esto significa que las expectativas del programa se orientan al desarrollo del conocimiento didáctico y hacia las actitudes de los profesores en formación. Tales propósitos se enuncian en las conjeturas que se formulan a continuación.

3.3. Conjeturas

C1. El programa diseñado desarrolla competencias didácticas del profesor de matemáticas en formación mediante un trabajo con la calculadora gráfica y los procesos de modelización sobre el álgebra lineal.

C2. El programa genera en los futuros profesores de matemáticas cambios de actitudes e incremento de interés por los métodos no tradicionales para la enseñanza.

La conjetura C1 está relacionada con los objetivos generales 1 y 2 de la investigación, formulados en el apartado 1.7 del capítulo I. Respecto al objetivo 1, dicha conjetura da cuenta de la integración de la modelización y la CG en la enseñanza del álgebra lineal escolar. Es a través de la evaluación del diseño, implementación y resultados del programa MCA que se pretende contrastar la mencionada conjetura. En cuanto al objetivo 2, éste persigue responder al desarrollo de competencias didácticas contempladas en la conjetura C1. El análisis de las competencias didácticas de los futuros profesores en el diseño de actividades didácticas durante el desarrollo del programa MCA permite responder a dicha conjetura.

La conjetura C2 está relacionada con el objetivo general 3 de la investigación, es decir, el análisis de las actitudes de los profesores en formación hacia el empleo didáctico de la modelización y la CG en la elaboración de actividades didácticas. Dicha conjetura permite concluir acerca de los posibles cambios de actitudes generados por el programa MCA en los futuros profesores.

3.4. El programa Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra Lineal (MCA)

En este apartado se presenta la descripción del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, llevado a cabo para la realización del trabajo de campo de esta investigación, el cual se apoya en los contenidos del álgebra lineal, la modelización y la calculadora gráfica. Dicho programa se ha denominado programa MCA (Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal). Este programa fue diseñado para desarrollarse en 30 horas de trabajo presencial y un tiempo estimado de 60 horas de trabajo no presencial. La modalidad de implementación fue la de curso-taller, entendiendo por curso-taller, aquella actividad académica donde los participantes tienen un papel activo en el binomio teoría y práctica, con un predominio de la práctica como medio generador de aprendizajes, es decir, un curso de formación teórico-práctico.

Para el diseño del programa se asume la noción de currículo como una acción con la que se intenta comunicar los fundamentos esenciales para llevar a cabo el acto educativo que conlleva una formación (Stenhouse, 1991, Rico, 1997a). Bajo esta orientación se articulan los componentes del programa; es decir, la modelización matemática, la calculadora gráfica, el álgebra lineal y las actividades didácticas.

El programa MCA tiene como finalidad la dotación de herramientas conceptuales y prácticas para la planificación de actividades didácticas de matemáticas en el currículo de Educación Secundaria en España. En el diseño del programa consideraremos los cuatro principios curriculares para la planificación de Stenhouse (1991), a saber:

1. Principios para la selección de contenidos: qué es lo que debe aprenderse y enseñarse.
2. Principios para el desarrollo de una estrategia de enseñanza: cómo debe aprenderse y enseñarse.
3. Principios acerca de la adopción de decisiones relativas a la secuencia, y
4. Principios para diagnosticar las fortalezas y debilidades de los individuos.

Los cuatro principios anteriores vistos al nivel de planificación de los profesores nos lleva a presentar el programa en objetivos, contenidos, metodología y evaluación (Rico, 1997c). Para establecer los objetivos y contenidos del programa se partió del marco teórico de los organizadores del currículo, considerándose fundamentalmente la estructura conceptual, la modelización y los materiales y recursos (representados por la calculadora gráfica), como organizadores en el diseño de actividades didácticas, de contenido algebraico para alumnos de secundaria. Estas actividades se conciben para ser desarrolladas en un tiempo determinado y para la consecución de unos objetivos didácticos (Ministerio de Educación y Ciencia, 1989). Consideramos las actividades didácticas como partes de posibles unidades didácticas. Asimismo, en la estructura general del programa, de su organización, secuenciación y puesta en práctica se tomó como referencia el programa de formación inicial de profesores de matemáticas propuesto y evaluado por Bedoya (2002).

A continuación describimos los objetivos, contenidos, metodología y evaluación contemplados en el programa de formación inicial de profesores de matemáticas (MCA). Respecto al contenido se explica la procedencia de los ejemplos y ejercicios incluidos en el referido programa. Todo ello orientados por los principios propuestos por Stenhouse (1991), antes señalados y por la propuesta de Bedoya (2002).

3.4.1. Objetivos y niveles de logro esperado

En este apartado establecemos los objetivos que orientan el programa MCA y sus respectivos niveles de logro esperado. Dentro del enunciado de cada objetivo está implícito cada nivel de logro, sin embargo, se enuncian para orientar con mayor objetividad su proceso de evaluación. Estos objetivos están en consonancia con los objetivos de nuestra investigación, mencionados en el capítulo I.

Objetivo general del programa MCA

El programa pretende que los participantes sistematicen y apliquen el proceso de modelización matemática y utilicen la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de álgebra lineal escolar. Mediante una serie de actividades a realizar y unas estrategias de desarrollo se espera que los profesores en formación logren poner en práctica competencias en el diseño de actividades didácticas. En este sentido el objetivo general del programa es el siguiente:

Aportar herramientas conceptuales que favorecen la integración de la modelización matemática y la calculadora gráfica, como organizadores del currículo, para diseñar y elaborar actividades didácticas, de contenido algebraico, para alumnos de secundaria.

Objetivos específicos del programa

El logro del objetivo general, por parte de los participantes, será evidenciado por medio del alcance de los objetivos específicos que se describen a continuación:

1) Emplear y manejar los comandos, programas y funciones básicos de la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza de las matemáticas.
2) Aplicar el proceso de modelización matemática, en cada una de las actividades propuestas y relacionadas con la resolución de problemas.
3) Integrar la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.
4) Promover actitudes favorables hacia la utilización de la modelización matemática y la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Niveles de logro

De los objetivos anteriores se considera que los niveles de logro en los participantes comienza con su familiarización en el manejo de los comandos básicos de la calculadora gráfica (CG) y su comprensión de cada uno de los momentos de la modelización matemática tal como se conceptualizó en el capítulo II. Una vez alcanzadas las nociones básicas, los profesores en formación, harán uso didáctico de la modelización y la CG en el abordaje de situaciones problema del mundo real. Finalmente los niveles de logro serán evidenciados en la integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas establecidas en el programa MCA. Los futuros profesores mostrarán reflexión sobre sus producciones mediante la interacción con sus pares y con los investigadores, a manera de consensuar su calidad técnica y didáctica.

3.4.2. Contenidos del programa

Los contenidos del programa MCA se estructuran a partir de los organizadores del currículo que soportan nuestra investigación. Dichos contenidos se refieren a:

Estructura conceptual del álgebra lineal escolar: Ecuaciones lineales. Sistemas de ecuaciones lineales. Inecuaciones lineales. Sistemas de inecuaciones lineales. Vectores y matrices. Optimización Lineal.

Modelización: Conceptualización del proceso de modelización. Modelización de situaciones del mundo real. Modelización con datos reales. Situaciones problema y modelización con el uso de la calculadora gráfica. Modelización de situaciones relacionadas con vectores y matrices. Modelo de Programación Lineal. Aplicaciones de la modelización en actividades didácticas. La modelización y el uso de la calculadora gráfica en la formación de profesores de matemáticas.

Calculadora gráfica: Introducción al manejo de la calculadora gráfica,. Ejercicios y problemas con el apoyo de la calculadora gráfica. Manipulación de vectores y matrices con la TI-92. El editor de texto. Introducción a la programación en la TI 92. Uso del editor de texto con comandos ejecutables. Introducción al programa Cabri Geometry. Aplicaciones de la CG en actividades didácticas. La modelización y la calculadora gráfica en la formación de profesores de matemáticas. Reflexiones finales acerca de la integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas.

3.4.3. Selección de los ejemplos y ejercicios contemplados en el programa

De acuerdo a los objetivos perseguidos se prestó especial atención a la búsqueda de situaciones problema que permitieran abordar la modelización y la calculadora gráfica para generar actividades didácticas de contenido algebraico, en cada sesión de trabajo prevista. En ese sentido, se acudió a nuestra propia experiencia como profesores de matemáticas y a fuentes documentales como libros de texto, artículos de revistas y la red Internet, como fuente de información para armar el banco de posibles situaciones problema.

En cuanto a los libros de texto, la escogencia de los ejemplos y ejercicios se efectuó haciendo una búsqueda tanto de libros de secundaria (Baena & Marín,1998; Coriat, Marín, Palomino & Rico,1994; Gustafson, 1997; Universidad de Cantabria, 1998), como de libros de álgebra lineal (Fletcher, 1972; Lay, 1993; Nakos & Joyner, 1999) y otros libros relacionados con modelización y uso de nuevas tecnologías en la enseñanza (Beare, 1997; Berry, Grahan, & Watkins, 1997; Demana, Waits & Clemens, 1994; Kutzler, 1998a, 1998b; Stewart & Pountney, 1995; Swetz & Hartzler, 1999).

Las revistas consultadas para la selección de las situaciones a incluir en el programa fueron: Mathematics Teacher (1985 a 2001), The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education (1999, 2000, 2001), Micromath (2000) y Mathematics and Computer Education (1997).

Respecto a la red internet, algunas de las páginas web que se consultaron fueron las siguientes:

http://www.comap.com/

Esta página corresponde al consorcio para las matemáticas y sus aplicaciones, es decir, The Consortium for Mathematics and Its Applications (COMAP), en Massachusetts (USA), bajo la dirección de Solomon Garfunkel. La filosofía educativa de COMAP se centra alrededor de la modelización matemática utilizando nuevas tecnologías, entre las que se encuentran las calculadoras gráficas. Los ejercicios y problemas presentados en esta página web aportaron ideas para formular nuestras situaciones problema.

http://www.edc.org/mcc/cmmow.htm

Este es el sitio web del proyecto del currículo conectado, es decir, The Connected Curriculum Project, de la Universidad del Estado de Montana (USA). En este sitio encontramos situaciones problema abordadas con el apoyo de las nuevas tecnologías.

http://www.mathconnections.com

Este es el sitio web del núcleo curricular de educación secundaria denominado MATH Connections, ubicado en Rocky Hill, Connecticut (USA). Este programa está patrocinado por la Fundación Nacional de Ciencia de Estados Unidos. Su director es June Ellis y cuenta entre su consejo asesor con expertos de la talla de Thomas Romberg de la Universidad de Wisconsin (USA). La filosofía del programa se sustenta en la modelización y el uso de nuevas tecnologías para establecer conexiones entre las matemáticas y otros aspectos como otras ciencias y el mundo real.

http://www.ti.com/calc/spain/material.htm

Esta es una página web (en español) del portal de la empresa Texas Instruments en la que se pone a disposición materiales de apoyo para ayudar al profesor a escribir actividades. Esta página ayudó a revisar aplicaciones de la calculadora gráfica TI-92 a la resolución de algunos problemas y de esa manera orientar nuestras acciones en el programa.

Después de hacer un análisis sobre la importancia didáctica de las situaciones problema presentadas por las fuentes antes señaladas y, procediendo a realizar las adaptaciones pertinentes al contexto de ejecución, se seleccionaron aquellas que se consideraron podrían ajustarse a los propósitos y objetivos perseguidos en el programa dirigido a los profesores de matemáticas en formación. Además de estas situaciones problema mencionadas anteriormente, se plantearon nuevas situaciones y ejercicios para complementar el contenido del programa.

Como criterio para la selección de los ejemplos, ejercicios y problemas se tuvo en cuenta que las situaciones se ajustasen a las siguientes condiciones:

1) Situaciones no escolares y cercanas al entorno del alumno
2) Amplio margen de apertura para su desarrollo mediante el proceso de modelización
3) Requerimiento del uso de la calculadora gráfica para su modelización
4) Relativa complejidad pero alto interés didáctico
5) Referentes al mundo físico y social
6) Aplicación de conceptos y procedimientos algebraicos.

Teniendo en cuenta estos seis criterios se pone a los profesores en formación frente a situaciones de la vida real que generan reflexión acerca del reconocimiento y fortalecimiento, en sus futuros alumnos, de habilidades matemáticas que usualmente no son abordadas en los medios formales de enseñanza, tales como las clases, libros de texto o actividades clásicas de evaluación escolar (Lesh, Hoover, Hole, Kelly & Post, 2000).

3.4.4. Distribución de los contenidos en las sesiones del curso-taller

En el programa MCA se presentan los objetivos y sus respectivos contenidos los cuales se detallan en la tabla 3.4.4. Los contenidos del programa MCA fueron distribuidos en diez sesiones, las cuales tienen una duración de 3 horas cada una. Estos contenidos tienen como propósito general ayudar a promover en los participantes el empleo de herramientas conceptuales para el diseño de actividades didácticas utilizando la modelización y la calculadora gráfica en el contexto del álgebra lineal de secundaria. La estructuración de los contenidos pretende involucrar a los futuros profesores, que participan en el desarrollo del programa, en experiencias de aprendizaje de las matemáticas escolares relacionadas con situaciones del mundo real y tratadas en un ambiente de tecnología representado por la calculadora gráfica TI-92 plus. Los contenidos incluyen situaciones problema del mundo real que pueden estar relacionadas con la vida cotidiana, comercial, individual, toma de decisiones, optimización, tráfico, entre otras.

En la tabla 3.4.4, la columna de la izquierda corresponde a las sesiones de trabajo desde la 1 hasta la 10, con sus respectivas fechas de realización. En las columnas restantes se describen los objetivos y los contenidos de cada sesión. Las actividades propuestas pueden observarse en cada uno de los cuadernillos correspondientes a las diez sesiones de trabajo (ver anexo 2).

Tabla 3.4.4. *Distribución de los objetivos y contenidos del programa MCA*

Sesión	*Objetivos*	*Contenidos*
1 (5-3-01)	Presentar y describir los componentes que articulan el programa.	Actividad inicial. Introducción al manejo de la calculadora gráfica.
2 (7-3-01)	Identificar los comandos básicos para el uso y manejo de la calculadora gráfica. Describir y ejemplificar el esquema general del proceso de modelización. Aplicar el proceso de modelización.	Ecuaciones lineales. Ejercicios y problemas con el apoyo de la calculadora gráfica. Uso de varios métodos de resolución. Introducción a la modelización con el uso de la calculadora gráfica.
3 (9-3-01)	Aplicar comandos de la calculadora y el proceso de modelización con la ayuda de métodos algebraicos, tabulares y gráficos en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales	Sistemas de ecuaciones. Modelización de situaciones del *mundo real. M*odelización con datos reales.
4 (12-3-01)	Modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales	Inecuaciones lineales. Problemas y modelización con el apoyo de la calculadora gráfica. Sistemas de inecuaciones. Modelización de situaciones del *mundo real*.
5 (14-3-01)	Valorar las estrategias utilizadas en el diseño de actividades de modelización matemática en secundaria con el apoyo de calculadoras gráficas.	Presentación de una experiencia práctica en el aula de secundaria con calculadora gráfica y modelización. Análisis y aportes.

Tabla 3.4.4. *Distribución de los objetivos y contenidos del programa MCA*
(continuación)

Sesión	*Objetivos*	*Contenidos*
6 (16-3-01)	Aplicar la modelización con el apoyo de la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas relacionadas con vectores y matrices.	Manipulación de vectores y matrices con la TI-92. Modelización de situaciones relacionadas con vectores y matrices. El editor de texto.
7 (19-3-01)	Resolver problemas donde las estrategias utilizadas le configuren un modelo específico para su resolución, mediante la calculadora TI-92 plus, utilizando como referencia el modelo de programación lineal (PL).	Modelo de Programación Lineal (PL). Versión clásica y matricial. Aplicaciones en el aula.
8 (21-3-01)	Utilizar el editor de texto y la programación en el diseño de actividades didácticas en el proceso de modelización	Introducción a la programación en la TI 92. Uso del editor de texto con comandos ejecutables. Aplicaciones didácticas.
9 (23-3-01)	Identificar comandos básicos para el uso didáctico del Cabri Geometry de la calculadora gráfica, a través de ejercicios prácticos.	Introducción al uso del Cabri Geometry. Aplicaciones didácticas. Actividades de modelización con el apoyo de la calculadora gráfica. Aplicación en el aula.
10 (26-3-01)	Diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria	Conclusiones generales sobre la modelización y el uso de la calculadora gráfica en la formación de profesores de matemáticas. Reflexiones finales.

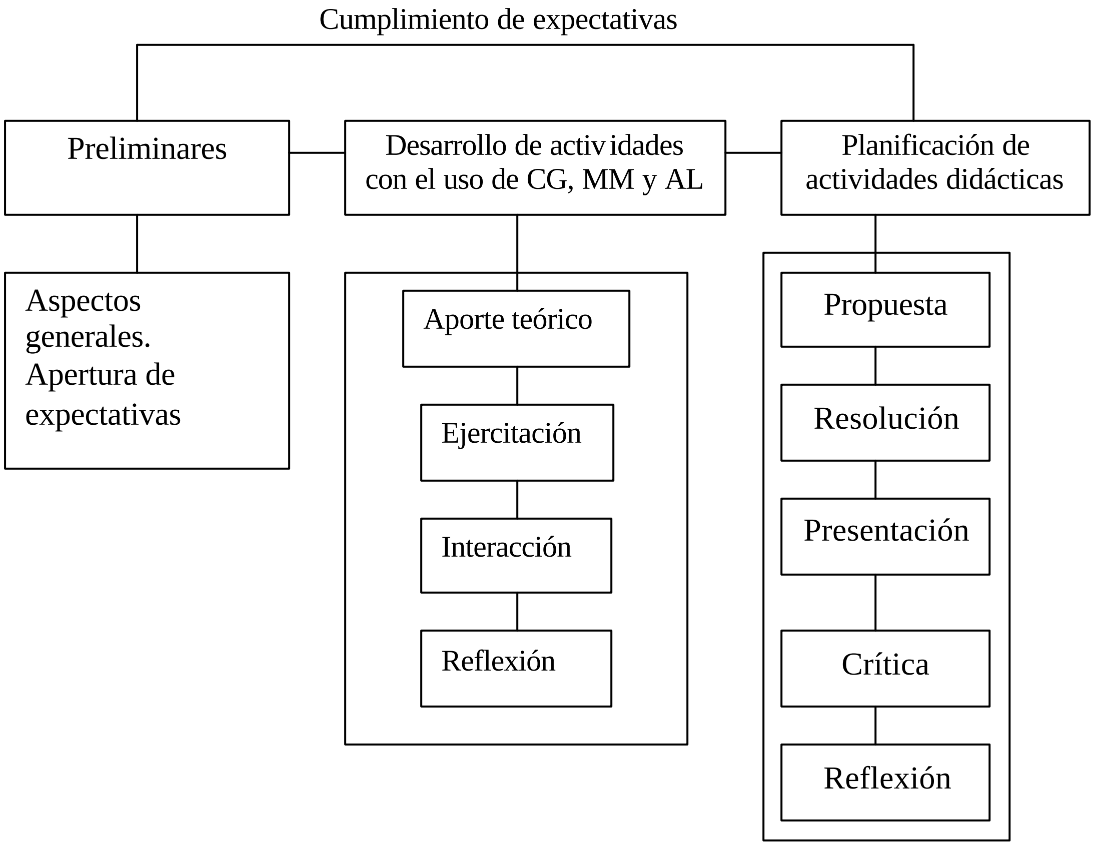
3.4.5. Secuenciación y desarrollo del programa

El programa se desarrolla siguiendo una secuencia básica similar a la que se expresa en el diagrama de la figura 3.4.5. En términos generales en cada sesión se comienza con la introducción de aspectos preliminares, el desarrollo de actividades generales y la planificación de actividades didácticas. Es importante destacar que tal secuencia particular para las sesiones es equivalente a la secuencia que orienta la implementación del programa en general. Es decir, los preliminares corresponden con la sesión 1, el desarrollo de actividades generales se corresponde con las sesiones 2 a 9 y la planificación de actividades didácticas se corresponde con la sesión 10.

Los preliminares del curso son momentos oportunos para recabar información referida al diagnóstico del estado inicial de los participantes en relación con los objetivos del programa a desarrollar. En ese sentido, las actividades de la primera sesión incluyen una evaluación diagnóstica que, además de aportar información sobre el conocimiento de los participantes respecto a los objetivos formativos del programa, contribuye a que los profesores en formación contextualicen el programa e inicien la reflexión didáctica sobre el proceso de modelización y la calculadora gráfica en el contexto del álgebra lineal. Asimismo, dicha actividad ayuda a recoger información sobre la conceptualización y opinión de los participantes acerca de la modelización y la calculadora gráfica en actividades de enseñanza de las matemáticas.

En el momento preliminar de cada sesión se realiza la presentación de los objetivos, los contenidos y las actividades correspondientes de acuerdo con el guión de trabajo. Luego se prosigue con el desarrollo de actividades en las cuales se contempla ejemplificación, ejercitación y aplicación de los componentes del programa. Dichas actividades se realizan en el aula y fuera de ella. Las actividades desarrolladas en el aula favorecen el trabajo individual y grupal, el intercambio de ideas y el contraste de propuestas didácticas. Las actividades fuera del aula permiten explorar, reforzar y reflexionar de forma individual sobre los contenidos del programa y sus aplicaciones en la planificación de actividades didácticas.

Figura 3.4.5. *Secuenciación del proceso en el desarrollo del programa MCA*



El desarrollo del programa MCA, bajo la dinámica del curso-taller "Calculadoras gráficas y enseñanza del álgebra en el currículo de secundaria" está dirigido a generar, en los profesores en formación, reflexión y a profundizar y cimentar los conocimientos adquiridos a lo largo de su participación en el desarrollo del programa MCA. La reflexión y la profundización surgen de la autoevaluación que cada participante hace de sus tareas realizadas en el curso, una vez confrontadas y analizadas en relación con las de los demás agentes del programa MCA. Esa reflexión enfatiza en las virtudes y defectos que se van observando en cada una de las propuestas surgidas en las diferentes actividades realizadas en cada sesión.

A continuación se presenta lo que consideramos son los principales momentos en cuanto a secuencia metodológica seguida en cada sesión:

1. Reflexión y discusión sobre tópicos no tratados en la sesión anterior, pero que estaban contemplados en el contenido del curso.
2. Comentarios del profesor (o profesores) del curso acerca de los aspectos que se consideran relevantes y que fueron manifiestos en la sesión anterior.
3. Entrega de materiales y presentación de cada sesión a los participantes.
4. Reflexión teórica sobre tópicos a tratar en la sesión enfatizando el contenido didáctico.
5. Trabajo individual y grupal con la calculadora gráfica. Aquí los participantes se enfrentan a las actividades propuestas en el cuadernillo de cada sesión. Además los participantes, haciendo uso del cuaderno de notas, realizan las anotaciones que consideran necesarias en el estudio de cada situación presentada.
6. Discusión y análisis colectivo de las tareas y situaciones propuestas en el punto 5, se presentan al grupo clase para su discusión y análisis colectivo. En esa presentación se hace uso de los recursos tecnológicos, es decir, calculadora con la pantalla visualizadora (view screen) y el retroproyector de transparencias.
7. Entrega de la hoja de notas del día. Cierre de la sesión.
8. En la sesión 1 no se consideran los puntos 1 y 2 por razones obvias.
9. En la última sesión (sesión 10) cada participante, cumplimentó una hoja de evaluación del curso.

El momento de la planificación de actividades didácticas representa la oportunidad en la cual los participantes presentan propuestas de actividades didácticas de álgebra lineal dirigidas a estudiantes de secundaria. En estas actividades quedan expresados los dominios conceptuales y procedimentales implicados en cada actividad didáctica, así como las competencias didácticas puestas de manifiesto en la actividad para lograr la comprensión de los conceptos y procedimientos por parte de los alumnos, y los mecanismos para controlar los niveles de aprendizaje de los mismos.

3.4.6. Seguimiento de los logros de los participantes

Con el propósito de ver reflejado el trabajo de cada uno de los participantes con respecto a los objetivos de la investigación realizamos un seguimiento que fundamentalmente involucra lo siguiente:

1. *Caracterización general de la actuación de los participantes* en el estudio, tomando en cuenta las relaciones: dominio técnico vs uso didáctico de la calculadora gráfica, conocimiento del proceso vs aplicación didáctica de la modelización matemática y uso conjunto de la calculadora gráfica y la modelización vs su articulación didáctica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. A tal efecto se tienen en cuenta las producciones de cada uno de los participantes registradas en los cuadernos de notas, en las láminas (transparencias) y en los archivos de las calculadoras gráficas.

2. *Análisis de las tareas realizadas por los participantes,* considerando: a) conceptos algebraicos utilizados y sus relaciones (redes conceptuales); b) funciones y comandos de la CG utilizados en cada actividad; c) aplicación de la modelización (momentos, situaciones propuestas, grado de apertura de las preguntas formuladas); d) actividades de evaluación propuestas (diagnósticas, formativas y sumativas); e) secuenciación didáctica de las actividades (clásica, innovadora, escasa consideración didáctica), f) articulación didáctica de la calculadora gráfica y la modelización y g)

aplicación de otros organizadores del currículo. La *descripción y análisis de las tareas propuestas* en los cuadernillos de cada una de las sesiones se efectuó considerando las acciones de los participantes (si acude o no al uso de calculadora gráfica, modelización matemática y fundamentalmente si su dirección es el plano didáctico) en los tipos de situaciones presentadas (comercial, industrial, tecnológica, cotidiana, etc.).

3.4.7. Equipo de apoyo

La aplicación del programa MCA y su correspondiente evaluación requirió de recursos humanos y materiales. En cuanto a los recursos humanos, además del investigador y los directores del trabajo de investigación, se contó con un equipo de apoyo que participó tanto en la planificación de las actividades del programa como en su implementación en el curso-taller

El equipo de apoyo estuvo conformado por miembros del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico, específicamente por D. Luis Rico, D. Enrique Castro, D. Francisco Ruiz, D. Pedro Gómez, D. Antonio Marín y D. Antonio Codina. La participación de estos miembros del equipo de apoyo fue importante en el momento de la determinación de los ejemplos, ejercicios y situaciones problema a incluir en el diseño del programa, así como en la estructuración de los cuadernillos de actividades para cada sesión. El equipo de apoyo participó en la implementación del programa MCA y mantuvo reuniones para el seguimiento del desarrollo del mismo, con el propósito de identificar fallos y resolver eventualidades.

Algunos de los miembros de dicho equipo actuaron como cofacilitadores, como observadores participantes y/o como soporte logístico. Como cofacilitadores y evaluadores participaron D. Antonio Marín y D. Antonio Codina, quienes diseñaron los cuadernillos de las sesiones 5 y 8 respectivamente. Éstos actuaron como profesores en dichas sesiones tituladas "una experiencia con calculadora gráfica en secundaria" (sesión 5) y "programación en la TI-92 plus" (sesión 8). Como apoyo logístico y observadores participaron Dña Consuelo Cañadas y D. José Luis Villegas.

3.4.8. Medios y Recursos

Para realizar las actividades propuestas en cada una de las sesiones de trabajo se requirió de ciertos medios y recursos materiales. Los medios están constituidos por la infraestructura que ofreció la institución donde se aplicó el programa MCA. En nuestro caso correspondió al Departamento de Didáctica de la Matemática (DDM) y al grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico. Se contó con la biblioteca del DDM, la sala de seminarios provista de las condiciones mínimas para realizar cursos con menos de 20 participantes y la sala de ordenadores de la Facultad de Ciencias de la Educación gestionada por el mismo DDM. Respecto a las aportaciones del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico se tiene la provisión de materiales de papelería y consumibles de audio y vídeo, así como el apoyo de investigadores pertenecientes al mismo.

En cuanto a los materiales, cada participante dispuso de los siguientes:

1. Una calculadora gráfica (CG) TI-92 plus, durante todo el tiempo de realización del curso-taller. Las calculadoras utilizadas fueron facilitadas por la empresa Texas Instruments en calidad de préstamo y sin costo alguno.

2. Un cuadernillo de actividades programadas para cada sesión. Cada cuadernillo tiene una breve introducción de los tópicos a tratar en la sesión, un objetivo general, las actividades a realizar por los

participantes y en algunos casos, dependiendo de la complejidad del tema, incorpora una explicación teórica complementaria y algunos ejemplos.

3. Un Guión de trabajo para cada sesión. En cada sesión se trabajó según un guión previamente establecido, diseñado por el investigador y discutido por el equipo de investigación. A manera de ejemplo, en la figura 3.4.8 se muestra el guión correspondiente a la sesión 2.

Figura 3.4.8. *Guión de trabajo de la sesión 2*

Curso-taller:

Calculadora gráfica y modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas

Guión de la sesión Nº 2

1. Presentación y discusión de aportaciones a la actividad inicial
2. Cuestiones pendientes de la primera sesión
3. Entrega de documentos de la segunda sesión. Presentación de actividades.
4. Uso de comandos
5. Proceso de modelización
6. Discusión de propuestas

4. Un manual de usuario de la TI-92 (resumido). Este documento se estructuró a partir del manual editado por la Texas Instruments (1996). De este manual se seleccionaron los capítulos 2: utilización de la TI-92; capítulo 6: cálculo simbólico y capítulo 8: data/matrix editor; tomando en consideración los comandos e instrucciones necesarias para desarrollar las diferentes actividades de interacción con la TI-92 y TI-

92 plus.

5. Material de apoyo impreso. Para complementar la información aportada en el programa, se seleccionaron una serie de documentos referidos a: los orígenes de la programación lineal, programación con la calculadora gráfica y recursos en internet

3.4.9. Actividades

Las actividades del programa MCA están recogidas en los cuadernillos correspondientes a cada una de las sesiones del programa, donde aparecen establecidas las distintas actividades que estructuran el programa MCA en la práctica. Dichos cuadernillos fueron entregados a cada uno de los participantes al inicio de cada sesión. La estrategia metodológica consistía, entre otras cosas, en seguir lo pautado en cada cuadernillo. Los cuadernillos correspondientes a cada una de las sesiones aparecen en el anexo 2. A manera de ejemplo presentamos a continuación las actividades correspondientes a las sesiones 4 y 7.

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso-Taller

Calculadoras Gráficas y Enseñanza del Álgebra
en el Currículo de Secundaria

Sesión 4 INECUACIONES LINEALES

Guión de la Sesión
Cuestiones pendientes de la tercera sesión.
Entrega de documentos de la cuarta sesión. Presentación de actividades.
Uso de comandos
Modelización y resolución de problemas.
Discusión de propuestas.

Presentación:

Con el propósito de continuar con el proceso de modelización matemática de problemas "reales", en esta sesión se ejercitará el manejo de los comandos relacionados con la graficación y resolución algebraica de inecuaciones lineales (%,&,϶,O). También se plantearán situaciones relacionadas con sistemas de

Objetivo General:

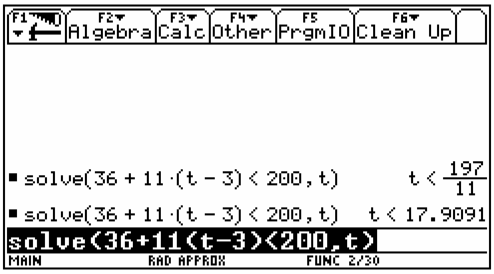
Modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales.

ACTIVIDADES:

Ejemplo:

Llamada telefónica. Supongamos que una llamada telefónica de larga distancia cuesta 36 centavos de euro los primeros tres minutos y 11 centavos el minuto adicional. ¿Durante cuántos minutos puede hablar una persona con menos de 2 euros?

De acuerdo a la situación planteada tenemos que el costo de las llamadas está definido por: $C(t)=36+11(t\text{-}3)$, donde t es el tiempo en minutos.
De acuerdo a la pregunta, se debe resolver la inecuación $36+11(t\text{-}3)<200$



De aquí resulta que la persona puede hablar hasta 17 minutos.

1. Compra de discos compactos. Un estudiante puede gastar hasta 330 euros en un equipo estereofónico y algunos discos compactos. Si el equipo cuesta 175 euros y los discos 8.50 euros cada uno, determinar la cantidad máxima de discos que puede comprar.

2. Ingreso laboral. Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.

3. Fabricación de artículos deportivos. Un fabricante de artículos deportivos asigna un mínimo de 1200 unidades de tiempo al día para producir cañas y carretes de pescar. Si se necesitan 10 unidades de tiempo para fabricar una caña, 15 para fabricar un carrete, determinar una inecuación que indique las maneras posibles de programar la fabricación de cañas y carretes.

4. Plantación. Se tiene un presupuesto entre 300 euros y 600 euros para comprar árboles y arbustos para plantar un terreno. Después de la averiguación correspondiente se encuentra que los árboles cuestan 150 euros y los arbustos 75 euros. ¿Qué combinaciones de árboles y arbustos se pueden comprar? ¿Cuáles otras preguntas podrían formularse en esta situación?

5. Crecimiento de bosques: La temperatura y la lluvia tienen un efecto importante en la vida de las plantas. Si el promedio de la temperatura anual o de la cantidad de lluvia es demasiado bajo, ni árboles ni bosques crecerían: sólo habrá pastizales y desiertos. La relación entre el promedio de temperatura anual T (en ^oF) y el promedio anual de lluvia P (en in) es una desigualdad lineal. Para que en una región haya bosques, el T y P deben satisfacer la desigualdad $29T-39P<450$, donde $33\leq T\leq 80$ y $13\leq P\leq 45$

a) Determinar si pueden crecer bosques en un lugar donde $T=37^oF$ y $P=21.2$ *in*

b) Graficar la desigualdad con T en el eje horizontal y P en el eje vertical, en la pantalla de la TI-92

c) Identificar la región donde pueden crecer bosques.

≅ ≅ ≅ ≅

Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

Curso-taller

Calculadoras Gráficas y Enseñanza del Álgebra

en el Currículo de Secundaria

Sesión 7 PROGRAMACIÓN LINEAL

Guión de la Sesión

Cuestiones pendientes de la sexta sesión.
Entrega de documentos de la séptima sesión.
Resolución de actividades.
Discusión
Conclusiones

Presentación:

Con el fin de introducir otras aplicaciones tomamos en cuenta problemas en economía e industria que surgen de la necesidad de tomar decisiones para minimizar gastos o maximizar beneficios, y siempre sujetos a restricciones de distinta naturaleza, capacidad de producción y stocks en el mercado, entre otros.

Objetivo General:

Utilizando como referencia el modelo de programación lineal (PL), el participante en el curso-taller resolverá problemas donde las estrategias utilizadas le configuren un modelo específico para su resolución, mediante la calculadora TI-92.

Estructura del modelo de programación lineal (PL)

Consideremos un conjunto de variables que pueden tomar sólo valores no negativos. Los valores de las variables son obtenidos de una función lineal, que es maximizada o minimizada, sujeta a restricciones dadas por ecuaciones o inecuaciones lineales. Es decir:

Encontrar los valores de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ que maximizan (o minimizan) la función (objetivo) definida por:

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

sujeta a (restricciones):

$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n\ (\leq,\geq)b_1$

$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n\ (\leq,\geq)b_2$

....

$a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n\ (\leq,\geq)\ b_m$

y

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Los parámetros (m, n, c_j, a_{ij}, b_i para $i=1,\ldots,m$ y $j=1,\ldots,n$) del problema son constantes conocidas

Pasos para construir modelos PL (Darby-Dowman, 1995)

1. Comprender el problema y el funcionamiento del sistema en estudio
2. Determinar qué es conocido y qué es desconocido en el sistema, en relación con el problema. Definir las variables de decisión.
3. ¿Cuáles son las restricciones a considerar en las variables de decisión?
4. ¿Cómo se mide la calidad de la solución? ¿Cuál es la función objetivo?
5. Construir el modelo
6. Resuelva el problema planteado y compruebe si la solución obtenida tiene sentido. En otro caso se debe repetir el proceso, haciendo las modificaciones a que hubiera lugar en el modelo.

ACTIVIDADES:

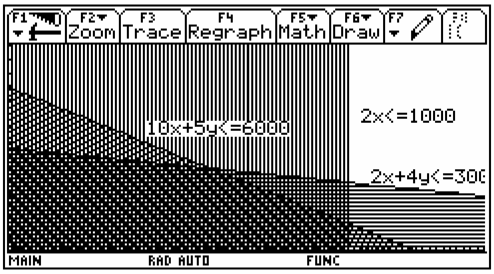
Ejemplo:

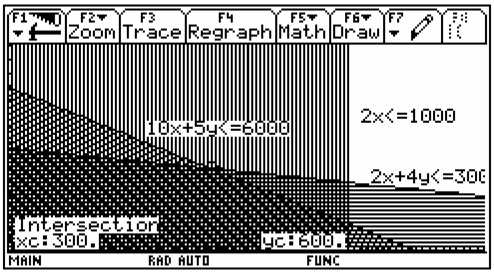
Beneficio de una compañía. Una compañía produce contrachapados usando una prensadora para pegar las chapas. Las chapas son de dos tipos diferentes A y B, y se hacen dos tipos de contrachapado, exterior e interior. Un panel de contrachapado exterior requiere dos paneles de chapas de tipo A, dos chapas de tipo B, y 10 minutos en la prensadora. Un panel de contrachapado interior requiere cuatro paneles de chapa de tipo B, no requiere chapas de tipo A, y 5 minutos en la prensadora. Cierto día se dispone de 1000 paneles de chapa tipo A y 3000 paneles de chapa de tipo B. Hay 12 prensadoras, cada una de las cuales puede prensar 4 chapas para producir el producto final. Cada prensadora puede funcionar 500 minutos al día, dando un total de 6000 minutos-máquina. El beneficio por cada panel es de 5 euros para el contrachapado interior y 6 euros para el exterior ¿cuánto debe producirse de cada producto durante este día para maximizar el beneficio?

Solución:

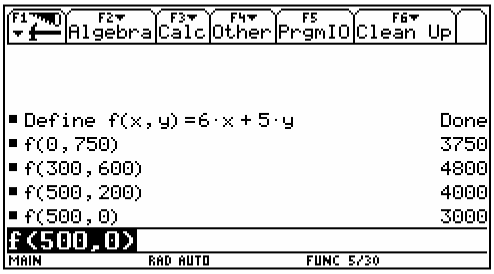
Los datos suministrados se pueden mostrar en el siguiente cuadro:

		Recursos			
		Tipo A 1000 paneles	Tipo B 3000 paneles	Prensadoras 6000 minutos	Beneficios
Productos	Exterior (x paneles)	2 de A	2 de B	10 minutos	6 euros/ panel
	Interior (y paneles)	0 de A	4 de B	5 minutos	5 euros/ panel





Evaluando la función objetivo en las esquinas de la región factible resulta:



Utilizando el principio de las esquinas: "el mayor beneficio siempre se encuentra en una de las esquinas de una región factible", resulta que el máximo beneficio se obtiene en el punto (300, 600), es decir, se debe producir 300 paneles para exterior y 600 paneles para interior.

Modelizar las situaciones siguientes:

1. El concierto. Un promotor cultural esta negociando el tiempo de la radio y la televisión para anunciar un concierto. Dispone de 20.000 euros para gastar en la promoción. Cada veinte segundos en la radio comercial cuestan 100 euros, mientras que treinta segundos de tiempo en televisión en horario especial cuesta 800 euros. Se quiere hacer al menos treinta anuncios de radio distribuidos entre varias estaciones, pero no más de sesenta anuncios en total. También se desea tener al menos quince comerciales de televisión. ¿Cuánto tiempo de radio y televisión puede programar para maximizar el tiempo de la publicidad dentro del presupuesto permitido?

¿Cuáles conceptos matemáticos son requeridos para modelizar esta situación?

¿Sería apropiada esta actividad para estudiantes de secundaria? ¿Qué cambios introducirías para generar nuevos problemas a partir de esta situación?

Diseña una actividad didáctica para modelizar esta situación con tus alumnos ¿qué tareas de evaluación propondrías?

2. **Beneficio de una fábrica**. Una fábrica de muebles tiene previsto hacer sillas y mesas, contando con 400 pies de madera y 450 horas-hombre. Se sabe que cada silla necesita 5 pies de madera y 10 horas-hombre y se obtiene una ganancia de 45 ptas por silla. Cada mesa necesita 20 pies de madera y 15 horas-hombre y se obtiene una ganancia de 80 ptas por mesa. ¿Cuántas sillas y mesas se deben fabricar para que el beneficio sea máximo? ¿Podrías generar otros problemas a partir de esta situación?

3. **Costos de una compañía**. Una compañía vendedora de café compra lotes de grano de café mezclados y luego los clasifica en café de primera calidad, estándar y sin uso. La compañía necesita por lo menos 280 toneladas de café de primera calidad y 200 de café estándar; luego compra granos de café sin clasificar (en cualquier cantidad) a dos proveedores, cuyas muestras presentan los siguientes porcentajes de grano de primera, estándar y sin uso:

Proveedor	*De primera*	*Estándar*	*Sin uso*
A	20%	50%	30%
B	40%	20%	40%

Si el proveedor A vende a 125 euros la tonelada y el B a 200 euros la tonelada, ¿cuánto debe comprar la compañía a cada uno a fin de satisfacer sus necesidades de costo mínimo?

≅ ≅ ≅ ≅

3. 4. 10. Implementación del programa MCA

El programa MCA se implementó mediante un curso-taller, de carácter intensivo, denominado "calculadoras gráficas y enseñanza del álgebra en el currículo de secundaria", que fue convocado públicamente a través del Centro de Formación Continua de la Universidad de Granada (ver anexo 1). Dicho curso-taller está dirigido a potenciales profesores de matemáticas en secundaria, es decir, estudiantes de la licenciatura de matemáticas y licenciados en ciencias quienes aspiran a ejercer como profesores de matemáticas en secundaria. El curso-taller se desarrolló en diez sesiones de tres horas cada una. Las sesiones se realizaron los días lunes, miércoles y viernes, durante cuatro semanas, desde el 5 de marzo hasta el 26 de marzo de 2001. El horario para todas las sesiones del curso fue de 16:30 a 20:00 horas.

El curso-taller pretendió que los participantes manejaran y utilizaran en su actividad docente la calculadora gráfica TI-92 plus, de manera que, con las exploraciones indicadas a lo largo del curso y a partir de aplicaciones de conceptos del Álgebra Lineal (sistemas de ecuaciones e inecuaciones lineales, entre otros), pudieran apreciar la potencialidad de esta tecnología en la resolución de problemas a través de la modelización y su consecuente interpretación y aplicación en la enseñanza.

Durante el desarrollo de cada sesión, los participantes interactúan con la calculadora gráfica de manera individual y grupal. Las actividades principales recaen sobre los profesores en formación, quienes desarrollan una serie de actividades en cada sesión, según un guión establecido para tal fin.

Los profesores en formación deberán lograr los objetivos del curso taller a través del proceso de lectura, análisis, exploración en la calculadora gráfica, identificación de relaciones, formulación de modelos, resolución de problemas y comprobación de resultados.

3.4.11. Propósito del curso-taller

Es importante recordar que el curso-taller es el medio utilizado para la aplicación del programa MCA, en consecuencia los propósitos del curso-taller están en consonancia con los objetivos del programa MCA.

Propósito General

Proporcionar a los profesores de matemáticas conocimientos en el manejo y uso de la calculadora gráfica como una herramienta didáctica en el proceso de modelización matemática de situaciones del mundo real para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Propósitos Específicos

1) Utilizar los comandos y demás funciones de la calculadora gráfica TI-92, con fines didácticos para la enseñanza del álgebra lineal
2) Modelizar situaciones del mundo real e identificar su potencialidad en la enseñanza del álgebra lineal.
3) Resolver ecuaciones, inecuaciones y sistemas lineales, extraídos de situaciones del mundo real, por diferentes métodos y mediante el uso de la calculadora gráfica.
4) Aplicar los conocimientos adquiridos en el curso-taller en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.
5) Diseñar actividades de evaluación en las matemáticas de secundaria que incluyan la modelización y la calculadora gráfica.

3.4.12. Desarrollo del curso-taller

Durante el tiempo de realización del curso, a cada participante se le asigna una calculadora gráfica, para su uso personal dentro y fuera de las sesiones de trabajo; esto se hace con el propósito de contribuir a estimular la exploración y en consecuencia la adquisición de más conocimiento y pericia en el manejo de la calculadora. En las actividades propuestas prevalece el trabajo práctico para lograr que los participantes desarrollen habilidades y destrezas en el manejo y uso de la calculadora gráfica para la elaboración de actividades didácticas.

La *enseñanza* de los contenidos del programa se realizó de manera dinámica, flexible, crítica y reflexiva mediante una secuenciación no lineal. Partimos del supuesto de que el *aprendizaje* se logra principalmente mediante el trabajo práctico individual y grupal, la creatividad en la ejercitación y realización de actividades previstas para cada sesión, la interacción entre los participantes y los miembros del grupo de apoyo (profesores del curso) y la presentación de los resultados individuales y grupales al colectivo de la clase para su discusión analítica y crítica.

3.4.13. Materiales y recursos empleados

Cada participante dispone de los siguientes materiales y recursos:

1. Un folleto descriptivo del programa del curso-taller.
2. Una calculadora gráfica TI-92 plus, durante el tiempo de desarrollo del curso.
3. Un guión de las actividades a desarrollar en cada sesión.
4. Un cuadernillo para anotaciones diarias.
5. Un manual de usuario de la calculadora gráfica (resumido).
6. Material de apoyo: artículos sobre aplicaciones de las calculadoras gráficas y la modelización, ensayo sobre los orígenes de la programación lineal y direcciones electrónicas para consulta de documentos en internet.
7. Transparencias para presentación de actividades en cada sesión.

Durante las sesiones del desarrollo del curso-taller se dispuso de una pantalla visualizadora (viewscreen) para la proyección ampliada a toda la clase del trabajo con la calculadora.

Cada participante tuvo a su disposición un disquete para guardar sus archivos de trabajo con la calculadora gráfica.

Además se contó con un ordenador para interactuar con la calculadora gráfica conectado a internet. En ese ordenador los participantes hicieron prácticas de guardado de sus archivos personales, y también hicieron transferencia de archivos de dominio público en internet a sus calculadoras.

También se contó con un retroproyector específico de transparencias.

3.4.14. Evaluación de los participantes en el programa

La evaluación de los logros de los participantes se realiza tomando en cuenta las actividades desarrolladas, previstas en los cuadernillos de trabajo de cada sesión. Además se considera la asistencia y participación a todas las sesiones. Esto ayuda a evidenciar los logros de los objetivos del programa así como a reorientar aspectos para mejorar su desarrollo.

El proceso de evaluación se lleva a cabo analizando el grado de articulación de las componentes del programa: la calculadora gráfica, la modelización matemática y el álgebra lineal en cada actividad didáctica desarrollada. Este análisis se realiza tomando en cuenta las competencias didácticas manifestadas, considerando como base los siguientes *indicadores de la competencia didáctica:*

- Interrelación entre temas
- Generación de actividades de motivación
- Propuestas de actividades prácticas de carácter grupal e individual
- Establecimiento de actividades de refuerzo
- Incorporación de la modelización para aplicación de conceptos y destrezas
- Apertura en la posibilidad de uso de la CG
- Manejo de diferentes recursos y materiales
- Utilización de diferentes sistemas de representación
- Planteamiento de situaciones del entorno del alumno
- Propuesta de preguntas abiertas
- Resolución sistemática y secuenciada de las situaciones planteadas.

- Propuesta de actividades de evaluación no convencionales
- Empleo de la CG en el momento de abstracción (p.ej. para experimentar)
- Uso de la CG como recurso para agilizar y mantener el interés por el tema a enseñar.

Para el análisis de la articulación de los componentes del programa MCA, se enfatiza en identificar elementos reveladores de presencia o ausencia de la misma.

Para la aproximación empírica al contraste de las conjeturas, expuestas en el apartado 3.3, se estructura el diseño de la investigación (ver figura 3.5.2) en el cual se contempla una complementariedad metodológica cualitativa y cuantitativa para el desarrollo del estudio. En dicho diseño se esquematiza el procedimiento seguido para el desarrollo de la investigación.

3.5. Diseño de la investigación

Para llevar a cabo este estudio, de carácter evaluativo, se ha utilizado una aproximación de complementariedad desde la perspectiva cualitativa y la cuantitativa de la investigación (ver figura 3.5.1). La primera proporciona conocimientos y comprensión sobre lo que acontece en la aplicación del programa desde el enfoque de los agentes implicados (profesores en formación y observadores participantes). Es decir, permite acceder a los logros del programa MCA, desde la subjetividad de los implicados, en lo concerniente a la integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas.

La segunda perspectiva, la cuantitativa, permite valorar objetivamente los logros del programa en relación con la integración de la modelización matemática y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico escolar; así como los posibles cambios actitudinales de los participantes hacia los componentes del programa MCA.

La muestra de profesores en formación (también llamada muestra teórica) se asumió sin tomar en cuenta representatividad estadística, puesto que los participantes se inscribieron voluntariamente en el curso-taller ofertado de manera pública (ver anexo 1). Bajo esta perspectiva, es decir la cuantitativa, decimos que la muestra de futuros profesores considerada en el estudio tiene un carácter intencional (García Ferrando, 2000)

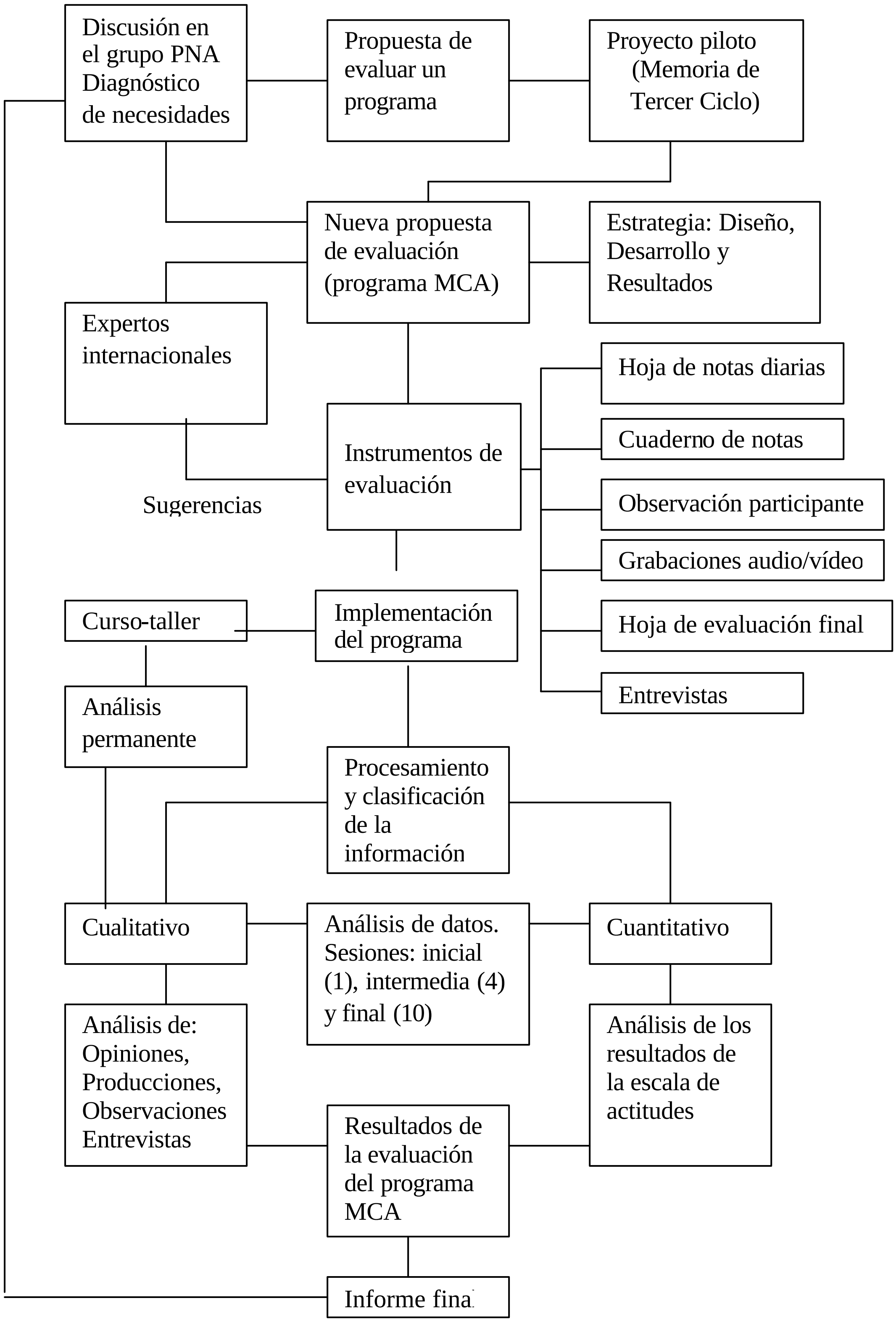
Figura 3.5.1. *Aproximación metodológica del estudio*

En el campo educativo la complementariedad constituye una vía para lograr explicar situaciones concretas. Fundamentalmente en investigación evaluativa, la complejidad del hecho evaluativo sugiere aproximaciones que logren dar cuenta del proceso a evaluar de forma integral, holística y de calidad con el propósito de obtener información fiable que sirva de base para la posterior toma de decisiones que contribuyan al perfeccionamiento del programa. En este sentido se justifican diseños que integren en sí mismos aproximaciones metodológicas complementarias. En educación matemática hay trabajos de investigación evaluativa que utilizan esa integración tales como Bedoya (2002) y González (2000a, 2000b). La triangulación metodológica y de investigadores es altamente recomendada por Cohen & Manion (1990) por ser "...una técnica útil cuando un investigador aborda el estudio." (p.341). En esta investigación, con el propósito de alcanzar niveles de descripción, análisis y explicación del funcionamiento del programa MCA e identificar aspectos significativos relativos a su diseño (en términos de su estructura, coherencia y aplicabilidad), su funcionamiento en la práctica (desarrollo e implicaciones) y los alcances de acuerdo a lo previsto, luego de su implementación (resultados), se opta por un *estudio de caso* que incorpora técnicas cualitativas y cuantitativas de investigación.

Se recurre al método de estudio de caso por ser una metodología privilegiada en la investigación educativa porque ella requiere del uso de "...diversas fuentes de evidencias y por tanto diversos métodos de investigación" (Martínez Mediano, 1997, p.104). El foco de la investigación se centra en los vínculos entre el diseño del programa, su implementación -los procesos- y los efectos del programa. El diseño a partir de estudios de caso se opta porque se trata de estudiar con profundidad el contexto de aplicación y los contenidos del programa (Yin, 1987). La importancia de este tipo de estudios de caso radica en que permite encontrar aspectos pretendidos en el programa y sus alcances. Desde la perspectiva cualitativa, Miles & Huberman (1994), definen *caso* como un fenómeno de algún tipo que ocurre en un área de influencia. El caso queda así caracterizado por un foco y su entorno. En este trabajo el foco es el programa de formación MCA. El área de influencia está delimitada por el contexto, conceptos, muestra, tiempo y equipo de apoyo, entre otros.

Para profundizar en la búsqueda de información pertinente al objeto de investigación se acude a técnicas cualitativas y cuantitativas de recogida de información. Con este propósito se diseñaron instrumentos para tales efectos. El diseño de nuestra investigación se esquematiza en la figura 3.5.2.

Figura 3.5.2. *Esquema de la investigación*



3.6. Descripción de la experiencia

3.6.1. Participantes

El desarrollo del programa se llevó a cabo a través de un curso-taller ofertado públicamente y canalizado por el Centro de Enseñanzas Propias de la Universidad de Granada, dirigido a potenciales profesores de matemáticas de secundaria. Se inscribieron diez participantes en el curso de formación sobre modelización y calculadora gráfica en la formación inicial de profesores de matemáticas, denominado "Calculadora Gráfica y Enseñanza del Álgebra en el Currículo de Secundaria". Los participantes siguieron un programa de formación cuyo diseño se sustenta sobre los organizadores del currículo: estructura conceptual, modelización y calculadora gráfica sobre el tópico matemático de álgebra lineal.

Los potenciales profesores de matemáticas de secundaria que participaron fueron: dos (2) licenciados en Matemáticas especialidad Metodología, un (1) licenciado en Matemáticas, especialidad de Matemática Fundamental, un (1) licenciado en Física, un (1) estudiante de tercer año de la licenciatura en Matemáticas, tres (3) estudiantes del quinto año de Matemáticas, especialidad Metodología y dos (2) estudiantes del quinto año de la especialidad de Matemática Fundamental.

Es importante señalar que el licenciado en Matemática Fundamental y el licenciado en Física habían recibido la formación del Curso de Aptitud Pedagógica (CAP). Asimismo, es conveniente subrayar que, los licenciados en Matemáticas, especialidad Metodología, reciben una formación didáctica concretada en cuatro asignaturas, a saber: Supuestos de la Educación, Métodos Estadísticos aplicados a la Educación, Didáctica de la Matemática en el Bachillerato y Prácticas de Enseñanza en Instituto. Las demás asignaturas de su plan de estudios corresponde a una formación en matemáticas fundamentales (Rico, 1992). Contrariamente, el estudiante de tercer año y los dos estudiantes del quinto año de Matemática Fundamental no tienen una formación didáctica en su carrera. Todo su plan de estudios está conformado por su área disciplinar de la ciencia básica.

En resumen, los participantes en el estudio son diez sujetos, profesores de matemáticas en formación, los cuales participan de forma voluntaria, con base en criterios de ser potencial profesor de matemáticas y no estar en ejercicio docente.

3.6.2. Contexto de aplicación del programa

La aplicación del programa en cuestión se efectuó en las instalaciones de la Facultad de Ciencias de la Educación. Específicamente se dispuso de la sala de seminarios el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y el aula de informática de esta Facultad. La sala de seminarios (ver figura 3.6.2.1) permitió el agrupamiento de los participantes de acuerdo a las necesidades surgidas en cada sesión de trabajo, tanto para las realizadas por los profesores en formación como las llevadas a cabo por los observadores participantes. El aula de informática cuenta con una distribución prefijada de las mesas con sus ordenadores (ver figura 3.6.2.2).

Durante el desarrollo de las actividades, tanto en la sala de seminarios del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada como en el aula de informática, se contó con una calculadora para cada participante, facilitadas por el sistema de préstamo de la empresa Texas Instruments. Ambas salas ofrecían las condiciones mínimas para desarrollar las actividades del curso-taller.

La disposición de las mesas en cada una de las aulas utilizadas para realizar el curso-taller se muestran en las figuras 3.6.1 y 3.6.2. La distribución de las mesas en la sala de informática no se reestructuró para efectos del curso. Por el contrario, en la sala de seminarios si se organizaron las mesas de acuerdo a la dinámica prevista en el curso-taller, es decir de tal manera que se favoreciera la visualización de las proyecciones y la interacción entre participantes e investigadores.

Figura 3.6.2.1. *Distribución de las mesas en la sala de seminarios*

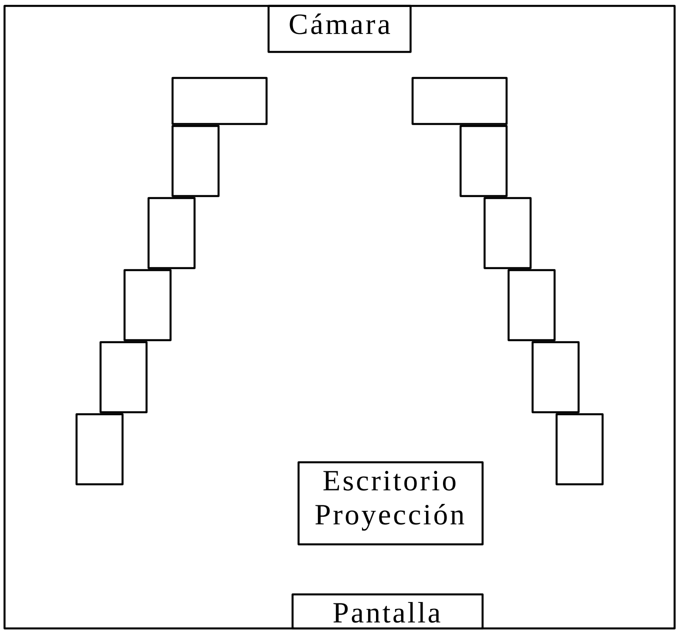
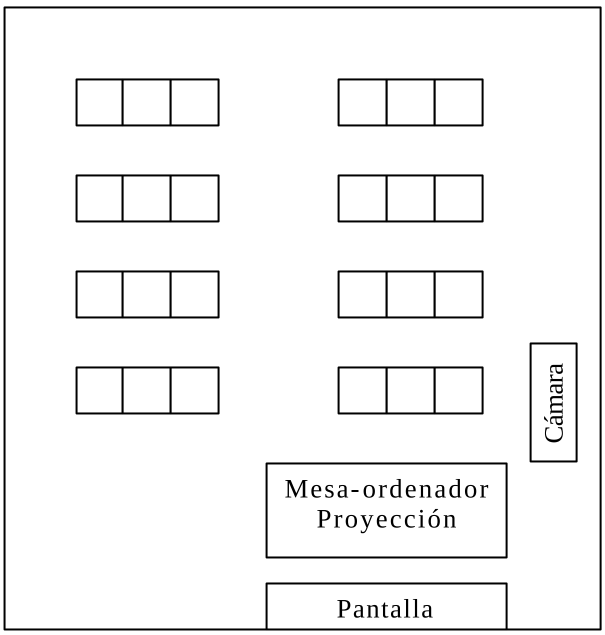


Figura 3.6.2.2. *Distribución de las mesas en la sala de informática*



3.7. Consideraciones sobre la evaluación del programa

La planificación de la evaluación se efectuó orientados por las cuestiones siguientes, sugeridas por Forns & Gómez (1996): ¿Para qué evaluar? ¿Qué aspectos del programa se evalúan? ¿Cuándo evaluar? ¿A quién evaluar? ¿Qué evaluar del profesor en formación? Estas preguntas están en correspondencia con las dimensiones contempladas en nuestra propuesta de evaluación. Por otra parte, para estructurar las respuestas a esas preguntas se consideraron algunos aspectos tomados de la propuesta evaluativa de programas educativos de Pérez Juste (1995, 2000).

El esquema seguido para la evaluación del programa contempla tres momentos significativos, es decir, la evaluación del diseño del programa, la evaluación del desarrollo y la evaluación de los resultados del programa MCA. Para cada uno de estos momentos hemos identificado ciertas dimensiones objetos de análisis, especificándose en cada una de ellas los aspectos a evaluar y sus respectivos indicadores.

A continuación se presentan cada uno de los momentos a evaluar y las especificaciones relativas a cada uno de ellos.

3.7.1. Evaluación del diseño del programa

Para la evaluación del diseño del programa Pérez Juste (1995, 2000) sugiere tomar en cuenta las dimensiones de calidad del diseño del programa y la viabilidad del mismo (ver tabla 3.7.2). Siguiendo esta recomendación los aspectos que se evalúan en la dimensión calidad del diseño son: el contenido del programa, la calidad técnica y la evaluabilidad del mismo.

La *evaluación del contenido del programa* se realiza atendiendo a los indicadores siguientes: 1) la actualidad de sus contenidos (modelización, calculadora gráfica y álgebra lineal), 2) la relevancia o pertinencia didáctica de los contenidos y, 3) la adecuación de los temas al contexto y a las demandas educativas, que en esta investigación está referida a los contenidos del programa MCA, es decir, la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal, así como su integración en el diseño de actividades didácticas.

La *evaluación de la calidad técnica* se lleva a cabo tomando en cuenta los indicadores siguientes: 1) establecimiento de objetivos, actividades, medios y mecanismo de evaluación en el programa; 2) congruencia entre los objetivos del programa y las necesidades formativas de los futuros profesores; y, 3) coherencia interna entre los componentes del programa y de éstos con los objetivos.

La evaluación de la *evaluabilidad* es realizada considerando el indicador suficiencia de la información referida a la metodología y el contenido del programa y la posibilidad de plantear opciones de mejora del programa a partir de esa información. En este caso se tendrá en cuenta si la modelización, la calculadora gráfica y el álgebra lineal se entrelazan metodológicamente para integrarse en el diseño de actividades didácticas dirigidas a potenciales alumnos de secundaria, si la información recogida a partir de esos organizadores es interpretable y muestra vías de mejora en su organización.

En la dimensión evaluativa de *la pertinencia del diseño* el aspecto a evaluar es la respuesta a las necesidades o carencias. El indicador para esta dimensión es la detección de necesidades de formación de los futuros profesores de matemáticas de secundaria, respecto a su conocimiento didáctico del contenido matemático para la planificación de actividades didácticas.

La dimensión de *viabilidad del diseño* dirige la atención hacia la congruencia entre metas, medios y recursos, para lo cual se fija su atención en los indicadores siguientes:1) la respuesta del programa MCA a demandas de los profesores de matemáticas en formación, 2) previsión de temporalización para su desarrollo, 3) Aprobación del programa por el equipo de apoyo y, 4) existencia de los medios necesarios para su implementación.

3.7.2. Procedimiento seguido en la evaluación del diseño del programa

La evaluación del diseño se efectúa recurriendo a las discusiones con el equipo de investigación y miembros del grupo Pensamiento Numérico y Algebraico (PNA). La evaluación del diseño se realizó en dos momentos. En el estudio piloto, primera versión aplicada del curso-taller efectuada en el año 2000, surgieron recomendaciones de cambio en lo concerniente a

> *la dedicación de más horas y una adecuada distribución del tiempo entre las actividades teóricas y prácticas para el desarrollo de programas similares, enfatizando fundamentalmente la actividad práctica. Esto ayudaría a alcanzar un mejor aprovechamiento del contenido del Programa de Formación, garantizando de esta manera resultados más significativos en los profesores en formación.* (Ortiz, 2000a, p.134).

Asimismo, otra de las recomendaciones dadas fue la de "incluir en el Programa más actividades didácticas que propicien reflexiones sobre la evaluación de los alumnos de secundaria con el uso de la modelización y la calculadora gráfica." (p.134).

En su segunda versión, que corresponde al estudio empírico de este trabajo y que fue implementada en el mes de marzo del año 2001, la revisión de todo lo concerniente al diseño se efectuó en el proceso de elaboración y establecimiento de los contenidos y actividades previstos para cada sesión, así como los medios requeridos. De igual manera que en la primera versión, el equipo de investigación y el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico participaron en la evaluación del diseño y en su planificación.

Tabla 3.7.2. *Evaluación del diseño del programa*

Dimensiones	**Aspecto a evaluar**	**Indicadores**
Calidad del diseño	Contenido del programa	▸ Actualidad de los contenidos de modelización matemáticas, de calculadora gráfica y del álgebra lineal escolar, ▸ Relevancia o pertinencia didáctica de los contenidos. ▸ Adecuación de los temas al contexto y a las demandas educativas.
	Calidad técnica	▸ Establecimiento de objetivos, actividades, medios y mecanismo de evaluación. ▸ Congruencia entre los objetivos y la necesidad formativa de los profesores en formación. ▸ Coherencia interna entre los componentes del programa y de éstos con los objetivos.
	Evaluabilidad	▸ Suficiencia de la información referida a la metodología y el contenido del programa.
Pertinencia del diseño	Respuesta a necesidades o carencias	▸ Detección de necesidades de formación, de los futuros profesores de matemáticas, en el área que ofrece el programa.
Viabilidad del diseño	Congruencia entre metas, medios y recursos	▸ Respuesta del programa a demandas de los profesores en formación. ▸ Previsión de la temporalización del programa MCA. ▸ Aprobación del programa por el equipo de apoyo. ▸ Existencia de medios necesarios para la implementación del programa MCA.

3.7.3. Evaluación del desarrollo del programa

La complejidad del acto educativo conduce a mantener una atención permanente al proceso de aplicación del programa, de tal manera que se pueda facilitar su correcto desarrollo. Esta evaluación pretende "describir y juzgar las actividades del proceso" (Colás, 1997c, p.57), para tomar decisiones que reorienten, si es necesario, los objetivos y razón de ser del programa.

En la evaluación de proceso, realizada durante el desarrollo del programa MCA, se consideraron dos dimensiones de análisis: una *cognitiva* y otra *operativa* (ver tabla 3.7.3). La primera relacionada con los niveles de aprovechamiento de los contenidos, es decir, el efecto del curso-taller sobre el conocimiento didáctico de los profesores en formación que participaron en el mismo. La segunda dimensión, es decir la operativa, estuvo referida a la puesta en práctica del programa MCA.

La evaluación de la dimensión cognitiva considera indicadores objetivos y subjetivos. En estos últimos se tienen en cuenta los aspectos afectivos y opináticos. Se establecen unos indicadores para operativizar la evaluación del programa MCA.

Los indicadores objetivos son los siguientes: 1) generación de actividades de motivación, 2) incorporación de la modelización, para aplicación de conceptos y destrezas, en el planteamiento de situaciones problema del entorno del alumno, 3) empleo de la CG en las actividades didácticas de contenido algebraico, 4) integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas, 5) resolución sistemática y secuenciada de los procedimientos algebraicos expuestos, y 6) propuesta de actividades de evaluación no convencionales.

El indicador subjetivo para evaluar la dimensión cognitiva considera la percepción de los aprendizajes logrados por los participantes, en relación con los componentes del programa MCA.

Dentro de la dimensión operativa se trata de evaluar las actividades, las secuencias y la temporalización. Para las *actividades* consideramos como indicador la adecuación la metodología utilizada para el desarrollo del programa. En las *secuencias* el indicador fue el seguimiento de la secuencia de las actividades programadas. La temporalización se evaluó tomando en cuenta los indicadores siguientes: 1) el cumplimiento del cronograma establecido, 2) respeto a la planificación (espacio, tiempo, apoyos y recursos), 3) rigidez o flexibilidad en la aplicación del programa y 4) ajuste entre los planes institucionales de la Universidad de Granada y el desarrollo del programa.

Tabla 3.7.3. *Evaluación del desarrollo del programa*

Dimensiones	Propuesta a evaluar	Indicadores	Instrumentos y procedimientos Sesiones 1, 4 y 10
Cognitiva (Niveles de "aprovechamiento" de los contenidos. Efecto en el conocimiento didáctico)	Objetiva	▸ Generación de actividades de motivación ▸ Incorporación de la modelización para aplicación de conceptos y destrezas, planteando situaciones del entorno del alumno ▸ Empleo de la CG en las actividades didácticas ▸ Integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas ▸ Resolución sistemática y secuenciada de los procedimientos algebraicos expuestos. ▸ Proposición de actividades de evaluación no convencionales	▸ Cuadernos de notas ▸ Tarea fuera del aula ▸ Vídeo ▸ Hoja de observación
	Subjetiva/ Afectiva (Opinática)	▸ Percepción de aprendizajes logrados, por los participantes, en relación con los componentes del programa MCA.	▸ Hoja de notas diarias
Operativa o de puesta en práctica	Actividades	▸ Adecuación de la metodología utilizada para el desarrollo del programa.	▸ Hoja de evaluación
	Secuencias	▸ Seguimiento de la secuencia de las actividades programadas	▸ Hoja de evaluación
	Temporalización	▸ Cumplimiento de la temporalización ▸ Respeto a la planificación (espacio tiempo, apoyos y recursos) ▸ Rigidez o flexibilidad en la aplicación del programa MCA ▸ Coherencia institucional entre UGR y el desarrollo del programa MCA	▸ Hoja de evaluación ▸ Vídeo

3.7.4. Evaluación de los resultados del programa

Esta evaluación tiene como propósito ayudar a valorar el programa en cuanto a su impacto. La evaluación de los resultados, junto a la del diseño y la del proceso, conformaron la evaluación del programa en cuestión. Las dimensiones consideradas para esta evaluación son: 1) logros cognitivos-didácticos (objetivos), 2) logros cognitivos-didácticos (subjetivos), 3) variaciones afectivas y actitudinales, 4) rasgos estructurales del programa, 5) funcionamiento operativo y logístico (ver tabla 3.7.4).

Los logros del programa se revelan en la comprobación y contraste de sus resultados de la aplicación del mismo. En la dimensión objetiva de los *logros cognitivos y didácticos* se evalúa el cumplimiento de los objetivos del programa relacionados directamente con el aspecto cognitivo. En ese sentido los indicadores empleados son los siguientes: 1) empleo de la CG como recurso didáctico, 2) incorporación de la modelización matemática en el diseño de unidades didácticas, 3) integración de la modelización y la CG en el diseño de unidades didácticas. Los instrumentos que aportaron información para la evaluación del programa en esta dimensión objetiva fueron el cuaderno de notas, las tareas, hojas de observación y los vídeos.

En la dimensión subjetiva de los logros cognitivos-didácticos se evalúan los aspectos siguientes: 1) percepción del aprovechamiento de los contenidos del programa MCA y 2) percepción de la aplicabilidad de los contenidos del programa MCA en el ejercicio profesional. Para evaluar estos aspectos se consideran los siguientes indicadores: 1) expresión de aprovechamiento y valoración didáctica de los contenidos del programa MCA, 2) visualización de aspectos, de los componentes del programa, aplicables en actividades reales y 3) satisfacción de los participantes. Los instrumentos utilizados para aportar información en esta dimensión fueron la hoja de notas diarias y la entrevista.

El aspecto a evaluar en la dimensión afectiva/actitudinal fue la actitud inicial y final hacia las componentes del programa MCA. El indicador para esta dimensión es la actitud de los participantes hacia las componentes del programa MCA al inicio del curso-taller y su contraste con la actitud al finalizar el mismo. El instrumento utilizado es la escala de actitudes.

En la dimensión de rasgos estructurales del programa los aspectos a evaluar son: 1) adecuación de lo pautado con lo ejecutado, 2) coherencia interna y 3) Adecuación tiempo/contenidos. Junto a estos aspectos a evaluar se tienen los indicadores siguientes: 1) cumplimiento de actividades en cada sesión, 2) riqueza de los contenidos en congruencia con los objetivos, 3) dinámica participativa y dialógica ajustada a la estrategia metodológica (curso-taller) y 4) realización de las actividades en el tiempo previsto. Los instrumentos para esta dimensión fueron la hoja de evaluación final y el guión de observación.

En la dimensión del funcionamiento operativo/logístico los aspectos a evaluar son el manejo y disponibilidad de recursos por una parte y la toma de decisiones por la otra. Los indicadores considerados en esta dimensión son: 1) la disposición de medios y recursos requeridos para desarrollar el programa, 2) las condiciones físico-ambientales del aula donde se desarrolló el programa, 3) apoyo y participación de colaboradores, y 4) plan de seguimiento en el tiempo (impacto del programa MCA). Los instrumentos en esta dimensión fueron la hoja de evaluación final y la entrevista aplicada a participantes del curso-taller un año después de su realización y actualmente en ejercicio.

La valoración atendió a criterios y a referencias; considerando su especificación y su aplicación. Los *criterios* fueron: eficacia, eficiencia, efectividad, satisfacción e impacto. La eficacia referida al grado de logro de los objetivos propuestos en el programa MCA. La eficiencia relacionada con los medios disponibles y las circunstancias en que el programa se aplicó. La efectividad se refiere a los efectos beneficiosos no previstos. La satisfacción está referida a los usuarios. El impacto del programa se relaciona con el contexto donde se aplica. Las *referencias* se corresponden con la visualización personalizada del progreso de los participantes en el diseño de actividades didácticas.

La continuidad del programa se relacionó con las decisiones, la incorporación de mejoras y el plan de seguimiento. Las *decisiones* atendieron el grado de participación y colaboración entre los responsables del programa en lo relativo a duración y estructura del programa. La *incorporación de mejoras* evaluó la existencia de un proceso institucionalizado de evaluación, de forma que los resultados obtenidos dieran paso a posibles nuevas programaciones en beneficio de la aplicación del programa MCA. El *plan de seguimiento* corroboró la existencia de alguna forma de identificación de posibles efectos del programa objeto de evaluación.

Además de las dimensiones de análisis, que se consideraron, se incluyeron las características de los profesores en formación que participaron en el programa, los objetivos que guían la evaluación del programa, las variables características de la instrucción (organización, contenido, metodología), los sistemas taxonómicos de conductas educativas susceptibles de ser evaluados (actitudes y percepción, conocimiento didáctico) y las sesiones de trabajo como intervalos en que se realiza la evaluación.

En cuanto a las características de los participantes, fueron profesores de matemáticas en formación, unos recién graduados universitarios y otros estudiantes de los últimos años de la carrera de matemáticas de la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada.

El objetivo de la evaluación del programa es contribuir al diseño de un programa de formación inicial que enfatice en la incorporación de componentes similares al programa MCA objeto de evaluación en este trabajo. La evaluación pretende identificar fortalezas y debilidades, aciertos y desatinos y en consecuencia la eliminación, incorporación o rediseño de aspectos concernientes a la estructura del programa, es decir a su perfeccionamiento.

Los aspectos del programa objeto de evaluación fueron las variables relativas a la instrucción; es decir, organización, contenido y metodología. Todo esto a la luz de la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas, el proceso de modelización matemática en la enseñanza del álgebra lineal, el álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real y el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

Las conductas evaluadas en los profesores en formación fueron las actitudes y dominio cognitivo. Es decir, la disposición al uso de la calculadora gráfica y la modelización en la enseñanza del álgebra lineal, el manejo instrumental de la calculadora gráfica y la articulación de la calculadora gráfica y la modelización como organizadores del currículo. Así como el conocimiento didáctico, es decir, el empleo de estos recursos para planificar tareas de enseñanza y aprendizaje de matemáticas.

3.7.5. Procedimiento seguido en la evaluación del programa

Los momentos en que se realizó la evaluación estuvieron definidas por el inicio del curso-taller, cada una de las sesiones de trabajo (en particular enfatizamos en las sesiones 1, 4 y 10), con miras a una evaluación de proceso y el final del curso-taller. Al inicio del curso-taller se aplicó un cuestionario de escala de actitudes, al final de cada sesión se aplicó un cuestionario abierto, denominado hoja de notas diarias y al final del taller se aplicó nuevamente el mismo cuestionario de actitudes inicial y un instrumento de valoración global del curso-taller.

La evaluación del programa se entiende fundamentalmente en términos de proceso, de manera permanente; para ello se identifican tres etapas o momentos en la evaluación, cada uno válido en sí mismo. Sin embargo, a efectos de la investigación éstas tienen sentido sólo si se les considera en conjunto. Dichas etapas se identifican como: evaluación del diseño, evaluación del desarrollo y evaluación de los resultados.

En las tablas 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4 se resumen los aspectos considerados en la evaluación del programa para cada uno de los momentos.

Tabla 3.7.4. *Evaluación de los resultados del programa*

Dimensiones	**Aspectos a evaluar**	**Indicadores**
Logros cognitivos y didácticos (Objetivos)	Cumplimiento de los objetivos cognitivos	▸ Incorporación de la modelización en el diseño de unidades didácticas ▸ Empleo didáctico de la CG ▸ Integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas ▸ Incorporación de la evaluación con CG
Logros cognitivos y didácticos (Subjetivos)	Percepción del aprovechamiento de los contenidos del programa MCA Percepción de la aplicabilidad de los contenidos en el ejercicio profesional	▸ Expresión de aprovechamiento y valoración didáctica de los contenidos (comparación del progreso) ▸ Visualización de aspectos de los componentes del programa MCA, aplicables en actividades reales. ▸ Satisfacción
Variaciones Afectivas/ Actitudinales	Actitud inicial y final hacia los componentes del programa	▸ Valoración de los componentes del programa al inicio en contraste con la valoración final

Tabla 3.7.4. *Evaluación de los resultados del programa MCA*

(Continuación)

Dimensiones	Aspectos a evaluar	Indicadores
Rasgos estructurales del programa MCA	Adecuación de lo pautado con lo ejecutado. Coherencia interna. Adecuación tiempo/ contenidos	▸ Cumplimiento de actividades en cada sesión ▸ Riqueza de los contenidos acorde con los objetivos ▸ Dinámica participativa y dialógica ajustada a la estrategia metodológica (curso-taller) ▸ Realización de las actividades en el tiempo previsto
Funciona-miento operativo/ logístico	Manejo y disponibilidad de recursos. Decisiones.	▸ Disposición de medios y recursos requeridos para desarrollar los contenidos ▸ Condiciones físico-ambientales del aula ▸ Apoyo y participación de colaboradores ▸ Seguimiento en el tiempo

Las tablas 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4 sintetizan los elementos a considerar en el análisis de las dimensiones tomadas en cuenta en la valoración del programa contemplado en la presente investigación. Se optó por evaluar en tres etapas o momentos, es decir, el diseño (antes de su aplicación), el proceso (durante su aplicación) y los resultados (al final de su aplicación). Las dimensiones establecidas se tomaron considerando lo propuesto por Pérez Juste (1995, 2000) relativo a los aspectos que deben tomarse en cuenta para la evaluación de un programa educativo. En este caso, hemos asumido aquellas dimensiones que se adaptan a la finalidad y estructura de programa implementado, expresadas en el diseño del programa, el proceso de aplicación del mismo y los resultados obtenidos.

3.8. Técnicas e instrumentos de recogida de información

En coherencia con la triangulación sobre el método, acudimos a técnicas cualitativas y cuantitativas de recogida de información. Con este propósito se recurre a instrumentos diseñados para tales efectos. En cuanto a las técnicas de recogida de datos, se recurre a técnicas convergentes tales como la observación participante. Además se incorporan otras técnicas distintas a la observación como una manera de evitar lo que Cohen & Manion (1990) denominan ceguedad y pérdida de perspectiva del observador. Cada una de las técnicas convergentes trabaja según su propio procedimiento, pero coinciden en una serie de puntos que sirven de base en la documentación definitiva de los datos.

Ese enfoque de triangulación metodológica, asumido para acercarse a los propósitos de la evaluación del programa, conduce a la elección de los instrumentos en congruencia con ese abordaje. De ahí que para indagar el ámbito cognitivo se recurre al análisis de las producciones de los participantes, plasmadas en sus cuadernos de notas y en las hojas de notas diarias y, para estudiar sus actitudes se acude a una escala.

Es decir, para la recogida de información se contó con los siguientes instrumentos: el cuestionario de escala de actitudes, la hoja de notas diarias, el cuaderno de notas de los participantes e investigadores, el guión de observación participante, la hoja de evaluación final del curso y las entrevistas post-curso.

Por otra parte se optó por el registro de la información con cámara de vídeo y grabador-reproductor para la filmación y grabación en cada sesión. Esta información y la recogida con el guión de observación permiten complementar las observaciones y profundizar en el análisis de algunos aspectos considerados relevantes para la investigación. El uso del audio y el vídeo favorece la captación de la totalidad de las expresiones verbales y gestuales de cada uno de los participantes y deja libertad al investigador para atender otros focos de interés en la investigación o tomar notas esclarecedoras en su cuaderno de las participaciones e interacciones de los participantes. A pesar que estos dispositivos pudieran generar algún tipo de aprensión en los participantes.

3.8.1. Escala de actitudes

Con el propósito de captar las actitudes de los participantes consideramos apropiado administrar una escala de actitudes en dos momentos, al inicio del curso-taller y al final del mismo.

En este trabajo se utiliza la misma escala de actitudes[2] descrita en Ortiz, Rico & Castro (2001). Esta escala se diseñó (ver anexo 3) para medir las actitudes de profesores en formación hacia la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. La misma fue construida en correspondencia con la modelización, calculadora gráfica, álgebra lineal y actividades didácticas; y con las dimensiones del currículo. La escala permite conocer las actitudes de los participantes hacia cada componente del programa MCA en lo referente al alumno, al profesor, al contenido matemático y la evaluación. Para la valoración de cada ítem, por parte de los profesores en formación, se presentan cinco opciones para que los participantes marquen con una equis (X) la alternativa que consideran conveniente a cada ítem. Las mismas fueron: totalmente en desacuerdo (TD), parcialmente en desacuerdo (PD), neutral (N), parcialmente de acuerdo (PA) y totalmente de acuerdo (TA). Por otra parte, para efectos del análisis de la escala se le asigna una valoración numérica del 1 al 5 a cada opción de respuesta, tal como se especifica en la tabla 3.8.1.

---

[2] Las escalas de actitudes se utilizan para medir el grado en que un individuo posee cierta habilidad o característica (Ary, Jacobs & Razavieh, 1990). Ese grado de posesión se utiliza para diversos fines, específicamente para fines de investigación. En el ámbito de la evaluación de programas se aplican para determinar cuantitativamente la actitud de los sujetos (Colás, González, García & Rebollo, 1997).

Tabla 3.8.1

Valoración	Puntuación
Totalmente en desacuerdo (TD)	1
Parcialmente de acuerdo (PD):	2
Neutral (N)	3
Parcialmente de acuerdo (PA)	4
Totalmente de acuerdo (TA)	5

Este cuestionario se aplicó al inicio y al final del desarrollo del programa. La aplicación inicial tuvo como propósito captar la actitud de entrada de los profesores en formación, hacia los componentes del programa, para contrastarla con los resultados de la aplicación de la escala al finalizar el curso-taller a manera de identificar variaciones.

3.8.2. Hoja de notas diarias

Con el propósito de hacer un seguimiento al desarrollo del programa MCA al final de cada sesión de trabajo del curso, se suministró a los participantes una hoja de notas diarias que como su nombre indica está dirigida a obtener información acerca del transcurrir diario del desarrollo del programa (ver anexo 4).

Este instrumento permite recabar información individual sobre los niveles de aprovechamiento del curso-taller referidos al manejo de comandos de la calculadora, a la aplicación de la modelización y a los aspectos didácticos, así como las principales dificultades encontradas en cada sesión. En dicha hoja de notas se plantearon las siguientes cuestiones a las cuales los participantes debían responder: 1) ¿Cuáles comandos y funciones de la calculadora gráfica utilizaste en esta sesión? y ¿cuáles te serían más útiles para diseñar actividades didácticas? ¿por qué?, 2) ¿Qué utilidad le atribuyes a la modelización para el diseño de actividades didácticas?, 3) De lo visto en esta sesión, ¿qué incorporarías en el diseño de actividades para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria?, 4) Menciona las dificultades confrontadas con el proceso de la modelización, con la calculadora gráfica o con el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico, y 5) Escribe otras recomendaciones de interés para la enseñanza del álgebra lineal. Las respuestas a estas cuestiones nos ayudaron a tener una visión de proceso del curso sesión por sesión, la evolución de los participantes, los niveles de logro y los inconvenientes del mismo.

En relación con la primera pregunta propuesta en la hoja de notas diarias, es decir: ¿Cuáles comandos y funciones de la calculadora gráfica utilizaste en esta sesión? y ¿cuáles te serían más útiles para diseñar actividades didácticas? ¿por qué?. Con la respuesta a esta pregunta los participantes suministran información individual sobre los niveles de aprovechamiento del curso-taller, respecto a lo aprendido sobre la calculadora gráfica y sobre sus posibilidades de aplicación didáctica.

La segunda pregunta propuesta fue la siguiente: ¿Qué utilidad le atribuyes a la modelización para el diseño de actividades didácticas? Con esta cuestión se obtiene información respecto a la introducción de aspectos relevantes de la modelización matemática, tanto para la enseñanza como para el aprendizaje y los aspectos relacionados con su aplicación como proceso. Para analizar las respuestas se considera la utilidad didáctica y la comprensión del proceso. La utilidad didáctica de la modelización comprende su aplicabilidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las dificultades para su aplicación y su articulación con la calculadora gráfica y el álgebra lineal

La aplicabilidad en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas está referida a la ayuda que aporta la modelización a la motivación, exploración, abstracción y desafío intelectual de los alumnos; así como también la posibilidad de plantear y resolver problemas de la vida cotidiana y en consecuencia la viabilidad para introducirla en los currículos de secundaria.

Las dificultades para su aplicación sugieren el cuidado que se debe tener en la selección de preguntas a proponer en las situaciones a modelizar, su variedad de interpretaciones y en consecuencia la exigencia para el profesor.

En cuanto a la comprensión del proceso consideramos la aplicación de las componentes del proceso de modelización, la modelización de situaciones del mundo real y la visión dinámica del mismo. Las componentes del proceso de modelización son las vistas en el capítulo II sobre los momentos de la modelización. La modelización de situaciones del mundo real está conectada con la resolución de problemas prácticos y el carácter dinámico lo ponen en evidencia sus múltiples posibilidades de indagación sobre una situación dada, en cada etapa del proceso.

El enunciado de la tercera cuestión es: De lo visto en esta sesión, ¿qué incorporarías en el diseño de actividades para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria?. Con esta pregunta se trata de conocer si los profesores en formación consideran el campo del álgebra lineal como propicio para aplicar el proceso de modelización matemática, dando cabida a la utilización de la calculadora gráfica en dicho proceso. Para el análisis de las respuestas se considera la estrategia de enseñanza, tipos de problemas, enunciados y evaluación. En la estrategia de enseñanza se trata de identificar los niveles curriculares de aplicación, actividades de interacción alumno-profesor, correlación de objetivos y transversalidad curricular. En los tipos de situaciones problema se identifica si aluden a la vida cotidiana o disciplinar; si plantean indagación de relativa apertura o tienden a ser poco o nada escolares. En la evaluación se persigue visualizar uso diagnóstico, formativo o sumativo; además incluye dudas acerca de la aplicación de la misma y estrategias de evaluación a seguir con el uso de la calculadora gráfica y la modelización en un contexto de álgebra lineal.

La cuarta cuestión es la siguiente: Menciona las dificultades confrontadas con el proceso de la modelización, con la calculadora gráfica o con el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. El propósito de esta cuestión es conocer los principales inconvenientes percibidos por los profesores en formación en la aplicación de la modelización y la calculadora gráfica en el contexto del álgebra lineal. Se contemplan las dificultades didácticas y las dificultades técnicas. Las dificultades didácticas sugieren los temores y riesgos sentidos por los participantes que pueden entorpecer u obstaculizar el desarrollo del proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal con el uso de la modelización y la calculadora gráfica. Las dificultades técnicas expresan el nivel de manipulación de la calculadora gráfica, es decir, los inconvenientes encontrados en cuanto al funcionamiento de ésta como dispositivo informático.

El enunciado de la última cuestión es: Escribe otras recomendaciones de interés para la enseñanza del álgebra lineal. Esta última interrogante tipo "escoba" tiene como fin recoger alguna otra información, que el futuro profesor deseara dejar constancia, relacionada con la enseñanza del álgebra lineal.

3.8.3. Cuaderno de notas

El cuaderno de notas puede definirse como el instrumento en el cual los profesores en formación anotan, de forma secuencial, la resolución de cada situación problema o ejercicio de forma libre y espontánea. Este instrumento permite recoger información individual acerca del trabajo de cada participante en las diferentes sesiones del curso-taller. De la información recogida el interés de indagación se centra en los procedimientos seguidos por los participantes, dificultades encontradas por ellos y sugerencias procedimentales aportadas en cada una de las actividades desarrolladas en el curso. También se recogen comentarios hechos por los futuros profesores durante el desarrollo del programa.

Estos cuadernos fueron suministrados a todos los participantes en la primera sesión de trabajo. El primer día se les dijo la finalidad del referido cuaderno, el cual utilizarían durante las diez sesiones. El último día se les pidió que lo dejaran en calidad de préstamo al investigador y que posteriormente se les devolvería.

3.8.4. Observación participante

Consideramos la técnica de la observación participante para la recogida de información, pues "...en el fondo de cada estudio de caso yace un método de observación" (Cohen & Manion, 1990, p.164). Cada una de las técnicas convergerá según su propio procedimiento, pero coincidirán en una serie de puntos que servirán de base en la documentación definitiva de los datos.

La observación es considerada como una perspectiva alternativa de tipo *interpretativa y subjetiva* en la investigación educativa. (Cohen & Manion, 1990).

La observación participante fue realizada por el investigador y por los miembros del grupo de apoyo. A lo largo de las sesiones de trabajo se contó con al menos dos observadores participantes, con el propósito de hacer el seguimiento continuo de la sesión. Su misión fue observar la participación de los profesores en formación durante la realización de las diferentes actividades. Estos observadores conocían del proyecto y sus objetivos y para sus observaciones contaron con un guión de observación semiestructurado con una escala de tres valores (mucho, poco o nada). Este guión enfatizó en los aspectos de interés a observar, durante el desarrollo del programa, en función de los objetivos del mismo. Con ello no se descartó la posibilidad que en la observación realizada emergieran otros aspectos no previstos en el guión, producto de la dinámica y que el observador pudiera identificar, es decir, el guión no constituyó una camisa de fuerza a la observación.

Las observaciones se centraron fundamentalmente en recabar información acerca de:

1. Manejo y uso de la CG y de la modelización de situaciones problema
2. Interacción con la CG para realizar cálculos, para experimentar, para comprobar resultados, para hacer diagramas y gráficas o para la edición de texto
3. Aplicación de los momentos de la modelización con el uso de la CG
4. Inquietudes generadas en cada momento de la modelización
5. Tipo de preguntas formuladas en las situaciones planteadas
6. Generación de nuevas ideas para la formulación y uso didáctico de las situaciones problema, recomendaciones para el uso de la modelización y la CG en el aula, tipos de problemas a considerar y niveles curriculares de actuación.

Para realizar dicha observación se diseñó una escala (ver anexo 5), con tres valores (mucho, poco, nada), a partir de las cuatro componentes del programa es decir: 1) La interacción de los participantes con la calculadora gráfica; 2) La aplicación de la modelización matemática por parte de los participantes; 3) El contexto del álgebra lineal y los participantes; 4) Las actividades didácticas realizadas por los participantes. Se solicitó a los observadores que marcaran con una X los enunciados que correspondían con la actuación de los participantes en cada sesión y su correspondiente ubicación en la escala.

El campo de la interacción de los participantes con la calculadora gráfica estuvo relacionado fundamentalmente con la utilización técnica y didáctica de la misma. En atención a estas últimas se incorporaron ítems orientativos para facilitar las respectivas observaciones.

El campo referido a la aplicación de la modelización matemática quedó orientado por varios ítems que focalizaban en los momentos de la modelización, la integración de la calculadora con la modelización y sus posibilidades de aplicación didáctica.

El álgebra lineal como contexto quedó descrito por ítems referidos a los diferentes sistemas de representación, la utilidad del álgebra en la resolución de problemas y el empleo de la calculadora gráfica en la resolución de problemas algebraicos.

Las actividades didácticas de contenido algebraico estuvieron referidas a la incorporación de la calculadora gráfica y la modelización, así como el énfasis dado en cada una de las dimensiones curriculares.

3.8.5. Hoja de evaluación final

La importancia que tiene conocer el grado de satisfacción de los participantes, como usuarios del curso, motivó a elaborar un instrumento que aportara información al respecto (ver anexo 6)

Este instrumento de recogida de información fue aplicado en la última sesión y en los últimos minutos de finalización del curso-taller. La hoja de evaluación final tenía el propósito de recoger la opinión de los participantes respecto a tres aspectos fundamentales del mismo. La metodología (calidad de las actividades realizadas), el contenido (pertinencia didáctica) y la organización (disponibilidad de recursos y logística). Dicha evaluación consideró los niveles deficiente, regular, bueno, muy bueno y excelente para valorar cada uno de los ítems presentados. Además, se pedía a los participantes escribir dos argumentos en contra y dos a favor sobre el uso didáctico tanto de la modelización como de la calculadora gráfica.

3.8.6. La entrevista

La práctica del ejercicio docente es el momento donde el profesor de matemáticas pone en juego diferentes componentes teóricos y prácticos abordados en su formación inicial. Es cuando el profesor se enfrenta a la realidad de su desempeño profesional y empieza a identificar limitaciones y a valorar el conocimiento disciplinar y didáctico adquirido durante su permanencia en los cursos universitarios y extra universidad. Partiendo de estas consideraciones hemos diseñado una entrevista semiestructurada con la finalidad de indagar acerca de los posibles efectos del curso-taller en la gestión de las clases de algunos participantes que actualmente están ejerciendo como profesores de matemáticas. Según Cohen & Manion (1990), uno de los fines de la entrevista en investigación es la de servir para "… probar hipótesis o a sugerir otras nuevas; o como recurso explicativo para ayudar a identificar variables y relaciones." (p.378). En este trabajo de investigación se ha empleado la entrevista en los sentidos sugeridos en esta última cita, entendiendo que las hipótesis se han llamado conjeturas (en el sentido cualitativo, serían hipótesis blandas o simplemente hipótesis cualitativas).

La entrevista se aplicó a informantes clave, participantes en el curso-taller "Calculadoras gráficas en el currículo de secundaria", para obtener información respecto a posibles implicaciones para la práctica, del programa MCA. La misma contribuyó a identificar aspectos didácticos del programa MCA que los profesores han aplicado en el ejercicio docente. Así que, se pretende describir la actuación del profesor e identificar aspectos asociados a los objetivos del programa MCA.

Para el diseño de la entrevista se consideraron tres dimensiones del proceso de enseñanza y aprendizaje, como lo son la motivación, el desarrollo o trabajo en clase y la evaluación de los aprendizajes. Cada una de estas dimensiones es vista en relación con el programa MCA, es decir, respecto al álgebra, la modelización matemática y las nuevas tecnologías.

La calidad del análisis no es menos importante que el formato de la entrevista (Silverman, 1995), sin pretender con ello justificar errores en el diseño de la entrevista. Se considera que la estrategia seguida para el análisis es clave en la obtención de resultados significativos y de valor para los fines de la investigación. En la presente investigación el análisis de las entrevistas se llevó a cabo siguiendo una aproximación de teoría fundamentada [3](Strauss & Corbin, 1998), por considerar que este tipo de análisis favorece la obtención de información más allá de lo ordinario y llegar a nuevas comprensiones del proceso de enseñanza (y aprendizaje) de las matemáticas. Para realizar el análisis fundamentado utilizamos el programa[4] de análisis de datos cualitativos ATLAS.ti, versión 4.2., el cual es uno de los programas de ordenador recomendados por Miles & Huberman (1994) para lograr con más facilidad asociaciones y enlaces entre los datos, así como sus posibilidades de visualización de los mismos y la formulación y comprobación de teorías. El procedimiento seguido consistió en iniciar el citado programa y abrir una unidad hermenéutica (hermeneutic unit), a continuación introducir las entrevistas como documentos primarios (primary documents) en formato de texto sin saltos de línea, identificar citas (quotations) a las cuales asignamos códigos (codes) y memos con sus respectivos comentarios, si se considera necesario en cada caso. Finalmente se construyeron las redes (networks)

[3] Strauss & Corbin (1998) proponen el método de la teoría fundamentada, el cual permite al investigador hacer preguntas y descubrir respuestas que se basan en los hechos que se estudian y no en las preconcepciones del investigador.

[4] Una demo de este programa se puede obtener a través de la web www.atlasti.com

donde se puede observar las diferentes relaciones que se obtienen a partir del discurso de los entrevistados. Dichas redes nos sirvieron de base para el análisis teórico que desarrollamos. De allí que para efectos del análisis de la entrevista se consideraron los objetivos específicos del programa MCA, con la intención de identificar niveles de aplicación de los contenidos de los mismos. Tales objetivos se refieren a niveles de aplicación del proceso de modelización matemática, competencias técnicas para la utilización de la calculadora, utilización del contenido algebraico escolar, competencias didácticas en el diseño de actividades de contenido algebraico y el fomento de actitudes favorables hacia la utilización de la modelización y la calculadora en la enseñanza de las matemáticas.

3.8.7. Elaboración de la entrevista

En este apartado se describe el proceso de elaboración de la entrevista dirigida a informantes clave, participantes del programa, actualmente en ejercicio docente, a manera de obtener una apreciación de las posibilidades de aplicación del programa MCA en la práctica profesional. Este instrumento esta destinado a complementar la información requerida en el primer objetivo general de esta investigación, enunciado en el apartado 1.7, en lo relativo a la evaluación del programa. Con esta entrevista se recoge información que contribuye a identificar aspectos didácticos del programa MCA presentes actualmente en el ejercicio docente de profesores que participaron en la aplicación de dicho programa. De este modo se pretende describir la actuación del profesor a la luz de los contenidos del programa MCA.

Para el diseño de la entrevista se parte de temas generales que ayudan a encauzar la temática hacia áreas específicas de interés, concernientes a la aplicación de los contenidos del curso por parte de los profesores ya en ejercicio. A efectos de operacionalizar el diseño de la entrevista consideramos tres dimensiones, como lo son la motivación, el desarrollo o trabajo en clase y la evaluación. Cada una de estas dimensiones es vista en relación con el programa MCA, es decir, respecto al álgebra, la modelización matemática y las nuevas tecnologías. En el anexo 7 se concreta el diseño de la entrevista. En cada casilla se identifican los números de las preguntas que sondean cada una de las dimensiones de interés. Dichas preguntas conforman el guión orientador de la entrevista.

3.9. Procedimiento de análisis de la información

Respecto del análisis cualitativo se recurrió al análisis del discurso, tomando como insumo las elaboraciones verbales y escritas de los participantes tanto en las hojas de notas diarias como en las entrevistas; a partir de ellas se construyeron categorías que conformaron las redes conceptuales explicativas de las relaciones entre los efectos del programa MCA, la competencia didáctica y las actitudes, en el grupo de profesores de matemáticas en formación que participaron en el curso-taller.

Dada la naturaleza y los objetivos que persigue este estudio, se considera pertinente recurrir a una técnica de análisis que permita la extracción de información emergente del discurso de los sujetos, de ahí que se justifica el análisis del discurso, por su capacidad de extraer información "desde dentro". Esto conduce a realizar un análisis fundamentado en los datos (Strauss & Corbin, 1998) dada la complejidad del fenómeno educativo y de las acciones de los participantes en el desarrollo del programa MCA. Se procede haciendo comparaciones entre los datos para identificar, desarrollar y relacionar conceptos.

La naturaleza de la información obtenida en la investigación orientó su clasificación en "datos" cualitativos y cuantitativos. El procedimiento de análisis de "datos" cualitativos se efectúo a partir del análisis fundamentado propuesto por Strauss & Corbin (1998). Este tipo de análisis ha sido utilizado en Educación Matemática por investigadores como Ensor (1998), Wilson (1994) y Zbiek (1998).

Miles & Huberman (1994) recomiendan la realización de análisis anticipado de los datos. Este procedimiento facilita la generación de nuevos temas a observar. En ese sentido durante la aplicación del programa MCA se acudió al seguimiento de dicha recomendación según se describe a continuación:

1. Al finalizar cada una de las sesiones se procedió a conversar y discutir con los demás investigadores participantes acerca del trabajo del día. Se revisaban aspectos del desarrollo de la sesión, que recién terminaba, relativos a la dinámica, la interacción de los profesores en formación, su actuación ante las actividades propuestas y realizadas, la opinión acerca de las participaciones de los profesores en formación y del facilitador (o instructor) principal así como el papel desarrollado por los observadores participantes. En general, al final de cada sesión del curso-taller se analizaron aspectos de la metodología y su apego a los objetivos de la investigación. Estas reuniones, aunque no tuvieron un carácter formal de producción de informes o reportes escritos, ayudaron al buen funcionamiento del curso-taller tanto en la identificación de las fortalezas como en sus limitaciones y encauzamiento de acciones.

2. De manera rutinaria, desde la segunda hasta la décima sesión del curso-taller, al inicio, se le presentaba al grupo de participantes, los resultados del análisis de las opiniones dadas en la hoja de notas diarias, específicamente las relacionadas con los objetivos del curso-taller. Dicho análisis estuvo fundamentado en los datos aportado por los profesores en formación en la sesión inmediatamente anterior. La presentación de los análisis se realizó utilizando láminas proyectadas mediante ordenador y cañón, de manera que todos podían leer en pantalla y expresar sus comentarios o sugerencias al respecto. En algunos casos los participantes

sólo se limitaban a oír y ver la presentación de los análisis sin comentario alguno. Esto podría ser producto de su interés principal en lo que “viene” más que en lo que “pasó”.

El análisis anticipado del conjunto de toda la aplicación del programa contribuyó a evitar errores en las formas de abordar las situaciones planteadas en cada sesión y las actividades que realizaron los participantes, como los aspectos logísticos necesarios para llevar a feliz término el curso-taller de acuerdo con lo pautado en el programa. Este análisis anticipado se llevó a cabo formalmente con las opiniones de los participantes, esa información la emitía cada uno de ellos al final de cada sesión del curso-taller.

El análisis de las producciones apuntadas en los cuadernos y de la información contenida en los demás instrumentos fue realizado una vez que finalizó el curso-taller, con el apoyo de las grabaciones en audio y vídeo y los archivos de las calculadoras gráficas correspondientes a de cada uno de los participantes en cada sesión. Esto último se hizo con la finalidad de mantener vívidos los momentos contextuales en cada momento de las sesiones realizadas.

El análisis cuantitativo se realizó con los datos recogidos en el cuestionario de escala de actitudes. Se compararon las valoraciones iniciales y finales dadas por los profesores en formación. Se realizaron tablas contentivas de las variaciones numéricas para su respectiva interpretación.

3.10. Conclusiones de la metodología

A manera de conclusión presentamos en este apartado la síntesis de las ideas expresadas a lo largo del capítulo. Se parte de una revisión teórica de los modelos usuales en evaluación de programas educativos, hasta llegar a configurar una propuesta para la evaluación del programa que se propone, es decir, el programa Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal (MCA).

A efectos de la investigación se asume que un programa educativo es un plan sistemático, elaborado intencionalmente y diseñado por el educador para el logro de metas educativas. Todo ello con el propósito de abordar una problemática educativa identificada en un contexto determinado. El esquema operativo de evaluación del programa se estructura tomando en consideración los supuestos sugeridos por Fernández-Ballesteros (1996), Colás (1997a) y Pérez Juste (1995, 2000). Operativamente para la evaluación del programa se identifican tres momentos, a saber: diseño, desarrollo y resultados del programa. Para la evaluación se toman en consideración aspectos objetivos y subjetivos con el propósito de responder a los objetivos de la investigación. En relación con los aspectos objetivos la atención se centra en las competencias didácticas de los profesores en formación, en el diseño de actividades de enseñanza de contenido algebraico, puestas de manifiesto como consecuencia de su participación en el programa MCA. Los aspectos subjetivos se focalizan en las actitudes de los profesores en formación hacia el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con el álgebra lineal.

De ahí que, el esquema seguido para la evaluación del programa contempla tres momentos significativos, es decir, la evaluación del diseño del programa, la evaluación del desarrollo y la evaluación de los resultados del programa MCA. Para cada uno de estos momentos hemos identificado ciertas dimensiones objetos de análisis, especificándose en cada una de ellas los aspectos a evaluar y sus respectivos indicadores.

Para la evaluación del diseño del programa Pérez Juste (1995, 2000) sugiere tomar en cuenta las dimensiones de calidad del diseño del programa y la viabilidad del mismo (ver tabla 3.7.2). Siguiendo esta recomendación los aspectos que se evalúan en la dimensión calidad del diseño son: el contenido del programa, la calidad técnica y la evaluabilidad del mismo.

En la evaluación de proceso, realizada durante el desarrollo del programa MCA, se consideraron dos dimensiones de análisis: una *cognitiva* y otra *operativa* (ver tabla 3.7.3). La primera relacionada con los niveles de aprovechamiento de los contenidos, es decir, el efecto del curso-taller sobre el conocimiento didáctico de los profesores en formación que participaron en el mismo. La segunda dimensión, es decir la operativa, está referida a la puesta en práctica del programa MCA.

La evaluación de los resultados, junto a la del diseño y la del proceso, conforman la evaluación del programa en cuestión. Las dimensiones consideradas para esta evaluación son: 1) logros cognitivos y didácticos (objetivos), 2) logros cognitivos y didácticos (subjetivos), 3) variaciones afectivas y actitudinales, 4) rasgos estructurales del programa, 5) funcionamiento operativo y logístico (ver tabla 3.7.4).

Debido a la complejidad del hecho evaluativo éste sugiere aproximaciones que logren dar cuenta del proceso a evaluar de forma integral, holística y de calidad con el propósito de obtener información fiable que sirva de base para la posterior toma de decisiones que contribuyan al perfeccionamiento del programa. En este sentido se justifican diseños que integren en sí mismos aproximaciones metodológicas complementarias.

En este sentido, en esta investigación, con el propósito de alcanzar niveles de descripción, análisis y explicación del funcionamiento del programa MCA e identificar aspectos significativos relativos a su diseño (en términos de su estructura, coherencia y aplicabilidad), su funcionamiento en la práctica (desarrollo e implicaciones) y los alcances de acuerdo a lo previsto, luego de su implementación (resultados), se opta por un diseño de *estudio de caso* que incorpora técnicas de investigación cualitativas y cuantitativas. Este diseño permite estudiar con profundidad el contexto de aplicación y los contenidos del programa.

La experiencia se lleva a cabo con diez profesores en formación que siguen un programa de formación cuyo diseño se sustenta sobre los organizadores del currículo: estructura conceptual, modelización y calculadora gráfica sobre el tópico matemático de álgebra lineal. La aplicación del programa en cuestión se efectuó en las instalaciones de la Facultad de Ciencias de la Educación. Específicamente se dispuso de la sala de seminarios el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y el aula de informática de esta Facultad.

Para la recogida de información se cuenta con los siguientes instrumentos: el cuestionario de escala de actitudes, la hoja de notas diarias, el cuaderno de notas de los participantes e investigadores, el guión de observación participante, la hoja de evaluación final del curso y las entrevistas post-curso.

Respecto del análisis cualitativo se recurre al análisis del discurso, tomando como insumo las elaboraciones verbales y escritas de los participantes tanto en las hojas de notas diarias como en las entrevistas; a partir de ellas se construyen categorías que conforman las redes conceptuales explicativas de las relaciones entre los efectos del programa MCA, la competencia didáctica y las actitudes, en el grupo de profesores de matemáticas en formación que participan en el curso-taller.

Dada la naturaleza y los objetivos que persigue este estudio, se considera pertinente recurrir a una técnica de análisis que permita la extracción de información emergente del discurso de los sujetos, de ahí que se justifica el análisis del discurso, por su capacidad de extraer información “desde dentro”. Esto conduce a realizar un análisis fundamentado en los datos (Strauss & Corbin, 1998) dada la complejidad del fenómeno educativo y de las acciones de los participantes en el desarrollo del programa MCA. Se procede haciendo comparaciones entre los datos para identificar, desarrollar y relacionar conceptos.

La naturaleza de la información obtenida en la investigación orienta su clasificación en “datos” cualitativos y cuantitativos. El procedimiento de análisis de “datos” cualitativos se efectúa a partir del análisis fundamentado propuesto por Strauss & Corbin (1998). Este tipo de análisis ha sido utilizado en Educación Matemática por investigadores como Ensor (1998), Wilson (1994) y Zbiek (1998).

El análisis cuantitativo se realiza con los datos recogidos en el cuestionario de escala de actitudes. Se comparan las valoraciones iniciales y finales dadas por los profesores en formación. Se realizan tablas contentivas de las variaciones numéricas para su respectiva interpretación.

CAPÍTULO

IV

Evaluación del Programa. Dimensiones objetivas

4.1. Introducción

La evaluación de programas tiene una metodología concreta que se implementa en una serie de pasos. En este sentido, al igual que hacen otros autores tales como Colás (1997a, 1997b), Fernández-Ballesteros (1996), Pérez Juste (1995, 2000) y Stufflebeam & Shinkfield (1995), el proceso de evaluación de programas lo fijamos en tres momentos:

- Evaluación del diseño
- Evaluación del desarrollo
- Evaluación de resultados

En la evaluación del diseño del programa MCA evaluamos su calidad, su pertinencia y su viabilidad. Para la evaluación del desarrollo consideramos los niveles de aprovechamiento de los contenidos (objetivos y subjetivos) y la puesta en práctica del programa. En la evaluación de resultados analizamos los logros cognitivos didácticos (objetivos y subjetivos), las variaciones actitudinales, los rasgos estructurales del programa y el funcionamiento logístico. La evaluación del desarrollo y la de resultados las exponemos conjuntamente, diferenciando en ambas la evaluación de las dimensiones objetivas y subjetivas. Es decir, si bien, para la evaluación se sigue el esquema orientador propuesto en las tablas 3.7.2, 3.7.3 y 3.7.4, la presentación de los resultados de la evaluación se realiza respondiendo a las dos cuestiones centrales de la investigación, las cuales están dirigidas a indagar en las competencias didácticas y las actitudes de los profesores en formación. Dedicamos este capítulo a enfatizar en los aspectos didácticos objetivos, dejando los aspectos actitudinales para ser expuestos en el capítulo V.

Presentamos en primer lugar la evaluación del diseño del programa MCA, después la evaluación de las dimensiones estructurales, de funcionamiento operativo-logístico y la dimensión de puesta en práctica. Y posteriormente se presenta el análisis y discusión de la evaluación del desarrollo y los resultados. De estos últimos, tal como señalamos arriba, se considera específicamente la dimensión cognitivo objetiva. Para cada uno de estos aspectos se dedica un apartado en el cual se exponen los detalles del proceso de evaluación, los procedimientos seguidos en la recogida de la información respectiva y su consecuente análisis y discusión. Por último se articula la evaluación de cada uno de los momentos del programa en una valoración global del mismo como un todo.

Es importante destacar que la evaluación tiene como propósito desvelar información concerniente al programa en sí mismo, visto como una estructura lógica articulada de manera sistemática en lo relativo a sus dimensiones curriculares, así como conocer qué ha logrado aportar el programa a los profesores en formación en lo concerniente al propósito de sus contenidos. En todo este capítulo es claro que la mención del programa siempre está referida al Programa MCA.

4.2. Evaluación del diseño del programa

Como argumentamos en el capítulo III, el contenido del programa se estructuró en correspondencia con el programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad de Granada, específicamente con el programa de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. En dicha asignatura se proporciona a los futuros profesores un conocimiento didáctico, entre cuyas finalidades están proporcionar fundamentos teóricos y desarrollar competencias para el diseño de unidades didácticas. Para la realización y redacción de unidades didácticas los futuros profesores recurren al análisis didáctico de los contenidos matemáticos a partir de los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997b). La necesidad de actuar en este ámbito, sugirió la búsqueda de mecanismos dirigidos a aportar a los profesores en formación herramientas teóricas y prácticas que contribuyeran a su formación didáctica e, igualmente, la conveniencia de valorar la puesta en práctica de tales mecanismos. Este es el origen de la propuesta del programa MCA y del interés de su estudio y evaluación.

El programa MCA que se presenta y estudia en esta memoria es resultado del afinamiento de una primera versión sometida a evaluación en un estudio piloto efectuado por Ortiz (2000a). Dicha evaluación aportó orientaciones para la introducción de correctivos y cambios en aspectos metodológicos y de contenido. Los aspectos metodológicos estuvieron referidos al incremento de las horas y a la redistribución del tiempo dedicado a las actividades teóricas y a las prácticas, aumentando fundamentalmente las actividades prácticas. Los aspectos de contenido versaron sobre el incremento de actividades didácticas dirigidas a generar reflexión sobre la evaluación de los alumnos de secundaria con el uso de la modelización y la calculadora gráfica. Estas recomendaciones, producto de la evaluación del programa en su primera versión, fueron consideradas para diseñar el programa MCA, en consecuencia se incrementó el número de horas de 18 a 30 y se redistribuyeron las actividades teóricas y prácticas, contemplando para el programa MCA un total de 1 hora de teoría y dos de práctica para cada sesión, es decir, 10 horas teóricas y 20 horas prácticas, aproximadamente. También hay que considerar que las actividades propuestas suponen para los asistentes un total de 50 horas estimadas de trabajo no presencial.

Adicional a las observaciones resultantes de la evaluación del programa piloto, para la estructuración de los contenidos del programa MCA fueron consideradas otras observaciones aportadas por expertos del grupo de investigación pensamiento numérico y algebraico, tales como la incorporación de actividades relacionadas con una experiencia con alumnos de secundaria utilizando modelización y Calculadoras Gráficas (CG) (sesión 5).

En síntesis los resultados de la evaluación del programa piloto orientaron el establecimiento de la estructura del programa MCA, la determinación y distribución de las actividades para cada sesión, la selección de los recursos empleados y los materiales suministrados en correspondencia con los requerimientos del programa para el logro de los objetivos previstos alcanzar.

Para llevar adelante la evaluación del diseño del programa MCA se han considerado las dimensiones calidad del diseño, pertinencia del diseño y viabilidad del mismo, según lo establecido en el capítulo III.

En la evaluación del diseño del programa se valoran la coherencia de su estructura en conjunto, la pertinencia de su contenido, así como las previsiones logística y de infraestructura necesarios o requeridos para su aplicación.

En la evaluación del programa participan el investigador responsable del programa, el equipo de apoyo y los profesores en formación en tanto que usuarios del mismo. De estos últimos, la valoración del programa la obtuvimos a través de las opiniones emitidas en la hoja de evaluación final, en la cual recogimos información relevante para la evaluación de la pertinencia de los contenidos y lo concerniente a los aspectos organizativos (logísticos y recursos) y su metodología. La valoración del diseño del programa, por parte del grupo de apoyo, se efectuó mediante revisiones permanentes y críticas a la estructura curricular que se iba realizando para conformar la versión definitiva.

4.2.1. Calidad del diseño

El contenido del programa está centrado en la modelización matemática, la calculadora gráfica, el álgebra lineal y la planificación de actividades didácticas. En este sentido se encontró que el diseño del programa MCA se ajusta a las necesidades formativas actuales de los profesores de matemáticas, lo cual incide en su calidad.

Esto se evidencia en:

1) la modelización está contemplada en el programa actual de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, de la Universidad de Granada, específicamente como un organizador del currículo;
2) en la misma asignatura, la calculadora gráfica aparece incluida en el organizador del currículo denominado materiales y recursos;
3) el álgebra lineal es un tópico matemático incluido en los programas de la educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991, 1992) y el análisis de su estructura conceptual resulta pertinente; algunos de los temas considerados en dicha asignatura para el diseño de unidades didácticas, específicamente los relativos a funciones y sistemas de ecuaciones lineales, se corresponden con este tópico;
4) en el estudio piloto se constató que los contenidos del álgebra lineal resultan apropiados como tópicos matemáticos para la realización de actividades relacionadas con la modelización y el uso didáctico de la calculadora gráfica;
5) el diseño de unidades didácticas constituye uno de los objetivos fundamentales en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato.

Lo anterior pone en evidencia la actualidad de los contenidos del programa MCA.

En el diseño del programa MCA se pretendió actuar en el ámbito del conocimiento didáctico de los profesores en formación. En este sentido en su contenido se consideró la incorporación de actividades dirigidas a potenciar y desarrollar competencias en el diseño de actividades didácticas. Al respecto, en la aplicación del cuestionario de evaluación del programa MCA al final de la última sesión se constató que los profesores en formación valoran como bueno el desarrollo de dichas competencias didácticas para la planificación de la enseñanza y la utilización de la CG para la enseñanza del álgebra lineal. La valoración dada a estos aspectos del programa MCA por parte de los participantes revela la pertinencia de los contenidos del programa, tal como se observa en la tabla 4.2.1. En dicha tabla se expresa la frecuencia de las valoraciones dadas por los profesores en formación a los ítems relacionados con la calidad del diseño. Cabe destacar la valoración de muy bueno otorgada a la realización de actividades de interés didáctico contempladas en el diseño del programa, así como la valoración de bueno otorgada a la congruencia de los contenidos recibidos con las necesidades de formación didáctica, la pertinencia de los materiales suministrados, la realización de actividades prácticas para el reforzamiento de los contenidos del curso y la claridad de los enunciados de las situaciones a modelizar presentados en el programa MCA.

Por otra parte, los contenidos del programa MCA se adecuan a requerimientos en la formación didáctica de los futuros profesores de matemáticas de la Universidad de Granada, detectados a partir de nuestras observaciones en los cursos de los años 1998-1999, 1999-2000 y 2000-2001, además de las opiniones de los profesores que dictan la asignatura, basados en sus propias experiencias, observaciones y reflexión respecto a las necesidades formativas de los futuros profesores.

Tabla 4.2.1. *Valoración del diseño del programa MCA*

Ítems	Muy Deficiente	Deficiente	Suficiente	Bueno	Muy Bueno
Adquisición de competencias didácticas ajustadas a las necesidades actuales			4	4	2
Congruencia de los contenidos recibidos con las necesidades de formación didáctica			1	5	4
Pertinencia de los materiales bibliográficos suministrados		1	1	5	3
Estructura del curso			4	4	2
Realización de actividades prácticas para el reforzamiento de los contenidos del curso			2	6	2
Realización de actividades de interés didáctico			2	2	6
Claridad en los enunciados a modelizar			2	6	2

La evaluación de los indicadores relativos a la actualidad de los contenidos, su pertinencia didáctica y adecuación a las demandas educativas del contexto al cual está dirigido el programa, expresa calidad en lo concerniente al contenido del programa.

Respecto a la aportación de información en el programa MCA relativa a objetivos y actividades, se presentan de forma clara y precisa los objetivos que persigue, en correspondencia con las actividades a realizar para su logro, así como los recursos necesarios para su aplicación. De igual manera en el programa se prevén los mecanismos de evaluación. A tales efectos se elaboró un cuestionario de evaluación final del mismo, a ser cumplimentado por los participantes del curso-taller en la última sesión. La consulta a los participantes es una de las estrategias utilizadas para conocer los logros del programa. Con esta información se trata de identificar congruencia entre los objetivos del programa, dirigidos a la dotación de competencias didácticas, con las necesidades de los profesores en formación. La evaluación de este aspecto fue valorada como buena por los participantes. Por otra parte en la misma evaluación los profesores en formación valoraron, como buena o muy buena, la congruencia entre los componentes del programa y sus necesidades de formación didáctica.

Los resultados favorables de la correspondiente evaluación hecha por el investigador responsable del estudio, el grupo de apoyo y los profesores en formación al establecimiento de objetivos, actividades, metodología y evaluación, así como la congruencia entre los objetivos y las necesidades formativas de los participantes, además de la coherencia entre los componentes del programa y los objetivos son reveladores de una buena calidad técnica del programa MCA.

Respecto al contenido y la metodología establecida para el desarrollo del programa MCA, se aportó información detallada en el capítulo III. La metodología seguida en el desarrollo del programa fue evaluada por los participantes como buena o muy buena; en particular la realización de actividades prácticas para el reforzamiento de los contenidos del curso-taller, y la motivación y participación en cada sesión fueron valoradas como buenas; la secuenciación de las actividades en las sesiones, la realización de actividades de interés didáctico, la claridad de los profesores del curso en la exposición de los contenidos fueron valoradas como muy buenas. El programa aporta suficiente información referida a su metodología y contenido, lo cual pone en evidencia el control de dichos aspectos. Esto último, junto al contenido del programa y su calidad técnica permite sostener que el *diseño del programa* MCA es satisfactorio.

4.2.2. Pertinencia del diseño

Un aspecto revelador de la pertinencia del diseño del programa MCA lo constituye el hecho de que éste responde a necesidades manifiestas tanto por los profesores de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato como por los estudiantes para profesores de matemáticas en la Universidad de Granada. Los profesores de matemáticas en formación tienen necesidades formativas relacionadas con los componentes del programa MCA; todo ello producto de los mismos planes de formación, en esta universidad, donde el abordaje de la modelización y las nuevas tecnologías no se considera de manera sistemática, excepto en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato. En esta asignatura se aportan, entre otras herramientas conceptuales, la aproximación didáctica a las matemáticas escolares, considerando diferentes acercamientos que incluyen la modelización y las nuevas tecnologías. Dicha formación didáctica ha sido considerada, por diversos profesores investigadores del área de didáctica de la matemática, como insuficiente a pesar de la importancia que tiene para el ejercicio profesional. El programa MCA se diseñó orientado fundamentalmente por estas necesidades reales, inherentes al contexto de la Universidad de Granada, de allí que su *pertinencia* es innegable en la actualidad.

4.2.3. Viabilidad del diseño

La evaluación de la viabilidad del diseño se efectuó tomando como indicadores de ésta fundamentalmente su conformidad a la demanda de los profesores en formación, la congruencia de la temporalización y la disposición de medios y recursos humanos y materiales para la ejecución del programa MCA. Respecto al primer indicador, el programa MCA responde a una relativa demanda de los profesores en formación debido a que, previo a la aplicación del programa, se hizo una consulta de preinscripción a los alumnos del quinto curso de matemáticas, opción metodología, dando como resultado un considerable grupo potencial de participantes en un programa con las orientaciones del programa MCA. Dicho sondeo reveló el interés manifiesto de los profesores en formación por adquirir conocimientos referidos a los componentes del programa MCA, de allí que en el mismo se intenta dar respuesta a dichas necesidades.

A efecto de dar cumplimiento al desarrollo de los contenidos del programa, de manera rigurosa, se estructuró la distribución del contenido en el tiempo, previendo para cada sesión la discusión de aspectos teóricos y el desarrollo de actividades prácticas, tal como lo resumimos en el capítulo III. Para la temporalización se consideró el grado de dificultad de los contenidos, requerimiento de ejercitación práctica, interacción con los recursos tecnológicos y el tiempo de duración del curso-taller. Para evaluar aspectos relativos a la viabilidad del diseño, después de su aplicación, tomamos en consideración la valoración hecha por los profesores en formación en la hoja de evaluación final, específicamente en aquellos ítems dirigidos a recoger información al respecto. De esta información obtuvimos que los participantes valoraron como muy buena la disponibilidad de la CG para cada participante, la pertinencia de los materiales bibliográficos suministrados y el manejo de otros recursos de apoyo utilizados en la dinámica del curso-taller. De igual manera, el tiempo dedicado a cada actividad fue valorado como bueno así como la estructura del curso-taller. Todo lo anterior nos permite afirmar que existe congruencia entre las metas del programa, dirigidas a dar respuesta a las demandas de los profesores en formación, los medios y los recursos previstos, así como la temporalización establecida para la implementación del programa MCA. De allí que la evaluación de la *viabilidad del diseño* fue favorable.

Después de la evaluación de cada una de las dimensiones consideradas en los tres últimos apartados, es decir la calidad, la pertinencia y su viabilidad, podemos concluir que la evaluación del diseño del programa MCA fue satisfactoria.

4.3. Evaluación de los rasgos estructurales del programa

Los rasgos estructurales del programa constituyen una de las dimensiones de análisis en la evaluación de los resultados del programa (ver tabla 3.7.4). Para dar respuesta a esta dimensión se evalúa lo pautado en relación con lo ejecutado así como la coherencia interna del programa y la adecuación de los contenidos y el tiempo de ejecución de las actividades previstas. Dicha evaluación se efectúa a partir de las opiniones emitidas en la hoja de evaluación cumplimentada por los participantes en la última sesión del curso. En ese sentido se muestran las tablas 4.3.1 y 4.3.2, donde se resume las valoraciones dadas por los profesores en formación. Los números en cada casilla representan la frecuencia de las valoraciones hechas por los participantes. Las casillas con mayor frecuencia son las sombreadas.

En la tabla 4.3.1 se observa que la metodología utilizada en el curso fue valorada mayoritariamente, por los participantes, como buena o muy buena. Fue muy buena la secuenciación de las actividades de las sesiones, la realización de actividades de interés didáctico y la claridad de los profesores del curso en la exposición de los contenidos. Por otro lado resultó buena la motivación y participación en cada sesión y también las conclusiones de cada sesión.

Consideramos que estas valoraciones dadas a la metodología tienen un peso específico porque fueron emitidas por los futuros profesores al finalizar el curso, cuando ya tenían una percepción responsable del mismo. Ya tenían información, fundamentada en hechos observados y compartidos, para valorar el curso.

Tabla 4.3.1. *Valoración de la metodología por parte de los participantes*

Ítems	Muy Deficiente	Deficiente	Suficiente	Bueno	Muy Bueno
Interacción con la CG para el desarrollo de actividades			1	5	4
Ejemplificación de los comandos de la CG			3	4	3
Realización de actividades prácticas para el reforzamiento de los contenidos del curso-taller			2	6	2
Secuenciación de las actividades en las sesiones		1	1	3	5
Realización de actividades de interés didáctico			2	2	6
Claridad de los profesores del curso en la exposición de los contenidos		1		4	5
Conclusiones de cada sesión		2	3	4	1
Motivación y participación en cada sesión		1		7	2

La tabla 4.3.2 hace referencia a la organización del curso. Los participantes valoraron aspectos del curso relacionados con su organización. En la tabla podemos observar que hubo dispersión en cuanto a las valoraciones. La disponibilidad de la CG para los participantes del curso fue valorada como muy buena. De similar manera el manejo de otros recursos de apoyo para la dinámica del curso-taller fue catalogado entre muy bueno y bueno. La estructura del curso estuvo valorada entre suficiente, buena y muy buena. La pertinencia de los materiales bibliográficos suministrados y el tiempo dedicado a cada actividad fueron valorados como buenos. Sin embargo, el tiempo de interacción con la CG fue valorado entre suficiente, deficiente y muy deficiente a pesar que disponían de una CG para su uso personal en las sesiones de trabajo y fuera de ellas durante todo el tiempo de duración del curso. La correspondencia entre lo ofertado y lo recibido fue valorado entre bueno y muy bueno.

Tabla 4.3.2. *Valoración de la organización por parte de los participantes*

Í t e m s	Muy Defi-ciente	Defi-ciente	Sufi-ciente	Bueno	Muy Bueno
Estructura del curso-taller			4	4	2
Disponibilidad de la CG para los participantes del curso-taller				2	8
Pertinencia de los materiales bibliográficos suministrados		1	1	5	3
Tiempo dedicado a cada actividad		3		6	1
Tiempo de interacción con la CG	1	3	3	2	1
Manejo de otros recursos de apoyo para la dinámica del curso-taller.			2	4	4
Correspondencia entre lo ofertado y lo recibido			1	6	3

Algunos participantes encontraron que el tiempo dedicado a cada actividad resultó deficiente, lo cual induce a pensar que probablemente el tiempo disponible para cada actividad fue poco para ellos, tal vez por falta de dominio técnico con la CG. Esto hace evaluar la planificación del tiempo como no satisfactorio, porque se esperaba que todos los profesores en formación tuvieran la oportunidad de abordar todas las actividades propuestas.

También llama la atención la valoración baja del tiempo de interacción con la CG. Esto refleja también la falta de tiempo en las actividades realizadas que se tradujo en poca interacción con la CG en el aula del curso. La evaluación de la dimensión rasgos estructurales del programa MCA es no satisfactoria. Esta deficiencia fue notada por miembros del grupo de apoyo en algunas sesiones. Se trató de reorientar o atender los tiempos pero los resultados dicen que un grupo de profesores en formación no quedó satisfecho.

En términos generales los rasgos relativos a la organización se valoraron satisfactoriamente excepto lo relativo al tiempo destinado para el desarrollo de las actividades en interacción con la CG en cada sesión.

4.4. Evaluación del funcionamiento operativo y logístico del programa

Para la evaluación de esta dimensión se considera el manejo y disponibilidad de recursos humanos y materiales previstos para la ejecución del programa, así como los mecanismos para el seguimiento del desarrollo del mismo.

Con relación a las sesiones de trabajo del curso-taller, éstas se efectuaron según lo estipulado en la programación prevista. Asimismo se contó con los medios y recursos necesarios, tales como las calculadoras gráficas que fueron suministradas por la empresa Texas Instruments en calidad de préstamo. Cada participante tuvo una CG desde la primera sesión hasta la última, asignadas a cada profesor en formación para su trabajo dentro y fuera del curso-taller. Esto les permitía contar con dicho recurso para la realización de prácticas intra y extra escolares durante el curso de manera de contribuir a consolidar el manejo técnico y didáctico de la CG. De igual manera los futuros profesores contaron con materiales impresos que comprendieron, entre otros, un manual resumido de la calculadora TI-92 plus. También cada participante fue provisto de un diskette donde podía guardar ejemplos de aplicaciones de la CG en la enseñanza de las matemáticas, bajados de internet o tomados de sus propias producciones y de sus compañeros. En general, *los participantes del curso-taller dispusieron de los medios y recursos para desarrollar los contenidos* del curso-taller.

Los lugares destinados para desarrollar las actividades del programa MCA fueron la sala de seminarios del Departamento de Didáctica de la Matemática y el aula de informática, ambos ubicados en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Estos espacios son ambientes acondicionados para la realización de actividades de docencia, con las condiciones mínimas de dotación de recursos para la enseñanza y el aprendizaje. Bajo esas condiciones podemos afirmar que *el programa MCA se desarrolló en aulas en condiciones físico ambientales apropiadas*.

Para el desarrollo del programa MCA se contó con el grupo de apoyo conformado por miembros del grupo de investigación pensamiento numérico y algebraico, entre quienes se encontraban los directores de esta investigación, profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática, compañeros del programa de doctorado y estudiantes de doctorado del bienio 2000-2002. Como se puede intuir, se contó con el apoyo y la cooperación para llevar el curso a su culminación de la mejor manera posible. Esto significa que *el apoyo y participación de los colaboradores fue factor importante* para llegar a la puesta en práctica del programa MCA.

4.4.1. Evaluación de la puesta en práctica

La evaluación de esta dimensión da cuenta de aspectos relativos a la metodología utilizada en el desarrollo del programa, la secuencia de actividades, cumplimiento de la temporalización y la previsión de espacios físicos, apoyos y recursos. Respecto a la metodología utilizada para el desarrollo del programa tomamos como referencia la utilizada en la implementación del programa en su primera, es decir, en el estudio piloto. Las recomendaciones y mejoras en la misma nos llevó a la estructuración de la metodología utilizada en el programa MCA. Las principales características de esta metodología fueron el carácter de curso-taller. Esta metodología fomentó los niveles de motivación y participación en los profesores en formación. Este aspecto fue evaluado como muy bueno por los participantes (ver tabla 4.4.1).

En general las actividades propuestas en cada sesión estuvieron en correspondencia con lo planificado. La secuenciación de las actividades fue valorada como muy buena por los profesores en formación, tal como se aprecia en la tabla 4.4.1. Sólo en algunas sesiones, por falta de tiempo, no se logró abordar algunas de las situaciones problema previstas. Ante esta situación se les sugirió a los participantes que las desarrollaran extra aula y las dudas existentes se discutirían en la sesión siguiente. De esta manera se dio cumplimiento a todas las actividades previstas. Dichas actividades tenían como propósito contribuir a fijar los contenidos. La dinámica seguida en el curso-taller favoreció la libertad de los participantes para escoger las situaciones que les pareciera de mayor interés didáctico. Un aspecto que caracterizó la metodología del curso-taller fue su grado de flexibilidad para agilizar la dinámica de cada una de las sesiones del desarrollo del programa MCA.

Podemos afirmar que hubo una *adecuación de la metodología utilizada para el desarrollo del programa*, de tal manera que este indicador nos permite emitir una evaluación satisfactoria de las actividades propuestas para la fase operativa de la puesta en práctica del programa MCA.

El *seguimiento de la secuencia de las actividades programadas* fue un factor determinante en el cumplimiento de los objetivos de cada sesión del programa MCA. El cumplimiento de los objetivos del curso fue valorado como muy bueno por los participantes (ver tabla 4.4.1). La estructuración dada a los cuadernillos permitió ubicar desde el inicio a los participantes en lo que se pretendía en cada reunión de trabajo. De igual manera la introducción y los ejemplos, así como las explicaciones teóricas y prácticas dadas por los profesores investigadores contribuyeron a marcar los lineamientos y pautas a seguir en cada caso. Se respetó el orden numérico preestablecido para los cuadernillos de las sesiones y la secuencia, así como también se siguieron las actividades previstas. El desarrollo del programa se cumplió en el tiempo programado de 3 horas para cada sesión, contempladas en el diseño del programa. Dicha temporalización se ajusta al diseño del programa MCA. Sin embargo, de acuerdo a la valoración dada por los profesores en formación podemos deducir que para futuras ediciones es necesario revisar este aspecto.

La disponibilidad de la sala de seminarios del Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada, para el desarrollo del programa se tuvo prevista, no obstante durante tres sesiones se dictó el curso en el aula de informática de la misma facultad. En dicha aula no se favoreció el trabajo cooperativo, debido al carácter fijo de las mesas de los ordenadores. Sin embargo, el ambiente físico donde se desarrolló el curso fue valorado como bueno por los participantes (ver tabla 4.4.1). Esto último pudiera estar relacionado con la evidencia del apoyo del Departamento de Didáctica de la Matemática y del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico. Este apoyo se expresó en la puesta a disposición, para el desarrollo del programa, de los recursos y materiales necesarios para la logística de cada sesión de trabajo. La *existencia de coherencia entre la institución (Universidad de Granada) y el desarrollo del programa* MCA contribuyó a que se aplicara el programa con todos los insumos requeridos para el *cabal cumplimiento de la temporalización*.

Tabla 4.4.1. *Valoraciones dadas al curso por los participantes*

Ítems	Muy Deficiente	Deficiente	Suficiente	Bueno	Muy Bueno
Secuenciación de las actividades en las sesiones		1	1	3	5
Conclusiones de cada sesión		2	3	4	1
Motivación y participación en cada sesión		1		7	2
Aplicación de los momentos del proceso de modelización			2	6	2
Cumplimiento de los objetivos del curso			2	6	2
Tiempo dedicado a cada actividad		3		6	1
Tiempo de interacción con la CG	1	3	3	2	1
Manejo de otros recursos de apoyo para la dinámica del curso			2	4	4
Ambiente físico donde se desarrolló el curso	1	1	1	4	3

En síntesis, en la tabla 4.4.1 se puede apreciar que los profesores en formación, en general, consideraron como buena la puesta en práctica del programa MCA. Excepto la secuenciación de las actividades que fue valorada como muy buena por la mayoría y, el manejo de otros recursos de apoyo para la dinámica del curso que también fue valorado como muy bueno. Por otra parte resalta negativamente el tiempo de interacción con la CG que fue valorado como deficiente y suficiente por la gran mayoría de los participantes. Esto último pudiera ser consecuencia de mucha dedicación a la discusión y actividades teóricas en clase más que a la práctica interactiva con la calculadora según las expectativas de los participantes.

En términos generales, la información recogida nos permite afirmar que la evaluación de la dimensión de puesta en práctica del programa MCA resultó satisfactoria.

4.5. Evaluación del desarrollo del programa. Análisis de las producciones

Para realizar la evaluación del desarrollo del programa se consideran básicamente dos dimensiones, la dimensión cognitiva y la dimensión operativa o de puesta en práctica del programa MCA. La dimensión cognitiva fue evaluada a través de rasgos objetivos, observados en las producciones de los participantes, y de rasgos subjetivos expresados en las opiniones de los profesores en formación, respecto de las componentes del programa. Los rasgos objetivos de la dimensión cognitiva se observaron en las producciones plasmadas en los cuadernos de notas, láminas presentadas en las sesiones y las grabaciones de audio y vídeo. Los rasgos subjetivos se analizan en el capítulo V. La dimensión operativa o de puesta en práctica fue evaluada a partir de la hoja de observación, las grabaciones de vídeo y la opinión de los profesores en formación recogida en la hoja de evaluación final.

A continuación se presenta en primer lugar los aspectos cognitivos objetivos observados en las producciones de los participantes. El análisis de dichas producciones se centró en los cuatros focos de interés perseguidos por el programa MCA, a decir, las competencias técnicas y didácticas alcanzadas con el empleo de la CG, la aplicación del proceso de modelización matemática, la integración de la CG y la modelización en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico y las competencias didácticas manifiestas por los profesores en formación en el diseño de actividades para la enseñanza del álgebra escolar. Para el análisis de las producciones se parte del objetivo que se persigue en la sesión como eje orientador de metas a alcanzar con las actividades propuestas. En consecuencia, a partir de los enunciados para cada sesión se observaron y analizaron las producciones de los futuros profesores en tres momentos, considerados clave para el conocimiento y evaluación del curso-taller y la implementación del programa. Dichos momentos fueron la sesión 1 o momento inicial, la sesión 4 o momento intermedio y la sesión 10 o momento final. Los resultados del análisis de las producciones de los profesores en formación en dichas sesiones fueron contrastados con las producciones de las sesiones restantes con el propósito de incorporar nuevos elementos y/ o reafirmar los hallazgos en las sesiones analizadas. De esta manera se alcanzó la evaluación del desarrollo del programa en lo concerniente a los niveles de aprovechamiento de los contenidos o efectos del programa en el conocimiento didáctico de los profesores en formación. Todo ello se apoyó en lo recogido en las hojas de observación.

Es importante asimismo destacar que la evaluación de la dimensión cognitiva persiguió dar respuesta a las preguntas de investigación del ámbito cognitivo, planteadas en el capítulo I. Dichas cuestiones son las siguientes:

¿Cuál es el nivel de aplicación del proceso de modelización matemática?

¿Cuáles son las competencias alcanzadas por los participantes referidas a la calculadora gráfica?

¿De qué manera organizan el contenido algebraico para el diseño de actividades didácticas, acudiendo a la modelización y a la calculadora gráfica?

¿Qué papel desempeña la calculadora gráfica como recurso didáctico en el diseño de las actividades previstas?

¿Cómo los profesores en formación organizan la estructura conceptual de un tópico algebraico cuando se proponen elaborar actividades didácticas sobre ese contenido?

¿Qué tipos de situaciones problema encuentran los profesores en formación para dotar de significado a los contenidos algebraicos?

¿Cómo planifican u organizan el trabajo escolar para sus potenciales alumnos?

¿Cómo interrelacionan la modelización y la calculadora gráfica con los otros organizadores del currículo?

4.5.1. Análisis de las producciones de los participantes

Tal como señalamos en líneas anteriores, el estudio de las producciones de los participantes se efectuó tomando como criterio la identificación de tres momentos claves en el desarrollo del curso-taller. En primer lugar las producciones de la primera sesión, debido a que en ella podíamos encontrar pistas del estado inicial de los participantes, en lo concerniente a sus competencias didácticas y a las formas de abordaje de las situaciones propuestas, antes de recibir la formación prevista en el programa. En segundo lugar analizamos las producciones de los participantes en la cuarta sesión, en tanto que etapa intermedia en el desarrollo del programa MCA. Este corte se hizo porque en esta sesión se podían apreciar aspectos que revelaran variaciones en los participantes como producto del programa, tanto en la forma de abordaje de las situaciones problema, como en el diseño de actividades didácticas integrando la modelización matemática y la calculadora gráfica (CG). El tercer momento fue la décima sesión, debido a que en ésta última se podrían evidenciar las competencias didácticas adquiridas y consolidadas a través del programa. Esto constituye el insumo para la valoración de los logros del desarrollo del programa MCA. Todo ello contrastado con las producciones de las demás sesiones del curso-taller.

Dentro de los aspectos que consideramos para el análisis tenemos: respecto a la modelización se identificó el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo, aspectos sugeridos por Galbraith, Haines and Izard (1998). Respecto al apoyo de la CG, como recurso didáctico, se consideró la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didáctica. Además se tomó en cuenta el aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la CG, de acuerdo a lo planteado por Kutzler (2000).

Como señalamos, el análisis se efectuó a partir de la información recogida en las producciones presentadas en los cuadernos de notas, las láminas de presentación a la clase, las tareas y finalmente complementamos con las hojas de observación y las grabaciones en vídeo.

En los cuadernos de notas los profesores en formación realizaron las anotaciones relacionadas tanto con las respuestas a las actividades, propuestas en cada uno de los cuadernillos de las sesiones, como otras anotaciones que consideraron pertinentes. En estos cuadernos se recogieron las producciones objetivas de los participantes. En las láminas presentadas a la clase se plasmó la forma como los profesores en formación expondrían las actividades a sus alumnos, es decir el diseño de la actividad didáctica para ser gestionada con alumnos de secundaria.

4.6. Análisis de producciones en el momento inicial

En este apartado se presenta, en primer lugar, el enunciado de la actividad propuesta en la primera sesión para orientar respecto a lo que se perseguía; en segundo lugar se presentan los enunciados de las situaciones problema propuestos por los profesores en formación, así como su análisis. En tercer lugar, presentamos las respuestas de los participantes a las partes A y B de la sesión, referidas a consideraciones generales y consideraciones didácticas, respectivamente, con sus correspondientes análisis.

El objetivo de la primera sesión fue contextualizar el programa a desarrollar en el curso-taller dentro del ámbito de la modelización matemática en álgebra lineal, con el uso de la calculadora gráfica. Para contextualizar el curso-taller y adquirir una idea de los conocimientos que tenían los participantes acerca de los componentes que estructuran el programa MCA, en la primera sesión o momento inicial, se planteó una actividad introductoria sobre consideraciones generales acerca de la modelización matemática y la CG (parte A) y otra sobre consideraciones didácticas relacionadas con la modelización y la CG en contextos algebraicos (parte B). En la primera actividad se pidió a los participantes que formularan situaciones problema del mundo real con su correspondiente modelo. En la segunda parte se invitó a los participantes a diseñar una actividad de enseñanza del álgebra lineal para un tema específico.

En concreto las actividades fueron las siguientes:

PARTE A: Consideraciones generales

1. *Identifica una situación (o problema) del mundo físico, natural o social que pueda ser modelizada mediante conceptos del álgebra lineal. Describe la situación y el modelo correspondiente.*
   ¿Qué relación hay entre la situación y su modelo correspondiente?
   ¿Qué se puede decir de la situación a partir del modelo?
   La situación ¿admite solamente un modelo o puede tener varios?
   Comenta el interés de la situación y la utilidad del modelo.
2. *¿Utilizarías calculadora gráfica para obtener el modelo y/o para responder a las preguntas de la situación dada? ¿por qué?*
3. *Escribe detalladamente los pasos realizados en el diseño de cada modelo e indique las dificultades encontradas.*
4. *Elabora un argumento a favor y otro en contra, sobre el uso de la*

modelización y de la calculadora gráfica para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria.

PARTE B: Consideraciones didácticas

Supongamos que un profesor de secundaria necesita elaborar una actividad didáctica para mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para cumplir con ese propósito te pedimos que describas (o propongas) una situación problema del mundo real para cumplir con la referida asignación.

Asumiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica junto con todos sus estudiantes, a) Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica; b) Ordena la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo; c) Sugiere al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevaría a cabo.

4.6.1. Análisis de la PARTE A: Consideraciones generales

Las respuestas dadas por los participantes en la parte A fueron muy variadas tanto en sus propuestas como en su ajuste a lo solicitado para la actividad. En la identificación de situaciones (o problemas) presentaron situaciones cotidianas relativas a: venta de frutas, precio de artículos con o sin IVA y aparcamiento en un parking y otras menos cotidianas pero que se encuentran en el mundo físico, natural o social tales como: producción de leche de vaca, preguntas de un examen tipo test, sistema masa-resorte, circuito de motocicletas, sala de fiestas para alquiler y trayectoria de un barco en el océano. En la tabla 4.6.1.1 presentamos un resumen de las respuestas dadas en la parte A. En dicha tabla el participante i se denota por PFi.

Tabla 4.6.1.1. *Resumen de respuestas dadas en la primera sesión*

PARTE A

	Situación	Modelo	Consecuencias del modelo	Interés y utilidad	Empleo de CG	Pasos para obtener el modelo
PF1	Producción de leche	$\left.\begin{array}{l} x+y=200 \\ x=y+\frac{y}{2} \end{array}\right\}$	No las indica	Para alumnos procedentes de zonas rurales	Para resolución, no para graficación	No los indica
PF2	Venta de frutas	*230.200 + 50x = 300.150 + 10.000*	No las indica	No indica	Para cálculos	No los indica
PF3	Precio de artículo	$x+\frac{16}{100}x=1160$	No las indica	No indica	No lo sabe. Sería tradicional	No los indica
PF4	Preguntas de un examen	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0'5 & -0'25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 20 \\ \lozenge \end{pmatrix}$ Con $\lozenge$ = Resultado	No las indica	No indica	No utilizaría CG en este caso. Sólo con casos más complicados	No los indica
PF5	Masa-resorte	*P=mg=Kx=98 N* $K=\frac{98N}{0'25m}=392\,N/m$	El modelo sirve para comprender la situación, en este caso de forma cuantitativa.	El alumno puede experimentar para ver la relación entre teoría (Ley de Hooke) y la experiencia.	Como apoyo. Nunca como única herramienta	Introducir al alumno en resolución de ecuaciones. Plantear el problema Representación en CG
PF6	Circuito de motocicletas	$\frac{v_A\,(t_B+2)}{t_B}=v_B$	No las indica	No indica	No sabría como usar la CG. Aunque se podría hacer gráficas para explorar.	-Identificación de los datos -Observación de posibles igualdades -Igualación y despeje de la incógnita

Tabla 4.6.1.1. *Resumen de respuestas dadas en la primera sesión*

PARTE A
(Continuación)

PF7	Salas de fiestas para alquiler (SF)	$5.000x + 15.000 \leq 3.000x+20.000$	A partir del modelo puedo obtener información de cual sala es más económica y otras cosas.	El modelo utilizado muestra a partir de qué número de personas es más económica una u otra sala.	Podría utilizar la CG para representar el intervalo donde cada sala es más económica	-Parto de los datos -Expresar en forma de ecuación -Interpretación
PF8	Aparca-miento en un parking (AP)	$C(t) = P \,.\, E(t+1)\,,\ \ \forall t > 0$ *t = tiempo, en horas, de estacionamiento*	El modelo se puede explicar a partir de valores asociados a distintos tiempos.	Situación de gran interés para el alumnado, por lo cotidiana	No usaría CG. No lo ve necesario porque los cálculos son muy sencillos	-Tabla t-coste -Observar que hay tiempos distintos con el mismo coste -Introducir la función parte entera -Presentar el modelo matemático.
PF9	Trayectoria de un barco (TB)	Inecuaciones de dos variables	El modelo puede tener más utilidad práctica	Interesante para motivar a los alumnos. El modelo puede servir para introducir más matemáticas	Usar la CG para representar gráficamente la trayectoria del barco y el punto de la isla.	-Obtener la ecuación de la trayectoria del barco. -Conocer la representación gráfica de una recta -Representar el punto de la isla en un plano coordenado -Averiguar la inecuación correspondiente.

A continuación presentamos las s*ituaciones* problema planteadas por los profesores en formación, para luego proceder a su análisis:

Situación: Venta de frutas (VF2): Imaginemos un frutero que tiene 300 Kgs de tomates a 200 Ptas. el Kg, de los cuales se le pudren 20 Kilos y otros 50 Kilos tienen que ser vendidos a mitad de precio porque ya están muy maduros. Si inicialmente los tomates los compró a 150 Ptas a ¿cómo ha de vender los rebajados para obtener un beneficio de 10.000 Ptas. como mínimo?. (PF2)

El modelo para esta situación fue el siguiente:

$230.200 + 50x = 300.150 + 10.00$

Situación: Precios de artículos con o sin IVA (PA3): Al comprar un artículo en una tienda vemos que su precio de venta viene con un 16% de IVA incluido. ¿Cuánto costaría el artículo sin el IVA? Por ejemplo, si el artículo cuesta 1160 Ptas (PF3)

Modelo:

$$x + \frac{16}{100}x = 1160$$

Situación 3: Aparcamiento en un parking (AP8): Calcular el precio que se ha de pagar en un parking por aparcar un determinada cantidad de tiempo t si el precio de una hora es una constante fija P. (PF8)

Modelo:

$$C(t) = P \,.\, E(t+1)\ , \quad \forall\, t > 0$$

t = tiempo, en horas, de estacionamiento

E es la función "parte entera"

Situación: Producción de leche de vaca (LV1): Un ganadero tiene repartidas sus vacas en dos corrales A y B. Sus empleados se encargan diariamente de recoger la leche, obteniéndose una cantidad total de 200 l. El ganadero sabe que las vacas del corral A dan la mitad más de leche que las del corral B. ¿Qué cantidad de leche se recoge diariamente en cada corral? (PF1)

Modelo:

x = cantidad diaria de leche que se recoge en A

y = cantidad diaria de leche que se recoge en B

$$\left.\begin{aligned} x + y &= 200 \\ x &= y + \frac{y}{2} \end{aligned}\right\}$$

Situación: Preguntas de un examen tipo test (PE4): Imagina que te presentas a un examen tipo test. El test consta de 20 preguntas y por cada respuesta acertada te dan 0´5 puntos y por cada errónea quitan 0´25 puntos. Si te dan la puntuación final, p. ej. 6´25, y quieres saber cuántas has acertado y cuántas has fallado, ¿cómo lo harías? (PF4)

Modelo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0'5 & -0'25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ \langle\rangle \end{pmatrix} \qquad Con\ \langle\rangle = Resultado$$

x = número de respuestas correctas

y = número de respuestas incorrectas.

Situación: Sistema masa-resorte (MR5): Sobre un resorte hay una masa de 10 Kg, sabiendo que la longitud del resorte es de 25 cm ¿Qué longitud alcanzaría si colgamos una masa de 15 Kg? (PF5)

Modelo:

$$P = mg = Kx = 98\ N$$

$$K = \frac{98N}{0'25m} = 392\,N/m$$

Situación: Circuito de motocicletas (CM6): Imaginemos que en un circuito de motocicletas, una sale de la meta 2 horas antes que otra a una velocidad constante. Si queremos saber a qué velocidad deberá ir la segunda moto para adelantar a la otra y llegar al final del circuito al mismo tiempo (PF6)

Modelo:

$Moto\ 1^a = A,\qquad Vel = v_A = e_A/t_A\ ,\quad e_A = v_A\ .\ t_A$

$Moto\ 2^a = B,\qquad Vel = v_B = e_B/t_B\ ,\quad e_B = v_B\ .\ t_B$

$e_A = e_B\ ,\qquad t_A = t_B + 2\ \ (en\ horas),\qquad v_A = cte\ conocida$

Por tanto $v_A \, . \, t_A = v_B \, . \, t_B$

$$\frac{v_A \, (t_B + 2)}{t_B} = v_B$$

Situación: Salas de fiestas (SF7): Consultando en dos salas de fiesta para el precio de una fiesta-cena en grupo se tiene las siguientes respuestas:
<u>Sala 1</u>: 5.000 Ptas fijas por persona más 15.000 Ptas por alquiler de la sala.
<u>Sala 2</u>: 3.000 Ptas fijas por persona más 20.000 Ptas por el alquiler de la sala.
El problema es qué sala alquilar para que salga más rentable, claro está, dependiendo del número de personas asistentes a la fiesta (PF7)
<u>Modelo</u>:

$$5.000x + 15.000 \leq 3.000x + 20.000$$

Situación: Trayectoria de un barco por medio del océano (TB9). El capitán pretende saber a que lado le queda cierta isla de la cual conoce sus coordenadas. (PF9)
<u>Modelo</u>:
Este es un ejemplo para tratar con inecuaciones de dos variables.
En el problema se trata de comprobar si el punto donde está la isla pertenece a las soluciones de cierta inecuación.
La situación podría verse como una recta sobre un plano y un punto. El problema podría ser entonces más analítico que algebraico (PF9).

De las situaciones problema antes presentadas podemos deducir que en general las situaciones propuestas por los participantes se corresponden con problemas del álgebra escolar de secundaria; sin embargo, para modelizar las referidas al sistema masa-resorte (MR5) y al circuito de motocicletas (CM6) son necesarios conceptos o modelos de la física (ley de Hooke y velocidad). Asimismo, en el modelo del aparcamiento en un parking (AP8) se requiere el concepto de "función parte entera" que es poco tratado en secundaria. Los conceptos del álgebra lineal que están relacionados con cada modelo son las ecuaciones lineales (VF2, PA3, MR5), sistemas lineales de ecuaciones (LV1, PE4), matrices (PE4), así como las inecuaciones lineales en una y dos variables (SF7, TB9). También los participantes presentaron dos modelos que involucran funciones elementales, específicamente la funciones potencial y parte entera (CM6, AP8). La situación problema correspondiente a las preguntas de un examen (PE4) aparece repetida en sistemas lineales y matrices porque el profesor en formación PF4 presentó los dos modelos alternativos aunque en el cuaderno desarrolló el modelo matricial. En general la variedad de situaciones problema, aportadas por los futuros profesores, revelan habilidades para la identificación de situaciones problema del mundo físico y social vinculadas a las matemáticas escolares, principalmente orientadas hacia el entorno de los alumnos de secundaria.

Primera cuestión de la parte A:

De los cuadernos de notas de los participantes se extrajo que para algunos de ellos los modelos matemáticos considerados podrían ayudar comprender la situación problema (PF5), obtener información (PF7), explicar la situación (PF8) e identificar utilidad práctica (PF9), tal como se recoge en la tabla 5.1 donde se resumen las respuestas dadas por los participantes en la primera sesión. Cabe destacar que los profesores en formación PF1, PF2, PF3, PF4 y PF6 no respondieron a las cuestiones referidas a las consecuencias del modelo y el interés y utilidad del mismo. Esto pudiera relacionarse con preocupaciones disciplinares que los induce a centrar su atención en la estructura del modelo más que en sus consecuencias y utilidad.

Respecto al conjunto de interrogantes que conforman la primera cuestión, los participantes sólo consideraron las siguientes: *¿Qué se puede decir de la situación a partir del modelo? y Comenta el interés de la situación y la utilidad del modelo.* La ausencia de consideración, por parte de los participantes, de las otras interrogantes podría ser producto del exceso de preguntas propuestas. Aunque éstas fueron incluídas sólo con el propósito de conocer hasta dónde lograban describir y explicar sus modelos, es decir, esto no representaba una información central para esta investigación, sólo ayudaba a reflejar el estado inicial de los participantes.

A continuación se presentan y analizan las respuestas a las dos preguntas atendidas por los profesores en formación.

¿Qué se puede decir de la situación a partir del modelo?

Los profesores en formación plantearon que la comprensión de la situación problema se lograría mediante la formulación de preguntas, cambios de condiciones y resolución de problemas similares; lo cual ayudaría a generar reflexión acerca de la situación planteada. Al respecto se presentan algunas afirmaciones:

> "Ahora nos podríamos preguntar a cómo debería vender los tomates maduros si en vez de tener 50 Kilos, tiene que vender 100 Kilos rebajados ya que han pasado dos días más y se le han madurado otros 50 Kilos, para que el frutero no pierda dinero a los tomates. [VF2] Se modelizaría de igual forma [que el modelo dado inicialmente]:
>
> $$180.200 + 100.x = 45.000$$
>
> Así podrían surgir muchas más preguntas, como por ejemplo, si además de los tomates, tuviese pepinos,..." (PF2)

> "Como todos los modelos sirven para comprender la situación, en este caso [MR5] de forma cuantitativa. Además se pueden resolver problemas similares de forma parecida y nos puede llevar a predecir estructuras similares en casos que no parecían tener ninguna relación" (PF5)

> "...podemos complicar la situación [AP8] imponiendo condiciones generales usuales de la vida real. Por ejemplo, se puede definir una función que, a partir de las 24 horas de aparcamiento, no cobre por horas, sino por días, a una cantidad inferior el día que el coste de 24 horas."(PF8)

La obtención de información a partir de los modelos fue otro de los aspectos identificados por los profesores en formación. El tipo de información estuvo referido a los resultados de los problemas planeados. Al respecto tenemos:

"A partir del modelo [SF7] puedo obtener información de qué sala es la más económica dependiendo del número de personas y también ser capaz de encontrar un número de personas para las cuales tanto la sala 1 como la sala 2 tengan el mismo coste." (PF7)

Los profesores en formación también afirmaron que a partir del modelo se podría explicar la situación correspondiente. Aquí encontramos una utilidad muy importante de la modelización como lo es su contribución a la explicación de los fenómenos (Davis, 1991). Sobre este particular recogimos lo siguiente:

"...[AP8] podría explicarse a partir de varios valores asociados a distintos tiempos.

t	Coste
1	P
2	2P
3	3P
2´5	3P

Se observa que, aún tomando el tiempo valores distintos, el coste es el mismo para una hora que para cualquier fracción suya." (PF8)

La utilidad práctica del modelo fue otra de las consecuencias de disponer de un modelo de una situación real. Es decir los profesores en formación plantearon que el modelo también ayuda a visualizar utilidades que podrían orientar otras actuaciones tanto del alumno que participa de la modelización como del profesor en la continuidad o reconducción o de la enseñanza. En particular tenemos:

"El modelo [TB9] puede tener más utilidades prácticas, incluso para el desarrollo de "más" matemáticas, como por ejemplo, programación lineal." (PF9)

Comenta el interés de la situación y la utilidad del modelo

Respecto a los modelos presentados por los participantes, en cada una de las situaciones problema planteadas se aprecia el interés por el aprendizaje de los alumnos y la utilidad otorgada a los modelos en la toma de decisiones relacionadas con las situaciones que representan.

Al referirse al interés de las situaciones para los alumnos, los participantes consideraron que con ellas se incrementaría la motivación y además se les posibilita a los alumnos la oportunidad de experimentar, lo cual les ayudaría a comprender la situación y los conceptos algebraicos involucrados en la modelización de la misma. En ese sentido expresaron los siguientes juicios:

> "Este modelo [LV1] tendría sin duda gran interés y motivación para aquellos alumnos que vivan o procedan de zonas rurales." (PF1)

> "Se trata de una situación [AP8] de gran interés para el alumnado, pues presenta una situación perfectamente cotidiana a la que, casi todos, nos vemos obligados a enfrentarnos múltiples veces a lo largo de la vida."(PF8)

> "[En MS5] Pienso que el alumno puede, experimentando, observar la relación que hay entre la teoría, ley de Hooke y la experiencia y puede llevar a plantearse más preguntas y ver las cosas desde un punto de vista más crítico y riguroso.(PF5)

Respecto a la utilidad de los modelos en la toma de decisiones, los participantes se refirieron al beneficio de éstos en sí mismos para resolver los problemas planteados. Por otra parte, también señalaron razones para introducir conceptos matemáticos. Es decir, los futuros profesores vieron inicialmente la modelización como apoyo para resolver problemas y también como estrategia para incorporar y estudiar nuevos conocimientos matemáticos. En ese sentido tenemos:

"A partir del modelo [SF7] puedo obtener información de qué sala es la más económica dependiendo del número de personas y también ser capaz de encontrar un número de personas para las cuales tanto la sala 1 como la sala 2 tengan el mismo coste." (PF7)

"El modelo [TB9] puede tener más utilidades prácticas, incluso para el desarrollo de "más" matemáticas, como por ejemplo, programación lineal." (PF9)

Segunda cuestión de la parte A:
¿Utilizarías calculadora gráfica para obtener el modelo y /o para responder a las preguntas de la situación dada?¿por qué?

Sobre este tema los profesores en formación se mostraron dispersos y cautos en sus respuestas. Unos participantes asumieron la CG como herramienta de cálculo (PF1, PF2, PF5) y de visualización gráfica (PF7, PF9). Otros participantes, sin argumentar razones, manifestaron que no la utilizarían en la situación planteada por ellos (PF4, PF8). También hubo quienes manifestaron no saber cómo usarían la CG (PF3, PF6). En la tabla 4.6.1.2 se muestran los diferentes usos dados por los participantes a la CG en cada una de las situaciones propuestas.

Tabla 4.6.1.2. *Usos dados a la calculadora gráfica en las situaciones problema iniciales*

Uso de la CG	*Situaciones problema*
Herramienta de cálculo	LV1, VF2, MR5
Visualización gráfica	SF7, TB9
No la utilizarían	PE4, AP8
No saben como usarla	PA3, CM6

Algunas respuestas emitidas por los profesores en formación fueron:

"El uso de la CG [en LV1], sería para la resolución del sistema, pero no para graficar las dos funciones (las ecuaciones del sistema), pues creo que esto complicaría mucho el entendimiento del problema por parte del alumno." (PF1)

"[En SF7] Podría utilizar calculadora gráfica para representar en la calculadora el intervalo donde cada sala es más económica. De esta manera podría tener una representación visual." (PF7)

"No lo sé, puesto que nunca he visto la potencia de recursos como éste. Quizá por la simplicidad del problema [PA3] sería más aconsejable resolverlo por el método tradicional." (PF3)

"En estos momentos no sabría como utilizar la calculadora gráfica [en CM6] pero supongo que una gráfica que nos represente cómo varía la solución en función de los datos originales conforme van cambiando sería muy útil y nos daría una idea de por donde va la solución antes de ponernos manos a la obra y resolver el problema." (PF6)

"No usaría la CG porque no la veo necesaria para esta cuestión, [AP8] sólo hace falta rudimentarias multiplicaciones." (PF8)

Tercera cuestión de la parte A:
Escribe detalladamente los pasos realizados en el diseño de cada modelo e indique las dificultades encontradas.

En la tabla 4.6.1.1 observamos que cuatro de los profesores en formación (PF1, PF2, PF3, PF4) no indicaron los pasos seguidos en la obtención de sus correspondientes modelos. El análisis de las producciones del resto de los participantes revela aspectos que en líneas generales nos permiten establecer los pasos seguidos en el diseño de los modelos elaborados. Debemos aclarar que cada profesor en formación utilizó algunos de estos pasos, tal como se puede observar en el tabla 4.6.1.1

Los pasos en cuestión se resumen a continuación:

1. Introducción al alumno en el tema matemático a estudiar, por ejemplo: sistemas de ecuaciones lineales.
2. Plantear la situación problema
3. Identificación de los datos
4. Búsqueda de relaciones
5. Expresar el modelo matemático
6. Utilizar la CG para representar el modelo en gráficas y/o tablas
7. Interpretar

Cuarta cuestión de la parte A

Elabora un argumento a favor y otro en contra, sobre el uso de la modelización y de la calculadora gráfica para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria.

En la tabla 4.6.1.3 se presentan los argumentos emitidos por los futuros profesores tanto a favor como en contra de la utilización de la modelización en la enseñanza del álgebra lineal. Dichos argumentos los hemos agrupado tomando en cuenta las dimensiones del currículo al nivel de la planificación de los profesores.

Dentro de los argumentos a favor y en contra de la modelización, los participantes no consideraron la evaluación. Es decir, los principales argumentos a favor de la modelización estuvieron dirigidos al alumno y al profesor. En relación con los argumentos a favor, para el alumno se mencionó que con la modelización éste participa de conexiones de las matemáticas y el mundo físico, natural y social. Respecto a los argumentos a favor para el profesor, se indicó que la modelización incrementa la comunicación y la discusión en la enseñanza mediante la formulación de situaciones del mundo real. Por otra parte, se mencionó que el contenido matemático del álgebra lineal se ve favorecido por la posibilidad de sus aplicaciones. Los argumentos en contra evidencian que, en la primera sesión, los participantes consideraban el proceso de modelización muy rígido y poco proclive para el razonamiento de los alumnos. Lo negativo para el profesor fue el requerimiento de tiempo para llevar adelante las modelizaciones en las clases. Las reflexiones de los profesores en formación se centraron fundamentalmente en lo relativo al profesor y al alumno, haciendo muy poca alusión al contenido matemático y ningún comentario respecto a la evaluación. Podría reflejar que los participantes tienen una visión parcial del currículo, no atendiendo al contenido matemático con la misma profundidad con que se refieren al profesor y al alumno, y obviando a la evaluación por una posible falta de posicionamiento al respecto.

Tabla 4.6.1.3. *Argumentos sobre el uso de la modelización para la enseñanza del álgebra lineal*

	Alumno	*Profesor*	*Contenido matemático*	*Eva-lua-ción*
A favor	-Favorece la atención del alumno, porque se muestra la utilidad del álgebra. -El niño enlaza las matemáticas y la vida -Se relacionan conceptos matemáticos con situaciones cotidianas -El alumno conecta las matemáticas con el mundo que lo rodea -Se logra un aprendizaje más completo -Se resuelven problemas de manera rápida y eficaz	-Es muy útil porque permite plantear ecuaciones -El profesor relaciona conceptos matemáticos con situaciones del mundo real -Se proporciona una enseñanza más íntegra -Propicia el trabajo en grupo y las discusiones	-Permite la resolución de sistemas de ecuaciones	No se aludió
En contra	-Dependencia del alumno a ciertos modelos -Exagerada estructuración de los fenómenos reales, lo cual puede limitar la búsqueda de otras formas de resolver un problema -El niño puede perder su capacidad de razonar y de entender lo que hace, por ser un proceso muy estructurado. -Puede ser un obstáculo para la abstracción del alumno	-Dificultad para modelizar situaciones del mundo real -"Pérdida" de tiempo en el proceso de enseñanza-aprendizaje -Muchas dudas para el profesor, ej. ¿hay siempre modelos apropiados? ¿la modelización abarca toda el álgebra?	Probabilidad de error en la resolución	No se aludió

En la tabla 4.6.1.4 se muestran los argumentos a favor y en contra de la calculadora gráfica. También los hemos agrupado según las dimensiones del currículo al nivel de la planificación de los profesores.

Tabla 4.6.1.4. *Argumentos sobre el uso de la calculadora gráfica (CG) para la enseñanza del álgebra lineal*

	Alumno	Profesor	Contenido matemático	Evaluación
A favor	-Útil para hacer cálculos antes de resolver los problemas. -La CG libera al alumno de cálculos tediosos y lo centra en la comprensión del problema. -El alumno se familiariza con herramientas informáticas -El alumno puede experimentar - Despierta el interés y la curiosidad - Rompe la monotonía	-La CG muestra gráficas y cómo varía la solución en función de los datos originales -Obtener representaciones gráficas más exactas y más rápido	La CG para resolver sistemas de ecuaciones	Permite al profesor proponer grandes cálculos
En contra	-Con el uso frecuente de la CG se pierde el manejo del cálculo -Puede generar dependencia en el alumno -Distrae al alumno	-Mucha visualización de diferentes maneras complicaría la comprensión del problema por parte del alumno. -Usar la CG como apoyo, nunca como única herramienta. -Dificulta la rapidez de las clases	-Puede generar memorización de comandos sin comprender los conceptos matemáticos	Carencia de CG en las aulas -Alto costo de la CG

Los argumentos a favor de la CG para el alumno se centraron en su utilidad como asistente matemático. Reconocieron que la CG ayuda al profesor a realizar visualizaciones más rápidas y precisas. Respecto al álgebra la CG permite resolver problemas. Con relación a la evaluación los participantes mencionaron la posibilidad que tendría el profesor de proponer cálculos más complicados. En los argumentos en contra del uso de la calculadora respecto del alumno expresaron las posibilidades de subestimación del cálculo con papel y lápiz. Referente al profesor señalaron que las distintas posibilidades de la CG pueden desviar la atención del alumno. En cuanto al contenido matemático, argumentaron que la CG puede verse como fin y no como medio de enseñanza. En cuanto a las posibilidades de evaluación con CG indicaron que éstas se verían afectadas por la carencia de calculadoras en las aulas.

De las opiniones de los profesores en formación a favor y en contra de la CG podemos deducir que ésta fue vista básicamente con sentido instrumental. En esta primera sesión los participantes no logran vislumbrar la valiosa conexión con la modelización. Sin embargo, reflejaron en general inquietud hacia la CG respecto a cada una de las dimensiones curriculares en el nivel de la planificación.

4.6.2. Análisis PARTE B. Consideraciones didácticas

Las respuestas dadas por los participantes a esta segunda parte se encuentran resumidas en la tabla 4.6.2.1 En esta actividad se pretendía que los profesores en formación nos mostraran algunas reflexiones sobre el diseño de una actividad didáctica específica. Sus producciones nos ayudaron en su momento a ir reconociendo en los participantes sus intereses y niveles de conocimiento didáctico. A continuación presentamos el análisis de las respuestas presentadas por los profesores en formación respecto a cada una de las cuestiones consideradas.

Primera cuestión de la parte B:

Describe una situación problema del mundo real para que el profesor cumpla con la referida asignación, es decir, elaborar una actividad didáctica para mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.

Los futuros profesores plantearon situaciones cotidianas y otras referidas a fenómenos específicos (ver tabla 4.6.2.1). Dentro de las situaciones cotidianas presentaron algunas situaciones, distintas a las propuestas en la parte A, relacionadas con monedas y billetes y con niñas y niños en un colegio. Otras situaciones estuvieron relacionadas con mezclas para fabricar pulseras y el cruce de estelas de aviones. A manera de ejemplo tenemos:

> “Queremos saber el número de niños y niñas que hay en un determinado colegio sabiendo por ejemplo que hay el triple de chicas que de chicos. Tendríamos entonces:
>
> $$\left.\begin{array}{r} x+y=z \\ x=3y \end{array}\right\}$$
>
> donde x= chicas, y=chicos” (PF6)

> “Se dispone de oro de 860 y 940 milésimas y se desea fabricar una pulsera de 5 gr y 920 milésimas fundiendo dos trozos del oro anterior. ¿Cuánto se necesita de cada tipo de oro?
>
> x = gramos del oro de 860 milésimas; y =gramos del oro de 940 milésimas
>
> Gramos de oro netos: 0´86.x + 0´94 .y
>
> Calidad de la mezcla (x+y gramos):
>
> $$\frac{860.x+940.y}{x+y}$$ (en milésimas)” (PF8)

Tabla 4.6.2.1. *Resumen de respuestas dadas en la primera sesión*
PARTE B (Consideraciones didácticas)

	Situación problema	*Preguntas que requieren utilizar modelización*	*Secuencia de actividades*	*Aspectos a evaluar en los alumnos*
PF1	Idem parte A	No las indica	No la indica	No los indica
PF2	Idem parte A	Variar preguntas, por ejemplo cambiar de frutas...	Establecer una ecuación con una incógnita	No los indica
PF3	Monedas y billetes	¿Se puede conocer la cantidad que representa otra configuración de monedas y billetes? ¿Se puede conocer la solución aritméticamente?	1.Plantea-miento del problema 2.Destacar los datos y cuestiones del problema 3. Hacer hincapié en la necesidad del modelo para la resolución 5. Resolución	-Elección del modelo - Justificación de dicha elección - Resolución (utiliza la observación y planteamiento de preguntas al alumno para saber su nivel de comprensión del problema)
PF4	Idem A (PE4) con resultado final de 6´25	Hallar número de respuestas correctas	-Escribir el sistema de ecuaciones resultante de analizar la situación -Introducir matriz de coeficientes en CG -Hallar la solución de la ecuación matricial Ax=**b** -Hallar la inversa de A en la CG -Ver resultados y comprobar -Comparar con la solución directa	-Representación del sistema y la introducción de la matriz -Hallar la matriz inversa -Dar el resultado de la multiplicación por **b**

PF5	Problema simple de dos incógnitas (sin precisar uno en particular)	-¿Qué representa el punto de corte a la gráfica? -Plantear un problema sin solución y hacer ver al alumno la relación con el paralelismo de dos rectas	-Planteamiento del problema -Intentar que el alumno lo resuelva con una incógnita -Introducirlo en el caso de dos incógnitas -Resolver varias ecuaciones de forma matemática -Exponer problemas similares con otras ecuaciones -Realizar prácticas con la CG	-Resolución de ecuaciones y planteamiento de problemas, representación gráfica de sistemas de ecuaciones e interpretación de la solución (con y sin CG si es posible) -Interés por la clase -Trabajo en grupo ¿Cómo? Corrección de cuadernos, actividades en pizarra, con CG. Examen e intervenciones en clase.
PF6	N° de niñas y niños en un colegio $\left.\begin{array}{r} x+y=z \\ x=3y \end{array}\right\}$ x=chicas y=chicos	-Si hay 500 alumnos en total, ¿cuántas chicas y chicos hay? -Si se dan de baja el 25% de las chicas ¿cuántos alumnos habrá en el colegio?	No la indica	-La interpretación del problema, es decir pasar del enunciado a la nomenclatura algebraica -La resolución correcta, bien manual o con la CG -La interpretación de las soluciones.
PF7	Dinero en un monedero	¿Qué dinero tiene cada uno? ¿Cuánto dinero tienen entre los dos chicos?	-A partir de una ecuación en una variable, se introduce el concepto de ecuación en dos variables -Explicar lo que es un sistema de ecuaciones -Métodos de resolución -Análisis de los resultados	1. Interpretación de los resultados 2. Planteamiento del problema matemático y asignación de variables

PF8	Fabricación de pulsera de oro $\frac{860x+940y}{x+y}$	-¿Cuántos gramos del primer tipo de oro son necesarios para obtener 7 gr de mezcla de 920 milésimas? -¿Es posible obtener oro de 980 milésimas mezclando oro de estos dos tipos? ¿y de 800 milésimas?	-Explicar lo que significa la calidad de un tipo de oro -Poner varios ejemplos de lo anterior -Enseñar a calcular el oro puro que hay en una mezcla, conocida su calidad -Proponer una tabla para rellenarla sobre la calidad del oro -Proponer y resolver sencillos problemas sobre mezclas -Proponer problemas más avanzados	1. Prioridad en el orden de las operaciones. Se llevaría a cabo estudiando qué cálculos hacen en el desarrollo de un problema. 2. Comprensión del concepto de calidad del oro como razón entre oro puro y gramos totales.
PF10	Cruce de trazados de humo de dos aviones	¿En qué puntos se cruzan los trazados de humo de dos aviones? ¿Podrían colisionar? Si...	-Explicar el problema -Explicar la representación de una trayectoria mediante la CG -Trabajando en grupos, usar la CG y averiguar dónde se cortan. El profesor resolverá las dudas sobre álgebra y sobre CG -También se puede plantear el problema en tres dimensiones para introducir rectas cruzadas	-Representación de rectas en el plano y en el espacio y solución de un sistema de ecuaciones. La primera viendo si han representado bien la recta con la CG y la segunda resolviendo el sistema por aproximaciones con la CG

En estas dos situaciones se evidencia que los respectivos profesores tenían prevista la utilidad de los sistemas de ecuaciones. Sin embargo, esto no fue la norma ya que la mayoría no expuso situaciones específicas, como el caso siguiente:

> "Plantear un problema simple en el que el alumnado se vea necesitado a usar dos incógnitas. Resolver el problema por uno de los tres métodos clásicos (Enseñándola, realizando ejercicios...) y representar gráficamente cada una de las ecuaciones y obtener el punto de corte y así hacer ver al alumno qué es lo que ha hecho al resolver la ecuación (Hacer esto con más ejemplos)" (PF5)

En esta formulación se puede apreciar que el profesor en formación pensó en una enseñanza con comunicación unidireccional para desarrollar la actividad; es decir, que es el profesor quien presenta, resuelve y representa. Esto último reflejó algunas formas de ver la enseñanza por parte de algunos participantes, al inicio del curso-taller. Otra inferencia que hacemos está referida a la falta de especificidad en la situación problema, lo cual podría evidenciar la necesidad de contar con fuentes de situaciones para cada tema. Esto se lograría planificando adecuadamente las actividades a desarrollar, es decir, realizando un análisis didáctico.

Segunda cuestión de la parte B:
Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica.

De acuerdo a la tabla 4.6.2.1 encontramos que las preguntas planteadas por los profesores en formación fueron tanto abiertas como cerradas. Estas últimas estuvieron dirigidas a la comprensión conceptual o procedimental. El participantes PF1 no formuló preguntas. En la tabla 4.6.2.2 se muestran las cuestiones formuladas por los participantes.

Tabla 4.6.2.2. *Cuestiones formuladas por los participantes*

Tipo de pregunta	Ejemplo
Abierta	¿Se puede conocer otra configuración de...? (PF3) ¿Es posible obtener oro de 980 milésimas mezclando...? (PF8)
Cerrada (conceptual)	¿Qué representa el punto de corte a la gráfica? (PF5)
Cerrada (procedimental)	Hallar el número de respuestas correctas (PF4) Si... ¿cuántas chicas y chicos hay? (PF6) ¿Cuánto dinero tiene cada uno? (PF7) ¿En qué punto se cruzan los trazados...? (PF9)
Sin enunciado	Varias preguntas...por ejemplo cambiar de frutas... (PF2)

Se puede notar el predominio de preguntas estandarizadas o de uso frecuente en los libros de texto. Esto es perfectamente de esperar cuando se sabe que los participantes no tenían experiencia en este tipo de actividades. La identificación de aspectos generales que caracterizaron a los profesores en formación en el estado inicial nos permitió orientar estrategias del curso-taller para lograr desarrollar habilidades de modelización en la enseñanza del álgebra lineal a lo largo del mismo.

Tercera cuestión de la parte B:
Ordena la secuencia de las actividades a seguir por el profesor, para lograr su objetivo

Ante esta actividad encontramos que la secuencia estructurada reflejó la manera como los profesores en formación planificarían su actividad didáctica para introducir las aplicaciones de los sistemas de ecuaciones lineales. Al analizar las respectivas producciones encontramos que los participantes asumieron fundamentalmente un proceso de enseñanza centrado en el papel del profesor. Esto último lo podemos constatar cuando en sus producciones los participantes mencionaron como actividades del profesor:

“proponer y resolver sencillos problemas” (PF8)

“Explicar el problema” (PF10)

“Destacar los datos y cuestiones del problema” (PF3)

“Escribir el modelo...” (PF4)

“Explicar lo que es un sistema de ecuaciones” (PF7)

“Exponer problemas similares...” (PF5)

La secuencia genérica que presentaron los profesores en formación fue la siguiente:

1. Planteamiento de la situación problema
2. Escribir el modelo matemático dado por un sistema de ecuaciones
3. Resolver, con CG o sin ella, el sistema de ecuaciones
4. Plantear otros ejemplos similares
5. Comprobar resultados usando la calculadora gráfica.

Se observó en las secuencias propuestas que los participantes no enfatizaron el proceso de construcción del modelo, ni la interpretación de los resultados obtenidos a partir del modelo (ver tabla 4.6.2.1). Intuimos el empleo de la CG como asistente matemático para cálculos parciales y para comprobar resultados ya que no expresaron otros usos específicos. Sin embargo, algunos casos particulares evidenciaron tímidas tendencias de participación de los alumnos y de los sistemas de representación en la CG. A continuación presentamos ejemplos de esas tendencias:

“Trabajando en grupos, los alumnos deben representar en la CG las dos trayectorias y averiguar donde se cortan.” (PF9)

“Explicar la representación gráfica de una trayectoria mediante la CG.” (PF9)

Cuarta cuestión de la parte B:

Sugiere al menos dos aspectos a evaluar e indica cómo los llevaría a cabo

De la tabla 4.6.2.1 tenemos que los aspectos a evaluar señalados por los profesores en formación fueron bastante generales. Los participantes consideraron relevante tener información acerca de:

1) La construcción del modelo
2) La justificación de la elección del modelo
3) La resolución con herramientas matemáticas, en este caso ecuaciones lineales
4) Interpretación de la solución obtenida
5) Interés por la clase
6) Trabajo en grupo

En cuanto a los instrumentos a utilizar para llevar a cabo la evaluación, los profesores en formación mencionaron:

1) Preguntas orales
2) Anotaciones de cuadernos
3) Actividades en pizarra y
4) Examen escrito.

En las respuestas dadas por los participantes no se especifica lo que se perseguiría con la aplicación de esos instrumentos de evaluación. Tampoco precisaron sobre el cómo se realizaría esa evaluación, a pesar que ese tema era parte de la cuestión. De igual manera no se refirieron a la importancia que tiene la evaluación para ayudar al alumno y al profesor a identificar los niveles de logro de los objetivos de aprendizaje. En el análisis de las respuestas se echan en falta detalles al respecto, sin embargo esto se corresponde con el momento inicial de los profesores en formación en el curso-taller.

Algunos de los aspectos a evaluar considerados por los profesores en formación fueron los siguientes:

"Resolución de ecuaciones y planteamiento de problemas." (PF5)

"La interpretación del problema, es decir pasar del enunciado a la nomenclatura algebraica". (PF6)

"Interpretación de los resultados..." (PF7)

4.6.3. Evaluación de la dimensión cognitiva objetiva en el momento inicial

Los resultados del análisis de las producciones revelan que en la primera sesión de implementación del programa MCA, en lo referente a la dimensión cognitiva objetiva, se logró:

1) que a partir de las actividades propuestas los profesores en formación plantearan situaciones problema del entorno del alumno y resolvieran de manera sistemática y secuenciada las propuestas algebraicas presentadas; esto pudiera responder, además, a su fortaleza disciplinar;
2) que los futuros profesores recurrieron a la CG como recurso en la resolución de las actividades, aunque ese empleo fue más de carácter instrumental que didáctico; sin embargo, en este primer momento los profesores en formación sólo incursionaron de forma tímida en la integración de la modelización matemática y la CG en el diseño de sus actividades didácticas sugeridas;
3) en lo concerniente a las propuestas de actividades de evaluación, los profesores en formación presentaron 'limitaciones' al momento de responder a cuestiones de esta dimensión curricular;
4) finalmente, con la evaluación de la primera sesión logramos uno de los objetivos de la evaluación del desarrollo del programa, como fue conocer las condiciones iniciales, de los participantes, respecto de lo pretendido en el programa MCA

Esto podemos sintetizarlo en los siguientes aspectos generales resultantes:

1. Poseen una sólida formación disciplinar
2. Están abiertos al empleo de la CG por parte del profesor de matemáticas, sin embargo mantienen una posición moderada sobre el uso de la misma por parte de los alumnos.
3. Tienen relativa habilidad para proponer situaciones del entorno del alumno.
4. Conservan el esquema de conducción de la clase dominada por el profesor.
5. Poca iniciativa al momento de proponer actividades de evaluación

4.7. Análisis de las producciones en el momento intermedio

El objetivo de la cuarta sesión fue modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales.

A continuación presentamos el análisis de las producciones de la cuarta sesión. Esta etapa intermedia del curso-taller aporta información relevante para la evaluación de los logros del programa. La identificación de los logros se efectuó sobre la base del análisis de las actividades desarrolladas por los participantes en cada una de las situaciones previstas. La información se recogió del correspondiente cuaderno de notas, las láminas expuestas por los participantes, la tarea adicional y se complementó con los registros de vídeo. En el cuaderno se observó el seguimiento del desarrollo de las actividades propuesta en el cuadernillo de actividades de la sesión. En este cuaderno de notas se pedía, explícitamente a los profesores en formación, explicar, detalladamente las propuestas o soluciones a las situaciones problema, tomando en cuenta que las mismas debían estructurarse pensando en el nivel de comprensión de los alumnos de secundaria. Estas instrucciones estaban impresas en el cuaderno de notas suministrado a cada profesor en formación. Los aspectos en los cuales se centró el análisis fueron: aplicación de la modelización, uso de la CG y su respectiva integración en el diseño de actividades didácticas, todo esto de acuerdo a los objetivos de nuestra investigación.

En las actividades propuestas en la cuarta sesión se contemplaron cinco situaciones problema para ser desarrolladas. Además los participantes realizaron la exposición en la clase, mediante láminas y proyecciones con la pantalla visualizadora de la CG, de las producciones obtenidas en las situaciones propuestas.

Además de las actividades desarrolladas en el aula se asignó una tarea para ser realizada fuera de las sesiones de trabajo, con el propósito de favorecer su ejecución con mayor libertad tanto en la resolución como en la reflexión. El análisis de ambas producciones, es decir, las que se efectuaron durante de las sesiones de trabajo y la que se efectuó fuera de las sesiones, lo presentamos de manera separada debido a las características de sus condiciones de ejecución.

Es decir, en primer lugar presentamos el análisis de las producciones realizadas en la sesión asentadas en los cuadernos de notas y las respectivas láminas de exposición. Posteriormente presentamos el análisis de la resolución de la tarea realizada fuera del aula, para luego efectuar el balance de la evaluación del momento intermedio del desarrollo del programa en la dimensión cognitiva objetiva. En la tabla 4.7.1 se muestra un resumen del abordaje, por parte de los profesores en formación, de las situaciones problema propuestas en la cuarta sesión. En dicha tabla las situaciones problema se denotan por SPi (i=1,2,3,4,5) y los profesores en formación se representan por PFi (i=1,...,10).

Tabla 4.7.1. *Abordaje de las situaciones problema de la cuarta sesión*

	SP1	SP2	SP3	SP4	SP5
PF1	-	-	-	Explica detalles Con CG Resuelve caso particular	-
PF2	Directamente Con CG	Explica detalles. Con CG. Resuelve caso particular	Directamente sin CG	Explica detalles Sin CG	-
PF3	Explica detalles Sin CG	Explica detalles. Con CG. Resuelve caso particular	Directamente Con CG	Directamente Con CG	-
PF4	Directamente sin CG	Directamente sin CG	Explica detalles Sin CG	Explica detalles Sin CG	-
PF5	Explica detalles Con CG	Directamente Con CG	-	-	-
PF6	Directamente Con CG	Directamente sin CG. Resuelve caso particular	Directamente Sin CG	Directamente Sin CG	-
PF7	Aritmética y álgebra Con CG	Directamente sin CG	-	-	-
PF8	Explica detalles Con CG	Explica detalles. Con CG	-	-	-
PF9	Directamente Con CG	Directamente. Con CG	-	Directamente Con CG	-
PF10	-	-	-	-	Explica detalles. Con CG

4.7.1. Análisis de las producciones realizadas en el aula

Para el análisis de las producciones asentadas en los cuadernos de notas consideraremos cada una de las situaciones propuestas en el cuadernillo de actividades del curso. La primera situación problema (SP1) fue la siguiente:

SP1. Compra de discos compactos*. Un estudiante puede gastar hasta 330 euros en un equipo estereofónico y algunos discos compactos. Si el equipo cuesta 175 euros y los discos 8.50 euros cada uno, determinar la cantidad máxima de discos que puede comprar.*

De acuerdo a la manera de abordar la situación problema (SP1) por parte de los participantes encontramos cinco modos de aproximación (ver tabla 4.7.1.1):

- Resolución directamente sin usar CG
- Resolución directa usando CG
- Resolución de manera aritmética y algebraica asistida con CG.
- Desarrollo detallando los razonamientos, sin CG
- Desarrollo detallando los razonamientos, con CG.

Resolución directamente sin usar CG

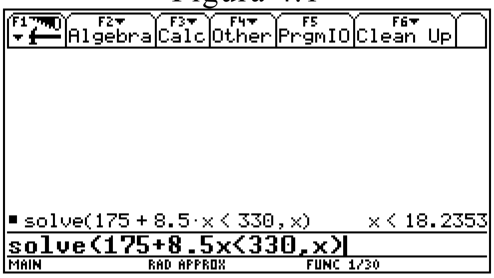
En este caso se ubica el participante PF4 quien sólo asumió un rol de resolutor del problema. Es decir, su interés lo centró en encontrar una respuesta y nada más. Esto quiere decir que no presentó una actividad que pudiera llevar a los posibles alumnos de secundaria a la comprensión del proceso de resolución. Empieza definiendo la función gasto $G(c)=175+8´50c$ con c el número de compactos. Luego al considerar el gasto límite de 330 euros plantea la inecuación $175+8´50c\leq 330$ de donde obtiene directamente $c\leq 18´23$. Y concluye que se puede comprar hasta 18 discos compactos.

Resolución directa usando CG

En el segundo caso tenemos aquellos profesores en formación que, como en el primer caso, resolvieron directamente pero acudieron a la calculadora gráfica. Veamos los dos casos siguientes:

a) El profesor en formación PF6 escribió directamente, y sin preámbulo, la inecuación 175+8´5x < 330. Luego acudió a la CG y presentó la pantalla mostrada en la figura 4.1. y concluyó que la solución es x < 18´2353, pero no efectúa ninguna interpretación. Es decir, el profesor en formación sólo se movió en el "mundo matemático" sin buscar la conexión de éste con la situación problema. Respecto al empleo de la CG sólo la manejó para el cálculo de la solución de la inecuación acudiendo únicamente a la capacidad simbólica de la misma. También es conveniente llamar la atención sobre la diferencia de notación entre las comas (papel y lápiz) y el punto decimal (CG), lo cual es importante enfatizar a los alumnos.

Figura 4.1



b) En este caso, el participante PF9 formuló la función coste del estudiante: *C(x)=175+8,5x* indicando que la *x* corresponde al número de discos compactos. Luego, muestra una pantalla en la CG idéntica a la del caso anterior y agrega que se puede comprar hasta 18 discos, lo cual indica que el participante interpretó el resultado mostrado en la CG de acuerdo a la situación problema. Esto último diferencia a este profesor en formación del anterior, pues dio importancia a que los alumnos interpretaran las soluciones, siendo éste uno de los momentos considerados en el proceso de modelización.

Resolución de manera aritmética y algebraica asistida con CG

En el tercer caso ubicamos el abordaje del estudio de la situación mediante herramientas aritméticas y algebraicas (PF7). El hecho de acudir a la aritmética muestra que la situación admite una aproximación diferente a la prevista para el curso-taller, es decir, la algebraica. Sin embargo, esto puso en alerta a los participantes acerca de abordajes imprevistos por parte de los alumnos cuando se trabaja con modelización. El procedimiento aritmético empezó considerando el total de 330 euros y restándole el costo del equipo que es 175 euros y obtuvo 155 euros. Luego dividió este último número entre el costo de cada disco compacto que es 18´5 euros, obteniendo 18´2353 y finalmente concluye en 18 discos, pero sin dar la argumentación correspondiente. El acercamiento algebraico fue muy escueto puesto que sólo planteó la inecuación *175+8´5x≤330*, utilizó el comando solve en la CG y obtuvo *x≤18´23*. Las dos formas de resolver la situación problema reflejan el poco interés didáctico asumido por el futuro profesor. En ningún momento vemos detalles que podrían ayudar a los alumnos a la comprensión de la resolución de la referida situación. En la aproximación algebraica no se explicó la construcción del modelo ni se interpretó la solución obtenida en la CG. Sin embargo en la lámina donde el participante PF7 expuso a la clase, el modelo construido arriba, utilizó la definición de la variable x igual al número de discos compactos. Observamos que no realizó la interpretación de la solución ni se aportaron nuevas preguntas que pudieran encauzar la discusión y participación de los alumnos.

Desarrollo detallando los razonamientos, sin CG

El cuarto grupo está referido a los abordajes de la situación que contemplaron detalles de los respectivos razonamientos con evidencia de interés didáctico, es decir con explicaciones que apuntan a una búsqueda de comprensión e interpretación del proceso seguido. Aquí insertamos aquellas aproximaciones que no incorporaron la CG. Como ejemplo de este modo de aproximación mostramos a continuación lo realizado por el PF3:

"*n* = número de discos compactos

1	*disco cuesta*	*8´50 euros*
2	*discos cuestan*	*2.8´50 euros*

....

n *discos cuestan* *n.8´50 euros*

Luego, *equipo* + n. 8´50 es el gasto realizado.

Como se pueden gastar un máximo de 330 euros y el equipo cuesta 175 euros, surge la siguiente inecuación:

$$175 + n.8´50 < 330$$

Obtenemos $n < 18´2353$

Y como el número de discos debe ser entero podré comprar 18 discos

NOTA: Al problema se le puede añadir ¿Cuánto dinero me sobra? O también ¿Qué precio deberían tener los discos si quiero comprar el equipo y 30 discos con menos de 400 euros?"

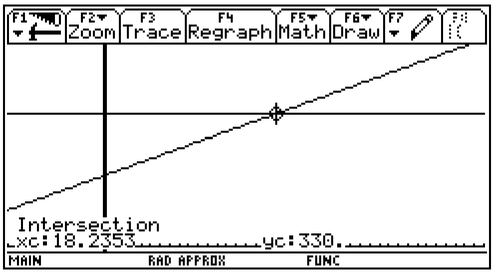
Podemos notar que se partió de la definición de la variable *n* y luego por un proceso de inducción se fue explicando hasta llegar a generalizar que *n* discos costaban *n.8´50.* A continuación el participante apeló a la condición impuesta al gasto máximo (330€) y al costo del equipo (175€) para llegar a formular el modelo matemático. Resolvió la inecuación directamente (no se preocupa por explicar el procedimiento) y argumenta, de cara a la situación propuesta, para concluir con la respuesta al problema. Por último, el participante introdujo nuevas interrogantes que enriquecen la situación problema y promueven nuevas aplicaciones del proceso de modelización.

Desarrollo detallando los razonamientos, con CG

Finalmente, respecto a esta situación problema SP1 los participantes FP5 y FP8 la abordaron de forma detallada con el empleo de la CG. En este caso encontramos que los profesores en formación construyeron el modelo de la situación y acudieron a varios sistemas de representación para obtener la respuesta con el empleo de la CG. Además, explicaron los razonamientos seguidos.

En el caso de PF5, empezó con una aproximación simbólica y resolvió en la CG la inecuación *175+8´5x<330* mediante la instrucción `solve (175+8.5x<330, x)`. Luego el profesor en formación argumentó que el resultado fue 18. Acto seguido el participante acudió al sistema de representación gráfica para lo cual consideró las funciones $y_1=175+8.5x$, $y_2=330$ y en la pantalla de la CG se observó:

Figura 4.2



El otro sistema de representación utilizado fue el tabular donde explicó que se tenía que ver donde "aproximadamente" coincidían y_1, y_2, es decir cuando *x=18*. En la tabla mostrada tenemos:

Figura 4.3

x	y1	y2
13.	285.5	330.
14.	294.	330.
15.	302.5	330.
16.	311.	330.
17.	319.5	330.
18.	328.	330.
19.	336.5	330.
20.	345.	330.

x=18.

MAIN RAD APPROX FUNC

Otra producción en la situación SP1 fue elaborada por el participante PF8, quien acudió a la CG para resolver simbólicamente y luego concluir la respuesta. Posteriormente éste elaboró una tabla donde consideró el dinero que le quedaba a medida que compraba discos, es decir la función dada por $330-(175+8.5x)$ donde x es el número de discos que compra.

Figura 4.4

x	y3
13.	44.5
14.	36.
15.	27.5
16.	19.
17.	10.5
18.	2.
19.	-6.5
20.	-15.

x=18.

MAIN RAD APPROX FUNC

A manera de justificar la elección de *x=18* el participante argumentó que en *x=19* se pasó del presupuesto al notar que el gasto fue $-6.5<0$.

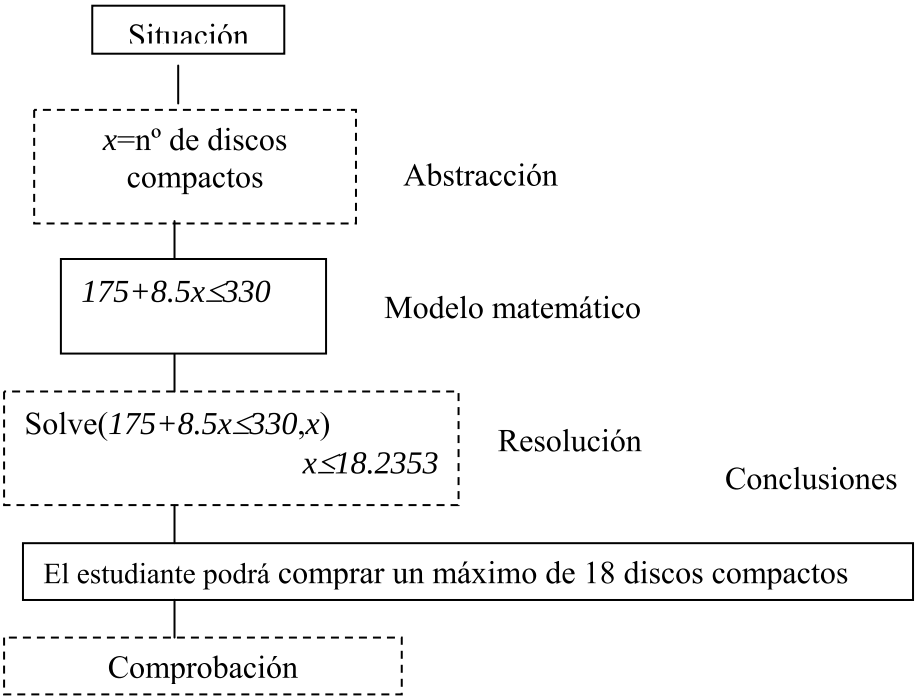
También el profesor en formación incluyó otras preguntas que podrían llevar a nuevas modelizaciones.

En conclusión, las producciones de los participantes en torno a SP1 evidenciaron modestos avances en la incorporación de la modelización y la calculadora gráfica de manera integrada en el ámbito algebraico relacionado con la situación en cuestión.

Dentro del grupo de las presentaciones detalladas incluimos las láminas del futuro profesor PF9, quien según nuestra interpretación realizó las actividades que se indican en el esquema 4.1. La estructura del citado diagrama es producto del análisis de las producciones tomando como referencia el proceso de modelización con la incorporación de la CG. Es decir se trató de identificar las acciones realizadas que corresponden a cada uno de los momentos del proceso de modelización matemática para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria.

En primer lugar describimos la forma del diagrama y, en segundo lugar, explicamos su contenido. Los recuadros en línea continua representan los resultados parciales que se obtienen en cada uno de los momentos del proceso de modelización (ver capítulo II). Los recuadros en línea discontinua indican los procesos involucrados en los diferentes momentos de la modelización. En el esquema 4.1 observamos que se partió de la situación SP1; luego, por abstracción que incluyó la definición de variables, se obtuvo el modelo matemático. La instrucción solve indica que se utilizó la CG en el proceso de resolución, se obtuvieron las conclusiones y, finalmente, se realizó el proceso de comprobación. En definitiva, el diagrama refleja niveles de aplicación del proceso de modelización con la incorporación de la CG en esta fase intermedia del curso-taller, es decir en la cuarta sesión.

Esquema 4.1. *Seguimiento del proceso de modelización en SP1*



La segunda situación problema propuesta en la cuarta sesión fue la siguiente:

SP2. Ingreso laboral. *Ricardo tiene dos trabajos de tiempo parcial; en uno le pagan 7 euros por hora y en el otro 5 euros por hora. Debe ganar, cuando menos, 140 euros semanales para sufragar sus gastos escolares. Determinar las diversas formas en que puede programar el tiempo para alcanzar su meta.*

En el análisis de esta situación SP2 identificamos dos de los modos de aproximación a la resolución de la situación. Los que resolvieron la problemática planteada en su totalidad y los que sólo se limitaron a estudiar casos particulares.

Resolución directa sin usar CG

En este caso los participantes PF4 y PF7 resolvieron el problema con pocos detalles. El participante PF4 consideró las variables x e y que denotan el número de horas en el trabajo que paga 7€ la hora y el número de horas en el trabajo que paga 5€ la hora respectivamente. Luego definió las funciones T_1 y T_2 por $T_1(x)=7x$ y $T_2(y)=5y$ y formuló el modelo de la situación SP2 definido por la desigualdad $T_1(x)+T_2(y)\geq 140$. No se observó la consideración de condiciones o restricciones en la construcción del modelo. Tampoco se explicaron los detalles y la necesidad de introducir las funciones lineales T_1 y T_2. Finalmente no se resuelve el problema sino que se planteó la desigualdad $y > \frac{-7(x-20)}{5}$ y se afirmó tener "siempre partes del semiplano superior". Obviamente no se vislumbró una clarificación de los procedimientos señalados. Podríamos decir que el diseño de la actividad no se estructuró para ser comprendido por alumnos de secundaria.

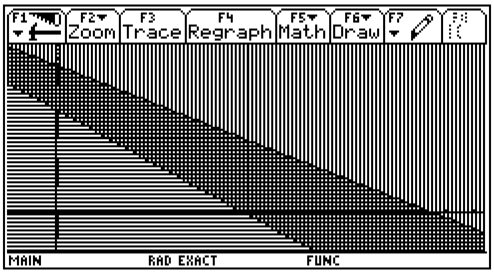
El otro caso presentado dentro de esta categoría fue más escueto ya que el profesor en formación sólo escribió las desigualdades $7x_1 + 5x_2 \geq 140$, $x_1 + x_2 < 5$ y afirmó que "este problema está abierto a muchas formas de solución imponiendo condiciones a la cantidad de horas." (PF7). Al igual que en el caso anterior pareciera que el participante elaboró sus notas previas antes de la versión para los alumnos. Conoce de la apertura del problema pero no estableció restricciones ni intentó llegar a algún resultado concreto acerca de la cuestión formulada en SP2, tampoco estructuró la actividad tomando en consideración condiciones para favorecer la comprensión por parte de los alumnos.

Resolución directa utilizando CG

En este caso tenemos el uso de la CG pero sin introducción previa a la visualización de la misma; es decir, se dejó que la CG "explicara" por sí misma. No se hizo interpretación ni se apreció su incorporación al proceso de modelización. Un ejemplo de este caso lo representan las producciones de los participantes PF5 y PF9. En lo correspondiente a PF5 planteó las inecuaciones $140<7x+5y$, $x+y<40$, definió las funciones

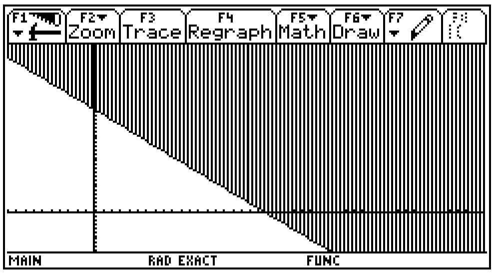
$y = \dfrac{140 - 7x}{5} \equiv y3(x)$, $y = 40 - x \equiv y4(x)$ y finalmente hizo la representación en la pantalla siguiente, sin dar detalles ni interpretaciones respecto a SP2:

Figura 4.5



El participante PF9 definió la función ingreso de Ricardo por $i(t_1,t_2)= 7t_1 +5t_2$ donde t_1≡tiempo en trabajo 1; t_2≡tiempo en trabajo 2. Luego escribió y presentó $i(t_1, t_2)\geq 140$ y en la calculadora hizo la representación mostrada en la figura 4.6.

Figura 4.6



En esta producción se notó dominio técnico de la CG en la graficación de funciones pero no se aprovechó para hacer conclusiones acerca de las soluciones, lo cual pudo haberle conducido a tomar en cuenta nuevas condiciones y el ajuste del modelo.

Resolución detallada utilizando CG

En este caso tenemos que los profesores en formación intentaron explicar los detalles de sus razonamientos. Además incorporaron la CG en sus producciones y abordaron el proceso de modelización. Utilizaron la CG para despejar variables, tal como se observa en la figura 4.7. También se empleó la CG para realizar tablas como la mostrada en la figura 4.8, construida con la función $y(x) = \dfrac{-7(x-20)}{5}$. En el contexto algebraico definieron las variables a utilizar en la construcción del modelo, introdujeron ecuaciones e inecuaciones en dos variables y la interpretación de sus soluciones. Respecto del estudio de SP2 encontramos que la mayoría de participantes en esta categoría resolvieron casos particulares. Veamos a continuación las producciones de dos profesores en formación.

Figura 4.7

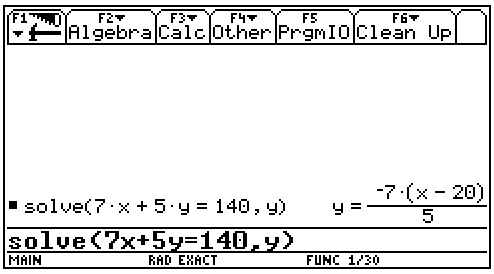
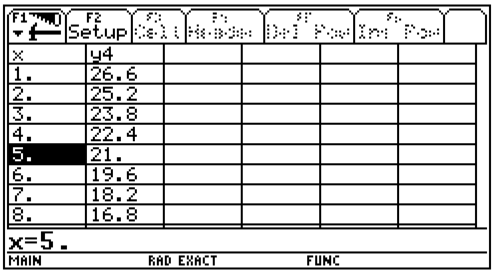


Figura 4.8



A manera de ejemplo consideramos la producción realizada por el participante PF8 , la cual mostramos a continuación:

"Sean x= horas en el primer trabajo; y= horas en el segundo trabajo

Como gana distinto en cada trabajo, sus ingresos serán

INGRESOS → 7x + 5y

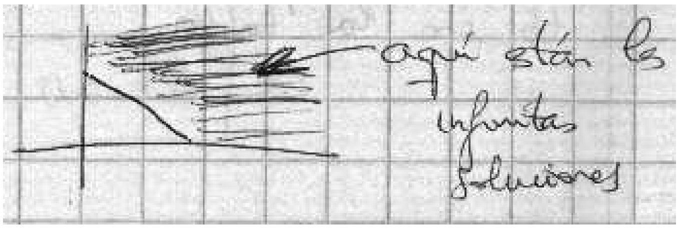
Como debe ganar al menos 140€ semanales, impondríamos

$$\boxed{7x + 5y \geq 140}$$

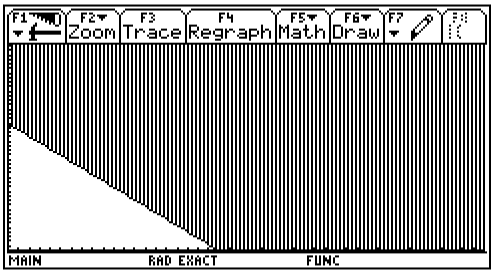
El límite de los gastos está en `solve(7x+5y=14Ø,y)` ⇒

$$y = \frac{-7(x-20)}{5}$$

Representamos esta recta con la región adecuada:



Esta región representada en la calculadora se visualiza de la siguiente manera:



<u>Otras posibles restricciones</u>:

-Cada día no puede trabajar más de 8 horas diarias (lo que imposibilitaría infinitas soluciones).” (PF8)

En esta última producción apreciamos la construcción del modelo a partir de la definición de variables y de las restricciones conocidas. También se empleó la CG para despejar variables y definir funciones lineales, así como para representar las soluciones de inecuaciones en dos variables. Por otro lado notamos que el participante PF8 mencionó otras restricciones, las cuales podrían conducir al refinamiento del modelo considerado y a nuevas discusiones con los alumnos. En conclusión se notó una integración de la modelización y la CG en el diseño de la actividad. Hubo, además, reflexión acerca de cada paso realizado y consideraciones que ayudarían a motivar a los alumnos y a comprender los conceptos matemáticos en conexión con la situación propuesta. Sin embargo, cabe mencionar que en ningún momento se hizo mención al carácter discreto o continuo de las horas a trabajar, lo cual introduciría más discusión en la interpretación y visualización de las soluciones de las inecuaciones de cara a SP2. El mismo profesor en formación PF8 hizo la presentación ante la clase y en sus láminas presentó el modelo mencionado anteriormente pero le agregó en forma simbólica la condición *x≥0, y≥0*. También presentó la representación gráfica, en la CG, de la región del plano que verifica la desigualdad involucrada en el modelo.

Tercera situación problema:

SP3. Fabricación de artículos deportivos*. Un fabricante de artículos deportivos asigna un mínimo de 1200 unidades de tiempo al día para producir cañas y carretes de pescar. Si se necesitan 10 unidades de tiempo para fabricar una caña, 15 para fabricar un carrete, determinar una inecuación que indique las maneras posibles de programar la fabricación de cañas y carretes.*

Esta situación problema fue abordada por los futuros profesores de manera directa con y sin CG. También se aproximaron mostrando detalles pero sin acudir a la CG. En lo que sigue analizamos SP3 a partir de esos tres abordajes.

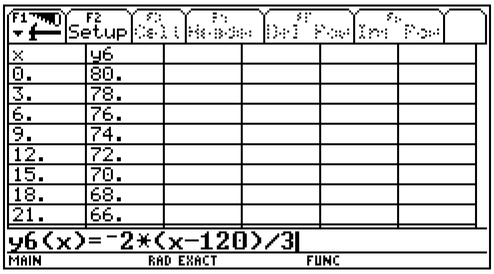
Resolución directa sin usar CG

En esta manera de estudiar la situación sólo se consideró la representación simbólica. Se definieron las variables *x*= número de cañas, *y*= número de carretes y luego se escribió la inecuación $10x + 15y > 1200$. Aquí se nota mucha brevedad en la construcción del modelo y además carencia de interpretaciones del mismo.

Resolución directa utilizando CG

En este caso tenemos el uso de la representación tabular. Esta vía fue utilizada por el participante PF3 quien partió de la igualdad 10x + 15y = 1200 y definió la función $y = \frac{-2(x-120)}{3}$ para construir la tabla de la figura 5.9. El participante no tomó en cuenta la restricción dada en SP3 referente al mínimo de 1200 unidades para fabricar los productos. Se refirió solamente al caso particular de 1200 unidades de tiempo. Concluimos que el proceso de modelización no fue realizado de manera explícita y tampoco se presentaron pautas para la interpretación de la tabla.

Figura 4.9



Resolución detallada sin acudir a la CG

En este caso se trató de explicar los razonamientos expuestos. Se inició definiendo variables, luego se tomó en cuenta los datos y condiciones dadas para definir la función de "fabricación" fab definida por fab(x,y)=10x+15y y considerar fab(x,y)≥1200. De allí resultó la inecuación $y \geq \frac{-2(x-120)}{3}$. El significado de las soluciones de la inecuación no se discutido ni se interpretó a la luz de SP3. Tampoco se propusieron nuevas preguntas para enriquecer la discusión sobre las programaciones de la producción de los productos mencionados en la situación dada.

A manera de conclusión podríamos afirmar que la situación SP3 no ofreció suficiente interés para ser tratada como una situación de modelización con el apoyo de la CG. Probablemente la expresión "*determinar una inecuación que...*" en el enunciado restringió el abordaje por parte de los participantes.

Cuarta situación problema:

SP4. Plantación. *Se tiene un presupuesto entre 300 euros y 600 euros para comprar árboles y arbustos para plantar un terreno. Después de la averiguación correspondiente se encuentra que los árboles cuestan 150 euros y los arbustos 75 euros. ¿Qué combinaciones de árboles y arbustos se pueden comprar? ¿Cuáles otras preguntas podrían formularse en esta situación?*

En esta situación también encontramos los cuatro abordajes anteriores, es decir: directamente sin CG, directamente con CG, explica detalles sin CG y explica detalles con CG. Las cuestiones formuladas en SP4 indican apertura de la misma así como la posibilidad de más de una solución

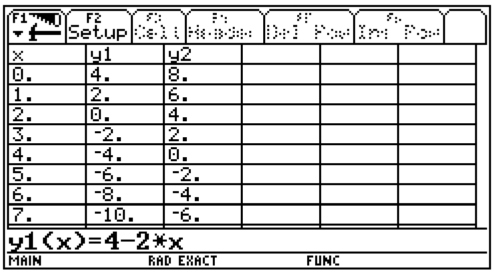
Resolución directa sin usar CG

Esta manera de resolución directa de las cuestiones planteadas en la situación SP4 se hizo considerando solamente la representación simbólica. En ese sentido el participante PF6 definió las variables x= árboles, y= arbustos e inmediatamente escribió las inecuaciones: $300 < 150x + 75y < 600$. El profesor en formación no resolvió la cuestión planteada en SP4 acerca de las combinaciones de árboles y arbustos que se pueden comprar. Respecto a la segunda cuestión el participante formuló las preguntas siguientes: "¿Cuántos metros de terreno necesitamos si cada árbol y arbusto se colocan a una distancia de 0´25 m en filas de 5 árboles/arbustos?" y "¿Con 550€ cuál es el máximo de árboles y arbustos que se pueden comprar?". Aquí notamos que las nuevas preguntas propuestas por el profesor en formación conllevarían modelizaciones y en consecuencia nuevas participaciones e interpretaciones que beneficiarían la discusión entre los alumnos. Estas preguntas también introducirían más conexiones de SP4 con el mundo real (metros de terreno) y con conceptos matemáticos (distancia, valores extremos).

Resolución directa utilizando CG

La resolución directa en este caso está referida a la brevedad con que se presenta la producción. Se definieron las funciones $y1= 4-2x$; $y2 = 8-2x$ a partir del costo de los árboles y arbustos y del presupuesto mínimo de 300 y el máximo de 600. Luego se introdujeron *y1, y2* en el editor de funciones de la CG y se construyó la tabla de la figura 4.10, donde x es el número de árboles, *y1* es el número mínimo de arbustos y *y2* es el número máximo. Esta manera de aproximarse a la situación problema podría conllevar dificultades, a los alumnos, en la interpretación de las soluciones. Por ejemplo cuando $x=3$ resulta $y1=-2$ (número mínimo de arbustos), $y2=2$ (número máximo de arbustos). El alumno debe llegar a que las combinaciones correspondientes en este caso son: (3 árboles, 0 arbustos), (3 árboles, 1 arbusto) y (3 árboles, 2 arbustos); para lo cual se requeriría de más detalles dirigidos a superar esas dificultades. Es decir la forma de presentación de la resolución del problema no favorecería la comprensión de la situación SP4 en alumnos de secundaria.

Figura 4.10



x	y1	y2
0.	4.	8.
1.	2.	6.
2.	0.	4.
3.	-2.	2.
4.	-4.	0.
5.	-6.	-2.
6.	-8.	-4.
7.	-10.	-6.

Resolución detallada sin acudir a la CG

La situación fue abordada con detalles en la construcción y formulación del problema matemático. A manera de ejemplo presentamos dos producciones. En la primera de ellas no se dio respuesta a la situación planteada. Tampoco se formularon otras preguntas ni se consideraron suposiciones adicionales. La misma fue presentada por el participante PF4:

> "Presupuesto≡p $300 \leq p \leq 600$
> Precio de cada árbol = 150 euros
> Precio de cada arbusto = 75 euros
> x=n° de árboles; y=n° de arbustos
> Veo para qué valores $300 \leq 150x+75y \leq 600$
> Defino $p1(x)$=precio de x árboles=$150x$; $p2(x)$=precio de x arbustos=$75x$" (PF4).

La segunda producción fue realizada por el participante PF2. En la misma se formuló el modelo y se indicó cómo conseguir las soluciones pero no las presenta. Eso podría resultar interesante para orientar a los alumnos en las actividades a desarrollar. Además en dicha producción se formuló la pregunta: "Si tengo exactamente 375 euros, qué combinaciones de árboles y arbustos puedo comprar". Esto puede conducir a precisar y comprender mejor la SP4 y sus conexiones con el álgebra.

Resolución detallada utilizando la CG

En este caso vamos a considerar una producción que muestra la integración de la modelización y la CG con evidencias de ser una actividad para los alumnos de secundaria. Sin preámbulos la presentamos a continuación:

> "En primer lugar planteamos el problema matemáticamente:
> Llamemos:
> x=número de árboles que se compran
> y=número de arbustos que se compran
> Coste de los árboles: $150x$
> Coste de los arbustos: $75y$
> Coste total: $150x + 75y$
> Inecuación lineal: $150x+75y \leq$ presupuesto

A continuación para simplificar la situación se resuelve el problema para presupuestos determinados. Por ejemplo, si se tiene un presupuesto de 500€ Hagamos en primer lugar una tabla ilustrativa:

	N° de árboles	N° de arbustos	Coste total
	0	1	75
	0	2	150
	0	5	375
	0	6	450
NO	0	7	525
	1	0	150
	2	0	300
	3	0	450
NO	4	0	600
	1	1	225
	1	2	300
	1	3	375
	1	4	450
NO	1	5	525
	2	1	375
	2	2	450
NO	2	3	525
NO	3	1	525

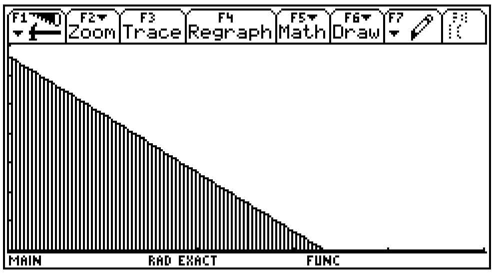
Ahora se haría una discusión sobre la tabla, según los intereses de la compra (Si el material es para un sitio u otro que se requieran más árboles o viceversa).

Significado geométrico de la inecuación:

Despejamos por ejemplo la *y*:

$$y \leq \frac{500}{75} - \frac{150}{75}x = \frac{20}{3} - 2x$$

Utilizando la CG resulta:



Otras preguntas podrían ser del tipo:

Si se dispone de un presupuesto determinado, calcular el número de árboles y arbustos que se pueden comprar; si se desea que el número de árboles sea doble al de arbustos." (PF1)

A partir de la producción presentada por PF1 notamos que se definen cuidadosamente las variables y los costes que intervinieron en SP4. El profesor en formación "simplificó" la situación al caso particular de un presupuesto de 500€ y construyó una tabla que permitiría realizar la conexión de la situación con las herramientas algebraicas consideradas, tal como la inecuación descrita. El participante mencionó la introducción de discusión sobre la tabla. Posteriormente introdujo la representación gráfica en la CG para estudiar el significado geométrico de la inecuación. Se nota que el participante intentó establecer actividades para interconectar conceptos algebraicos con la situación. Finalmente podríamos decir que se aplicó el proceso de modelización desde la simplificación hasta la interpretación de las soluciones con la inclusión de nuevas preguntas que apuntarían hacia nuevas modelizaciones.

La situación SP4 la podemos ver representada en los esquemas 4.2 y 4.3, donde analizamos las producciones presentadas en las láminas utilizadas para la presentación a la clase.

En los referidos esquemas podemos apreciar la aplicación del proceso de modelización con la incorporación de la CG.

Esquema 4.2

Situación

Define funciones de coste:
$p_1(x)$≡precio de x árboles: $150x$
$p_2(x)$≡precio de x arbustos: $75x$

Abstracción

Representación tabular de $p_1(x)$ y $p_2(x)$

Modelo matemático

Se observa en la tabla, realizada en la CG, para qué combinaciones se tiene el presupuesto permitido.

Resolución

Resultados

Interpretación de resultados

Conceptos:

Proporcionalidad directa

Función lineal

Representación tabular de una función

Esquema 4.3

Situación

x= nº de árboles
y= nº de arbustos
$150x+75y\geq 300$, $150x+75y\leq 600$

Abstracción

$4 \leq 2x+y \leq 8$

Modelo matemático

En la calculadora usa el comando TABLE con
$y_1=4-2x$, $y_2=8-2x$

Resolución

Resultados

Interpretación de resultados

En ambos esquemas visualizamos la aplicación de los momentos de la modelización identificados en el capítulo II. Notamos que se integró la CG en la resolución mediante representaciones tabulares y su conexión con el cálculo y procedimientos algebraicos.

Quinta situación problema:

***SP5. Crecimiento de bosques**: La temperatura y la lluvia tienen un efecto importante en la vida de las plantas. Si el promedio de la temperatura anual o de la cantidad de lluvia es demasiado bajo, ni árboles ni bosques crecerían: sólo habrá pastizales y desiertos. La relación entre el promedio de temperatura anual T (en º F) y el promedio anual de lluvia P (en in) es una desigualdad lineal. Para que en una región haya bosques, el T y P deben satisfacer la desigualdad 29T-39P<450, donde 33≤ T≤80 y 13≤P≤45*

a) Determinar si pueden crecer bosques en un lugar donde T=37ºF y P=21.2 in

b) Graficar la desigualdad con T en el eje horizontal y P en el eje vertical, en la pantalla de la TI-92.

c) *Identificar la región donde pueden crecer bosques.*

Esta situación fue abordada con detalles de los razonamientos seguidos en el estudio de la situación con la incorporación de la calculadora gráfica. A continuación exponemos lo presentado por el participante PF10 en cada una de las partes a), b) y c). Respecto de la parte a) escribió:

a) El alumno debe mostrar madurez en el concepto de desigualdad lineal ya que ese es el objetivo de este apartado, dándose cuenta que lo único que debe hacer es sustituir y comprobar que se verifica la desigualdad:

   29T-39P<450 sustituyendo T=37, P=21´2
   29.37-39.21´2<450
   1.073-826´8<450
   246´2<450 Luego sí habría bosques

   En este primer apartado hay aún algo muy importante y es entender por qué se impone por separado las restricciones de la temperatura y la presión:

   33≤T≤80; 13≤P≤45

Claro está, esto es debido a que no nos interesa lo que ocurra fuera de aquí por ser condiciones tan extremas que no se darían casi nunca y por tanto no nos interesa su estudio.

De inmediato se observa que tiene sentido estudiar el apartado a):

$$33 \leq 37 \leq 80; \qquad 13 \leq 21'2 \leq 45$$

El profesor en formación mostró su interés de exponer la actividad para alumnos de secundaria. Se apreció la conexión entre las desigualdades y el mundo real, de igual manera se plantearon actividades para comprender e interpretar tanto la situación SP5 como los conceptos y relaciones algebraicas involucradas. En la parte b) también apreciamos ese interés. Veamos los detalles:

b) Este apartado necesita un conocimiento bastante profundo de lo que es una función y una vez se tiene, mediante unas simples transformaciones elementales nos resuelven el problema.

Como nos piden que la T esté en el eje horizontal debemos expresar P en función de T:

$$29T\text{-}39P<450$$

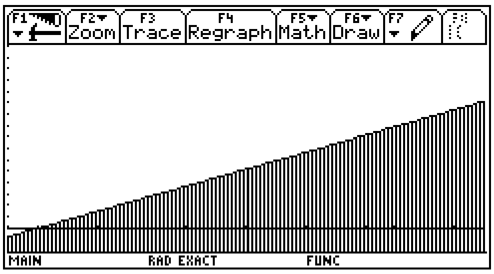
$$29T\text{-}450<39P$$

$$\frac{29T-450}{39}<P$$

Consideramos entonces la siguiente función:

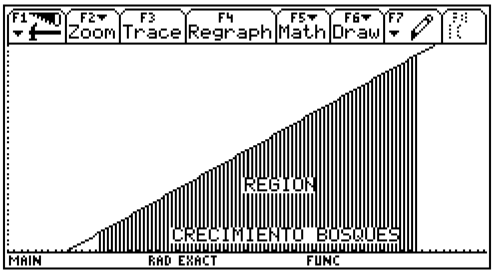
$$P(T)=\frac{29T-450}{39}$$

La representación de la desigualdad en la CG es:



Para dar respuesta a la parte c) el participante explicó cómo llegar a la región de interés, es decir aquella donde crecerían los bosques. Esto lo mostró en la CG tal como se presenta en la figura 4.11. Cabe destacar que para orientar a los alumnos en los comandos a utilizar el participante especificó las respectivas secuencias para obtener las pantallas utilizadas.

Gráfica 4.11



En los apartados anteriores hemos analizado las producciones de los profesores en formación a la luz de las anotaciones efectuadas en sus cuadernos y de las láminas que utilizaron los futuros profesores para exponer sus producciones a la clase.

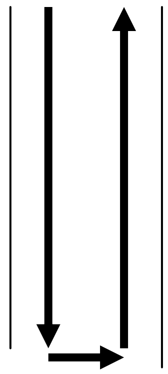
A manera de síntesis podemos afirmar que los participantes se ajustaron a las utilidades de la CG presentadas en el curso-taller. El análisis de sus actuaciones en ese momento reveló escasez de exploraciones individuales para incrementar el conocimiento de las potencialidades de la CG más allá de lo propuesto en el programa MCA. El principal uso que se dio a la CG fue realizar cálculos y, fundamentalmente, en el momento de la resolución más que en el momento de la experimentación (al modelizar). Es decir, los profesores en formación recurrieron a la CG una vez construido el modelo más que para su construcción. Por otra parte, en las producciones, no se indica explícitamente el empleo de la CG en el momento de interpretación de las soluciones o en el planteamiento de nuevas preguntas, al menos de manera explícita.

4.7.2. Análisis de las producciones realizadas fuera del aula

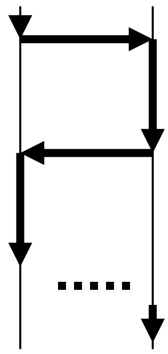
Como se mencionó anteriormente, además de las actividades diseñadas para desarrollar en el curso, asignamos una tarea para realizar fuera del ámbito de la clase. La misma fue entregada a los participantes en la cuarta sesión y fue devuelta por ellos en la quinta sesión. Dicha tarea corresponde a una versión de la séptima actividad propuesta por Swetz & Hartzler (1991). El propósito fue visualizar la forma como los profesores en formación planificaban una actividad didáctica para la enseñanza del álgebra. El análisis enfatizó en los elementos puestos en juego al integrar la modelización y la CG (conocimiento del proceso de modelización, conceptos matemáticos en juego, juicio crítico respecto a la modelización, modos de incorporación de la CG). Esta actividad se estructuró a partir de una adaptación de una situación problema utilizada por investigadores en el área como Swetz & Hartzler (1991), Ikeda (1997), entre otros.

A continuación presentamos el enunciado de la referida tarea:

La situación del cartero. *Un cartero recorre cada día todos los buzones de las casas a ambos lados de una calle de longitud L. El puede repartir en todos los buzones de un lado, cruzar la calle y repartir en todos los buzones del otro lado. También el cartero puede repartir en un buzón, cruzar la calle, repartir en dos buzones, cruzar nuevamente, repartir en dos buzones y así sucesivamente hasta el final de la calle. ¿Cuál de las dos opciones recomendaría al cartero?*



Recorrido A



Recorrido B

Actividades:

1. *Diseñe un guión de actividades a desarrollar para modelizar esta situación en un curso de secundaria.*
2. *Cuáles conceptos matemáticos intervienen en esta modelización.*
3. *Redacte una actividad didáctica que esté diseñada para exponer una modelización de esta situación a los alumnos de secundaria.*

De manera intencional, en las actividades asignadas no se hizo referencia al empleo de la calculadora gráfica con la finalidad que el profesor en formación tuviera libertad para decidir sobre los momentos de su incorporación y la forma de utilizarla.

Asimismo, para incentivar la búsqueda de diversas alternativas, se les sugirió a los profesores en formación las suposiciones siguientes:

1. Los buzones están ubicados en el centro de cada casa y las casas tienen el mismo ancho.
2. Los buzones no están en el centro de cada casa y las casas tienen el mismo ancho.
3. El ancho de las casas varía, pero cada lado de la calle es simétrico al otro y los buzones están en el centro de cada casa.

Resultados del análisis de la situación del cartero

En general todos los profesores en formación dieron respuesta a las cuestiones planteadas en la "situación del cartero". Unos fueron más explícitos o extensos que otros. Es decir, hubo quienes se ciñeron a responder con relativa generalidad y también encontramos quienes dieron detalles particulares en sus respuestas. En todo caso, en lo que sigue presentamos el análisis de las producciones presentadas por los participantes y la ejemplificación en los casos que se considera conveniente para completar las argumentaciones. En ese sentido en las líneas siguientes nos referimos a cada una de las cuestiones propuestas en la tarea realizada fuera de las sesiones del curso-taller, es decir, la situación del cartero.

Primera cuestión:

Diseñe un guión de actividades a desarrollar para modelizar esta situación en un curso de secundaria

Revisando las producciones de los profesores en formación encontramos que en líneas generales, en el diseño a desarrollar, presentaron el esquema siguiente:

1. Planteamiento de la situación
2. Agrupación de los alumnos en la clase
3. Discusiones grupales con la orientación del profesor
    - 3.1 Asunción de suposiciones
    - 3.2. Planteamiento de casos particulares
        - 3.2.1 Determinación de los datos y de las incógnitas
        - 3.2.2. Definición de variables y funciones
        - 3.2.3. Representaciones gráficas y tabulares (empleo de CG)
        - 3.2.4. Comparación de recorridos
        - 3.2.5. Resolución algebraica
        - 3.2.6. Interpretación de soluciones
        - 3.2.7. Realización de nuevas modelizaciones
    - 3.3. Búsqueda de generalizaciones
4. Informe individual o grupal a la clase.

El *planteamiento de la situación* se refiere a la presentación de la situación problema a los alumnos. En este momento se aclaran términos o hechos que pudieran ser desconocidos por los alumnos, de tal manera que ellos tengan la oportunidad de tener un mismo punto de partida para el abordaje de la misma. Al respecto uno de los participantes dijo que

> "se presenta la situación a los alumnos y se les deja un tiempo para que opinen..." (PF9)

El *agrupamiento de los alumnos en la clase* se vincula con la actuación tanto del profesor como de los alumnos, pero principalmente es con estos últimos donde se producen consecuencias relevantes para su aprendizaje pues el agrupamiento permite el intercambio de experiencias y conocimientos. El papel del profesor quedaría para generación de discusiones e interacciones entre ellos. Los profesores en formación se mostraron favorables a la propuesta de trabajo en grupos con sus alumnos. En ese sentido presentaron propuestas como:

> "Formar grupos de alumnos para que cada grupo afronte el problema a su manera, gozando así de diversidad de enfoques" (PF1)

> "...Se dan valores a la tabla, repartiendo la clase en tres grupos..." (PF9)

En concordancia con el agrupamiento de los alumnos se presentaron las *discusiones grupales con la orientación del profesor* las cuales estimularían las interacciones entre los alumnos con su consecuente intercambio de experiencias y conocimientos matemáticos, construcción de argumentos matemáticos, comunicar ideas matemáticas y a fomentar el pensamiento lógico entre otras habilidades. Dichas discusiones estarían dirigidas a orientar el proceso de modelización en cada uno de sus momentos y potenciar el desarrollo de las habilidades requeridas en cada uno de ellos. En lo que sigue presentamos la asunción de suposiciones y la resolución de casos particulares con los detalles presentados por los participantes.

En cuanto a la asunción de suposiciones, dentro del primer momento de la modelización según lo expuesto en el capítulo II, los participantes consideraron importante el desarrollo de dichas habilidades. Por ejemplo, plantearon que se debería “dar una orientación a los grupos para que adopten las suposiciones necesarias para que el problema no se complique en exceso matemáticamente” (PF1)

Entre las suposiciones consideradas por los futuros profesores tenemos las siguientes:

“Calles simétricas” (PF4, PF5, PF6)

“Buzones equidistantes (PF4)

“Igual número de casas en ambas calles” (PF5, PF9)

“Hay n buzones a cada lado de la calle, todos separados por una unidad” (PF6)

“El número de casas siempre es par” (PF7)

“El cartero debe dejar una carta en cada buzon”(PF9)

“Todas las casas tienen buzón” (PF9)

Después de presentar las suposiciones (primer momento de la modelización), los profesores en formación, procedieron a *plantear casos particulares* para resolver el problema de elegir el recorrido donde el cartero caminara lo menos posible. El momento de abstracción se caracterizó por la generación y selección de variables y funciones. Dentro de las variables presentadas tenemos las siguientes:

“anchura de la calle” (PF2)

“Distancia de un buzón a otro” (PF2, PF4)

"Longitud de la calle" (PF4)

"Número de casa en cada lado de la calle" (PF4)

"Volumen del reparto" (PF10)

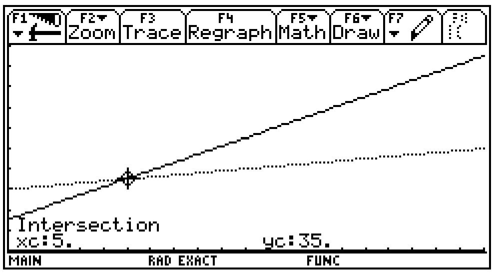
Por ejemplo, esta última variable fue generada pero no seleccionada. Las otras variables generadas si fueron seleccionadas en las producciones de los respectivos participantes. En cuanto a las funciones, tenemos las que definen el recorrido A y el recorrido B, las cuales al compararlas permitieron a los participantes decidir acerca del recorrido a recomendar al cartero. A manera de ejemplo, de la consideración de casos particulares presentamos el siguiente:

"Consideremos n como el número de casas, siempre par y simétricamente distribuidas en las dos calles con los buzones al comienzo de la casa y todas las casas de igual anchura. Sea L la longitud total de la calle. En este caso, los recorridos A y B están definidos por las funciones f y g respectivamente, donde x es la anchura de la calle:

$$f(x) = x + (n-2)\frac{2L}{n}$$

$$g(x) = \frac{n}{2}x + (n-2)\frac{L}{n}$$

En el caso que tengamos los valores fijos $L=20$ y $n=8$ ¿cuál recorrido se escogería? Utilizando la CG para graficar f y g, donde $f(x)=x+30$, $g(x)=4x+15$ resulta:



Luego, si la anchura de la calle (x=5) coincide con la distancia entre las casas (20/4), da igual el recorrido. Si la distancia entre las casas es mayor que la anchura de la calle, es mejor el recorrido A" (PF7)

El participante PF7 también realizó el caso particular con $L=50$ y $n=12$. En cuanto al desarrollo presentado para el caso $L=20$, $n=8$ se observó la integración de la CG en la representación y resolución del problema. Notamos en esta producción que el futuro profesor empezó presentando el caso general para las funciones f y g, y después pasó a los casos particulares y finalmente concluyó con la decisión del cartero. Esta estrategia no parece adecuada para alumnos de secundaria puesto que no hay argumentación para la presentación o definición de las funciones. Por otra parte, hubiera sido preferible empezar directamente con los casos particulares hasta llegar a la generalización y toma de decisiones acerca de los recorridos para el cartero. Otros participantes utilizaron esa manera inductiva para llegar a la correspondiente *generalización*. Tal es el caso de PF9 quien afirmó que "se pide a los chicos que hagan una tabla donde cada uno proponga una característica [variable] de la calle que pueda influir." En su propuesta, éste profesor en formación mostró una tabla, donde dejó fijo en primer lugar el número de casas en cada acera, luego el ancho de la calle y finalmente no varió la distancia entre buzones. A continuación presentamos la referida tabla para el valor fijo de 12 casas en cada acera, presentado por PF9:

N° de casas en cada acera	Ancho de la calle	Distancia entre buzones	Recorrido A	Recorrido B
12	*3m*	*5m*	*2(11.5)+3*	*(6-1)5+12.3+6.5*
12	*6m*	*7m*	*2(11.7)+6*	*(6-1)7+12.6+6.7*
12	*10m*	*5m*	*2(11.5)+10*	*(6-1)5+12.10+6.5*
…	…	…	…	…
12	*x*	*y*	*2(11.y)+x*	*5.y+12.x+6.y*

Se observa el carácter inductivo que utilizó el participante y su generalización para los recorridos A y B, donde se aprecia su carácter algebraico como aritmética generalizada.

Finalmente, los participantes otorgaron importancia al *informe de los alumnos a la clase*. Esta fase reviste gran consideración porque allí los alumnos dan muestras de habilidades en comunicar ideas matemáticas, bien sea en forma oral o escrita; dan a conocer los heurísticos y estrategias utilizadas en el abordaje de las situaciones; además de desarrollar el espíritu crítico ante aproximaciones distintas a las suyas, dadas a la misma situación problema. En ese sentido expusieron lo siguiente:

> "Cada grupo expone las conclusiones que saca de los cálculos realizados" (PF9)

> "Puesta en común de las conclusiones obtenidas por cada grupo" (PF1)

En las respuestas dadas a la primera cuestión se mira prospectivamente un profesor que lleva a cabo el proceso de modelización a través de la interacción alumno-profesor en la clase, utilizando la CG, y donde los alumnos informarán de manera individual o grupal a la clase. Esta metodología ayudaría a los profesores a la integración de la modelización y la tecnología para el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico escolar.

Segunda cuestión:

Cuáles conceptos matemáticos intervienen en esta modelización

Al respecto encontramos que los profesores en formación listaron los conceptos que ellos reconocieron su intervención en el proceso de modelización. Los principales conceptos fueron los siguientes: distancia entre dos puntos, variable, parámetro, funciones, ecuaciones e inecuaciones lineales y simetría. Estos conceptos están vinculados al álgebra lineal escolar de secundaria. Pensamos que los conceptos clave fueron los de variable, función y ecuación. En cuanto a la representación de esos conceptos los profesores en formación incluyeron los sistemas gráfico y tabular, además del simbólico.

Tercera cuestión:

Redacte una actividad didáctica que esté diseñada para exponer una modelización de esta situación a los alumnos de secundaria

En general, los participantes presentaron la actividad didáctica con pocos detalles salvo algunas excepciones donde se dejó constancia de varias acciones específicas a seguir para su desarrollo. El uso de ejemplos de manera inductiva para presentar la actividad fue un invariante en el grupo de futuros profesores. Asimismo, en cada ejemplo mencionaron la aplicación del proceso de modelización, desde las suposiciones asumidas, pasando el planteamiento de problemas, diferentes maneras de resolver y la interpretación de las soluciones. Al respecto veamos algunas de tales propuestas:

> "Mediante posibles aportaciones de los alumnos sobre la marcha, se realizará lo siguiente:
> 1. Elección y comentario de las suposiciones precisas para afrontar el problema matemáticamente...
> 2. Hacer una tabla en la que se resuelva el problema para distintos valores de los parámetros que se hayan considerado
> 3. Obtención de conclusiones a partir de la tabla relativas a la opción que el cartero debe adoptar " (PF1)

> "En un barrio de Granada hay un cartero que tiene que repartir los recibos del agua en una de las calles más largas que existen en la ciudad. Esta calle dispone de 10 bloques de pisos a ambos lados de la calle, unos frente a los otros, separados entre sí por unos 15 metros, con 50 pisos cada bloque.
> El cartero no sabe si ir primero por una acera, luego cruzar y terminar por la otra acera o bien ir pasando primero por un bloque de una acera, luego cruzar a por dos de la otra, después cruzar de nuevo a por otros dos bloques y así hasta terminar. La calle es peatonal y mide 20 metros de ancha. Quisiera saber:

¿a qué velocidad deberá ir el cartero para terminar en tres horas toda la calle?
¿cuántas cartas va a tener que entregar el cartero en esta calle?
¿cuánto ganará el cartero si por cada entrega cobra 5 pesetas?
¿qué recorrido será más conveniente al cartero para caminar menos”(PF6)

A objeto de visualizar el énfasis que cada participante otorgó a cada momento de la modelización se estructuró la tabla 4.7.2.1, a partir del análisis de la actividad didáctica elaborada por cada participante. En el cuadro ubicamos las acciones consideradas en la aplicación del proceso de modelización por cada uno de los diez participantes.

Tabla 4.7.2.1. *Acciones tomadas en el proceso de modelización por los participantes del curso-taller*

Modelización \ Participantes	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a. Identificación de condiciones inesperadas	x			x	x	x			x	
b. Relevancia de las condiciones consideradas	x	x	x		x		x		x	x
c. Justificación de la relevancia de las condiciones	x		x		x		x		x	x
d. Complejidad de las condiciones	x	x	x		x	x	x	x	x	x
e. Relación entre las variables consideradas en el problema generado a partir de la situación dada		x	x	x	x	x	x		x	x
f. Dificultad del problema matemático a partir del modelo obtenido	x	x	x	x	x				x	x
g. Generación de problemas a partir de la situación dada			x		x	x	x	x	x	
h. Comparación y ajuste de modelos			x	x	x				x	

Se observó que cada uno de los profesores en formación enfatizó en el proceso de modelización, tanto en la matematización, es decir el paso del mundo real al mundo matemático, como en la actividad matemática a desarrollar una vez adoptado un modelo para la situación dada. Por ejemplo, en la matematización consideraron los momentos de simplificación y abstracción, con acciones como la toma de criterios y condiciones y la consecuente simbolización. Sin embargo, en la resolución e interpretación de resultados dieron poco énfasis a ésta última que es elemento clave para validar los resultados y la buscar ajustes a nuevos modelos, que podrían favorecer una mejor descripción, predicción y prescripción de la problemática planteada en la situación dada.

4.7.3. Evaluación de la dimensión cognitiva objetiva en el momento intermedio

Es importante recordar que durante el desarrollo del programa cada uno de los profesores en formación contó con una calculadora gráfica; sin embargo se les dejó libertad para su empleo de acuerdo con sus intereses o necesidades. Esto se hizo con el propósito de observar en el análisis de sus producciones qué utilidad le daban a la CG al momento de diseñar actividades didácticas.

Los resultados de la evaluación de la dimensión cognitiva-objetiva del desarrollo del programa en el momento intermedio revelaron que los niveles de logro del programa se manifestaron en los avances de los profesores en formación en lo relativo a la incorporación da la CG en sus producciones concernientes a cada una de las situaciones problema planteadas y en la tarea que realizaron fuera del aula.

En términos generales, de acuerdo a la forma de abordaje de las situaciones problema, encontramos cinco modalidades del empleo de la CG: resolución directamente sin usar CG, resolución directamente usando CG, resolución de manera aritmética y algebraica asistida por la CG, desarrollo detallando los razonamientos sin CG y desarrollo detallando los razonamientos con CG; siendo la modalidad de resolución con la CG la más empleada por los profesores en formación, siguiéndole la resolución de problemas con y sin CG. En la modalidad de resolución sin CG sólo encontramos un caso.

Luego de analizar la resolución de cada una de las situaciones propuestas encontramos que:

1) En la primera situación (SP1) notamos modestos avances en la integración de la CG, es decir los logros obtenidos respecto al uso de la CG no se manifestaron de acuerdo a lo esperado para ese momento intermedio del desarrollo del programa.
2) Observamos limitaciones en lo relativo a la explicación de los procedimientos así como la importancia que tiene para los alumnos la interpretación de las soluciones. En la segunda situación problema (SP2) observamos que se presentan resoluciones no ajustadas al nivel de comprensión de los alumnos de secundaria.
3) Se puso de manifiesto un dominio técnico de la CG.
4) Se observó integración de la modelización matemática y la CG en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.
5) En la tercera situación problema (SP3) observamos que no suscitó interés en los participantes posiblemente motivado a su escasa apertura para aplicar el proceso de modelización con el apoyo de la CG.
6) En las situaciones problema cuarta y quinta observamos que los profesores en formación manifestaron avances al considerar la participación y la interpretación como medio para favorecer la discusión entre los alumnos de secundaria.
7) Se evidenció competencia didáctica en el empleo de la CG al manifestar comprensión y justificación del uso de comandos específicos y la secuencia de los mismos en la CG al desarrollar las actividades orientadas hacia los alumnos de matemáticas de secundaria.

En lo referente a la actividad desarrollada fuera del aula encontramos que los profesores en formación se preocuparon por diseñar el desarrollo de la actividad siguiendo un cierto orden lógico, tomando en cuenta la participación de los alumnos, el trabajo conjunto profesor-alumno, la discusión de grupos, así como el seguimiento del proceso de modelización y la utilización de la CG integrada a este último. Sólo hubo un caso en el cual se formularon estrategias no adecuadas para alumnos de secundaria.

La evaluación del momento intermedio del desarrollo del programa puso en evidencia que los contenidos del mismo contribuyeron a incrementar competencias didácticas, de forma progresiva, tal como se pretendía al diseñar el programa. Ese progreso se evidenció en la reflexión respecto a la planificación de una actividad didáctica, visualizando la potencialidad didáctica de la CG en la enseñanza del álgebra, así como sus capacidades de integrarse con el proceso de modelización. Por otra parte observamos reflexión acerca de la finalidad de las actividades desarrolladas, teniendo como propósito lograr mayores niveles de comprensión en el aprendizaje de los alumnos.

Podríamos decir que se observó un progreso paulatino de la integración de los tres organizadores del currículo en los que se fundamenta el programa MCA, en las actividades desarrolladas en el curso-taller.

Lo antes señalado revela logros satisfactorios en el aprovechamiento, por parte de los profesores en formación, de los contenidos del programa MCA.

4.8. Análisis de las producciones en el momento final

Los datos que se presentan a continuación se tomaron de las presentaciones hechas en el curso-taller, de las pantallas de las calculadoras grabadas en archivos de ordenador, de los cuadernos de notas de cada uno de los participantes y del investigador; además nos apoyamos en registros de vídeo.

El objetivo de la sesión, contemplado en el respectivo cuadernillo, fue diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria. En ese sentido el profesor investigador hizo una introducción referida a presentar la noción de unidad didáctica como el "conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado, para la consecución de unos objetivos didácticos. Una unidad didáctica da respuesta a todas las cuestiones curriculares al qué enseñar (objetivos y contenidos), cuándo enseñar (secuencia ordenada de actividades y contenidos), cómo enseñar (actividades, organización del espacio y del tiempo, materiales y recursos didácticos) y a la evaluación (criterios e instrumentos para la evaluación), todo ello en un tiempo claramente delimitado". (MEC, 1989, p.90). Asimismo se indicó a los profesores en formación que las actividades didácticas a realizar y presentar por ellos, en la sesión, podrían considerarse pertenecientes a una unidad didáctica del currículo de secundaria.

Las actividades a desarrollar en la sesión estuvieron centradas en la siguiente propuesta, que fue presentada a los participantes en el cuadernillo de la sesión:

Diseño de una actividad didáctica: *Supongamos un profesor de secundaria que necesita elaborar una actividad didáctica con la que mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales. Para satisfacer este propósito te pedimos que describas (o propongas) una situación problema del mundo real que cumpla esa asignación.*
Asumiendo que el profesor conoce el proceso de modelización y que utilizará la calculadora gráfica con sus estudiantes:

a) *Enuncia al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica;*
b) *Ordena la secuencia de las actividades (guión) a seguir por el profesor, para lograr su objetivo;*

Sugiere al menos dos aspectos a evaluar (en los alumnos) e indica cómo los llevarías a cabo.

Es importante destacar que las consignas anteriores fueron idénticas a las propuestas en la parte B de la sesión inicial, con el propósito de identificar variaciones en el conocimiento didáctico de los futuros profesores en el proceso de aplicación del programa.

Las presentaciones de cada participante ante el grupo se exponen a continuación. En ellas identificamos respecto a la modelización el desarrollo de habilidades para resolver problemas abiertos, la discusión y reflexión sobre los abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de cada parte de la actividad desarrollada, habilidades de comunicación oral y escrita y habilidades para trabajar en grupo (Galbraith, Haines and Izard, 1998). Respecto al apoyo de la CG se consideró la utilización de los diversos sistemas de representación y sus conexiones entre ellos, con los conceptos matemáticos y con las situaciones planteadas en el diseño de actividades didáctica. Además del aprovechamiento de las posibilidades de cálculo, experimentación, visualización y contraste de resultados posibles de efectuar con el uso de la CG (Kutzler, 2000).

Primera cuestión:

Proponga una situación problema del mundo real para mostrar la utilidad de los sistemas de ecuaciones lineales.

Ante esta cuestión los futuros profesores plantearon situaciones de la vida cotidiana, familiar, empresarial, comercial y del ámbito bélico (ver tabla 4.8.1). Dentro de la vida cotidiana propusieron situaciones relacionadas con señales de tráfico (PF1), relaciones sociales en la escuela (PF5) y viaje de compras (PF9). Las situaciones de la vida familiar se refirieron al apoyo familiar (PF4) y a las edades en familia (PF7). Respecto al mundo empresarial plantearon situaciones de fabricación de ladrillos (PF2) y producción de conservas alimenticias (PF6). En lo comercial plantearon una situación de suma actualidad como es la telefonía móvil (PF3). Por su parte, en el ambiente bélico plantearon una situación relacionada con trayectorias de satélites de espionaje (PF10). A manera de ejemplo presentamos a continuación algunas de estas situaciones:

Situación vinculada con la vida cotidiana (PF1):

> "Se necesita pintar señales de tráfico: una de prohibición de velocidad y una de prohibición, ambas en forma triangular (y del mismo tamaño), y otras de STOP, de forma cuadrada. Se dispone para ello de 200 litros de pintura, de la cual se necesitan 1/3 de litro para pintar una señal de STOP y 1/4 de litro para pintar una de velocidad. ¿Cuántas señales de tráfico se pueden pintar, si se tiene en cuenta que por cada señal de STOP, se necesitan una de prohibición de velocidad y otra de fin de prohibición?
>
> Si la pintura requerida para las señales de STOP cuesta 200 ptas/litro y la de velocidad cuesta 350 ptas/litro, respóndase a la pregunta anterior, si se disponen de 60.000 ptas exclusivamente para pintura."

De las producciones de este profesor en formación observamos que los conceptos algebraicos relacionados con esta situación fueron los de variable, función, ecuación y sistema de ecuaciones lineales. A partir del establecimiento de las variables (Ej. *x, y*) se definieron funciones (Ej. $\frac{1}{3}x$, $\frac{1}{4}y$) que luego pasarían a formar parte de ecuaciones (Ej. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=200$) y sistemas de ecuaciones (Ej. $\left.\begin{array}{r}\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=200\\ 2x-y=0\end{array}\right\}$). Aunque la situación permitía hacer énfasis en la modelización, el futuro profesor dio mayor peso a la resolución para buscar las soluciones. La situación pudiera ser de interés para la vida cotidiana de los alumnos; es decir, una situación ajustada al entorno del alumno del medio urbano. Por otra parte el participante sostuvo, según sus palabras, que como primer ejemplo "...sólo el profesor debe manejar la CG, mostrar y explicar el proceso de resolución mediante la pantalla de visualización (view screen)." El profesor en formación afirmó que dejaría a los alumnos un trabajo posterior con otros ejemplos similares y con el uso de la CG de cada uno de ellos. Esto nos indica una postura de enseñanza de la matemática en la que el alumno ve lo que hace el profesor y luego intenta seguir sus razonamientos en otros ejemplos (aprendizaje por modelaje en lugar de modelización).

Situación vinculada con la vida familiar (PF4):

> "Un padre quiere motivar a su hijo para que estudie y haga los ejercicios de matemáticas (con o sin CG); para ello, propone a su hijo el siguiente trato: Por cada ejercicio que resuelvas correctamente te daré 1 euro, pero por cada ejercicio erróneo me tendrás que dar 50 céntimos de euro. El niño accede, y en la primera relación de 20 ejercicios gana 11€.
>
> Estudiar:
>
> a) Obtener numero de respuestas correctas y número de equivocadas.
>
> b) Estudiar todas las posibilidades en las que el hijo sale ganando dinero.
>
> c) Resolver a) de distintas formas mediante la calculadora gráfica."

En esta situación el profesor en formación propuso como requisito que los alumnos tuviesen un entrenamiento previo de al menos una hora con la CG. El participante, con el apoyo del view screen, mostró varias maneras de resolver (ver figuras 4.12, 4.13, 4.14, 4.15, 4.16, 4.17, 4.18 y 4.19). En la gráfica 5.12 el profesor en formación establece la ecuación *ecu1* resultante de considerar x respuestas correctas con y respuestas incorrectas y un total de 20 ejercicios propuestos ($x+y=20$). También define la función ganancia *gana(x,y)*= $x-0,5y$, tomando en cuenta que por cada ejercicio correcto recibe 1€ y por cada incorrecto debe pagar 0,5€. El participante resuelve el sistema $\left.\begin{matrix} x+y=20 \\ x-0,5y=11 \end{matrix}\right\}$ tanto con el comando `solve` como mediante el método de scaffolding (Kutzler, 1998b). Puede notarse que existe diferencia entre la notación usual en matemáticas con la notación en la CG, lo que podría generar dificultades en el caso que el alumno no esté familiarizado con la conexión entre las dos notaciones. En el caso de la presente situación el participante podría haber subsanado esa posible dificultad con el prerrequisito del entrenamiento previo con la CG.

Figura 4.12

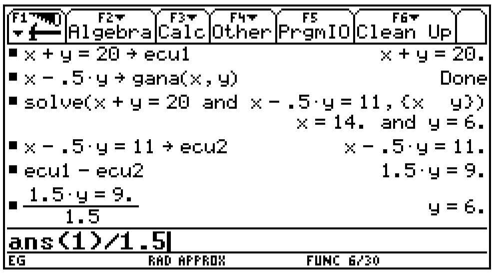


Figura 4.13

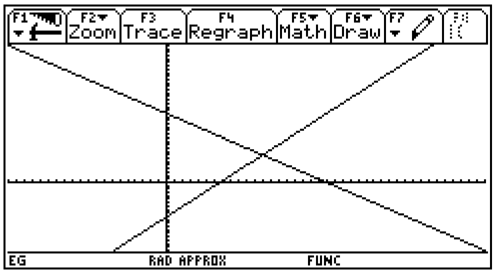


Figura 4.14

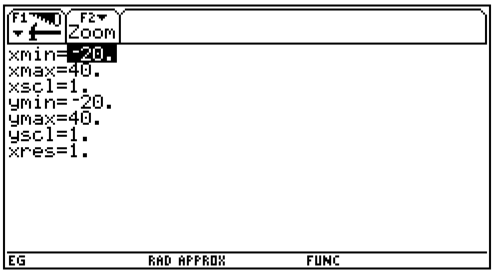
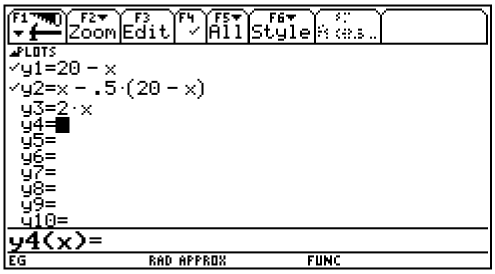


Figura 4.15



En la figura 4.14 se muestra la configuración de la ventana de visualización de la CG y en la figura 4.15 se definieron las funciones `y1`, `y2` en el editor de funciones de la CG. Resalta el uso de diferentes de diferentes sistemas de representación y sus interconexiones. Esto es un indicador que refleja análisis y búsqueda de alternativas para la comprensión de las ideas matemáticas y de la situación problema por parte de los alumnos. En ese sentido la tabla mostrada en la figura 4.16 contribuye a la discusión sobre la naturaleza de las soluciones del problema planteado, como por ejemplo a partir de siete respuestas correctas qué ganancia se obtuvo.

Otra manera a la que acudió el participante en la situación problema que nos ocupa fue la de utilizar la CG como una hoja de cálculo para introducir las variables y funciones algebraicas. Esto se puede apreciar en las figuras 4.17, 4.18 y 4.19. Este tratamiento es otra posibilidad que se podría ofrecer a los alumnos para incrementar la comprensión de la situación problema y de los conceptos matemáticos relacionados. Por otra parte abre otra forma de abordaje para los problemas algebraicos al utilizar la CG como hoja de cálculo. Esto último corresponde con otras formas de introducir el álgebra a los alumnos y que ya forma parte de estudios realizados por investigadores como Sutherland & Rojano (1993) entre otros.

Figura 4.16

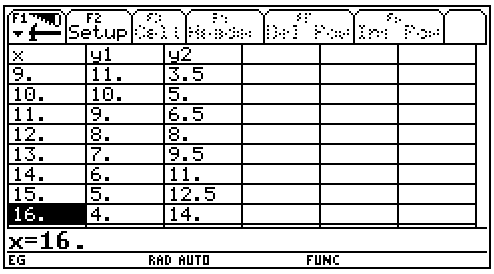


Figura 4.17

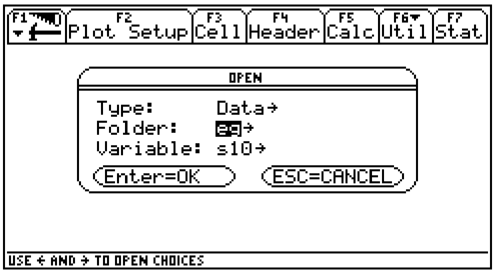


Figura 4.18

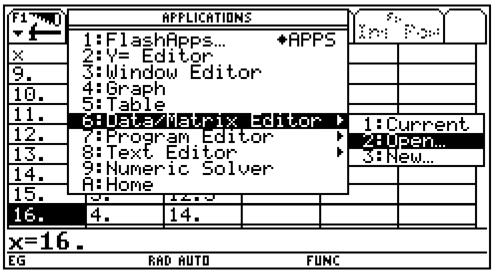
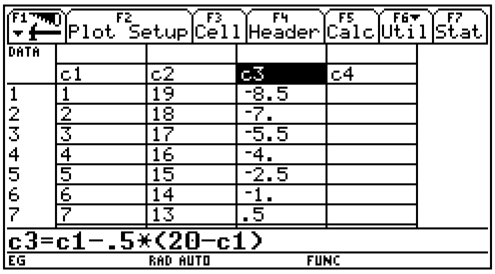


Figura 4.19



Como hemos podido observar este participante, además de mostrar un dominio técnico de la CG, planteó situaciones de interrelación entre los conceptos algebraicos participantes en la situación en cuestión. Recurrió a diferentes maneras para presentar los razonamientos matemáticos lo cual abrió expectativas didácticas para introducir con éxito la modelización con los alumnos de secundaria. Con ello los alumnos podrían hacer más conexiones que, en el momento de abstracción, les ayudaría a construir el modelo, así como también a responder a la finalidad para lo cual se aplicó el proceso de modelización.

Situación referida al ámbito empresarial (PF2):

> "Tenemos una fábrica que principalmente se dedica a la fabricación de dos tipos de ladrillos, los dobles de 7 y los macizos.
>
> Teniendo en cuenta que los dobles de 7 se venden a 3 Ptas. y los macizos se venden a 5 Ptas, y sabiendo que un paquelillo de dobles de 7 tiene 700

ladrillos y uno de macizos tiene 400. ¿Cuántos paquelillos tiene que hacer un paquetero? Si le dicen que tiene que seguir hasta ganarse 5790 Ptas para poder cargar un camión al cual se le va a cobrar 100.000 por los ladrillos que se lleva, sabiendo además que al paquelero se le pagan los paquelillos de 7 a 130 Ptas y los de macizos a 110 Ptas Nos podríamos preguntar que si después de una semana el paquelero ganó 42800 Ptas ¿cuántos paquelillos ha tenido que hacer al día de cada uno si la empresa ha obtenido un ingreso M de dinero."

El participante que presentó esta actividad empezó su estudio a partir de la tabla de la figura 4.20 donde incluyó la información de los datos conocidos de la situación problema. Es decir que el profesor en formación acudió a la representación tabular de los datos para contribuir a su comprensión y de esa manera focalizar la atención sobre las propiedades específicas que le conducirían a la construcción del modelo.

Figura 4.20

	Ptas/unidad	N° de ladrillos/paq.	Ptas./paquelillo
Macizos	5	400	110
Dobles 7	3	700	130

El futuro profesor consideró la siguiente definición de variables: $x \rightarrow$ 'paquelillos de 7', $y \rightarrow$'paquelillos macizos', estableció relaciones dadas por ecuaciones lineales y finalmente estableció el modelo mediante el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2100x + 2000y = 100000 \\ 130x + 110y = 5790 \end{array}\right\}$$

Al utilizar la CG para resolver el sistema el futuro profesor acudió al comando `solve` y a la representación gráfica del sistema (ver figuras 4.21 y 4.22) con el respectivo punto de intersección de las rectas que intervienen en el mismo. Esto fue un punto de búsqueda de conexiones entre los conceptos matemáticos del modelo.

Después de presentar el modelo, el participante abrió la posibilidad de incorporar nuevas preguntas en la situación lo cual nos ayuda a inferir que el profesor en formación estaba desarrollando un proceso de modelización en todas sus fases. Por otra parte es conveniente destacar que esta situación despertó interés entre los demás asistentes al curso. Más adelante analizaremos las propuestas que se hicieron para llevar adelante el diseño de la actividad en alumnos de secundaria.

Figura 4.21

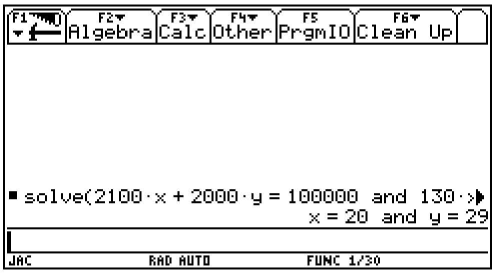
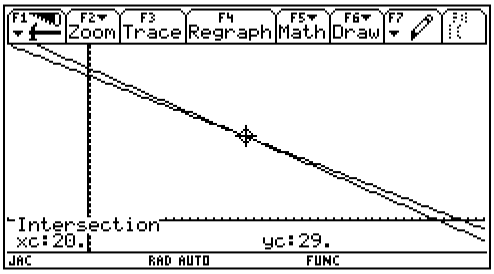


Figura 4.22



Situación comercial (PF3):

"Tengo un teléfono móvil liberalizado y tres tarjetas de movistar, Airtel y Amena.

En el mes de diciembre recibí un cupón de regalo de Airtel de 1 hora de llamadas de regalo. En este mes usé Airtel 1 hora, Movistar 3 horas y media y Amena 13 minutos. Además mandé 20 mensajes SMS, que en todas las compañías valen 25 Ptas. En total gasté 6010 en Diciembre.

En enero llamé 50 minutos con Movistar y una hora y media con Amena, además mandé 12 SMS y me costó 3350 Ptas.

Y en febrero mandé 32 SMS, usé 35 minutos Airtel, 30 Movistar y 10 con Amena; lo que costó 2730 Ptas. ¿Qué tarifa es más interesante?"

Ante esta situación el profesor en formación presentó una tabla informativa de la situación propuesta, tal como se aprecia en la figura 4.23. Esto, al igual que en la situación anterior, sirvió de base para la abstracción realizada en la construcción del modelo.

Figura 4.23

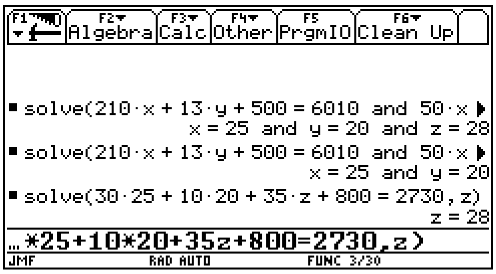
	SMS	Precio/ Minuto	Min. Diciemb.	Min. Enero	Min. Febrero
Movistar	25	*x*	210	50	30
Amena	25	*y*	13	90	10
Airtel	25	*z*	60-60	0	35

El participante hizo los cálculos aritméticos de los gastos en SMS durante cada uno de los meses de diciembre, enero y febrero, obteniendo 500, 300 y 800 Ptas respectivamente. Los gastos totales en los referidos meses fueron 6010, 3350 y 2730 Ptas respectivamente. Finalmente el profesor en formación formuló el correspondiente modelo de la situación, es decir:

$$\left.\begin{array}{r} 210x+13y+500=6010 \\ 50x+90y+300=3350 \\ 30x+10y+35z+800=2730 \end{array}\right\}$$

Al utilizar el view screen, el profesor en formación nos mostró que utilizó la capacidad simbólica de la CG para resolver el sistema de ecuaciones lineales tal como se indica en la figura 4.24.

Figura 4.24



Otros participantes opinaron sobre la actualidad y pertinencia de la situación presentada. Finalmente PF3 comentó la posible incorporación de nuevas preguntas para generar más discusión y participación. Esto refleja la inmersión del participante en el proceso de modelización para la enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal aunque no insistió en el momento de interpretación de las soluciones presentadas en la figura 4.24. En el proceso seguido en la construcción del modelo se aprecia la terna conformada por las variables, las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones como grupos conceptuales que sostienen los procesos algebraicos involucrados en el estudio o abordaje de las situaciones problema en esta actividad.

Situación bélica (PF10):

> "Tres satélites de espionaje americano observan los movimientos de tropas de la antigua URSS. Localmente desde los satélites siguen las siguientes trayectorias:
>
> $x+2y=8 \rightarrow$ Satélite A
>
> $x+y=5 \rightarrow$ Satélite B
>
> $2x-y=4 \rightarrow$ Satélite C
>
> Están especialmente interesados en ver que ocurre en el punto (2,3) de la geografía rusa.
>
> Podrías decir cuáles de estos satélites pasan por la región (2,3).
>
> En el caso de que hubiese alguno que no pase por el punto (2,3) cómo modificarías su trayectoria para que si lo haga.
>
> Comprobar que solamente (una vez modificadas las trayectorias necesarias) si tienen algún punto más en común."

Según palabras del participante PF10, "...esta situación problema está dirigida a la comprensión y consolidación del concepto de sistema lineal, es decir, ayuda a ver lo que significa un sistema de ecuaciones lineales." La situación propuesta fue diseñada para ser incorporada como una actividad en una unidad didáctica para ese tema en tercero de ESO.

El profesor en formación utilizó el editor de funciones de la CG (ver figura 4.25) para representar simbólicamente las funciones definidas implícitamente en las ecuaciones de las trayectorias de los satélites y aprovechó las ventajas representacionales de la CG para graficar dichas funciones (ver figura 4.26). Ante la necesidad de modificar trayectorias de satélites para que coincidieran en (2,3), el participante decidió cambiar la trayectoria de C para lo cual planteó la ecuación $2x - y = 4 + a$, sustituyó x e y por 2 y 3 respectivamente y encontró que $a = -3$. Como nueva ecuación de trayectoria presentó la siguiente: $2x - y = 1$ con su respectiva representación gráfica (ver figura 4.27).

Figura 4.25

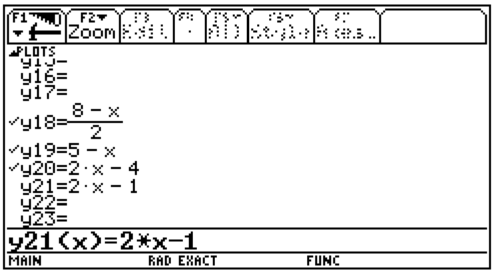


Figura 4.26

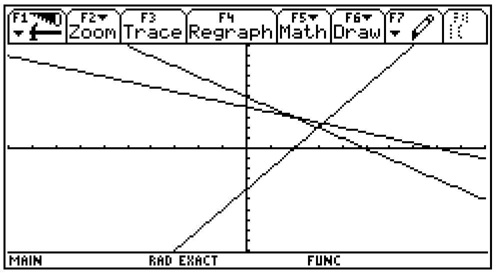
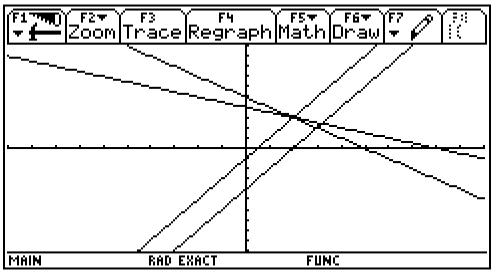


Figura 4.27



Notamos que el profesor en formación supuso que los alumnos tendrían un manejo de las ecuaciones dadas en forma implícita y explícita y su relación con las funciones, lo cual parece alejado del currículo de ESO en el nivel del tercer curso. Asimismo, La consideración de la igualdad $2x - y = 4 + a$ para modificar la trayectoria del satélite C podría conllevar dificultades para los alumnos puesto que no se aprecia de inmediato la justificación del $4 + a$. Posiblemente con la ayuda de la visualización en la pantalla el alumno llegaría a modificar ese término independiente.

En las líneas anteriores observamos que los profesores en formación acudieron a diferentes ámbitos de interés para plantear las situaciones problema. Eso nos muestra las posibilidades que tienen los profesores en formación de llegar a contar con bancos de situaciones, lo cual los pudiera ayudar en su futuro campo profesional.

Finalmente, el abordaje de las situaciones problema que presentaron los profesores en formación nos mostró una estructura conceptual para el álgebra lineal constituida fundamentalmente por la definición y tratamiento de variables, manejo de relaciones mediante ecuaciones lineales y el establecimiento de sistemas de ecuaciones lineales. Se apreció que los participantes utilizaron diferentes sistemas de representación para los mismos haciendo uso de las potencialidades de la CG. Es decir, las situaciones problema expuestas pusieron de manifiesto la riqueza del álgebra lineal como contexto matemático para la descripción, explicación y prescripción de los fenómenos vinculados con las mismas.

El abordaje de las diferentes situaciones problema nos indica que los participantes utilizaron la modelización integrándola con la incorporación de la CG en el contexto algebraico adecuado. Asimismo utilizaron diversas estrategias de resolución de problemas que involucraron heurísticos simbólicos, gráficos y tabulares.

Segunda cuestión:

Enuncie al menos dos preguntas, cuya respuesta requiera el uso de la modelización y la calculadora gráfica.

Las preguntas enunciadas por los participantes (ver tabla 4.8.1) sugieren la orientación que darían a la actividad. Probablemente las diferencias existentes sean consecuencia del nivel del alumno de secundaria que cada uno tenía en su mente. Podemos afirmar que, fundamentalmente, las preguntas formuladas fueron abiertas lo cual permite inferir que los participantes se orientaron hacia la utilización de la modelización según las pautas dadas en el curso. Además de las preguntas abiertas también encontramos algunas cerradas según se aprecia en la tabla 4.8 donde resumimos los diferentes tipos de preguntas presentadas por los profesores en formación.

Tabla 4.8. *Cuestiones formuladas por los participantes en la décima sesión*

Tipo de pregunta	Ejemplo
Abierta	¿Qué tarifa es más interesante? (PF3) Estudiar posibilidades e las que el niño acaba ganando (PF4) ¿Qué ocurriría si dispusiéramos del doble de horas y de la tercera parte de la plantilla? (PF6) ¿En qué caso interesa más [el pago de la hora de trabajo]? (PF9) En el caso de que hubiese alguno [un satélite] que no pase por el punto *(2,3)* cómo modificarías su trayectoria para que si lo haga (PF10).
Cerrada (en el campo algebraico)	Representar gráficamente [el sistema de ecuaciones] e interpretar el resultado (PF7) ¿…cuáles de estos satélites pasan por... *(2,3)*? (PF10)
Cerrada	¿Cuántas señales de tráfico se pueden pintar si...? (PF1) ¿Cuántos años tiene mi hermano? (PF5) ¿Qué edad tiene cada uno [de los tres hijos]? (PF7)

Las preguntas abiertas fueron formuladas tanto en el contexto de las situaciones problema como a partir de los modelos construidos. Pero siempre para concluir en interpretaciones relacionadas con las situaciones en cuestión. Las preguntas cerradas estuvieron referidas tanto al campo algebraico propiamente dicho como a preguntas surgidas del contexto de la situación planteada.

Las preguntas expuestas en la décima sesión (Tabla 4.8.1), podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización que generarían discusiones donde se desarrollaran habilidades de comunicación oral y escrita, así como la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos.

Tercera cuestión:

Ordene la secuencia de las actividades a seguir por el profesor

Las secuencias propuestas por los participantes se resumen en la tabla 4.8.1, de donde concluimos los notables cambios respecto a la secuencias presentadas en la sesión 1. En líneas generales las secuencias propuestas consideraron lo siguiente:

1. Organizar los alumnos en grupos pequeños
2. Planteamiento de la situación problema
3. Formulación (y selección) del problema
4. Identificación de variables
5. Establecimiento de relaciones entre las variables (puede utilizarse la CG)
6. Construcción del modelo
7. Representar el modelo utilizando varios sistemas de representación (con el apoyo de la CG)
8. Resolución del problema (matemático)
9. Interpretación de la (o las) solución (o soluciones)
10. Formulación de nuevas preguntas
11. Planteamiento de nuevas situaciones a manera de ejemplo.

La organización de los alumnos en grupos pequeños sugiere que el participante consideró cómo sería la actuación a seguir en el aula para llevar adelante la referida actividad. Estos agrupamientos permiten las exploraciones de las situaciones de manera compartida, lo cual genera discusiones y puestas en común acerca del abordaje del problema a resolver. En ese sentido los profesores en formación estuvieron de acuerdo en que los alumnos se deben agrupar para “que discutan la modelización. El profesor debe ayudarlos un poco, pero no mucho.” (PF9).

El planteamiento de la situación problema involucra a los alumnos con problemas familiares, culturales, de la comunidad que en nuestro caso fueron del ámbito cotidiano, familiar, empresarial, comercial o bélico (ver respuestas a la primera cuestión de este apartado). La presencia de esas situaciones podrían motivar a los alumnos para iniciar las actividades didácticas a desarrollar con la aplicación de la modelización y su integración con la CG.

La formulación del problema (o problemas) forma parte del primer momento de la modelización, es decir cuando se reconocen cuestiones en la situación problema dada. Es el paso del "mundo real" al "modelo real" (ver capítulo II).

La identificación de variables, el establecimiento de relaciones entre ellas y la construcción del modelo obligan a centrar la atención de los alumnos sobre propiedades específicas de la situación dada para su consideración en el contexto algebraico. En otras palabras, ayudan en el proceso de abstracción necesario para consolidar el modelo matemático. Es un puente entre el "mundo real" y el "mundo matemático". En este paso de lo real a lo matemático podría tener participación la CG por ejemplo acudiendo a la experimentación o representación de los datos conocidos.

Los profesores en formación también consideraron la representación del modelo utilizando varios sistemas de representación aprovechando las potencialidades de la CG. Igualmente propusieron el uso de las capacidades de la misma para la resolución de los problema matemáticos. Este fue un empleo bastante generalizado entre los participantes.

La interpretación de las soluciones por parte de lo alumnos es el momento de la conexión de las matemáticas con el "mundo real", es cuando se destaca la aplicabilidad de las matemáticas en el mundo físico y social. Recordamos que a pesar de la importancia que tiene esta conexión, los profesores en formación no la habían considerado importante en la primera sesión. Esto podría identificarse como una consecuencia modesta del curso.

El planteamiento de nuevas situaciones ayudaría a los alumnos a expandir el conocimiento de su entorno y a ejercitarse en la construcción de nuevos modelos y en consecuencia nuevas habilidades y formas de razonamiento.

Cuarta cuestión*:*

Sugiera al menos dos aspectos a evaluar y cómo los llevaría a cabo

Al igual que las cuestiones anteriores, las propuestas se pueden apreciar en la tabla 4.8.1 Los participantes partieron del hecho que la evaluación se realizaba para "...saber si el alumno aprendió" (PF4) o "...comprendió el problema" (PF7). Esto podría significarnos que los profesores en formación consideraron la evaluación cómo búsqueda de información para el profesor. Para que este último lograra construir un marco general de sus alumnos y tomar decisiones en relación con las estrategias de enseñanza y el aprendizaje. Faltó considerar explícitamente la evaluación como fuente para contribuir a fortalecer en los alumnos sus capacidades intelectuales y aprovechar las posibles ventajas que le ofrece el contexto escolar. Sin embargo apreciamos que los participantes vieron en la evaluación un papel complementario con las otras dimensiones del currículo escolar, de apoyo y estímulo al proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Los futuros profesores consideraron diversos aspectos a evaluar que convergieron en la evaluación de los alumnos en todos los momentos de la modelización y los resultados del manejo de la CG como apoyo del mismo. Coincidieron en destacar que la parte de mayor peso en la evaluación era la formulación del modelo y la interpretación de los resultados. Del contexto algebraico los participantes mencionaron la localización de variables, correcto establecimiento de relaciones entre las variables, planteamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y su resolución correcta de diferentes maneras.

Respecto de cómo llevarían a cabo esa evaluación los participantes señalaron que mediante cuestiones orales y escritas. Además de las discusiones con sus respectivas argumentaciones matemáticas. En ese sentido manifestaron que "...los chicos deben llegar a interpretar lo propuesto y su solución..." Las cuestiones escritas podrían incluir la corrección de cuadernos, actividades en pizarra, exámenes escritos y posters). Esto significa que los futuros profesores se involucraron en el proceso de evaluación y presentaron propuestas que llamaríamos de innovación tal como señalan Galbraith, Haines & Izard (1998).

4.8.1. Evaluación de la dimensión cognitivo objetiva en el momento final

Del análisis de las producciones pudimos observar que los profesores en formación plantearon situaciones del mundo real ajustadas a los niveles de la educación secundaria y cercanas al entorno del alumno. Esto significa que las situaciones planteadas por los participantes se conectaban con conceptos y procedimientos algebraicos contemplados en los programas de secundaria en España. En cuanto al organizador materiales y recursos, se evidenció un dominio en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. Tales dominios fueron manifiestos en el diseño de las actividades propuestas. Se reveló una postura ante la enseñanza de las matemáticas que colocaba al alumno en un plano de sujeto altamente activo, donde éste podría experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Se consideraron los ejemplos y procedimientos, que el profesor ejecuta, para la orientación del desarrollo de las actividades por parte de los alumnos. Tales ejemplos y procedimientos no pretendían encasillar ni frenar la creatividad de los alumnos. Los profesores en formación recurrieron a diferentes sistemas de representación y sus interconexiones, lo cual reveló la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploraron formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Se puso en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrado a la CG, en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantuvieron en el uso de preguntas abiertas.

En conclusión, las argumentaciones dadas por los profesores en formación en los últimos momentos del curso-taller aportan cambios, más hacia el alumno y el profesor que hacia el contenido matemático y la evaluación.

Por otra parte, observamos cambios significativos respecto a la secuencia de la actividad presentada en el momento inicial y la presentada en el momento final. En el momento inicial encontramos que en la secuencia sólo se enfatiza en plantear la situación problema, formular el modelo, resolver, plantear otros ejemplos similares y comprobar resultados con la CG; mientras que en el momento final se considera el trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la selección y formulación de problemas, la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la CG), interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas (ver tablas 4.6.2.1 y 4.8.1). Esto revela los avances o el efecto en el conocimiento didáctico de los profesores en formación generados por el programa MCA.

Un elemento a destacar fue la consideración de actividades grupales entre los alumnos para favorecer el aprendizaje colaborativo. Respecto a la evaluación, ésta fue vista sólo como búsqueda de información para la calificación del alumno más que insumo para favorecer el fortalecimiento de las capacidades de los alumnos y reorientar acciones dirigidas a mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo se observó avance en la consideración del uso de la CG por parte de los alumnos en las evaluaciones.

Los profesores en formación propusieron diversas estrategias de evaluación orales y escritas.

Además del análisis de la sesión inicial, intermedia y final, acudimos a las producciones de las otras sesiones, en las cuales encontramos similares tendencias a las mencionadas anteriormente, es decir, la preocupación por el aprendizaje de los alumnos puesta de manifiesto a través de actividades algebraicas desarrolladas con la integración de la modelización y la CG y apoyadas en diferentes sistemas de representación, privilegiando siempre los conocimientos algebraicos sin menoscabo las connotaciones ambientales de cada situación problema.

Lo antes señalado revela un balance altamente favorable del desarrollo del programa en lo concerniente a la dimensión cognitiva-objetiva.

Tabla 4.8.1 *Resumen de respuestas dadas en la décima sesión*

	Situación problema	*Preguntas que requieren utilizar modelización*	*Secuencia de actividades*	*Aspectos a evaluar en los alumnos*
PF1	Señales de tráfico	1. ¿Cuántas señales de tráfico se pueden pintar si...? 2. Si la pintura requerida para las señales... cuesta... y las de...cuestan... ¿cuántas señales de tráfico se pueden pintar si se dispone de 60.000 ptas?	1.Explicar el enunciado del problema 2.Seleccionar incógnitas 3.Escribir las condiciones dadas en forma matemática 4.Resolver el sistema de ecuaciones utilizando CG (el profesor) 5.Interpretar resultados 6.Hacer otros ejemplos.	1.Todas y cada una de las etapas mencionadas en la secuencia 2.Planteamiento del problema 3.Discusión delos resultados
PF2	Fábrica de ladrillos $\left.\begin{array}{r} 2100x+2000y=100000 \\ 130x+110y=5790 \end{array}\right\}$	1. Tomando en cuenta que... ¿cuántos paquelillos tiene que hacer un paquetero? 2. Si... ¿cuántos paquelillos ha tenido que hacer al día si la empresa ha obtenido un ingreso M de dinero?	1.Mostrar un cuadro informativo de la fabricación de ladrillos 2.Plantear la situación 3.Construir el modelo 4.Resolver el problema	1.Modelización de la situación problema, específicamente la construcción del modelo 2.Resolución del problema

PF3	Telefonía móvil $\left.\begin{array}{r} 210x+13y+500=6010 \\ 50x+90y+300=3350 \\ 30x+10y+35z+800=2730 \end{array}\right\}$	1.¿Qué tarifa es más interesante? 2.¿Cuánto ha costado hablar con Movistar, u otra de las compañías, en cierto mes?	1.Presentación de una tabla esquemática de la situación problema 2.Construcción del modelo utilizando la tabla anterior 3.Resolución en CG 4.Formulación de nuevas preguntas	1.Interpretación de los datos 2.Planteamiento y toma de decisiones del modelo 3.Ser capaz de decidir entre minutos y horas 4.Resolución 5. Validez de la solución (crítica) 6.Búsqueda crítica de la solución más rápida 7.Estrategias seguidas ¿con CG o a mano?
PF4	Apoyo familiar $\left.\begin{array}{r} x+y=20 \\ x-0,50y=11 \end{array}\right\}$	1. Estudiar posibilidades en las que el niño acaba ganando 2. Obtener el número de respuestas correctas y erróneas si el hijo ganó 110 € 3. Intentar resolver de otra forma con la calculadora.	1.Interpretación del modelo 2.Estudio de datos posibles (ganancias de pares (x,y) con x+y=20). Creación de tablas y funciones 3.Resolución: comando solve y tratamiento algebraico (matrices) 4.Resolución alternativa: intersección de funciones lineales, matrices, probando datos de 2. ya modelizados.	1.Es primordial tener bien hechas las ¾ partes del problema 2. La segunda parte más importante es saber resolver sistemas 3.Investigación de datos y buscar heurísticamente la solución. 4.Interpretación del modelo 5.Relación con resultados de análisis 6.Manejo de CG y actividad práctica.

PF5	Relaciones sociales en la escuela	1.¿Cuántos años tiene mi hermano? 2. ¿y yo?	1. Presentación del problema 2.Intento por tanteo 3.Explicación del método de Gauss o Cramer 4.Resolución por Gauss o Cramer 5. Más actividades, p. ej. Libros o compañeros	1.Que los alumnos sepan plantear ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales (traducción al lenguaje algebraico) 2.Conocimiento de las variables 3.Resolución del problema de manera algebraica 4.Evaluación de la solución.
PF6	Producción de conservas alimenticias $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1050 \\ 0,5x+y+1,5z=1125 \\ \frac{x}{12}+\frac{y}{12}+\frac{z}{12}=87,5 \end{array}\right\}$	1. ¿Qué ocurriría si dispusiéramos del doble de horas y de la tercera parte de la plantilla? 2. ¿Cuál será el coste de la producción si cada hora se paga a 600 pts/persona? ¿En qué caso interesa más?	1.Identificar las variables que intervienen 2.Establecer las relaciones correspondientes entre ellas 3.Resolver el sistema mediante SOLVE 4.Interpretar la solución 5.Hacer una tabla con las distintas posibilidades 6.Fijando una variable. Dibujar las rectas que se obtienen.	1.Localización de las variables 2.El correcto establecimiento de las relaciones que existen entre las variables 3.Correcta resolución del sistema 4.Interpretación de la solución
PF7	Edades en familia $\left.\begin{array}{r} 2x+y=43 \\ x-y=5 \end{array}\right\}$	1. ¿Qué edad tiene cada uno? 2. Representa gráficamente e interpreta el resultado.	1.Plantear el problema 2.Organizar grupos de dos alumnos 3.Actuar de coordinador ya que los alumnos están en grupos de 2 y ayudar a interpretar el enunciado del problema 4..Puesta en común de los resultados 5.Aclarar dudas	1.Interpretación de ser gemelos 2.Posibles soluciones y sus interpretaciones 3.Descubrir la necesidad de un dato adicional ya que este problema en la vida real sólo tiene una solución. 4.Interpretar resultados

PF9	Compra de ropa	1.Modeliza algebraicamente para ver qué posibilidades tiene Leandro 2.Diseña un programa que nos indique si introduciendo una combinación de artículos, tiene Leandro posibilidades de comprárselos.	-Repetir el enunciado a los alumnos -Agruparlos para que discutan la modelización. El profesor debe ayudarlos un poco pero, no mucho.	No los indica
PF10	Satélites de espionaje	1.Podrías decir cuáles de estos satélites pasan por la región *(2,3)*. 2.En el caso de que hubiese alguno que no pase por el punto *(2,3)* cómo modificarías su trayectoria para que si lo haga. 3.Comprobar que solamente (una vez modificadas las trayectorias necesarias) si tienen algún punto más en común.	1.Introducir qué significa resolver un sistema de ecuaciones lineales. 2. Poner de manifiesto la relación existente con el sistema de ecuaciones. 3. Ver dónde está la relación que vamos anunciando.	1.Ver si el alumno conoce el significado de una ecuación y saber si se verifican las igualdades dadas para el punto (2,3). 2. Que el alumno sepa manipular las igualdades

4.9. Balance general de la evaluación de la dimensión cognitivo objetiva

En el análisis realizado a las producciones anteriores notamos la importancia que los profesores en formación otorgaron a la motivación de los alumnos en las actividades diseñadas, tanto con el uso de la modelización como de la calculadora gráfica. Unas de las propuestas que constatan lo antes señalado son el de la situación vinculada con la vida cotidiana propuesta por PF1, la situación referida al ámbito empresarial propuesta por PF2, y la situación comercial propuesta por PF3. Los profesores en formación incorporaron la modelización para la aplicación de conceptos y destrezas, planteando situaciones problema del entorno del alumno. Asimismo los participantes dieron muestras de dominio técnico y didáctico de la calculadora gráfica al emplearla en el diseño de actividades didácticas. Pero lo más resaltante fue la evidente integración de la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de las actividades didácticas que abordaron en el desarrollo del programa MCA. Esto se aprecia en las situaciones analizadas en el momento final (ver apartado 4.8). Los futuros profesores acudieron a la integración de los organizadores modelización y calculadora gráfica en sus producciones, sin dejar de lado los otros organizadores del currículo. Al respecto cabe destacar el caso de la situación vinculada con la vida familiar, propuesta por PF4, donde se resalta el empleo de diferentes sistemas de representación y se mencionan las dificultades con las diferencias entre las notaciones usuales de papel y lápiz y las de la CG (ver apartado 4.8). Los participantes presentaron una resolución sistemática y secuenciada de los procedimientos algebraicos expuestos cada vez que se requería, siempre dentro del marco del álgebra lineal escolar, según hemos visto en los apartados 2.4 y 2.4.1. Respecto a la evaluación fue considerada en la mayoría de los casos de manera convencional, con pocas actividades de evaluación innovadoras como por ejemplo acudir a las potencialidades representacionales de la CG.

Todas estas acciones sirven como indicadores objetivos de la dimensión cognitiva para la evaluación del desarrollo del programa MCA. Asimismo nos muestran los niveles de competencia didáctica puesta en práctica por los participantes y en consecuencia nos indican el logro de los objetivos del programa MCA.

4.10. Evaluación de los resultados de la implementación del programa

De acuerdo al esquema seguido para la evaluación completa del programa, la evaluación de su implementación, considera el diseño, el desarrollo y los resultados. Queda por concluir la evaluación de los resultados, que contempla dimensiones que se refieren a los logros cognitivos y didácticos objetivos, logros cognitivos subjetivos y las variaciones actitudinales (ver tabla 3.7.4). Como señalamos al inicio del capítulo sólo nos referiremos en este momento a los logros cognitivos y didácticos objetivos. La evaluación de los resultados del programa se efectuó a partir de las comparaciones entre las actividades inicial y final, así como los datos recogidos y analizados en las hojas de evaluación final del curso-taller.

Siguiendo la misma estructura de análisis de la evaluación del diseño y del desarrollo, se presentan los aspectos de interés para la evaluación en correspondencia con la tabla 3.7.4, del capítulo III.

4.10.1. Logros cognitivos y didácticos objetivos del programa

Los logros cognitivos y didácticos objetivos se constataron en las producciones de los profesores en formación. A partir de la ejecución de las actividades propuestas en el curso-taller se observó y analizó la puesta en práctica de los contenidos del programa por parte de los participantes. Es decir, se analizó si los profesores en formación tomaron en cuenta los fundamentos relacionados con los componentes del programa MCA. Todo ello observado en el diseño de las actividades didácticas, en la aplicación de la modelización y en el empleo de la calculadora gráfica como recurso didáctico. Para detectar los logros cognitivos y didácticos realizamos en primer lugar la comparación entre la forma cómo los profesores en formación abordaron la actividad inicial y la actividad final, es decir, cómo fueron ejecutadas dichas actividades por los participantes en las sesiones primera y décima respectivamente (ver tablas 4.6.2.1 y 4.8.1). Completamos el análisis tomando en cuenta el desarrollo en otras sesiones, específicamente la cuarta sesión, ya seleccionada previamente, y la séptima sesión. Esta última se analiza después de examinar todas las sesiones no presentadas. En la séptima sesión se observan aspectos didácticos de interés concernientes al avance progresivo de los participantes respecto de los objetivos del programa MCA.

Respecto a la primera sesión encontramos que las situaciones problema, propuestas por los futuros profesores, se correspondieron con niveles de álgebra escolar de secundaria, es decir ecuaciones lineales, sistemas lineales de ecuaciones e inecuaciones lineales. Además, dichas situaciones estaban ubicadas en contextos no alejados de la realidad de los alumnos. En cuanto al tipo de preguntas, los profesores en formación, en general, mostraron pocos enunciados de preguntas abiertas. Las preguntas formuladas fueron, en su mayoría, cuestiones de uso frecuente en los libros de texto, es decir con tradición escolar.

Al analizar las propuestas de secuencia de actividades de enseñanza propuestas por los participantes y dirigidas a alumnos de secundaria, encontramos un proceso de enseñanza centrado en el profesor. Para los participantes el profesor propone, explica, destaca, escribe y expone en el abordaje de las situaciones problema. Lo antes mencionado se puede apreciar en los apartados 4.6.2 y 4.6.3, relativos al análisis de la parte B de la actividad inicial del curso-taller. Asimismo, respecto del proceso de modelización, no se observó énfasis en el proceso de construcción del modelo ni de la interpretación de los resultados obtenidos a partir del modelo. Esto queda reflejado en las secuencias propuestas por los participantes (ver tabla 4.6.2.1) donde, según el análisis realizado en 4.6.2, los participantes se limitan fundamentalmente a plantear la situación problema, escribir el modelo y resolver los problemas. Los participantes sólo le asignaron un uso a la CG de asistente matemático para cálculos parciales y para comprobar resultados.

En lo que respecta a la evaluación, los profesores en formación fueron muy generales e imprecisos en sus señalamientos de los aspectos a evaluar. Los participantes asumieron interés por evaluar, en los alumnos, la construcción del modelo, la justificación de la elección del modelo, el empleo de herramientas matemáticas, la interpretación de la solución, el interés por la clase y el trabajo en grupo. Asimismo los participantes mencionaron algunos instrumentos de evaluación tales como preguntas orales, anotaciones de cuadernos, actividades en pizarra y exámenes escritos. Los profesores en formación no explicaron en qué momentos los emplearían, cómo los implementarían ni para qué aspectos específicos. Todo ello reveló carencias conceptuales sobre la evaluación y su puesta en práctica por parte de los profesores en formación. Esto tendría implicaciones negativas para el diseño de actividades didácticas puesto que habría una asunción marginal de la evaluación. Como consecuencia el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas se vería afectado por falta de criterios fundados que pudieran reflejar el logro de los objetivos.

En el análisis de las producciones de la décima sesión constatamos que los profesores en formación mostraron habilidades para proponer situaciones problema del entorno del alumno vinculadas con el campo del álgebra lineal escolar. Esto se muestra en la tabla 4.8.1, donde todas las situaciones propuestas admiten una modelización algebraica lineal. Además, según el análisis de las producciones de la décima sesión, los participantes acudieron a diferentes ámbitos de interés dentro de los niveles de comprensión de los alumnos de secundaria. De igual manera se observó que consideraron importante, para sus actividades con los alumnos, el generar discusión y reflexión sobre los diferentes abordajes de las situaciones problema, la valoración crítica de las actividades desarrolladas, las habilidades de comunicación oral y escrita, así como las habilidades de los alumnos para trabajar en grupo. Las secuencias presentadas como respuesta a la tercera cuestión de la actividad desarrollada en la décima sesión muestran la importancia que los profesores en formación otorgaron a lo antes señalado (ver tabla 4.8.1).

En esta sesión los profesores en formación presentaron propuestas de situaciones problema referidas a la vida cotidiana, comercial y familiar entre otras (ver cuadro 4.8.1). Dichas situaciones estuvieron relacionadas con la estructura conceptual del álgebra lineal escolar, específicamente con el tratamiento de variables, manejo de relaciones mediante ecuaciones e inecuaciones lineales así como el establecimiento de sistemas de ecuaciones lineales. Los participantes utilizaron diversos sistemas de representación para tales conceptos, para ello emplearon la calculadora gráfica. Esto significa que los participantes integraron la CG en sus actividades y tomaron en cuenta el papel de las representaciones en la comprensión de los conceptos algebraicos involucrados en los modelos formulados. Dicha integración se puede apreciar en los análisis de las situaciones propuestas por PF2, PF3 y PF4 en la décima sesión (ver apartado 4.8). También la CG fue integrada con la modelización en contextos algebraicos propicios para efectuar dicha integración. En los abordajes de las situaciones problema y expuestos en el análisis de las producciones realizado en el momento final (ver apartado 4.8) se puede apreciar dicha integración. El apoyo tecnológico podría contribuir a visualizar la utilidad del álgebra lineal escolar en la explicación de situaciones del mundo físico y social.

En relación al tipo de preguntas formuladas por los participantes en las actividades diseñadas en el curso-taller, en la décima sesión, éstas fueron abiertas en su gran mayoría, lo cual nos sugiere que los participantes podrían utilizar la modelización en sus actividades didácticas.

Comparando el tipo de preguntas propuestas en la primera sesión (ver tablas 4.6.2.1 y 4.6.2.2) respecto a las expuestas en la décima sesión (ver tabla 4.8.1), notamos variaciones importantes. Se observa la formulación de preguntas abiertas que pueden contribuir a desarrollar procesos de modelización, que pudieran ser generadores de discusiones favorecedoras del desarrollo de habilidades de comunicación oral y escrita, así como potenciar la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos. Además de lo antes señalado, conjuntamente con otras facetas, se fortalece la resolución de problemas abiertos que conllevarían la lectura, comprensión y comunicación de ideas matemáticas.

En lo concerniente a las secuencias de los pasos que los profesores en formación planearon seguir en el diseño de la actividad didáctica propuesta en el curso, en términos generales tomaron en cuenta los aspectos siguientes:

1) organización de los alumnos en subgrupos pequeños,
2) planteo de la situación problema,
3) formulación del problema o problemas,
4) identificación de variables,
5) establecimiento de relaciones entre variables,
6) construcción del modelo,
7) presentación del modelo desde diferentes sistemas de representación,
8) resolución de problemas matemáticos,
9) interpretación de la solución,
10) formulación de nuevas preguntas,
11) planteamiento de nuevas situaciones problema.

Entre los cambios sustanciales observados en la primera y en la décima sesión se expresan por ejemplo en que en el momento inicial la secuencia sólo enfatizó en el planteamiento de la situación problema, escribir el modelo, resolver, plantear otros ejemplos similares y comprobar resultados con la CG; en el momento final los participantes enriquecieron la secuencia y los énfasis dados en cada caso. Tal es el caso del trabajo en grupo por parte de los alumnos, el planteamiento de situaciones y la formulación (y selección) de problemas (paso del mundo real al modelo real en el proceso de modelización), la construcción y representación múltiple del modelo (con el apoyo de la CG), interpretación de las soluciones y la formulación de nuevas preguntas (dinámica cíclica del proceso de modelización).

La secuencia de los pasos, muestra que los participantes incluyeron la modelización y sus diferentes momentos en la planificación de sus actividades.

En cuanto a la CG los profesores en formación la utilizaron en el establecimiento de relaciones y en las múltiples representaciones de los modelos (momento de abstracción). También los participantes emplearon la CG en la resolución de los problemas matemáticos (momento de resolución). Asimismo, observaron que la calculadora gráfica fue empleada para la generación de actividades de motivación. Un aspecto a resolver fue que los profesores en formación no plantearon la obligatoriedad del empleo de la CG por parte de los alumnos sino que dejaron abierta su posibilidad de utilización en las actividades propuestas. En las secuencias presentadas y en sus intervenciones de aula, en ningún momento quedó explícita la obligatoriedad del empleo de la CG por parte de los alumnos. Es decir, puede interpretarse que, para los profesores en formación, el empleo de la CG debe responder a una decisión de los alumnos y no a una imposición del profesor (ver tabla 4.8.1).

En lo relativo a cuestiones referidas a la evaluación propuesta por los participantes en la décima sesión, los profesores en formación consideraron la evaluación de sus alumnos no sólo como recopilación de información para que el profesor tome decisiones acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y el logro de los objetivos por parte de los alumnos. Los futuros profesores consideraron la evaluación de los alumnos en todos los momentos del proceso de modelización. El mayor peso de la evaluación estuvo en la formulación del modelo y la interpretación de los resultados.

En la evaluación relativa al contexto algebraico, los profesores en formación dieron importancia a la localización de variables, correcto establecimiento de relaciones entre variables, planteamiento de los sistemas de ecuaciones lineales y su correcta resolución por diferentes maneras.

La evaluación la llevarían a efecto, los participantes, mediante preguntas orales y escritas, además de las discusiones con sus respectivas argumentaciones matemáticas. Las actividades de evaluación escrita se harían mediante corrección de cuadernos, actividades en pizarra, exámenes escritos y carteles.

Todo esto indica que los profesores en formación pusieron en evidencia competencias didácticas tales como plantear situaciones del entorno del alumno, proponer preguntas abiertas, acudir a la modelización para aplicar conceptos y destrezas matemáticas, proponer actividades de evaluación no convencionales y resolver sistemática y secuenciadamente los procedimientos expuestos a los alumnos en las actividades diseñadas para la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Por otra parte, respecto de la CG, los participantes revelaron competencias didácticas tales como el empleo de comandos y/ o aplicaciones con criterio didáctico para generar actividades de motivación, amplitud en la posibilidad de dejar abierto el uso de la CG (a criterio del alumno), utilizar diferentes sistemas de representación para favorecer la comprensión de los conceptos manejados, la resolución sistemática y ordenada de los procedimientos expuestos, la consideración de propuestas de evaluación no convencionales y el empleo de la CG para agilizar y mantener el interés por el tema a enseñar.

Al comparar las producciones de los participantes en la primera sesión y la décima sesión, según puede comprobarse con las tablas 4.6.2.1 y 4.8.1, se observaron cambios, tanto en el tipo de situaciones propuestas como en los contenidos didácticos y las acciones llevadas a cabo para ponerlos en práctica en el diseño de las actividades. En efecto, en la primera sesión, la mayoría de las preguntas fueron cerradas mientras que en la décima sesión la mayoría fueron abiertas. En la primera sesión la secuencia de actividades a desarrollar no se enfatizó en la construcción del modelo ni en la interpretación de los resultados, mientras que en la décima sesión se enfatizaron todos los momentos de la modelización. En la primera sesión la CG fue pensada para realizar cálculos y para comprobar resultados, mientras que en la décima sesión consideraron, no sólo su potencialidad para realizar cálculos y comprobar resultados sino, también su capacidad para la exploración y la representación de conceptos y modelos. Asimismo en la décima sesión los participantes mostraron cierto nivel de organización y planificación para desarrollar las actividades en el aula. Es decir los profesores en formación consideraron aspectos relacionados con la actuación de los alumnos y del profesor, tales como división de la clase en grupos pequeños, exposición de las modelizaciones, discusión y reflexión sobre las tareas realizadas. Esto sugiere asignar un papel activo al alumno en el proceso de aprendizaje. Por otra parte, en la primera sesión, respecto a la evaluación no se indicaron detalles del cómo se llevaría a efecto sino que solamente se mencionaron algunos instrumentos para realizarla. Mientras que en la décima sesión la evaluación estuvo referida al qué, cuándo y cómo realizarla. Esto significa que los profesores en formación mostraron cierta competencia al proponer actividades de evaluación.

Es importante destacar que el dominio de las competencias didácticas alcanzadas por los profesores en formación se logró de forma progresiva a lo largo del curso-taller. Los logros observados en la décima sesión fueron el resultado de la consolidación paulatina de los aportes del programa. Desde la cuarta sesión se pudo percibir que los profesores en formación utilizaban la modelización y la calculadora con cierto grado de integración en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico. Se notó, asimismo, un progreso gradual en la integración de los tres organizadores que dan fundamento al programa MCA. Esos logros se revelaron tanto en las actividades dentro del aula como las tareas realizadas fuera del aula.

Lo antes señalado se soporta en los resultados del análisis de las producciones de los profesores en formación observadas en el resto de las sesiones particularmente las sesiones cuarta y séptima. En esta última, a pesar que trataba contenidos un tanto diferentes, consideramos significativos los logros de los futuros profesores observados en sus producciones. El objetivo de esta sesión estuvo referido al modelo de programación lineal para resolver problemas donde las estrategias utilizadas configuraran un modelo específico para su resolución con la CG. En el correspondiente cuadernillo de actividades de la sesión se indicaron los pasos recomendados por Darby-Dowman (1995) para modelizar situaciones relacionadas con la programación lineal y de esa manera contribuir a estructurar en los participantes una estrategia que complementara los momentos de la modelización que se discutieron en el capítulo II.

Específicamente en la séptima sesión analizamos una situación problema referida a un concierto, es decir: *"un promotor cultural está negociando el tiempo de radio y televisión para anunciar un concierto. Dispone de 20.000 € para gastar en promoción. Cada 20 segundos en la radio comercial cuestan 100€, mientras que 30 segundos en la televisión cuestan 800€. Se quiere hacer al menos 30 anuncios en total. También se desea tener al menos 15 comerciales de televisión.*
¿Cuánto tiempo de radio y televisión puede programar para maximizar el tiempo de la publicidad dentro del presupuesto permitido?
¿Qué conceptos matemáticos son requeridos para modelizar esta situación?
¿Sería apropiada esta actividad para estudiantes de secundaria? ¿Qué cambios introducirías para generar nuevos problemas a partir de esta situación?
Diseña una actividad didáctica para modelizar esta situación con tus alumnos ¿qué tareas de evaluación propondrías?"

En general, en el proceso de modelización seguido por los participantes, empiezan haciendo supuestos, eligiendo variables, definiendo la función objetivo a maximizar, estableciendo restricciones, haciendo representaciones tabulares y gráficas recurriendo a las potencialidades de la CG. Finalmente, emplearon el "principio de las esquinas" y encontraron la solución óptima. Posteriormente interpretaron su significado a la vista de la situación dada y de los supuestos considerados.

Respecto a los conceptos matemáticos que son requeridos para modelizar la situación mencionaron: inecuaciones lineales (analítica y gráficamente), sistemas de ecuaciones lineales (representación geométrica) y el concepto de máximo de una función.

En lo referente a la adecuación de la actividad para ser desarrollada por estudiantes de secundaria hubo controversias, unos profesores en formación consideraron que habría que elegir un problema más simple para dirigirlo a los alumnos y otros participantes la consideraron adecuada. Esto podría considerarse como indicador de competencia, o criterio didáctico, en la selección de situaciones problema para modelizar en secundaria. Algunos participantes consideraron oportuno introducir a los alumnos previamente en la geometría bidimensional y la construcción de recintos en el plano a partir de inecuaciones en dos variables.

En cuanto a la evaluación que los profesores en formación propondrían para la actividad, los participantes plantearon que tal como estaba planteada no debería incluirse en un nivel de examen, pues se requiere el manejo de la CG para llevar adelante la referida modelización. En general la actividad didáctica, que presentaron, estuvo referida a plantear actividades de introducción gradual de la comprensión de la situación hasta determinar con claridad lo que se buscaba para finalmente resolver e interpretar las soluciones a la luz de la situación dada.

En la séptima sesión, pudimos notar la progresiva puesta en evidencia de competencias didácticas por parte de los participantes. En esta sesión se evidenció competencia técnica y didáctica en el manejo de la CG así como competencia en la aplicación de la modelización en sus distintos momentos para la enseñanza.

4.10.2. Balance general de la evaluación de los resultados de la dimensión cognitivo objetiva

De acuerdo a lo descrito en el apartado anterior, los profesores en formación mostraron competencias en el empleo y manejo de elementos básicos de la CG en el diseño de actividades didácticas, lo cual se corresponde con el logro del primer objetivo cognitivo del programa MCA. La evidencia del logro de competencias didácticas se pudo observar en las producciones de las sesiones cuarta, séptima y décima, donde los profesores en formación demostraron manejo de la CG, tanto para hacer diversas representaciones de los conceptos y procedimientos como en la utilización de la misma en el momento de abstracción y resolución del proceso de modelización.

El logro del segundo objetivo del programa MCA, relacionado con la aplicación del proceso de modelización en cada una de las actividades propuestas se pudo observar en los apartados donde se presenta el análisis de las producciones de los profesores en formación. En dichas producciones los participantes presentaron el diseño de actividades de contenido algebraico, en las que propusieron situaciones problema susceptibles de aplicárseles el proceso de modelización, el cual fue realizado en todos sus momentos. Tales logros se dieron de forma gradual en correspondencia con lo esperado para cada sesión de trabajo como se puede apreciar en los análisis de las producciones de las sesiones.

El logro del tercer objetivo, del programa MCA, referido a la integración de la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico, se pone de manifiesto principalmente en los momentos de abstracción y resolución, es decir, la modelización estuvo integrada con la CG.

El logro de los tres objetivos cognitivos del programa también se constató en el análisis de lo recogido en las hojas de observación donde se resume lo apreciado por los observadores participantes. El registro de dichas observaciones se recoge en las tablas 4.10.2.1, 4.10.2.2, 4.10.2.3 y 4.10.2.4. La equis (X) representa la mayor frecuencia de observación de los observadores. Como consecuencia de estas observaciones podemos afirmar que, en cuanto a la modelización, quedan confirmados en la mayoría de las apreciaciones que hemos recogido, los logros en las actividades diseñadas por los participantes.

Tabla 4.10.2.1. *Resumen de las observaciones respecto a la modelización*

Nº	Ítem	Mucho	Poco	Nada
1	La formulación de preguntas cerradas		X	
2	La formulación de preguntas abiertas	X		
3	La búsqueda de modelos referenciales para construir otros		X	
4	El uso de diversas representaciones para comprender las situaciones	X		
5	Refinamiento y ajuste de modelos		X	
6	Argumentación para presentar los modelos		X	
7	Uso de la tecnología en el momento de abstracción	X		
8	Uso de la tecnología en el momento de resolución	X		
9	Viabilidad de su aplicación para el diseño de actividades didácticas	X		
10	Dificultad de su uso en la evaluación de los alumnos		X	
11	Utilidad de las tareas de modelización	X		

Tabla 4.10.2.2. *Resumen de las observaciones respecto a la calculadora gráfica*

Nº	Ítem	Mucho	Poco	Nada
1	Realizar cálculos	X		
2	Realizar experimentación	X		
3	Comprobar resultados		X	
4	Hacer tablas y gráficas	X		
5	Hacer diferentes tipos de representaciones de un mismo objeto	X		
6	Resolver problemas de varias maneras	X		
7	Visualizar transformaciones algebraicas		X	
8	Buscar formas de presentación adecuadas para escolares		X	
9	Identificar estrategias de evaluación con su incorporación		X	
10	Explorar otros problemas no previstos en el curso		X	
11	Plantear o abrir nuevas cuestiones	X		

Tabla 4.10.2.3. *Resumen de las observaciones respecto al álgebra lineal*

Nº	Ítem	Mucho	Poco	Nada
1	Incorporar la calculadora gráfica para la aplicación de conceptos y propiedades algebraicas		X	
2	Enlazar las matemáticas con el mundo físico y social	X		
3	Visualizar la utilidad del álgebra en lo cotidiano para la enseñanza	X		
4	Buscar opciones para la enseñanza de otros tópicos matemáticos			X
5	Explicitar distintos modos de abordar una misma cuestión de álgebra lineal		X	
6	Trabajar distintas representaciones de un mismo tópico	X		

Tabla 4.10.2.4. *Resumen de las observaciones respecto a las actividades didácticas*

Nº	Ítem	Mucho	Poco	Nada
1	Incorporación de la calculadora gráfica	X		
2	Incorporación de la modelización	X		
3	Uso de varios sistemas de representación	X		
4	Estrategias de evaluación de los alumnos		X	
5	Presencia continua de tareas para motivar a los alumnos		X	
6	Presencia continua de problemas			X
7	Incorporación de tareas para trabajo en grupo			

En la tabla 4.10.2.1 se observa poca dificultad para incorporar la modelización en la evaluación de los alumnos, lo cual corrobora las posibilidades de evaluación acudiendo a la modelización.

Finalmente el balance de los resultados del programa MCA, en la dimensión cognitivo objetiva, muestra los logros satisfactorios del programa en esta dimensión. Podemos afirmar que algunas consecuencias derivadas del logro de los objetivos del programa fueron la atención por parte de los profesores en formación, al diseñar actividades didácticas, a los aspectos de sumo interés en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas tales como: 1) recordar, utilizar y emplear hechos, conceptos y técnicas matemáticas, 2) construir argumentos matemáticos, 3) construir y valorar modelos matemáticos, 4) desarrollar habilidades de criticidad e independencia intelectual en los alumnos, 5) leer, comprender, organizar e interpretar información matemática, 6) comunicar ideas matemáticas en forma oral y escrita, 7) desarrollar habilidades de trabajo en grupo y 8) desarrollar el pensamiento lógico.

Sin embargo, en el programa MCA detectamos también algunas carencias o limitaciones que fueron percibidas durante su puesta en práctica, unas identificadas por el grupo de apoyo, otras puestas de manifiesto en las hojas de observación de los investigadores y otras recogidas en la hoja de evaluación final del curso.

De las observaciones del grupo de apoyo se detectó que la incorporación de discusión sobre la síntesis de las opiniones dadas por los profesores en formación, acerca del desarrollo del curso-taller, no tuvo receptividad por parte de los participantes. El propósito de presentar la síntesis de las opiniones de los profesores en formación era el de hacer partícipe al grupo de su propia evolución respecto al curso y conseguir nuevos aportes como consecuencia de sus participaciones o reflexiones críticas. Es importante resaltar que a partir de la cuarta sesión se optó por no realizar dicha presentación sino dedicar el tiempo total de la sesión a desarrollar el guión de trabajo correspondiente. Sin embargo el tiempo dedicado a tal presentación pudo haber influido en que algunos participantes valoraran, en la hoja de evaluación final, como deficiente el tiempo dedicado a cada actividad.

Asimismo, en las hojas de observación se recogió que los profesores en formación presentaron pocas estrategias de evaluación de los alumnos (ver tabla 4.10.4). En efecto, se echa en falta en los participantes una manifestación explícita de esta dimensión curricular como una fuente de fortalecimiento de las habilidades y capacidades intelectuales de los alumnos; es decir, acudir a la evaluación como información de utilidad para continuar o reorientar el proceso de enseñanza y aprendizaje. Ante tal situación el programa MCA no logró aportar suficientes fundamentos que favorecieran cambios en la actuación de los participantes hacia la evaluación de los conocimientos de los alumnos.

En lo relativo a la hoja final de evaluación algunos futuros profesores dejaron constancia de inconformidad con las conclusiones de cada sesión (ver tabla 4.3.1), con el tiempo dedicado a cada actividad (ver tabla 4.3.2) y con el tiempo de interacción con la CG (ver tabla 4.3.2). Estas limitaciones identificadas durante el desarrollo del programa MCA, sugieren revisión de la estrategia metodológica utilizada en lo concerniente a la distribución del tiempo para desarrollar cada actividad, así como esclarecer que aspectos resaltar o profundizar en el cierre de cada sesión. En cuanto al tiempo de interacción con la CG, podría planificarse el desarrollo del programa MCA estableciendo mayor número de horas y mayor actividad práctica.

Del análisis de las producciones, específicamente en la cuarta sesión, observamos que la situación SP3 referida a la fabricación de artículos deportivos, los profesores en formación hicieron abordajes directos sin evidencias de utilizar el proceso de modelización con CG. Esto sugiere la sustitución de esta situación por otra que ofrezca mayores posibilidades de utilización e integración de ambos componentes del programa.

CAPÍTULO

V

Evaluación del programa. Dimensión subjetiva

5. 3. Balance de opiniones sobre el álgebra escolar, la modelización y la calculadora gráfica

5. 4. Estudio de las actitudes

5.4.1. Actitudes hacia las componentes del programa

5.4.2. Fiabilidad del cuestionario

5.4.3. Resultados de la aplicación de la escala de actitudes

5.4.4. Análisis de los resultados en la aplicación inicial de la escala

5.4.5. Análisis de los resultados en la aplicación final de la escala

5.4.6. Cambios de actitudes apreciados

5. 5. Entrevistas a participantes del programa transcurrido un año

5.5.1. Aspectos relativos a la modelización matemática

5.5.2. Aspectos relativos a la calculadora

5.5.3. Aspectos relativos al álgebra lineal

5.5.4. Aspectos relativos a las actividades didácticas

5.5.5. Opiniones y sugerencias relacionadas con el curso-taller

5.5.6. Balance de las entrevistas sobre los efectos del programa

5. 6. Logros cognitivos-didácticos subjetivos

5. 7. Balance general de la evaluación cognitiva subjetiva del programa

5.1 Introducción

En este capítulo se presenta la evaluación de la dimensión cognitiva subjetiva considerada en la evaluación del programa MCA, para lo cual se hace uso del análisis y discusión de la información ya indicada en los apartados 3.7.3 y 3.7.4 de esta memoria. Como se estableció en el Apartado 3.7.3. sobre evaluación del desarrollo del programa, la evaluación de la dimensión cognitiva considera dos tipos de indicadores: objetivos y subjetivos, correspondientes a las dos facetas de dicha dimensión cognitiva. Los indicadores subjetivos tienen en cuenta los aspectos afectivos y de opinión y, para ello, consideran la percepción que los participantes del programa tienen sobre los aprendizajes logrados en relación con las componentes de dicho programa MCA. El análisis de esta dimensión cognitivo-subjetiva se efectúa a partir de las opiniones emitidas por los participantes en las hojas de notas diarias que cumplimentaban al final de cada sesión del curso-taller y en la escala de actitudes.

Además del análisis de las opiniones, en este capítulo se incluye el análisis de las entrevistas aplicadas un año después de realizado el curso a algunos de los participantes del programa MCA, actualmente en ejercicio profesional como docentes. Tales entrevistas post-curso aportan información sobre posibles efectos del programa en la práctica profesional.

Para la evaluación de la dimensión cognitiva de carácter subjetivo partimos de la descripción y análisis de las opiniones de los profesores en formación respecto a los aprendizajes alcanzados por ellos con relación a cada uno de los componentes del programa MCA.

El análisis de las opiniones se efectuó tomando como estructura básica de análisis las expresiones y juicios de los profesores en formación recogidos en las hojas de notas diarias. A partir de las opiniones de los participantes se construyeron las categorías emergentes y las redes existentes entre ellas. El criterio manejado para el análisis de las opiniones fue la descomposición en unidades relevantes y significativas, tomando el criterio temático para la segmentación de la información en unidades. Es decir, en función del tema abordado consideramos como unidades básicas las expresiones, ya que asumimos que cada expresión es una unidad de información con sentido en sí misma. Este análisis se efectuó siguiendo la propuesta de la teoría fundamentada (Strauss & Corbin, 1998).

5. 2. Análisis de las opiniones de los participantes. Dimensión cognitiva subjetiva

Las opiniones de los participantes hacia las cuatro componentes del programa fueron recogidas a través de la hoja de notas diarias, según se especificó en el capítulo III. Dichas opiniones son un medio para conocer las actitudes de los profesores en formación hacia los componentes del programa MCA.

En el ámbito actitudinal las preguntas de investigación, enunciadas en el capítulo I, son las siguientes:

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia la utilización de la modelización en la enseñanza del álgebra?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el uso de la calculadora en la enseñanza del álgebra?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el planteamiento y resolución de problemas algebraicos en la enseñanza de las matemáticas?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el diseño y elaboración de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra?

A continuación presentamos la información relacionada con cada uno de los componentes del curso, es decir, modelización, calculadora, álgebra y actividades didácticas. Esta información fue recogida de las hojas de notas diarias y de la escala de actitudes.

Destacamos que en la hoja de notas diarias, los profesores en formación expresaron de forma subjetiva su grado de aprovechamiento del curso-taller y aquellos aspectos del mismo que utilizarían en la enseñanza de las matemáticas. De igual manera manifestaban las dificultadas confrontadas para su aplicación y las sugerencias o recomendaciones que consideraban oportunas.

En las hojas de notas diarias los profesores que participaron en el programa MCA, reconocieron subjetivamente los aprendizajes, destrezas, dificultades y posibles acciones a tomar en su futuro profesional así como algunas recomendaciones para la enseñanza del álgebra lineal.

5.2.1 Opiniones sobre la modelización

En este apartado exponemos las opiniones emitidas por los profesores en formación, en cada una de las sesiones del curso-taller, acerca de la modelización en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

La utilidad de la modelización estuvo referida a su potencialidad para acercar al alumno a su ambiente natural y social mediante el planteamiento de situaciones de interés vinculadas a la vida cotidiana. Asimismo, identificaron en la modelización su potencia para resolver problemas del mundo real, para desarrollar capacidades de abstracción (paso del modelo real al modelo matemático) e interpretación de resultados algebraicos, en particular, trabajando con diferentes sistemas de representación y el contraste con la situación problema del mundo físico o social. En la tabla 5.1 se puede apreciar un resumen de las opiniones emitidas por los profesores en formación en cada una de las 10 sesiones del curso-taller, de las cuales hacemos referencia a continuación.

Aquí se presenta una síntesis de las opiniones sesión por sesión y se procede a su análisis y comentario. En la *primera sesión* se reconoció el carácter motivador de la modelización para las clases, su 'vinculación' con el planteamiento de situaciones problema del mundo real y su contribución al mejoramiento de la comprensión de las matemáticas. Algunas opiniones respecto a la utilidad de la modelización fueron las siguientes:

> "[Permite...] ver las matemáticas desde un punto de vista útil que motiva" (PF4)
>
> "Partir de situaciones problema y llegar a un modelo puede mejorar la comprensión de los alumnos al implicarlos" (PF5)
>
> "Da una visión más amplia de los conceptos tratados" (PF9)

En esta primera sesión, los participantes también expresaron lo que incorporarían de la modelización para el diseño de actividades didácticas. Al respecto plantearon que incorporarían el planteamiento de situaciones problema de la vida cotidiana, la posibilidad de proponer problemas a partir de otro problema planteado y el fomento de la discusión en las aulas de matemáticas. Entre las opiniones manifiestas tenemos:

> "...que los alumnos piensen situaciones de la vida cotidiana a resolver con álgebra" (PF6)
>
> "Distintos tipos de problemas reales que se muestran en distintos aspectos de un modelo" (PF9)
>
> "Reduciría el número de condiciones para no acotar las soluciones y fomentar la discusión" (PF4)

En cuanto a las dificultades confrontadas al aplicar el proceso de modelización en el diseño de actividades didácticas, los profesores en formación manifestaron tener dificultad en la incorporación de nuevas condiciones a un problema, en la generalización de modelos y en la creación de modelos apropiados para el aprendizaje del alumno. Consideraron además que requiere imaginación por parte del profesor. Esto lo expresaron de la siguiente manera:

"La generalización del modelo, pues nos obligamos a pensar cosas muy particulares de un modelo estándar" (PF4)
"Crear un modelo en el que el alumno se sienta implicado y que sea apropiado para el aprendizaje del alumno" (PF5)
"Hace falta mucha imaginación. A veces las ideas se acaban y se tiende a la rutina" (PF9)

Las recomendaciones dadas por los profesores en formación para la enseñanza del álgebra, estuvieron relacionadas con la necesidad de comprensión, por parte del alumno, de conceptos involucrados en la resolución de problemas, así como de la actitud positiva del mismo hacia la resolución de problemas y con la búsqueda de fuentes de situaciones problemas por parte del profesor.

"Visualizar los conceptos que van unidos a la resolución de problemas"(PF4)
"que el alumno se plantee problemas propios para su resolución"(PF5)
"Que los alumnos busquen en la prensa, la TV, etc., donde aparezcan modelos algebraicos"(PF6)

En la *segunda sesión*, las opiniones de los profesores en formación, respecto a la utilidad de la modelización para el diseño de actividades didácticas, están referidas al aporte o ayuda de la modelización en la resolución de problemas, el rol activo y motivador del profesor y al estímulo de la reflexión en los alumnos. Los participantes dijeron:

"Posibilidad de ver e interpretar cualquier tipo de problema real sin memorizar mecanismos" (PF4)
"Tener una visión más clara, por parte del profesor, de la unidad didáctica a tratar y crear en el alumno un clima motivador y crítico para la resolución de problemas con..." (PF7)
"El alumno entra en contacto de manera rápida e íntegra con lo que se quiere enseñar. Favorece la participación" (PF5)

Los profesores en formación identificaron posibles beneficios en el aprendizaje de los alumnos producto de la incorporación de la modelización con el apoyo de la calculadora gráfica en sus actividades didácticas para enseñar álgebra lineal.

Las dificultades encontradas por los futuros profesores en la aplicación de la modelización en la enseñanza del álgebra se centraron en la construcción, la elección y la adecuación del modelo matemático correspondiente a la situación problema en cuestión. Dentro de sus opiniones tenemos que la dificultad con la modelización se refirió a:

"La abstracción del modelo real. Es difícil adaptar los conocimientos matemáticos a un problema concreto" (PF4)
"Difícil elegir un modelo u otro" (PF9)
"Buscar el modelo adecuado para cada clase y/o alumno" (PF5)

Finalmente, en esta segunda sesión, los participantes recomendaron plantear situaciones del entorno en las cuales el alumno pueda experimentar e interpretar soluciones. Además, consideraron importante que el profesor prevea el razonamiento del alumno cuando éste modeliza, con el propósito de proporcionarle la ayuda necesaria.

"Pensar en el entorno social del alumno y colocar ejemplos referidos al mismo" (PF2)
"Que el alumno experimente" (PF10)
"Profundizar en el significado real de las soluciones, una vez obtenidas" (PF8)
"Ponerse en el lugar de los alumnos, para poder hacer una modelización" (PF9)

En la *tercera sesión* los participantes del curso-taller percibieron la modelización como un proceso útil para aumentar el espíritu crítico de los alumnos al estudiar situaciones del mundo real y fortalecer la abstracción mediante acciones como la experimentación en la construcción de modelos. Entre sus opiniones tenemos:

"Puede servir para aumentar el espíritu crítico de los alumnos y para que se cuestionen más preguntas acerca de los enunciados que pueden intentar resolver" (PF5)

"Para representar situaciones de la vida real que necesiten, antes de una resolución, un tanteo que nos oriente" (PF8)

En cuanto a lo que los participantes incluirían en sus actividades didácticas, manifestaron incorporar la propuesta de situaciones problema de la vida real, reiteraron en que estos incentivan el espíritu crítico.

En esta sesión, los profesores en formación no expresaron dificultades para la aplicación de la modelización en sus actividades.

Lo que sí podemos apreciar en la hoja de notas diarias es que los participantes hicieron recomendaciones para utilizar la modelización en el diseño de actividades didácticas tales como la incorporación de tablas para visualizar los datos de los problemas.

En la *cuarta sesión* los participantes reconocieron a la modelización diversas utilidades para el diseño de actividades didácticas y la formación del alumno, así la utilidad para la comprensión de conceptos nuevos, la motivación para la abstracción y la posibilidad de usar un modelo para estudiar varias situaciones. Algunas opiniones fueron:

"Bastante utilidad para completar la formación del alumno" (PF5)

"Muy importante, aporta claridad a la resolución de problemas y a la asimilación de conceptos nuevos" (PF10)

"Que el alumno asimila realmente los conceptos abstractos" (PF1)

"La motivación para abstraer problemas concretos. La posibilidad de usar el modelo en infinidad de situaciones"(PF4)

Los participantes valoraron la incorporación de las tablas para encontrar modelos e interpretar soluciones en las actividades didácticas de álgebra en secundaria. También insistieron en que utilizarían la modelización para explicitar el proceso de abstracción. En este aspecto algunas de sus expresiones fueron las siguientes:

> "La tabulación como... ayuda para encontrar el modelo y para interpretar las soluciones" (PF3)
> "[al alumno]... debe írsele familiarizando con el significado abstracto de las variables y los conceptos matemáticos" (PF1)

Las dificultades encontradas por los participantes estuvieron referidas a la adecuación de la situación problema a los alumnos, la construcción del modelo y a la interpretación de resultados. Entre otras opiniones análogas referidas a las dificultades encontramos:

> "La adecuación del problema y la interpretación de resultados" (PF5)
> "Hallar un modelo propio para cada situación problema" (PF4)

Las recomendaciones que dieron los profesores en formación para la enseñanza del álgebra lineal se focalizaron en el alumno, en el sentido que se le deben proponer actividades adecuadas de resolución de problemas de su entorno considerando que su resolución sea por métodos algebraicos. Entre las recomendaciones se señalan:

> "Diseñar actividades adaptadas al alumno, sin posibilidad de interpretaciones que no entiendan" (PF8)
> "Partir de problemas que estén íntimamente relacionados con su propia realidad [del alumno]" (PF5)
> "...a los alumnos problemas que... no tengan más recursos que resolverlos por métodos algebraicos" (PF9)

En la *quinta sesión*, la cual estuvo referida a una experiencia realizada en secundaria, los participantes expresaron que la modelización tiene gran utilidad para motivar a los alumnos porque contribuye a clarificarles las ideas, pero que también requiere que el profesor posea conocimientos previos de las situaciones a estudiar. Con respecto a la utilidad de la modelización mencionaron:

"Motivación para los alumnos" (PF9)
"...nos permite llegar de una manera clara e intuitiva al alumno" (PF10)
"La modelización requiere un conocimiento previo sobre lo que se va a estudiar" (PF3)

En esta sesión los futuros profesores opinaron que podrían incorporar en sus actividades didácticas para motivar a sus alumnos modelos de variable discreta y utilizar diferentes vías de resolver un mismo problema. Manifestaron que incorporarían en sus actividades didácticas:

"Modelos de variable discreta para representar algunas situaciones" (PF8)
"Motivar al alumno para que sea capaz de obtener posibles modelizaciones de problemas y hacerle ver las ventajas e inconvenientes de cada uno" (PF7)

Las dificultades encontradas en esta sesión están referidas a la elección del modelo matemático, el nivel de los alumnos y la evaluación de los aprendizajes de los alumnos. Esto se recoge en expresiones como las siguientes:

“La toma de decisiones para la elección del modelo requiere experiencia sobre el método utilizado” (PF3)
“Una gran dificultad es el nivel de los alumnos que hemos podido comprobar que no siempre la teoría se corresponde con la práctica” (PF9)
“[Una dificultad es la...] evaluación del alumno”(PF1)

Las recomendaciones expresadas por los participantes se centraron exclusivamente en la motivación del alumno para modelizar, más específicamente,

“Motivar al alumno para que sea capaz de obtener posibles modelizaciones de problemas y hacerle ver las ventajas e inconvenientes de cada uno” (PF7)

En la *sexta sesión* los profesores en formación expresaron que la principal utilidad de la modelización se refiere a la motivación del alumno y a la importancia de proponer y resolver problemas de la vida cotidiana. En particular, manifestaron la importancia de situaciones problema de criptografía para estudiar el tema de las matrices. Respecto a la utilidad de la modelización recogimos las siguientes opiniones:

> "[La modelización tiene utilidad en...] la motivación de los alumnos" (PF9)
> "Los alumnos le dan importancia a la localización del objetivo del problema y los resultados, sin quedarse sólo en los cálculos" (PF7)
> "Sirve para que los alumnos resuelvan problemas cotidianos" (PF2)
> "Modelizar situaciones de criptografía entre los alumnos. Esto facilita el aprendizaje de matrices" (PF5)
> "Inclusión de problemas motivadores como de criptografía" (PF6)

Las dificultades identificadas en la sexta sesión no fueron específicas a conceptos o procedimientos del proceso de modelización sino referidas a condiciones generales para emplear la modelización en el diseño de actividades didácticas. Tal es el caso de la complejidad de los vectores y las matrices en secundaria, la modelización en el ámbito matricial y encontrar actividades que involucren a los alumnos.

Las recomendaciones de interés para la enseñanza del álgebra lineal, en la sexta sesión, fueron la utilización de la modelización en la motivación del alumno, formulación de situaciones problema del mundo real y el trabajo en grupo. A continuación presentamos algunas de esas recomendaciones:

> "Es muy importante la motivación, sobre todo en secundaria" (PF9)
> "Proponer problemas relacionados con el entorno del alumno y que no sean muy abstractos" (PF2)
> "Poner más interés en la interpretación de la solución obtenida" (PF8)
> "Realizar trabajo en grupo" (PF5)

La *séptima sesión* incluyó actividades de programación lineal. Los participantes expresaron la conveniencia de modelizar situaciones distintas con un mismo modelo, la importancia de la comprensión de un problema y de sus resultados y la utilidad práctica de la modelización en procesos lineales. En palabras de los participantes tenemos:

> "Se puede modelizar situaciones reales distintas con un único modelo" (PF3)
> "La capacidad de resolver problemas de difícil comprensión (por exceso de datos, etc.) a partir de un modelo sencillo que he aplicado anteriormente" (PF4)
> "Con la modelización se da importancia al problema y a la interpretación de los resultados"(PF7)
> "Modelización de procesos lineales sujetos a ciertas restricciones lineales" (PF8)

En esta sesión los futuros profesores plantearon que incorporarían en el diseño de actividades didácticas: problemas sencillos en secundaria, ejemplos reales sobre costes empresariales y el uso de tablas para recoger los datos de las situaciones problema.

En relación con la dificultad confrontada con el proceso de modelización, los participantes opinaron que los problemas de programación lineal no son motivadores porque los alumnos no suelen tener contacto directo con las empresas.

Las recomendaciones dadas por los profesores en formación en la séptima sesión se centraron en la propuesta de situaciones cotidianas pero no tan complejas que ayuden al alumno a ver la utilidad del álgebra en la interpretación de problemas algebraicos con tablas y el incremento de la abstracción aumentando la complejidad en nuevas situaciones problema. Por ejemplo, proponer situaciones de programación lineal en tres dimensiones. Algunas recomendaciones fueron:

> "La búsqueda de problemas cotidianos interesantes al alumno que le ayuden a ver la utilidad de las matemáticas" (PF6)

"Interpretar problemas de manera algebraica, con tablas, etc... se tiene un amplio abanico para la interpretación de un resultado del problema" (PF7)
"Resolución de problemas sin necesidad de visualización gráfica (aumenta la abstracción)" (PF8)

La octava *sesión* también fue escenario para que los profesores en formación opinaran sobre la utilidad de la modelización para el diseño de actividades didácticas. En ese sentido los participantes reconocieron la potencia motivadora de la modelización, la posibilidad de resolver problemas reales con varios métodos e interpretar los resultados. También expresaron que la modelización contribuye a una mejor comprensión de los conceptos y los problemas del mundo físico y social.

"Tiene un claro valor de motivación para el alumno, quien aprende a resolver problemas de la vida real y no se limita al ámbito puramente matemático" (PF1)
"El alumno mediante los pasos de la modelización es capaz de entender lo que se pregunta, resolver con varios métodos y comparar finalmente si los métodos usados son coherentes con las soluciones" (PF7)
"Gran utilidad para una mayor comprensión de los problemas y conceptos" (PF10)

Los participantes expresaron que incorporarían, en sus actividades didácticas, el planteamiento de situaciones problema para modelizar con el apoyo del editor de texto y de la programación en la calculadora gráfica.

La principal dificultad que identificaron los participantes en la octava sesión fue la de aprender lenguaje de programación para utilizarlo en la calculadora gráfica. Sus dificultades específicas estuvieron referidas al proceso de modelización con la incorporación de tecnología. Una de las expresiones emitidas fue la siguiente:

"Demasiadas las complicaciones al programar y casi imposible detallar todos los pasos necesarios" (PF10)

Las recomendaciones dadas por los futuros profesores estuvieron referidas a la propuesta de situaciones problemas del entorno del alumno. Asimismo, mencionaron que se debe evaluar de forma objetiva y crítica los resultados obtenidos en la modelización, así como el proceso realizado.

> "Poner ejemplos relacionados con el entorno del alumno y motivarles a resolverlos" (PF2)
>
> "Evaluar de forma crítica los resultados obtenidos y el proceso. Ser objetivo con la interpretación de cada uno" (PF3)

En la *novena sesión* la utilidad de la modelización, reconocida por los participantes, fue la de tener un papel motivador en los alumnos y ayudar a comprender la situación problema planteada.

> "[La modelización es un...] claro instrumento de motivación para el alumno" (PF1)
>
> "[La modelización...] es útil para aumentar el interés de los alumnos por la asignatura" (PF5)
>
> "[Con la modelización...] el alumno tiene una visión más clara del problema planteado" (PF7)

En esta sesión los profesores en formación afirmaron que incorporarían el programa Cabri de la calculadora gráfica y la realización de actividades en grupo en el diseño de sus actividades didácticas.

La dificultad confrontada con el proceso de modelización estuvo referida a la elección del modelo adecuado cuando se realiza la modelización de una situación problema.

Las recomendaciones dadas por los profesores en formación fueron: usar el programa Cabri de la calculadora gráfica y el editor de texto para modelizar, proponer situaciones problema del entorno del alumno, utilizar otros organizadores del currículo, presentar simultáneamente diversas representaciones para interpretar resultados y diseñar actividades geométricas con justificación práctica.

La *décima sesión* confirmó en los participantes ciertas características de la modelización que singularizan su papel en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y que habían mencionado con anterioridad en otras sesiones del curso-taller. Tales rasgos de utilidad de la modelización fueron la motivación del alumno, el poder para ayudar a interpretar situaciones reales, la contribución a poner de manifiesto la utilidad de las matemáticas, la ayuda para la abstracción, el razonamiento y para fortalecer la autonomía intelectual de los alumnos.

> "[La modelización...] es imprescindible en cualquier actividad didáctica de secundaria"(PF1)
> "El planteamiento del modelo aporta una doble visión de la utilidad. Lo verbal y lo matemático" (PF3)
> "El proceso de abstracción en matemáticas se hace a partir de secundaria. Por medio de la modelización se hace mucho más fácil la comprensión. Se enfatiza el carácter práctico de la asignatura" (PF4)
> "Las situaciones planteadas serán de interés para el alumno lo cual abre las posibilidades para que se amplíe en su razonamiento y perspectiva" (PF5)
> "La modelización mediante álgebra lineal es fundamental en la resolución de problemas en matemática ya que ayuda a interpretar tanto el enunciado como el resultado del problema y ver con claridad todo el proceso" (PF6)
> "Mayor libertad para pensar, del alumno" (PF10)

Los profesores en formación expresaron que incorporarían en sus actividades didácticas: el planteo y resolución de situaciones problema, actividades de actualidad motivadoras para el alumno, la modelización como elemento motivador para empezar una unidad didáctica, la propuesta de situaciones problema del ambiente del alumno, las posibilidades de evaluación del alumno que brinda la modelización y en general lo imprescindible de la modelización en secundaria.

Por otra parte los profesores en formación expresaron sus dificultades para el empleo de la modelización en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los participantes reconocieron alta dificultad para los alumnos y por otro lado la dificultad para el profesor en encontrar situaciones adecuadas al entorno del alumno y en general para el diseño de actividades didácticas.

Asimismo, los participantes recomendaron, en la sesión, usar la modelización en el planteamiento de situaciones problema pero no muy complicadas, el trabajo en grupo y el abrir discusiones acerca de las interpretaciones de soluciones a problemas abiertos.

> "Hacer que el alumno trabaje y se plantee las discusiones en grupos de trabajo cuando se estime conveniente" (PF5)
> "Crear en el aula un ambiente motivador y dejar al alumno que interprete soluciones a problemas abiertos" (PF7)
> "La motivación a partir del entorno más próximo al alumno" (PF9)
> "Utilización de problemas cercanos a los alumnos y no muy complicados" (PF10)

5.2.2. La dimensión cognitiva subjetiva referente a la modelización

A continuación realizamos el análisis de los juicios y comentarios emitidos por los profesores en formación respecto a la modelización, específicamente en los apartados referentes a su utilidad escolar, dificultades para su aplicación didáctica y recomendaciones para la planificación de actividades didácticas.

Consideramos las opiniones que más destacaron y que surgieron con mayor frecuencia en cada una de las sesiones del curso-taller para buscar su significación vinculada con el conocimiento didáctico. De esta manera tratamos de identificar aspectos reveladores de competencias para la planificación de actividades didácticas en los futuros profesores.

Con la finalidad de buscar y establecer categorías emergentes, que describieran las opiniones de los participantes, se procedió a realizar su agrupación en torno a expresiones relacionadas con conceptos de nuestro interés. En este sentido, en los juicios y opiniones emitidos acerca de la utilidad escolar de la modelización encontramos los siguientes conceptos: motivación, comprensión, autorreflexión, autonomía intelectual y aplicaciones de las matemáticas.

El concepto de *motivación* se refiere al propósito del profesor por lograr que los alumnos muestren interés y se sientan atraídos por las actividades que propone el profesor en la enseñanza de las matemáticas de manera que se facilite su aprendizaje. De acuerdo con un número apreciable de las opiniones de los profesores en formación este interés se incrementa considerablemente con el planteamiento de problemas del mundo físico y social cercano al alumno.

El concepto de *comprensión* se refiere a los niveles de dominio en el aprendizaje matemático que alcanza el alumno y que se muestra en el carácter significativo de su conocimiento, que se manifiesta por su precisión conceptual y su dominio de los procedimientos matemáticos, así como por el desarrollo de habilidades para resolver problemas del mundo real. La *autorreflexión* del profesor en formación acerca del diseño de actividades didácticas queda definida por el proceso de toma de decisiones acerca de las competencias que entrarán en juego en las actividades propuestas para los alumnos, cómo y cuando hacerlas realidad para conseguir una enseñanza de las matemáticas de calidad. El concepto de *autonomía intelectual* se refiere a las capacidades que logra desarrollar el alumno para el razonamiento matemático, la argumentación y el pensamiento crítico, a su disposición a hacerse preguntas, investigar, pensar, conjeturar y comunicar a otros acerca de las ideas matemáticas y su funcionalidad. Por *aplicaciones de las matemáticas* entendemos todos aquellos contextos y situaciones que permiten destacar y poner en práctica el uso de las matemáticas para la comprensión y resolución de problemas del mundo real. Estos conceptos lo utilizamos como un sistema de categorías para clasificar los juicios y opiniones expresados por los profesores en formación a lo largo de las sesiones del programa MCA.

Las opiniones comprendidas en la categoría de la motivación reflejan la importancia que le asignan en el diseño de actividades didácticas. El empleo de la modelización se percibe como un elemento atractivo para lograr la confianza de los alumnos hacia el planteamiento de situaciones problema que son usadas para captar su interés y desarrollar su conocimiento de las matemáticas. Es decir, el interés por las matemáticas y sus procesos son motivados por situaciones del mundo real. Al considerar el carácter motivador de la modelización en la enseñanza de las matemáticas podemos suponer que los futuros profesores estuvieron de acuerdo en que la inclusión de las actividades de modelización contribuyen a dar significado al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas tal como lo señala Blum (1991). Es decir los profesores en formación percibieron que los alumnos se podrían sentir atraídos hacia el estudio de las matemáticas cuando se recurre a la modelización. Esto pareciera coincidir con lo planteado por Botham & Crowe (1997) quienes concluyeron en su investigación que presentando problemas del mundo real apropiados al nivel de los alumnos, éstos participan con disfrute en las actividades de modelización.

Los juicios y comentarios de los participantes que caen bajo la categoría de comprensión de las matemáticas tuvieron como referencia la importancia que otorgan al aprendizaje significativo de las matemáticas. En particular, consideraron relevante la potencialidad de las situaciones problema que se plantean en las actividades planificadas así como los conceptos y procedimientos matemáticos conectados con dichas actividades y a los que dotan de sentido. Los participantes, en general, opinaron que la comprensión es clave en el proceso de modelización, y pone en evidencia hasta que punto esas tareas ayudan a los alumnos a pensar matemáticamente.

Por otra parte, sabemos que las distintas fases y momentos de la modelización (ver capítulo II) requieren comprensión para llevar a feliz término los estudios de las situaciones propuestas y los problemas que se hayan planteado, tal como señala Dunne (1998) quien además agrega que con la modelización los alumnos desarrollan habilidades de explicación, interpretación, predicción y análisis.

Las opiniones en la categoría de autorreflexión estuvieron dirigidas a poner en evidencia que el profesor requiere conocimientos y destrezas para llevar con éxito el proceso de modelización en la enseñanza de las matemáticas. Esto significa que los participantes reflexionaron acerca de su relevante papel en la enseñanza de las matemáticas, en el sentido que deben contar con conocimientos y competencias didácticas, para que los alumnos logren los objetivos de aprendizaje deseados o establecidos en la planificación de las actividades. En efecto, Botham & Crowe (1997) sostienen que el profesor que utiliza la modelización en la enseñanza de las matemáticas debe tener conciencia de la naturaleza de la modelización y sus implicaciones para el desarrollo matemático de sus alumnos, es decir, el profesor requiere de una autorreflexión sobre lo que imparte y cómo lo imparte. En términos de Blum (1991), los profesores deben tener conocimientos de lo que exigirán a sus alumnos.

La autonomía intelectual fue una categoría considerada en los juicios emitidos por los participantes, y que se refiere a las capacidades que deben desarrollar los alumnos, con el apoyo de sus profesores, para incrementar sus posibilidades de éxito en la modelización de situaciones del mundo real. Esto, por una parte, conduce a los alumnos al desarrollo de su capacidad para el razonamiento matemático (Mason, Burton & Stacey, 1992) y, por otro lado, la conexión entre las situaciones del mundo real y las matemáticas. Es decir, de las opiniones emitidas por los profesores en formación podríamos inferir que hubo inquietud respecto al logro de cierta autonomía en el razonamiento matemático de sus alumnos.

Finalmente, la categoría de aplicaciones de las matemáticas fue considerada en los juicios y opiniones emitidos por los futuros profesores, como una opción para dar a conocer a los alumnos la utilidad de las matemáticas más allá de consideraciones de otras épocas, en las cuales se estudiaba la disciplina con aislamiento total de la realidad no escolar del alumno. Esta forma de pensar de los participantes los sitúa en una postura avanzada en la dotación de sentido práctico a las matemáticas escolares. Esto significa que los profesores en formación vislumbraron la integración de las matemáticas con otras formas de conocimiento, tal como señala Bassanezi (1994). Es decir, que los participantes se trazarían como propósito formar a sus alumnos para comprender, evaluar y manejar la utilidad de las matemáticas en situaciones problema fuera del ámbito estrictamente matemático.

Los participantes también expresaron diversos juicios relativos a aquellos aspectos de la modelización que les gustaría incorporar en las actividades didácticas. Al revisar las opiniones y juicios de los profesores en formación con el objetivo de buscar conceptos que emergen encontramos un sistema de categorías similar al ya analizado. Los conceptos que lo constituyen son: motivación, comprensión, dinámica en el aula, autonomía intelectual y aplicaciones de las matemáticas. De estas categorías, la única que necesitamos definir es la *dinámica en el aula*, puesto que las otras ya fueron caracterizadas anteriormente. El concepto de dinámica en el aula se refiere a las diversas estrategias de trabajo que el profesor en formación se propone poner en juego en la enseñanza teniendo en cuenta el tipo de participación de los alumnos en las actividades propuestas.

Respecto de la categoría de dinámica en el aula, los futuros profesores manifestaron su inclinación por acudir a diferentes sistemas de representación para modelizar situaciones del mundo real. Esto podría interpretarse como la búsqueda de representaciones tanto para los datos provenientes de las situaciones problema en cuestión como para los diferentes conceptos matemáticos que surjan a partir de ellas. Esto contribuiría a la búsqueda de conexiones y al desarrollo de la habilidad para razonar efectivamente, tal como señalan Castro & Castro (1997). Asimismo, los participantes desearían tomar en cuenta las diferentes maneras de abordar las situaciones problema, con lo cual no se encapsularía a los alumnos en razonamientos rígidos, sino que por el contrario les permitiría la posibilidad de buscar otras alternativas; contrariamente a lo expuesto por Cathcart & Horseman (1997) quienes señalan que para los profesores en formación existe sólo una respuesta correcta a los problemas matemáticos y un solo método correcto para encontrar esa solución. También, expresaron su interés por el aprendizaje cooperativo y la evaluación de los aprendizajes con la modelización. Esto podría significar que los profesores en formación consideran algunos de los principales desplazamientos de la práctica evaluativa contemplados en los estándares de evaluación (NCTM, 1995) tales como: sintonía de la evaluación con el currículo, diferentes fuentes de inferencia en el proceso de evaluación y ver a los alumnos como participantes activos en el proceso de evaluación. Esto resulta de considerar todos los momentos del proceso de modelización (ver capítulo II).

También los profesores en formación manifestaron que se apoyarían en la tecnología para realizar el proceso de modelización. Esto pudiera implicar un refuerzo para la motivación, la comprensión, la autonomía intelectual y las aplicaciones de las matemáticas. Todo esto contribuiría a la conceptualización y la modelización tal como lo establecen los estándares del NCTM (2000).

En el ámbito cognitivo los profesores expresaron las dificultades confrontadas en el diseño de actividades didácticas. Los conceptos y las categorías que emergieron fueron los ya considerados en relación con la incorporación de la modelización, es decir: Motivación, comprensión, dinámica en el aula, autonomía intelectual y aplicaciones de las matemáticas.

En cuanto a la motivación, los profesores en formación, opinaron que sería difícil escoger las situaciones adecuadas para despertar el interés y la curiosidad de los alumnos al tratar con actividades didácticas sobre temas como el de programación lineal. Esta situación sugiere que el profesor debe ser estimulado a buscar abordajes que motiven e involucren a los alumnos. Por ejemplo plantear situaciones lo menos alejadas del entorno físico y social de sus alumnos, tales como algunos problemas de transporte. En este sentido Blum (1991) propone una lista de ejemplos convenientes para la enseñanza de las matemáticas y del álgebra lineal en particular. Pensamos que esa dificultad se podría ver disminuida a medida que planifiquen más actividades didácticas con la incorporación de la modelización y más aún cuando la sigan utilizando en su futura práctica profesional. Aunque no debe omitirse que "... las aplicaciones algunas veces no logran motivar a los alumnos a hacer matemáticas" (Blum, 1991, p.19). Esto podría indicar que, además del nivel de competencia didáctica deseable para que el profesor incorpore la modelización en las actividades didácticas, se podrían encontrar imprevistos como el de la falta de motivación de los alumnos.

Los juicios sobre dificultades en la categoría de comprensión estuvieron referidos a las dificultades en la matematización de la realidad, en particular sobre la abstracción requerida para pasar del modelo real al modelo matemático. Los participantes opinaron que esa fase o momento de la modelización supone cierta dificultad para el alumno. Observamos que en sus opiniones no hicieron referencia a la búsqueda de alternativas para superar esta dificultad. Sin embargo, nosotros consideramos que la dificultad señalada puede disminuir si el proceso de enseñanza enfatiza la búsqueda y el descubrimiento de las ideas matemáticas a partir de la riqueza de las situaciones problema, tal como lo plantean Cross & Moscardini (1985).

Las dificultades consideradas para la dinámica en el aula, por parte de los profesores en formación, se centraron en el diseño de actividades didácticas de interés para los alumnos así como en la manera de realizar la evaluación del aprendizaje de los escolares. Esto podría indicar que los participantes reflexionaron acerca de la modelización, su ambiente de aplicación, las condiciones para aplicarla eficientemente y el juicio de los procesos cognitivos relacionados con los objetivos que lograrán los alumnos. Nuestros hallazgos coinciden con lo planteado por Coxhead (1997) al referirse a las dificultades encontradas por ella con profesores en formación. Contrariamente, para Barbosa (2001) las principales dificultades que afrontan los profesores para emplear la modelización están referidas al contexto escolar.

Las dificultades contempladas en relación con el logro de la autonomía intelectual de los alumnos se centraron en la imaginación requerida para incorporar nuevas condiciones a una situación problema, elegir modelos e interpretarlos y la generalización.

La dificultad relativa a las aplicaciones de las matemáticas, según opinión de los profesores, fue la construcción de los modelos matemáticos en campos específicos no matemáticos. Esta dificultad la podríamos asociar con el contraste entre la manera como se han enseñado las matemáticas a los profesores en formación y la manera cómo deben enseñarla a sus alumnos. Los participantes sienten que la modelización también exige conocimientos sobre fenómenos no matemáticos, estudiados por otras disciplinas (Blum, 1991), como es el caso de aquellas situaciones relacionadas con la banca, el comercio o la geografía. En la medida que los profesores en formación planifiquen y desarrollen actividades didácticas con la incorporación de otros fenómenos a las tareas de modelización irán percibiendo que es posible ese puente para conectar las matemáticas con el mundo real.

Finalmente, respecto a las recomendaciones sobre la planificación de actividades para la modelización los profesores expresaron juicios y opiniones relativos a su uso didáctico. Los conceptos que emergieron nuevamente fueron: Motivación, comprensión, dinámica en el aula, autonomía intelectual y aplicaciones de las matemáticas.

Los profesores en formación recomendaron motivar a los alumnos para modelar fenómenos, a partir de ejemplos o situaciones problema de interés para ellos. Los participantes recomendaron estimular la comprensión de los alumnos haciendo énfasis en cada uno de los momentos de la modelización, es decir, enfatizar la abstracción con el uso de varios sistemas de representación y sus diferentes interconexiones para dotar de significado e interpretar y resolver cada uno de los problemas asociados con las situaciones reales dadas. Para la dinámica en el aula, los participantes, opinaron que se deberían utilizar otros organizadores del currículo de matemáticas, plantear situaciones del entorno del alumno, diseñar actividades adaptadas al nivel de los alumnos, realizar trabajo en grupo y evaluar de una manera objetiva y crítica los resultados del proceso de modelización. Las recomendaciones para incrementar la autonomía intelectual de los alumnos estuvieron referidas a que el alumno se plantee y resuelva problemas con la correspondiente discusión y participación de los demás compañeros de clase. Por último, los profesores recomendaron que las aplicaciones de las matemáticas podrían abordarse a partir de consultas a la prensa y en la propuesta de situaciones adecuadas por el profesor.

Los resultados esperados por los profesores en formación respecto de sus futuros alumnos son: 1) apreciar y valorar conexiones entre las matemáticas y otras disciplinas, y 2) desarrollar estrategias y técnicas para aplicar las matemáticas en la resolución de problemas del mundo real, aspectos ya identificados por Cathcart & Horseman (1997).

Las recomendaciones dadas por los futuros profesores para el uso didáctico de la modelización estuvieron centradas en proporcionar un sentido de profundidad global más que local, ya que se habla del uso de procesos globales pero no se mencionan las particularidades para llevarlo a feliz término en cada caso. Esto forma parte de su escasa experiencia docente y del poco trabajo realizado sobre tareas de modelización para la enseñanza. A medida que estos estudiantes para profesor desarrollen competencias en tareas de diseño y evalúen los resultados de sus actividades podrán reflexionar e internalizar distintas fases para los logros locales. Esto parece relacionarse con el ciclo de enseñanza propuesto por Simon (1995), porque ese es uno de los aportes de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje dentro del refinamiento del referido ciclo. En general, los profesores abordaron diferentes temas que forman parte de sus opiniones y orientan sobre sus actitudes hacia la utilización de la modelización en la enseñanza del álgebra.

En la figura 5.1 se estructura una red, a partir de los conceptos emergentes en las opiniones de los profesores en formación, respecto a la configuración de competencias didácticas asociadas a la modelización. De la red se desprende que la competencia didáctica involucra una autorreflexión respecto a la dinámica en el aula, la motivación y la comprensión de los alumnos. Dicha comprensión, por parte de los alumnos, les ayudaría a identificar algunos campos de aplicación de las matemáticas y favorecería la autonomía intelectual de los alumnos.

Figura 5.1. *Identificación de aspectos relacionados con las competencias didácticas en la modelización*

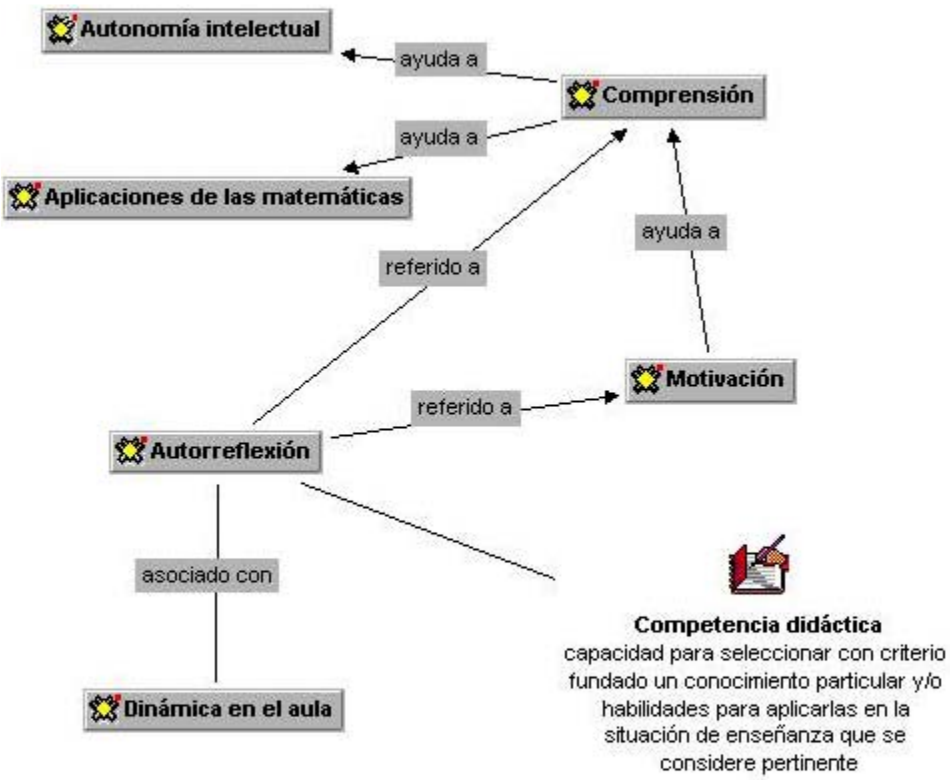


Tabla 5.1 *Resumen de opiniones sobre la modelización*

Opiniones / *Sesiones* Objetivos	*Utilidad percibida de la modelización*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para la aplicación de la modelización*	*Recomendaciones para su aplicación*
Primera Sesión Presentar y describir los componentes que articulan el programa.	-Planteamiento de situaciones problema del mundo real -Mejorar comprensión y aplicación de las matemáticas -Motivar las clases.	-Fomento de la discusión -Situaciones de la vida cotidiana -Problemas derivados de una situación problema	-Incorporar nuevas condiciones a un problema -generalización de modelos -Crear modelos apropiados para el aprendizaje del alumno -Requiere mucha imaginación	-Visualizar los conceptos relacionados con la resolución de un problema -Que el alumno se plantee problemas -Buscar situaciones y modelos en la prensa
Segunda Sesión -Identificar los comandos básicos para el uso y manejo de la calculadora gráfica -Describir y ejemplificar el esquema general del proceso de modelización. -Aplicar el proceso de modelización.	- Ayuda a interpretar problemas reales - Ayuda al profesor a clarificar su unidad didáctica - Motiva y favorece el pensamiento crítico	- Modelización de situaciones del mundo real con el apoyo de la calculadora gráfica	-Paso del modelo real al modelo matemático (abstracción) -Elegir un modelo u otro -Encontrar el modelo adecuado a cada clase	-Plantear situaciones del entorno social del alumno -Interpretar las soluciones -Comprender los razonamientos y necesidades de los alumnos -Que el alumno experimente

Tabla 5.1 *Resumen de opiniones sobre la modelización* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la modelización*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para la aplicación de la modelización*	*Recomenda-ciones para su aplicación*
Tercera Sesión Aplicar comandos de la calculadora y el proceso de modelización con la ayuda de métodos algebraicos, tabulares y gráficos en la resolución de problemas relacionados con ecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales	- Aumentar el espíritu crítico de los alumnos - Para estudiar situaciones de la vida real - Experimentar (tanteo) en la resolución de problemas	Resolución de problemas de la vida real para aumentar el espíritu crítico del alumno	--	Incorporar tablas para visualizar los datos de los problemas
Cuarta Sesión Modelizar situaciones en las cuales subyacen relaciones de linealidad que conllevan a la resolución de inecuaciones lineales	- Para completar la formación del alumno - Contribuye a comprender conceptos nuevos - Motivación para la abstracción - Posibilidad de emplear un modelo para varias situaciones	-Explicitar el proceso de abstracción - Las tablas para encontrar modelos e interpretar soluciones	- Construir el modelo matemático - La adecuación del problema y la interpretación de resultados	- Plantear ejemplos del entorno del alumno - Diseñar actividades adaptadas al alumno - Proponer problemas que sean sólo para resolver algebraicamen te

Tabla 5.1 *Resumen de opiniones sobre la modelización* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la modelización*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para la aplicación de la modelización*	*Recomendaciones para su aplicación*
Quinta Sesión Valorar las estrategias utilizadas en el diseño de actividades de modelización matemática en secundaria con el apoyo de calculadoras gráficas	- Útil en la motivación de los alumnos - Ayuda a trasmitir de manera clara e intuitiva - Requiere del profesor conocimientos previos de las situaciones a modelizar	- Motivación al alumno - Diferentes maneras de abordar los problemas del mundo real - Modelos con variables discretas	- Evaluación del alumno - Elección del modelo - Nivel de los alumnos en las matemáticas escolares.	- Motivar al alumno para realizar modelizaciones
Sexta Sesión Aplicar la modelización con el apoyo de la calculadora gráfica en el diseño de actividades didácticas relacionadas con vectores y matrices.	- La motivación de los alumnos - Importancia para la propuesta y resolución de problemas reales - Utilidad para resolver problemas cotidianos - Situación de criptografía para estudiar matrices	- Empleo de matrices para codificar - Utilización de problemas motivadores como el de criptografía	- Encontrar actividades que involucren a los alumnos - Modelización en el ámbito matricial - Complejidad de los vectores y matrices en secundaria	- Realizar trabajos en grupo - Proponer situaciones problema del entorno del alumno - Tomar en cuenta la motivación del alumno

Tabla 5.1 *Resumen de opiniones sobre la modelización*
(Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la modelización*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para la aplicación de la modelización*	*Recomendaciones para su aplicación*
Séptima Sesión Resolver problemas donde las estrategias utilizadas le configuren un modelo específico para su resolución, mediante la calculadora TI-92 plus, utilizando como referencia el modelo de programación lineal (PL).	- Modelizar situaciones reales distintas con un mismo modelo - Importancia de la comprensión y de los resultados de un problema - Utilidad en procesos lineales	- Formular situaciones problema no complejas en secundaria - Empleo de tablas para recoger los datos de los problemas - Ejemplos reales sobre costes empresariales	- Los problemas de programación lineal no son motivadores porque los alumnos no suelen tener contacto directo con las empresas	- Proponer situaciones cotidianas que no sean tan complejas para ayudar al alumno a ver la utilidad del álgebra - Interpretar problemas algebraicos con tablas - Incrementar la abstracción
Octava Sesión Utilizar el editor de texto y la programación en el diseño de actividades didácticas en el proceso de modelización	- Para motivar - Se resuelven problemas con varios métodos - Se logra mayor comprensión de los problemas y conceptos	- Resolución de problemas con el apoyo del editor de texto y de la programación en la calculadora gráfica	- Aprender lenguaje de programación	- Proponer ejemplos relacionados con el entorno del alumno - Evaluar de forma objetiva y crítica los resultados y el proceso

Tabla 5.1 *Resumen de opiniones sobre la modelización* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la modelización*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para la aplicación de la modelización*	*Recomendaciones para su aplicación*
Novena Sesión Identificar comandos básicos para el uso didáctico del Cabri Geometry de la calculadora gráfica, a través de ejercicios prácticos	- Su función motivadora - Se logra una visión más clara de la situación problema planteada - Importante la visualización geométrica con Cabri	- Empleo del Cabri Geometry - Realización de actividades en grupo	- Elegir el modelo adecuado	- Usar Cabri y el editor de texto para modelizar - Proponer problemas del entorno del alumno - Utilizar otros organizadores del currículo - Visualizar en simultaneo lo gráfico y lo simbólico para interpretar
Décima Sesión Diseñar una actividad didáctica de contenido algebraico para desarrollarla con alumnos de secundaria	- Motivación del alumno - Interpretación de situaciones reales - Utilidad de las matemáticas - La abstracción - El razonamiento - Autonomía intelectual de los alumnos	- Planteamiento y resolución de problemas del mundo real - Actividades motivadoras del entorno del alumno - Evaluación con modelización - Imprescindible en secundaria	- Puede ser muy difícil para el alumno - Encontrar situaciones adecuadas del entorno del alumno - El diseño de unidades didácticas	- Emplear modelos - Proponer problemas del entorno del alumno, pero no muy complejos - Trabajo en grupo - Fomentar discusiones acerca de los problemas

5.2.3. Opiniones sobre la calculadora gráfica

En este apartado exponemos las opiniones y juicios emitidos por los profesores en formación en cada una de las sesiones del curso-taller, acerca de la utilización de la calculadora gráfica (CG) en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

En relación con la calculadora se consideran dos aspectos: su uso didáctico y el manejo técnico, puestos en práctica por los futuros profesores al emplear la CG como recurso didáctico. El uso didáctico está relacionado con la incorporación de la calculadora en actividades dirigidas fundamentalmente al logro del aprendizaje matemático de los alumnos e integradas en estrategias de enseñanza que el profesor planifica para contribuir a tal fin. El manejo técnico está referido a la identificación de funciones y aplicación de comandos, teclas, reconocimiento de limitaciones y, en general, el conocimiento de sus características e instrucciones de funcionamiento. A lo largo del curso el uso didáctico se relacionó con la motivación para los alumnos, la visualización de diferentes representaciones y sus interconexiones para fomentar la comprensión de conceptos y propiedades algebraicas, así como la resolución de problemas y la interpretación de las soluciones. Asimismo, se identificaron en la calculadora posibilidades tutoriales haciendo uso del editor de texto y de la programación. El manejo técnico estuvo referido al uso de comandos simbólicos, tabulares y gráficos. También trabajaron con aplicaciones tales como el Cabri Geometry, programación y las interacciones calculadora-calculadora y calculadora- ordenador mediante el enlace Graph Link.

En el cuadro 5.2 se puede apreciar un resumen de las opiniones emitidas por los profesores en formación sobre la calculadora gráfica en cada una de las 10 sesiones del curso-taller, de las cuales hacemos referencia detallada a continuación.

En la *primera sesión*, los participantes identificaron en la calculadora gráfica sus posibilidades aritméticas, algebraicas y gráficas. Algunas opiniones respecto a la utilidad de la calculadora gráfica fueron las siguientes:

"Teclas usuales de calculadora, funciones □, □,... y sus menús son los más útiles" (PF3)

"Utilidad de la representación gráfica" (PF7)

En esta primera sesión, los participantes también destacaron aquello que incorporarían de la calculadora gráfica para el diseño de actividades didácticas. En ese sentido consideraron que utilizarían la tecnología y la visualización de la pantalla de la calculadora en clase por su capacidad motivadora. Sin embargo, en esta primera sesión se vislumbró cierta duda sobre la utilización de la calculadora en el aula. Los futuros profesores expusieron que:

"[Incorporaría...] lo estimulante de la calculadora gráfica" (PF2)

"[Incorporaría...] el retroproyector para la calculadora gráfica" (PF5)

"No estoy seguro de las posibilidades de la calculadora gráfica en secundaria" (PF8)

Las dificultades estuvieron referidas al desconocimiento por parte del profesor en formación de la potencia didáctica de la CG. También manifestaron temores referidos al riesgo que se correría al utilizar la CG por su efecto en la posible pérdida de destrezas de cálculo algebraico en los alumnos. Entre las dificultades evidenciadas en sus opiniones tenemos:

"Falta familiarización con la CG" (PF2)

"No conoce la potencia didáctica de la CG" (PF3)

"Se puede perder el manejo del cálculo en la clase de álgebra" (PF7)

La recomendación más notoria, dada por los profesores en formación, fue la de utilizar la calculadora más allá de sus posibilidades en la resolución de problemas. En sus palabras dijeron:

"Utilizar la calculadora no sólo como asistente" (PF4)

En la *segunda sesión* los participantes interactuaron con la calculadora gráfica (CG) y manifestaron como relevante la utilidad de los comandos algebraicos y gráficos (*solve, csolve, Define*, #, %) y sus interconexiones. Además, destacaron la rapidez y precisión en la visualización de los resultados de las operaciones efectuadas. Al respecto los profesores en formación reconocieron que aprendieron:

> "Comandos de graficación, su utilidad e interpretación" (PF2)
>
> "Comandos de álgebra, pantalla dividida y graficación" (PF6)
>
> "Diferentes visualizaciones de un problema" (PF10)
>
> "Visualización instantánea y precisa de las operaciones" (PF4)

En esta segunda sesión, los futuros profesores manifestaron que incorporarían la CG en el diseño de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra lineal en secundaria. Tal incorporación comprendería la resolución gráfica de sistemas de ecuaciones, las tablas y la visualización de la pantalla (ViewScreen). Algunas de sus opiniones referidas a la incorporación de la CG consideraron:

> "La resolución gráfica de sistemas de ecuaciones con la CG y posterior cotejo en la libreta" (PF4)
>
> "Las tablas de representación de los datos de un problema" (PF6)
>
> "El uso del retroproyector para visualizar resultados y procesos" (PF5)
>
> "La visión gráfica, simultáneamente con la algebraica para ver su resolución" (PF7)

Las dificultades encontradas en esta sesión con la CG estuvieron focalizadas en la formación del profesor y de los alumnos para manejarla.

> "Se necesita saber manejar la CG, lo cual exige previo conocimiento matemático" (PF1)
>
> "La CG sería difícil introducir al alumnado por su complejidad" (PF2)
>
> "La CG me resultó difícil para su uso, pero me ayudo a ver distintas representaciones de los modelos" (PF9)

Las recomendaciones, emitidas en esta sesión por los profesores en formación para la enseñanza del álgebra lineal utilizando la calculadora gráfica se refieren a evitar que el alumno dependa de la CG y que su uso se centre en la presentación de ejemplos y en la experimentación. A continuación tenemos algunas de esas recomendaciones:

> "Que el alumno no dependa de la CG" (PF5)
> "Ejemplos variados en la CG para convencer más que demostrar" (PF4)
> "Que el alumno experimente" (PF10)

En la *tercera sesión* los futuros profesores siguieron utilizando los comandos de la sesión anterior (tabulares, simbólicos y gráficos), además de incorporar el empleo del comando ± para el proceso de resolución de ecuaciones en forma simbólica. Se introdujeron funciones por partes así como funciones de dos variables. Todo se complementó archivando datos de la CG en disquete o en otra CG. Veamos algunos comentarios de los participantes:

> "Sumatoria (>), ±. La segunda muy útil para el proceso de resolver ecuaciones" (PF3)
> "Introducción de funciones en una y dos variables con condiciones y acotando dominio" (PF4)
> "±, útil complementado con la extracción de factores comunes" (PF10)
> "Pasar datos de la CG al PC y a otra CG" (PF5)

Lo que los profesores en formación incorporarían al diseño de actividades didácticas fue el uso del comando ANS( ) para que los alumnos comprendan el proceso de resolución de ecuaciones. Asimismo, se inclinarían por usar las tablas junto con experimentación numérica y gráfica. Lo que incorporarían lo expresaron así:

> "El comando ANS( ) para que el alumno entienda la transposición de términos cuando se despeja en una ecuación" (PF2)

"La experimentación de resultados gráficamente y reiteradamente mediante la CG" (PF4)

"La incorporación de ir añadiendo, sumando a una ecuación para ver como varían las rectas que la representan" (PF6)

"Tablas para visualizar los datos de los problemas..." (PF9)

Las dificultades encontradas en esta sesión estuvieron referidas a la notación simbólica de la CG, la necesidad de formación previa del profesor para emplear la CG y los riesgos de convertir la CG en panacea del alumno. Algunas de sus expresiones fueron las siguientes:

"Diferencia entre la notación de la CG y la nuestra" (PF4)

"El tiempo que quizás se puede necesitar para aprender el manejo de la CG" (PF5)

"Los alumnos pueden pensar que, como la CG es una herramienta muy rápida para resolver problemas algebraicos, ya no necesita aprender otros métodos más formales" (PF9).

En esta sesión los profesores en formación recomendaron utilizar el comando ANS( ) de la CG, en el diseño de actividades didácticas, para que los alumnos sigan detalladamente el proceso de resolución de ecuaciones. También recomendaron realizar experimentación gráfica y tabular e incorporar un paralelismo de representación gráfica y simbólica en la resolución de ecuaciones para ganar comprensión del proceso de resolución de ecuaciones.

En la cuarta *sesión* se resaltó el uso de la representación tabular con los comandos ϶ y &, para comparar funciones, resolver ecuaciones de una y dos variables. Los profesores en formación reconocieron el uso de las tablas para la evaluación de la comprensión en los alumnos. Al respecto emitieron algunas opiniones como las siguientes:

"Diseño de tablas para comparar entre ellas" (PF2)

"&϶ Útiles para resolver ecuaciones en dos variables con una ecuación" (PF3)

"Representar valores de una función mediante tablas, para evaluar comprensión en los alumnos" (PF9)

En esta sesión los participantes manifestaron que incorporarían en sus actividades didácticas la utilización de tablas con CG, resolución de inecuaciones, uso de tablas para comparar datos y para comprender el concepto y significado de las inecuaciones. En ese sentido opinaron que incorporarían:

"La tabulación como ayuda para encontrar el modelo y para interpretar las soluciones" (PF3)
"La interpretación de tablas" (PF9)

En esta sesión las dificultades se dirigieron al requerimiento de conocimientos previos de los conceptos matemáticos para trabajar exitosamente con la CG. También los profesores en formación se refirieron a las dificultades con la interpretación de los resultados dados por la CG y la escala a utilizar en la CG para estudiar una zona de interés en una gráfica.

"La CG preimplica conocimientos de conceptos matemáticos" (PF1)
"Interpretación del resultado obtenido en la CG para razonar la validación del modelo" (PF3)
"Delimitar área a estudiar en una gráfica" (PF10)

Las recomendaciones en esta sesión se dirigieron a la motivación que se debe perseguir con la CG para comprender conceptos y propiedades. Los participantes opinaron que de esta manera se lograría la apreciación de la potencialidad de la CG.

La *quinta sesión* estuvo referida a una experiencia realizada con alumnos de secundaria, específicamente con la incorporación de la CG. Principalmente se trabajó con familias de funciones y ajuste de modelos a partir de tablas de datos, así como la representación de funciones y comparaciones entre ellas. Los profesores emitieron sus opiniones sobre lo aprendido en esta sesión. Al respecto manifestaron que la utilidad de la CG fue para:

> "Definir familias de funciones con #" (PF1)
>
> "Ajuste de curvas" (PF10)
>
> "Representación rápida de funciones y su comparación" (PF7)

En esta sesión los participantes expresaron que incorporarían en sus actividades didácticas el uso de tablas y la experimentación con funciones.

Las dificultades manifiestas por los profesores en formación, en esta sesión, estuvieron referidas a los conocimientos previos de los alumnos, el exceso de comandos y la evaluación del aprendizaje de los alumnos. En ese sentido expresaron:

> "Una gran dificultad es el nivel de los alumnos que hemos podido comprobar que no siempre la teoría se corresponde con la práctica" (PF9)
>
> "Utilización de la CG, pues necesitaría mucho tiempo para explicar los comandos" (PF2)
>
> "Hasta que punto evaluar el uso de la CG" (PF6)

En esta sesión, las recomendaciones que dieron los profesores en formación fueron las de utilizar diferentes sistemas de representación, acudir a la experimentación con funciones y utilizar tablas en la CG.

En la *sesión* se manejaron los comandos relacionados con vectores y matrices (I, ψ:*Matrix*). Se definieron matrices en la CG y se realizaron diversas operaciones de álgebra matricial. Se utilizó la CG para demostrar igualdades matriciales. Además se hicieron ejercicios de creación de archivos y carpetas (°, □, ζ*: Create Folder*). Respecto a los conocimientos adquiridos los participantes manifestaron:

> "Matriz, transpuesta, inversa, generación de matrices aleatorias" (PF7)
>
> "Trabajo esquemático con matrices definidas" (PF3)

Los profesores en formación expresaron que incorporarían la CG en el diseño de actividades didácticas para que el alumno descubra propiedades mediante la experimentación, compruebe cálculos matriciales y para que la utilice como una forma rápida de obtener resultados.

Las dificultades que los participantes percibieron en esta sesión estuvieron referidas al aprendizaje para manejar la CG y al peligro de convertir la máquina en un distractor de la concentración del alumno al resolver un problema. Específicamente opinaron que:

"Los comandos de la CG requieren tiempo para ser aplicados" (PF2)
"El uso muy reiterado de la CG puede hacer perder la noción del problema" (PF7)

La principal recomendación dada por los futuros profesores para el uso de la CG estuvo relacionada con la manera de introducir los conceptos y propiedades, específicamente plantearon que se debería mostrar a los alumnos los posibles errores y limitaciones de la CG en el abordaje de ciertos ejercicios o problemas, por ejemplo el trazado de rectas verticales.

La *séptima sesión*, según los profesores en formación, se dedicó al editor de texto, símbolos matemáticos, así como la representación gráfica de regiones factibles en problemas de programación lineal. También guardaron archivos de CG en diskettes. Uno de los participantes opinó que:

"El editor de texto es didácticamente interesante" (PF10)

En esta sesión los participantes expresaron que incorporarían como innovaciones para el diseño de actividades didácticas el editor de texto, la resolución de ejercicios en varios sistemas de representación y la introducción de problemas de programación lineal, pero una vez que se enseñe a los alumnos la manera de plantearlos.

Las dificultades en esta sesión estuvieron referidas a la pericia en el manejo de la CG, por parte de los alumnos y el profesor, y a la posibilidad de distracción del alumno por exceso de comandos en la resolución de un problema. Los profesores lo expresaron así:

> "En el tipo de ejercicios vistos en esta sesión, el alumno se enfrenta con algunas dificultades de tipo técnico con la CG,..." (PF1)
>
> "La representación con la CG puede confundir (intersección de regiones) y su manejo tampoco es intuitivo; es otra cosa más a aprender" (PF4)
>
> "Peligro de perder la noción del sentido del problema por el exceso de comandos a usar en la CG" (PF7)

Respecto de las recomendaciones dadas por los futuros profesores, fundamentalmente ellos manifestaron que la CG debería utilizarse como asistente matemático para cálculos y problemas complicados. También se vio la CG como un apoyo para la modelización de situaciones problema relacionadas con la programación lineal. Algunas recomendaciones específicas fueron:

> "Usar la CG para la resolución de problemas con un cálculo muy pesado, en el que el alumno puede perder la noción del problema" (PF1)
>
> "Usar la CG en la resolución de problemas de PL es indispensable para ahorrar tiempo" (PF4)
>
> "Diseñar problemas de [programación lineal] PL con solución más abierta ya que la CG lo permite con facilidad" (PF9)

La *octava sesión* estuvo dedicada al editor de texto y a la programación con la CG. Algunos aprendizajes reconocidos por los participantes fueron:

> "Editor de texto (Bastante utilidad didáctica)" (PF1)
>
> "Combinar editor de texto con programas y funciones" (PF4)
>
> "Editor de programas y comandos relacionados es útil para el profesor en los diseños de álgebra lineal" (PF6)

Los participantes manifestaron que incorporarían en sus actividades didácticas el editor de texto, la experimentación con CG, el diseño de programas. Asimismo manifestaron que incorporarían el diseño de unidades didácticas mediante el editor de texto y la programación con perspectivas de darles uso tutorial para los alumnos. Además expresaron que mediante programas se podría evaluar al alumno. Sus opiniones al respecto se resumen a continuación:

> "La creación de programas pequeños que ayuden a comprender el álgebra por ejemplo, el concepto de sucesión" (PF6)
> "La utilización de la CG con programas para que se use como un tutor" (PF7)
> "Pequeños programas que realizan tareas sencillas pero que hace falta repetir varias veces" (PF8)
> "Realizando un programa adecuado podría evaluar al alumno" (PF7)
> "El diseño de unidades didácticas mediante el editor de texto y la programación" (PF10)

Las dificultades confrontadas por los participantes en esta sesión estuvieron referidas al aprendizaje del lenguaje de programación y al requerimiento de tiempo para alcanzar la maestría suficiente en el diseño de programas. En el manejo específico encontraron dificultades con el uso del comando ∃ para representar funciones gráficamente, es decir con la configuración de la ventana de visualización. Algunas de las dificultades fueron:

> "La programación de la CG es compleja y poco intuitiva" (PF3)
> "Se tarda mucho y se necesitan muchos conocimientos de CG" (PF9)
> "Demasiadas las complicaciones al programar y casi imposible detallar todos los pasos necesarios" (PF10)

En las recomendaciones los futuros profesores propusieron diseñar pequeños programas, sustituir la pizarra por la CG y utilizar parámetros para hacer representaciones que ayuden a los alumnos en el establecimiento de patrones y relaciones entre varias funciones.

La *novena sesión* estuvo referida a utilizar comandos básicos del Cabri de la calculadora (O, ♦: *FlashApps, Cabri Geometry*). Se resolvieron problemas geométricos relacionados con el álgebra. Los participantes interactuaron con el ordenador y el world wide web y realizaron envío y guardado de información CG-CG, CG-PC a través del enlace Graph Link.

Los profesores en formación opinaron que introducirían innovaciones en el diseño de actividades didácticas tales como problemas algebraicos a resolver con el apoyo del Cabri Geometry. También manifestaron que incorporarían actividades de geometría plana, siempre con algunos programas de apoyo para el alumno. Por otra parte destacaron la implantación del desarrollo de actividades en grupo. Entre sus opiniones tenemos:

> "El Cabri es una poderosa herramienta didáctica y motivadora, con la cual el alumno visualiza geométricamente las relaciones matemáticas" (PF1)

Las dificultades con la CG en esta sesión se concentraron en la falta de familiarización con el manejo de la misma, el conocimiento del Cabri y la evaluación de los alumnos. Esto lo expresaron así:

> "Con la CG por su complejidad de comandos" (PF2)
> "Es difícil evaluar al alumno con la CG" (PF7)

En esta sesión las recomendaciones estuvieron dirigidas al uso diario de la CG en las clases de matemáticas, el apoyo complementario de la calculadora con el ordenador y el diseño de actividades geométricas que tengan justificación práctica. Recomendaron el uso del Cabri y el editor de texto para las actividades didácticas.

En *la décima sesión* los participantes trabajaron con varios comandos, destacando la interrelación de los comandos Graph, Text Editor, Solve y Table.

Como innovación los futuros profesores proponen incorpor el uso de gráficas y la calculadora como asistente matemático en el diseño de las actividades didácticas. En ese sentido opinaron que:

> "La CG como recurso de resolución rápida de muchos problemas que manualmente sería muy complejos y también como forma de visualización gráfica de algunos problemas y sus soluciones" (PF6)

Las dificultades giraron en torno al manejo de la CG, la evaluación de los alumnos y la disponibilidad de tiempo para trabajar con los alumnos. Al respecto opinaron que:

> "El manejo de las funciones de la CG y evaluar por separado comprensión de los contenidos y la resolución con y sin CG, de problemas" (PF4)
> "Es difícil evaluar un alumno de ESO con CG, ya que es preciso que éste conozca la CG" (PF7)
> "La introducción de la CG puede ser difícil en ocasiones en las que se tenga poco tiempo" (PF5)

5.2.4. La dimensión cognitiva subjetiva referente a la calculadora gráfica

En lo que sigue presentamos el análisis de los juicios y las opiniones expresadas por los futuros profesores respecto a la calculadora gráfica (CG), específicamente acerca de:

-qué aprendieron en el curso referente a la utilidad de la CG,

-en segundo lugar qué incorporarían de estos conocimientos al diseño de actividades didácticas para estudiantes de matemáticas de secundaria, es decir, cual es la utilidad escolar de los conocimientos trabajados,

-en tercer lugar las dificultades que detectan para su utilización y,

-finalmente, las recomendaciones que proponen para su incorporación en la planificación de actividades didácticas.

Consideramos las opiniones emitidas que destacan en cada una de las sesiones del curso-taller para buscar significación de las mismas vinculada con el conocimiento didáctico. De esta manera se pretendió identificar competencias en el uso de la calculadora gráfica por parte de los futuros profesores y, en particular, hacer la valoración subjetiva de sus competencias en la planificación de actividades didácticas.

La búsqueda de categorías emergentes que representaran las opiniones y juicios de los participantes, a partir de la identificación de conceptos clave relacionados con la CG y su utilidad didáctica que permitieran agrupar tales juicios y opiniones, fue la estrategia utilizada para avanzar en el análisis. Se identificaron y agruparon expresiones relacionadas con intereses didácticos de la investigación. En las opiniones acerca de la utilidad escolar de la CG en el diseño de actividades didácticas, encontramos los siguientes conceptos: autorreflexión, estudio de funciones, manejo técnico y extensión de la CG. Los juicios relativos a la *autorreflexión* del profesor en formación y su relación con el diseño de actividades didácticas, al igual que se comentó en el Apartado 5.2.2. referente a la dimensión cognitivo subjetiva de la modelización, queda definida por el proceso de toma de decisiones acerca de las 'competencias' que entrarán en juego en las actividades a proponer a los alumnos con la calculadora gráfica, cómo y cuando hacerlas realidad para conseguir una enseñanza de las matemáticas de calidad. El concepto *estudio de funciones* agrupa a todos los juicios que se refieren a las posibilidades de definir, representar, comparar, ajustar y operar con funciones reales de variable real. Bajo el concepto de *manejo técnico* se agrupan todas las referencias a los comandos utilizados en el curso para realizar tareas simbólicas, tabulares y gráficas. Además, incluimos los relacionados con el editor de texto y la programación en la CG. El concepto *extensión de la CG* se refiere a las opiniones relativas a las posibilidades que ofrece la CG para conectarse con otros dispositivos tales como otras calculadoras u ordenadores. El sistema de categorías aquí utilizado para el estudio de la dimensión cognitivo subjetiva referente a la Calculadora Gráfica está basado en estos conceptos y reciben la misma denominación en cada caso.

Las opiniones de los profesores en formación dentro de la categoría autorreflexión estuvieron referidas al uso de representaciones tabulares y gráficas, tanto de funciones como de figuras geométricas y regiones factibles en los problemas de programación lineal bidimensional. Esto sugiere que los profesores consideraron importante acudir a diversos sistemas de representación con el apoyo de la CG. También notamos que resaltaron el uso de las gráficas como elementos de apoyo al aprendizaje de conceptos y propiedades matemáticas; lo cual significa que los profesores en formación reconocieron la potencialidad representacional de la CG, tanto para hacer operaciones rutinarias como para apoyar la resolución de problemas complejos. Esto indica que en los participantes se detectan opciones de cambio en sus métodos de enseñanza mediante el apoyo del recurso tecnológico.

Respecto a la categoría estudio de funciones las opiniones se dirigieron hacia la utilidad de la CG para tratar con las funciones. Es decir que los participantes reconocieron las posibilidades que la CG proporciona para comprender, interpretar y analizar las funciones y sus aplicaciones. Esto podría interpretarse como una vinculación de la CG con el tratamiento de los modelos matemáticos representados por funciones. Otro aspecto de interés que revelaron las opiniones fue la importancia de reconocer que la CG favorece la comprensión y análisis cualitativo de las funciones, por ejemplo, a partir de los cambios de parámetros, lo cual está en consonancia con los planteamientos del principio de la tecnología del NCTM (2000).

Las opiniones incluidas bajo la categoría manejo técnico de la CG sugieren que los profesores en formación trabajaron con distintos comandos e identificaron en ellos su utilidad y aplicaciones específicas que facilitan las posibilidades de desarrollo de actividades para la enseñanza del álgebra. Es decir, el contacto con la CG contribuyó a incrementar los niveles de interacción y exploración para conocer sus alcances, aplicaciones y limitaciones en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El interés de estas opiniones se centra en la reflexión sobre el futuro ejercicio profesional y en la toma de decisiones sobre aspectos relativos al cuándo y al para qué recurrir a la CG, tanto en la planificación de actividades como en la evaluación del aprendizaje de los alumnos.

Según la opinión de los futuros profesores la extensión de la CG abre posibilidades de intercambiar archivos con las CG de sus compañeros o con otras ubicadas en lugares remotos mediante la red internet y con el apoyo del enlace Graph Link. Este aspecto abrió otras posibilidades, para los futuros profesores, de actuación con la CG al tener la posibilidad de intercambiar información sobre sus aplicaciones y usos didácticos con otros usuarios que pudieran estar en otros lugares.

Al analizar las opiniones y juicios de los profesores en formación sobre la utilidad escolar de la calculadora y qué les gustaría incorporar en las actividades didácticas, con el objetivo de buscar conceptos para establecer categorías emergentes en sus discursos, logramos singularizar los siguientes: planificación de actividades, comprensión y asistente matemático. Bajo el concepto *planificación de actividades* recogemos el conjunto de herramientas conceptuales y funcionales, entre las cuales cuentan las disponibles en la CG tales como el editor de texto y la programación, a las que acudiría el profesor en formación para diseñar lo que orientaría su futura actuación en el aula al enseñar matemáticas. El concepto de *comprensión* lo entendemos como en el apartado 5.2.2., es decir, se refiere a los niveles de dominio en el aprendizaje matemático que alcanza el alumno, se muestra en el carácter significativo de su conocimiento y se manifiesta por la precisión conceptual el dominio de los procedimientos matemáticos y por el desarrollo de habilidades para resolver problemas pero referido en este caso a la CG. El concepto *asistente matemático* hace referencia a la utilidad que los participantes manifestaron otorgar a la CG como dispositivo de cálculo rápido y preciso.

Estos conceptos lo utilizamos como un sistema de categorías para clasificar los juicios y opiniones expresados por los profesores en formación en relación con la calculadora gráfica y su utilidad escolar a lo largo de las sesiones del programa MCA.

Así, en lo que concierne a las opiniones comprendidas en la categoría *planificación de actividades* podemos señalar que identificamos en los futuros profesores una manifiesta inclinación por acudir al diseño de actividades didácticas con el editor de texto y la programación en la CG. La consideración del diseño de actividades con el uso de la CG como un tutor de los alumnos podría interpretarse como una muestra de confianza en la CG para contribuir en la enseñanza de las matemáticas. Estas manifestaciones estarían asociadas con una visión distinta hacia la enseñanza de las matemáticas. Sin embargo, consideramos que nunca estuvo en su ánimo plantear que la calculadora sustituyera al profesor (Kaput, 1992) ya que la calculadora sólo 'efectúa operaciones' y es el alumno quien 'traza estrategias', tal como afirman Herget, Helmut, Kutzler & Lehmann (2000).

La categoría *comprensión*, tal como señalamos anteriormente, tiene la misma connotación que en el estudio sobre modelización. En esta categoría se condensan las opiniones que estuvieron relacionadas con la experimentación numérica y gráfica para el establecimiento de propiedades algebraicas, la resolución gráfica de ecuaciones e inecuaciones y resolución de problemas con la CG. En general, los futuros profesores expresaron su interés por resolver ecuaciones 'paso a paso' con la CG y la posible incorporación de diversos procedimientos y sistemas de representación para diseñar sus actividades didácticas con este recurso. Es importante destacar que los profesores en formación coincidieron particularmente con la experimentación como fuente de observación de propiedades y el establecimiento de conjeturas (Kutzler, 2000).

En los juicios sobre la CG como asistente matemático, los participantes sustentan la conveniencia de su incorporación en las actividades didácticas para cálculos y respuestas rápidas en distintos sistemas de representación. Los profesores podrían dedicar más tiempo al aprendizaje conceptual, que es uno de los cambios que se generan con la incorporación de la CG en la enseñanza de las matemáticas (Dick, 1992, Dunhan & Dick, 1994).

Después de hecha la revisión correspondiente a las opiniones de los participantes sobre dificultades para el uso escolar de la calculadora, se encontraron tres conceptos para su clasificación que permitieron que las dificultades fueron agrupadas en tres categorías. Dichos conceptos y categorías son planificación de actividades con CG, CG en la comprensión de los alumnos y CG como asistente matemático. Estas categorías tienen la misma connotación dada anteriormente, relativas a lo que supondría la incorporación de la CG para los participantes en las actividades didácticas. Pasamos a enumerar las opiniones de los profesores en formación en cada una de estas categorías.

En las opiniones comprendidas bajo la categoría de planificación de actividades con CG los participantes refieren las dificultades a la exigencia de tiempo para la formación del profesor y para la familiarización del alumno con la CG, a la evaluación del alumno con CG, a la diferencia entre la notación de la CG y la escritura usual en matemáticas y a la incorporación de la CG con las limitaciones de tiempo en secundaria. Esto podría significar que los profesores en formación visualizaron dificultades propias de usuarios con conocimientos de las potencialidades y limitaciones del diseño de actividades didácticas con la inclusión de la CG. Estas opiniones sugieren que los futuros profesores consideraron que el profesor debe tener competencia didáctica para facilitar el aprendizaje de los alumnos en los ambientes en donde se haya incorporado la CG, tal como lo establecen los principios y estándares del NCTM (2000). El profesor ve necesario potenciar en sus alumnos una mejor relación con el conocimiento matemático (Trouche, 2000). Por otra parte, la evaluación del alumno en un ambiente donde esté incorporada la CG, tomaría en cuenta las habilidades relacionadas con la interpretación y traslación entre distintos sistemas de representación (Dick, 1992). Sin embargo sobre el tema de la evaluación hubo poca precisión por los participantes, es decir, se echa en falta una discusión que evidencie más claridad en el tratamiento del tema por parte de los participantes.

En la categoría comprensión consideramos lo expuesto por los participantes respecto a los errores por el uso inadecuado de las escalas, las cuales cobran importancia cuando se usan tecnologías gráficas (Leinhardt, Zaslavsky & Stein, 1990). La identificación de esta dificultad podría revelar que los profesores en formación estuvieron atentos a los inconvenientes que se pudieran afrontar con el uso didáctico de la CG.

En esta categoría comprensión los participantes también incluimos lo referido al temor de la pérdida de destrezas en el cálculo algebraico en los alumnos cuando utilizan la CG, lo cual parece contrario a considerar la CG como ayuda para desarrollar profundidad y comprensión sobre el contenido del álgebra (Demana & Waits, 1992).

La categoría CG como asistente matemático incluye lo referido por los profesores en formación acerca del tiempo que se requiere para lograr manejar adecuadamente la CG. En esta categoría también incorporamos las dificultades en el uso del lenguaje de programación. La identificación de estas dificultades de la CG como asistente matemático podría sugerir que los profesores en formación reconocieron inconvenientes importantes que limitarían la posibilidad de elaborar programas (software) a utilizar en las actividades didácticas.

Las recomendaciones expresadas por los profesores en formación las organizamos en cuatro categorías, a saber:

-dinámica en el aula,

-comprensión,

-efectos no deseados,

-asistente matemático.

Para efectos de su caracterización no necesitamos explicarlas de nuevo, sino sólo la categoría de efectos no deseados. Esta categoría se refiere a los comportamientos que el profesor desea evitar en sus alumnos. Para las otras categorías nos remitimos a lo ya referido anteriormente.

En lo referente a la dinámica en el aula con la CG, los profesores en formación enunciaron una serie de opiniones en las que consideraron aspectos de gran interés en el proceso de enseñanza. La introducción de temas como las limitaciones de la CG favoreció por una parte reconocer la CG como un recurso visual que podría sustituir a la pizarra tradicional incorporando pequeños programas de complejidad gradual y, por la otra, se le consideró como un medio para propiciar discusiones sobre la interpretación de sus limitaciones para resolver algunos problemas algebraicos (Jeon, 2000). Estas opiniones inducen a pensar en los niveles de reflexión sobre la interacción con la CG en el aula como medio para favorecer el desarrollo del pensamiento y el aprendizaje de las matemáticas (Ruthven, 1992).

Respecto a la categoría comprensión encontramos que las opiniones de los futuros profesores se centraron en el uso de la CG para experimentación y para propiciar la comprensión de conceptos y propiedades con diferentes sistemas de representación. Estos planteamientos los relacionamos con la metáfora de la calculadora como laboratorio donde se exploran ideas matemáticas para su comprensión (Kissane, 1995)

Los efectos no deseados, considerados en las opiniones de los profesores en formación, tales como la conversión de la CG en panacea para los alumnos y la dependencia de los alumnos hacia la CG fueron algunas de sus preocupaciones. El temor a la dependencia de la CG, que manifestaron tener los participantes, podríamos relacionarlo con el riesgo identificado por Usiskin (1978) de acudir a ella cuando no se requiere y al posible bloqueo de facultades intelectuales para el aprendizaje de las matemáticas planteado por

Kutzler (2000). Estas opiniones revelan inquietud e incertidumbre en los profesores en formación ante el uso de la CG en la enseñanza de las matemáticas.

En relación con la categoría asistente matemático encontramos que recomendaron el uso de la CG para hacer cálculos y comprobar resultados tanto en el álgebra lineal básica como en la formulación de problemas de programación lineal, entre otros. Esto nos podría indicar que los profesores en formación distinguieron la importancia de concentrarse en la comprensión de los problemas y el análisis de la solución, tal como lo proponen Dunham & Dick (1994), utilizando la CG como apoyo en el desarrollo de actividades didácticas de contenido algebraico.

De la red mostrada en la figura 5.2. se desprende que en la planificación de actividades con la CG el profesor pone en evidencia competencia didáctica al decidir cómo y cuándo utilizar la calculadora gráfica. Observamos que, de acuerdo a las opiniones dadas por los futuros profesores, la planificación de actividades didácticas estaba referida a favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos y se le consideraba asociada con una autorreflexión en torno a la dinámica en el aula así como a la identificación de efectos no deseados. Por otra parte, se puede intuir que los participantes asociaron la planificación con la dinámica a seguir en el aula. En la planificación con el uso de CG, consideraron asimismo sus posibilidades como asistente matemático y las capacidades de conexión o extensión de la misma con otras CG, con un ordenador particular o con otros ordenadores remotos vía internet. De lo antes señalado podemos deducir que los participantes lograron niveles de opinión en correspondencia con las metas perseguidas en el curso-taller.

Figura 5.2. *Identificación de aspectos relacionados con las competencia didácticas en la calculadora gráficas*

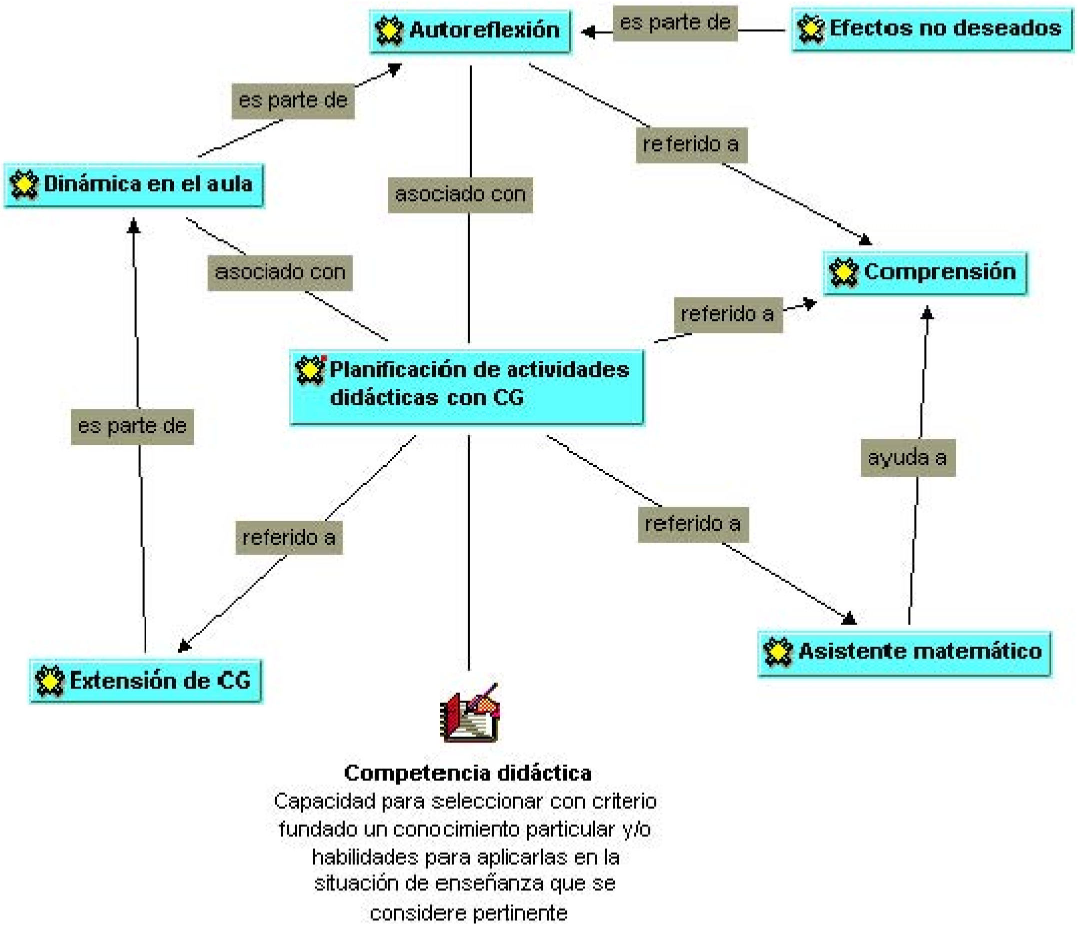


Tabla 5.2 *Resumen de opiniones sobre la calculadora gráfica*

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la calculadora*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para utilizar la calculadora gráfica*	*Recomenda-ciones para su utilización*
Primera Sesión	-Manejo de teclado numérico -Comandos de graficación -Comandos simbólicos.	-Empleo del viewscreen para motivar	-Con la CG se pierden destrezas de cálculo algebraico -Exige conocer la potencialidad didáctica de la CG	-Utilizar CG sólo como asistente -Dudas en recomendar la CG para su uso en secundaria
Segunda Sesión	-Utilidad de comandos algebraicos y gráficos	-ViewScreen -Resolución gráfica de sistemas de ecuaciones	-Se requiere preparación para manejar la CG -Es muy compleja para los alumnos -Es de difícil uso para el profesor	-Usar la CG para ver distintas representa-ciones de los modelos -Evitar dependencia de la CG por parte de los alumnos -Usarla para experimenta-ción
Tercera Sesión	-Utilidad de comandos tabulares, simbólicos y gráficos -Funciones por partes y de dos variables en la CG -Archivar datos de la CG en diskette o en otra CG	-Manejo de la transposición de términos en la resolución de ecuaciones con CG -Experimenta-ción numérica y gráfica -Uso de tablas	-Diferencia entre la notación del profesor y de la CG -Exige tiempo de preparación del profesor	-Cuidar que la CG no se convierta en 'panacea' para los alumnos
Cuarta Sesión	-Comparar funciones mediante tablas -Uso de tablas para evaluar comprensión de los conceptos	-Utilización de tablas con CG -Resolución de inecuaciones con CG	-El uso de la CG requiere conocimientos previos de los conceptos matemáticos	-Uso de la CG para motivación y comprensión de conceptos y propiedades

Tabla 5.2 *Resumen de opiniones sobre la calculadora gráfica* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la calculadora*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para utilizar la calculadora gráfica*	*Recomendaciones para su utilización*
Quinta Sesión	- Representación de familias de funciones y comparación entre ellas, a partir de una experiencia de aula en secundaria -Ajuste de modelos	-Uso de tablas -Experimentación con funciones (tanteo)	-Evaluar al alumno con CG -El alumno requiere tiempo para su familiaridad con los comandos -Nivel de conocimiento de los alumnos -Muchos comandos para resolver un problema son distractores	-Utilizar los diferentes sistemas de representación
Sexta Sesión	- Comandos relacionados con vectores y matrices - Creación de carpetas en la CG (uso de °)	-Uso de CG para operaciones rápidas -Usar Cg para comprobar cálculos matriciales -Experimentación para que el alumno descubra propiedades	-Requiere mucho tiempo para el aprendizaje de los comandos -La CG puede distraer al alumno al resolver un problema	-Discutir con los alumnos problemas matemáticos en donde se ponga en 'duda' la utilidad de la CG, por ejemplo errores y limitaciones (rectas verticales)
Séptima Sesión	-Editor de texto - Representación gráfica de regiones factibles	-Resolución de problemas de programación lineal (PL) con CG, una vez que los alumnos sepan plantearlos -Uso de distintos sistemas de representación	-Manejo técnico de la CG por parte del alumno -Uso de comandos -Requiere aprendizaje adicional Exceso de comandos puede desviar la comprensión del problema	-Uso de la CG para cálculos complicados -Usar CG en programación lineal

Tabla 5.2 *Resumen de opiniones sobre la calculadora gráfica*

(Continuación)

Opiniones / *Sesiones* / Objetivos	*Utilidad percibida de la calculadora*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades para utilizar la calculadora gráfica*	*Recomenda-ciones para su utilización*
Octava Sesión	-Editor de texto -Comandos de programación	-Diseño de unidades didácticas con el editor de texto y la programación -Editor de texto -Experimenta-ción con CG -Diseño de 'pequeños' programas para comprender el álgebra -Uso de la CG como tutor -Diseño de programas en CG para tareas repetitivas	- Aprender lenguaje de programación -Complejidad de los comandos de programación -Habituarse al lenguaje de programación -Errores por mal uso de 'escalas' -Requiere mucho tiempo y conocimiento -Demasiado complicado seguir los pasos	-Diseñar pequeños programas -Recurrir a la CG para sustituir a la pizarra -La realización de programas para facilitar al alumno la representación de funciones con distintos parámetros
Novena Sesión	-Comandos básicos de Cabri -Interacción de la CG con el ordenador	-Cálculo por medio de Cabri -El uso de la CG como guía con ejercicio tipo para que los alumnos se guíen -Actividades de geometría plana -Programas de apoyo al alumno	-Se requiere familiarización con la CG -Complejidad de los comandos -Difícil evaluar al alumno con CG	-Usar CG en todas las clases de secundaria, para que el alumno no la vea como una mera herramienta -Uso del ordenador y la CG de manera complementaria en las clases de secundaria
Décima Sesión	-Interrelación de los comandos gráficos, simbólicos y tabulares	-Uso de gráficas -La CG como asistente matemático (resolución gráfica de cálculos complejos)	-Manejo de comandos -Evaluar al alumno de ESO, porque es difícil que éste la maneje -Introducir CG con limitaciones de tiempo en secundaria	-Usar tablas y gráficas -Garantizar que todos los alumnos manejen la CG -Trabajar con dificultades graduadas hasta llegar a situaciones complejas para favorecer el éxito

5.2.5. Opiniones sobre el Álgebra Lineal

Este apartado contiene las opiniones emitidas por los profesores en formación en cada una de las sesiones del curso-taller, acerca del diseño de actividades didácticas para la estructura matemática del álgebra lineal en el contexto de las matemáticas escolares de secundaria en las que destacan la modelización y la calculadora gráfica como organizadores curriculares. Nos limitamos a recoger y organizar las opiniones dadas sobre la enseñanza del álgebra lineal en secundaria y el diseño de actividades con esta finalidad a lo largo de cada una de las sesiones del curso.

El tratamiento de este apartado no sigue la misma estructura utilizada para el estudio de las opiniones recogidas sobre la modelización matemática y la CG debido a que los profesores en formación tienen ya conocimientos previos sólidamente asentados sobre el álgebra lineal, tópico matemático elegido para la realización del programa MCA. En consecuencia, el propósito no fue centrar el curso en profundizar los conocimientos de álgebra lineal. Los participantes ya han cursado ampliamente esta materia en sus estudios, por lo que las opiniones específicas que interesan sobre álgebra lineal se refieren a esta estructura conceptual en tanto que va a ser objeto de enseñanza.

En la *primera sesión* los profesores en formación opinaron que se debería empezar a estudiar álgebra a través de la aritmética. Además, sugirieron aprovechar la interdisciplinariedad del álgebra para plantear diversos problemas que se resuelven algebraicamente. Asimismo, comentaron que se podría adaptar los problemas de álgebra a problemas del mundo físico y social.

En la *segunda sesión*, los futuros profesores manifestaron que incorporarían en el diseño de actividades didácticas la representación tabular para los datos de los problemas, como la simultaneidad de representaciones simbólica y gráfica para ver su resolución y en consecuencia interpretar conceptos como el de sistema de ecuaciones lineales. Por otra parte, los participantes recomendaron enseñar la parte teórica del álgebra mediante cortas comprobaciones y realizar las representaciones gráfica y simbólica simultáneamente.

Los profesores en formación en la *tercera sesión* argumentaron que incorporarían en sus actividades didácticas la resolución de ecuaciones con matrices, la representación y resolución de inecuaciones y la simultaneidad de sistemas de representación gráfica y simbólica en resolución de ecuaciones. En lo referente a las recomendaciones, los futuros profesores insistieron en la resolución de ecuaciones con matrices (método de Gauss) y la resolución y representación de inecuaciones.

Respecto de la *cuarta sesión* los profesores en formación ampliaron su reflexión sobre las relaciones y expresiones algebraicas destacando que incorporarían estas representaciones en las actividades didácticas haciendo uso de tablas para la comparación de datos y para afianzar el significado de las inecuaciones y su interpretación. En cuanto a las recomendaciones dadas por los futuros profesores tenemos: familiarizar al alumno con el significado abstracto de las variables y los conceptos algebraicos, buscar ejercicios adaptados al nivel sociocultural de los alumnos, proponer problemas para resolver utilizando métodos algebraicos y diseñar actividades con la incorporación de tablas.

Una experiencia práctica en secundaria fue el tema de estudio de la *quinta sesión*, en donde los profesores en formación opinaron que incorporarían en las actividades didácticas el reconocimiento de funciones por su gráfica y viceversa, se profundizó en la visualización gráfica de las operaciones entre funciones, el estudio y la descripción de funciones mediante tablas y otros conceptos en los que juegan diferentes sistemas de representación, lo cual contribuye a la sistematización de relaciones y estructuras básicas del álgebra lineal.

En la *sexta sesión* los participantes ampliaron su reflexión sobre la estructura conceptual mediante el estudio de las matrices y manifestaron que incorporarían en las actividades didácticas la resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante matrices, el trabajo con matrices para resolución de problemas, realizar operaciones complejas con matrices y analizar el significado del producto de matrices. Sin embargo, algunos profesores en formación opinaron que es muy complejo para secundaria el manejo e interpretación de vectores y matrices. Una de las recomendaciones dadas fue la siguiente:

> "Relacionar las matrices con aplicaciones" (PF3)

Los futuros profesores, en la *séptima sesión* revisaron la programación lineal mediante el planteamiento y resolución de problemas trabajando sobre situaciones problema relacionadas con el modelo de programación lineal. En este sentido manifestaron que utilizarían las inecuaciones y el significado de maximizar o minimizar funciones en sus actividades didácticas. Asimismo expresaron que incorporarían en dichas actividades la representación gráfica de recintos en el plano y su interpretación como dominios de funciones lineales restringidas. Además, incluirían la representación gráfica de regiones factibles en problemas de programación lineal. Respecto de las dificultades mencionaron:

> "La intersección de rectas en el plano" (PF3)
> "Visualización rigurosa de que el máximo y el mínimo están en un vértice" (PF8)

Los participantes recomendaron la interpretación de problemas algebraicos acudiendo a diferentes sistemas de representación. Por otro lado sugirieron proponer problemas de programación lineal en tres dimensiones para aumentar la abstracción. De este modo se profundizó en la estructura conceptual y se amplió con nuevos significados los conocimientos objetos de enseñanza.

En la *octava sesión* manifestaron que incorporarían en sus actividades didácticas programas diseñados con propósitos específicos para la enseñanza del álgebra lineal. En ese sentido recomendaron que se proponga a los alumnos el diseño de programas relacionados con los conceptos algebraicos que se desarrollan en una actividad didáctica.

En la *novena sesión* los profesores en formación otorgaron importancia a la visualización geométrica de relaciones algebraicas a través del entorno Cabri de la calculadora gráfica. En cuanto a las recomendaciones expresadas para la enseñanza del álgebra lineal manifestaron que introducirían el uso simultáneo de la representación gráfica y simbólica para la interpretación de las soluciones de problemas algebraicos.

En la *décima* sesión, los profesores expresaron lo que incorporarían y lo que recomendarían para el diseño de actividades didácticas. En cuanto a lo primero manifestaron que acudirían al uso de tablas y gráficas. También expresaron que utilizarían la modelización y la CG para enseñar álgebra, siempre proponiendo en lo posible actividades motivadoras para el alumno. Respecto a lo segundo los profesores en formación recurrirían a la interpretación de los puntos de cada función en el plano, realizando trabajo en grupo y enfatizando el carácter práctico del álgebra.

5.2.6. La dimensión cognitiva subjetiva referente al álgebra lineal

De la secuencia antes expuesta podemos deducir que la estructura conceptual del tópico matemático escolar del álgebra lineal fue percibida como apropiada para introducir las reflexiones y actividades didácticas propias del programa desarrollado en el curso para profesores en formación. Los participantes asumieron como aspectos relevantes de la estructura conceptual del álgebra lineal para su enseñanza los sistemas de representación numéricos, simbólicos y gráficos, y las conexiones entre ellos, para expresar relaciones lineales entre variables y estudiar las correspondientes propiedades. También se consideró adecuada esta estructura conceptual para abordar cuestiones vinculadas al entorno del estudiante, como fue el caso de la resolución de problemas y se valoró la diversidad de sistemas de representación como apoyo significativo para la resolución de problemas del mundo real relacionados con la enseñanza del álgebra lineal. En general, estas apreciaciones de los futuros profesores invitan a orientar el trabajo de los alumnos para que perciban el álgebra lineal como un sistema de ideas significativas para comprender matemáticamente el mundo físico y social (Fearnley-Sander, 2000).

El análisis de las opiniones de los participantes en relación con la estructura conceptual y la enseñanza del álgebra lineal fue realizado a partir de los conceptos siguientes:

-estructura conceptual del álgebra escolar,
-razonamiento algebraico,
-conexiones y modelización,
-análisis didáctico y dinámica en el aula,
-dificultades

Por *estructura conceptual del álgebra escolar* entendemos los conceptos y procedimientos del álgebra lineal de secundaria, junto con los sistemas de representación numérico, verbal, gráfico y simbólico mediante los que se expresan y trabajan dichos conceptos así como las conexiones y traducciones entre dichos sistemas (Rico, 1997b).

El concepto de *razonamiento algebraico* está centrado en los procesos de reflexión, argumentación y comunicación para dar respuesta a cuestiones algebraicas y transmitirla; se refiere a las reflexiones acerca de cómo se obtiene respuesta aceptable a las cuestiones algebraicas (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996).

En *conexiones y modelización* incluimos las relaciones entre temas de álgebra junto con los procesos de modelización de fenómenos y problemas procedentes de otras disciplinas y del mundo social cercano al alumno, ya explicados en el Capitulo II.

Bajo el concepto de *análisis didáctico y dinámica en el aula* incluimos las reflexiones sobre el álgebra lineal realizadas por los profesores participantes en el curso relativas a la organización y secuenciación de estos contenidos para su enseñanza; incluye las estrategias de trabajo que el profesor en formación pondría en juego en la enseñanza para que los alumnos tengan una participación activa en las actividades propuestas y, de esa manera, logren el aprendizaje esperado (Gómez & Rico, 2002 ; Bedoya, 2002).

Las *dificultades* se refieren a los inconvenientes detectados por los participantes en el curso para la enseñanza del álgebra y a su tipología y tratamiento.

Estos conceptos lo utilizamos como un sistema de categorías para clasificar los juicios y opiniones expresados por los profesores en formación en relación con la calculadora gráfica y su utilidad escolar a lo largo de las sesiones del programa MCA.

Así, en lo que concierne a las opiniones comprendidas en la categoría *estructura conceptual del álgebra escolar* estuvieron referidas a la iniciación al álgebra a través de la aritmética, la descripción de funciones, la resolución de ecuaciones y las operaciones con matrices y el uso sistemático y simultáneo de diversos sistemas de representación. De aquí podríamos afirmar que los participantes focalizaron varias aproximaciones para desarrollar el significado de los conceptos y procesos algebraicos (Fearnley-Sander, 2000). Asimismo, inferimos que los profesores en formación considerarían las distintas representaciones del álgebra escolar, a saber: aritmética generalizada, resolución de ecuaciones, funcional y estructural (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996).

La categoría *razonamiento algebraico* agrupó las opiniones de los participantes respecto a la simultaneidad de sistemas de representación de los conceptos y procesos algebraicos, resolución de inecuaciones por diferentes representaciones y el análisis del significado del producto de matrices. Estas expresiones nos podrían indicar que los profesores en formación otorgaron importancia a los procesos involucrados en la resolución de problemas, es decir, la comprensión conceptual y procedimental, el cuestionamiento permanente dentro del proceso para encontrar argumentaciones lógicas para justificar la toma de decisiones en el estudio de cada situación problema.

En la categoría *conexiones y modelización* se incluyeron aquellas opiniones de los futuros profesores que se refirieron a la proposición de problemas que requieren de métodos algebraicos, la relación de matrices con aplicaciones y la propuesta de situaciones de programación lineal en tres dimensiones para incrementar la abstracción. Podríamos afirmar que los participantes tomaron en cuenta las vinculaciones del álgebra lineal tanto con otras disciplinas y el mundo real como con el mismo campo del álgebra al proponer situaciones más complejas de programación lineal que involucran otros manejos algebraicos.

Los juicios de la categoría *análisis didáctico y dinámica en el aula* fueron expresados por los futuros profesores de matemáticas a través de opiniones relacionadas con la dinámica y el trabajo en grupo con los alumnos, relativo a actuaciones como enseñar la parte teórica del álgebra mediante pequeñas comprobaciones, plantear actividades motivadoras para el aprendizaje y enseñar álgebra utilizando la modelización. Apreciamos que los participantes otorgaron importancia al proceso de instrucción, donde los alumnos participan, contrastan, discuten y comunican sus inquietudes y hallazgos entre ellos con la motivación y orientación del profesor.

La categoría *dificultades* surgió de tomar en cuenta las opiniones de los participantes en cuanto a los inconvenientes que expresaron para la enseñanza del álgebra lineal. Al respecto, manifestaron la complejidad del manejo e interpretación de los vectores y las matrices dentro del currículo de secundaria. También identificaron dificultad en la visualización rigurosa de que los extremos de una función objetivo se alcanzan en los vértices de la región factible que representa las restricciones en un problema de programación lineal. El primer señalamiento acerca de las dificultades de los alumnos de secundaria con los vectores y las matrices pareciera evidenciar una 'barrera personal' del profesor en formación hacia el desarrollo del álgebra lineal en la preparación matemática de los alumnos, lo cual es contrario a las tendencias actuales en la enseñanza de esta disciplina (Carlson, Johnson, Lay & Porter, 1993; Harel, 2000). La segunda dificultad expresada por los profesores en formación se refiere a que los alumnos en el nivel secundario no poseen los conocimientos topológicos que involucran las pruebas de proposiciones de esa naturaleza. Por otra parte, es probable que los alumnos no se hayan planteado la necesidad de tal demostración, ni estén motivados, ni hayan utilizado técnicas de razonamiento es este sentido (Socas, Camacho, Palarea & Hernández, 1996). Además, si un profesor intenta realizar pruebas formales en secundaria, se podría encontrar con el obstáculo del formalismo y la ausencia de conocimientos previos en los alumnos (Dorier, Robert, Robinet & Rogalski, 2000b).

La enseñanza del álgebra lineal según las opiniones de los participantes en general fue vista como una actividad compleja que involucra al alumno en conceptos y procedimientos para plantear y resolver diversos problemas aplicados al mundo físico y social. Los profesores en formación propusieron alternativas de participación efectiva en el aula con estrategias para abordar el abordaje teórico del álgebra escolar. Podríamos decir que los participantes reflexionarían y tomarían en cuenta diferentes organizadores curriculares para planificar sus actividades didácticas, en particular la estructura conceptual del tópico matemático, la modelización de fenómenos y la resolución de problemas, y la calculadora gráfica como instrumento mediador.

En la figura 5.3 se estructura una red donde se expresa la planificación de actividades didácticas sobre el tópico escolar del álgebra lineal como una competencia didáctica. Dicha planificación involucra la interrelación de factores como la dinámica en el aula, las dificultades que presentan los alumnos, sus razonamientos algebraicos y las conexiones que los alumnos podrían establecer entre conceptos y mundo real. De esta red se podría inferir que la planificación de actividades didácticas para la enseñanza del álgebra está asociada con la interpretación del álgebra que tiene el profesor.

Figura 5.3. *Aspectos relacionados con la enseñanza del álgebra lineal*

Tabla 5.3 *Resumen de opiniones sobre Álgebra Lineal escolar*

Opiniones / Sesiones	*Utilidad percibida del álgebra lineal*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades en la enseñanza del álgebra lineal*	*Recomenda-ciones para su aplicación*
Sesión Primera	-Empezar el contacto con el álgebra a través de la aritmética -Interdiscipli-nariedad del álgebra -Plantear problemas algebraicos	--	--	-Adaptar problemas algebraicos a problemas del mundo real
Sesión Segunda	Representación tabular para los datos de los problemas -Simultaneidad de representación simbólica y gráfica - Representación gráfica e interpretación de sistemas de ecuaciones	--	--	-Enseñar la parte teórica mediante pequeñas comproba-ciones -Simultaneidad de representa-ciones gráficas y simbólicas
Sesión Tercera	-Resolución de ecuaciones con matrices -Simultaneidad de 'pasos' con la representación gráfica de cada uno de ellos	-Resolución y representación de inecuaciones -Simultaneidad de representación gráfica y simbólica en resolución de ecuaciones paso a paso	-	-Resolución de ecuaciones con matrices -Resolución y representación de inecuaciones

Tabla 5.3 *Resumen de opiniones sobre álgebra lineal escolar* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones*	*Utilidad percibida del álgebra lineal*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades en la enseñanza del álgebra lineal*	*Recomendaciones para su aplicación*
Sesión Cuarta	-Uso de tablas y su interpretación para la comprensión de datos -Uso de tablas para comprender el significado y resolución de inecuaciones	-Diseño de actividades con tablas -Propuesta de problemas que requieran de métodos algebraicos para su resolución	--	-Familiarizar a alumno con el significado abstracto y los conceptos matemáticos -Buscar ejercicios adaptados al nivel sociocultural de los alumnos
Sesión Quinta	--	-Reconocimiento de funciones por su gráfica y viceversa -Efecto gráfico de ciertas operaciones sobre las funciones -Descripción de funciones con diferentes sistemas de representación	--	--
Sesión Sexta	Resolución de sistemas de ecuaciones mediante matrices	-Trabajo con matrices para resolver problemas -Análisis del significado del producto de matrices -Realizar operaciones complejas con matrices	-Muy complejo el manejo e interpretación de vectores y matrices para secundaria	-Relacionar matrices con aplicaciones

Tabla 5.3 *Resumen de opiniones sobre álgebra lineal escolar* (Continuación)

Opiniones / *Sesiones*	*Utilidad percibida del álgebra lineal*	*Lo que le gustaría incorporar en sus actividades didácticas*	*Dificultades en la enseñanza del álgebra lineal*	*Recomenda-ciones para su aplicación*
Sesión Séptima	--	-Relación entre el álgebra, ecuaciones en dos variables y representación en el plano -La utilización de las inecuaciones y el significado de maximizar o minimizar funciones -Representación gráfica de recintos en el plano y su interpretación como dominios de funciones lineales -Representación gráfica de regiones factibles	-La intersección de rectas en el plano -Visualización rigurosa de que los extremos están en los vértices	-Interpretación de problemas de manera algebraica mediante tablas -Programación lineal en tres dimensiones para incrementar la abstracción
Sesión Octava	--	--	--	-Relacionar conceptos algebraicos con programas que el alumno haga en la CG
Sesión Novena	--	-Visualización de relaciones algebraicas mediante la CG (con el Cabri)	--	-Simultaneidad de representaciones gráficas y simbólicas para interpretar resultados en la resolución de problemas
Sesión Décima	--	-Uso de gráficas y tablas -Enseñar álgebra con modelización matemática -Actividades motivadoras para el aprendizaje del alumno	--	-Interpretar los puntos de cada función en el plano -Trabajo en grupo con los alumnos -Enfatizar el carácter práctico del álgebra

5.3. Balance de opiniones sobre el álgebra escolar, la modelización y la calculadora gráfica

A efectos de observar las posibles variaciones en las opiniones de los profesores en formación sobre las tres componentes del programa MCA (modelización, calculadora y álgebra lineal) se efectuó un análisis de las mismas contrastando las opiniones emitidas en la primera sesión o momento inicial y las opiniones emitidas en la décima sesión o momento final, en relación con la valoración de su interés didáctico. Para ello, en la décima sesión se pidió a los profesores en formación que presentaran argumentos a favor y en contra del interés escolar del tópico de álgebra lineal, del uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica. Esto sirvió para percibir variaciones en los participantes respecto a los argumentos dados en la primera sesión.

En la tabla 5.2.1 se recogen las opiniones de los profesores en formación respecto al interés escolar del álgebra lineal. En ella se destaca la importancia del álgebra como lenguaje simbólico. En efecto, este aspecto es fundamental porque favorece en los alumnos la comprensión de las ideas matemáticas y les dota de herramientas abstractas para la resolución de problemas. Asimismo, de las opiniones se desprende que se reconoce el álgebra como un factor relevante en el manejo de conceptos y procedimientos en diferentes niveles de complejidad, así como en el incremento de la capacidad interpretativa y comunicativa de fenómenos reales y matemáticos.

Tabla 5.2.1. *Balance de opiniones sobre el interés escolar del álgebra lineal*

El álgebra lineal...
• Contribuye a iniciar al alumno en el manejo del lenguaje simbólico formal de las matemáticas • Fortalece la formación matemática de los alumnos • Involucra al alumno en conceptos y procedimientos para plantear y resolver diversos problemas del mundo físico y social • Refuerza la interpretación y comunicación de ideas matemáticas

En las tablas siguientes mostramos comparativamente las argumentaciones presentadas por los futuros profesores sobre el uso didáctico de la modelización y la CG en secundaria.

Tabla 5.2.2. *Comparación de argumentos dados por los participantes sobre el interés para el alumno del uso de la modelización en la enseñanza del álgebra lineal*

	Al inicio del curso-taller consideraron que el alumno...	Al final del curso argumentaron que el alumno...
A favor	Se motiva Logra conexión entre las matemáticas y la realidad Aprende más Resuelve problemas	Se motiva Percibe la utilidad de las matemáticas y amplía su campo de actuación Comprende los conceptos algebraicos Plantea y resuelve problemas con iniciativa
En contra	Estructura exageradamente las situaciones reales	Puede distraer su atención y desconcentrarse del contenido algebraico

En la tabla 5.2.2 observamos variaciones en las opiniones de los futuros profesores al inicio y al final. De las opiniones al final se desprende que lograron mayores niveles de comprensión del proceso de modelización para su utilización en beneficio del aprendizaje del alumno. La coherencia en sus intervenciones orales y en las anotaciones recogidas respecto a la modelización en las diferentes sesiones de trabajo son indicadores de ello. En efecto, al inicio sólo identificaron aspectos generales y poco precisos al referirse al interés para el alumno del uso de la modelización en la enseñanza del álgebra lineal. Por ejemplo, al inicio se menciona que con la modelización el alumno "aprende más" sin precisar cómo la modelización contribuye al aprendizaje del álgebra. Sin embargo, en el momento final, en los argumentos a favor, se expresa que la modelización contribuye a comprender los conceptos algebraicos y favorece la iniciativa en el planteamiento y resolución de problemas por parte de los alumnos. Es decir, en el momento final se llegó a más especificidad, posiblemente producto de la experiencia adquirida en el curso-taller.

Respecto a los argumentos en contra, las opiniones al inicio están en consonancia con el nivel de desarrollo del programa; para ese momento no se habían abordado situaciones teóricas y prácticas relacionadas con la modelización. Es decir, no se les había aportado a través del programa MCA, elementos que les permitiera a los participantes estructurar argumentos respecto a la modelización. De ahí lo ligero de sus apreciaciones. En relación con el argumento en contra emitido en el momento final podríamos catalogarlo como un alerta a considerar cuando se utiliza la modelización, es decir, los participantes visualizaron riesgos en su uso por el posible efecto distractor del proceso de modelización, frente al contenido matemático en estudio.

En cuanto a la utilización de la modelización por parte del profesor, en la tabla 5.2.3 se nota mayor reflexión por parte de los participantes en el momento final. En los argumentos a favor, en el momento inicial, hacen referencia a que la modelización contribuye a la vinculación del mundo real con los conceptos y procedimientos matemáticos. Además, en el momento inicial reconocen que la modelización favorece las discusiones grupales, lo cual es un aspecto importante en el proceso de enseñanza de las matemáticas. En el momento final, además de valorar la posibilidad de reflexionar y trabajar con situaciones cotidianas, se reconoce en la modelización su potencialidad para dinamizar la participación del profesor en el proceso de enseñanza.

Dentro de las opiniones en contra, llama la atención que frente a la expresión "perder" tiempo emitida en el momento inicial se refieren a "más trabajo" en la décima sesión. Esto pudiera indicar reflexión, por parte de los profesores en formación, acerca del interés para el profesor del uso de la modelización, reconociendo que ésta exige que la planificación de la enseñanza se estructure en consonancia con el proceso de modelización. Es decir, podría interpretarse que los participantes consideran que la modelización introduce complejidad en el proceso de planificación de actividades didácticas. De hecho en el momento final opinaron que la modelización les exige desarrollar otras habilidades (las cuales no especifican). Asimismo hicieron referencia a las dificultades que enfrenta el profesor cuando acude a la modelización en la enseñanza. Las opiniones al final expresan que los participantes reconocen el interés que tiene la modelización para el profesor, poniendo de manifiesto implicaciones que conlleva su incorporación en la enseñanza del álgebra lineal.

Tabla 5.2.3. *Comparación de argumentos sobre el interés para el profesor del uso de la modelización*

	Al inicio del curso-taller consideraron que el profesor...	Al final del curso argumentaron que el profesor...
A favor	Relaciona conceptos matemáticos con situaciones del mundo real	Utiliza aplicaciones de las matemáticas y puede trabajar con situaciones cotidianas Permite reflexionar sobre diversas situaciones de la vida real
	Propicia el trabajo en grupo y las discusiones	Abre el campo de actuación del profesor
En contra	Encontrará dificultad para modelizar situaciones del mundo real	Tiene que desarrollar otras habilidades
	"Pierde" tiempo en el proceso de enseñanza y aprendizaje	Tiene más trabajo
	Se enfrenta a muchas dudas	Encontrará dificultades en cada modelización

En la argumentación sobre el interés de la modelización para la enseñanza del álgebra lineal escolar (ver tabla 5.2.4), se encontró que en las opiniones de los profesores en formación se amplió el campo de actuación de la modelización. De referirse sólo al tema específico de los sistemas de ecuaciones lineales, en el momento inicial, se pasó a manifestar una visión más amplia de aplicación dela modelización en la enseñanza del álgebra y su diversidad de tópicos en el momento final. Esta última opinión podría interpretarse que para los participantes, con la modelización, la enseñanza del álgebra lineal escolar se hace más asequible a los diferentes niveles de comprensión de los alumnos, puesto que éstos visualizarían los conceptos algebraicos en situaciones reales de su entorno.

En los argumentos en contra, dados al final, se observó preocupación acerca de la posible pérdida de protagonismo del álgebra ante la disciplina de procedencia de cada situación problema. Es decir, los participantes previeron dificultades que podrían afrontar en la enseñanza del álgebra lineal escolar acudiendo a la modelización.

Tabla 5.2.4. *Comparación de argumentos sobre el interés de la modelización para la enseñanza del álgebra lineal escolar*

	Al inicio del curso consideraron que con la modelización...	Al final del curso argumentaron que con la modelización...
A favor	Se logran resolver sistemas de ecuaciones lineales	Se aprecia el álgebra con más claridad
En contra	Se puede perder precisión en las resoluciones algebraicas	Los contenidos algebraicos pueden pasar a un segundo plano ante las situaciones de otras disciplinas.

Respecto al interés de la modelización para la evaluación del álgebra lineal escolar, los profesores en formación no se pronunciaron a favor ni en contra, tanto en el momento inicial como en el final. Esto podría indicarnos carencias conceptuales para un pronunciamiento acerca de la evaluación, cautela o dudas en el empleo de la modelización matemática en el momento de evaluar.

A continuación nos referimos al análisis y comparación de los argumentos relacionados con la calculadora gráfica. En primer lugar consideramos los argumentos respecto del alumno.

En la tabla 5.2.5 se muestran los argumentos sobre el interés para el alumno del uso de la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal. En los argumentos a favor, al inicio, los participantes otorgaron importancia a la incorporación de la CG como elemento para la integración del alumno en el mundo de las nuevas tecnologías informáticas. Al final los profesores en formación estuvieron a favor del empleo de la CG como una herramienta de motivación y estímulo para el alumno. Es decir, los participantes consideraron que la CG puede ser un factor de atracción para el alumno en el desarrollo de actividades didácticas de contenido algebraico. Por otra parte, notamos una ausencia de reflexión acerca de usos específicos como el papel de la CG en la resolución de problemas relacionados con el álgebra lineal escolar.

Tabla 5.2.5. *Comparación de argumentos sobre el interés para el alumno del uso de la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal*

	Al inicio del curso consideraron que la CG, en el alumno…	Al final del curso argumentaron que la CG, en el alumno…
A favor	Despierta el interés y la curiosidad Le permite experimentar y liberarlo de cálculos tediosos Lo familiariza con herramientas informáticas	Genera motivación Estimula su trabajo
En contra	Le pierde las destrezas de cálculo Puede generar dependencia	Conlleva el riesgo del poco desarrollo o pérdida de destrezas de cálculo Puede angustiarlo con la aparición de mensajes de error en la pantalla Puede resultar de difícil manejo en secundaria

En los argumentos en contra tanto al inicio como al final, los participantes reiteraron su opinión acerca de la posible pérdida de habilidades para desarrollar actividades con papel y lápiz y el riesgo a la pérdida de destrezas de cálculo en los alumnos, producto del uso de la CG. Es decir, los participantes le otorgaron mucha importancia a las destrezas de cálculo en el aprendizaje del álgebra lineal escolar.

En la tabla 5.2.6 se aprecian las opiniones sobre el interés para el profesor del uso de la calculadora gráfica. Al argumentar a favor, en el momento inicial, los participantes reconocieron la inmediata respuesta a problemas y la confianza en los resultados obtenidos con la CG. En el momento final reiteraron el aspecto antes señalado y añadieron, a favor de la CG, la posibilidad de que se constituya en un elemento motivador de las actividades de enseñanza del álgebra lineal. Esto podría interpretarse que el interés del uso de la CG para el profesor se focaliza en las características técnicas del dispositivo que le hacen atractivo en la clase.

Tabla 5.2.6. *Comparación de argumentos sobre el interés para el profesor del uso de la calculadora gráfica*

	Al inicio del curso consideraron que con la CG, el profesor...	Al final del curso argumentaron que con la CG, el profesor...
A favor	Puede hacer representaciones gráficas de manera rápida y exacta	Favorece la visualización gráfica Facilita los cálculos y agiliza la velocidad de respuesta Puede motivar la clase
En contra	Podría complicar la comprensión de problemas al realizar muchas y diversas representaciones. Debe usarla como apoyo, no como única herramienta Podría ralentizar la dinámica de las clases	Tendrá dificultades con la complejidad del uso de los comandos y la programación en la CG Dispone de poco tiempo para que sus alumnos logren el manejo en el aula.

Respecto a los argumentos en contra, al inicio, los profesores en formación dejan ver cierta reserva en el uso de la CG, al estar en desacuerdo con su uso exclusivo en el aula. Además, manifestaron dudas acerca de las bondades de la multiplicidad de representaciones que se obtienen con la CG. En el momento final, en los argumentos en contra, se insiste en la complejidad del empleo de la CG y en las limitaciones del tiempo en el aula para lograr su uso adecuado en el aula.

En las opiniones sobre el interés de la CG para la enseñanza del álgebra lineal escolar (ver tabla 5.2.7) encontramos en los argumentos a favor, al inicio, que los profesores en formación sólo identificaron en la CG su capacidad para resolver sistemas de ecuaciones. Mientras que en el momento final argumentaron a favor del interés de la CG en la enseñanza del álgebra lineal, sus diversas posibilidades de representación y ejemplificación de conceptos algebraicos. Es decir, significa que al final del curso los participantes reconocieron en la CG su potencia mediadora en la enseñanza del álgebra lineal escolar.

Tabla 5.2.7. *Comparación de argumentos sobre el interés de la calculadora gráfica para la enseñanza del álgebra lineal escolar*

	Al inicio del curso consideraron que la calculadora gráfica...	Al final del curso argumentaron que la calculadora gráfica...
A favor	Para resolver sistemas de ecuaciones	Favorece la visualización de conceptos algebraicos
En contra	Puede generar memorización de comandos sin comprender los conceptos algebraicos	Sin argumentos

En relación con los argumentos en contra, al inicio del curso, los futuros profesores opinaron que se puede incurrir en la realización de procedimientos algebraicos con la CG sin lograr la comprensión de los conceptos involucrados en las operaciones realizadas. Al final no hubo argumentos en contra.

De los argumentos anteriores deducimos que los participantes pasaron de una apreciación desfavorable hacia el interés de la CG en la enseñanza del álgebra lineal escolar a un reconocimiento, en el momento final, de las potencialidades de la CG en la enseñanza de dicha materia.

Respecto a las opiniones a favor y en contra del interés de la CG para la evaluación de temas de álgebra lineal escolar (ver tabla 5.2.8) encontramos, en el momento inicial, como argumento a favor que con la CG el profesor puede asignar tareas más complejas en cuanto a cálculos algebraicos. Sin embargo, en el momento final no presentaron argumentos a favor.

En las opiniones en contra, tanto al inicio como al final, señalaron dificultades con la disponibilidad de la CG en los centros educativos. En estas opiniones observamos que no se focaliza el argumento al proceso de evaluación en sí de temas del álgebra lineal, lo cual pudiera revelar carencias conceptuales sobre la evaluación como dimensión curricular.

Tabla 5.2.8. *Comparación de argumentos sobre el interés del uso de la calculadora gráfica en la evaluación*

	Al inicio del curso-taller consideraron que la CG...	Al final del curso argumentaron que se tiene...
A favor	Permite al profesor proponer grandes cálculos	Sin argumentos
En contra	Carencias de calculadoras en los centros educativos	Difícil disponibilidad de calculadoras en los centros educativos

5. 4. Estudio de las actitudes

Un aspecto de interés para nuestra investigación, ya contemplado en el Apartado 2.5 y también en las conjeturas del Apartado 3.3, es el estudio de las actitudes de los profesores en formación y de los cambios detectados en dichas actitudes a la conclusión del programa. En el cuarto objetivo específico de la investigación, enunciado en el Apartado 3.4.1, se contempla: "*Promover actitudes favorables hacia la utilización de la modelización matemática y la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.*"

Como ya se indicó en el Apartado 3.8.1, las actitudes y cambios que se estudian en esta investigación están referidos a las tres componentes contempladas en el diseño y puesta en práctica del programa MCA, los cuales son el tratamiento escolar del álgebra lineal, los procesos de modelización y el uso de la calculadora gráfica en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. De ahí que nuestros análisis los centramos en las actitudes de los profesores en formación hacia dichas componentes, lo cual presentamos a continuación.

5.4.1. Actitudes hacia las componentes del programa

Para conocer la actitud de los participantes en el desarrollo del programa MCA, tanto al inicio como al final del curso-taller, se recurrió al diseño de un cuestionario de actitudes estilo Likert, el cual fue un instrumento estructurado según las especificaciones descritas en Ortiz, Rico & Castro (2001), cuyo propósito fue captar los cambios actitudinales que pudo generar, en los profesores en formación, el desarrollo del programa MCA. Como ya se indicó en el Apartado 3.8.1, la escala fue construida en correspondencia con la modelización, calculadora gráfica, álgebra lineal y actividades didácticas; y con las dimensiones del currículo. La escala permite conocer las actitudes de los participantes hacia cada componente del programa MCA en lo referente al alumno, al profesor, al contenido matemático y la evaluación. Hay pues un total de 16 emparejamientos entre componentes del programa y dimensiones del currículo. Cada uno de estos emparejamientos es objeto de dos enunciados para su valoración en la escala, uno de ellos es un enunciado positivo y el otro un enunciado negativo, dando un total de 32 items en la escala.

A efectos de la identificación de los números de los ítems del cuestionario de escala de actitudes (ver anexo 5.3) tanto con las componentes del programa MCA, como con las dimensiones del currículo, presentamos la tabla 5.4.1 cumplimentada con expresiones del tipo *ia-ib* donde *ia* representa el número del ítem de enunciado positivo y *ib* el correspondiente número de ítem de enunciado negativo.

Tabla 5.4.1. *Identificación de los ítems en el cuestionario de escala*

	Alumno D_1	Profesor D_2	Contenido D_3	Evaluación D_4
Modelización (C_1)	i9-i27	i22-i13	i25-i14	i1-i28
Calculadora (C_2)	i32-i2	i8-i18	i16-i31	i5-i23
Álgebra lineal (C_3)	i11-i19	i21-i3	i12-i17	i15-i29
U. Didácticas (C_4)	i24-i6	i20-i10	i30-i7	i26-i4

Para la valoración de cada ítem, por parte de los profesores en formación, se presentan cinco opciones para que los participantes marquen con una equis (X) la alternativa que consideran conveniente a cada ítem. Las mismas fueron: totalmente en desacuerdo (TD), parcialmente en desacuerdo (PD), neutral (N), parcialmente de acuerdo (PA) y totalmente de acuerdo (TA). Como indicamos en el Apartado 3.8.1, a cada una de las opciones de respuesta se le asigna un valor numérico. Para efectos del análisis de la escala los ítems positivos se valoran del 1 al 5, es decir, TD=1, PD=2, N=3, PA=4, TA=5. A los ítems negativos se les asigna estos valores en sentido inverso, es decir, TD=5, PD=4, N=3, PA=2, TA=1.

El cuestionario se aplicó al inicio y al final del desarrollo del programa. La aplicación inicial tuvo como propósito captar la actitud de entrada de los profesores en formación, hacia los componentes del programa, para contrastarla con los resultados de la aplicación de la escala al finalizar el curso-taller a manera de identificar variaciones. Los resultados de la aplicación de la escala de actitudes se muestran en el anexo 5.4.1.

5.4.2. Fiabilidad del cuestionario

Previo al análisis de los datos recogidos en la escala de actitudes se procedió a determinar la fiabilidad del instrumento. En ese sentido recurrimos a la correlación entre los ítems positivos y negativos de dicha escala aplicando el coeficiente rho (ρ_s) de Spearman, pues según García Ferrando (2000), es uno de los coeficientes más utilizados para medir la asociación entre las variables de tipo ordinal. Además, agrega García Ferrando "...su uso está indicado siempre que se desee conocer si la ordenación de una variable está o no asociada a la ordenación de otra variable para los mismos usos" (p.255).

Se obtuvo ρ_s = 0.91 para el momento de inicio del curso-taller y, para el final del curso-taller, ρ_s = 0.84. (ver anexo 5.4.2).

Estos últimos resultados del coeficiente de Spearman, permiten otorgar alto grado de correlación entre los ítems positivos y sus correspondientes negativos. Estos resultados de ρ_s, unidos a los obtenidos en la aplicación del programa en su primera versión (Ortiz, 2000a), le otorgan fiabilidad al cuestionario en cuanto a las actitudes de los profesores en formación hacia las componentes del programa MCA.

5.4.3. Resultados de la aplicación de la escala de actitudes

Como se ha dicho, la escala se aplicó al inicio y al final del curso-taller donde se desarrolló el programa MCA. La aplicación inicial tuvo como propósito captar la opinión de entrada, de los profesores en formación, respecto a los componentes objetos de estudio para posteriormente identificar posibles variaciones en los resultados al aplicar la escala al final del desarrollo del programa de formación. Un primer recuento de frecuencias se muestra en las tablas 5.3.2, 5.3.3 y 5.3.4. En estas tablas el número escrito en cada casilla no sombreada indica la frecuencia al inicio del curso-taller y el número en las casillas sombreadas corresponde a la aplicación de la escala en el momento final del mismo. El número escrito delante del enunciado de cada ítem es el que le corresponde en el cuestionario que se aplicó a los profesores en formación.

Tabla 5.3.2

Actitud hacia el proceso de modelización en el currículo de álgebra

	TD	PD	N	PA	TA
A nivel del alumno					
9. La modelización favorece el aprendizaje del álgebra lineal en los alumnos	0	0	0	4	6
	0	0	0	2	8
27. La modelización dificulta el aprendizaje del álgebra lineal en los alumnos	5	5	0	0	0
	8	2	0	0	0
A nivel del profesor					
22. La incorporación de la modelización en el aula ayuda al profesor en la tarea de enseñanza de las matemáticas	0	1	1	5	3
	0	1	0	3	6
13. La modelización matemática es un complejo proceso que entorpece la labor del profesor en la enseñanza de las matemáticas	4	4	2	0	0
	8	2	0	0	0
A nivel del contenido					
25. La modelización matemática ayuda a la comprensión del álgebra lineal	0	0	0	4	6
	0	0	0	3	7
14. La elaboración de modelos matemáticos dificulta la organización de los contenidos del álgebra lineal	4	6	0	0	0
	5	3	1	1	0
A nivel del uso social					
1. La modelización con el uso de la CG favorece la evaluación de conceptos del álgebra lineal	0	0	3	6	1
	1	3	1	4	1
28. El proceso de modelización con el apoyo de la CG no favorece la evaluación del aprendizaje del álgebra lineal	0	6	4	0	0
	1	1	3	5	0

Tabla 5.3.3

Actitud hacia la calculadora gráfica en el currículo de las matemáticas

	TD	PD	N	PA	TA
A nivel del alumno					
32. El uso de la CG facilita el aprendizaje de los alumnos en matemáticas	0	1	0	7	2
	0	0	3	5	2
2. La CG dificulta en los estudiantes el aprendizaje de las matemáticas	2	4	3	1	0
	1	6	3	0	0
A nivel del profesor					
8. La incorporación de la CG en el aula ayuda al profesor a gestionar mejor la clase	0	2	2	6	0
	0	1	4	3	2
18. La CG hace más compleja la tarea del profesor en la enseñanza de las matemáticas	1	3	3	3	0
	0	5	2	2	1
A nivel del contenido					
16. El uso de CG permite la visualización de conceptos relacionados con el álgebra lineal	0	0	3	2	5
	0	1	1	2	6
31. El uso de la CG no favorece la visualización de conceptos algebraicos	6	2	2	0	0
	6	4	0	0	0
A nivel del uso social					
5. La incorporación de la CG en el aula facilita la evaluación en matemáticas	1	3	2	4	0
	2	2	3	3	0
23. Los métodos de evaluación en matemáticas permanecen inalterables con la incorporación de la CG en el aula	0	7	1	1	1
	4	4	2	0	0

Tabla 5.3.4

Actitud hacia la importancia del álgebra lineal, en la resolución de problemas del mundo real, en el currículo de matemáticas

	TD	PD	N	PA	TA
A nivel del alumno					
11. El alumno mejora el aprendizaje del álgebra lineal cuando aplica los conceptos a la resolución de problemas del mundo físico o social	0	0	1	1	8
	0	0	0	0	10
19. El alumno no requiere aplicar los conceptos del álgebra lineal para comprenderlos	3	6	0	0	1
	10	0	0	0	0
A nivel del profesor					
21. La CG es un potente recurso del profesor para la enseñanza del álgebra lineal	0	0	2	6	2
	1	0	1	4	4
3. La complejidad del manejo de la CG le dificulta al profesor la enseñanza de ciertos tópicos algebraicos	0	5	3	2	0
	3	2	2	3	0
A nivel del contenido					
12. La resolución de problemas algebraicos favorece la integración de conocimientos matemáticos	0	0	0	3	7
	0	0	0	2	8
17. El álgebra lineal solo tiene interés teórico dentro de la formación matemática del alumno	7	2	0	0	1
	8	2	0	0	0
A nivel del uso social					
15. Es importante evaluar el álgebra lineal mediante la resolución de problemas del mundo físico o social	0	1	1	1	7
	0	0	1	2	7
29. No se requiere evaluar en matemáticas mediante la resolución de problemas del mundo físico o social	5	5	0	0	0
	8	1	1	0	0

Tabla 5.3.5

Actitud hacia la necesidad del diseño de actividades didácticas de contenido algebraico en el currículo

	TD	**PD**	**N**	**PA**	**TA**
A nivel del alumno					
24. El diseño de unidades didácticas que incorpore CG, en la enseñanza del álgebra lineal, favorece la articulación de conceptos y procedimientos en el aprendizaje de los alumnos	0	1	2	5	2
	0	0	2	5	3
6. El aprendizaje del álgebra lineal, en los alumnos, no requiere de unidades didácticas que incluyan el uso de CG	0	5	1	2	2
	1	3	1	5	0
A nivel del profesor					
20. El diseño de unidades didácticas, que incorporen la CG, facilitan al profesor la organización del proceso de enseñanza del álgebra lineal	0	1	2	6	1
	0	1	3	5	1
10. La incorporación de la CG en el diseño de unidades didácticas, para la enseñanza del álgebra lineal, obstaculiza la tarea del profesor	2	6	2	0	0
	1	6	1	2	0
A nivel del contenido					
30. La comprensión de los conocimientos del álgebra lineal se logra con el diseño de unidades didácticas que incorporan la CG	1	3	4	2	0
	0	4	2	4	0
7. La comprensión de los conocimientos del álgebra lineal no requiere del diseño de unidades didácticas	7	0	1	2	0
	8	1	1	0	0
A nivel del uso social					
26. El diseño de unidades didácticas que incorpore la CG favorece la evaluación en álgebra lineal	0	1	4	5	0
	0	4	4	1	1
4. La incorporación de la CG como organizador del currículo dificulta la evaluación del álgebra lineal	0	5	4	0	1
	1	2	4	2	1

5.4.4. Análisis de los resultados en la aplicación inicial de la escala

Si observamos los extremos superiores e inferiores de la tabla 5.3.6 encontramos en el nivel superior los ítems hacia los cuales hubo una actitud favorable y en el extremo inferior los ítems hacia los cuales hubo una actitud poco favorable por parte de los profesores en formación. Esta tabla nos permite conocer la actitud en el momento inicial. La misma se comparará posteriormente con las actitudes manifiestas en la aplicación final.

Las ponderaciones y los promedios de las parejas de ítems están ordenados de mayor a menor (ver tabla 5.3.6). Las ponderaciones se obtuvieron sumando las valoraciones dadas a cada uno de los ítems que conforman cada pareja. Se entiende que el valor 5 está asociado a un acuerdo total con el enunciado y un valor de 3 representa la inexistencia de criterio para valorar o neutro, quedando el valor 1 para el desacuerdo total.

Tabla 5.3.6
Promedios de las parejas de ítems, ordenados de mayor a menor
Aplicación inicial

Nº	Ítems	Ponderación	Promedio
C_3D_3: i12-i17	La resolución de problemas algebraicos favorece la integración de conocimientos matemáticos	91	4.55
C_1D_1: i9-i27	La modelización favorece el aprendizaje del álgebra lineal en los alumnos	91	4.55
C_1D_3: i25-i14	La modelización matemática ayuda a la comprensión del álgebra lineal	90	4.50
C_3D_4: i15-i29	Es importante evaluar el álgebra lineal mediante la resolución de problemas del mundo físico o social	89	4.45
C_3D_1: i11-i19	El alumno mejora el aprendizaje del álgebra lineal cuando aplica los conceptos a la resolución de problemas del mundo físico o social	87	4.35
C_2D_3: i16-i31	El uso de CG permite la visualización de conceptos relacionados con el álgebra lineal.	86	4.30
C_1D_2: i22-i13	La incorporación de la modelización en el aula ayuda al profesor en la tarea de enseñanza de las matemáticas	82	4.10
C_2D_1: i32-i2	El uso de la CG facilita el aprendizaje de los alumnos en matemáticas	77	3.85
C_4D_2: I20-i10	El diseño de unidades didácticas, que incorporen la CG, facilitan al profesor la organización del proceso de enseñanza del álgebra lineal	77	3.85
C_1D_4: i1-i28	La modelización con el uso de la CG favorece la evaluación de conceptos del álgebra lineal	74	3.70
C_3D_2: i21-i3	La CG es un potente recurso del profesor para la enseñanza del álgebra lineal	73	3.65
C_4D_3: i30-i7	La comprensión de los conocimientos del álgebra lineal se logra con el diseño de unidades didácticas que incorporan la CG	69	3.45
C_4D_1: i24-i6	El diseño de unidades didácticas que incorpore CG, en la enseñanza del álgebra lineal, favorece la articulación de conceptos y procedimientos en el aprendizaje de los alumnos	67	3.35
C_4D_4: i26-i4	El diseño de unidades didácticas que incorpore la CG favorece la evaluación en álgebra lineal	67	3.35
C_2D_2: i8-i18	La incorporación de la CG en el aula ayuda al profesor a gestionar mejor la clase	66	3.30
C_2D_4: i5-i23	La incorporación de la CG en el aula facilita la evaluación en matemáticas	63	3.15

De la tabla 5.3.6 se pudo observar que los participantes inicialmente tuvieron una actitud muy favorable hacia el álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real, en el ámbito de todo el currículo. En la citada tabla se observa que las parejas de ítems i12-i17, i15-i29, i11-i19, i21-i3 con promedios de 4,55; 4,45; 4,35 y 3,65 respectivamente, presentan los promedios más altos. De igual manera los profesores en formación mostraron una actitud muy positiva hacia los componentes del programa, en la dimensión curricular contenido matemático (parejas i12-i17, i25-i14, i16-i31, i30-i7). Asimismo hubo una actitud favorable hacia el proceso de modelización en la enseñanza del álgebra lineal, respecto de todas las dimensiones curriculares, es decir, el alumno (pareja i9-i27 con promedio de 4,55), el contenido matemático (pareja i25-i14 con promedio de 4,50), el profesor (pareja i22-i13 con promedio 4,10) y la evaluación (pareja i1-i28 con promedio de 3,70). La actitud favorable hacia la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas fue explícita a nivel del contenido matemático (pareja i16-i31 con promedio 4,30) y del alumno (pareja i32-i2 con promedio 3,85). En cuanto a la actitud favorable hacia la necesidad del diseño de unidades didácticas de contenido algebraico queda evidenciada a nivel del profesor y del contenido matemático solamente (parejas i20-i10 y i30-i7 con promedios de 3,85 y 3,45 respectivamente).

En cuanto a la actitud menos favorable ésta se encontró en la utilización de la calculadora en la evaluación (pareja i5-i23 con promedio 3,15). También hubo una actitud poco favorable hacia el uso de la calculadora gráfica respecto del profesor (parejas i8-i18 con promedio de 3,30). En relación con la necesidad del diseño de unidades didácticas de contenido algebraico, respecto del contenido matemático, el alumno y la evaluación los profesores en formación expresaron una actitud no favorable (parejas i30-i7, i24-i6 y i26-i4 con promedios 3,45, 3,35 y 3,35 respectivamente). Las actitudes menos favorables se observaron hacia la dimensión curricular evaluación.

5.4.5. Análisis de los resultados en la aplicación final de la escala

La ponderación (pesos) y los promedios de las parejas de ítems se muestran en la tabla 5.3.7, ordenados de mayor a menor.

Tabla 5.3.7
Promedios de las parejas de ítems, ordenados de mayor a menor
Aplicación final

Nº	Ítems	Ponderación	Promedio
C_3D_1: i11-i19	El alumno mejora el aprendizaje del álgebra lineal cuando aplica los conceptos a la resolución de problemas del mundo físico o social	100	5.00
C_3D_3: i12-i17	La resolución de problemas algebraicos favorece la integración de conocimientos matemáticos	96	4.80
C_1D_1: i9-i27	La modelización favorece el aprendizaje del álgebra lineal en los alumnos	96	4.80
C_3D_4: i15-i29	Es importante evaluar el álgebra lineal mediante la resolución de problemas del mundo físico o social	93	4.65
C_1D_2: i22-i13	La incorporación de la modelización en el aula ayuda al profesor en la tarea de enseñanza de las matemáticas	92	4.60
C_2D_3: i16-i31	El uso de CG permite la visualización de conceptos relacionados con el álgebra lineal.	89	4.45
C_1D_3: i25-i14	La modelización matemática ayuda a la comprensión del álgebra lineal	89	4.45
C_2D_1: i32-i2	El uso de la CG facilita el aprendizaje de los alumnos en matemáticas	77	3.85
C_4D_3: i30-i7	La comprensión de los conocimientos del álgebra lineal se logra con el diseño de unidades didácticas que incorporan la CG	77	3.85
C_3D_2: i21-i3	La CG es un potente recurso del profesor para la enseñanza del álgebra lineal	75	3.75
C_4D_2: i20-i10	El diseño de unidades didácticas, que incorporen la CG, facilitan al profesor la organización del proceso de enseñanza del álgebra lineal	72	3.60
C_4D_1: i24-i6	El diseño de unidades didácticas que incorpore CG, en la enseñanza del álgebra lineal, favorece la articulación de conceptos y procedimientos en el aprendizaje de los alumnos	71	3.55
C_2D_4: i5-i23	La incorporación de la CG en el aula facilita la evaluación en matemáticas	69	3.45
C_2D_2: i8-i18	La incorporación de la CG en el aula ayuda al profesor a gestionar mejor la clase	67	3.35
C_1D_4: i1-i28	La modelización con el uso de la CG favorece la evaluación de conceptos del álgebra lineal	59	2.95
C_4D_4: i26-i4	El diseño de unidades didácticas que incorpore la CG favorece la evaluación en álgebra lineal	59	2.95

En primer lugar con promedios de 5.00 y 4.80, encontramos las parejas conformadas por los ítems 11 y 19 (i11-i19) y los ítems 12 y 17 (i12-i17) las cuales corresponden a la importancia del álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real, a nivel del alumno y del contenido matemático. La pareja de ítems i9-i27, con promedio de 4.80, muestra la actitud favorable de los profesores en formación hacia el proceso de modelización en la enseñanza del álgebra, a nivel del alumno. La pareja i15-i29, con promedio de 4.65, indica la actitud favorable de los participantes en el curso-taller hacia la evaluación del álgebra lineal mediante la resolución de problemas del mundo real. La pareja i22-i13, con un promedio de 4.60, es indicadora de la actitud favorable hacia la modelización como apoyo para el profesor en las tareas de enseñanza. La pareja i16-i31, con un promedio de 4.45, deja constancia de la actitud favorable de los futuros profesores hacia la calculadora gráfica como recurso para la representación de conceptos algebraicos. La pareja i25-i14, con un promedio de 4.45, muestra la actitud favorable hacia el proceso de modelización para comprender los conceptos y procedimientos del álgebra lineal. El par i32-i2, con promedio de 3.85, refleja la actitud positiva hacia la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas, a nivel del aprendizaje algebraico del alumno. El par i30-i7, con promedio de 3.85, muestra la actitud favorable de los participantes hacia la necesidad del diseño de actividades didácticas de contenido algebraico, a nivel del contenido matemático y con el uso de calculadora gráfica.

Los participantes en el curso-taller resaltaron sus actitudes favorables hacia la importancia del álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real respecto de todas sus componentes curriculares (parejas de ítems i11-i19, i12-i17, i15-i29, i21-i3). Asimismo, se observó en los profesores en formación un gran acuerdo en la actitud favorable hacia el proceso de modelización en cuanto al aprendizaje del alumno, el profesor y el contenido (parejas de ítems i9-i27, i22-i13, i25-i14).

También se apreció una actitud positiva hacia el uso de la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal, en las dimensiones del alumno y del contenido matemático (parejas de ítems i16-i31 y i32-i2).

Dentro de los ítems con menor valoración en la escala se observó la actitud hacia el diseño de unidades didácticas respecto de la evaluación. De igual manera se detectó una baja actitud positiva hacia la calculadora gráfica en la enseñanza de las matemáticas, respecto del profesor y de la evaluación. En cuanto a la actitud hacia la modelización, los futuros profesores se mostraron poco favorables a su empleo en la evaluación de los aprendizajes de los alumnos.

5.4.6. Cambios de actitudes apreciados

En los apartados anteriores hemos descrito las actitudes tanto en el momento inicial como en el momento final de la aplicación del Programa. Ahora nos proponemos analizar los posibles cambios de actitudes globales ocurridos entre estos dos momentos.

Tabla 5.4.6.1 *Ponderaciones iniciales y finales de las actitudes*

		Dimensiones curriculares									
		Alumno D_1		Profesor D_2		Contenido D_3		Evaluación D_4		Totales	
		Momento		Momento		Momento		Momento		Momento	
		1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
Componentes del Programa	Modelización (C_1)	91	96	82	92	90	89	74	59	337	336
	Calculadora (C_2)	77	77	66	67	86	89	63	69	292	302
	Älgebra lineal (C_3)	87	100	73	75	91	96	89	93	340	364
	U. Didácticas (C_4)	67	71	77	72	69	77	67	59	280	279
	Totales	322	344	298	306	336	351	293	280		

Consideremos las ponderaciones o pesos, iniciales y finales, dadas a las parejas de ítems (ver tabla 5.4.6.1). Dichas ponderaciones serán números entre 20 y 100, según todos los participantes tomen la opción TD (20x1=20) o la opción TA (20x5=100). La ponderación promedio será 20x3=60, obtenida al considerar que todos los participantes escogieron N (neutro) en todos los ítems del cuestionario.

A efecto de acercarnos a las variaciones en las actitudes, consideremos en primer lugar las diferencias de ponderaciones o pesos entre los momentos inicial y final, tal como se muestra en la tabla 5.4.6.2. Por ejemplo, la diferencia correspondiente a C_3D_1 es igual a la ponderación del mismo en el momento final menos su ponderación en el momento inicial; es decir, 100-87=13.

Tabla 5.4.6.2. *Diferencias entre ponderaciones iniciales y finales de las parejas de ítems*

	Alumno D_1	Profesor D_2	Contenido D_3	Evaluación D_4	Peso Total
Modelización (C_1)	5	10	-1	-15	-1
Calculadora (C_2)	0	1	3	6	10
Álgebra lineal (C_3)	13	2	5	4	24
U. Didácticas (C_4)	4	-5	8	-8	-1
Diferencia total	22	8	15	-13	

Respecto a los componentes (C_i) del programa MCA, las diferencias mostradas en la tabla 5.4.6.2 nos ayudan a inferir que el componente con mayor variación positiva fue C_3: álgebra lineal (24); seguido de C_2: dominio de la calculadora gráfica (10). Por otro lado, los componentes C_1: modelización de situaciones del mundo real y C_4: diseño de unidades didácticas tuvieron una ligera variación negativa (-1).

En cuanto a las dimensiones curriculares (D_j), la que presentó mayor variación positiva fue D_1: alumno (22); seguida de D_3: álgebra lineal (15) y D_2: profesor (8). Resultó un cambio negativo para D_4: la evaluación (-13).

En la misma tabla 5.4.6.2, revisando los datos obtenidos para la variable (C_iD_j); es decir para las actitudes específicas consideradas en el presente estudio, tenemos que once de las quince cambiaron positivamente. Las actitudes que presentaron cambios negativos fueron C_1D_3: actitud hacia la modelización respecto del contenido matemático, C_4D_2: actitud hacia las actividades didácticas para el profesor, C_1D_4: actitud hacia la modelización en la evaluación y C_4D_4: actitud hacia las actividades didácticas en la evaluación. La única actitud que no presentó variación fue C_2D_1: actitud hacia la calculadora gráfica en el aprendizaje del alumno. La mayor variación ocurrió en C_3D_1 la actitud hacia el álgebra lineal en relación con el alumno (13) seguida de C_1D_2: la actitud hacia la modelización respecto del profesor (10); En tercer lugar, con 8 puntos, tenemos C_4D_3: la actitud hacia las unidades didácticas para la enseñanza del álgebra lineal. En cuarto lugar C_2D_4: la actitud hacia la calculadora gráfica en la evaluación (6). En quinto lugar tenemos C_1D_1: la actitud hacia la modelización para el aprendizaje del alumno y C_3D_3: actitud hacia el álgebra como contexto matemático para la resolución de problemas con 5 puntos. En sexto lugar tenemos C_4D_1: la actitud hacia las unidades didácticas para el alumno y C_3D_4: actitud hacia el álgebra lineal respecto de la evaluación con 4 puntos. En séptimo lugar tenemos a C_2D_3: la actitud hacia la calculadora gráfica referida al contenido matemático con 3. La variación en las actitudes C_3D_2: la actitud hacia el álgebra lineal respecto del profesor con 2 puntos y C_2D_2: la actitud hacia la calculadora gráfica referida al profesor, resultaron muy exiguas con 2 y 1 punto respectivamente. Por el contrario, en cuatro casos se observó variación negativa; en C_1D_3: la actitud hacia la modelización en la resolución de problemas algebraicos (-1); en C_4D_2: la actitud hacia el diseño de unidades didácticas en relación al profesor (-5); en C_4D_4: la actitud hacia la unidades didácticas en relación a la evaluación (-8) y en C_1D_4: la actitud hacia la modelización respecto de la evaluación (-15).

Estos datos pueden significar que la realización del curso-taller, -a pesar que los participantes puntuaron favorablemente en los ítems (valores mayores que 60) al inicio del mismo- ejerció una influencia positiva en la actitud de los participantes hacia la modelización referida a las dimensiones curriculares del alumno y del profesor, no así en la evaluación donde, por el contrario, resultó una variación negativa. La actitud hacia la calculadora gráfica referida al profesor, el contenido matemático y la evaluación tuvo variación positiva, pero respecto del alumno no tuvo una variación. Una variación positiva a destacar la presentó la actitud hacia la importancia del álgebra lineal en la resolución de problemas del mundo real referida a todas las dimensiones del currículo, mostrando mayor preferencia por el alumno. Por último, hubo una ligera variación positiva en la actitud hacia la necesidad del diseño de unidades didácticas de contenido algebraico respecto del alumno y del contenido matemático; mientras que respecto del profesor y la evaluación ambas variaciones resultaron negativas.

En conclusión, desde las consideraciones anteriores podemos sostener que el desarrollo del programa resultó moderadamente favorable al cambio de actitudes objeto de estudio. Es importante señalar que las actitudes iniciales fueron altas, posiblemente por la “magia” que introduce la tecnología como herramienta de innovación en profesores en formación que no han tenido formación específica al respecto. Similarmente ocurre con la modelización, que aunque es una herramienta de trabajo en diversas asignaturas de matemáticas, crea expectativas en su aplicación didáctica en la enseñanza de las matemáticas escolares. Revisando las actuaciones y producciones de los participantes, algunos posibles factores que pudieron incidir en los pequeños cambios positivos y negativos podrían estar relacionados con la reflexión acerca de los componentes del programa. Dicha reflexión pudo haber surgido una vez que los participantes se encontraron ante requerimientos para el diseño de actividades didácticas para la enseñanza, como por ejemplo: las dificultades para encontrar las situaciones problema adecuadas a los alumnos de secundaria, la formulación de preguntas abiertas que conduzcan al trabajo algebraico, los momentos del proceso de modelización, cuándo y para qué utilizar la calculadora gráfica, y qué y cómo evaluar los aprendizajes de los alumnos. Precisamente sobre este último aspecto fue donde se evidenció una variación negativa de mayor valor absoluto. Esta pudiera ser producto de deficiencias del programa. El tema de la evaluación de los aprendizajes de los alumnos se introdujo en las actividades propuestas en el curso pero los participantes podrían no haber recibido el impacto necesario para reconocer su importancia en la enseñanza del álgebra lineal y en general de las matemáticas escolares.

En conclusión, desde las consideraciones anteriores podríamos sostener que el desarrollo del Programa resultó moderadamente favorable al cambio de actitudes objeto de estudio. Sin embargo, estas inferencias requieren de un estudio estadístico que pueda dar soporte a lo dicho anteriormente, para replantear o reformular estos juicios o aseveraciones sobre las causas de los ligeros cambios actitudinales asignado a la realización del curso-taller.

5.4.7. Análisis estadístico de ítems

Una de las técnicas adecuadas para estudiar la relación entre variables cualitativas es la de los modelos logarítmicos lineales, conocida comúnmente como modelos log-lineales. Esta técnica es adecuada para estudiar varias variables simultáneamente y determinar las asociaciones e interacciones que existen entre ellas (Bisquerra, 1989; Castro, 1995; Latiesa, 1991). Interesados en conocer las interacciones y asociaciones entre las variables de nuestro estudio, consideramos pertinente recurrir al modelo log-lineal para examinar los valores de la tabla de contingencia 5.4.6.1, estructurada a partir de las valoraciones dadas, por los profesores en formación que participaron en el programa MCA, a cada uno de los ítems de la escala de actitudes (anexo 5.4.7.1).

En consecuencia, se aplicó la técnica de los modelos log-lineales a los datos de la tabla 5.4.6.1, utilizando el programa SPSS 10.0, y se obtuvo como resultados los mostrados en el anexo 5.4.7.2. A efectos del estudio log-lineal se consideran las variables: COMPONEN:= Componentes del programa MCA (C_i), tal que C_i=i, DIMENSIO:= Dimensiones del currículo (C_j), tal que C_j=j y PRUEBA:= Momento de aplicación del instrumento, tal que momento inicial=1 y momento final=2.

En la tabla 5.4.7 presentamos los resultados del test de asociaciones parciales. Los resultados nos indican que sólo las variables COMPONEN (prob=0,0001<0,05) y DIMENSIO (prob=0,0039<0,05) presentan diferencias significativas entre las frecuencias esperadas y observadas. Esto significa que sólo encontramos efectos de primer orden o marginales. La variable PRUEBA no influye significativamente en el cambio de actitudes. En la tabla 5.4.7 hemos sombreado las filas correspondientes a las variables que presentan diferencias significativas.

Tabla 5.4.7. *Tests de asociaciones parciales*

Effect Name	DF	Partial Chisq	Prob	Iter
COMPONEN*DIMENSIO	9	14.318	.1115	2
COMPONEN*PRUEBA	3	.642	.8868	2
DIMENSIO*PRUEBA	3	1.107	.7753	2
COMPONEN	3	21.619	.0001	2
DIMENSIO	3	13.396	.0039	2
PRUEBA	1	.405	.5246	2

Al analizar los datos, encontramos que:

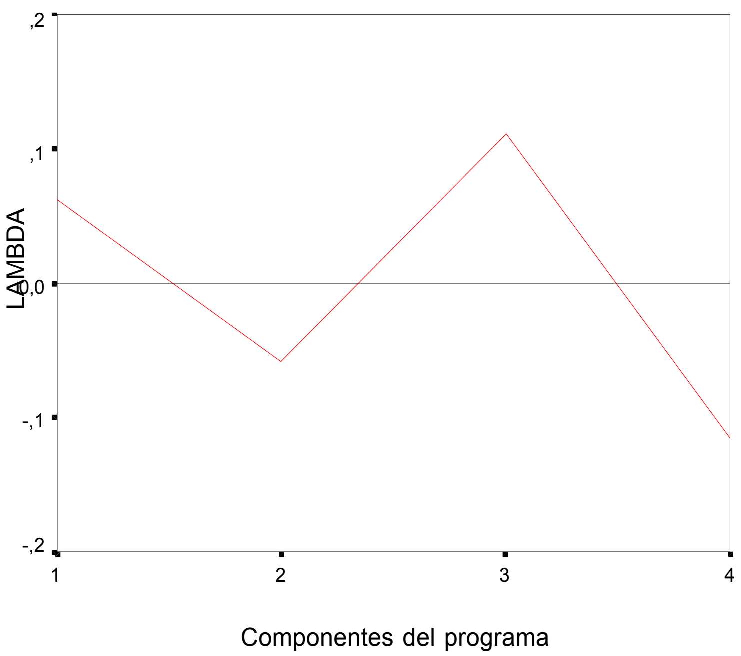
1. La asociación COMPONEN*DIMENSIO*PRUEBA no es significativa, con lo cual podemos afirmar que la variable bidimensional C_iD_j no depende del momento de aplicación del cuestionario; es decir, la

realización del curso-taller no generó cambios actitudinales estadísticamente significativos en los profesores en formación.

2. Las variables C_i y D_j no presentan asociación estadísticamente significativa puesto que de los resultados obtenidos con el análisis COMPONEN*DIMENSIO se obtuvo una probabilidad prob=0,1115>0,05.
3. Del análisis COMPONEN*PRUEBA se infiere que no hay asociación estadísticamente significativa entre los componentes del programa (C_i) y los momentos de la prueba (prob=0,8868>0,05).
4. Considerando el análisis DIMENSIO*PRUEBA resulta que las dimensiones curriculares (D_j) tampoco tienen asociación estadísticamente significativa con los momentos de la prueba (prob=0,7753).

5. Los parámetros lambda (ver anexo 5.4.7) obtenidos a partir del análisis marginal de la variable COMPONEN, es decir los componentes del programa (C_i), los representamos gráficamente en la figura 5.4.7.1.

Figura 5.4.7.1



Del análisis de tales parámetros obtenemos que:

a. La "frecuencia" o ponderación con la que aparece C_1: modelización, no difiere del promedio de las "frecuencias" o ponderaciones de los componentes (C_i) de forma significativa (λ= 0,0619821; z=1,8224).
b. La componente 2, es decir C_2: calculadora gráfica, aparece con una ponderación inferior al promedio de la ponderación de los componentes pero no de forma significativa.
(λ=-0,0587200; z=-1,6613).
c. La ponderación con la que aparece el componente 3, es decir C_3: álgebra lineal, difiere positivamente de la media de la ponderación de los componentes de forma significativa (λ=0,1118626; z=3,3494).
d. La ponderación con la que aparece el componente 4, es decir C_4: unidades didácticas, difiere de la media de la ponderación de la totalidad de los componentes, de forma significativa.
(λ= -0.1151247; z=-3,1988).

A manera de conclusión parcial, podemos decir que los componentes 3 y 4, es decir C_3: álgebra lineal y C_4: unidades didácticas se presentan con una ponderación diferente y significativa (superior e inferior respectivamente) del promedio de los componentes,. Los otros componentes, es decir C_1 y C_2, no difieren de la ponderación media de una manera significativa.

6. Respecto a la variable DIMENS, es decir, D_j: dimensiones del currículo, al igual que las demás variables, sus resultados se encuentran en el anexo 5.4.7. En la figura 4.2 se puede visualizar una representación de sus parámetros lambda.

   Analizando los resultados de los parámetros tenemos:

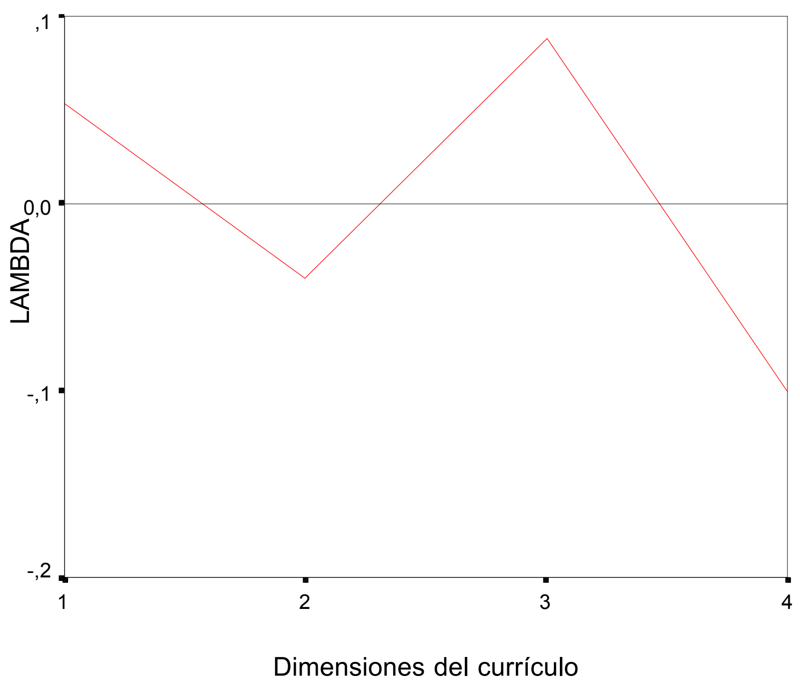
   a. La ponderación con la que aparece D_1: alumno, no difiere significativamente de la ponderación promedio de las D_j (λ= 0,0529579; z=1,5539).

b. La ponderación con la que aparece la dimensión D_2: profesor, no difiere de la media de la frecuencia de las D_j de forma significativa (λ= -0,0402220; z=-1,1458).

c. La dimensión 3, es decir D_3: contenido matemático, se presenta con una ponderación mayor que el promedio de las D_j de forma significativa (λ= 0,0881328; z=2,6193).

d. La componente curricular 4, es decir D_4: evaluación, se presenta con una ponderación baja significativamente inferior al promedio de las dimensiones del currículo (λ= -0.100869; z=-2,8074), en cada uno de los momentos de aplicación de la escala.

Figura 5.4.7.2



En síntesis, las tendencias a una ponderación favorable, por parte de los profesores en formación, están hacia D_1 y D_3, aunque sólo esta última de manera significativa. Por otra parte hay ponderaciones inferiores al promedio, no significativa hacia D_2 y significativa hacia D_4.

Balance del análisis log-lineal

Conocidos los análisis realizados anteriormente en 5.4.6 y el log-lineal, pasamos a tomar en consideración ciertas comparaciones entre ellos.

En el análisis de las diferencias realizado en el Apartado 5.4.6, a partir de la tabla 5.4.6.1; de los componentes (C_i) encontramos que el mejor puntuado fue C_3: álgebra lineal, seguido de C_2: calculadora gráfica. De igual manera, cuando revisamos los resultados del análisis log-lineal observamos que C_3 es el único componente ponderado favorablemente con significación estadística. Aunque el valor de λ= 0,0619821 para C_1, permite apreciar un cambio positivo hacia la modelización matemática, pero no estadísticamente significativo. El análisis log-lineal también señala cierta tendencia de las ponderaciones de la CG (C_2) y las unidades didácticas (C_4) por debajo de la media de las mismas, lo cual expresa una valoración menos favorable hacia ellas.

Respecto a las dimensiones curriculares (C_j) el análisis realizado en el Apartado 5.4.6 permitió observar que la mayor ponderación fue dada al alumno (D_1), seguida de D_3 y D_2 respectivamente. Al observar el análisis log-lineal se notó que el contenido matemático es el mejor ponderado, y además estadísticamente significativo, seguido de D_1, D_2 y D_4 respectivamente. Sin embargo, no hay una correspondencia en el orden de importancia de los D_j , tampoco obtenemos contradicciones o resultados que nieguen lo observado en el análisis del Apartado 5.4.6; es decir, se encontraron cambios favorables en D_j pero no son estadísticamente significativos.

En cuanto a la variable C_iD_j, el análisis de diferencias (Apartado 5.4.6) sugiere que C_3D_1: actitud hacia la resolución de problemas de álgebra lineal respecto del alumno tiene mejor ponderación, seguido de C_1D_2: actitud hacia la modelización referida al profesor, C_4D_3: actitud hacia las unidades didácticas referidas al álgebra lineal y C_2D_4: actitud hacia la calculadora gráfica respecto de la evaluación. Asimismo, el análisis log-lineal muestra cierta congruencia con lo obtenido en el análisis de diferencias, aunque no establece ponderación estadísticamente significativa.

Los resultados de la escala de actitudes sugieren cambios favorables en los participantes, pero a la luz del análisis log-lineal éstos no son estadísticamente significativos. Por otro lado, se identifican actitudes que no sufrieron cambio luego de la aplicación del programa, como el caso C_2D_1: actitud hacia la CG respecto del alumno.

5.4.8. Análisis estadístico de reacciones extremas

A continuación, en la tabla 5.4.7.1, presentamos los resultados del cálculo de las medias y de las desviaciones típicas, obtenidas en el momento inicial y final de la aplicación de la escala.

Tabla 5.4.7.1. *Medias y desviaciones típicas en los momentos inicial y final*

	Media	Desviación Típica
Momento inicial	3,9031	0,9968
Momento final	4,0031	1,0997

Estos resultados reflejados en la tabla 5.4.7.1 nos indican que los valores promedios están muy cerca de la valoración *parcialmente de acuerdo* (cuyo valor es 4); además las puntuaciones, al inicio y al final de los grupos, tienden a estar entre *neutro* y *totalmente de acuerdo*, es decir entre los valores 3 y 5. Esto último lo justifican los valores de las desviaciones típicas.

No hemos encontrado diferencias significativas entre las medias de la prueba inicial y final de las actitudes. Sin embargo, consideramos que en un estudio de actitudes como el que hemos realizado, el curso impartido a estos participantes pudiera haber provocado reacciones en sentido positivo o negativo que no están contempladas en los tests de hipótesis que se basan en la comparación de puntuaciones medias y que por lo tanto no las detectan. Para saber si existen reacciones extremas en sentido positivo o negativo vamos a emplear el test no paramétrico de reacciones extremas de Moses (Siegel, 1986).

Para la aplicación del test de hipótesis de Moses, con muestras independientes (grupo al inicio y grupo al final), acudimos a las valoraciones dadas a cada uno de los ítems (ver anexo 5.4.7) y su respectivo análisis con el apoyo del programa SPSS, versión 10.0. De los resultados obtenidos se desprende que en los ítems C_1D_4 y C_4D_4 los participantes mostraron reacciones extremas significativas, según se aprecia en la tabla 5.4.7.2. Es decir, las actitudes hacia la modelización respecto de la evaluación y hacia las unidades didácticas relativas a la evaluación tuvieron valoraciones extremas. En la tabla en referencia se indican, en las casillas sombreadas, los valores significativos dados por el test de Moses.

Tabla 5.4.7.2. *Valores de significación en la prueba de Moses*

Ítems	C_1D_1	C_1D_2	C_1D_3	C_1D_4	C_2D_1	C_2D_2	C_2D_3	C_2D_4	C_3D_1	C_3D_2	C_3D_3	C_3D_4	C_4D_1	C_4D_2	C_4D_3	C_4D_4
Probabilidad* (p)	0,089	0,500	0,089	0,000	0,010	0,325	0,325	0,185	0,089	0,848	0,089	0,185	0,848	0,010	0,500	0,000

*Significación unilateral de la amplitud recortada del grupo inicial

Podemos concluir que, con base en los datos antes señalados, las reacciones extremas en las actitudes de los participantes, en el momento inicial, difieren significativamente de las actitudes de los mismos en el momento final en relación con las variables C_1D_4 y C_4D_4. Observándose que, en relación con la variable C_1D_4, en el momento inicial, un subgrupo (seis sujetos) se manifestó *parcialmente de acuerdo*, mientras que en el momento final otro subgrupo (cuatro sujetos) se manifestó *parcialmente en desacuerdo*. De igual manera, este mismo comportamiento lo observamos en la variable C_4D_4, donde un subgrupo (cinco sujetos) se manifestó *parcialmente de acuerdo* en el momento inicial y en el momento final otro subgrupo (cuatro sujetos) se manifestó *parcialmente en desacuerdo*.

5.4.9. Análisis estadístico de los sujetos

A efectos de explicar las posibles agrupaciones de sujetos, tanto al inicio como al final de la aplicación del programa MCA, procedemos a utilizar las técnicas del análisis cluster y la de escalamiento multidimensional. Según García Ferrando (2000), el análisis cluster o de conglomerados "...permite al investigador trascender el puro análisis descriptivo de los datos." (p.454). De igual manera, este autor considera al escalamiento multidimensional como una técnica de gran interés para la investigación social, ya que trata de obtener pocas dimensiones con el fin de poder alcanzar una representación gráfica de los rasgos más significativos de los datos.

Análisis cluster

Al aplicar el análisis cluster a los sujetos (profesores en formación) en los momentos inicial y final del desarrollo del programa, a partir de los datos del anexo 5.4.9, obtuvimos los resultados mostrados en las figuras 5.4.9.1 y 5.4.9.2.

En el momento inicial identificamos dos clusters, específicamente uno constituido por los sujetos s2, s3, s8, s5 y s6 y el otro formado por los sujetos s9 y s10. Interesados en identificar los niveles de coincidencia hacia las actitudes estudiadas, realizamos el análisis a partir de la tabla de datos de las puntuaciones dadas por los participantes en la escala.

Luego de identificados los clusters consideramos de interés conocer las coincidencias o disparidades intracluster. De esa manera se podría tener mayor claridad en las conformaciones de los grupos y sus consecuencias para nuestro estudio. Para ello se observaron las valoraciones que cada sujeto del cluster le otorgó a los ítems (variables) del cuestionario. A partir de allí tomamos en cuenta aquellos ítems sobre los cuales hubo coincidencia o disparidad en su valoración por parte de los sujetos. Todo ello nos permite distinguir los aspectos que comparten en el cluster que, para nuestro estudio, son indicadores para explicar las tendencias actitudinales.

Figura 5.4.9.1.

Dendrograma correspondiente a la aplicación inicial de la escala de actitudes

```
    C A S E      0         5        10        15        20        25
  Label     Num  +---------+---------+---------+---------+---------+

  S2          2   □□□□□□□
  S3          3   □□   □□□□□□□□
  S8          8   □□□□□□□     □□□□□□□□□□□□□□□□□
  S5          5   □□□□□□□□□□□□□□             □□□□□□□□□□□
  S6          6   □□□□□□□□□               □       □
  S9          9   □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□       □□□□□□□□
  S10        10   □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□              □
□□□□□□□□□□□□
  S7          7   □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□     □
□
  S1          1
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□        □
  S4          4
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
```

Respecto del cluster de cinco elementos, una vez examinada la tabla de datos de las puntuaciones (anexo 5.4.9), encontramos que:

-Los sujetos mostraron actitud neutral ante la utilización de las unidades didácticas en el álgebra lineal escolar (C_4D_3)

-Los sujetos estuvieron parcialmente de acuerdo en la actitud hacia las unidades didácticas para el profesor (C_4D_2), la actitud hacia las unidades didácticas para el alumno (C_4D_1), la actitud hacia la calculadora gráfica para el alumno (C_2D_1) y la actitud hacia la modelización para el profesor (C_1D_2). Asimismo, coincidieron en manifestarse totalmente de acuerdo en las actitudes hacia la resolución de problemas algebraicos referidos al alumno (C_3D_1) y a la evaluación (C_3D_4).

-En el cluster se observó disparidad importante en la actitud hacia las unidades didácticas respecto del contenido matemático (C_4D_3), específicamente estuvieron parcialmente en desacuerdo, neutrales o parcialmente de acuerdo en la valoración del ítem correspondiente.

En relación con el cluster constituido por los sujetos s9 y s10 encontramos:

-Los sujetos manifestaron estar parcialmente de acuerdo en la actitud hacia las unidades didácticas en la enseñanza del álgebra lineal (C_4D_3)

-Actitud neutral hacia la utilidad de las unidades didácticas en el aprendizaje del alumno (C_4D_1).

-Actitud parcialmente de acuerdo hacia la utilización de la CG por parte del profesor (C_2D_2), hacia la modelización para el alumno (C_1D_1) y hacia el empleo de la resolución de problemas algebraicos por el profesor (C_3D_2)

-Actitud totalmente de acuerdo hacia la CG en la enseñanza del álgebra lineal (C_2D_3).

-En este cluster hay de disparidad de actitud hacia el empleo de la calculadora gráfica tanto en el aprendizaje del alumno (C_2D_1) como en la evaluación (C_2D_4). Las valoraciones en los dos casos fueron parcialmente en desacuerdo y parcialmente de acuerdo.

En el momento final, a partir del dendrograma de la figura 5.4.9.2., identificamos tres clusters. El primero conformado por los sujetos s12, s19, s18, s13 y s17. El segundo constituido por s14 y s20. El tercero formado por s11 y s16.

Figura 5.4.9.2.

Dendrograma correspondiente a la aplicación final de la escala de actitudes

```
    C A S E      0         5        10        15        20        25
  Label     Num  +---------+---------+---------+---------+---------+

  S12         2   □□□□□□□□□□□
  S19         9   □□      □□□□□
  S18         8   □□□□□□□□□□□   □□□□□□□□□□□□
  S13         3   □□□□□□□□□□□□□□□□        □□□□□□□□□□
  S17         7   □□□□□□□□□             □       □
  S14         4   □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
  S20        10   □□□□□□□□□□□□□□□□               □
□
  S11         1   □□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
□
  S16         6   □□□□□□□□□
□
  S15         5
□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□□
```

En el cluster constituido por s12, s19, s18, s13 y s17, encontramos que:

-Los sujetos están totalmente de acuerdo en el uso de problemas algebraicos para el aprendizaje del alumno (C_3D_1).

-Excepto el sujeto s13, que se muestra parcialmente de acuerdo, el resto de los miembros del cluster están totalmente de acuerdo en el uso de la CG para la enseñanza del álgebra lineal (C_2D_3).

-Respecto a la actitud de los profesores en formación hacia la resolución de problemas en la enseñanza del álgebra (C_3D_3), los sujetos coincidieron en estar totalmente de acuerdo, excepto el sujeto s3, quien se manifestó parcialmente de acuerdo.

-Los sujetos del cluster se manifestaron totalmente de acuerdo respecto a la resolución de problemas algebraicos en la evaluación (C_3D_4), excepto el sujeto s12 que estuvo parcialmente de acuerdo.

-Asimismo, observamos que en relación con la actitud hacia el uso de la CG en la evaluación (C_2D_4), coincidieron en estar parcialmente en desacuerdo.

-De igual manera, encontramos disparidad en las actitudes de los sujetos del cluster respecto al uso de unidades didácticas en la evaluación (C_4D_4), mostrando valoraciones desde parcialmente en desacuerdo hasta totalmente de acuerdo. Es decir, respecto a esta variable encontramos gran disparidad en las valoraciones dadas por los futuros profesores.

Analizando el cluster conformado por los sujetos s14 y s20 encontramos que:

-Los sujetos manifestaron una actitud totalmente de acuerdo hacia la resolución de problemas algebraicos en el aprendizaje del alumno (C_3D_1) y hacia la resolución de problemas algebraicos en la evaluación (C_3D_4).

-Los profesores en formación mostraron una actitud parcialmente de acuerdo hacia la CG en la evaluación (C_2D_4) y hacia la resolución de problemas algebraicos referidos al profesor (C_3D_2).

-Coincidieron en una actitud neutral hacia la CG para el profesor (C_2D_2).

-En la actitud hacia la modelización en la evaluación (C_1D_4) los sujetos mostraron disparidad en su valoración. Un sujeto se mostró parcialmente de acuerdo y el otro totalmente en desacuerdo.

En el análisis del cluster conformado por los sujetos s11 y s16 encontramos:

-Los sujetos manifestaron actitud totalmente de acuerdo respecto a la modelización referida al alumno (C_1D_1), hacia la resolución de problemas algebraicos respecto del alumno (C_3D_1), hacia la resolución de problemas en la enseñanza del álgebra lineal escolar (C_3D_3), hacia la modelización referida al profesor (C_1D_2) y hacia la modelización en la enseñanza del álgebra (C_1D_3).

-Presentaron una actitud neutral hacia las unidades didácticas respecto del profesor (C_4D_2), hacia las unidades didácticas referidas al alumno (C_4D_1) y hacia la CG en el aprendizaje del alumno (C_2D_1).

-Se identificó disparidad de actitud hacia la CG en la evaluación (C_2D_4) y hacia la resolución de problemas algebraicos respecto del profesor (C_3D_2). Un sujeto estuvo totalmente en desacuerdo y el otro presentó una actitud neutral.

En la tabla 5.4.9 resumimos las coincidencias y disparidades que subyacen en los clusters analizados anteriormente.

Tabla 5.4.9. *Coincidencias y disparidades en los clusters*

Momento	Cluster	Valoración	Coincidencias	Disparidades
Inicial	s2, s3, s8 s5, s6	N	C_4D_3*	C_4D_3 (PD, N, PA)
		PA	C_4D_2, C_2D_1, C_4D_1*, C_1D_2*	
		TA	C_3D_1, C_3D_4	
	s9, s10	PD	C_4D_3	C_2D_1, C_2D_4 (PA, PD)
		N	C_4D_1	
		PA	C_2D_2, C_1D_1, C_3D_2	
		TA	C_2D_3	
Final	s12, s19, s18, s13, s17	PA	C_2D_4	C_4D_4 (PD, N, PA, TA)
		TA	C_3D_1, C_3D_2*, C_3D_3*, C_3D_4*	
	s14, s20	N	C_2D_2	C_1D_4 (PA, TD)
		PA	C_2D_4, C_3D_2	
		TA	C_3D_1, C_3D_4	
	s11, s16	N	C_4D_2, C_4D_1, C_2D_1	C_2D_4, C_3D_2 (TD, N)
		TA	C_1D_1, C_3D_1, C_3D_3, C_1D_2, C_1D_3	

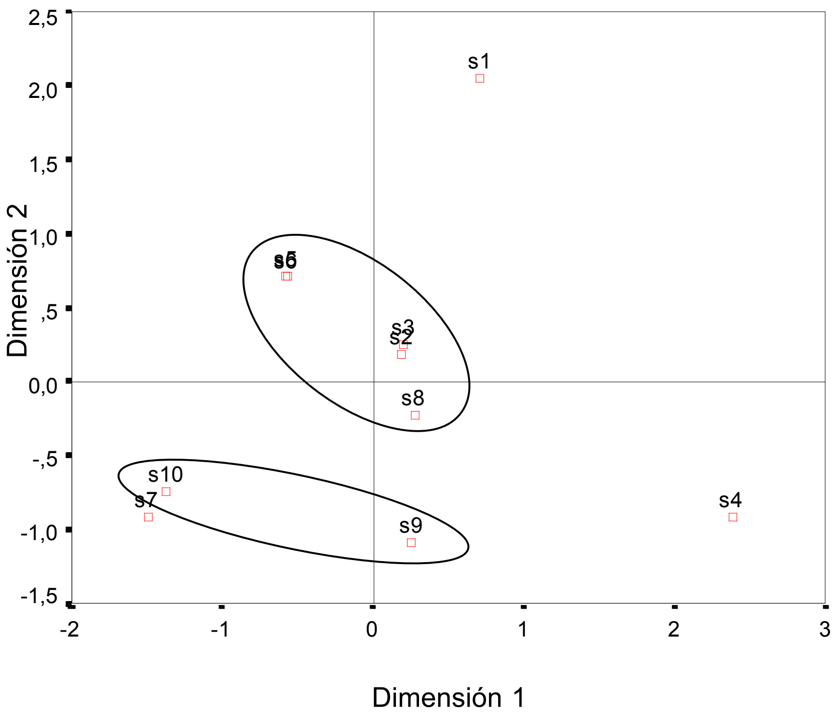
*Hay una valoración diferente pero muy próxima a las del resto del grupo

Análisis de escalamiento multidimensional

El análisis de escalamiento multidimensional efectuado a los datos recogidos con la escala de actitudes nos muestra las agrupaciones que contribuyen a ilustrar las tendencias actitudinales de los profesores en formación. El análisis lo realizamos en los momentos inicial y final.

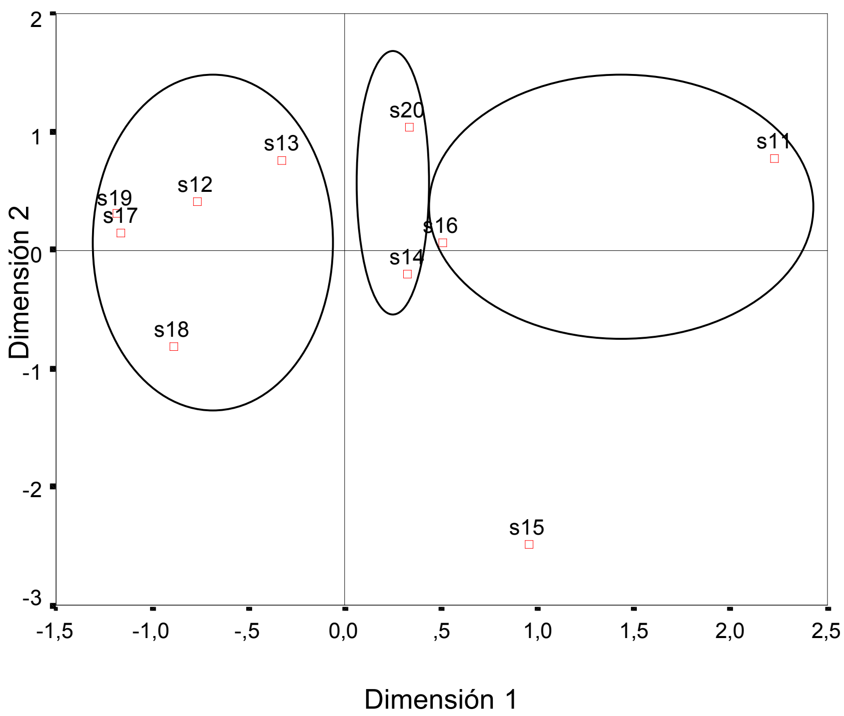
Para el momento inicial los indicadores de la bondad de ajuste de los resultados son aceptables (Stress=0,14320, RSQ=0,90557). En consecuencia, a partir de la figura 5.4.9.3 podemos identificar el grupo conformado por los sujetos s2, s3, s8, s5 y s6 el grupo constituido por s9, s10, lo cual concuerda con lo obtenido en el análisis cluster.

Figura 5.4.9.3.
Análisis por escalamiento multidimensional de la escala de actitudes en el momento inicial



La aplicación del análisis de escalamiento multidimensional en el momento final nos otorga una aceptable bondad de ajuste (Stress=0,15184; RSQ=0,90131). En la figura figura 5.4.9.4 se observa gráficamente la conformación de los grupos de profesores en formación de acuerdo a sus actidudes; éstos coinciden con los identificados mediante el análisis cluster. El grupo formado por los sujetos s12, s19, s18, s13, s17. El grupo constituido por s14, s20. Y el grupo formado por s11, s16.

Figura 5.4.9.4.
Análisis por escalamiento multidimensional de la escala de actitudes en el momento final



Balance del análisis estadístico de los sujetos

Del análisis estadístico de los sujetos, efectuado mediante las técnicas cluster y escalamiento multidimensional, podemos concluir:

-La complementariedad de las técnicas estadísticas utilizadas fue útil para identificar y validar los hallazgos en las tendencias actitudinales de los profesores en formación. Tal es el caso de la actitud hacia las componentes del programa referidas a la evaluación.

-Con el análisis estadístico de los sujetos se complementan los niveles descriptivos presentados en los apartados 5.4.4 y 5.4.5. Además se indaga en la estructura de cada grupo (inicial y final) hasta llegar a identificar subgrupos y sus características, tal como se recoge en la tabla 5.4.9 y en las figuras 5.4.9.3 y 5.4.9.4.

-En el momento inicial, los sujetos del grupo más numeroso coinciden en actitudes favorables hacia componentes referidas a la dimensión curricular alumno (ver tabla 5.4.9). Por otro lado, presentan disparidad en la actitud hacia las unidades didácticas en la enseñanza del álgebra (C_4D_3).

-El análisis estadístico del momento final permitió identificar un grupo de cinco miembros. En él se destaca que todos sus miembros se manifiestan totalmente de acuerdo en lo que respecta a las actitudes hacia la resolución de problemas algebraicos en todas las dimensiones del currículo. Esto indica que en dicho grupo la actitud de preferencia favorable es hacia el álgebra lineal. Tal hallazgo contribuye a confirmar la pertinencia de la estructura conceptual del álgebra lineal escolar como contexto matemático para desarrollar el programa MCA.

-En el momento final, el cluster formado por los sujetos s11 y s16, tienen una actitud totalmente de acuerdo hacia la componente modelización referida a todas las dimensiones del currículo excepto la evaluación, lo cual confirma los hallazgos del análisis descriptivo presentado en el apartado 5.4.5.

-A partir de la comparación entre los resultados del análisis estadístico de los sujetos, con los clusters seleccionados, pudimos confirmar que las actitudes más favorables de manera significativa fueron C_3D_1 y C_3D_4, hacia las cuales se manifestaron los sujetos, de los dos grupos mayoritarios totalmente de acuerdo, tanto al inicio como al final. Es decir, la actitud hacia la resolución de problemas algebraicos (álgebra lineal) respecto del alumno y de la evaluación.

Lo antes expuesto nos induce a pensar que el análisis estadístico de los sujetos pone en evidencia la importancia de ser cauteloso al momento de emitir juicios categóricos acerca de las tendencias actitudinales y por lo tanto hacia el impacto del programa MCA. De allí la importancia de la complementariedad de técnicas de análisis de los datos en el estudio de las actitudes, para lograr un abordaje mucho más profundo para la obtención de conclusiones con mayor sustentación.

5. 5. Entrevistas a participantes del programa transcurrido un año

Por recomendación del Dr. Jeremy Kilpatrick, una vez transcurrido dos años desde la impartición del programa procedimos a realizar unas entrevistas a algunos de los participantes que se encontraban en ejercicio de la docencia en matemáticas de secundaria. El interés de estas entrevistas, su carácter semiestructurado, las conjeturas que la orientan, la elección de los participantes y las dimensiones contempladas en su diseño, se presentaron en el Apartado 3.8.6. Presentamos a continuación el análisis realizado a las tres entrevistas realizadas. Para llevar a cabo el análisis procedimos a buscar, en cada entrevista transcrita, expresiones relacionadas con las componentes del programa MCA, hasta lograr conformar la parrilla (ver tabla 5.4) que posteriormente nos sirvió de soporte en el análisis.

En la parrilla se resume la información recogida en la entrevista semiestructurada aplicada a tres participantes del curso-taller "Calculadoras gráficas en el currículo de secundaria", quienes actualmente se desempeñan como profesores de matemáticas en educación secundaria. Los consideramos profesores noveles y los denotamos por N1, N2 y N3. En la entrevista consideramos las cuatro componentes del programa MCA, es decir: modelización matemática, calculadora gráfica, álgebra lineal y resolución de problemas algebraicos, y diseño de actividades didácticas; agregamos un apartado relacionado con opiniones y comentarios acerca del curso-taller, para recoger información adicional a la contemplada en la entrevista. Para estructurar lo concerniente a cada componente, partimos del análisis de cada una de las entrevistas y se rescatan las frases o expresiones que emergieron relacionadas con ellos, estableciendo una comparación constante con la teoría subyacente en cada caso, es decir, con la modelización, la calculadora, el álgebra y las actividades didácticas. Lo expresado por cada entrevistado se denota mediante una X (equis) en la casilla correspondiente. Veamos los detalles para cada una de las componentes del programa MCA.

5.5.1. Aspectos relativos a la modelización matemática

El proceso de modelización matemática no es utilizado formalmente por los profesores entrevistados, sin embargo hemos incluido esta componente tomando en cuenta algunos rasgos que la caracterizan (ver capítulo II). Para la construcción de la parrilla, se extrajo de los discursos aquellos aspectos de la modelización matemática que los profesores manifestaron manejar con mayor o menor intensidad en sus clases de matemáticas. En síntesis los aspectos referidos a la modelización fueron los siguientes:

-Reconoce campos de situaciones problema (M1);

-Considera los problemas del mundo real como motivadores del aprendizaje (M2);

-Considera importante pasar del lenguaje cotidiano al algebraico (M3);

-Da oportunidad a la experimentación en la resolución de problemas (M4);

-Encuentra dificultades para utilizar problemas abiertos en clase, por falta de tiempo y/o rechazo de los alumnos (M5);

-Propone problemas en los exámenes, pero parecidos a los trabajados en clase (M6);

-Plantea problemas a partir de ecuaciones dadas (M7).

En la *expresión* M1, el entrevistado menciona o sugiere campos del mundo físico o social, donde se puede acudir para extraer o formular situaciones problema para el trabajo en la clase de matemáticas, como los de la vida cotidiana, la industria, el comercio, entre otros. De lo anterior podemos inferir que el profesor conoce fuentes de situaciones problema en donde podría conectar las matemáticas escolares y hacerlas más significativa para sus alumnos. En la *expresión* M2 el profesor reconoce que los problemas del mundo real son motivadores del aprendizaje de las matemáticas, es decir, captan la atención de los alumnos debido a las conexiones existentes entre el mundo real y el mundo matemático. Esto significa que el profesor podría usarlos tanto para motivar sus clases como para lograr un buen ritmo de trabajo en el desarrollo de las mismas. Esto podría indicar confianza del profesor en tales problemas para dar mayor significado de los temas que se estudian y a su vez consolidar el aprendizaje de sus alumnos. La *expresión* M3 recoge si el profesor inicia a sus alumnos en los procesos de abstracción partiendo de lo verbal a lo simbólico. La abstracción corresponde, según nuestro esquema de la modelización (ver capítulo II) con uno de sus momentos, precisamente cuando se construye el modelo matemático. Esa traducción de lo verbal a lo simbólico es una parte importante en el momento de abstracción para lograr expresar modelos algebraicos. La *expresión* M4 recoge la utilización de la experimentación referida, fundamentalmente, al manejo del ensayo y error en el establecimiento de modelos o fórmulas matemáticas. La experimentación también corresponde al momento de abstracción en el proceso de modelización que asumimos en el presente trabajo. La *expresión* M5 pone en evidencia que el profesor encuentra dificultades para utilizar problemas abiertos en sus clases de matemáticas; dichas dificultades fueron asociadas con la falta de tiempo en sus clases o porque han percibido que a los chicos no les agrada este tipo de problemas. La *expresión* M6, se refiere a que el profesor utiliza problemas en los exámenes pero específicamente aquellos que se han trabajado o explicado suficientemente en clase. Esto refleja, al menos, cierta amplitud en su noción de evaluación de los escolares. Podría pensarse en heterogeneidad de las preguntas propuestas en los exámenes, donde se incluyen problemas de aplicación de las matemáticas. La *expresión* M7 dice que el profesor propone modelos (ecuaciones) para que sus alumnos enuncien problemas a partir de los mismos. Esta es una actividad relacionada con la modelización, aunque no se parte directamente de una situación del mundo real. Sin embargo estimula en los alumnos el hábito de cuestionar, el cual es muy importante cuando se utiliza el proceso de modelización.

El análisis de las entrevistas a la luz de nuestra rejilla muestra que los tres profesores entrevistados coinciden en mencionar campos de situaciones problema, encuentran dificultades para utilizar problemas abiertos con sus alumnos y proponen problemas en los exámenes, pero solamente aquellos que se han discutido suficientemente en clase. Es decir que, los profesores noveles reconocieron la existencia de diversos campos de situaciones problema para la aplicación de la modelización, sin embargo éstos encuentran dificultades para utilizar problemas abiertos, tanto por falta de tiempo en el aula, como por el rechazo de los alumnos hacia ese tipo de cuestiones. Eso les conduce a proponer problemas, en los exámenes, similares a los realizados en clase.

Algunas respuestas dadas por los profesores se muestran a continuación:

Profesor novel 1 (N1)

Pregunta. ¿Cuál es tu opinión sobre el uso de problemas o preguntas abiertas?

Respuesta. Hombre, eso sería lo ideal en casi todos los tipos de problemas de matemáticas, pero tiene la limitación del tiempo. Cuando tú trabajas un tema abierto con los chavales.. pues... se te pueden ir horas y horas... mientras de verdad lo piensan... y lo trabajan...

Profesor novel 2 (N2):

Pregunta. Y para evaluar ¿qué tipo de preguntas propones a tus alumnos?

Respuesta. Normalmente los ejercicios que pongo en clase. También mucho lo que es el día a día. Lo que pongo en clase, lo que ellos preguntan, lo que participan, y con el examen.

Profesor novel 3 (N3):

Pregunta. ¿Planteas a tus alumnos problemas de la vida cotidiana o del mundo físico y social?

Respuesta. Es que el bachillerato que tengo es el aplicado a las ciencias sociales. Ellos preguntan ¿para qué sirve esto? Se les da ejemplos de problemas aplicados a las ciencias sociales, por ejemplo la demanda, la oferta,... todo eso... uso de exponenciales...

Además, los profesores noveles N1 y N2 coinciden en darle importancia a los problemas del mundo real como motivadores del aprendizaje. Al respecto tenemos:

Profesor novel 1 (N1):
Pregunta. Y... ¿Qué parte del álgebra enseñas?
Respuesta. Ecuaciones... Y lo más interesante, por supuesto, son los problemas. Más que resolver las ecuaciones, ¿no? los problemas son siempre más interesantes.

Profesor novel 2 (N2):
Pregunta. ¿Qué otro tipo de problemas te gustarían a ti?
Respuesta. Les pondría problemas relacionados con su ambiente. Sería mejor para que se motivaran más. Bueno, y una cosa que los motiva más, no solamente a los niños sino también a los padres...

Notamos que el pase del lenguaje cotidiano al simbólico, la experimentación y el planteamiento de problemas a partir de un modelo dado, sólo son mencionados por el profesor novel 1 (N1). Es decir, dentro de las prácticas que cada uno de ellos manifestó realizar a través de cada entrevista, podríamos afirmar que este profesor N1 es quien se acerca más a la posible utilización de la modelización en la enseñanza de las matemáticas con sus alumnos. Los otros dos profesores N2 y N3 parecen más encasillados en su temario y eso podría hacerlos menos propensos para acercarse a la aplicación del proceso de modelización. Lo que sí conviene destacar es el conocimiento que manifiestan acerca del proceso de modelización, aunque no recurren a éste en la práctica.

5.5.2. Aspectos relativos a la calculadora

Un aspecto común a casi todos los entrevistados es que en ninguno de los centros de trabajo, donde se desempeñan como docentes, se cuenta con calculadoras gráficas. Sólo en uno de los casos se manifestó contar con dos calculadoras gráficas TI-82, lo cual es obviamente insuficiente para las necesidades del colectivo de profesores y alumnos en el aula de matemáticas. Las calculadoras que utilizan algunos alumnos y profesores son elementales, es decir, realizan sólo las cuatro operaciones aritméticas fundamentales de suma, resta, multiplicación y división. Dichas calculadoras son propiedad de cada alumno o de cada profesor, según el caso. Las expresiones referidas a la *calculadora*, dentro de la parrilla, corresponden con expectativas subjetivas de los profesores noveles en un supuesto ambiente de calculadoras.

Las expresiones referidas a la componente calculadora fueron los siguientes:

-Propone problemas en los exámenes, pero parecidos a los trabajados en clase (C1);

-Emplea la calculadora, fundamentalmente, para comprobar resultados (C2);

-Ve bien que se resuelvan problemas utilizando la calculadora u otra tecnología electrónica (C3);

-Está de acuerdo en que todos los alumnos tengan calculadora en la clase (C4);

-Está de acuerdo con el empleo de calculadora en las evaluaciones (C5);

-Sugiere utilizar la calculadora, pero después del conocimiento de los conceptos y procedimientos (C6);

-Le gustaría utilizar una calculadora gráfica (CG) en sus clases (C7);

-El empleo de diferentes formas de resolver un problema con la calculadora gráfica tiene utilidad práctica en la enseñanza (C8);

-El empleo de la calculadora gráfica en el aula requiere tiempo de formación tanto para el profesor como para el alumno (C9);

-El tiempo es un obstáculo importante para utilizar la CG en el aula (C10).

La *expresión* C1 recoge el tipo de calculadoras que emplean los alumnos, específicamente se refiere a las calculadoras elementales para operaciones aritméticas. Aunque esas calculadoras no permiten manejos algebraicos, sin embargo pueden ayudar en otros aspectos tanto afectivos como cognitivos relacionados con estrategias del aprendizaje del álgebra. La *expresión* C2 alude concretamente al hecho de comprobación de resultados por parte del profesor. El docente utiliza la calculadora para planificar sus ejercicios y problemas de tal manera que en el aula no resulte necesario su uso debido a que todas las operaciones se pueden realizar sin el apoyo de tecnología. Esto podría interpretarse como una manera de no sentir la ausencia del dispositivo electrónico en las clases de matemáticas. La *expresión* C3 revela la opinión del profesor acerca del empleo de la calculadora en la resolución de problemas. En ella se pone en evidencia una actitud positiva hacia la utilización de la calculadora en la resolución de problemas. Esta apreciación por parte de los profesores es un paso importante para la incorporación de la calculadora en la enseñanza de las matemáticas. La *expresión* C4 nos pone frente a un profesor novel que podría pensar en formular actividades didácticas en las cuales todos los alumnos podrían interactuar con sus calculadoras. Esta posibilidad de que toda la clase tenga la calculadora abre fuentes de posibles cambios en el diseño de actividades que contemplen formas de evaluación no tradicionales. En ese sentido, expertos como Quesada (2002) sugieren que el trabajo en el aula debe hacerse con calculadoras de una misma marca y de un mismo modelo, ya que en el caso contrario se desvirtúan las actividades propuestas. La *expresión* C5 indica la posibilidad de que el profesor permita emplear las calculadoras en las evaluaciones, es decir, si el profesor evalúa el trabajo matemático del alumno permitiendo que éstos se apoyen en la calculadora, tanto en los exámenes como en otros medios que utilice para evaluar. La *expresión* C6 da cuenta del criterio manejado para que los alumnos utilicen la calculadora. Dicho criterio es que los alumnos conozcan los conceptos y procedimientos matemáticos. Esto significa que el profesor utiliza la calculadora para reforzar aprendizajes más que para iniciarlos. La *expresión*

C7 muestra aspectos que el profesor desearía en cuanto a la calculadora en sus clases. La *expresión* C8 se refiere al reconocimiento práctico que el profesor otorga a las diferentes aproximaciones, en la calculadora, para la resolución de problemas. La *expresión* C9 refiere a que el profesor y el alumno necesitan tiempo de formación para emplear la calculadora gráfica en el aula. En la *expresión* C10 el profesor menciona el tiempo como un obstáculo para utilizar la CG en el aula.

Según lo mostrado en la parrilla (tabla 5.4), respecto de la calculadora, tenemos que los tres profesores entrevistados coincidieron en las expresiones C1, C4, C9 y C10. Esto significa que los profesores noveles consideraron que el empleo de la CG en el aula requiere tiempo de formación tanto para el profesor como para el alumno. Además manifestaron que el tiempo es un obstáculo importante para utilizar dicho recurso en las clases de matemáticas. Los profesores estuvieron de acuerdo en que todos sus alumnos a lo sumo emplean las calculadoras elementales. Algunas de las respuestas dadas por los profesores noveles fueron las siguientes:

Profesor novel 1 (N1)

Pregunta. ¿Tu calculadora es gráfica?

Respuesta. No, calculadora elemental, de hacer cuentas cuando... para hacerlo más rápido o para comprobar que una solución sea buena...

Pregunta. O sea que ¿usualmente trabajas con recursos tradicionales?

Respuesta. Sí, en matemáticas se trabaja sobre todo con la libreta, el cuaderno y pocos recursos más... Que luego hay más recursos, pues muy bien, se pueden utilizar... calculadoras, ordenadores... pero siempre en función de lo que permita el tiempo...

Pregunta. Recomendarías la calculadora ¿a partir de cual curso de secundaria?

Respuesta. A partir de tercero de ESO... siempre sabiendo que con la calculadora se pueden solucionar muchos problemas pero el alumno tiene que saber hacerlos de alguna manera...

Profesor novel 2 (N2):

Pregunta. ¿Usas recursos para motivar? Por ejemplo láminas, tecnología,...

Respuesta. ... Ojalá pudiera decir, bien, hoy vamos a trabajar con la calculadora gráfica... porque es que no daría tiempo...

Pregunta. ¿Permites que los alumnos usen calculadoras?

Respuesta. Si, en algunos casos es conveniente. ... en primero de bachillerato desde luego. Inclusive la dejo en los exámenes... Para usar la calculadora, lo importante es que sepan hacer las cosas primero y que después la calculadora les agilice los cálculos...

Pregunta. ¿Tú ves la CG para los alumnos o para el profesor solamente con el view screen?

Respuesta. Yo la veo para todos los alumnos...

Pregunta. Si se usa tecnología ¿el profesor requiere más tiempo?

Respuesta. En la clase, requiere más tiempo de lo usual... El profesor requiere cierta preparación...

Profesor novel 3 (N3)

Pregunta. ¿Qué materiales didácticos sirven de apoyo a tus clases?

Respuesta. Pues... la calculadora normal y corriente, ...

Pregunta. La calculadora ¿la usan los alumnos o tú?

Respuesta. La usan los alumnos, pero para operaciones sencillas...

De las respuestas relativas a la calculadora se deduce que los profesores, aunque no tienen las posibilidades reales de su utilización en el aula, ponen en evidencia cierta competencia didáctica cuando señalan el para qué, el cuándo y el cómo de su posible utilización en las clases de matemáticas. También dejan ver sus temores, propios de su incipiente experiencia práctica con la calculadora en clase para la enseñanza de conceptos y procedimientos matemáticos. Tal es el caso que sólo afirman con propiedad el uso de la CG como asistente matemático más que como recurso didáctico para la enseñanza.

5.5.3. Aspectos relativos al álgebra lineal

Con este epígrafe queremos denotar los aspectos referidos a la enseñanza del álgebra lineal y a la resolución de problemas algebraicos. Las expresiones relativas a esta componente fueron:

-Le gustaría tratar temas algebraicos con calculadora (A1),

-Ve positivo el uso de diferentes estrategias de resolución de problemas (A2),

-Enseña primero conceptos y procedimientos y finalmente problemas (A3),

-Reconoce los razonamientos de los alumnos antes que los resultados (A4).

La *expresión* A1 se refiere a los deseos que manifiesta el profesor novel de utilizar la calculadora para tratar temas algebraicos. Esto revela que el profesor identificado con esta expresión utilizaría la calculadora más allá de asistente matemático, por ejemplo para la enseñanza de conceptos y procedimientos algebraicos. La *expresión* A2 evidencia la amplitud que tiene el profesor por considerar aceptables diferentes estrategias de resolución de problemas. Esto abre caminos hacia la independencia intelectual de los alumnos sobre todo si se comparten en clases las diferentes maneras de abordaje de los problemas. La *expresión* A3 dice del posible trato de manera tradicional a las aplicaciones algebraicas, es decir una base teórica inicial y luego algunas aplicaciones. Por ejemplo se podría descartar llegar a los conceptos algebraicos a través de problemas. La *expresión* A4 muestra que el profesor tiene interés en los procesos algebraicos, lo que podría estar vinculado a la detección de errores y dificultades en dichos procesos acompañado de una evaluación formativa que contribuiría a la consolidación del conocimiento algebraico en los alumnos.

Como dijimos al inicio de este análisis, todas las expresiones emergieron de los discursos de los profesores noveles entrevistados. En el caso del álgebra sólo coincidieron en la expresión A4, lo cual podría significarnos que los profesores noveles prefieren los razonamientos de los alumnos antes que los resultados, en la resolución de problemas algebraicos. Veamos algunas de sus respuestas en la entrevista:

Profesor novel 1 (N1)

Pregunta. ¿Cuándo tus alumnos resuelven un problema y dicen por ejemplo, x=5, ¿ellos llegan hasta ahí o interpretan ese 5?

Respuesta. No me vale para nada x=5... la interpretación de la solución siempre es ... es a veces más interesante que el mecanismo de solución.

Profesor novel 2 (N2)

Pregunta. ¿Cuándo estás revisando una respuesta ¿qué miras más, el resultado o el procedimiento?

Respuesta. El resultado casi ni lo miro. Miro lo que han hecho, cómo lo han hecho, es decir, el procedimiento. ¿Qué es lo que yo creo que tienen claro con eso, qué es lo que no tienen claro... Los resultados... en operaciones nos equivocamos todos. Veo los planteamientos. Cómo lo han hecho.

Profesor novel 3 (N3)

Pregunta. ¿Cuándo tu vas a corregir una pregunta ¿qué ves tú, de todo lo que hizo el alumno? ¿a qué le das más peso y a qué menos peso?

Respuesta. Primero que lo tenga claro ¿de dónde ha salido el resultado? Luego el orden que va llevando, la claridad de las ideas, los errores... la interpretación de la solución...

Se podría deducir de las expresiones anteriores que los tres profesores entrevistados se caracterizan por la disposición a los cambios, es decir, manifestaron apertura hacia la innovación en cuanto al contenido algebraico. Dan prioridad al razonamiento matemático y lo asumen atendiendo la lógica del conocimiento matemático mismo, sin caer en formatos predeterminados de resolución de los problemas. Podríamos afirmar que se evidencia que los profesores poseen competencia didáctica en la enseñanza de las matemáticas escolares.

5.5.4. Aspectos relativos a las actividades didácticas

En relación a esta componente, de las expresiones de los profesores estructuramos los ítems siguientes:

-Toma en cuenta los errores (D1);

-Trabaja con diversas representaciones (D2);

-Agrupa los alumnos para el trabajo en clase (D3);

-Se apoya en un libro de texto para planificar las clases (D4);

-Planifica los recursos a utilizar en la clase (D5);

-Evalúa con calculadora (D6);

-Utiliza ejercicios o problemas para motivar a los alumnos (D7);

-Sus alumnos exponen las resoluciones a la clase (D8).

Las *expresiones* D1 y D2 dan cuenta si el profesor novel acude a los organizadores del currículo errores y dificultades y representaciones. Esto ayuda a identificar en el profesor la posible consideración de otros organizadores, diferentes a los que integran principalmente el programa MCA. La *expresión* D3 está referida a la forma como el profesor organiza la clase, específicamente si subdivide los alumnos en grupos para el trabajo de aula. La *expresión* D4 alude a un punto clave como es la planificación de las actividades didácticas, para lo cual se apoyan en libros de texto. La *expresión* D5 indica si el profesor planifica los recursos a utilizar en clase, es decir, si previamente se seleccionan los recursos acordes con el tipo de actividades a desarrollar en las clases. La *expresión* D6 se refiere a un aspecto importante en la forma o manera de evaluar como lo es la evaluación de los alumnos cuando se les permite el uso de la calculadora. La *expresión* D7 señala una forma de motivar a los alumnos como es la utilización de ejercicios o problemas. Por último la *expresión* D8 sugiere si los alumnos exponen las resoluciones de los problemas a la clase. Este aspecto es de suma importancia puesto que todos los participantes podrían observar, cuestionar y reflexionar acerca de las estrategias y maneras de abordaje de sus compañeros.

Los profesores entrevistados coincidieron en la expresión D4, lo cual indica que para efectos de la planificación de actividades didácticas, los profesores noveles se apoyan en los libros de texto. Estos podrían complementar las fuentes a las cuales acude el profesor para estructurar sus actividades o unidades didácticas.

5.5.5. Opiniones y sugerencias relacionadas con el curso-taller

En este epígrafe tomamos los ítems relacionados con la importancia subjetiva que cada entrevistado otorgó al desarrollo del programa MCA. Consideramos los siguientes:

-Conservar, en el curso, la práctica y la participación (O1);

-Ampliar el número de temas, de matemáticas, a incluir en el curso (O2);

-Los contenidos del curso-taller tienen utilidad práctica (O3);

-Utilizaría en sus clases problemas de los manejadas en el curso (O4);

-Se debe seguir formando a los futuros profesores en nuevas tecnologías (O5).

La *opinión* O1 se refiere a la satisfacción del profesor novel con la estrategia práctica y participativa utilizada en el curso-taller. La *opinión* O2 recomienda ampliar el número de temas de matemáticas en el curso, por ejemplo temas de análisis o geometría. La *opinión* O3 recoge el reconocimiento del profesor novel de la utilidad práctica de los contenidos del curso. Con esto se refiere a que tales contenidos son aplicables en el trabajo práctico del profesor en la enseñanza de las matemáticas en secundaria. La *opinión* O4 expresa una posibilidad de utilización de las situaciones problema manejadas en el curso, en las clases con los chicos de secundaria. La *opinión* O5 prácticamente es un llamado a la continuidad en la formación de los futuros profesores de matemáticas en las nuevas tecnologías.

En cuanto a las opiniones de los profesores noveles todos coincidieron en que se debe seguir formando a los futuros profesores en el empleo de las nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas. Respecto a las otras opiniones sobre el curso-taller, en las entrevistas manifestaron ciertas apreciaciones tales como:

Profesor novel 1 (N1):

Pregunta. ¿Qué me dices acerca del curso que hicimos en marzo de 2001?. ¿has aplicado algo de ese curso? ¿te ha servido de algo?...

Respuesta. Hombre, los problemas que planteamos allí, siempre se pueden volver a plantear a los chavales y como se ... podrían resolver. En ese curso... vimos que había problemas que se podían hacer de diferente forma e intentas tratar eso en clase ¿no? pero como no hemos tenido ni hemos pensado en la utilización de calculadoras en concreto pues no lo he trabajado en calculadoras... bueno en aquel curso también trabajamos problemas y trabajamos otras cosas que también eran interesantes...

Pregunta. Pero, si se diesen las condiciones...que tu llegues a clase y encuentres que tienes calculadoras...¿aplicarías algunos elementos de ese curso?

Respuesta. Sí, sí, si el curso se interesase por la utilización de esa técnica y los chavales estuvieran motivados y hubiese tiempo y se diesen algunas circunstancias, pues si se podría utilizar, pero siempre pensando que vienen muchas cosas detrás que incluso... que se deberían dar y no se dan... y claro es más complicado; que luego, por ejemplo, te queda la parte de estadística que no la has visto y te remuerde un poco la conciencia de decir bueno, pues, ...no hemos llegado a eso...

Pregunta. Algunas sugerencias para mejorar ese curso que se dio en el departamento de didáctica de la matemática

Respuesta. El curso... está bastante bien, bastante completo y... se trabajaba muchos problemillas y se veía como se resolvía con la calculadora, eso es interesante; ver como se resuelven distintos problemas, con distintas técnicas en la misma calculadora.

Profesor novel 2 (N2)

Pregunta. De los contenidos del curso "calculadoras gráficas en secundaria", dictado en la UGR, ¿has utilizado algo de ese curso en tu trabajo?

Respuesta. Más que usado, he tenido cosas en contra, por ejemplo, siempre tengo en cuenta si fuera posible utilizar un proceso de modelización para una cosa, lo que pasa es que hasta ahora no los he utilizado. Pero si que es verdad que he pensado mucho. Por ejemplo ahora voy a darles matrices... esa clase si me quedó grabada... lo de los mensajes... es muy motivador. Necesitas tiempo... ese es el problema, pero...

Pregunta. ¿Tienes alguna sugerencia para ese curso, si lo volvemos a dictar?

Respuesta. No se en que se podría mejorar más. No caigo yo ahora. Porque fue muy participativo y eso me gustó, eso no lo podéis dejar, eso de la participación fue muy buena. El hecho que estuviéramos en el aula, de que hiciéramos trabajos con la calculadora, con el ordenador. No solamente se dé una charla de cómo es esta instrucción, porque para eso estaban los manuales que ya nos diste. Eso si me gustó. Es de los cursos que más he aprovechado, precisamente por eso. Que no es el típico curso de conferencia, que aburre y al final casi no aprendes nada. Cuando tu trabajas una cosa es cuando realmente la asimilas.

Pregunta. Recuerda que ustedes hacían propuestas sobre cómo enseñarían eso a los alumnos ¿recuerdas? Pero ahora te pregunto eso mismo para los alumnos y tu dices pero es que los alumnos se portan... hay una diferencia... ¿cómo ves eso?

Respuesta. Es la típica diferencia entre teoría y práctica. A veces dices si, si es posible hacerlo, claro que es posible, pero dices ¡dios mío! Que no voy a dar nada, no llego al temario. Que no cumplo... (risas) Aunque el temario casi nadie lo cumple, pero eso, que les voy a dar, sólo 5 temas... eso no puede ser. A mí me gustaría tener más horas. Pero con los alumnos, porque por mí, yo si tengo tiempo...

Profesor novel 3 (N3):

Pregunta. De los contenidos del curso "Calculadoras gráficas en secundaria", dictado en la UGR, ¿has utilizado algo de ese curso en tu trabajo?

Respuesta. Pues, ... realmente no.

Pregunta. ¿Qué aspectos aplicarías?.

Respuesta. Yo pienso que lo de la tecnología. Para eso habrá que tener una calculadora, creo yo. Por ejemplo yo con el visualizador de pantalla. Pero si la tienen todos los alumnos mucho mejor ¿no? Pero eso ya sería tardar más tiempo y como el temario te va asfixiando... Si te pones a otra hora con calculadora u ordenador, entonces ya ... cuándo doy yo lo que tengo que dar.

Pregunta. ¿Tienes alguna sugerencia para ese curso, si lo volvemos a dictar?

Respuesta. Incluir más temas de matemáticas. Tratar de abarcar el mayor número de temas de los temarios de secundaria.

Al analizar las opiniones anteriores, emitidas durantes las respectivas entrevistas a los profesores noveles, encontramos que hay una moderada opinión favorable al programa MCA, tanto en sus contenidos como en su metodología de desarrollo. Por otra parte se deslizan opiniones favorables hacia nuevas aplicaciones del referido curso-taller tanto con los mismos contenidos algebraicos como agregando nuevos temas de las matemáticas escolares. Esto puede ser una sugerencia importante a recoger para la evaluación del seguimiento del programa MCA en el tiempo, a través de los exparticipantes en ejercicio de la enseñanza de las matemáticas en secundaria.

5.5.6. Balance de las entrevistas sobre los efectos del programa

Con el propósito de profundizar en el análisis de las entrevistas estructuramos la red (ver figura 5.4) donde se visualizan las relaciones existentes entre los diferentes aspectos que ponen en evidencia los efectos del programa MCA. En la figura 5.4 se presentan las relaciones entre los aspectos que emergieron del análisis de las entrevistas. En dicha figura centramos la atención en las componentes del programa MCA y sus posibles efectos en los profesores entrevistados. Del discurso se desprendió que, independientemente que en las instituciones donde desempeñan sus funciones como profesores de matemáticas no se cuente con las CG, ni se contemple oficialmente (acuerdos de seminarios) la enseñanza con modelización, los profesores pusieron de manifiesto su deseo de realizar una enseñanza con CG, reconociendo la utilidad de la misma y las aportaciones didácticas de la modelización en la planificación de actividades de enseñanza y en consecuencia en sus gestiones de clase.

En la figura 5.4 podemos observar que entre los posibles efectos del programa está su contribución a la planificación de los recursos a usar en la enseñanza de las matemáticas, lo cual lleva consigo la identificación de la potencia didáctica de los organizadores modelización y CG. Estos son vistos como favorecedores de la resolución de problemas asociados con la enseñanza del álgebra y la reflexión sobre la incorporación de problemas abiertos y sus dificultades en la enseñanza del álgebra. Otro aspecto consecuente es la reflexión sobre nuevas exigencias a los profesores que implica la utilización de la modelización y la CG. Estas exigencias, entre otras, obligan a los profesores a la búsqueda de formas de evaluación no convencionales asociadas con la integración de la modelización y la CG

Tabla 5.4. *Parrilla utilizada en el análisis de las entrevistas*

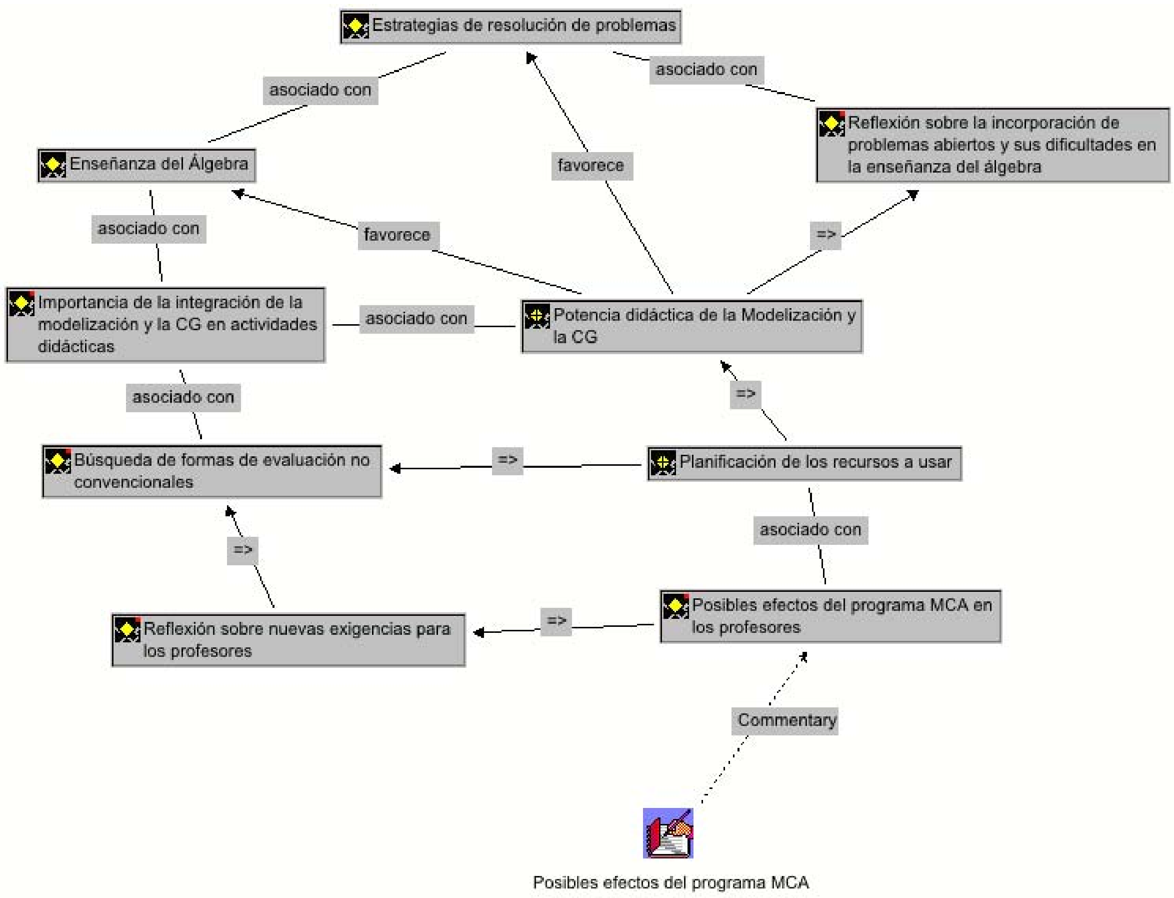
Componentes del programa MCA	N1	N2	N3
Modelización Matemática			
M1. Reconoce campos de situaciones problema (comercial, industrial, etc)	X	X	X
M2. Considera los problemas del mundo real como motivadores del aprendizaje	X	X	
M3. Considera importante pasar del lenguaje cotidiano al algebraico	X		
M4. Da oportunidad a la experimentación en la resolución de problemas	X		
M5. Encuentra dificultades para utilizar problemas abiertos en clase, por falta de tiempo y/o rechazo de los alumnos	X	X	X
M6. Propone problemas en los exámenes, pero parecidos a los trabajados en clase	X	X	X
M7. Plantea problemas a partir de ecuaciones dadas	X		
Calculadora			
C1. Sus alumnos sólo emplean las calculadoras elementales	X	X	X
C2. Emplea la calculadora, fundamentalmente, para comprobar resultados	X		
C3. Ve bien que se resuelvan problemas utilizando la calculadora u otra tecnología electrónica			X
C4. Está de acuerdo en que todos los alumnos tengan calculadora en la clase	X	X	X
C5. Permite el empleo de calculadora en las evaluaciones		X	X
C6. Sugiere utilizar la calculadora, pero después del conocimiento de los conceptos y procedimientos	X	X	
C7. Le gustaría utilizar una calculadora gráfica (CG) en sus clases		X	X
C8. El empleo de diferentes formas de resolver un problema con la calculadora gráfica tiene utilidad práctica en la enseñanza	X		
C9. El empleo de la calculadora gráfica en el aula requiere tiempo de formación tanto para el profesor como para el alumno	X	X	X
C10. El tiempo es un obstáculo importante para utilizar la CG en el aula	X	X	X
Álgebra			
A1. Le gustaría tratar temas algebraicos con calculadora			X
A2. Ve positivo el uso de diferentes estrategias de resolución de problemas	X	X	
A3. Enseña primero conceptos y procedimientos y finalmente problemas	X		
A4. Reconoce los razonamientos de los alumnos antes que los resultados	X	X	X

Tabla 5.4. *Parrilla utilizada en el análisis de las entrevistas*

(Continuación)

Actividades didácticas			
D1. Toma en cuenta los errores			X
D2. Trabaja con diversas representaciones	X		X
D3. Agrupa los alumnos para el trabajo en clase	X		
D4. Se apoya en un libro de texto para planificar las clases	X	X	X
D5. Planifica los recursos a utilizar en la clase	X		X
D6. Evalúa con calculadora		X	X
D7. Utiliza ejercicios o problemas para motivar a los alumnos	X		
D8. Sus alumnos exponen las resoluciones a la clase	X		X
Opiniones y sugerencias relacionadas con el curso-taller			
O1. Conservar, en el curso, la práctica y la participación		X	
O2. Ampliar el número de temas, de matemáticas, a incluir en el curso			X
O3. Los contenidos del curso-taller tienen utilidad práctica	X		
O4. Utilizaría en sus clases problemas de los manejadas en el curso		X	
O5. Se debe seguir formando a los futuros profesores en nuevas tecnologías	X	X	X

Figura 5.4. *Relaciones entre los aspectos emergentes de las entrevistas*



5.6. Logros cognitivos-didácticos subjetivos

El logro de los objetivos cognitivos-didácticos también se constató por medio de las apreciaciones subjetivas de los participantes. Tales apreciaciones fueron recogidas en las hojas de notas diarias y en la hoja de evaluación final del curso-taller, ya presentados en los Apartados 3.8.2 y 3.8.5. En los análisis de las hojas de notas diarias (ver apartado 5.1) se puede apreciar el progreso de los profesores en formación, sesión por sesión, en el reconocimiento de aprendizajes o aprovechamientos de los contenidos del programa MCA durante su participación en el curso-taller.

Respecto de la modelización los participantes reconocieron su importancia para motivar a los alumnos y para estimular la comprensión, haciendo énfasis en los momentos del proceso de modelización. Por otra parte los futuros profesores reconocieron la importancia de utilizar otros organizadores del currículo en el diseño de actividades didácticas. Consideraron que la planificación de actividades didácticas conlleva una autorreflexión del profesor que está referida tanto a la motivación de los alumnos como a su comprensión. Ese binomio motivación-comprensión podría conducir a desarrollar la autonomía intelectual de los alumnos y a vislumbrar en ellos la utilidad de las matemáticas para resolver problemas de su entorno físico y social. Reconocieron en la modelización su valor didáctico en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, lo cual contribuyó a revelar los logros de los objetivos cognitivos del programa. Esto significa que hubo congruencia entre lo percibido por los profesores en formación y lo puesto de manifiesto en sus producciones durante el curso-taller.

Respecto al empleo de la calculadora gráfica, en la planificación de actividades didácticas, los profesores en formación pusieron en evidencia las competencias didácticas al decidir, dónde, cuándo y cómo utilizar la CG. Los participantes asumieron que la planificación de actividades didácticas estaba dirigida a favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos, con lo cual la incorporación de la CG contribuiría en tales propósitos. Según los participantes, la CG podría emplearse como asistente matemático para realizar cálculos y comprobar resultados, así como también para explorar y representar los conceptos y procedimientos matemáticos de varias maneras. Algunos de los participantes mencionaron riesgos al emplear la CG por parte de los alumnos, tales como la dependencia absoluta del recurso para realizar cualquier actividad matemática. Esto expresa cierta cautela al hacer uso de la tecnología. En todo caso, lo importante que se extrae de allí es la necesidad de formar al profesor con competencias y criterios en el empleo de los recursos de los cuales dispone.

El álgebra lineal fue vista, por los participantes, como un tópico matemático adecuado para las actividades realizadas en el curso-taller. Los profesores en formación reconocieron complejidad en las actividades con el álgebra lineal debido a que involucra al alumno con conceptos y procedimientos para resolver problemas relacionados con su entorno natural y social.

Los profesores en formación expresaron una alta satisfacción ante los conocimientos didácticos adquiridos a través del programa. Los principales logros reconocidos por los futuros profesores fueron: 1) aprovechamiento didáctico de la modelización, 2) soporte didáctico para emplear eficientemente la CG en la enseñanza y aprendizaje del álgebra y 3) riqueza en la integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas.

Los logros cognitivos-subjetivos también fueron expresados por los profesores en formación cuando respondieron a la hoja de evaluación final del programa. En la tabla 5.5.1 podemos apreciar el resumen de respuestas dadas a la hoja de evaluación referente a los contenidos del curso-taller. Los números en las casillas indican la frecuencia de respuestas respecto a las opciones de la escala de valoración. En el cuadro sombreamos las casillas con mayor frecuencia.

De la tabla 5.5.1 inferimos que la evaluación de los participantes fue buena respecto a los contenidos del curso-taller. Los aprendizajes reconocidos nos confirman el logro de los tres objetivos cognitivos del programa MCA. Resalta el hecho que los profesores en formación reconocieron el álgebra como un contexto matemático muy bueno para aplicar la modelización en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Tabla 5.5.1 *Resultados de la evaluación de los contenidos del curso por parte de los participantes*

Í t e m s	Muy Deficiente	Deficiente	Suficiente	Bueno	Muy Bueno
Claridad en los enunciados de las situaciones a modelizar			2	6	2
Aplicación de los momentos del proceso de modelización			2	6	2
Uso del álgebra lineal para modelizar situaciones del "mundo real"				2	8
Cumplimiento de los objetivos del curso-taller			2	6	2
Aprendizaje para el desempeño profesional		1	2	5	2
Utilización de la CG para la enseñanza del álgebra lineal		1	2	5	2
Adquisición de competencias didácticas para la planificación de la enseñanza			1	6	3

5.7. Balance general de la evaluación de la dimensión cognitiva-subjetiva del programa

La evaluación de la dimensión cognitiva-subjetiva corroboró el logro de los tres objetivos cognitivos del programa MCA. Desde el inicio del curso, los profesores en formación reconocieron la utilidad de la modelización en el planteamiento de situaciones problema del mundo real, para mejorar la comprensión y aplicación de las matemáticas y para motivar las clases. Puede notarse que son utilidades muy generales pero que revelan, en los participantes, una apertura hacia su empleo en la enseñanza de las matemáticas. Al final del curso observamos que los participantes mencionan la modelización como útil para motivar a los alumnos, para visualizar la utilidad de las matemáticas, para mejorar el proceso de abstracción, el razonamiento y la autonomía intelectual de los alumnos. En la última sesión también recomendaron la modelización para promover el trabajo en grupo y para fomentar discusiones acerca de situaciones problema del entorno del alumno. Dichas discusiones podrían fomentar el desarrollo de habilidades críticas, la construcción de argumentos matemáticos y la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas.

Las evidencias subjetivas se fueron manifestando sesión por sesión, éstas se pueden apreciar en las hojas de notas diarias de cada una de las sesiones del curso. Por otra parte, la hoja de evaluación final del curso completó la evaluación de la dimensión cognitiva-subjetiva. En ésta los participantes valoraron como muy buena la utilización del álgebra lineal para modelizar situaciones del "mundo real". De la misma manera los demás ítems fueron valorados como buenos, donde destacan el aprendizaje para el desempeño profesional, empleo de la CG para la enseñanza del álgebra lineal y la adquisición de competencias didácticas para la planificación de la enseñanza de las matemáticas.

En términos generales podemos afirmar que en el nivel subjetivo el reconocimiento de los profesores en formación, respecto al aprovechamiento de los contenidos del programa MCA, resulta una evaluación satisfactoria de los conocimientos didácticos adquiridos a través del programa. La riqueza de las opiniones permitió obtener información para evaluar los logros percibidos por los futuros profesores. Dichos logros cognitivos subjetivos se resumen en:

-Mayores niveles de aprovechamiento didáctico de la modelización.

-Identificación de aspectos que soportan el empleo didáctico de la CG en la resolución de problemas algebraicos.

-Riqueza en la integración de la modelización y la CG en el diseño de actividades didácticas de contenido algebraico.

-Identificación de alternativas de participación efectiva en el aula.

-Incremento de la reflexión sobre aspectos relativos a la planificación didáctica de las actividades.

-Reconocimiento del potencial motivador de los alumnos que tiene el empleo de la modelización y la CG en los procesos de enseñanza.

-La riqueza didáctica que ofrecen las propuestas de problemas del entorno del alumno en el proceso de aprendizaje de las matemáticas y comprensión de dichas situaciones.

-La potencia didáctica del empleo simultáneo de la representación gráfica y simbólica.

-La importancia de la experimentación como fuente de observación de propiedades y el establecimiento de conjeturas.

-Dominio técnico de aplicaciones de la CG en el diseño de actividades didácticas.

Del análisis realizado a las opiniones, de los futuros profesores de matemáticas, concluimos que su *percepción de los aprendizajes logrados durante las sesiones del curso es satisfactoria* y acorde con nuestras expectativas explícitas tanto en los objetivos del curso-taller, como en el programa mismo. Se detectaron conexiones muy importantes entre el mundo real y el mundo matemático y en este último las conexiones entre los diferentes conceptos y procedimientos algebraicos involucrados en los razonamientos. Asimismo los profesores reconocieron dominios temáticos del programa en sí y otros relacionados con las competencias didácticas.

En general, la evaluación de las opiniones dio cuenta de la buena marcha del proceso seguido durante el desarrollo del programa. En definitiva la evaluación de la dimensión cognitiva-subjetiva resultó satisfactoria, lo cual corrobora los resultados de la dimensión cognitiva-objetiva y en consecuencia el logro de los objetivos cognitivos del programa MCA. Todo ello a pesar de las carencias o limitaciones del programa MCA manifiestas por los participantes durante su puesta en práctica, en la hoja de evaluación final del curso. La limitación o debilidad, más significativa, expresada fue la insuficiencia del tiempo de interacción de los participantes con la CG. Esta apreciación es producto, posiblemente, de tratar algunas actividades con mayor detenimiento en detrimento de otras o consecuencia de la falta de mayor pericia en el manejo de la CG en algunos participantes. Estas limitaciones concuerdan con lo identificado en el Apartado 4.10.2. Todo ello apunta a la revisión de aspectos tales como el tiempo dedicado a cada situación problema y sus aportes más significativos para orientar al docente en la planificación de actividades didácticas; además considerar las dificultades de los participantes en el manejo de la CG para procurar trazar estrategias de atención a las diferencias individuales. Todo esto con el propósito de corregir dichas debilidades en futuras ediciones y obtener mayores niveles de logro como consecuencia del programa MCA.

CAPÍTULO

VI

Conclusiones

6.1. Introducción

En este trabajo se ha presentado el diseño, implementación y evaluación de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Dicho programa lo hemos denominado Modelización y Calculadora gráfica en la enseñanza del Álgebra lineal, que identificamos por sus siglas MCA. Los componentes que estructuraron el programa MCA fueron los organizadores curriculares modelización matemática, calculadora gráfica y estructura conceptual del álgebra lineal escolar, junto con la integración didáctica de estos organizadores del currículo mediante el diseño de actividades didácticas.

Nuestro estudio estuvo orientado hacia la evaluación del programa MCA, para lo cual hemos contemplado tanto la complejidad de sus componentes como su contexto de aplicación. Se entiende que la evaluación de la intervención tiene un papel relevante en los procesos de formación del profesorado, de manera que los agentes involucrados puedan recabar información útil para tomar decisiones dirigidas a la mejora de la calidad del programa en estudio. Nos planteamos un trabajo de investigación orientado a profundizar en el conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas, puesto en práctica como resultado de las competencias desarrolladas por el programa MCA.

A tal efecto propusimos en el Apartado 1.6 dar respuesta a las siguientes cuestiones de carácter cognitivo, relativas al aprendizaje realizado por los profesores en formación asistentes al curso:

¿Cuál es el nivel de aplicación del proceso de modelización matemática?

¿Cuáles son las competencias alcanzadas por los participantes referidas a la calculadora gráfica?

¿De qué manera organizan el contenido algebraico para el diseño de actividades didácticas, acudiendo a la modelización y a la calculadora gráfica?

¿Qué papel desempeña la calculadora gráfica como recurso didáctico en el diseño de las actividades previstas?

¿Cómo los profesores en formación organizan la estructura conceptual de un tópico algebraico cuando se proponen elaborar actividades didácticas sobre ese contenido?

¿Qué tipos de situaciones problema encuentran los profesores en formación para dotar de significado a los contenidos algebraicos?

¿Cómo planifican u organizan el trabajo escolar para sus potenciales alumnos?

¿Cómo interrelacionan la modelización y la calculadora gráfica con los otros organizadores del currículo?

Resumiendo las cuestiones anteriores, y según la noción de competencia presentada en el Apartado 2.1, ¿Cuáles son las competencias didácticas (conocimientos para la planificación de la enseñanza) puestas en práctica, por los profesores en formación, cuando diseñan actividades de enseñanza para secundaria de contenido algebraico?

Asimismo, también en el Apartado 1.6, formulamos las preguntas siguientes de carácter afectivo y actitudinal:

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia la utilización de la modelización en la enseñanza del álgebra?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el uso de la calculadora en la enseñanza del álgebra?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el planteamiento y resolución de problemas algebraicos en la enseñanza de las matemáticas?

¿Cuál es la actitud de los profesores en formación hacia el diseño y elaboración de unidades didácticas en la enseñanza del álgebra?

Vinculados con las interrogantes anteriores planteamos en el Apartado 1.7. los siguientes objetivos generales y específicos.

Objetivos generales de la investigación:

1. Diseñar, implementar y evaluar el programa de formación propuesto (programa MCA) que integra, a través del álgebra lineal, el uso de la calculadora gráfica y la modelización en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria
2. Analizar las competencias didácticas de los profesores en formación en el diseño de actividades de enseñanza de contenido algebraico, en el marco del programa MCA.
3. Analizar las actitudes de los profesores de matemáticas en formación hacia el uso didáctico de la modelización y la calculadora gráfica en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con el álgebra lineal.

Objetivos específicos de la investigación:

1. Diseñar un programa que integre el proceso de modelización y la calculadora gráfica en la enseñanza del álgebra lineal.
2. Identificar o caracterizar las competencias, logradas por los profesores en formación, respecto a la calculadora gráfica.
3. Analizar los niveles de aplicación del proceso de modelización matemática.
4. Analizar la estructuración del contenido algebraico utilizado por los participantes, en el diseño de unidades didácticas, acudiendo a la modelización y la calculadora gráfica.
5. Establecer la validez y pertinencia del diseño del programa MCA.
6. Analizar la estrategia de desarrollo del programa MCA.
7. Analizar los resultados del programa MCA.
8. Analizar las actitudes de los profesores en formación hacia las componentes del programa MCA

En lo que sigue presentamos, en primer lugar y teniendo en cuenta los objetivos generales y específicos del estudio, las conclusiones relacionadas con el diseño, implementación y evaluación del programa MCA, las implicaciones de su aplicación en el ámbito de las competencias didácticas y las actitudes de los participantes. En segundo lugar presentamos algunas recomendaciones para ediciones futuras del programa MCA y, finalmente, indicamos algunas implicaciones y limitaciones del estudio.

6.2. Diseño, implementación y evaluación del programa MCA.

En lo concerniente a la evaluación del programa MCA, ésta aportó información para mejorar su diseño y sus contenidos, así como para tomar decisiones sobre sus futuras aplicaciones. Las dimensiones consideradas para la evaluación del diseño fueron su calidad, pertinencia y viabilidad, según se puso de manifiesto en el Apartado 4.2. de esta memoria. También se tuvo en cuenta el funcionamiento operativo y logístico en los Apartados 4.3 y 4.4. El desarrollo de la dimensión cognitivo objetiva del programa se evaluó mediante el análisis de las producciones de los participantes en diferentes momentos, según se recoge en los Apartados 4.5, 4.6, 4.7, y 4.8, donde se estudian los resultados correspondientes.

Como balance final de la evaluación del programa MCA destacamos las siguientes ideas.

1. La evaluación de la calidad del diseño del programa MCA puso de manifiesto mediante indicadores de actualidad de contenidos, pertinencia y adecuación, la congruencia entre los objetivos del programa y las necesidades actuales de formación inicial de los profesores de matemáticas de secundaria. Esto se puede apreciar en los Apartados 4.2.1 y 4.2.2, donde se argumenta respecto a la adecuación de los contenidos del programa a las necesidades de formación didáctica de los futuros profesores en la Universidad de Granada. Los objetivos del programa y sus contenidos se estructuraron con base en las observaciones efectuadas en los cursos 1998-1999, 1999-2000 y 2000-2001 así como del sondeo efectuado a profesores que dictan la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, tal como se afirma en el Apartado 4.2.1.

2. En el programa MCA se observa congruencia entre sus metas, dirigidas a dar respuesta a las demandas de los profesores en formación, los medios y los recursos previstos, así como en la temporalización establecida para su implementación. De allí que consideremos la *viabilidad del diseño* como favorable.

3. El programa contempla instrumentos y recursos para recoger información sistemática sobre la relación entre los fines y los medios propuestos para su realización, con el fin de tomar decisiones para su mejora; es decir muestra su evaluabilidad. Este aspecto, junto al contenido del programa y su calidad técnica, conducen a sostener que el *diseño del programa* MCA es satisfactorio.

4. De acuerdo con los resultados de la evaluación del diseño, ya recogidos en el Apartado 4.2 y resumidos en los anteriores puntos 1, 2 y 3, concluimos que la calidad del diseño del programa MCA fue satisfactoria, según se manifiesta en la coherencia de su estructura, pertinencia de contenidos y viabilidad. Sin embargo, es importante destacar que tal como señalamos en el Apartado 4.7, se identificó que en el diseño de las actividades está incluida una situación problema (cuarta sesión, situación problema SP3 relacionada con fabricación de artículos deportivos) cuyas características de apertura no son del todo propicias para lo que se perseguía lograr con la actividad, es decir, para llevar a cabo el proceso de modelización con apoyo de la CG. Esta limitación podría superarse indicando a los participantes la condición orientativa y no limitativa de las preguntas formuladas en cada situación. Esto posiblemente motivaría la búsqueda de nuevas cuestiones al aplicar el proceso de modelización.

5. Respecto a la evaluación del desarrollo del programa en el momento inicial (primera sesión) se logró conocer las condiciones iniciales de los participantes respecto de los objetivos pretendidos en el programa MCA, según se estudió en el Apartado 4.6. Esto podemos sintetizarlo en los siguientes aspectos que describen características generales de los profesores en formación asistentes al curso:

- Poseen una sólida formación disciplinar.
- Están abiertos al empleo de la CG por parte del profesor en el aula de matemáticas, sin embargo mantienen una posición reservada, cuando no contraria, sobre su uso por los alumnos.
- Muestran relativa habilidad para proponer situaciones motivadoras procedentes del entorno del alumno.
- Conservan el esquema de organización y dirección de la clase dominada por el profesor.
- Carecen o tienen escasa iniciativa para proponer actividades de evaluación.

6. La evaluación del momento intermedio (cuarta sesión) está recogida en el Apartado 4.7. De este momento destacan la libertad de uso de la calculadora gráfica por parte de los asistentes al curso, la observación y reconocimiento de sus utilidades, y la utilización en las situaciones problema y en las tareas propuestas. Se reconocen, en términos generales, cinco modalidades de trabajar la resolución de problemas en relación con la calculadora gráfica:

- resolución directamente sin usar CG,
- resolución directamente usando CG,
- resolución de manera aritmética y algebraica asistida por la CG,
- desarrollo detallando los razonamientos sin CG,
- desarrollo detallando los razonamientos con CG.

La modalidad de resolución con la CG es la más empleada por los profesores en formación, siguiéndole la resolución de problemas con y sin CG. En la modalidad de resolución sin CG sólo encontramos un caso. Esta diversidad de opciones parece responder a la posesión de criterios en el uso de la CG, evitando el empleo innecesario de dicho recurso en situaciones que no lo ameriten, lo cual coincide con los planteamientos de Kutzler (2000).

7. La evaluación del momento intermedio del desarrollo del programa puso en evidencia que sus contenidos contribuyen a incrementar competencias didácticas, de forma progresiva, tal como se pretendía al diseñar el

programa. Ese progreso se evidenció en la planificación de una actividad didáctica, donde los profesores en formación asistentes visualizaron la potencialidad didáctica de la CG en la enseñanza del álgebra, y mostraron su capacidad para integrarla con el proceso de modelización. Observamos un progreso paulatino de integración de los tres organizadores del currículo que fundamentan el programa MCA, por medio de las actividades desarrolladas en el curso-taller. Es decir, se evidenció integración progresiva de la modelización y la calculadora gráfica en el diseño de las actividades didácticas para el álgebra lineal en el desarrollo del programa MCA.

8. Se ha puesto de manifiesto al concluir el curso que las situaciones planteadas por los participantes conectan con conceptos y procedimientos algebraicos contemplados en los programas de secundaria en España y resultan adecuadas para los alumnos de esos niveles. Ha resultado evidente un dominio en el manejo técnico y didáctico de la CG, y de las opciones que ésta ofrece, otorgándole importancia tanto para el profesor como para el alumno. La postura ante la enseñanza de las matemáticas coloca al alumno en un papel activo, donde puede experimentar, conjeturar, formular, resolver, explicar, predecir y contrastar con los demás compañeros y con el profesor. Los profesores en formación recurren a diferentes sistemas de representación y a sus interconexiones, lo cual revela la búsqueda de alternativas para facilitar la comprensión en los alumnos. Exploran formas de explicar el álgebra a los alumnos como mecanismos para favorecer la comprensión de la situación problema. Ponen en evidencia la aplicación del proceso de modelización, integrando a la CG en todas sus fases para el diseño de la actividad didáctica de contenido algebraico solicitada, remarcándose el énfasis que mantienen en el uso de preguntas abiertas.

9. Las argumentaciones y juicios expresados por los profesores en formación en la última sesión del curso-taller revelan cambios significativos, principalmente hacia el alumno y hacia el profesor y secundariamente hacia el contenido matemático y la evaluación. Los profesores en formación

propusieron diversas estrategias de evaluación orales y escritas, pero todas ellas dentro de un planteamiento muy convencional.

10. De acuerdo con los resultados de la evaluación de la dimensión cognitiva de la implementación del programa, recogidos en los Apartados 4.5, 4.6, 4.7, y 4.8, y resumidos en los anteriores puntos 5, 6, 7, 8 y 9, concluimos que el balance de la dimensión cognitiva del desarrollo del programa resulta favorable. Sin embargo, en el desarrollo del programa algunos participantes manifestaron falta de tiempo para desarrollar algunas actividades y para la interacción con la CG (ver tabla 4.3.2). Esto podría mejorarse reajustando las actividades atendiendo al tiempo requerido para su desarrollo y al tiempo de interacción con la CG, lo cual podría repercutir en el incremento del número de horas para desarrollar el programa MCA.

11. En el Apartado 4.4 se presentaron los resultados de la evaluación del funcionamiento operativo y logístico del programa mediante la consideración del cumplimiento de la programación junto con la metodología utilizada para evaluar el desarrollo del programa. Este indicador permite recoger información pertinente y suficiente para emitir una evaluación satisfactoria de las actividades propuestas para la fase operativa del programa MCA. El apoyo del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y del grupo de investigación Pensamiento Numérico y Algebraico contribuyó a que se aplicara el programa con todos los insumos requeridos y el cabal cumplimiento del calendario previsto.

12. La adecuación de las actividades realizadas, la secuenciación de las mismas y su realización respecto a la temporalización prevista permiten afirmar que la evaluación de la dimensión operativa o de puesta en práctica del programa resultó satisfactoria.

13. Algunas consecuencias relacionadas con el logro de los objetivos del programa son la atención por parte de los profesores en formación al diseño de actividades didácticas que involucran:

-recordar, utilizar y emplear hechos, conceptos y técnicas matemáticas,
-construir argumentos matemáticos,
-construir y valorar modelos matemáticos,
-desarrollar habilidades de criticidad e independencia intelectual,
-leer, comprender, organizar e interpretar información matemática,
-comunicar ideas matemáticas en forma oral y escrita,
-desarrollar habilidades de trabajo en grupo y
-desarrollar el pensamiento lógico

6.3. Competencias didácticas

El segundo objetivo general de esta investigación se proponía analizar las competencias didácticas de los profesores en formación en el diseño de actividades de enseñanza de contenido algebraico detectadas en el marco del programa MCA. El análisis de dichas competencias se efectúo a partir de las producciones de los participantes tal como se muestra en los Apartados 4.5, 4.6, 4.7 y 4.8. Realizado el estudio, nuestros datos indican que las competencias didácticas puestas de manifiesto por los profesores en formación fueron las siguientes:

1. Un incremento apreciable en la habilidad de los profesores para proponer situaciones problema que promuevan el aprendizaje del álgebra lineal mediante procesos de modelización. Las situaciones problema propuestas por los profesores en formación y la incorporación de los procesos de modelización favorecen el aprendizaje de tópicos algebraicos; esto se pone de manifiesto en los análisis de las producciones de los momentos inicial y final expuestos en los apartados 4.6.1, 4.6.2 y 4.8. En estos apartados se recogen las situaciones propuestas por los profesores en formación las cuales están vinculadas al mundo físico y social del alumno.

2. El dominio de comandos, técnicas y utilidades para utilizar la CG como una hoja de cálculo e introducir las variables y funciones algebraicas, lo cual abre otra forma de abordaje para los problemas algebraicos. Esto último corresponde con otras formas de enseñanza del álgebra a los alumnos de secundaria que ya han sido objeto de estudio por investigadores como Sutherland & Rojano (1993) entre otros.

3. Además de mostrar un dominio técnico de la CG, los profesores en formación, mostraron capacidad para plantear situaciones donde interrelaciona los conceptos algebraicos involucrados en la situación. Asimismo recurrieron a diferentes maneras de representación de los conceptos y razonamientos matemáticos, lo cual abrió expectativas didácticas para introducir la modelización a los alumnos de secundaria. Con ello los alumnos pueden establecer conexiones que, en el momento de abstracción, les ayudaran a construir el modelo y aplicar el proceso de modelización.

4. El criterio manejado por los profesores en formación, al identificar y proponer las situaciones problema a tratar con sus alumnos, puso en evidencia su comprensión de la riqueza del álgebra lineal como contexto matemático para la descripción, explicación y prescripción de los fenómenos vinculados con las mismas.

5. La forma como los profesores en formación abordaron las diferentes situaciones problema indica que los participantes tenían capacidad para utilizar la modelización e integrar la CG en el contexto algebraico adecuado. Asimismo mostraron su conocimiento de diversas estrategias de resolución de problemas que involucran heurísticos simbólicos, gráficos y tabulares; aspectos todos ellos de gran interés didáctico.

6. Respecto su capacidad para diseñar tareas y construir instrumentos de evaluación, los participantes mostraron su preferencia por cuestiones orales y escritas convencionales. También consideraron como elementos para la evaluación las discusiones en clase con sus respectivas argumentaciones

matemáticas. Las evaluaciones escritas incluyen la corrección de cuadernos, actividades en pizarra, exámenes escritos y posters. En conclusión, los profesores en formación no muestran competencia para proponer actividades de evaluación no convencionales.

7. Los participantes muestran competencia para presentar las resoluciones de una manera sistemática y exponen con claridad la secuencia de los procedimientos algebraicos cada vez que se les requiere para ello, siempre dentro del marco del álgebra lineal escolar.

8. Los participantes muestran capacidad para reconocer la complejidad que tiene la enseñanza del álgebra lineal, debido a que involucra al alumno en conceptos y procedimientos dirigidos a plantear y resolver diversos problemas aplicados al mundo físico y social. Los profesores en formación proponen alternativas tales como la participación efectiva en el aula.

9. Los profesores en formación muestran competencia en la formulación de preguntas abiertas que podrían contribuir a desarrollar procesos de modelización, que pudieran favorecer el desarrollo de habilidades de comunicación oral y escrita, así como potenciar la criticidad e independencia de pensamiento de los alumnos. Además de lo antes señalado, conjuntamente con otras facetas, con la formulación de preguntas abiertas, se fortalece la resolución de problemas abiertos que conllevarían la lectura, comprensión y comunicación de ideas matemáticas.

10. Los participantes muestran disposición al uso de la CG en el aula, es decir, dejan abierta la posibilidad de utilización de la CG en las actividades propuestas, dependiendo del interés y decisión de los alumnos y no a una imposición del profesor.

11.Respecto a la CG, los participantes revelaron competencias didácticas tales como el empleo de comandos y/o aplicaciones con criterio didáctico para generar actividades de motivación, utilizar diferentes sistemas de representación para favorecer la comprensión de los conceptos manejados, y proponer evaluaciones no convencionales y el empleo de la CG para agilizar y mantener el interés por el tema a enseñar.

12. Los participantes muestran competencia en el diseño de actividades de contenido algebraico donde propusieron situaciones problema susceptibles de aplicárseles el proceso de modelización, el cual ejecutaron en todos sus momentos. Tales logros fueron graduales como se puede apreciar en los análisis de las producciones de las sesiones.

13. Las actividades sintetizadas en sus producciones o diseño de actividades didácticas nos revelan la competencia didáctica puesta en práctica por los participantes. En consecuencia nos indican el logro de los objetivos cognitivos del programa MCA.

14. Los profesores en formación muestran competencia en la aplicación del proceso de modelización, es decir, consideran el ambiente de aplicación, las condiciones para utilizarla adecuadamente y el nivel de actuación en secundaria en consonancia con los respectivos objetivos de cada curso.

15. Los futuros profesores muestran competencia en el manejo técnico y didáctico de la CG, manifiesto en la identificación de sus posibilidades tutoriales haciendo uso del editor de texto y de la programación. Todo esto siempre relacionando la CG con la motivación de los alumnos, la visualización de diferentes representaciones y sus interconexiones para fomentar la comprensión de conceptos y propiedades algebraicas, así como la resolución de problemas y la interpretación de las soluciones.

16. La competencia de los futuros profesores en el manejo de la CG también lo reflejó el aprovechamiento de la capacidad de ésta para posibilitar el envío de archivos entre sus compañeros. Así como el intercambio de información sobre aplicaciones y usos didácticos de la CG con otros usuarios mediante conexión en la red internet y con el apoyo del enlace Graph Link.

17. El análisis de las distintas producciones puso de manifiesto que los logros fueron notables. Los futuros profesores se interesaron en la búsqueda

de situaciones problema adecuadas para los alumnos con particular énfasis en las referidas al entorno de estos últimos.

18. Se echa en falta el desarrollo de competencias, en los profesores en formación, para proponer actividades de evaluación recurriendo a la modelización con el apoyo de la CG. Esta carencia obedece a limitaciones del programa que pudieran solventarse incorporando en su contenido más actividades que promuevan la reflexión hacia la evaluación escolar no convencional.

19. Los profesores en formación no muestran competencia en el diseño de actividades dirigidas a reforzar los aprendizajes o a superar las dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje del álgebra escolar. Esto sugiere incorporar en el programa aspectos que orienten la atención de los futuros profesores hacia el diseño de este tipo de actividades.

6.4. Actitudes

En el tercer objetivo general de esta investigación (ver Apartado 1.7) se propone analizar las actitudes de los profesores en formación hacia el uso didáctico de la modelización y la CG en la elaboración de unidades didácticas relacionadas con el álgebra lineal. De ahí que el estudio de las actitudes de los profesores en formación hacia los componentes del programa MCA ha sido parte importante del proceso de evaluación del programa.

El análisis de las actitudes, tal como se puede observar en el capítulo V, se realizó tomando en cuenta las opiniones de los participantes expuestas en las hojas de notas diarias, las valoraciones efectuadas en la escala de actitudes aplicada al inicio y al final del curso y, las entrevistas a participantes del curso actualmente en el ejercicio docente. En los apartados 5.2.1, 5.2.3, 5.2.5 se analizan las opiniones de los participantes y en los

Apartados 5.4.4, 5.4.5, 5.4.6, 5.4.7, 5.4.8 y 5.4.9 se analizan los resultados de la escala de actitudes descrita en el Apartado 3.8.1. El análisis de las entrevistas se expone en los Apartados 5.5.1, 5.5.2, 5.5.3, 5.5.4 y 5.5.5. Entre los principales logros y hallazgos referentes a las actitudes tenemos:

1. Los futuros profesores estuvieron de acuerdo en que la inclusión de las actividades de modelización contribuyen a dar significado al aprendizaje y a la enseñanza de las matemáticas tal como lo señala Blum (1991). Esto significa que los profesores en formación percibieron que los alumnos se podrían sentir atraídos hacia el estudio de las matemáticas cuando se recurre a la modelización.

2. Los participantes reflexionaron acerca del papel que ellos tienen en la enseñanza de las matemáticas, fundamentalmente en el sentido que deben contar con conocimientos y competencias didácticas para que los alumnos logren los objetivos de aprendizaje deseados o establecidos en la planificación de las actividades. La competencia didáctica orienta la toma de decisiones en lo concerniente a qué recurso emplear, al cómo y al cuándo recurrir a él en el proceso de enseñanza y aprendizaje. Tal como plantean Botham & Crowe (1997), el profesor que utiliza la modelización en la enseñanza de las matemáticas debe tener conciencia de la naturaleza de la modelización y sus implicaciones para el desarrollo matemático de sus alumnos, es decir, el profesor requiere de una autorreflexión sobre lo que imparte y cómo lo imparte. En términos de Blum (1991) los profesores deben tener conocimientos de lo que exigirán a sus alumnos.

3. Podríamos afirmar que se vislumbra un interés de los participantes en formar a sus alumnos para comprender, evaluar y manejar la utilidad de las matemáticas en situaciones problema fuera del ámbito estrictamente matemático.

4. Como resultado del análisis log-lineal aplicado a la escala de actitudes podemos sostener que no hubo cambios globales significativos de actitud en los sujetos. No obstante, el desarrollo del programa provocó un ligero

cambio hacia actitudes favorables. Todo ello desde el punto de vista global. Este hecho es consistente con investigaciones previas sobre actitudes (Almeqdadi, 1997; McLeod, 1993) que ponen de manifiesto la resistencia al cambio de las actitudes que tienen los sujetos.

5. Si hay diferencias significativas entre los componentes del programa. El componente C_3: resolución de problemas de álgebra lineal tuvo una valoración superior a la media de forma significativa. Por el contrario, el componente C_4: actividades didácticas fue infravalorado por los sujetos.

6. El moderado impacto del programa en las actitudes de los participantes hacia la CG en el aprendizaje del alumno (ver tabla 5.3.8 y 5.3.9) podría indicar que algunos participantes conservan temores a que los alumnos pierdan habilidades algebraicas con papel y lápiz. Esto se podría mejorar ampliando en el programa MCA la reflexión sobre el papel de la calculadora en el aprendizaje del alumno, sus alcances y limitaciones.

7. El test de reacciones extremas de Moses ha puesto de manifiesto que hay sujetos que tuvieron un cambio brusco de actitud hacia algunos de los aspectos considerados. En concreto en la actitud hacia la modelización respecto de la evaluación (C_1D_4) y hacia las actividades didácticas referidas a la evaluación (C_4D_4). Esto quiere decir que los sujetos puede que tuvieran expectativas iniciales elevadas con respecto al uso de la modelización en evaluación y las actividades didácticas en la evaluación. Esto está en consonancia con los hallazgos de Bedoya (2002).

8. El cambio de actitud menos favorable se observó en la actitud hacia las actividades didácticas para la evaluación (ver los Apartados 5.4.7, 5.4.9 y las tablas 5.3.8, 5.3.9 y 5.4.9). Este resultado invita a reflexionar sobre la conceptualización de actividad didáctica como unidad curricular, en el programa MCA, ya que pareciera que los profesores en formación conciben las actividades didácticas ajenas a la evaluación.

9. El análisis estadístico de los sujetos permitió identificar disparidades y coincidencias en las actitudes de subgrupos de sujetos (ver tabla 5.4.9). Las disparidades identificadas en el momento inicial fueron en la actitud hacia las unidades didácticas referidas al contenido matemático (C_4D_3) y en el final fueron hacia las unidades didácticas referidas a la evaluación (C_4D_4). Esta última disparidad nos confirma la necesidad de revisar en el programa MCA las actividades relacionadas con la evaluación de los alumnos. Las actitudes hacia las cuales hubo mayor coincidencia a favor, tanto al inicio como al final, fueron hacia la resolución de problemas algebraicos referidos al alumno (C_3D_1) y a la evaluación (C_3D_4). Esto tiende a confirmar el acierto en la escogencia de la componente álgebra lineal como contexto matemático del programa MCA.

Tomando en cuenta todo lo anteriormente expuesto podríamos afirmar que, en términos generales, el programa MCA contribuyó al desarrollo de competencias didácticas en los profesores en formación, recurriendo al empleo de los organizadores del currículo, la modelización y la calculadora gráfica, en el contexto del álgebra lineal para el diseño de actividades didácticas.

De esta manera se da cumplimiento a los objetivos generales de la investigación, mencionados en el apartado 6.1 de este capítulo, y a los correspondientes objetivos específicos.

Asimismo se confirmaron las conjeturas establecidas en el capítulo III, apartado 3.4, pudiendo concluirse que:

El programa diseñado contribuyó al desarrollo de competencias didácticas en el profesor de matemáticas en formación mediante un trabajo con la calculadora gráfica y los procesos de modelización sobre el álgebra lineal.

El programa generó, en los futuros profesores de matemáticas, cambios de actitudes e interés en la búsqueda de métodos no tradicionales para la enseñanza.

A partir de lo antes señalado este estudio aporta elementos que pueden orientar intervenciones en la formación inicial de profesores de matemáticas, orientadas a la consolidación de competencias didácticas relacionadas con la integración de la modelización y la calculadora gráfica.

6.5. Recomendaciones

Con la premisa que toda experiencia es mejorable, presentamos a continuación algunas recomendaciones derivadas del desarrollo y la evaluación del programa objeto de estudio.

1. Seguir implementando el programa MCA con profesores de matemáticas en formación. De esta manera se podrían encontrar nuevas categorías para describir los efectos o en otro caso llegar a saturaciones que podrían consolidar el programa MCA y en consecuencia incrementar sus posibilidades de incorporación total o parcial en el programa de formación de profesores de matemáticas de la Universidad de Granada.

2. Readecuar la distribución del tiempo entre las actividades teóricas y prácticas, enfatizando siempre la actividad práctica.

3. Mantener la disposición de proveer a los participantes del curso una calculadora gráfica (del mismo modelo) durante todo el tiempo de duración de la aplicación del programa.

4. Incorporar en el programa MCA actividades relacionadas con la dimensión curricular evaluación.

5. Implementar programas similares, al MCA, que incorporen la integración de diferentes organizadores del currículo en el diseño de actividades didácticas.

6. Las coincidencias y disparidades (ver tabla 5.4.9) encontradas en las actitudes de subgrupos de sujetos, en los momentos inicial y final, sugieren una indagación más profunda respecto a las actitudes de los profesores en formación hacia los componentes del programa MCA. Sería recomendable la aplicación de técnicas de análisis que permitan afinar el estudio de las actitudes de los subgrupos de sujetos, para profundizar en el análisis de coincidencias y disparidades actitudinales y determinar su significación.

6.6. Implicaciones

Los resultados de este estudio soportan algunas implicaciones interesantes para los futuros profesores de matemáticas en general y para los programas de formación de profesores en particular. En primer lugar se constató empíricamente el sustento teórico de los organizadores del currículo como plataforma para el análisis del conocimiento didáctico. En segundo lugar las componentes del programa permitieron mejorar sustancialmente las competencias didácticas de los profesores en formación que participan en su implementación. En tercer lugar se puso en práctica la integración de la modelización y la calculadora gráfica en actividades didácticas de contenido algebraico así como la incorporación de otros organizadores del currículo que agregan riqueza al contenido algebraico en cuestión, lo cual fortaleció los criterios didácticos manejados en el programa MCA. Esto significa que las competencias didácticas puestas en práctica por los profesores en formación, como consecuencia de su participación en el programa MCA, se explican a partir de los organizadores del currículo (Rico, 1997b).

6.7. Limitaciones

A continuación mencionamos algunas limitaciones en este estudio:

1. El programa descrito en este estudio está en ciernes, específicamente en su segunda implementación. Por tanto los resultados habrían sido más representativos si el estudio hubiese sido aplicado más extensivamente y con mayor número de implementaciones.

2. Los sujetos de este estudio fueron solamente estudiantes o graduados en ciencias (física o matemáticas) potenciales profesores de matemáticas. Esto podría limitar la generalización a otros colectivos de profesores en formación, tales como graduados en ingeniería o empresariales que también podrían ser potenciales profesores de matemáticas de secundaria en España, según la LOGSE.

3. Aunque las competencias didácticas mejoraron sustancialmente, podríamos haber mejorado la implementación, específicamente en aspectos como la insuficiente interacción con la CG en el aula del curso-taller. Esto significa cuidar de no sobrecargar de actividades algunas sesiones del curso, con lo cual hay que pensar que siempre es conveniente la congruencia entre el tiempo y las actividades programadas, lo cual implicaría un mayor aprovechamiento de la riqueza de las situaciones problema y sus consecuencias didácticas.