DEPARTAMENTO DE DIDACTICA DE LA MATEMATICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO
UN ESTUDIO EN EDUCACION PRIMARIA

Tesis Doctoral que presenta

Alfonso Ortiz Comas

Realizada bajo la dirección de los doctores:

Luis Rico Romero **José Luis González Marí**

GRANADA, 1997

Quiero expresar mi agradecimiento más sincero a todas las personas que han puesto su confianza en mi trabajo y sin cuyos ánimos me hubiese sido más difícil su realización.

En especial mi reconocimiento a los doctores D. Luis Rico Romero y D. José Luis González Marí que sabiamente han sabido dirigir esta investigación respetando mis inquietudes científicas y guiándome con sus sugerencias y aportaciones para conseguir las metas propuestas.

Agradecer a los doctores José Angulo Serrano y María Teresa Rivas Moya por su asesoramiento en el diseño y tratamiento estadístico de los datos del estudio empírico cuantitativo.

A mis compañeros del grupo Pensamiento Numérico por sus críticas constructivas, tan necesarias en toda investigación.

También, agradecer a los profesores de los distintos colegios por ofrecerme toda clase de facilidades para poder realizar este trabajo.

Por último, a los escolares de Educación Primaria a quienes dedico los resultados de esta investigación.

A mis hijas Yolanda y Paula

INDICE

CAPITULO 1

EL PROBLEMA DE INVESTIGACION

1.1.- Introducción

Este trabajo de investigación se ha realizado dentro del Programa de Doctorado "Didáctica de la Matemática", del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada correspondiente al bienio 88-90. El trabajo se sitúa en la línea de investigación **Pensamiento Numérico** que se caracteriza porque "estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas. En concreto la elaboración, codificación y comunicación de sistemas simbólicos, la organización, sistematización y desarrollo de diferentes actividades cognitivas que surgen y encuentran un modo de actuación en el marco de una estructura numérica." (Castro; 1994, pág. 1)

Desde una perspectiva amplia, el marco conceptual en el que se sitúa la línea de investigación Pensamiento Numérico tiene unas bases diversificadas, entre las que destacamos:

"Esta linea de investigación considera como núcleo para su reflexión el campo de las matemáticas que comienza en la aritmética escolar y las nociones básicas del número, avanza por los sistemas numéricos superiores y continúa con el estudio sistemático de las relaciones numéricas." (Segovia; 1995, pág. 12)

Dentro de la linea mencionada uno de los principales tópicos de investigación trabaja sobre Patrones Numéricos y Regularidades Aritméticas. Dentro de este tópico se ha llevado a cabo un estudio sobre series de números naturales, que culminó con la presentación de la Memoria de Tercer Ciclo "Series numéricas y razonamiento inductivo" (Ortiz,1993). Esta Tesis Doctoral es la continuación de dicho trabajo.

Con esta investigación se pretende ampliar nuestro conocimiento sobre los procesos cognitivos del razonamiento inductivo. El objeto inicial y más general de la investigación es la **relación entre los procesos de razonamiento inductivo en los sujetos y la construcción-aprendizaje de la aritmética del número natural.**

La importancia del razonamiento en matemáticas es incuestionable, y, de ahí el interés por desarrollar la capacidad de razonamiento inductivo en el estudiante. Sin embargo, es sorprendente el poco eco del tema en Educación Matemática como objeto de investigación. Realizadas las búsquedas bibliográficas y documentales por los medios habituales, nos hemos encontrado con una escasez de referencias, y, ante la importancia del tema, hemos considerado oportuno realizar esta investigación. Para nosotros ha sido un reto importante ya que no disponíamos de antecedentes; una vez desarrollado el trabajo estamos en el ánimo de una aceptación de futuras replicaciones, modificaciones y ampliaciones del planteamiento teórico, de los resultados empíricos obtenidos y de su interpretación.

Al comienzo nos situamos en una perspectiva generalista para, posteriormente, ir perfilando un marco teórico que nos posibilitara una cuestión central y su posible contrastación empírica. La metodología científica adoptada nos ha permitido establecer conjeturas e hipótesis para indagar en una fase empírica posterior. En el ámbito de la Educación Matemática el método seguido lo denominamos Análisis Didáctico:

> **"Denominamos Análisis Didáctico de un tópico o contenido especifico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a diferentes áreas de investigación en Educación Matemática" (González 1995, pág. 59)**

Previo a la realización del Análisis Didáctico, debido a la generalidad planteada y a la ausencia de datos empíricos, nos hemos visto obligados a realizar indagaciones en diversos campos afines así como un análisis exploratorio en una muestra intencional, los cuales constituyen los antecedentes de esta Tesis Doctoral. Los análisis teóricos, junto a una parte de los resultados del estudio exploratorio, están recogidos y publicados en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993). Otra parte de resultados del estudio exploratorio constituyen el capítulo 3 de esta Tesis Doctoral.

En este capítulo se exponen los antecedentes del trabajo realizado, presentando una breve síntesis de los aspectos básicos de la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993), se delimita el área problemática y se caracteriza formalmente el problema de investigación. Así mismo se plantean los objetivos y las hipótesis de la investigación.

1.2.- Antecedentes

Tal y como hemos expuesto anteriormente, los antecedentes estan recogidos en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993). En dicha memoria podemos diferenciar tres partes: una primera de fundamentos, con la intención de delimitar dentro de la máxima extensión posible un marco teórico; una segunda circunscrita al análisis de las series de números naturales y de tareas escolares con series, y una tercera consistente en un estudio exploratorio en una muestra de 287 alumnos de cuarto, quinto y sexto de Educación General Básica (E.G.B.) (8-11 años), realizada el curso 91-92.

1.2.1.- Fundamentos: Marco teórico

Se han realizado tres tipos de análisis:

a) Análisis epistemológico de la Inducción.

El objeto de este análisis fue la búsqueda de modelos inductivos que sirvieran para plantear hipótesis e interpretar resultados de una fase empírica. No se pretendía realizar un desarrollo formal de la inducción, sino buscar distintos modelos, esquemas, interpretaciones o teorizaciones, de lo que se ha entendido y se entiende por inducción. Encontrar unos esquemas y lineamientos básicos que nos posibilitaran elaborar una rejilla de observación experimental sobre la inducción.

b) Análisis psicológico de la Inducción.

Se han tenido en cuenta dos aspectos básicos: tipos de investigaciones realizadas en relación a la inducción, su naturaleza e interpretación y los instrumentos de observación y experimentación utilizados.

c) Análisis de las investigaciones realizadas sobre Inducción en Educación Matemática.

Se ha realizado en este punto un estudio de las investigaciones relacionadas con la **inducción y las series numéricas**, con especial atención hacia los tipos y objetivos planteados en ellas. En el estudio se analiza la utilización de las series numéricas en Educación Matemática. Esta información, junto a la obtenida con el estudio psicológico, permite establecer un nuevo enfoque sobre la utilización de las series numéricas en Educación Matemática.

Las aportaciones generales de los análisis anteriores quedan resumidas en los siguientes apartados, remitiéndonos al capítulo 1 de la Memoria mencionada para una información más completa:

Aportaciones de la Epistemología

a) Interpretaciones generales de la inducción

En el proceso de enseñanza aprendizaje de la matemática encontramos fenómenos inductivos, tales como las falsas generalizaciones que se realizan a partir de comprobaciones particulares, provocando en los alumnos la aparición de conclusiones y creencias erróneas. De acuerdo con Russell (1912), dichas generalizaciones se deben a asociaciones o hábitos adquiridos indebidamente. Para evitar estos errores es necesario hacer un buen uso de la inducción en la construcción del conocimiento matemático, tal y como plantea Lakatos (1978) en lo relativo al papel de la inducción en el proceso de construcción de la matemática en su primera etapa, es decir, en la etapa del descubrimiento.

b) Interpretaciones empíricas

Uno de los problemas metodológicos fundamentales en las Ciencias Experimentales, reside en la búsqueda del máximo rigor en los procesos de investigación, desde la recogida de información hasta la obtención de conclusiones, pasando por la organización de los datos y el establecimiento de relaciones entre ellos. Desde una perspectiva histórica del hacer científico, el primer intento de considerar patrones a seguir en la investigación fue debido a Bacon (1620), cuyo método inductivo se resume en las tablas de ausencia, presencia y grados. Casi dos siglos después, con el auge de la Lógica, se intentó construir una Lógica Inductiva, destacando los trabajos de J. S. Mill (1843), quien desde la logística estableció cinco métodos para la investigación empírica, a los que denominó "métodos eliminativos de inducción". No todos los autores están de acuerdo en la posible existencia de reglas inductivas para pasar de los datos a las hipótesis o teorías. Así, Hempel (1965), plantea que las reglas de inducción han de ser concebidas en analogía con las reglas de deducción, como cánones de validación más que de descubrimiento. Para este autor no se llega al conocimiento aplicando un procedimiento inductivo de inferencia, sino más bien mediante el llamado "método de las hipótesis", consistente en postular sucesivas hipótesis que se puedan contrastar empíricamente. Un planteamiento importante para nuestra investigación es el trabajo a Chalmers (1976), para quien la credibilidad científica es un hecho psicológico. Es notoria su postura que se puede resumir en la frase: “todo resultado inductivo está dentro de una teoría en la que dicho resultado queda definido”.

c) Modelos lógicos

Bajo el epígrafe “modelos lógicos” agrupamos algunas interpretaciones de la silogística que son modelos de patrones inductivos de razonamiento. Es de especial interés la síntesis integradora de los tres aspectos básicos: deducción, inducción e hipótesis, llevada a cabo por Peirce (1901, 1903, 1910, 1918). Por otra parte son clarificadoras las ideas de Stebbing (1967), para distinguir entre las inferencias causales y las inferencias lógicas.

d) Modelo probabilístico

El avance de la probabilidad y su aplicación al estudio de la credibilidad de las inferencias inductivas, ha abierto la búsqueda de modelos matemáticos para determinar el grado de confirmación de dichas inferencias. Pero no es este el sentido de nuestra revisión del modelo; antes bien se ha pretendido analizar su influencia en nuevas interpretaciones de la inducción, como es el caso de Jevons (1873), que a partir del método inverso de las probabilidades llega a considerar la inducción como método inverso de la deducción.

Aportaciones de la matemática

La importancia de la inducción y del razonamiento inductivo en matemáticas es incuestionable, lo que conduce a la necesidad de analizar e interpretar el papel que juega el razonamiento inductivo en la construcción de la Matemática por parte del matemático profesional y cuál es su importancia en el aprendizaje matemático.
Para el primer punto hemos indagado la relación existente entre la inducción y la naturaleza del razonamiento matemático, con dos intenciones distintas:

a) Desde la interpretación de la investigación matemática.
b) De la propia naturaleza del razonamiento matemático.

A nivel de la investigación, nos remitimos nuevamente a las ideas de Lakatos (1978), que considera fundamental el papel de la inducción en una primera fase de la investigación matemática. Según este autor, es frecuente que el estudio de hechos de bajo nivel sirva de trampolín para los programas de investigación.
Desde nuestra segunda intención destacamos la obra de Poincaré (1902), para quien la naturaleza del razonamiento matemático participa de la naturaleza del razonamiento inductivo, y que por eso es fecundo.

Desde un punto de vista del aprendizaje Polya (1953), **relaciona la inducción con la analogía**, considerando a ésta como semejanza, proporción u otro tipo de relación matemática entre objeto u entes matemáticos. Es una concepción intuitiva matemática de la inducción. Llega a establecer modelos o patrones organizados de razonamiento plausible

El **inductivismo aritmético** es una corriente epistemológica y matemática que ha considerado el origen inductivo del número natural y por tanto, de la aritmética. Entre los autores que postularon el origen inductivo de la aritmética se encontraban Mill (1843) y Jevons (1873). Sus planteamientos han tenido una gran influencia en la aritmética escolar, que llegan hasta nuestros días.
Otra corriente epistemológica de gran repercusión en la enseñanza aprendizaje de la aritmética del número natural es el **convencionalismo aritmético**, que considera suficiente la secuencia verbal de los números naturales para la construcción de toda la aritmética. No se postula el origen del número natural. El autor que inició esta corriente fue Helmholtz (1887).

Aportaciones de la Psicología

a) Aportaciones de la Psicología Cognitiva

La mayor parte de los trabajos de investigación consultados en Psicología Cognitiva sobre inducción, están relacionados con el aprendizaje de conceptos. Imperan básicamente dos modelos interpretativos del razonamiento inductivo: El asociacionismo y el razonamiento analógico. Las investigaciones y trabajos consultados se pueden agrupar en los siguientes apartados y referencias significativas:

- La inducción como una capacidad (Pellegrino (1976))
- Análisis de procesos cognitivos (Holtzman (1983))
- Elaboración de la información (Sternberg (1986))
- Errores del razonamiento inductivo (Ross (1981))

b) Aportaciones del constructivismo piagetiano

Hemos distinguido dos interpretaciones:

- La inducción como instrumento intelectual (Piaget (1955), Oleron (1963))
- La inducción como generalización de estructuras (Sastre y Moreno (1983))

En cuanto a la utilización de series como soporte de las investigaciones anteriores, podemos decir que es un hecho frecuente, pero con una finalidad muy distinta a la que se pretende en esta memoria de investigación. Para la investigación psicológica las series de números, letras, figuras, etc., son una herramienta más de investigación, no formando parte en los análisis de resultados. No consideran variables numéricas o algebraicas a la hora de seleccionar las series a utilizar y tampoco su relación con el currículo escolar o el aprendizaje. Por ello podemos ver claramente la existencia de un espacio de investigación propio de la Educación Matemática.

Aportaciones de la Educación Matemática

La información consultada la hemos organizado en los siguientes bloques:

a) Investigaciones educativas sobre el método de inducción completa.

Los autores de las publicaciones consultadas han sido: Avital (1972), Macarow (1972), Malcom (1974), Pinker (1976), Hirsch (1976), Fischbein (1989), Higgins (1990). El objetivo de sus investigaciones se centra en el análisis de los procedimientos matemáticos utilizados por alumnos de secundaria en sus intentos de obtener el término general de una sucesión de números naturales y su validación mediante el método de inducción completa. No se dan interpretaciones subyacentes de los distintos procedimientos o de los errores observados, les falta una teoría o modelo explicativo e interpretativo de los resultados. Podemos decir que son estudios puntuales, que plantean la importancia de la inducción

en educación secundaria y, por tanto, el seguir investigando en este campo.
Por contra destacar la publicación de Dubinsky (1986), que propone como soporte de la justificación del método de inducción completa la regla de inferencia del Modus Ponens, estableciendo así un puente con las interpretaciones lógicas del razonamiento inductivo.

b) Modelos geométricos

En principio tan solo hemos localizado trabajos didácticos y metodológicos entre los que podemos destacar el de Wiscamb (1970), consistente en una propuesta didáctica muy elaborada para reconducir a los alumnos a partir de construcciones geométricas a la obtención de series numéricas que luego se generalizan obteniendo su término general. En el apartado 1.2.4, dedicado a otros antecedentes se incluye una referencia a un estudio reciente (Castro, 1994), posterior a la revisión que estamos exponiendo.

c) Educación Matemática y cognición

Dentro del paradigma cognitivo hemos de destacar las investigaciones de Lee (1982) y Ropo (1987). Para este último hay desconocimiento de las estructuras cognitivas que posibilitan un buen desarrollo de las estrategias inductivas, dejando abierto el problema de investigación del análisis de como se desarrollan y cual es su influencia en el aprendizaje. Plantea la parcialidad de las taxonomías de estrategias inductivas utilizadas en las investigaciones.

1.2.2.- Las series numéricas en el contexto de la aritmética del número natural

En la segunda parte de la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993) se realiza un análisis metódico de las series elementales, estudiando sus características lógico-matemáticas para organizar y determinar el conjunto de las series y tareas del estudio exploratorio. Para este primer análisis se consideraron propiedades aritméticas, lógicas y sintácticas, ya que los criterios que determinan una serie pueden basarse en las operaciones aritméticas, en una propiedad común a todos los números de la serie (pares, impares, etc.) o en la sintáxis de nuestro sistema de representacion numérica (añadir un 1 por la derecha, etc.).

Estos resultados llevan a considerar dos vías para determinar el criterio de una serie: Una procedimental, de tipo recurrente, a partir del primer término y la diferencia o razón; y otra conceptual, que es aplicable en ciertos casos y consiste en obtener una clase ordenada de números naturales detectando una propiedad común, que se puede expresar mediante una ley.

Además se consideran habilidades y destrezas numéricas que posibilitan determinar en ciertos casos el criterio de una serie, como contar de n en n, o la relación doble-mitad.

Los casos mencionados se consideran como las estrategias básicas en tareas con series numéricas elementales, es decir, series de números naturales.

En base al estudio anterior se determinó un conjunto de series elementales con números naturales, al que se circunscribió el estudio exploratorio:

a) Sólo se considerarán series crecientes o decrecientes, de acuerdo con el orden natural y en las que las transformaciones sean de operador constante, ya sea este aditivo o multiplicativo (progresiones aritméticas o geométricas)
b) No se considera la continuación indefinida, limitandonos en lo posible a números pequeños. En todos los casos el término menor estará en la primera decena
c) En las series aditivas-sustractivas (progresiones aritméticas) la diferencia ha de ser menor que 20
d) Para las series multiplicativas y partitivas (progresiones geométricas) solo consideramos las razones 2, 3, 4 y 5

Aplicando las restricciones anteriores resultaron 154 progresiones aritméticas y 26 geométricas, que determinaron el universo de series a tener en cuenta para las tareas del estudio exploratorio.

Se realiza un análisis teórico de tareas posibles, llegando a la conclusión de considerar la continuación de series como la tarea a proponer a los alumnos: conocidos los cuatro primeros términos de una serie, determinar los dos siguientes.

1.2.3.- Resultados del estudio exploratorio

El estudio exploratorio tenía por objetivo comprobar que las tareas de continuar series numéricas constituyen un buen instrumento para detectar diferencias tanto individuales como por niveles educativos en competencias inductivas en el campo numérico y consistió en la realización de una prueba, con alumnos en el segmento de 9 a 12 años de edad; la prueba constaba de 16 tareas de continuar series, categorizadas en cuatro bloques de acuerdo con las operaciones de la aritmética elemental. (Anexo 1.1)

1.2.3.1.- Dominio del modelo aditivo

Mediante el estadístico chi-Cuadrado se contrastó la hipótesis:

> H_0: No existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y las distintas edades

y la alternativa

> H_1: Existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y las distintas edades

De los valores obtenidos para el estadístico con su grado de significación en los dieciséis ítems, se desprende que las diferencias por la edad son significativas en los ítems multiplicativos, lo que confirma un dominio del modelo aditivo respecto del multiplicativo en los niños estudiados, así como que la edad es un factor importante a tener en cuenta.

Estos resultados han sido confirmados mediante análisis factorial con dos factores, resultando una dualidad perfecta entre los modelos aditivos y el multiplicativo; se pueden ver los resultados del análisis factorial en el Anexo 1.2.

La significación intelectual de estos resultados se ha obtenido a partir de las respuestas verbales: **Los niños de los niveles inferiores utilizan estrategias aditivas en sus intentos de resolver las series multiplicativas.** (Es lo que denominamos dominio del modelo aditivo)

El hecho es significativo ya que de acuerdo con los cursos a los que pertenecen los niños, todos dominan las cuatro operaciones básicas de la aritmética.

1.2.3.2.- Obtención de una escala acumulativa de Mokken

El modelo probabilístico de Mokken está concebido para ítems puntuables dicotómicamente, permitiendo ordenar, tanto a los ítems como a los sujetos. El que un sujeto haya respondido adecuadamente un ítem de la escala presupone, con un alto grado de fiabilidad, que ha respondido adecuadamente los anteriores.

Un hallazgo del estudio fue probar que los ítems correspondiente a las series:

0, 6, 12, 18, ...

40, 32, 24, 16, ...

2, 6, 18, 54, ...

243, 81, 27, 9, ...

constituyen una escala acumulativa de Mokken.

1.2.3.3.- Efecto tope

En las pruebas preliminares a las del estudio piloto, nos encontramos con un resultado erróneo que se reproduce en alumnos de distintos colegios y cursos. Este error se ha presentado en algunas series en las que el último término a calcular debía ser uno: En series en las que el último término a calcular era 1, gran parte de los alumnos daban por respuesta 0. En concreto, en la tarea de continuar la serie:

32, 16, 8, 4, ___ , ___

los alumnos aludidos escribían 2, 0 en las casillas correspondientes.

En el estudio exploratorio, la serie de la tarea X12 presentaba ésta peculiaridad:

243, 81, 27, 9, ___ , ___

La distribución de los alumnos por cursos que han presentado el efecto la podemos observar en la siguiente tabla:

4º	5º	6º
9	10	10

En total han sido 29 casos, lo que representa un 18,01% de los que han contestado la tarea. De acuerdo con las respuestas y cálculos realizados, podemos concluir que éste efecto se produce en alumnos con estrategias multiplicativas, ya que solo tres han manifestado algún aspecto aditivo en sus respuestas.

La conceptualización del "efecto tope" a la que hemos llegado ha sido la siguiente:

> "**Dada la tarea de continuar una serie partitiva en la que el último elemento a determinar es 1, diremos que en un alumno se ha producido el efecto tope, si al obtener este término, le asigna el valor 0, habiendo calculado adecuadamente el término anterior así como la regla partitiva correspondiente**"

Hemos relacionado el efecto tope con el el principio psicológico de "extremo-ancla". Según Wason (1981, Pág. 136), en los problemas de "series de tres términos" o "silogismos lineales" (entendiendo por dichos problemas el estudio lógico de las respuestas que dan los individuos a problemas de inferencia silogística con dos premisas, cada una de las cuales está compuesta por términos comparativos), el problema fundamental al hacer una inferencia relacional es establecer una representación interna de las premisas. En la solución de una serie el paso crucial consiste en combinar las interpretaciones de las premisas en una representación unitaria, que consiste en una imagen visual de una disposición horizontal o vertical en la cual los términos están en su posición apropiada. Hay dos principios que gobiernan la construcción de las disposiciones. En primer lugar, hay una preferencia natural por construir disposiciones horizontales que funcionan de izquierda a derecha, y por construir disposiciones verticales que comienzan por arriba y van hacia abajo. En segundo lugar, una premisa es más fácil de representar en la disposición si su primer término es un "extremo ancla" (Extremo bueno o malo de una escala de valores, etc.).

En nuestro caso las premisas son las comparaciones que puede establecer el niño a la hora de determinar la regla. Si las establece según el orden de los términos conocidos, obtendrá la disposición correspondiente para razonar e inferir la regla y los términos a calcular. En una serie cuyos elementos sean las potencias sucesivas de un número la unidad es el "extremo-ancla" y en los casos de los múltiplos de un número así como en la serie descendente en el contar el "extremo-ancla" es el cero. Cuando se produce el "efecto tope" se produce un efecto contaminador entre los extremos anclas multiplicativo, aditivo y de la serie numérica.

1.2.4.- Otros antecedentes

Queremos destacar dos trabajos que no están incluidos en la Memoria de Tercer Ciclo.

Un estudio científico en profundidad y generalidad respecto a las configuraciones puntuales es la investigación de Castro (1995). A diferencia de los trabajos anteriores hay un soporte mental que subyase a la hora de interpretar el significado de la representación puntual que es el de **visualización.** Por lo tanto es un trabajo interpretativo además de descriptivo. En relación con nuestro trabajo y en concreto en el tema de las sucesiones y su tratamiento curricular, hace ver que las representaciones gráficas no se utilizan para interpretar las sucesiones y demuestra experimentalmente que las representaciones puntuales para expresar relaciones y propiedades numéricas proporcionan un modelo intuitivo para el desarrollo del **Pensamiento Numérico**. Relaciona el tema con la cognición a través de la **habilidad matemática.** Destaca la importancia del uso de patrones en la enseñanza escolar por dos hechos relevantes: en el mundo en que vivimos abundan los patrones y regularidades y por ser frecuentes en matemáticas, lo que ayuda a la comprensión intuitiva de expresiones y relaciones que se pueden usar en estudios posteriores de matemáticas.

> **"Un cierto punto de vista considera la Matemática como la ciencia que estudia las regularidades, que trabaja sobre patrones. Analizar y observar patrones, desarrollar nuevas formas; establecer conexiones entre diferentes formas y transformar unas en otras, son actividades propias de la matemática." (Castro, 1994, pág. 23)**

Una publicación de Carpenter (1980), en la que plantea la importancia de los estudios de desarrollo de un concepto en el transcurso del aprendizaje, explicando aspectos metodológicos y de fundamentos, que hemos retomado para interpretar nuestro trabajo y orientar nuestra metodología.

1.3.- El problema de investigación

Debido a que nos interesa la relación entre el funcionamiento de los procesos de razonamiento inductivo en los sujetos con la construcción-aprendizaje de la aritmética elemental, centramos nuestro trabajo en Educación Primaria que es el periodo escolar en el que los niños aprenden y estudian la estructura aditiva y la estructura multiplicativa del conjunto de los números naturales. Nos hemos planteado investigar con una muestra de alumnos que abarque todos los niveles de la Educación Primaria. Pretendemos realizar un estudio transversal con la intención de construir y validar un modelo que explique y justifique la evolución de las estrategias inductivas con números naturales por parte de los niños de la muestra elegida.

En este estudio entendemos por **serie numérica**: conjunto de números naturales generado por una regla aritmética que posibilita a partir del primer elemento o término, obtener todos los siguientes y en particular, a partir de un término obtener el siguiente.

1.3.1.- Primera aproximación

Como consecuencia de la realización de los estudios, análisis y reflexiones anteriores, así como de los resultados en las incursiones realizadas se llega a la conclusión de considerar las **series de números naturales** como el soporte y contenido más adecuado para la selección de unas tareas mediante las que discriminar a los niños en cuanto a sus capacidades inductivas en aritmética, ya que:

> Las sucesiones y series son uno de los tópicos en relación más directa con la inducción dentro de las Matemáticas elementales.
>
> En las investigaciones psicológicas se ve la importancia de las tareas con series numéricas para interpretar la capacidad de razonamiento inductivo en los individuos.
>
> En los niveles educativos sobre los que hemos centrado nuestra investigación (Educación Primaria) las series no se consideran en los curricula como tema específico de trabajo y, por tanto, no son un contenido habitual, lo que es importante ya que evitamos la aplicación algorítmica basada en posibles adiestramientos, obligando al alumno a realizar verdaderas inferencias inductivas.

La primera serie numérica que el niño domina y que se encuentra implícita en la ación de contar es la serie de los números naturales. A partir de aquí hay un proceso de desdoblamiento en subseries mediante el conteo de dos en dos, tres en tres, etc., que posibilita la construcción de nuevas series. Según los estudios realizados en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993), la acción de contar perdura como proceso reconstructivo hasta edades bastante avanzadas, razón por la cual niños de 10 o más años interpretan las series numéricas a partir de la secuencia verbal y no dan una explicación aritmética.

Con el desarrollo de las transformaciones y operaciones en la representación mental de carácter cognitivo (Vergnaud, 1977; Piaget, 1964, 1974, 1980) las series se interpretan como concatenaciones de estados y transformaciones. En las series numéricas, los estados se relacionan con los números y las transformaciones con las operaciones elementales, lo que hace posible determinar el criterio o regularidad aplicando dichos conceptos.

Por tanto, podemos centrar nuestro problema de investigación como sigue:

> **El problema de investigación está enmarcado en el estudio de los conocimientos, procesos y estructuras cognitivas que posibilitan al niño de Educación Primaria el descubrimiento de regularidades numéricas y, en particular, de aquellas regularidades que definen series numéricas y que se determinan utilizando las operaciones de la aritmética elemental**

> Entendiendo por *razonamiento inductivo numérico:*
> **razonamiento en el que intervienen:**
> **1) procesos mentales, lógicos o aritméticos, implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas;**
> **2) los conceptos y propiedades del número que se utili-zan en dichos procesos.**

> podemos definir nuestro problema de investigación como:

> **Un estudio que pretende explicar y describir el desarro-llo del razonamiento inductivo numérico en Educación Pri-maria.**

1.3.2.- Origen del problema

El origen del problema de investigación lo podemos situar en la construcción escolar de las nociones de la aritmética del número natural. Al observar el currículum escolar vemos que hay un predominio de planteamientos inductivos en la enseñanza aprendizaje de la aritmética elemental:

> -La aritmética se presenta al niño con cierto orden y armonía, procurando seguir unos patrones tanto en el contenido como en la presentación y secuenciación de los distintos temas: Introducción, desarrollo y ejercicios.

-Para llegar a los conceptos y procedimientos es usual utilizar el paso de particulares a generales .

-Las propiedades numéricas se transmiten mediante reiteración desarrollando en los niños unos hábitos inductivos no justidicados.

-Igualmente, las propiedades de las operaciones se justifican mediante comprobación en casos particulares, siguiendo un método más propio de las ciencias experimentales.

En el currículo de matemáticas el método deductivo no se trabaja antes de los doce años y, por tanto, la mayor parte del aprendizaje de la Matemática Elemental está condicionada a los argumentos inductivos utilizados por los alumnos. Así, si el niño no utiliza la inducción como procedimiento, dificilmente podrá asimilar y acomodar en sus experiencias anteriores los saberes que se le intentan transmitir.

1.4.- Supuestos sobre el aprendizaje de las matemáticas en esta investigación

Para una mejor comprensión e interpretación del presente trabajo de investigación exponemos en este apartado algunas ideas relativas al aprendizaje de las matemáticas, que están en la base de esta investigación.

Estas ideas están influenciadas, fundamentalmente, por: la teoría de las formas conceptuales de Stegmüller (1979); naturaleza y métodos de la epistemología genética de Piaget (1979) y algunas consideraciones en psicología cognitiva desde un paradigma mediacional (Mayer,1981, 1983; Sternberg, 1986) y del desarrollo evolutivo según Piaget.

1.4.1 Supuestos generales.

Los supuestos generales son los siguientes:

-El desarrollo del currículum ha de adaptarse a las posibilidades conceptuales, cognitivas, sociales y culturales de los alumnos.

-El niño presenta una mente en desarrollo: Las relaciones que un niño pueda establecer están condicionadas por su sistema conceptual y por la variedad de opciones que le posibilitan sus esquemas cognitivos

- Los conceptos están determinados por los referentes que se utilizan en su interpretación y, por tanto, dependen de los sistemas conceptuales

-El conocimiento no siempre es acumulativo: El avance del conocimiento no siempre consiste en acumular nuevos conceptos en un sistema conceptual determinado sino, principalmente, en la modificación y evolución del mismo

- El conocimiento matemático se construye, no se aprende. En esta construcción es tan importante la información recibida como los aportes del sujeto. Nuestra posición constructivista no es, por supuesto, radical ya que estamos dentro de un constructivismo psicológico (Piaget) y matemático (Poincaré, 1902; Polya, 1953)

- Lo que un alumno es capaz de construir en matemáticas está mediatizado por el aprendizaje recibido

- Desde una perspectiva ética, todo planteamiento en Didáctica de la Matemática debe preservar la autonomía intelectual de los alumnos; ésto significa una adaptación a sus sistemas conceptuales, creencias socioculturales y cognición

- Psicológicamente nuestros planteamientos están en un paradigma mediacional: Entre el estimulo y la respuesta hay procesos intermedios

- Las teorías y modelos sobre cómo pensamos, aprendemos y construimos están determinadas por los instrumentos, conceptos científicos y por las intenciones que prevalecen en su construcción. Los cambios paradigmáticos provocan cambios científicos que modifican el enfoque, alcance y los logros de nuevas teorías

- El aprendizaje de la matemática no escapa a las consideraciones anteriores.

- Hay diferentes tipos de verdades (Hessen, 1925). Las verdades en Educación Matemática son verdades contingentes y no necesarias

Estos planteamientos están dentro de un constructivismo psicológico, matemático y didáctico, postulando que el aprendizaje en matemáticas está condicionado por:

a) esquemas y estructuras mentales subyacentes al propio saber y que el conocimiento de su desarrollo debe ser útil para una mejor adaptación curricular de la matemática elemental;

b) los conceptos que dispone un alumno condicionan lo que puede aprender o construir sobre los mismos;

c) la enseñanza recibida determina la manera de entender y acceder al saber.

1.4.2- Supuestos de partida

Un supuesto inicial de nuestro trabajo es que **hay más de un factor a tener en cuenta en la construcción del conocimiento numérico**.

Hemos planteado los siguientes:

- En la construcción del conocimiento aritmético del número natural la **inducción** juega un papel relevante

- Dentro de un contexto sociocultural determinado, las relaciones aritméticas que el niño pueda establecer dependerán de al menos cuatro componentes básicas:
  a) Sus capacidades y habilidades cognitivas
  b) Los conceptos y procedimientos aritméticos que disponga así como la estructura de los mismos
  c) La noción de número natural que se le ha transmitido y su fundamentación epistemológica
  d) Los contextos, situaciones y problemas, así como las rutinas que caracterizan el marco currícular establecido

1.5.- Area problemática

De acuerdo con el marco teórico hemos indagado las relaciones entre las diferentes áreas implicadas y nuestro problema de investigación. En este apartado presentamos una caracterización del área problemática a partir de las relaciones de nuestro objetivo inicial y las indagaciones realizadas. Pretendemos localizar, en relación a distintos contextos científicos, el campo en el que definimos nuestro problema de investigación.

El presente trabajo tiene que ver con el razonamiento. Sin lugar a dudas el razonamiento ha sido en su totalidad algo muy valorado, tradicionalmente y en la actualidad, como necesario y fundamental en el aprendizaje de la matemática. La facultad de razonar posibilita una construcción adecuada de la matemática.

Básicamente, en Matemáticas se consideran dos tipos de razonamiento: Inductivo y Deductivo.

Nuestro trabajo está enmarcado dentro del razonamiento inductivo. Para su interpretación y conceptualización es necesario hacer referencias a la lógica y a las matemáticas. Figura 1.1

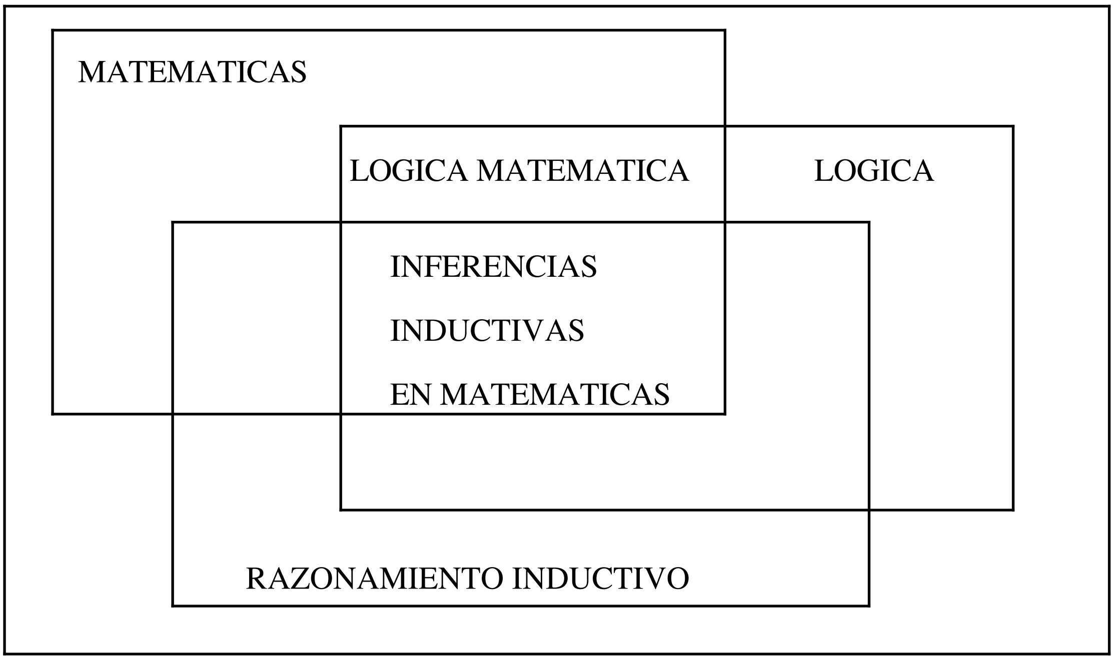

Figura 1.1. Inferencias inductivas dentro de la lógica y la matemática

La lógica intenta formalizar el razonamiento inductivo y nos propone modelos de razonamiento formalmente válidos. Se dan reglas de inferencias y se analizan modelos concretos de inferencias inductivas.

En la matemática están los conceptos y procedimientos soportes de las inferencias a considerar. En nuestro caso nos restringimos a la aritmética del número natural. En concreto a inferencias inductivas en aritmética. La investigación trata de patrones y regularidades en series de números naturales en la aritmética escolar. Figura 1.2

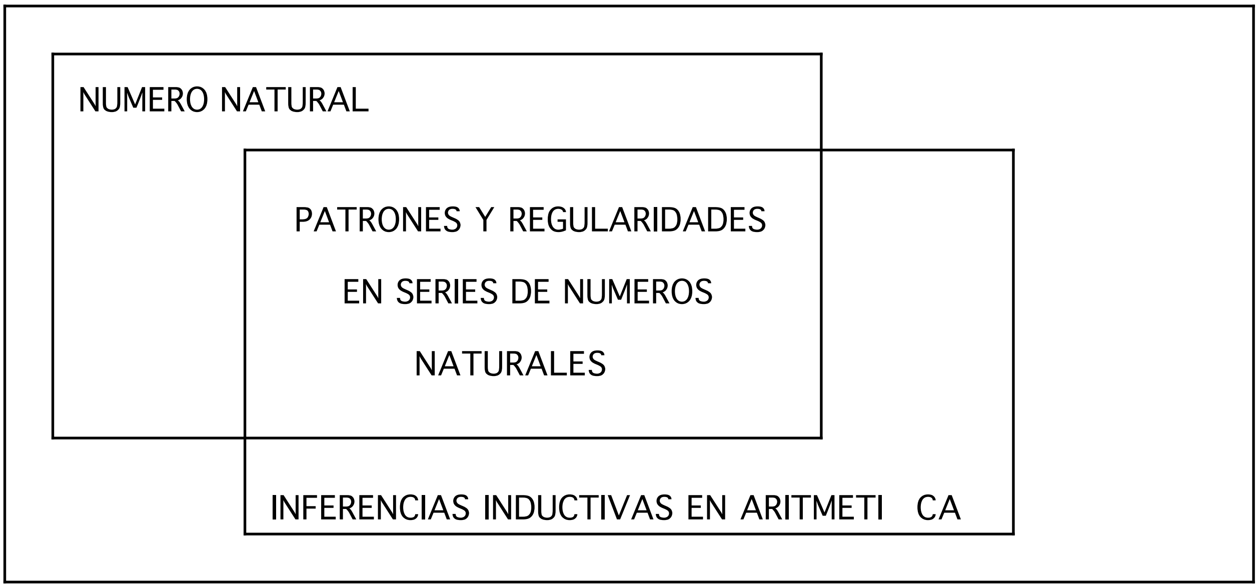

Figura 1.2. Contexto aritmético del problema de investigación: Patrones y regularidades en series de números naturales

La interpretación de una serie de números naturales comienza por el conocimiento del número natural y queda determinada por la naturaleza de dichos números

Basándonos por tanto en la naturaleza del razonamiento inductivo y del número natural determinamos nuestro ámbito de actuación didáctica para investigar.

El descubrimiento del patrón de una serie de números naturales puede estar basado en la aritmética del número natural, en posibles representaciones, tanto gráficas como simbólicas, y en la sintaxis de nuestro sistema posicional. Figura 1.3

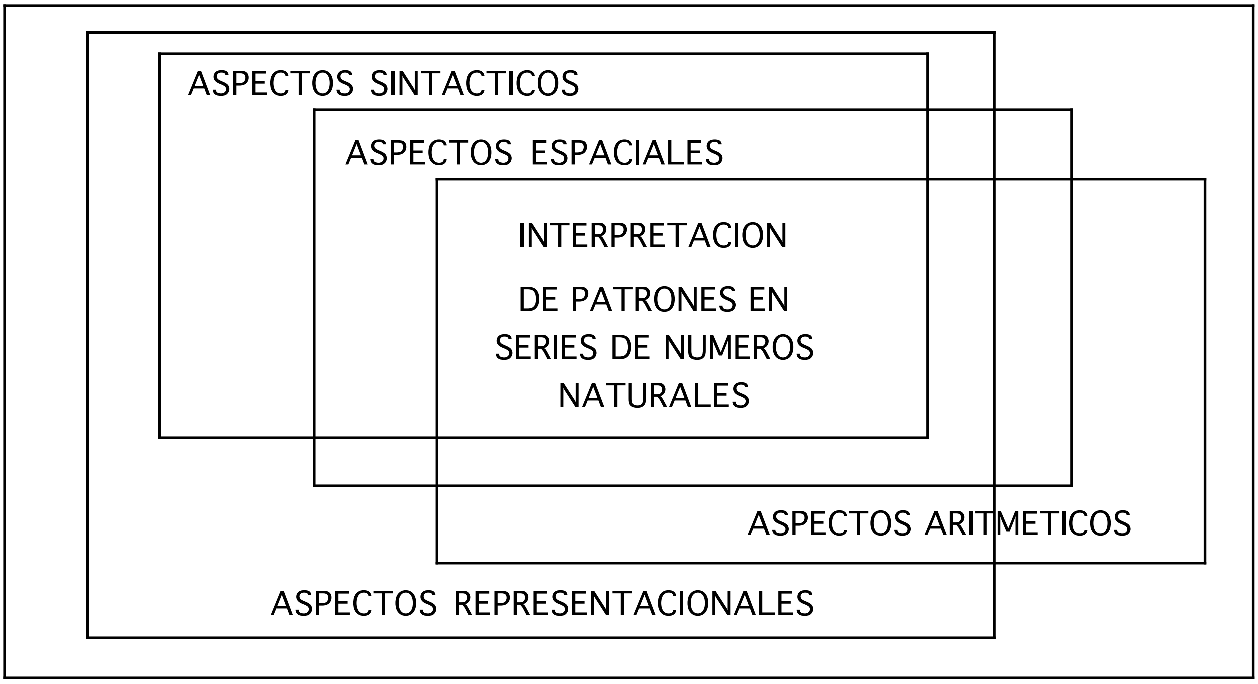

Figura 1.3. Aspectos que interaccionan en el descubrimiento de patrones aritméticos

Desde la perspectiva del aprendizaje consideramos muy importantes los elementos curriculares, la capacidad de aprender del alumno y los métodos de enseñanza.

Desde el aprendizaje son importantes la memorización de hechos y resultados en la serie natural, la acción de contar, estrategias de cálculo mental y rutinas o habilidades numéricas, de práctica frecuente en la escuela elemental.

Tampoco debemos ser ajenos al desarrollo intelectual que condiciona en el niño sus posibilidades. Las estrategias inductivas afloran en el niño por una interrelación entre aprendizaje, currículum y desarrollo intelectual, factores que condicionan el éxito en la interpretación de patrones en series de números naturales.

Para llegar a las síntesis expuestas, se ha llevado a cabo un estudio teórico a partir de una búsqueda de información, que se considera suficiente para introducirse conceptual y experimentalmente en el tema de investigación.

1.6.- Objetivos de la investigación

Las metas generales y particulares de esta investigación se encuadran dentro de los objetivo del grupo de investigación "Pensamiento Numérico". Según Rico, Castro y Coriat (1997), dichos objetivos son los siguientes:

- la organización conceptual de sistemas simbólicos de codificación, válidos para la expresión y comunicación de los conceptos y relaciones de una estructura numérica;

- la elaboración y construcción mental de los sistemas simbólicos mencionados, así como la organización, sistematización de diferentes competencias cognitivas basadas en las estructuras numéricas;

- los modos de abordar e interpretar, y, en su caso, responder a una variedad de fenómenos cuestiones y problemas que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

Entre los tópicos trabajados por el grupo "Pensamiento Numérico" se encuentra el estudio de las relaciones numéricas y secuencias de números (Rico, Castro y Coriat; 1997), en el que se sitúa esta investigación. Dentro de este marco general enunciamos a continuación los objetivos e hipótesis de nuestro trabajo.

1.6.1.- Objetivo general

Planteamos el objetivo general de este estudio en los siguientes términos:

> **Analizar la naturaleza y la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria**

1.6.2.- Objetivos específicos

El objetivo general anterior se concreta en los siguientes objetivos específicos:

> O1: Delimitar el razonamiento inductivo numérico dentro del marco general de la inducción.
>
> O2: Caracterizar las interpretaciones inductivistas sobre el origen del número natural.
>
> O3: Reconocer las interpretaciones inductivistas y convencionalistas en la transmisión escolar de la aritmética del número natural, determinando estrategias y procedimientos inductivos utilizados.
>
> O4: Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y comprobar con escolares de Educación

Primaria la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo numérico.

O5: Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos inductivos propios de la aritmética escolar.

O6: Establecer la relación existente entre el desarrollo del currículum en aritmética y la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria.

O7: Confirmar los resultados ya obtenidos en la Memoria de Tercer Ciclo.

1.6.3.- Objetivos complementarios

C1: Iniciar una linea de trabajo en Razonamiento Inductivo Numérico dentro de la linea de investigación “Pensamiento Numérico.

C2: Comprobar la utilidad del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática.

C3: Reafirmar la complementariedad de metodologías y su efectividad para este tipo de investigaciones.

1.7.- Hipótesis

Para la formulación definitiva de las hipótesis se han tenido en cuenta:
a) Los objetivos de la investigación;
b) El planteamiento del problema de investigación;
c) El marco metodológico así como los diseños empíricos, que se van a exponer en los capítulos correspondientes;
d) Las indagaciones históricas en epistemología de la inducción;
e) Una revisión histórica de libros de texto y manuales clásicos de matemáticas;
f) Las indagaciones en propuestas didácticas sobre aritmética escolar;
g) Los resultados del estudio exploratorio y de los estudios empíricos que se expondrán posteriormente;
h) Nuestra experiencia y conocimientos en Didáctica de la Matemática.

Con la primera hipótesis queremos plantear la importancia de la Epistemología en Educación Matemática, intentando mostrar que los posicionamientos didácticos están enmarcados en ciertas corrientes científicas que condicionan en los escolares sus perspectivas de la matemática y por tanto sus creencias y concepciones sobre lo que son las matemática y como se elaboran. En concreto, nosotros ponemos en evidencia una de tales corrientes estudiando su influencia en el currículum escolar. La hipótesis que hemos contrastado en este sentido es la siguiente:

H1: "Existe una corriente epistemológica y matemática que considera que la aritmética tiene un origen exclusivamente inductivo. Los planteamientos didácticos y curriculares de la aritmética escolar en España han participado de esta tendencia al tener un marcado signo inductivista"

Nuestra segunda hipótesis se refiere a la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria dentro del contexto al que hacemos referencia en la hipótesis anterior. El origen de esta hipótesis está en las tareas de continuar series que hemos propuesto a los escolares. El análisis de los resultados nos ha posibilitado observar que a la hora de intentar descubrir los patrones o regularidades los escolares aplican diferentes estrategias, procedimientos y conceptos, que de acuerdo con las investigaciones expuestas anteriormente, tienen unas connotaciones cognitivas de carácter evolutivo. Este hecho nos ha permitido enunciar nuestra segunda hipótesis:

H2: "Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de números naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de 6 a 12 años"

El carácter evolutivo del razonamiento inductivo numérico nos plantea que no solo depende de la instrucción recibida y, por tanto, que un logro en aritmética no significa un avance inmediato en razonamiento inductivo numérico. Para contrastar este hecho nos hemos restringido a los cálculos algorítmicos, comparando los resultados obtenidos por los escolares en cálculo y en tareas de continuar series en la que se deben aplicar dichos cálculos. En vista a los resultados obtenidos podemos enunciar con precisión nuestra tercera hipótesis:

H3:"El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una nueva competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico"

Hipótesis complementaria

Con carácter complementario, y como consecuencia del estudio realizado para la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993), enunciamos una cuarta hipótesis. Al detectar el efecto tope en una muestra significativa de alumnos de Educación Primaria, nos hemos planteado que tal efecto pueda ser sistemático y, por tanto, que se vuelva a producir en situaciones análogas. Ello nos plantea una hipótesis complementaria de investigación, que hemos enunciado como sigue:

Hc "El efecto tope no es un efecto casual y local. Se produce en cualquier muestra importante de escolares de Educación Primaria que realice una prueba de continuar series preparada intencionadamente con tal fin".

CAPITULO 2

MARCO METODOLOGICO

2.1.- Introducción

Como se ha mencionado en el capítulo anterior, con el trabajo de investigación que presentamos se pretende indagar en las capacidades, habilidades y estrategias cognitivas que manifiestan los escolares de Educación Primaria entre los 6 y 12 años de edad, ante tareas que requieren del **razonamiento inductivo numérico**, para lo que nos proponemos elaborar y contrastar empíricamente un modelo teórico que describa y explique la evolución de dicho tipo de razonamiento en la etapa escolar mencionada. La finalidad última es ampliar el conocimiento sobre desarrollo cognitivo en el campo numérico, disponer así de nuevos elementos que permitan resolver los problemas de la práctica escolar en dicho campo y mejorar la planificación y el desarrollo de los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas.

El estudio presenta características que aconsejan un proceso metodológico mixto. De acuerdo con la naturaleza de la investigación y el alcance de la misma, ha sido necesario combinar varias técnicas metodológicas, algunas de carácter empírico, para encontrar el camino adecuado que nos permitiera dar una respuesta satisfactoria al problema de investigación planteado. Así, ha sido necesario desarrollar un proceso complejo que permitiera partir de la situación de los conocimientos sobre el problema, que tuviera la suficiente flexibilidad para proporcionar datos generales y profundizar al mismo tiempo en cuestiones particulares y que contemplara la singularidad y características del razonamiento inductivo; un tipo de actividad intelectual que, a pesar de no ser objeto de enseñanza en los primeros niveles de la escuela elemental, resulta ser adecuado para realizar un estudio dentro del campo cognitivo en el sentido del desarrollo, tal y como lo entiende Carpenter (1980).

En este capítulo presentamos, en sucesivos apartados, el marco metodológico elegido, de acuerdo con la naturaleza y los objetivos de la investigación, la situación de las hipótesis en relación con el proceso de investigación, el plan de trabajo seguido a lo largo de los ocho años que se han empleado para culminar la tarea, las características científicas del trabajo y del método utilizado así como las principales fuentes de información y documentación consultadas.

2.2.- Racionalidad del estudio

Desde la perspectiva de la investigación en Didáctica de la Matemática, una finalidad básica en los estudios sobre desarrollo cognitivo consiste en describir el desarrollo de los conceptos matemáticos en los niños, así como explicar los procesos mediante los que estos conceptos se adquieren y aplican (Carpenter, 1980).

Para abordar este tipo de estudios se suelen emplear, básicamente, dos modelos explicativos: el modelo orgánico u organicista, representado por Piaget y sus seguidores, y el modelo mecánico, que se considera como una extensión del conductismo. Nuestro trabajo se situa en el primero de ellos, es decir, en el modelo organicista (Memoria de Tercer Ciclo, pág. 51).

Para obtener datos empíricos útiles y fiables en un estudio de desarrollo cognitivo, es importante trabajar con variables de tarea que favorezcan respuestas independientes de experiencias específicas o de desarrollos curriculares concretos. Con ello se evitan posibles contaminaciones o efectos de la instrucción que pueden enmascarar los resultados al hacer intervenir factores externos ajenos al fin que se pretende alcanzar. En consecuencia, hemos considerado las series numéricas y, en particular, las tareas de continuar series incompletas de números naturales, como un campo idóneo para tales propósitos.

Por otra parte, disponemos de dos tipos de estudios para describir el desarrollo cognitivo: longitudinales y transversales. Pensamos que, con carácter previo a un estudio longitudinal o de desarrollo cognitivo individual, es necesario disponer de unas pautas generales de desarrollo a contrastar posteriormente; es decir, de un conjunto de regularidades que pongan de manifiesto los aspectos básicos del comportamiento de grupos de sujetos de distintas edades. Con tal fin hemos decidido realizar un estudio transversal que ponga en evidencia competencias en razonamiento inductivo numérico de grupos de escolares de diferentes edades y cursos y que permita detectar, en el mismo instante y ante las mismas pruebas, la existencia de niveles de desarrollo diferenciados (sujeto epistémico).

Consideramos, igualmente, que los comportamientos de los sujetos tienen connotaciones que manifiestan la naturaleza de las nociones aprendidas y el contexto didáctico en el que se han adquirido. En este sentido somos conscientes de la influencia de múltiples factores sobre la situación real del razonamiento inductivo numérico, entre los que se encuentran el curículum escolar, su orientación y su desarrollo práctico, o el contexto sociocultural en el que se producen los aprendizajes. Esta complejidad aconseja construir un marco teórico que integre dichos factores en un modelo manejable y que permita interpretar y justificar racionalmente los resultados obtenidos.

De acuerdo con lo anterior y con el problema expuesto en el Capítulo 1, hemos de decir que la investigación que presentamos: **es de naturaleza organicista, explicada mediante un esquema global integrador de los diferentes factores; su objeto no son las estructuras sino los procesos de razonamiento, a los que nos aproximamos desde un enfoque transversal; el soporte del estudio, las series numéricas, no han formado parte de los contenidos curriculares desarrollados en los centros y cursos a los que pertenecen los sujetos que han participado en la investigación**, lo cual no significa que dichos sujetos carezcan de experiencias con series numéricas, puesto que, como veremos, disponían de los elementos suficientes para entender y responder a las tareas propuestas.

Se trata, por tanto, de un estudio de carácter evolutivo, con enfoque transversal, sobre competencias generales estrechamente vinculadas al conocimiento numérico.

Al ser un trabajo en la línea de desarrollo cognitivo <u>pretendemos estudiar</u>:

- la variaciones con la edad de las competencias de los estudiantes sobre razonamiento inductivo numérico;
- los diferentes niveles que aparecen en relación con los cambios que se producen en dichas competencias;
- las características generales de dicha evolución;
- la relación de esta evolución con la situación real de los conocimientos y destrezas aritméticas adquiridas por medio de la instrucción escolar.

Al mismo tiempo <u>pretendemos obtener</u>:

- regularidades o pautas que se pueden presentar en las actuaciones de los alumnos sobre razonamiento inductivo numérico;
- una caracterización de los niveles mediante competencias y habilidades numéricas;
- los cambios que se producen en las competencias y habilidades de los sujetos en el paso de unos niveles a otros.

2.3.- Metodología

Una vez planteado el problema es necesario encontrar un método adecuado para resolverlo. De acuerdo con Fernández Cano (1995):

> **"un método engloba a una diversidad de diseños" (Pág. 53). "El método no es un algoritmo, mecánico y ritualizado; por el contrario, implica un proceso consciente, falible y altamente personalizado" (Pág. 57).**

En nuestro caso, hemos utilizado un método complejo en el que se combinan diversos enfoques y técnicas metodológicas, de acuerdo con las necesidades concretas del trabajo en cada momento y para cada propósito. En los subapartados que siguen exponemos de forma secuenciada y comentada las diferentes técnicas y tipos de metodologías empleadas, los tipos de estudio realizados, el tratamiento de los datos empíricos y el esquema general de la investigación, remitiéndonos a los restantes capítulos de la tesis para una explicación más detallada de los diferentes aspectos abordados.

2.3.1.- Procedimientos y técnicas metodológicas

En un principio, con objeto de delimitar y definir el problema de investigación, hemos seguido un método de exploración didáctica basado en la Epistemología Genética de Piaget y los métodos de la Psicología Cognitiva. Este método, expuesto en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz 1993, pág. 51) y al que hemos denominado "**Método Psico-Epistemológico**", consiste en un proceso constructivo y dialéctico a partir de situaciones observables (Hechos) y de modelos teóricos (Teorías). Además de definir con mayor precisión el problema de investigación, ha permitido:

a) Determinar el área problemática, obteniendo un conjunto de problemas a investigar en el campo del Pensamiento Numérico;
b) Plantear una investigación de desarrollo;
c) Delimitar los tipos de tareas a proponer en las fases empíricas;
d) Fijar la población a la que había que dirigir la investigación.

Para realizar un estudio transversal sobre desarrollo cognitivo vimos la necesidad de disponer de un modelo teórico contrastable empíricamente. Para construir este modelo hemos retomado el **Análisis Didáctico** como método no empírico en Educación Matemática. De acuerdo con Fernández Cano

(1985):

> **"existen preguntas que no necesitan datos observables, pues su resolución conlleva reflexión y establecer relaciones entre conceptos, lo que hace que el análisis didáctico pueda ser facilitador de respuestas a dilemas eminentemente didácticos, previos a cualquier otro tipo de investigación" (Pág. 62).**

Según González (1995, pág. 59), el análisis didáctico se basa en el meta-análisis cualitativo en torno al tópico en estudio y su finalidad es la formulación de teorías que expliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones. La aplicación del análisis didáctico a nuestro problema de investigación se esquematiza en la figura 2.1; el desarrollo completo de ese estudio se expone en el capítulo 4 de esta Tesis Doctoral.

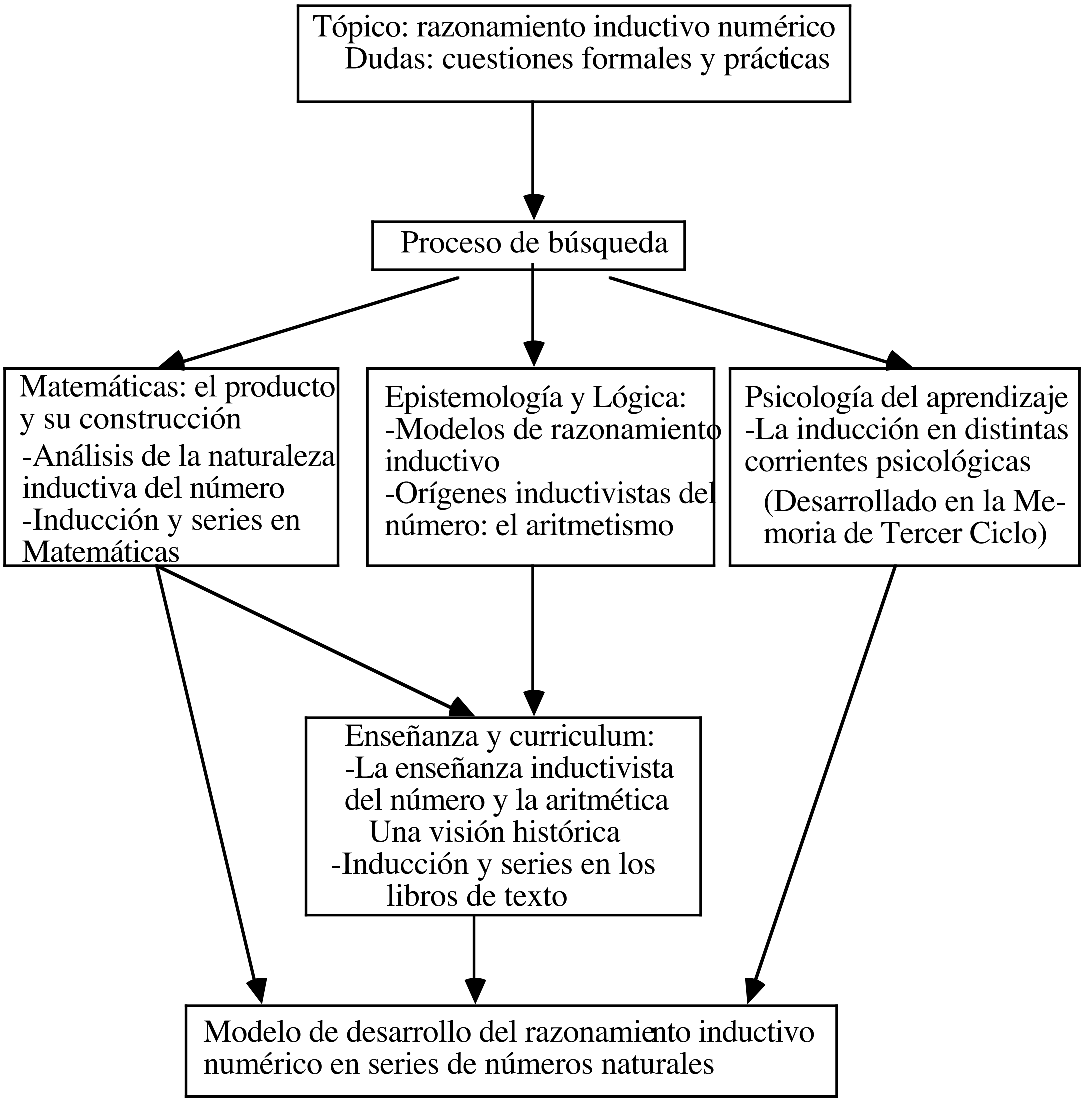

Figura 2.1.- Esquema del análisis didáctico en razonamiento inductivo numérico

Pero el modelo teórico no se ha construído únicamente a partir del análisis didáctico. Antes bien, junto a los resultados de dicho estudio, se han utilizado también los resultados del **análisis de las respuestas verbales** del estudio exploratorio que se expone en el capítulo 3 de esta memoria. Estos resultados, obtenidos mediante un procedimiento sistemático que también se explica en el mismo capítulo, han servido, por un lado, para orientar y determinar una parte del contenido del modelo, y, por otro, para elegir los aspectos básicos a observar en los libros de texto, uno de los diferentes estudios realizados dentro del análisis didáctico.

Para la contrastación empírica de una parte del modelo, en concreto la que corresponde a los niveles de Educación Primaria, se realizan dos estudios:

uno **cuantitativo de carácter descriptivo** y otro **cualitativo o de estudio de casos**.

La finalidad fundamental del estudio empírico cuantitativo, cuyo diseño y análisis de resultados se exponen en el capítulo 5 de esta memoria, es la de ordenar una serie de tareas para establecer niveles de desarrollo en razonamiento inductivo numérico, lo que se consigue mediante la aplicación de una misma prueba objetiva a una muestra amplia de sujetos (400 alumnos entre 6 y 12 años de Educación Primaria). Dicha prueba, dividida en dos partes diferenciadas e integradas, respectivamente, por 12 tareas de continuar series incompletas de números naturales y por 8 tareas de cálculo aritmético sencillo, constituye el instrumento básico para la recogida de datos en esta parte de la investigación.

Con los datos recogidos mediante la aplicación de la mencionada prueba se obtiene una escala acumulativa de Guttman, constituída por 6 ítems de los 12 de que consta la primera parte de la prueba, y se realiza un estudio descriptivo y correlacional de las respuestas de los sujetos, lo que proporciona una información general sobre la situación de los escolares de la muestra en los aspectos estudiados del razonamiento inductivo numérico.

El estudio descrito anteriormente es de carácter descriptivo y en él no se analizan las estrategias y mecanismos de funcionamiento intelectual que subyacen a las respuestas de los sujetos o que explican los resultados obtenidos. Por tal motivo, con el propósito de indagar en tales aspectos, completar y confirmar la bondad de los resultados obtenidos en la prueba escrita y profundizar en algunas características del razonamiento inductivo en el campo numérico, se aborda un segundo estudio empírico de carácter cualitativo.

El segundo estudio empírico se sitúa en un nivel interpretativo. Se trata de un estudio de casos, elegidos de acuerdo con las características y regularidades de las respuestas a las pruebas objetivas, en el que se emplean la entrevista clínica semiestructurada y el análisis de tareas y con el que se pretende obtener y delimitar perfiles en razonamiento inductivo numérico según los niveles obtenidos en la aproximación descriptiva anterior. Tanto el diseño como el análisis de los resultados de este estudio se exponen en el capítulo 6 de esta Memoria.

En definitiva, hemos utilizado una metodología mixta que se puede resumir en el siguiente proceso secuenciado:

A).- Para definir el problema de investigación hemos seguido el método psico-epistemológico desarrollado en la Memoria de Tercer Ciclo;

B).- Para determinar un modelo de desarrollo del razonamiento inductivo numérico hemos utilizado una metodología no empírica, como es el Análisis Didáctico, y un procedimiento de categorización y análisis de las respuestas verbales del estudio exploratorio previo;

C).- Para la contrastación de la bondad de una parte del modelo teórico de desarrollo hemos seguido una metodología empírica en su dos vertientes: cuantitativa y cualitativa.

En la figura 2.2 se expone el esquema general de la investigación que refleja el proceso descrito anteriormente.

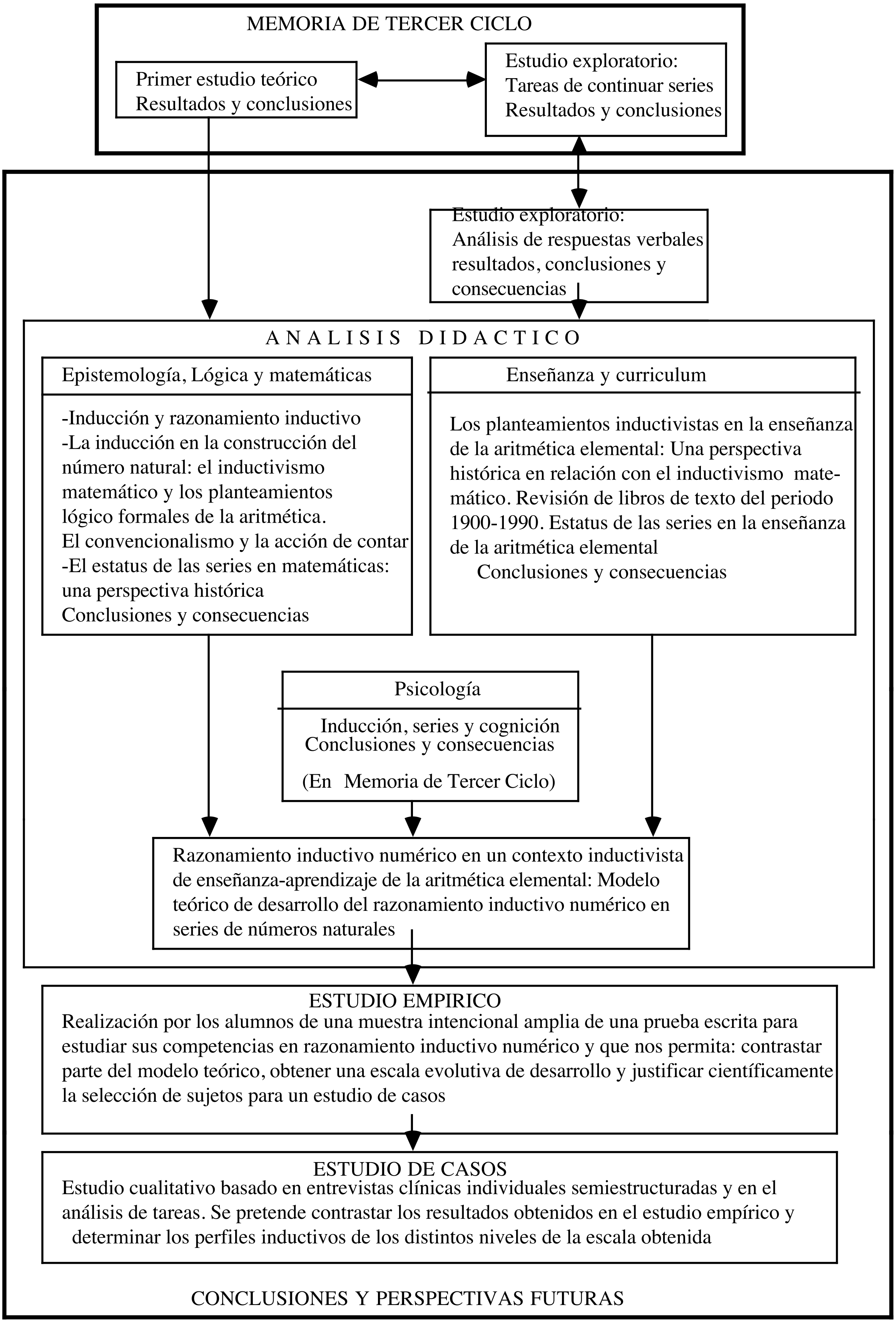

Figura 2.2.- Esquema general de la investigación realizada

2.3.2.- Tipos de estudio

En una buena parte del desarrollo de la investigación, en particular durante su primera mitad, se han trabajado simultáneamente los aspectos teóricos y prácticos. Desde este punto de vista, a lo largo de todo el trabajo, se han realizado los tres tipos de estudios siguientes:

a).- Estudios teóricos, con la intención de fundamentar y clarificar el problema de investigación:

a) Análisis histórico-crítico de la inducción en el campo de la epistemología, atendiendo a su enfoque en diferentes ciencias, tanto experimentales como formales;

b) Estudios históricos en matemáticas, con la intención de buscar los orígenes del concepto de serie y sucesión así como indagar en las diferentes construcciones de la serie numérica básica;

c) Estudio general en Educación Matemática relacionado con la numeración y las operaciones aritméticas, para interpretar la importancia de la acción de contar en la enseñanza de las primeras nociones numéricas;

d) Estudio curricular, a partir de una muestra amplia de libros de texto publicados en España, para registrar las distintas construcciones de la serie numérica básica y analizar el papel de la inducción en la enseñanza de la aritmética elemental;

e) Estudio de investigaciones en Educación Matemática relacionadas especificamente con nuestro problema concreto.

b) Estudios teórico-prácticos,
con la finalidad de buscar los métodos e instrumentos científicos de indagación y análisis de evidencia empírica más adecuados para observar en los niños los aspectos inductivos estudiados. A tal fin se han revisado los métodos e instrumentos utilizados en las investigaciones consultadas y, en general, en toda la bibliografía utilizada, centrándonos, básicamente, en Psicología y en Educación Matemática. Paralelamente se han realizado ensayos empíricos ocasionales y estudios piloto con grupos reducidos de alumnos.

c) Estudios prácticos de campo,
consistentes en distintas pruebas y actividades con escolares y que han culminado con la construcción de un instrumento de observación empírica adecuado al problema de investigación. Dicha construcción se ha

realizado paulatinamente sobre la base de los resultados de los distintos estudios reseñados en este apartado.

2.3.3.- Tratamiento de los datos empíricos

En la fase empírica de la investigación se obtienen datos de dos tipos diferentes según su naturaleza: datos cuantitativos, expresables numéricamente, y datos cualitativos, contenidos en expresiones verbales. El tratamiento de ambos tipos de datos ha sido el siguiente:

A) Datos numéricos

A1) En el caso de las pruebas escritas los datos obtenidos a partir de la evaluación de los ítems dicotómicos se recogieron en una hoja de cálculo Excel 2.2, versión MacIntosh, y se procesaron con los programas S.P.S.S, versión P.C., y Data Desk, versión Macintosh. Los gráficos se han realizado mediante el programa Cricket Graph, versión Macintosh, y las tablas mediante el programa Super Mac Draw de Macintosh.

A2) Para el estudio de la escalabilidad de los ítems se ha utilizado una calculadora, al no encontrar un programa informatizado específico para realizar tales cálculos.

A3) Los cómputos y cálculos necesarios para el análisis de frecuencias de las respuestas verbales de la prueba escrita del estudio exploratorio inicial, se han realizado, igualmente, con calculadora.

B) Datos verbales

B1) Para agrupar las respuestas verbales del estudio exploratorio nos hemos basado en el criterio de que las respuestas fueran idénticas y tuvieran el mismo significado aritmético e inductivo, supuesta la igualdad de la relación establecida para realizar la tarea.

B2) El tratamiento dado a los diálogos producidos en las entrevistas ha tenido en cuenta, en primer lugar, la interpretación dada por los alumnos a los juegos y su incidencia en la ejecución de los mismos; en segundo lugar, los términos relacionales utilizados por los escolares a la hora de justificar sus respuestas.

2.4.- Articulación de las hipótesis en el proceso metodológico

En el apartado anterior hemos expuesto un marco metodológico global. En este apartado vamos a especificar el proceso seguido para obtener las evidencias que justifican o confirman, en su caso, la bondad de cada una de las hipótesis.

Hipótesis H1: "Existe una corriente epistemológica y matemática que considera que la aritmética tiene un origen exclusivamente inductivo. Los planteamientos didácticos y curriculares de la aritmética escolar en España han participado de esta tendencia al tener un marcado signo inductivista"

La confirmación de esta hipótesis se realiza a dos niveles:

<u>1) Confirmación de la existencia del inductivismo aritmético y de su influencia en la enseñanza de la aritmética elemental.</u>
El procedimiento es totalmente reflexivo, a partir de información de tipo documental, y se lleva a cabo dentro del proceso de análisis didáctico. A la información se accede a través de un estudio histórico-crítico, basado en los métodos de la Epistemología Genética, y de una aproximación a los métodos históricos, dado que en el estudio se han utilizado documentos originales.
La confirmación se basa en tres estudios diferenciados:

a) Un estudio histórico epistemológico con evidencia documental y reflexión epistemológica, basado en citas originales de autores de reconocido prestigio científico;
b) Un estudio histórico matemático con evidencia documental y reflexión epistemológica, a partir de publicaciones editadas en España;
c) Un estudio de "didáctica histórica" con dos subestudios:
c1) Análisis de documentos escritos por autores de reconocido prestigio (evidencia documental y reflexión epistemológica);
c2) Revisión histórica y contemporánea de libros de textos publicados en España en el periodo 1900-1990 (evidencia documental).

por tanto el método utilizado se resume en el siguiente proceso: en primer lugar se confirman y justifican las creencias epistemológicas y, por tanto, la existencia del inductivismo aritmético; en segundo lugar se reafirma la existencia de dichas creencias en los libros de matemáticas consultados. Por último, en tercer lugar, se confirma su transmisión a través de los libros de texto.

El grado de confirmación es proporcional a la amplitud y profundización del estudio y al número y características de las evidencias documentales encontradas. La evidencia documental se considera en el sentido de sacar a la luz textos escritos que confirman las afirmaciones realizadas. No se trata de meras referencias que apoyan una argumentación, ya que no se pretende justificar o fundamentar una posición epistemológica o una teoría científica, sino de encontrar pruebas a favor de la existencia y significados de una tendencia, con lo que podemos decir que la confirmación se realiza mediante pruebas.

2) Obtención de evidencia empírica a partir de estudios muestrales y de casos

Estas evidencias ponen de manifiesto algunas características de los enfoques epistemológico y didáctico bajo los que usualmente se han tratado, y se abordan en la actualidad, los procesos de enseñanza-aprendizaje de la aritmética.

Se realizan dos estudios:
2.1) Estudio de respuestas verbales obtenidas a partir de la aplicación de una prueba escrita a una muestra grande de alumnos de Educación Primaria;
2.2) Realización de entrevistas semiestructuradas a una muestra de considerable tamaño (28 alumnos).

Hipótesis H2: "Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de números naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo, que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de 6 a 12 años"

En el proceso de validación de esta hipótesis debemos distinguir dos etapas desde un punto de vista metodológico: una primera de construcción del modelo y una segunda de valoración empírica del mismo, tal y como se puede observar en la figura 2.3.

En la primera etapa, a partir de un primer estudio teórico, nos planteamos la consecución de una investigación sobre desarrollo en razonamiento inductivo numérico. Para este fin era necesario tener unas pautas a contrastar empíricamente, por lo que hubo que realizar un estudio exploratorio para obtener información de las habilidades y estrategias utilizadas por los niños como indicadores de dichas pautas. De acuerdo con los resultados obtenidos se realiza un análisis didáctico (segundo estudio teórico) para obtener un marco referencial y explicativo en el que se construye y justifica el modelo de desarrollo en razonamiento inductivo numérico.

La segunda etapa se orienta hacia la evaluación empírica del modelo, mediante la construcción de una escala adaptada a dicho modelo y a la propia evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria (bondad de la escala).

PRIMERA ETAPA Construcción del modelo	**SEGUNDA ETAPA** Evaluación del modelo
Primer estudio teórico Necesidad de un modelo	**Estudio empírico** Construcción de la escala
Estudio exploratorio: Confirmación de su viabilidad	
Análisis didáctico Marco interpretativo y desarrollo conceptual del modelo	**Estudio de casos** Confirmación de la bondad de la escala

Figura 2.3.- Etapas seguidas en la construcción y validación de la hipótesis H2.

Dentro del campo de la metodología educativa, el proceso seguido se aproxima a lo que se conoce como P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) (Bisquerra, 1989, pág.32), que en nuestro caso podemos resumir en tres pasos:

Paso 1 Construcción del modelo

Construcción de un modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico como consecuencia de los siguientes elementos básicos:

a) Realización de un estudio exploratorio en el que se confirma

estadísticamente una escala acumulativa para escolares de 9 a 12 años (Escala de Mokken). Esta escala pone en evidencia la existencia de diferencias significativas en razonamiento inductivo numérico entre los sujetos según las puntuaciones obtenidas;
b) Análisis de las respuestas verbales dadas por los mismos sujetos. Las respuestas manifiestan competencias y estrategias concretas en razonamiento inductivo numérico;
c) Realización de un análisis didáctico que fundamenta el significado del modelo y su estructuración así como la racionalidad del mismo;
d) Los conocimientos sobre modelos evolutivos en el ámbito de la educación matemática, que sirven de referentes para la construcción de uno nuevo.

Paso 2 Construcción de una escala acumulativa asociada al modelo

Se llevan a cabo en este punto los siguientes trabajos:
- Determinación de tareas posibles de razonamiento inductivo numérico y de variables de acuerdo con el modelo teórico;
- Preparación de una prueba sobre el universo de tareas;
- Aplicación de la prueba a una muestra intencional controlada de escolares de 6 a 12 años;
- Replicación positiva de la escala de Mokken;
- Determinación de los ítems que forman una escala acumulativa;
- Estudio de la fiabilidad de la prueba;
- Establecimiento de niveles de acuerdo con los resultados de la escala.

Paso 3 Estudio de casos que confirma la bondad del modelo

A partir de un análisis estadístico de los resultados obtenidos con la muestra intencional, se seleccionan los casos de interés para la realización de unas entrevistas clínicas semiestructuradas. Este estudio cualitativo se desarrolla con los siguientes propósitos:

a) confirmar el ajuste de los escolares elegidos al nivel que han manifestado en la prueba objetiva. En actividades distintas a las de la prueba realizada, graduadas en orden evolutivo de acuerdo con el modelo teórico, los escolares deben alcanzar exactamente el grado de dificultad correspondiente a su nivel;
b) probar diferencias concretas entre escolares a los que les corresponden niveles distintos, independientemente de la edad

o curso. Alumnos del mismo curso (o edad) con niveles diferentes tienen que manifestar competencias diferentes en razonamiento inductivo numérico;
c) probar que alumnos del mismo nivel, independientemente de la edad o curso, consiguen superar exactamente el mismo grado de dificultad en las actividades que se les proponen y manifiestan exactamente las mismas competencias.

Hipótesis H3:"El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una nueva competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico"

Se llega a la confirmación de esta hipótesis mediante el estudio de los resultados obtenidos en dos pruebas diferenciadas: una con tareas de continuar series y otra con los cálculos correspondientes a las regularidades con las que aquéllas tareas están construidas y que se deben aplicar en la resolución correcta de las mismas. Con los resultados se lleva a cabo:
a) un análisis estadístico descriptivo del rendimiento en cada prueba, considerando el rendimiento como la puntuación total obtenida;
b) Un análisis correlacional entre los rendimientos;
c) Un análisis estadístico de la variable "diferencia de puntuaciones" obtenidas en cada prueba.

Hipótesis Hc "El efecto tope no es un efecto casual y local. Se produce en cualquier muestra importante de escolares de Educación Primaria que realice una prueba de continuar series preparada intencionadamente con tal fin"

En la prueba escrita de continuar series se incluye, intencionadamente, una tarea que presenta el efecto tope. La hipótesis complementaria queda confirmada si se encuentran alumnos en cuyas respuestas se presenta el error asociado a dicho efecto.

2.5.- Desarrollo cronológico de la investigación

El proceso ha sido largo y laborioso, con una duración de 8 años desde su comienzo en 1989. A lo largo de dicho período se pueden distinguir las siguientes seis fases temporales diferenciadas:

Fase I Periodo 1989-1990

a) Primera delimitación del Marco Teórico de la investigación a partir de la documentación revisada.

Las cuestiones formales y prácticas planteadas en el apartado 1.3.2., nos llevaron a realizar una selección bibliográfica general en la que se revisaron libros sobre cuatro campos científicos: Didáctica de la Matemática, Matemáticas, Epistemología (Lógica y Filosofía de las Ciencias) y Psicología.
Paralelamente se efectuó una revisión de revistas nacionales e internacionales de Didáctica de la Matemática utilizando los fondos de los Departamentos de Didáctica de la Matemática de las Universidades de Granada y Málaga.

Parte de los antecedentes que se exponen en el capítulo 1 son el resultado de esta primera fase.

b) Realización de diversas pruebas, por parte de grupos reducidos de alumnos de Educación General Básica, para fijar los cursos y edades más idóneos para un estudio exploratorio posterior. Igualmente se determinaron las tareas y el tipo de prueba que mejor se adaptaban a nuestras pretensiones y a las características reales del razonamiento inductivo de los alumnos.

La primera prueba constaba de cinco tareas diferentes (Memoria de Tercer Ciclo, Págs 98 y 99): Completar tablas que presentaban regularidades numéricas en los datos; problemas aritméticos de enunciado verbal con dibujos que presentaban regularidades numéricas; señalar, sobre una linea de puntos, los saltos siguientes a otros tres que están en progresión; continuar series conocidos los cuatro primeros términos; indicar los términos siguientes a partir de uno o dos conocidos. Cada individuo, cinco por curso de un total de 25 alumnos de segundo hasta sexto de Educación General Básica de la antigua escuela aneja, realizó dos tareas de las propuestas en el transcurso de una entrevista individual.

La segunda prueba (Memoria de Tercer Ciclo, págs. 102 y 103) constaba de 24 tareas de continuar series organizadas de acuerdo con las operaciones de la aritmética elemental y posibles valores de la diferencia y la razón. Todas las tareas consistían en continuar una serie de la que se conocían cuatro términos. En tres de las series se modificó un término para observar si los niños utilizaban o no todos los términos que se les proponían. Esta prueba la realizaron 45 alumnos de sexto curso del colegio Cerrado de Caderón de Málaga.

c) A partir del análisis de los resultados obtenidos (Memoria de tercer Ciclo, págs. 167-189), se realiza un estudio aritmético de las series numéricas finitas, en concreto de las progresiones aritméticas y geométricas, así como un análisis cognitivo de diversas tareas elementales con series. Se determina, de esta forma, el universo de series que constituirá el soporte de las fases empíricas.

Conclusiones y expectativas al finalizar este periodo:

a) Orientar nuestra investigación al razonamiento inductivo numérico;
b) Considerar la continuación de series como la tarea base de todas las pruebas que se propongan en el futuro;
c) Considerar los cursos de cuarto, quinto y sexto como los más idóneos para un estudio exploratorio;
d) Evitar en lo sucesivo incurrir en los errores cometidos. En particular, tratar de evitar, en lo posible, las explicaciones verbales previas a la realización de las tareas;
e) Medir el tiempo de realización.

Fase II Periodo 1991-1993

a) Realización de búsquedas retrospectivas en el centro de cálculo de la Universidad de Málaga, sobre las redes, bases de datos y periodos siguientes:

- En la red ERIC, periodo 1966- 92/ Marzo;

- En PSYCINFO, periodo 1967- 92/ Mayo;

De acuerdo con los descriptores utilizados (apartado 2.6), recibimos 49 resúmenes de la base ERIC y 45 de PSYCINFO. De ellos se consideraron de interés 52 documentos entre artículos y libros.

b) Revisión de los artículos y libros seleccionados;

c) Elaboración del diseño del estudio exploratorio;

d) Preparación de la prueba del estudio exploratorio, de acuerdo con los siguientes pasos:

d1) Según las variables del diseño se elabora una nueva prueba con tareas de continuar series en la que cada tarea constaba de dos apartados: continuar la serie obteniendo los dos términos siguientes y explicar la regla que siguen los números (Anexo 1.1).
La prueba contenía 16 tareas elegidas al azar mediante unas urnas preparadas a tal efecto, tomando una serie para cada valor de la variable "tipo de serie" (Memoria de Tercer Ciclo págs 109-111; Ortiz, 1993).

d2) Para que se dieran las mismas condiciones de realización en los diferentes colegios y cursos, tuvimos que elaborar una portada que explicara claramente cómo había que realizar la prueba. Para ello se prepararon dos portadas diferentes y se probaron en los cursos cuarto, quinto y sexto del Colegio Antonio Machado de Málaga capital, dividiendo cada curso en dos grupos según las portadas. Se eligió aquélla portada que no presentó ningún problema de interpretación.
Igualmente, se tomaron los tiempos de realización para comprobar la adecuación temporal de la prueba (Memoria de Tercer Ciclo, págs 107-109).

e) Aplicación de la prueba y recogida de la información en tres colegios de la provincia Málaga elegidos de acuerdo con los valores de la variable tipo de colegio:

Colegio Público-Urbano: Pablo Freire (Málaga)
Colegio Público-Rural: Las huertas (Coin)
Colegio Privado-urbano: Cerrado de Caderón (Málaga).

En la tabla 2.1, podemos ver la distribución de alumnos por colegio y niveles

	Privado Urbano	Público Urbano	Público Rural	Totales
4º	39	31	27	97
5º	41	27	31	99
6º	37	27	27	91
Totales	117	85	85	287

Tabla 2.1.- Distribución de los alumnos que realizaron la prueba del estudio exploratorio

f) Análisis de resultados correspondiente al primer apartado de las diferentes tareas (Memoria de Tercer Ciclo, Págs 117-141; Ortiz, 1993).

g) Redacción y presentación de la Memoria de Tercer Ciclo en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

h) Análisis de resultados correspondientes al segundo apartado de las diferentes tareas: Análisis de las respuestas verbales (Capítulo 3 de esta Memoria).

j) Publicación de una recensión del trabajo en la revista "Epsilon" (Revista de la S.A.E.M. "THALES) Nº 27. 1993. Págs. 95-96.

Hallazgos

Podemos considerar como fundamentales los dos siguientes: el efecto tope y la escala de Mokken, esta última no prevista en el diseño inicial.

Conclusiones y expectativas de esta fase

a) Necesidad de completar los niveles de la escala acumulativa de Mokken mediante una nueva escala que abarque toda la Educación Primaria, lo que equivale a la construcción de un modelo teórico evolutivo del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria.

b) Como consecuencia de las respuestas obtenidas en el estudio exploratorio y para llevar a buen fin el propósito indicado en el apartado anterior, se ve la necesidad de realizar estudios teóricos adicionales sobre los temas siguientes: Modelos de razonamiento inductivo; consideraciones epistemológicas y matemáticas de la naturaleza inductiva del número y la aritmética, para fundamentar el modelo teórico pretendido en sus primeros niveles.

Fase III Periodo 1994-1995

a) Exposición de los resultados obtenidos hasta el momento, en el primer Simposium Hispano-Italiano en Didáctica de la Matemática celebrado en Modena (Italia), con la presentación de la ponencia: "Numerical Series and Inductive Reasoning" (Págs. 67-72 del libro de ponencias);

b) Realización de un análisis didáctico (Expuesto en el Capítulo 4 de esta Memoria) restringido a los siguientes apartados:

b.1) Análisis epistemológico, consistente en un estudio histórico-crítico sobre los conceptos de inducción y razonamiento inductivo, los planteamientos inductivistas del número natural y la consideración de las series en matemáticas. Este estudio se ha realizado a partir de libros clásicos de epistemología y manuales antiguos de matemáticas.

b.2) Análisis de libros de una selección de libros de texto texto y manuales didácticos del periodo 1900-1990 desde una perspectiva inductivista, restringiendo el estudio al análisis de propuestas de actividades en relación con la enseñanza del número natural y la aritmética elemental, con especial atención sobre las series y su relación con otras actividades. Para la realización de este análisis hemos realizado un diseño previo con el objeto de determinar el tipo de estudio y su contenido.

c) Construcción de un modelo teórico mediante el cual explicar el desarrollo evolutivo de competencias en razonamiento inductivo numérico en los escolares, desde sus inicios en el campo numérico hasta la formalización y generalización de la aritmética. Para esta construcción han sido especialmente importantes:

c.1) Los resultados obtenidos en todos los estudios anteriores tanto teóricos como empíricos

c.2) El conocimiento y dominio de los investigadores de modelos y conocimientos básicos sobre la evolución del concepto de número, las operaciones aritméticas, el espacio y la geometría, que han servido de referentes válidos para el control externo del modelo.

d) Diseño de un estudio empírico muestral de carácter cuantitativo sobre competencias en la resolución de tareas de continuación de series de números naturales con el objeto de contrastar empíricamente la parte del modelo teórico correspondiente a escolares de Educación Primaria. El diseño completo con sus objetivos, metodología, definición de variables y construcción de una prueba, se exponen en el capítulo 5 de esta Tesis Doctoral.

El proceso seguido ha sido el siguiente:

1) Fijar unos objetivos iniciales del estudio;
2) Análisis del tipo de estudio a realizar, eligiendo un estudio transversal con enfoque de presente;
3) Análisis y reflexión teórica sobre el contenido de la prueba piloto;
4) Determinar las series que formarían parte de las tareas de la prueba piloto;
5) Realización de la prueba piloto por alumnos de primero, segundo y tercero de Educación Primaria del Colegio Cerrado de Caderón de Málaga capital;
6) Análisis de los resultados obtenidos y conclusiones;
7) Análisis y definición de las variables definitivas a considerar;
8) Determinación del contenido y formato de la prueba definitiva;
9) Selección de los colegios para la realización de las pruebas, siendo elegidos:

- Colegio Público-Rural "Nuestra señora de la Candelaria" (Benagalbón);
- Colegio Público-Urbano "Domingo Lozano (Málaga);
- Colegio Privado-Urbano "Cerrado de Caderón" (Málaga).

e) Diseño de un estudio empírico de carácter cualitativo (estudio de casos), con el objetivo de obtener una descripción cualitativa y una interpretación más profunda de algunas características del desarrollo inductivo numérico en una muestra significativa de alumnos de Educación Primaria. El proceso seguido fue el siguiente:

1) Determinar el tipo de estudio a partir de los modelos teóricos conocidos en investigación cualitativa;
2) Fijar los objetivos iniciales del estudio;
3) Determinar los criterios de construcción de los protocolos;
4) Diseñar las entrevistas, determinando su contenido, proceso de realización y recogida de la información;
5) Preparación del material de apoyo: materiales manipulativos, fichas de campo y material de grabación.

Fase IV Año 1996

a) Preparación de un equipo para aplicar las pruebas del estudio cuantitativo en el menor tiempo posible;
b) Realización de la prueba por los alumnos de la muestra intencional;
c) Análisis descriptivo inicial de resultados y obtención de una escala acumulativa de Guttman;
d) Identificación de regularidades y características generales del comportamiento observado y selección de los criterios para la realización del estudio interpretativo;
e) Selección y construcción de los instrumentos de recogida de datos y del material auxiliar: protocolos, material y tareas para el desarrollo de las entrevistas;
f) Selección de los alumnos para la realización de las entrevistas;
g) Desarrollo, durante tres semanas, de las entrevistas, que comenzaron una semana después de finalizada la aplicación de las pruebas escritas. El tiempo medio de grabación de cada entrevista fue aproximadamente de unos 45 minutos. En total se realizaron 28 entrevistas;

h) Análisis descriptivo de las respuestas a las pruebas escritas, incluyendo un estudio de fiabilidad de la prueba de continuar series;
i) Transcripción de las entrevistas a partir de las grabaciones en video;
j) Realización del análisis cualitativo de la información obtenida en las entrevistas.

Fase V año 1997

a) Conclusiones generales de la investigación;
b) Revisión de los documentos y redacción definitiva de la Tesis Doctoral.

2.6.- Fuentes de información y documentación

- Búsquedas informatizadas a través del servicio central de informática de la Universidad de Málaga consiguiendo información de la base de datos E.R.I.C. (Office of Educational Research and improvement (OERI) Washington), mediante el centro de información y documentación científica C.I.N.D.O.C y el Instituto de Información y Documentación en Ciencia y Tecnología (Madrid)

Los campos que se han hecho intervenir en las búsquedas han sido: Educación, Educación Matemática, Didáctica de la Matemática y Psicología, Lógica, Matemáticas y Epistemología.

Los descriptores utilizados han sido: induction, inductive, mathematic, education, logic, model, number, reasoning, arithmetic, rules.

- Revistas especializadas en Educación Matemática de los fondos del departamento de Didáctica de la Matemática de las Universidades de Granada y Málaga.

Revistas de investigación en Psicología de los fondos de la biblioteca de la Facultad de Psicología de la Universidad de Málaga.

Fondos del Centro de Documentación de Didáctica de la Matemática THALES.

-Libros especializados de las bibliotecas de las Facultades de Ciencias de la Educación de las Universidades de Granada y Málaga y del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. En especial se han consultado:

- Actas de Congresos internacionales en Educación Matemática.

-Publicaciones especializadas en informes y tratados de investigación educativa:

- Handbook of Research on Teacher Education
- Research in Mathematics Education (National Council of Teachers of Mathematics).

- Libros de metodología de investigación educativa

-Libros de Epistemología, con mención especial a la Epistemología Genética y a la epistemología del número natural.

-Libros de Psicología del aprendizaje.

-Libros de Matemáticas desde el siglo XVI hasta los inicios del siglo XX.

-Textos de enseñanza de la Matemática abarcando el siglo XX en dos bloques:

a) Anteriores a los planes de estudio de 1970
b) A partir de 1970

-Libros de epistemología de las ciencias, lógica y matemáticas, desde el siglo XVII.

-Libros de Didáctica de la Matemática.

-Tesis doctorales y memorias de Tercer ciclo leidas en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Para una consulta detallada de las referencias correspondientes nos remitimos al apartado de la Tesis Doctoral dedicado a la Bibliografía.

2.7.- Modalidad de la investigación

De acuerdo con la taxonomía de investigaciones que propone Bisquerra (1989, págs 60 y sigtes), el trabajo realizado se corresponde con las siguientes modalidades:

Según el **proceso formal,** utilizamos el método hipotético-deductivo.

Según el **grado de abstracción,** se trata de una investigación a la vez pura o básica, dado que se pretende aumentar el conocimiento teórico sobre el campo en estudio, y aplicada, dado que también se aporta información que tiene una utilidad práctica.

Según la **naturaleza de los datos,** hemos de decir que se trata de una investigación tanto cuantitativa como cualitativa. No obstante, si nos atenemos al fin primordial del trabajo, se trata de una investigación cualitativa en el sentido de **investigación interpretativa**, puesto que no pretendemos generalizar los resultados más allá de los alumnos observados. Podemos decir que se trata una investigación mixta en la que intervienen métodos no empíricos y métodos empíricos en su doble faceta cuantitativa y cualitativa.

Según la **orientación,** está orientada a conclusiones y no a decisiones.

Según la **manipulación de variables,** es una investigación no experimental de tipo descriptivo, por ser un estudio de desarrollo;

Según la **dimensión cronológica,** tiene una faceta histórica ya que se manejan documentos antiguos. Desde el punto de vista de los estudios empíricos realizados se trata de una investigación descriptiva con enfoque de presente ya que describimos fenómenos sobre el presente, tal y como aparecen en el estudio de casos;

Según las **fuentes,** se trata de una investigación documental y metaanalítica como parte del análisis didáctico y una investigación empírica;

Según la **temporalización,** la fase empírica es transversal ya que la investigación se ha realizado en un breve lapso de tiempo y supone un corte transversal en la situación de los sujetos ante el problema investigado.

2.8.- Criterios de bondad

De acuerdo con distintos autores, (Fernández Cano (1995), Cohen y Manion (1990), Bisquerra (1989)), toda investigación debe cumplir ciertos requisitos, algunos de los cuales dependen de la naturaleza de la misma. Nosotros nos hemos ajustado a los siguientes:

a) **Replicabilidad**

Pensamos que la investigación que hemos realizado puede ser replicada en más de un punto:

- Desde el punto de vista empírico, en el mismo sentido en el que se ha realizado la comprobación de la escala de Mokken obtenida en el primer estudio;
- Desde el punto de vista teórico, siguiendo los pasos establecidos y disponiendo de la información básica general a que se alude en los apartados correspondientes;
- Realizando el estudio completo en otras muestras de composición diferente;

b) **Generalizabilidad y posibilidad de desarrollo posterior**

- A partir de documentos no utilizados se puede profundizar en el estudio teórico y abrir nuevas perspectivas para futuros estudios;
- El estudio proporciona una plataforma para la realización de investigaciones experimentales que permitan extender y generalizar los resultados
- El estudio se puede ampliar a niveles superiores o inferiores del sistema educativo o teniendo en cuenta otras consideraciones, otros instrumentos (tareas, etc.), otros factores, etc., llegando a un modelo más general que incluso modifique la interpretación de los resultados obtenidos aquí.

b) **Imparcialidad**

Las conclusiones a las que hemos llegado tienen el alcance que se puede atribuir a las evidencias que se presentan. En tal sentido, no hay unanimidad de criterios y, por tanto, el problema siempre está planteado. En el desarrollo de la investigación se ha procurado ser objetivo, en lo posible, y subjetivo en lo necesario, considerando que, a pesar de todo, se aportan datos y argumentos novedosos y nuevas formas de afrontar el problema.

c) **Fiabilidad**

La fiabilidad de nuestra investigación la podemos avalar por los siguientes aspectos:

-El control de la información (apartado 2.6). Su valoración depende de los medios disponibles y por tanto de la posibilidad de acceder a cierto tipo de información. En este sentido consideramos que la información utilizada ha sido suficiente, ya que ha posibilitado una investigación no realizada y por tanto original, tanto en su contenido e intenciones como en su proceso constructivo.

- La rigurosidad, profundidad y amplitud de los análisis realizados en todos los ámbitos científicos que hemos considerado oportunos en relación con el **razonamiento inductivo numérico.**

- El no escatimar esfuerzos en cuanto al proceso completo de la investigación, realizando cuantos estudios se han creído necesarios para llegar a obtener evidencias teóricas y empíricas que avalan las cuestiones planteadas así como los resultados obtenidos.

- Resultados análogos obtenidos en dos estudios muestrales en los que han intervenido más de 270 alumnos pertenecientes a colegios distintos y que se han realizado con un diferencia de tres años entre ellos.

d) **Consistencia empírica**

No hay contradicción entre el modelo teórico de desarrollo, los resultados estadísticos y la evidencia empírica de las respuestas de los escolares. Ello es comprobable tanto en los anexos correspondientes como en los capítulos de esta Tesis Doctoral dedicados al análisis de los resultados. Las grabaciones obtenidas en las entrevistas y las pruebas realizadas por los alumnos constituyen una prueba fehaciente que permanecerá bajo custodia para posibles revisiones y replicaciones de esta investigación.

e) **Validez**

En cuanto a la validez de constructo teórico señalar que hemos realizado un análisis didáctico profundo teniendo en cuenta los principales campos del saber que interaccionan con nuestra conceptualización de **razonamiento inductivo numérico finito.**

En cuanto a la validez interna del estudio exploratorio se exponen en el Capitulo 3 los resultados de un análisis factorial que determina las componentes teóricas de la aritmética del numero natural implícitas en nuestro diseño estadístico.

Para la prueba del estudio empírico hemos realizado una contrastación de la fiabilidad y validez estadística del instrumento, obteniendo un grado muy alto de fiabilidad.

CAPITULO 3

ANALISIS DE LAS RESPUESTAS VERBALES Y DE LAS ESTRATEGIAS DE CALCULO DEL ESTUDIO EXPLORATORIO

3.1.-Introducción

Como se ha mencionado en el apartado del capítulo 1 dedicado a los antecedentes y en la descripción de las fases del proceso de investigación que se expone en el capítulo 2, la última parte de la investigación que se recoge en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993) consistió en un estudio exploratorio en el que una muestra formada por 297 sujetos con edades comprendidas entre los 9 y los 12 años realizaron la prueba mixta de razonamiento inductivo numérico que figura en el Anexo 1.1 de este informe.

La prueba, cuya construcción y características se exponen con detalle en los capítulos correspondientes de la memoria citada, a los que nos remitimos, consta de dos partes diferenciadas: a) completar 16 tareas de continuar series de números naturales; b) explicar, en propias palabras, la regla o propiedad que siguen los números en cada una de las 16 series propuestas. Como se puede observar en el mencionado Anexo 1.1, ambas partes se han intercalado en la prueba de manera que cada una de las tareas de continuar series va seguida inmediatamente de un apartado en el que se pide la explicación verbal correspondiente.

Los resultados de la primera parte de la prueba (a)) fueron analizados en la Memoria citada y sirvieron para obtener una escala acumulativa para el rango de edades estudiadas. Los resultados de la segunda parte (b)) se exponen con detalle en el presente capítulo junto a un breve estudio sobre la evolución de los niveles de la escala de Mokken.

Como veremos a lo largo del desarrollo de la investigación, la información extraída de las respuestas verbales ha sido útil para profundizar en las capacidades de razonamiento inductivo numérico de los escolares de Educación Primaria y ha propiciado un acercamiento importante a la verdadera naturaleza de este tipo de razonamiento. En particular, la evidencia empírica obtenida sobre la gran variedad de esquemas, estrategias, conceptos, procedimientos y habilidades aritméticas empleadas en la resolución de las 16 tareas propuestas ha servido, en primer lugar, para construir un modelo sobre la evolución de competencias y capacidades básicas al respecto y, en segundo lugar, para orientar el estudio empírico desarrollado posteriormente. Los fundamentos y la construcción del modelo se exponen en el capítulo 4; el estudio empírico realizado se expone en los capítulos 5 y 6 de esta Memoria.

Entre los resultados relevantes obtenidos con el análisis de las respuestas verbales podemos adelantar el predominio de algunos aspectos prenuméricos, tales como el uso de referencias espaciales (aspectos topológicos basados en la orientación sobre la recta numérica: “atrás”, “bajando”, “subiendo”, etc.) o temporales (antes, después, etc.) al establecer las comparaciones entre los términos de las series, o la aplicación generalizada de la acción de contar para explicar criterios aditivos, que se constata mediante el uso de expresiones como "van de dos en dos, subiendo". Igualmente, aunque esta vez en los niveles superiores, se detectan esquemas prealgebraicos que manifiestan una situación cognitiva caracterizada por el dominio y generalización de propiedades numéricas, como la paridad, o de relaciones aritméticas como “doble-mitad”.

En los apartados que siguen, una vez abordado el propósito del estudio y el procedimiento sistemático que se ha utilizado en el análisis, se describen las respuestas y el estudio realizado sobre cada uno de los cuatro bloques (aditivo, sustractivo, multiplicativo y partitivo) asi como sobre las tareas más representativas de los mismos. Se concluye el capítulo con una exposición detallada de los resultados y principales consecuencias para la investigación, entre las que se encuentra una caracterización de cada uno de los niveles de la escala de Mokken en función de los tipos de respuesta de los sujetos de cada nivel a cada una de las tareas.

3.2.- Propósito del análisis y procedimiento utilizado

Con el análisis de las respuestas verbales nos proponemos:

- organizar la información recogida estableciendo categorías de respuestas;
- estudiar la distribución de las respuestas por cursos y edades ;
- delimitar los patrones y regularidades que puedan ser de utilidad para la construcción de un modelo teórico de desarrollo del razonamiento inductivo numérico que abarque toda la Educación Primaria, para lo que es importante:
- comprobar si los niveles de la escala de Mokken se ajustan a las pautas observadas, es decir, si existe o no relación entre la evolución en razonamiento inductivo y la transición de unos niveles a otros.

El procedimiento seguido con cada una de las tareas queda sistematizado en los siguientes puntos:

a) **Clasificación** de respuestas y **selección** de las más frecuentes.

Para la clasificación de las respuestas a una misma tarea se ha utilizado el siguiente criterio: Dos respuestas se identifican como equivalentes y se asignan a la misma clase si se cumple una de las dos condiciones siguientes:

1) Tienen exactamente el mismo enunciado
2) Tienen enunciados diferentes pero encierran el mismo significado inductivo numérico, es decir, la regla implícita hace referencia a los mismos conceptos y procedimientos aritméticos así como a la misma estrategia inductiva.

La selección de las más frecuentes se realiza teniendo en cuenta el número de respuestas en las distintas categorías obtenidas. Una categoría se considera frecuente si el número total de respuestas incluidas en la misma supera al 5% del total. En este sentido hemos de aclarar que no ha habido una gran dispersión en las respuestas más frecuentes, obteniéndose un máximo de cuatro categorías para una misma tarea.

b) **Justificación** de la clasificación y discusión de criterios.

En este punto se especifican las características aritméticas e inductivas de cada categoría y las diferencias entre ellas.

c) **Distribución** de frecuencias.

Se analizan las frecuencias de las distintas categorías de respuestas por cursos o edad y se discute su evolución.

d) Análisis global de las respuestas menos frecuentes (**otras respuestas**).

En este punto se observan, en las respuestas menos frecuentes, los aspectos inductivos y numéricos que no aparecen en las más frecuentes.

e) Estudio de las **estrategias** de cálculo.

Además de la expresión verbal pedida, la mayoría de los alumnos han expresado por escrito los cálculos o relaciones numéricas que han empleado para determinar la regla. En este apartado se estudia dicha información adicional, desde el punto de vista del razonamiento inductivo numérico, estableciéndose las estrategias y procedimientos inductivos que se deducen de los comportamientos observados y que explican el sentido de las respuestas y el modo en que se han realizado las tareas.

f) Predominio de las **estrategias aditivas** en contextos multiplicativos.

Se analiza la aplicación de esquemas aditivos en la resolución de las tareas correspondientes a los bloques multiplicativo y partitivo. El mero hecho de poder interpretar una multiplicación como una suma de sumandos iguales o una división como una serie de restas sucesivas hace posible que las series de estos tipos se puedan interpretar y resolver aditivamente, lo que se manifiesta, sobre todo, en las respuestas de los sujetos que aún no han integrado los esquemas multiplicativos en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico.

En los apartados que siguen se expone el estudio realizado sobre las respuestas a los cuatro bloques en que se divide la prueba (aditivo, sustractivo, multiplicativo y partitivo), siguiendo, para cada uno de ellos, el mismo orden establecido en el proceso descrito anteriormente.

En relación con los dos primeros bloques (aditivo y sustractivo) se expone únicamente el estudio realizado sobre la primera de las tareas correspondientes a cada uno, dado que en las restantes se reproducen las mismas respuestas. Por el contrario, al no existir uniformidad en las respuestas de los bloques multiplicativo y partitivo, se expone el estudio realizado sobre todas y cada una de las tareas de ambos bloques.

3.3.- Respuestas al bloque aditivo

Exponemos en primer lugar, de forma resumida, el análisis efectuado sobre las respuestas verbales a la primera de las cuatro tareas del bloque. A continuación concluímos el apartado con una breve referencia a la uniformidad de las respuestas dadas a las cuatro series de este bloque.

3.3.1.- Análisis de respuestas a la primera tarea

La serie que determina la tarea analizada es la siguiente:

1, 6, 11, 16, ___ , ___

a) Clasificación y selección

De un total de 279 respuestas se relacionan a continuación las cuatro más frecuentes, a las que notamos desde R1 hasta R4 para facilitar el análisis posterior:

R1: "Van de cinco en cinco"
R2: "Sumando de cinco en cinco"
R3: "Sumandole cinco"
R4: "A cada número hay que sumarle cinco más"

b)Justificación

En la categoría R1 hemos incluido la respuesta "de cinco en cinco", por considerarla análoga a la respuesta "van de cinco en cinco". Ambas contabilizan en el total de respuestas de esta categoría.

Aunque en principio las cuatro respuestas parecen no presentar diferencias significativas, lo cierto es que existen diferencias importantes entre ellas desde el punto de vista del razonamiento inductivo numérico. En efecto, se pueden apreciar diferencias de tipo semántico, de tipo sintáctico numérico, de completitud aritmética, de nivel de representación y de tipo inductivo. Pasemos a analizar más detenidamente estas diferencias.

Podemos interpretar la sustitución de la expresión "van" por la expresión "sumando" como un indicador del paso de la etapa del recuento a la etapa propiamente aritmética. En este sentido podemos decir que los alumnos que han respondido R2, a diferencia de los que han respondido R1, utilizan la suma de números naturales. Por otra parte, la respuesta R1 puede ser debida a dos causas: que exista una verdadera limitación de tipo aritmético, o que, sin existir dicha limitación, sea más cómodo expresar así la relación encontrada. En cualquier caso, la respuesta manifiesta un dominio de la secuencia numérica y de la acción de contar, por lo que podemos decir que ambas respuestas, R1 y R2, denotan la existencia de diferencias a nivel representativo y de acción y, por consiguiente, indican diferentes actitudes de los escolares al realizar la tarea.

Desde el punto de vista del razonamiento inductivo, ambas respuestas están al nivel de la "**iteración**" y, por tanto, de la repetición indefinida y ordenada de acuerdo con la secuencia numérica básica; afirmación que no se puede sostener, sin embargo, para el caso de la respuesta R3, en la que la suma tiene un sentido acumulativo y no de salto como así ocurre en las dos respuestas anteriores.

Desde el mismo punto de vista inductivo cabría hablar de "**enumeración**" con independencia del orden para la respuesta R4, en la que se aprecia, además, una extensión a todos los números, lo que introduce una diferencia inductiva importante con la respuesta R3. No obstante, esta extensión es una **generalización** que solo se puede realizar en el caso de las colecciones finitas.

Por otra parte podemos decir, desde un punto de vista matemático, que las respuestas R3 y R4 representan un acercamiento al concepto de función, denotando la existencia de un nivel prealgebraico que no se manifiesta en las respuestas R1 y R2.

Por último, de acuerdo con las interpretaciones de Vergnaud (1980) sobre las operaciones aritméticas, las tres primeras respuestas sólo consideran las transformaciones, mientras que la cuarta considera tanto los estados como las transformaciones.

c) Distribución

En la tabla 3.1 figura la distribución de frecuencias absolutas de los tipos de respuesta por cursos.

	4º	5º	6º	Totales
R1	41	34	21	96
R2	8	17	12	37
R3	12	7	19	38
R4	3	9	17	29
	54	67	69	200

Tabla 3.1. Frecuencias absolutas de las respuestas más frecuentes por cursos.Tarea X1

Como se observa en dicha tabla, las cuatro respuestas más frecuentes fueron dadas por 200 alumnos, lo que corresponde al 71'68 % de los sujetos que han respondido verbalmente y al 67'33% del total de la muestra, ya que una parte de los alumnos dejaron la respuesta en blanco.

Desde el punto de vista de la construcción de una secuencia de desarrollo hemos de destacar que la frecuencia de aparición de la respuesta R1, basada en el recuento, disminuye a medida que los cursos avanzan. Por el contrario, la frecuencia de aparición de la respuesta R4, aumenta a medida que pasamos de los cursos inferiores a los superiores, mientras que las respuestas R2 y R3 no manifiestan tendencia alguna en este sentido.

Si observamos la distribución de frecuencias por curso, vemos que las respuestas de los escolares de cuarto curso se concentran en torno a la respuesta R1, las de quinto curso entre R1 y R2 y, por último, las de sexto curso se distribuyen entre los cuatro tipos de respuesta.

d) Otras respuestas

Además de las más frecuentes, se han producido otras 58 respuestas diferentes que se relacionan en el Anexo 3.1. De manera resumida dichas respuestas presentan las siguientes connotaciones interesantes:

d1) Considerar los números naturales como una lista memorística

(R51, R17);
d2) Tener en cuenta aspectos topológicos como la orientación sobre la recta numérica (R32, R37, R52);
d3) La consideración de un esquema clasificatorio para generalizar no sólo una regla aritmética sino, también, una propiedad numérica (R23, R28, R38, R39, R40, R62).

e) Estrategias

En lo que se refiere al razonamiento y a los procedimientos de cálculo utilizados nos limitamos a su mera descripción sin entrar en la extrapolación de los resultados o caer en la tentación de establecer normas generales de comportamiento cognitivo. A pesar de ello, estamos convencidos de que el conocimiento de los procedimientos empleados en las tareas propuestas permitirá comprender mejor como llegan los escolares a obtener las regularidades numéricas.

Los principales resultados del análisis en este punto son los siguientes:

e1) Los cálculos utilizados por los niños han tenido tres cometidos básicos:

1) para comprobar la regularidad numérica;

2) para determinar la regla;

3) para calcular los números que faltan en la serie.

Las conductas anteriores son excluyentes, puesto que los niños solo manifiestan una de ellas, y permiten establecer categorías de razonamiento inductivo según el tipo de estrategia o procedimiento empleado.

e2) Un total de 121 escolares de la muestra, lo que representa el 56,27% de los que han respondido, han utilizado los cálculos siguientes para reconstruir la serie:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 6 & 11 & 16 & 21 \\ \underline{+5} & \underline{+5} & \underline{+5} & \underline{+5} & \underline{+5} \\ 6 & 11 & 16 & 21 & 26 \end{array}$$

lo que podemos denominar como **verificación o comprobación** de una posible regla, que en este caso es "sumar cinco". Para estos sujetos, la verificación de que la regla se cumple con los datos de la tarea es motivo suficiente para su generalización.

Desde el punto de vista del desarrollo podemos decir que este tipo de comprobación no es una característica propia del desarrollo en estas edades, sino, más bien, una manifestación de un estado transitorio en el que aflora, en un elevado porcentaje, esta forma particular de reafirmar una conclusión inductiva.

e3) A pesar de que se trata de respuestas escritas a una prueba, en la que no ha habido, por tanto, posibilidad de intervención del investigador, hemos obtenido la siguiente información sobre los procedimientos que utilizan 25 escolares de la muestra para determinar la regla:

a) Once niños han utilizado, sólamente, los dos primeros términos de la serie, determinando su diferencia: 6-1=5;

b) Cuatro han utilizado los tres primeros términos de la serie, calculando en primer lugar la diferencia entre los dos primeros y verificando, posteriormente, con los dos siguientes:

6-1=5   11-6=5

c) Nueve han utilizado los cuatro términos:

6-1=5   11-6=5   16-11=5

d) Un alumno ha utilizado los tres últimos, invirtiendo el orden de los procesos anteriores:

16-11=5   11-6=5

Los alumnos de quinto y sexto son, básicamente, los que indican explícitamente los cálculos necesarios para obener la regla.

e4) Debido a la simplicidad de la serie, la mayoría de los niños han utilizado cálculo mental para determinar tanto el criterio como los dos términos pedidos. Sólo 31 sujetos han realizado por escrito los cálculos necesarios para determinar dichos términos.

e5) Tres alumnos han argumentado su solución de la siguiente manera:

1) "Detrás del 6 hay 1. De 1 a 6 hay 5. Ese es el número que sumo"

2) "Resto para saber de cuanto en cuanto van sumando"

3) "La regla no empieza de cero, sino por un uno. Entonces se multiplica por cinco y se suma uno más:

5x3=15+1=16
5x4=20+1=21
5x5=25+1=26"

e6) Seis alumnos han utilizado la representación gráfica para explicar lo que hacen. Los gráficos utilizados son de dos tipos:

1) Uso de barras para el recuento:

1------6------11------16------21------26
/////

2) Uso de flechas para indicar la transformación:

$6 \xrightarrow{+5} 11 \xrightarrow{+5} 16 \xrightarrow{+5} 21 \xrightarrow{+5} 26$

3.3.2.- Uniformidad de las respuestas del bloque aditivo

Al hablar de **uniformidad de las respuestas** en el bloque aditivo, nos referimos al hecho de que los alumnos han manifestado el mismo tipo de respuestas y cálculos en las cuatro tareas del bloque, es decir, han utilizado las mismas expresiones lingüísticas y los mismos procedimientos de cálculo en las cuatro tareas. Las únicas variaciones con respecto a las pautas observadas en la primera tarea y analizadas en el apartado anterior han sido las siguientes:

1) En la serie:

0, 6, 12, 18, ___ , ___ ,

diez alumnos han utilizado un modelo multiplicativo, al coincidir los términos con la tabla de multiplicar del seis, lo que no ha ocurrido así con la tarea X4, cuyos términos se ajustan a la tabla de multiplicar del diecisiete.

2) Veinte niños que utilizaron cálculo mental para responder a las dos primeras tareas del bloque se vieron obligados, ante el

aumento notable de la diferencia entre los términos, a acudir a los cálculos escritos para responder a las dos tareas siguientes.

3.4.- Respuestas al bloque sustractivo

Siguiendo el esquema utilizado en el estudio del bloque anterior exponemos, en primer lugar y de forma resumida, el análisis efectuado sobre las respuestas verbales a la primera de las cuatro tareas del bloque. A continuación concluímos el apartado con una breve referencia a la uniformidad de las respuestas dadas a las cuatro series de este bloque.

3.4.1.- Análisis de respuestas a la primera tarea

La serie de la primera tarea de este bloque es la siguiente:

16, 13, 10, 7, __ , __ ,

a) Clasificación y selección

Hemos contabilizado 272 respuestas que se distribuyen uniformemente entre los distintos cursos. Las más frecuentes han sido las siguientes:

R1: "Restando de tres en tres"
R2: "Restarle tres a cada número"
R3: "Restando tres"
R4: "Restar 3"

b) justificación

Las cuatro respuestas denotan claramente un **nivel aritmético**, al no aparecer en ellas, a diferencia de las series aditivas, la utilización del recuento. Las respuestas R1 y R3 manifiestan la **iteración** por la utilización del gerundio. La respuesta R2 conlleva una extensión implícita y podemos hablar de "**enumeración**" y se corresponde con la respuesta R4 de la primera tarea del bloque aditivo. La cuarta respuesta solo indica **transfo-rmación sin iteración** y se corresponde con la respuesta R6 de la primera tarea del bloque aditivo. Tanto en estas respuestas como en las anteriores podemos observar la no utilización del primer término, que es en definitiva el que determina la serie.

c) Distribución

En la tabla 3.2 figura la distribución de frecuencias absolutas de los tipos de respuestas más frecuentes.

	4º	5º	6º	Totales
R1	24	18	23	65
R2	4	5	16	25
R3	6	9	11	26
R4	6	8	6	20
Totales	40	40	56	136

Tabla 3.2. Frecuencias absolutas de las respuestas más frecuentes por cursos. Tarea X5

Las cuatro respuestas más frecuentes corresponden al 50% del total, lo que indica que en este bloque se produce una mayor dispersión que en el bloque aditivo, en el que dicho porcentaje ascendía al 71,68% del total de respuestas emitidas.

d) Otras respuestas

Además de las cuatro más frecuentes se han contabilizado otras 76 respuestas que se detallan en el Anexo 3.1. Del análisis de las mismas se pueden destacar las siguientes connotaciones:

d1) Uso de aclaraciones:
-**inductivas** con generalizaciones no aritméticas, tales como: "siempre", "así sucesivamente" y "cada vez" (R7, R8, R18, R25, R32, R44, R46, R48, R50, R63, R64);
-**topológicas y espaciales**, tales como: "hacia abajo", "saltarse números"; indicando el sentido de disminución con términos como: "atrás", "retrocede", "bajando" (R12, R14, R15, R16, R18, R20, R24);

d2) Uso del verbo “quitar” en lugar de “restar” (R5 con 14 respuestas; R6 con 6 respuestas; R7 con 4 respuestas; R8, R40, R64);

d3) Uso de **ritmos** y de la **acción de contar de tres en tres** en disminución (R8, R11,R14, R20, R24, R26, R30, R43, R45, R49, R60).

e)Estrategias

Un total de 170 escolares de la muestra han realizado cálculos por escrito en las tareas del bloque sustractivo, coincidiendo los procedimientos con los utilizados en el bloque aditivo. En efecto:

e1) 117 alumnos han comprobado o verificado la regla obtenida reconstruyendo la serie de la siguiente manera:

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{-3} \\ 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{-3} \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{-3} \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{-3} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \underline{-3} \\ 1 \end{array}$$

lo que representa el 68,82% del total de las respuestas. Este procedimiento presenta una distribución uniforme por cursos: 31 alumnos de cuarto, 44 de quinto y 42 de sexto.

e2) Un alumno ha realizado la reconstrucción aditiva siguiente:

$$\begin{array}{r} 1 \\ \underline{+3} \\ 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ \underline{+3} \\ 7 \end{array} \quad \begin{array}{r} 7 \\ \underline{+3} \\ 10 \end{array} \quad \begin{array}{r} 10 \\ \underline{+3} \\ 13 \end{array} \quad \begin{array}{r} 13 \\ \underline{+3} \\ 16 \end{array}$$

e3) Los cálculos realizados para determinar la regla se pueden agrupar en torno a los dos casos diferenciados siguientes:

1) Cálculo de la diferencia de dos términos consecutivos, bajo dos modalidades diferentes: los términos consecutivos son los dos primeros (conducta manifestada por 7 alumnos); los términos consecutivos son el segundo y el tercero (conducta manifestada por 2 alumnos);

2) Restar 3 al primer término para determinar el segundo (procedimiento utilizado por 9 alumnos), es decir:

16-3=13

e4) Al igual que en las series aditivas, los alumnos que han continuado correctamente la serie, han llegado al resultado por tres vías diferentes:

1) Reconstruyendo la serie, como hemos explicado anteriormente;

2) Mediante cálculo mental (alumnos que no han expresado cálculos por escrito);

3) Calculando los dos términos a partir del último conocido y de la diferencia (7-3=4 ; 4-3=1), procedimiento que han utilizado 29 alumnos.

e5) En lo que se refiere a la utilización de gráficos, se reproducen los mismos resultados observados en el bloque aditivo y en los mismos alumnos.

3.4.2.- Uniformidad de las respuestas al bloque sustractivo

Las respuestas a las tres tareas restantes son similares a las que se han analizado en el apartado anterior, pudiéndose asegurar que dichos resultados son comunes a todas y cada una de ellas. No obstante, de la revisión realizada sobre las demás tareas del bloque, podemos añadir los dos aspectos siguientes:

1) Hay alumnos que sin haber realizado cálculo alguno en la primera tarea, restan dos términos consecutivos para determinar la diferencia en las tres tareas siguientes;

2) 16 de los 170 alumnos que realizaron la primera tarea dejan en blanco alguna de las tres tareas siguientes.

3.5.- Respuestas al bloque multiplicativo

Según se expone en el apartado 1.2.3.1 se ha realizado, con posterioridad al estudio recogido en la Memoria de Tercer Ciclo y a partir de los datos obtenidos en las tareas de continuar series del estudio exploratorio (primera parte de la prueba), un contraste de hipótesis, mediante el estadístico chi-cuadrado, y un análisis factorial que muestran la existencia de diferencias significativas entre el rendimiento en las ocho primeras tareas (bloques aditivo y sustractivo) y el rendimiento en las ocho últimas (bloques multiplicativo y partitivo).

Las respuestas verbales correspondientes ponen también de manifiesto (segunda parte de la prueba) diferencias entre dos grandes tipos de enfoques o maneras de abordar las tareas de razonamiento inductivo numérico: aditivo y multiplicativo. Desde este punto de vista, los sujetos con “enfoque o mentalidad aditiva” resuelven las tareas multiplicativas y partitivas utilizando estrategias y procedimientos propios del campo aditivo, lo que en unos casos da resultado correcto y en otros no. En consecuencia, con objeto de incluir el estudio de estos comportamientos particulares, se amplía a partir de aquí el análisis desarrollado en los apartados anteriores con un punto adicional (apartado f)), en el que se trata específicamente el grado de predominio de las **estrategias aditivas** al resolver tareas multiplicativas y partitivas.

3.5.1.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X9

La serie correspondiente a esta tarea es la siguiente:

1, 2, 4, 8, __ , __ ,

que es la más simple de las series multiplicativas, debido a que la tabla de multiplicar del dos es la primera que se memoriza en la escuela y una de las que mejor se dominan en Educación Primaria. Por otra parte, debido a que la serie representa las potencias sucesivas de dos, aparece la relación "doble”, por lo que se abren las posibilidades de respuesta y los resultados presentan diferencias con respecto al resto de las tareas del bloque.

Veamos a continuación el análisis realizado sobre las respuestas verbales que acompañan a la resolución de esta tarea.

a) Clasificación y selección

Las respuestas más frecuentes han sido las siguientes:

R1: "Va sumando el número que da"
R2: "Se multiplica por dos"
R3: "El doble de cada número"

R4: "Recurrentes"

b) Justificación

A diferencia de lo ocurrido con las respuestas obtenidas en los bloques aditivo y sustractivo, nos encontramos aquí con una gran variabilidad en las expresiones utilizadas por los sujetos para explicar la regla, lo que quizás denota una mayor dificultad de los escolares para expresar verbalmente dichas reglas en el caso de las series multiplicativas y partitivas. Por este motivo hemos agrupado las respuestas equivalentes entre si atendiendo al segundo de los criterios establecidos en el apartado 3.2, epígrafe a), es decir, dos respuestas son equivalentes si se refieren a los mismos conceptos y procedimientos aritméticos así como a la misma estrategia inductiva (mismo significado inductivo numérico). Asímismo hemos incluído en la categoría “recurrentes” las diferentes reglas que denotan periodicidad.

En R1 hemos incluido las respuestas que conllevan un modelo aditivo no recurrente; en R2 la operación de multiplicar por dos; en R3 el término relacional “doble” y en R4 todas las respuestas de tipo cíclico, que en nuestro caso son también aditivas como veremos en los párrafos que siguen. Las respuestas incluidas en R1 y R4 son todas aditivas, mientras que las incluidas en R2 y R3 son todas multiplicativas. Como se puede observar en el anexo 3.2, cada uno de los enunciados genéricos es pertinente para abarcar las diferentes respuestas seleccionadas en cada caso.

c) Distribución

En total se han contabilizado 238 respuestas, de las que 154 se corresponden con las más frecuentes, lo que representa el 64,70% del total de respuestas.

En la tabla 3.3 se representa la distribución de las respuestas más frecuentes en cada uno de los tres cursos. En términos de porcentajes, dichas respuestas superan en todos los casos el 50%, produciéndose un aumento significativo al pasar de un nivel inferior a otro superior, llegándose al 77,38% en sexto curso; esto quiere decir que se tiende a las respuestas más frecuentes a medida que se avanza en el desarrollo del currículo escolar.

	4º	5º	6º	Totales
R1	15	11	13	39
R2	9	31	40	80
R3	2	4	8	14
R4	14	3	4	21
Totales	40	49	65	154

Tabla 3.3. Distribución de las respuestas más frecuentes por cursos.Tarea X9

Se observan, además, los siguientes resultados:

c1) La utilización del producto como suma de sumandos iguales es análoga en los tres cursos;

c2) La utilización de la multiplicación (respuesta R2) es muy baja en cuarto curso en comparación con quinto y sexto, lo que significa que el dominio de la estructura multiplicativa es bajo en los escolares de menor edad de la muestra;

c3) La respuesta R3, que podemos considerarla como prealgebraica (ya que define una relación y no una operación), es la de menor incidencia, pudiéndose observar un ligero aumento a medida que se avanza en los cursos;

c4) La utilización de modelos recurrentes (respuesta R4) es más frecuente en los sujetos de menor edad, lo que es lógico que ocurra si tenemos en cuenta que la periodicidad es una estrategia aditiva útil ante diferencias no constantes, lo que supone bajar un escalón en el nivel de abstracción.

d) Otras respuestas

Ademas de las respuestas más frecuentes se han contabilizado 69 respuestas más (Anexo 3.1), sobre las que podemos señalar las siguientes puntualizaciones:

d1) La mayoría de ellas representan intentos fallidos de encontrar la regla;

d2) Predominan los intentos aditivos; 54 de las 69 respuestas denotan aspectos aditivos;

d3) Muchas de estas respuesta no tienen en cuenta toda la información proporcionada, ya que sólo se refieren a la relación entre el primero y segundo términos de la serie o relacionan, a lo sumo, el segundo con el tercero. Muy pocas respuestas han tenido en cuenta el cuarto término.

d4) Como se deduce de la tabla 3.3 (porcentajes complementarios de los que figuran en ella), estas respuestas alcanzan un 46,66% en cuarto curso, disminuyendo a un 22,61% en sexto. Vemos pues como este tipo de respuestas tiende a disminuir a medida que aumenta la edad, al contrario de lo que ocurre con las respuestas más frecuentes.

e) Estrategias

En la tabla 3.4 podemos ver la distribución de resultados, distinguiendo los dos apartados que se solicitaban a los alumnos: expresar la regla y realizar cálculos si era necesario. En cuanto a las estrategias y procedimientos de cálculo, de los 264 alumnos que han realizado la tarea, 205 han efectuado cálculos, 238 han expresado la regla y 193 han realizado las dos cosas. Los principales resultados en este punto son los siguientes:

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	193	12	205
No realiza cálculos	45	14	59
Totales	238	26	264

Tabla 3.4. Distribución de resultados de la tarea X10

e1) La mayoría de los niños, 122 en total, han utilizado los cálculos para reconstruir la serie de acuerdo con el criterio aplicado, lo que supone el

67,77% de los que han realizado los cálculos habiendo expresado la regla. Tan solo dos alumnos han intentado operar para calcular la regla aunque sin obtener resultados, ya que al calcular diferencias entre los términos no consiguieron reconstruir una solución válida.

e2) Después de obtener mentalmente el criterio, 45 alumnos recurrieron a calcular por escrito para obtener los términos que se pedían. Esto no es de extrañar si tenemos en cuenta que los primeros términos de la serie son números menores que 10, mientras que para calcular el último término hay que multiplicar 16 por 2.

e3) En cuanto al significado de los signos y operaciones hemos de destacar la gran diferencia encontrada entre lo que algunos sujetos expresan por escrito y lo que realizan realmente y pretenden comunicar. Por ejemplo:

1) El alumno expresa por escrito la frase "sumando dos en dos" y escribe los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \underline{+1} & \underline{+2} & \underline{+4} & \underline{+8} & \underline{+16} \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{array}$$

2) El alumno expresa por escrito la frase "siguen un orden de dos en dos" y escribe los cálculos:

1x2 = 2x2 = 4x2 = 8x2 = 16x2= 32

3) El alumno expresa por escrito la frase "que el número se va multiplicando por la serie de los números pares" y escribe los siguientes cálculos:

1x2=2,..........,1x10=10, 1x12=12

4) El alumno expresa por escrito la frase "se multiplica por 2" y escribe los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \\ \underline{+1} & \underline{+2} & \underline{+4} & \underline{+8} & \underline{+16} \\ 2 & 4 & 8 & 16 & 32 \end{array}$$

5) El alumno expresa por escrito la frase "cada vez sumando en orden 1+2+3" y escribe los cálculos:

$$1 + 1 = 2 + 2 = 4 + 4 = 8 + 5 = 13$$

6) El alumno expresa por escrito la frase "el resto más sí mismo" y escribe los cálculos:

$$1 + 1 = 2 + 2 = 4 + 4 = 8 + 8 = 16 + 16 = 32$$

f) Estrategias aditivas

Las respuestas aditivas correctas en este bloque, como sumar cada término a sí mismo, nos permiten asegurar, teniendo en cuenta el principio de "dominancia de claves" de la psicología cognitiva, que los intentos aditivos son previos a los multiplicativos. Además, hemos podido observar que

4º	5º	6º	Total
58	49	41	148

Tabla 3.4.- Distribución de respuestas aditivas por cursos. Tarea X9

una vez encontrada una solución el alumno pasa a la siguiente tarea sin intentar encontrar nuevas soluciones.

Respecto al total de respuestas, el 62,18% de los alumnos han utilizado una estrategia aditiva, lo que corresponde a 148 alumnos de los 238 que han respondido la tarea. El índice de respuestas aditivas disminuye según los cursos, aunque no de forma brusca: 77,33% en 4º, 62,02% en quinto y 48,80% en sexto.

3.5.2.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X10

Esta tarea ha tenido como soporte la serie:

2, 6, 18, 54, ___ , ___

a) Clasificación y selección

A medida que avanzamos en las tareas del bloque multiplicativo va disminuyendo el número de respuestas diferentes. En total hemos contabilizado 229 respuestas en esta tarea, siendo las más frecuentes:

R1: "Multiplicando por tres"
R2: "Recurrentes"

b) Justificación

Al ser el primer término distinto de 1, a diferencia de lo que ocurre con la tarea anterior, los elementos de la serie no coinciden con las potencias de la razón. Por otra parte, la relación “triple-tercio” es de uso menos frecuente que la relación “doble-mitad”, e identificar el doble como la suma de dos sumandos iguales es más sencillo y usual (la suma se considera como una operación binaria) que identificar el triple como la suma de tres sumandos iguales, lo que justifica que no se utilice esta relación para explicar la regla.

En el anexo 3.3, se exponen todas las respuestas equivalentes a las respuestas genéricas R1 y R2, de acuerdo con el criterio establecido en el apartado 3.2. epígrafe a).

c) Distribución

En la tabla 3.6 se representa la distribución por cursos de estas respuestas más frecuentes.

	4º	5º	6º	Totales
R1	17	42	64	123
R2	14	2	3	19
Totales	31	44	67	142

Tabla 3.6 - Distribución de las respuestas más frecuentes por cursos. Tarea X10

Entre R1 y R2 tenemos un total de 142 respuestas, que se corresponden con el 62,00% del total de respuestas recogidas.

De los datos obtenidos destacamos los siguientes resultados:

c1) Las respuestas multiplicativas aumentan según los cursos, pasando de un 26, 90% en cuarto a un 73,56% en sexto;

c2) Respecto a la tarea anterior (X9), las respuestas recurrentes han disminuido y se concentran en torno a cuarto curso;

c3) Las respuestas de los niños más pequeños son más abiertas. Así, las respuestas de cuarto curso están compartidas entre las más frecuentes (49,12%) y otras respuestas (50,88%);

c4) Al aumentar de curso se produce una mayor tendencia a la respuesta R1.

d) Otras respuestas

Las respuestas que no están incluidas entre las más frecuentes son, en su mayoría, aditivas. Por otra parte, han sido empleadas principalmente por los alumnos de cuarto curso (50,79%), disminuyendo este porcentaje a medida que se avanza en los cursos.

e) Estrategias

El análisis de las estrategias y procedimientos de cálculo arroja los siguientes resultados: 182 alumnos han respondido a ambos apartados; 47 explican la regla sin necesidad de realizar cálculos; 19 realizan cálculos y no explican la regla.

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	182	19	201
No realiza cálculos	47	0	47
Totales	229	19	248

Tabla 3.7.- Distribución de resultados de la tarea X10

En total, 108 alumnos han reconstruido la regla para verificar y comprobar el criterio; 34 de estas reconstrucciones han sido aditivas y 74 multiplicativas. Por otra parte, los más pequeños son los que menos aseguran sus respuestas, a las que llegan mentalmente sin expresar los procedimientos por los que han determinado la regla.

Del estudio se extraen también las siguientes conclusiones:

e1) 40 alumnos han aplicado el cálculo mental para determinar la regla, pero han tenido que efectuar los cálculos por escrito para determinar los dos términos que se les pedían.

e2) Nos hemos encontrado con 12 alumnos que realizan cálculos escritos para determinar la regla. Todos los intentos, salvo dos de ellos, han sido aditivos. Un alumno comienza con intentos aditivos y descubre la regla multiplicativa.

e3) En cuanto a los signos, las operaciones y su significado, podemos destacar los resultados siguientes:

1) El alumno expresa por escrito: "Se le suma 14 al número por el que se +", y escribe los cálculos:

$$2 + 4 = 6 + 12 = 18 + 26 = 54 + 40 = 94 + 54 = 148$$

Como podemos observar la diferencia utilizada por este alumno aumenta de 14 en 14.

2) La no utilización de los números negativos la podemos constatar en los intentos de ir restando la diferencia hasta llegar a una sustracción con minuendo inferior al sustraendo, en cuyo caso la respuesta es cero: $10 - 44 = 0$.

3) Se observa un error de significado en un alumno que escribe: "sumando el triple" y realiza las operaciones siguientes:

$$2 + 2 + 2= 6 \quad 6 + 6 + 6=18 \quad 18 + 18 + 18 = 54, ...$$

4) Un alumno responde "a dos le sumo dos y el resultado lo sumo a 2 y lo que dé lo sumo por el mismo", al referirse a los siguientes cálculos:

$2 + 4= 6, 6 + 12 = 18, 18 + 36 = 54, 54 + 108 = 162, 162 + 224 = 386$
(En vez de 224 tenía que haber puesto 324)

f) Estrategias aditivas

En la tabla 3.8 podemos observar la distribución de respuestas aditivas según los diferentes cursos.

4º	5º	6º	Total
48	21	13	82

Tabla 3.8.- Distribución de estrategias aditivas por cursos. Tarea X10

La aditividad es muy significativa en cuarto curso, puesto que representa el 76,19% de las respuestas obtenidas en dicho nivel. Por el contrario, dicho porcentaje desciende al 26,58% en quinto y al 14,94% en sexto curso, donde se produce un refuerzo del modelo multiplicativo ante la dificultad de resolver aditivamente las tareas de este bloque.

Este predominio de las estrategias aditivas para resolver tareas multiplicativas se ha puesto de manifiesto, como hemos visto, en las respuestas a la serie de razón dos (tarea X9), que se puede resolver aplicando varios procedimientos aditivos. Dichas respuestas han permitido constatar que la mayoría de los escolares, incluso los de edades avanzadas, emplean estrategias aditivas en los primeros intentos de continuar las series.

Por el contrario, la resolución aditiva de la serie de razón tres (tarea X10) presenta una mayor dificultad, por lo que los alumnos mayores optan por la solución multiplicativa, según se refleja en los porcentajes de respuestas aditivas a esta tarea (38,37% en quinto y 25,27% en sexto). Sin embargo esta dificultad no es un impedimento para que los alumnos de cuarto curso continúen aplicando mayoritariamente estrategias aditivas (70,42% del total de respuestas en este nivel) en los mismos términos y en un tanto por ciento similar al de la tarea anterior. Estos resultados confirman que los escolares de edades inferiores permanecen aferrados a un primer nivel aditivo aunque la serie se modifique complicándose su resolución aditiva. Por otra parte hay que hacer notar que este "estancamiento" en el nivel aditivo parece que se empieza a superar de forma apreciable a partir de quinto curso.

Haciendo balance de lo observado en este punto hemos constatado que todos los escolares de la muestra tienen un primer nivel de dominancia aditivo, sobre el que se sustenta un segundo nivel multiplicativo que aparece en los sujetos de edades superiores. Este resultado se constata en la tarea analizada en este apartado (X10), cuyas respuestas indican que los sujetos de cuarto curso no han pasado del nivel aditivo mientras que los de quinto y sexto sí lo han hecho en su mayoría; este paso de un nivel a otro es gradual a partir de quinto curso y las diferencias se acentúan con la edad.

3.5.3.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X11

La serie correspondiente es la siguiente:

3, 12, 48, 192, ___ , ___

a) Clasificación y selección

Se han contabilizado 208 respuestas, de las que las más frecuentes han sido las siguientes:

R1: "Multiplicando por cuatro"
R2: "Recurrentes"

b) Justificación

Como vemos se reproducen los resultados obtenidos con la tarea anterior obteniendo solo dos categorías de respuestas. Las respuestas correspondientes a cada una de estas categorías se pueden ver en el anexo 3.4.

Al igual que en la tarea anterior, las respuestas recurrentes son aditivas y por tanto corresponden a alumnos que permanecen en un nivel de razonamiento inductivo numérico aditivo.

c) Distribución

Las respuestas anteriores se corresponden con el 69,71% del total de respuestas obtenidas, lo que representa una amplia mayoria de las opciones que eligen los alumnos de la muestra ante este tipo de tareas. En términos absolutos se han computado 145 respuestas, cuya distribución figura en la tabla 3.9. En dicha tabla podemos observar:

c1) Las respuestas multiplicativas continúan aumentando en todos los cursos, siendo significativo el aumento experimentado en cuarto curso en relación con la tarea anterior.

c2) Las respuestas recurrentes se siguen manteniendo en cuarto curso con un leve descenso con respecto a las tareas anteriores.

	4º	5º	6º	Totales
R1	23	42	63	128
R2	12	3	2	17
Totales	35	45	65	145

Tabla 3.9. Distribución de las respuestas más frecuentes por cursos.Tarea X11

d) Otras respuestas

Además de las señaladas hemos contabilizado otras 59 respuestas menos frecuentes (Anexo 3.1), de las que podemos decir:

d1) 33 de ellas son intentos aditivos, de los que la mayoría son recurrentes. No se incluyen en R2 por ser respuestas erroneas;

d2) 10 respuestas son intentos multiplicativos.

e) Estrategias

En la tabla 3.10 podemos observar la distribución de resultados en cálculo y respuestas verbales en la tarea X11.

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	170	11	181
No realiza cálculos	38	0	38
Totales	208	11	219

Tabla 3.10.- Distribución de resultados de la tarea X11

Se han contabilizado 16 alumnos que han utilizado cálculos para determinar la regla; 13 de ellos lo han intentado con relaciones aditivas y 3 con relaciones multiplicativas. Asímismo se han contabilizado 44 respuestas en las que se han utilizado los cálculos para encontrar los términos que se piden.

Por otra parte, 102 alumnos han comprobado la solución mediante una reconstrucción de la serie; 20 de ellos han seguido un modelo aditivo y 82 un modelo multiplicativo.

f) Estrategias aditivas

Los resultados aditivos correspondientes a la tarea X11 se exponen en la siguiente tabla:

4º	5º	6º	Total
32	15	13	60

Tabla 3.11.- Distribución de respuestas aditivas por cursos. Tarea X11

El 55,17% de los alumnos de cuarto curso han utilizado estrategias aditivas, lo que significa un descenso respecto a la tarea anterior, en la que este porcentaje se eleva al 76,19%. Estos resultados no hacen más que confirmar la evolución ya contrastada de los niveles de dominancia.

3.5.4.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X12

La serie correspondiente a esta tarea es la siguiente:

9, 45, 225, 1125, ___ , ___

a) Clasificación y selección

Han realizado esta tarea un total de 205 alumnos, de los que 190 han expresado la regla por escrito. Las respuestas más frecuentes han sido las siguientes:

R1: "Multiplicando por cinco"
R2: "Recurrentes"

b) Justificación

Se reproducen los resultados de las tareas anteriores, encontrandonos con un grupo de alumnos que manifiestan un dominio de las relaciones multiplicativas y otro que no consiguen este dominio, permaneciendo en un nivel aditivo dando soluciones recurrente basadas en la adición, tal y como se puede comprobar en el anexo 3.5.

c) Distribución

Las categorías R1 y R2 recogen la mayor parte de las respuestas obtenidas, que ascienden a 139 de un total de 190 emitidas. En la tabla 3.12 figura la distribución de estas respuestas por cursos.

	4º	5º	6º	Totales
R1	20	45	64	129
R2	5	4	1	10
Totales	25	49	65	139

Tabla 3.12.- Distribución de las respuestas más frecuentes por cursos. Tarea X12.

Teniendo en cuenta estos resultados y las propias tareas realizadas por los sujetos podemos establecer las siguientes conclusiones:

c1) Se produce un aumento relativo de las respuestas multiplicativas, lo que se explica si tenemos en cuenta que no han respondido a esta tarea los alumnos que realizaron aditivamente las tareas anteriores. El descenso en el el número de respuestas a esta tarea es significativo en alumnos con esquemas aditivos.

c2) Hay una consolidación multiplicativa que se manifiesta en las respuestas emitidas por los alumnos de quinto y sexto cursos.

d) Otras respuestas

Se han contabilizado 38 respuestas menos frecuentes que se relacionan en el Anexo 3.1. De ellas podemos destacar los siguientes aspectos:

d1) El nivel aditivo se manifiesta en 23 respuestas, es decir, en el 73, 68% del total.

d2) En 13 casos de las 23 respuestas aditivas se observa que los sujetos no tienen en cuenta toda la información disponible, ya que se basan en resultados parciales obtenidos mediante la comparación entre dos términos consecutivos.

e) Estrategias

En la tabla 3.13 exponemos la distribución de los alumnos que han contestado la tarea en cuanto a la realización de cálculos y expresar la regla por escrito.

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	153	22	165
No realiza cálculos	47	0	47
Totales	190	22	212

Tabla 3.13.- Distribución de resultados de la tarea X12

e1) En cuanto a los procedimientos de comprobación y verificación, se han contabilizado 95 alumnos que han comprobado la respuesta reconstruyendo la serie; 23 de ellas han sido reconstrucciones aditivas, mientras que las 72 restantes han sido multiplicativas. Las reconstrucciones aditivas han sido realizadas, en su mayor parte, en 4º curso, con un 52,17% del total de respuestas de este tipo. Por el contrario, los alumnos de este mismo curso sólo han efectuado el 9,72% del total de 72 reconstrucciones multiplicativas registradas.

e2) Tan sólo 8 alumnos han expresado por escrito los cálculos utilizados para determinar la regla. Siete de estos intentos han sido aditivos (restando términos, sumando diferencias etc.), mientras que el octavo verifica la regla mediante divisiones sucesivas.

e3) Desde el punto de vista de los signos, operaciones y significados nos hemos encontrado con los tres casos de interés siguientes:

1) El alumno expresa la regla "poniendo 63, poniendo 180 y poniendo 900" y realiza los siguientes cálculos:

1125+63= 1188, 1188+180= 1368, 1188+ 900=2088

Poner tiene aquí el significado de escribir el sumando correspondiente.

2) En la respuesta "Todos cincos menos uno que es nueve" queremos entender que el alumno se refiere a las cifras en que terminan los términos de la serie.

3) El alumno escribe la frase "el número se multiplica por cuatro y luego se suma" y a continuación expresa por escrito las operaciones siguientes:

9+36 = 45+180 = 225+880 = 1125+4500 = 5625+22520 = 28145

donde se comprueba que, en cada caso, el segundo sumando es el primero multiplicado por cuatro, salvo un error en la tercera operación.

f) Estrategias aditivas

Las respuestas aditivas se distribuyen por cursos según la tabla siguiente:

4º	5º	6º	Total
12	5	6	23

Tabla 3.14.- Distribución de respuestas aditivas por cursos. Tarea X12

Se observa un descenso del uso de este tipo de estrategias en relación con las tareas anteriores; descenso que se debe a una disminución de las respuestas en aquéllos alumnos que habían contestado aditivamente con anterioridad. De todas maneras se siguen acumulando en mayor medida en cuarto curso.

3.6.- Respuestas al bloque partitivo

De acuerdo con el diseño de la prueba, las cuatro series partitivas y las cuatro multiplicativas se han construido utilizando, respectivamente, los cuatro pares de operadores inversos correspondientes a los números naturales 2, 3, 4 y 5. Esta particularidad permite tener en cuenta, en el análisis que se va a exponer, los dos aspectos adicionales siguientes:

> a) ¿Se modifican los procedimientos y las estrategias utilizadas por los alumnos cuando se invierten las operaciones (multiplicación - división)?. En este sentido hemos de tener en cuenta que las series multiplicativas poseen la propiedad de "crecimiento indefinido", frente al "decrecimiento indefinido" de las series partitivas, lo que puede provocar que los intentos recurrentes, que son las estrategias utilizadas mayoritariamente por los escolares con "mentalidad aditiva", sean ineficaces en el caso de las series partitivas. Esto no ocurre, sin embargo, en las series sustractivas, que no pueden decrecer indefinidamente; además, en este caso, los alumnos que emplean el enfoque aditivo dominan, obviamente, la aditividad. Por tanto, estaremos interesados en los comportamientos y estrategias de los sujetos con enfoque aditivo ante el cambio del contexto multiplicativo al partitivo, para lo que vamos a comparar las respuestas de cada individuo a ambos tipos de tareas.
>
> b) ¿Cuáles son los comportamientos aditivos[1] de los sujetos ante la inversión de las relaciones doble y triple?. En concreto estamos interesados en comprobar si las respuestas denotan los intentos aditivos de relacionar "mitad" con "restar la mitad" y "tercio" con "restar un tercio" o bien, con "restar el siguiente" o "restar el doble del siguiente".

Además de los dos aspectos anteriores, aparece en este bloque lo que hemos denominado como **efecto tope**, cuyas características se explican detenidamente en el apartado 1.2.3.3 del capítulo 1. En relación con este efecto estamos interesados en estudiar si el mismo aparece en las respuestas de alumnos con "mentalidad aditiva" o, por el contrario, en las respuestas de alumnos con "mentalidad multiplicativa". En este último caso podremos

[1] nos referimos, evidentemente, a aquéllos comportamientos basados en el empleo de estrategias aditivas.

asegurar que el efecto tope constituye un error de último término, tal y como se ha definido en la Memoria de Tercer Ciclo.

Como veremos, tanto el estudio general como los estudios adicionales anteriores quedan suficientemente completos con el análisis de los resultados de las tareas X13 y X14, por lo que vamos a limitar el estudio del bloque partitivo a dichas tareas, completando con ello el análisis de las respuestas verbales.

3.6.1.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X13

La serie que corresponde a esta tarea es la siguiente:

64, 32, 16, 8, ___ , ___

Han realizado la tarea un total de 198 alumnos, de los que 184 han expresado la regla por escrito, 137 han realizado cálculos, 123 han contestado ambos apartados, 61 se han limitado a dar la respuesta verbal y 14 han realizado cálculos sin expresar la regla.

a) Clasificación y selección

Las respuestas más frecuentes se pueden agrupar en las siguientes categorías:

R1: "Dividiendo entre 2"
R2: "La mitad de cada número"
R3: "Quitar la mitad"

b) Justificación

Nos encontramos con dos categorías de respuestas: Respuestas equivalentes a R1 y R2 que se corresponde con un grupo de alumnos con un dominio del nivel partitivo y las equivalentes a R3 que se corresponden con alumnos que no superan el nivel aditivo claramente, como podemos comprobar en el anexo 3.6.

Comparando estas respuestas con las obtenidas en la serie multiplicativa inversa (tarea X9) encontramos que:

b1) La inversa de la respuesta "Va sumando el número que da" no es

"Va restando el número que da" sino "Quitar la mitad", por lo que aquélla no aparece entre las respuestas de los alumnos.

b2) Por el contrario sí se corresponden entre sí las respuestas "Se multiplica por dos" y "Dividiendo entre 2".

b3) La respuesta inversa de "El doble de cada número" es "La mitad de cada número".

b4) No aparecen respuestas recurrentes, aunque se observan algunos intentos que no culminan en una solución correcta. El fracaso se debe a la necesidad de pasar del dominio de los números naturales al dominio de los números negativos, lo que, evidentemente, no han sabido realizar los escolares.

c) Distribución

En la tabla 3.15 figura la distribución por cursos de las respuestas más frecuentes.

	4º	5º	6º	Totales
R1	11	32	51	94
R2	2	2	4	8
R3	4	4	5	13
Totales	17	38	60	115

Tabla 3.15.-Distribución de las respuestas más frecuentes por cursos. Tarea X13

De los datos anteriores podemos destacar:

c1) El descenso de las respuestas aditivas con respecto al bloque anterior;

c2) La consolidación en sexto curso de las respuestas R1, que presentan un aumento progresivo desde cuarto curso.

d) Otras respuestas

Además de las anteriores hemos registrado otras 64 respuestas, de las que 54 manifiestan estrategias aditivas. Globalmente se observa un aumento del porcentaje de respuestas aditivas en cuarto curso y una disminución significativa de dicho porcentaje en los otros dos cursos; así, en quinto curso, se pasa del 62% al 39,39%, mientras que en sexto curso se pasa del 48,80% al 22,07%. Esto confirma que los alumnos mayores utilizan esquemas aditivos y multiplicativos, mientras que los menores tan solo aditivos.

e) Estrategias

En total han sido 198 alumnos los que han respondido la tarea X13. De acuerdo con los apartados que han respondido se distribuyen según la tabla 3.16.

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	123	14	137
No realiza cálculos	61	0	61
Totales	184	14	198

Tabla 3.16.- Distribución de resultados de la tarea X13

Del análisis de estrategias se han obtenido los siguientes resultados:

e1) 98 alumnos, lo que representa el 71,53% de los que han realizado cálculos, utilizan dichos cálculos para verificar el criterio y reconstruir la serie. Tan solo 10 alumnos han utilizado los cálculos con la intención de obtener la regla.

e2) Algunos de los sujetos que utilizan estrategias aditivas manifiestan las siguientes conductas ante la imposibilidad de restar una cantidad de otra menor:

1) Un alumno propone la regla "Restandole 8" y escribe el número

0 para el último término;
2) Otro alumno que propone la solución recurrente "Restando primero 32, luego 16 y por último 8" añade: "No se puede restar a 8-32";
3) Algunos alumnos contestan "Restando cuatro" con la única intención de poder operar.

e3) Un alumno responde "Sale el mismo número que en el sustraendo" y realiza los siguientes cálculos:

$$\begin{array}{r} 64 \\ -32 \\ \hline 32 \end{array} \quad \begin{array}{r} 32 \\ -16 \\ \hline 16 \end{array} \quad \begin{array}{r} 16 \\ -8 \\ \hline 8 \end{array} \quad \begin{array}{r} 8 \\ -4 \\ \hline 4 \end{array} \quad \begin{array}{r} 4 \\ -2 \\ \hline 2 \end{array}$$

f) Estrategias aditivas

Los alumnos que han utilizado estrategias aditivas se distribuyen por los diferentes cursos de acuerdo con la tabla 3.17.

4º	5º	6º	Total
25	26	17	68

Tabla 3.17.- Distribución de respuestas aditivas por cursos. Tare X13

Hemos comprobado que todos los alumnos de sexto curso que han utilizado esquemas aditivos en la tarea X9, modifican sus respuestas en la tarea X13 utilizando esquemas multiplicativos para responder R1. Esto no ocurre, en ningún caso, con los alumnos de cuarto curso, mientras que en quinto se observan ya algunas de dichas modificaciones. De todo ello se deduce que los alumnos de sexto curso son capaces de modificar sus estrategias cuando la dificultad de la tarea así lo exige, mientras que los alumnos de cuarto curso permanecen pertinazmente en el uso de estrategias aditivas a pesar de las dificultades.

3.6.2.- Análisis de respuestas correspondiente a la tarea X14

La serie correspondiente a esta tarea es la siguiente:

243, 81, 27, 9, ____ , ____

La peculiaridad de esta serie es que con ella se presenta el "**efecto tope**". El análisis de los resultados se detalla en el apartado 1.2.3.3, con los que se confirma que se produce dicho efecto con una frecuencia apreciable en la muestra estudiada.

a) Clasificación y selección

Hemos encontrado una sóla categoría significativa para las respuestas más frecuentes, en la que se incluyen, como se puede ver en el anexo 3.7., un gran número de respuestas diferentes. Todas ellas se corresponden con el modelo partitivo de una progresión geométrica de razón un tercio, es decir:

R1: "Dividiendo por tres"

b) Justificación

Los resultados están de acuerdo con las respuestas de la tarea X10 multiplicativa de razón tres, concluyendo que la relación triple-tercio no la utilizan los alumnos de estas edades en tareas de continuar una serie de razón tres, obteniendose una sola categoría significativa de respuesta que denota un dominio del nivel partitivo basado en la división.

c) Distribución

En la tabla 3.18 se expone la distribución de R1 según los diferentes cursos.

	4º	5º	6º	Total
R1	13	33	55	101

Tabla 3.18.- Distribución de la respuesta más frecuente por cursos. Tarea X14

Restringiendonos a los alumnos que han expresado la regla por escrito, los resultados de la tabla anterior se corresponden con un 40,62% en cuarto, un 55,93% en quinto y un 78,57% en sexto, lo que significa una consolidación del modelo partitivo en sexto curso en las respuestas verbales.

d) Otras respuestas

Se han contabilizado otras 46 respuestas no categorizables bajo R1, de las que 41 denotan aspectos aditivos. Con respecto al total de respuestas registradas en esta tarea, el 56,25% de ellas son aditivas en cuarto curso, el 20,33% en quinto curso y el 12,85% en sexto curso, lo que confirma las conclusiones establecidas a tal respecto en las tareas anteriores.

e) Estrategias

En la tabla 3.19 podemos ver que 164 alumnos han realizado la tarea, de los que 39 expresan la regla sin necesidad de realizar cálculos.

Ante la dificultad de la tarea se constata un aumento en el uso de los cálculos para determinar la regla, lo que se observa en las respuestas de 21 alumnos que han realizado diferencias o cociente entre dos términos consecutivos.

	Expresa la regla	No expresa la regla	Totales
Realiza cálculos	112	13	125
No realiza cálculos	39	0	39
Totales	151	13	164

Tabla 3.19.- Distribución de resultados de la tarea X14

f) Estrategias aditivas

En la tabla 3.20 podemos ver la distribución de respuestas aditivas en los diferentes cursos, confirmandose los resultados de tareas anteriores al ser estas respuestas más persistentes en los cursos inferiores.

4º	5º	6º	Total
18	12	9	39

Tabla 3.20.- distribución de respuestas aditivas por cursos. Tarea X14.

La modificación de la tarea, en el sentido de una mayor dificultad, no modifica los esquemas de los alumnos con mentalidad aditiva. Estos alumnos, a pesar de no existir respuestas aditivas sencillas, se resisten a modificar sus esquemas y buscar soluciones partitivas.

3.7.- Resúmen y discusión de los resultados del análisis de las respuestas verbales

En las páginas anteriores se han detallado los análisis efectuados sobre las respuestas verbales dadas por los alumnos de la muestra a la segunda parte de la prueba del estudio exploratorio. En dichos análisis, de los que se ha expuesto un extracto de los aspectos particulares observados en cada bloque y en cada una de las tareas analizadas, se constata una evolución marcada por la permanencia de algunas características del razonamiento inductivo numérico y, al mismo tiempo, por la aparición de otras nuevas al pasar de unas tareas a otras y de unas edades a las siguientes.

Con la intención de aportar una visión global de los resultados obtenidos, realizamos a continuación una síntesis de los mismos desde la óptica más general del desarrollo de las competencias estudiadas, lo que constituye el eje central del interés de la investigación. De acuerdo con este enfoque, y advirtiendo que los epígrafes que encabezan cada apartado no se corresponden con los que se han empleado para el procedimiento de análisis de cada una de las tareas, los resultados más importantes son los siguientes:

a) Las rutinas y hábitos aritméticos, incluido el cálculo mental, son herramientas válidas utilizadas por los escolares para determinar una regularidad numérica.

b) En los escolares de menor edad se observan esquemas arraigados que indican el origen de sus rutinas aritméticas y, por tanto, de sus estrategias de resolución de tareas de continuación de series numéricas. En concreto nos referimos a los siguientes esquemas:

- esquemas infralógicos subyacentes a la propia construcción del número natural, tales como los que se refieren a **aspectos topológicos intuitivos** que incluyen, entre otros, la orientación en la recta numérica (atrás, bajando, saltarse números, hacía abajo, etc.);

- esquemas de aprendizaje memorístico de la serie de los números naturales, considerada como una lista almacenada en la memoria. Aquí incluimos la acción denominada "**contar ordinal**" como uno de los orígenes de esta consideración de los números por parte de una amplia mayoría de los sujetos de menor edad.

c) Los escolares de mayor edad, por el contrario, emplean **esquemas prealgebraicos** para la interpretación y utilización de regularidades aritméticas en series numéricas. Entre estos esquemas podemos citar los esquemas clasificatorios, que los sujetos utilizan para generalizar regularidades aritméticas y propiedades numéricas como la paridad.

d) Los escolares han utilizado los cálculos al menos con tres intenciones diferentes:

1) Para comprobar la regularidad numérica.
Una gran mayoría de sujetos reconstruyen la serie a partir del primer término, por lo que se supone que han determinado la regla mentalmente;
2) Para determinar la regla.
Algunos sujetos utilizan sólo una parte de la información; comparan dos términos consecutivos y no verifican o comprueban el resultado con los restantes términos de la serie;
3) Para calcular los términos que faltan.
Esto se observa en las respuestas de los sujetos que han determinado la regla mentalmente.

e) Los alumnos que han respondido acertadamente han llegado a los resultados por tres vías diferentes:

1) Reconstruyendo la serie;
2) Considerando parte de la información para obtener la regla y poder determinar los términos que se piden;
3) Mediante cálculo mental, sin realización escrita de operación alguna.

f) Se constatan los siguientes esquemas inductivos:

- **iteración** en las respuestas (restando o sumando de n en n, etc.);
- **generalizaciones** no aritméticas (siempre, cada vez, etc.);
- **enumeración simple** en los procesos de comprobación mediante la reconstrucción de la serie término a término.

g) En las respuestas se hace patente el **dominio del modelo aditivo** en las series multiplicativas, lo que se pone de manifiesto en el hecho de que los intentos aditivos siempre son previos a los multiplicativos. Estos intentos pueden tener éxito en algunos casos, dando lugar a soluciones aditivas a las que los sujetos llegan por dos vías diferentes: reconstruyendo aditivamente la serie o aplicando un modelo cíclico.
Los modelos cíclicos se han utilizado, únicamente, en las series del bloque multiplicativo. Parece que los escolares de la muestra no disponen de modelos cíclicos que sean aplicables a las series partitivas.

h) Un indicador del uso predominante de los modelos aditivos se encuentra en las **diferencias notorias entre lo que expresan los niños y los cálculos que realizan**, lo que se observa en numerosas respuestas en las que se mezclan aspectos aditivos y multiplicativos. Esta situación se produce en sujetos de cursos y edades diferentes, por lo que podemos hablar de una transición inestable, aunque duradera, entre el dominio del modelo aditivo y el dominio del modelo multiplicativo.

i) El uso de gráficos para interpretar las reglas se circunscribe a un número reducido de alumnos, por lo que podemos decir que la mayoría de los escolares de la muestra no utilizan la representación gráfica como soporte para la resolución de este tipo de tareas. Hemos de destacar, además, que los gráficos sólo se emplean para representar las transformaciones aditivas, a diferencia de lo que ocurre en las series multiplicativas, en las que las reglas se explican verbalmente.

j) Las respuestas que hemos considerado como las **más frecuentes** son las que señalan la tendencia general en las distintas edades y niveles del curriculum, lo que significa que la evolución que estamos estudiando se puede caracterizar en términos de los esquemas subyacentes a dichas respuestas.

k) Las **respuestas prealgebraicas** están presentes en las pruebas realizadas por los tres cursos que intervienen en el estudio, con un ligero aumento de las mismas al pasar de cuarto a sexto curso. Asímismo podemos concluir que los alumnos de la muestra, en general, no presentan competencias propiamente algebraicas ante la resolución de tareas con series numéricas.

3.8.- Consecuencias del estudio exploratorio

Uno de los objetivos de la investigación es describir el **razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria**. El estudio exploratorio desarrollado en la Memoria de Tercer Ciclo permitió, en tal sentido, efectuar una primera aproximación al problema y obtener algunos resultados relevantes. Pero el estudio que se recoge en dicho informe se limitó a delimitar una escala acumulativa e identificar el efecto tope a partir de los datos de la primera parte de la prueba, sin entrar en el análisis de las respuestas verbales ni establecer conclusiones basadas en toda la información proporcionada por las respuestas a la prueba completa. El primer aspecto ha sido ya abordado en los apartados anteriores; el segundo constituye el objeto del presente apartado.

Las respuestas a las tareas de continuar series (primera parte de la prueba), que han dado lugar a la construcción de la escala de Mokken, y las respuestas verbales que han sido analizadas en el presente capítulo, denotan, por un lado, la existencia de regularidades que caracterizan diferentes perfiles en razonamiento inductivo numérico y, por otro, una evidente evolución de las características de las capacidades y competencias estudiadas a medida que transcurren los cursos o se comparan las respuestas dadas por sujetos de distintas edades; evolución que puede ser matizada y explicada de una manera más profunda utilizando los resultados del análisis que se ha expuesto en las páginas anteriores.

Los dos aspectos mencionados se abordan en el presente apartado como consecuencias importantes del estudio exploratorio. En primer lugar se expone una primera caracterización de los perfiles correspondientes a cada uno de los niveles de la escala de Mokken, teniendo en cuenta los resultados particulares y generales del análisis de las respuestas verbales. En segundo lugar, tomando como referencia la distribución de resultados por cursos y edades de la primera parte de la prueba (tareas de continuar series) y considerando la caracterización de los distintos niveles de la escala, se desarrolla un breve análisis comentado sobre su evolución.

Para una interpretación completa de las exposiciones que siguen, hemos de recordar que la escala acumulativa, punto de referencia común a ambas, consta de cinco niveles: los cuatro que son propios de la escala de Mokken (aditivo, sustractivo, multiplicativo y partitivo) y un quinto nivel previo, al que hemos denominado N0, que engloba a todas las respuestas (alumnos) que no consiguieron realizar correctamente ninguna tarea de la escala. La continuación del trabajo, en lo que constituye el núcleo fundamental de esta Tesis Doctoral, pretende, precisamente, estudiar dicho nivel inferior. En este sentido nos proponemos, en los capítulos siguientes, dividir el nivel N0 en varios subniveles que categoricen el razonamiento inductivo numérico de los sujetos de edades comprendidas entre los 6 y los 9 años, construir una escala completa, por ampliación de la escala de Mokken, para toda la Educación primaria y profundizar en la caracterización de los niveles que iniciamos en este apartado.

3.8.1.- Caracterización de los niveles de la escala de Mokken

A partir de los resultados obtenidos en el análisis de las respuestas verbales del estudio exploratorio (realizado sobre 297 alumnos con edades comprendidas entre los 9 y los 12 años) se ha efectuado una primera caracterización del perfil inductivo-numérico de cada nivel según se expone a continuación. Estos resultados servirán, a su vez, para la construcción del modelo teórico que se expone en el capítulo siguiente, y serán ampliados con los resultados del estudio empírico completo que resulte de la aplicación del mencionado modelo y que se exponen en los capítulos 5 y siguientes de la Tesis Doctoral.

Del esudio realizado se deduce que los cinco niveles de la escala acumulativa de Mokken presentan las siguientes características:

Nivel 0. Constituído por aquéllos comportamientos que no han tenido éxito en ninguna serie de la escala.

Los alumnos cuya conducta corresponde a este nivel se caracterizan por dar interpretaciones topológicas del tipo “saltar números”, llegando a establecer, como máximo, relaciones de añadir y quitar. Igualmente, las respuestas manifiestan una incapacidad para relacionar adecuadamente los esquemas aludidos con las operaciones aritméticas y generalizar las regularidades correspondientes.

Nivel 1. Constituído por los comportamientos que han conseguido realizar correctamente la primera tarea de la escala.

Los alumnos que se encuentran en este nivel se caracterizan por interpretar las series a partir de la acción de contar o del recuento acumulativo, considerando como similares "sumar n" y "contar de n en n". Por otra parte son incapaces de descubrir las relaciones multiplicativas y partitivas e interpretan las relaciones aditivas con esquemas subyacentes a la operación de sumar (esquema de contar), interpretación que les permite descubrir la regla y generalizarla. Desde el punto de vista de la naturaleza del número natural podemos decir que se produce un predominio del aspecto ordinal con respecto al cardinal ante las tareas de continuar series.

Nivel 2. En este nivel están aquéllas conductas que han conseguido realizar correctamente las dos primeras tareas de la escala.

Las respuestas de los sujetos de este nivel denotan un dominio de las relaciones aditivas entre números naturales; relaciones que pueden prolongar a las series multiplicativas mediante soluciones recurrentes. Por otra parte se detecta la capacidad de interpretar la relación "doble" como sumar dos veces y la relación "triple" como sumar a una cantidad su doble, lo que se observa en las respuestas de los sujetos del extremo superior de este nivel. Por último, los alumnos cuyas respuestas se incluyen en este nivel no modifican sus esquemas o estrategias aunque se modifique la tarea.

Nivel 3. Constituído por las conductas que culminan con éxito la tarea correspondiente a la serie multiplicativa de la escala.

Los alumnos de este nivel, aunque dominan los esquemas multiplicativos, realizan intentos de resolución aditiva de las series multiplicativas, siendo capaces de modificar sus esquemas para pasar de las estrategias aditivas a las multiplicativas. Por el contrario, no consiguen realizar la tarea correspondiente a la serie partitiva, teniendo dificultades para pasar de la utilización de esquemas multiplicativos a esquemas partitivos. Esta es una de las razones de la existencia, en este nivel, de 29 casos en los que se presenta lo que hemos denominado "efecto tope" y que corresponde al 62,06% del total de alumnos que han manifestados dicho efecto.

Nivel 4. Se agrupan aquí todas aquéllas respuestas que culminan con éxito la tarea completa.

Los alumnos de este nivel movilizan perfectamente los modelos aditivos y multiplicativos, pueden interpretar las series abiertas (aquellas que tienen más de una solución elemental) utilizando indistintamente ambos modelos y comprenden la comodidad y rapidez de cálculo que supone la utilización del modelo multiplicativo para encontrar la solución a las series abiertas.

3.8.2.- Evolución de los niveles de la escala de Mokken

El análisis de los resultados de la primera parte de la prueba conduce a la distribución de los alumnos de la muestra por niveles y cursos que figura en la tabla 3.21. La columna NE representa a los alumnos que no se adaptan a la escala de Mokken, es decir, los que han contestado correctamente un ítem sin haber contestado correctamente a todos los anteriores. Como se observa en la mencionada tabla, la mayoría de los alumnos se han adaptado correctamente a la escala, lo cual es lógico si tenemos en cuenta que se trata de los mismos resultados utilizados para calcular los parámetros que condujeron a la mencionada escala.

	N0	N1	N2	N3	N4	NE	
4º	7	19	54	5	11	4	100
5º	4	10	37	18	23	7	99
6º	1	4	22	13	50	8	98
	12	33	113	36	84	19	297

Tabla 3.21. Distribución de la muestra según la escala de Mokken

De acuerdo con estos datos podemos hacer las siguientes puntualizaciones:

a) El nivel N0 es un nivel inferior a cuarto curso de Educación primaria;

b) Los alumnos de cuarto curso se distribuyen entre los niveles N1 y N2, dominando este último con un 54% del total;

c) Los alumnos de quinto curso se distribuyen entre los niveles N2, N3 y N4, produciéndose una disminución de los porcentajes de los niveles N1 y N2, en relación a cuarto curso, y un aumento en los niveles N3 y N4. Por otra parte, ninguno de los niveles domina sobre los demás en este curso, ya que los porcentajes son inferiores al 37,375% del nivel N2;

d) En sexto curso predomina el nivel N4 con un 51,02%.

e) El nivel N3 es un nivel de transición entre N2 y N4, por lo que se trata de un nivel poco estable y duradero;

f) El nivel N2 domina globalmente en los resultados de toda la muestra con un total de 113 alumnos, lo que representa el 38,04% de los alumnos que han realizado la prueba. Teniendo en cuenta las respuestas verbales podemos justificar este resultado de la siguiente manera: cuando los alumnos llegan a dominar los modelos aditivos permanecen durante un tiempo considerable en el nivel N2 y en una situación intermedia entre este modelo y el modelo multiplicativo. Posteriormente, pasan al nivel N4 a través de un breve transcurso por el nivel de transición N3.

Con objeto de comparar los resultados por cursos y por edades se exponen en la tabla 3.22 las distribuciones de frecuencias absolutas por niveles y edades, limitando los resultados a las edades más significativas, con lo que se reduce el tamaño total a 269 alumnos.

	N0	N1	N2	N3	N4
9	2	13	34	4	6
10	6	13	45	13	23
11	2	5	24	14	38
12	2	0	7	3	16

Tabla. 3.22. Distribución del número de alumnos por edades y niveles

Del exámen de las tablas extraemos las siguientes conclusiones:

a) El Nivel N2 alcanza su máximo a la edad de nueve años, para decrecer paulatinamente con el aumento de la edad;

b) El nivel de transición N3 crece desde los 9 a los 11 años para descender a los 12 años;

c) El nivel N4 aumenta a medida que aumenta la edad;

d) El nivel N1 disminuye con la edad;

e) El 57,14% de los alumnos de 12 años (sexto curso) se encuentran en el nivel N4, porcentaje que es superior al 51,02% de promedio del curso. Este dato apunta a que el curriculum no es la única causa de que los alumnos alcancen el nivel N4, sino que la edad o el grado de maduración intelectual son factores que contribuyen también a estos resultados.

Por último, se representan en la figura 3.1 los polígonos de frecuencias relativas de cada nivel en el intervalo de 9 a 12 años de edad.

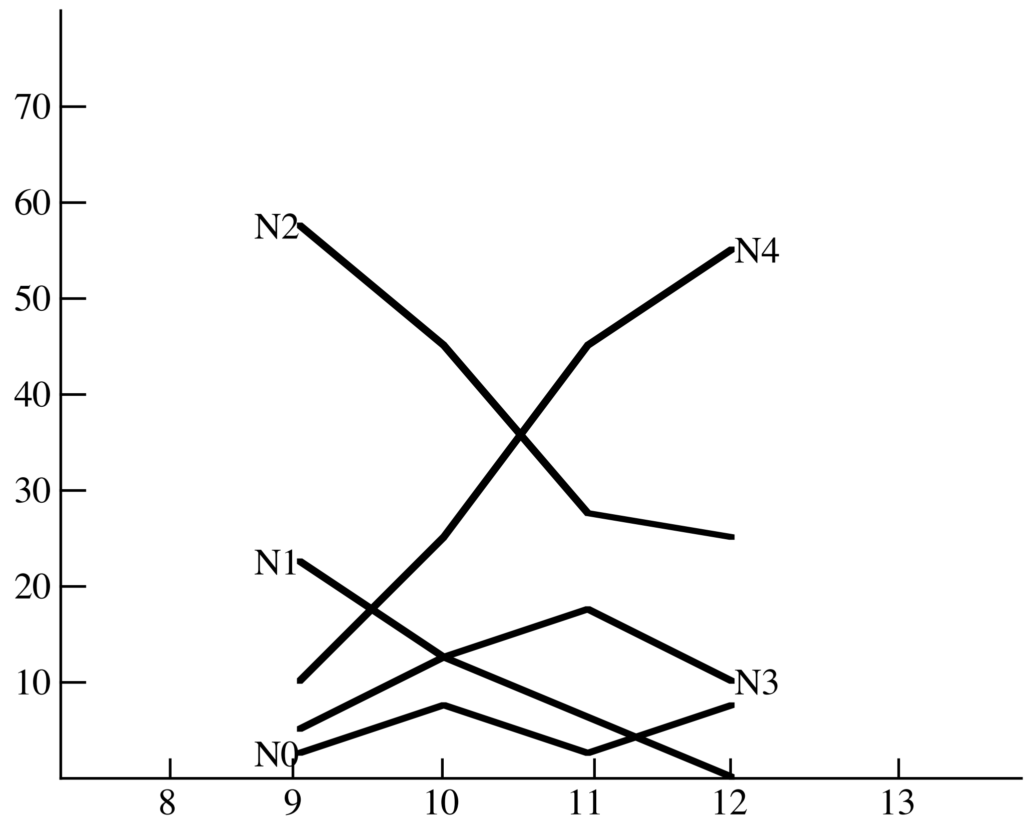

Figura. 3.1. Evolución de los niveles según las edades

Si la distribución es uniforme, lo que se deduce de los resultados del estudio exploratorio expuesto en la memoria de Tercer Ciclo, podemos ver que el nivel de transición N3 alcanza su máximo entre los 10 y 11 años, aunque con un valor relativamente bajo. Igualmente, se puede observar que el nivel N4 crece en el intervalo entre los 9 y los 10 años; crecimiento que debe seguir aumentando con la edad (en detrimento de los niveles inferiores, cuyos valores deben tender a cero), hasta estabilizarse en un porcentaje superior al 60%.

3.9.- Conclusiones

- De los resultados y su validez

El estudio realizado ha permitido comprobar:

1) Alumnos de distintos colegios, cursos y núcleos urbanos utilizan las "mismas expresiones" para explicar las reglas por escrito.

A pesar de haber utilizado tareas abiertas, el número de respuestas diferentes no ha sido elevado y se ha producido una notable concordancia que ha facilitado el control y el análisis de las mismas. Este hecho valida internamente la investigación y da testimonio de una coherencia y uniformidad que permite continuar y desarrollar con ciertas garantías las etapas posteriores del trabajo;

2) Las respuestas obtenidas denotan claramente la existencia de esquemas inductivos (iteración, enumeración, generalizaciones no aritméticas y aritméticas, ritmos, modelos recurrentes, comprobación, verificación, analogía, determinar reglas, etc.) que ponen en evidencia las características de las capacidades inductivas de los escolares y permiten establecer diferencias en el contexto del razonamiento inductivo numérico.

Estas diferencias van a constituir las aportaciones empíricas a nuestro modelo de desarrollo (Capítulo 4, apartado 4.9.2.), con lo que podemos hablar de la existencia de una validez de contructo con control empírico, lo que constituye uno de los soportes fundamentales del marco metodológico que hemos elegido;

3) Los alumnos utilizan estrategias cualitativamente diferentes para abordar una misma tarea, lo que indica la existencia de niveles más o

menos evolucionados en las capacidades correspondientes.

Esta diferenciación cualitativa entre estrategias caracteriza los diferentes niveles de la escala de Mokken y, por tanto, la evolución del razonamiento inductivo numérico;

4) Los niveles no solo diferencian a los alumno en competencias aritméticas básicas sino, además, en las habilidades inherentes a su utilización en tareas del tipo estudiado.

Escolares con las mismas competencias básicas demuestran diferentes habilidades en razonamiento inductivo numérico, las cuales se pueden categorizar mediante el análisis de las respuestas verbales y de las estrategias de cálculo que hemos realizado en este capítulo.

- Algunos interrogantes y conjeturas

Todos los alumnos objeto del estudio dispusieron de tiempo sin límites para realizar la prueba y ejecutaron correctamente la portada de la misma, con lo que manifestaron una buena comprensión del mecanismo y el sentido de las tareas propuestas. Por otra parte, a tenor de los cálculos realizados, todos los sujetos han manifestado un dominio adecuado de los algoritmos de las cuatro operaciones básicas, lo que está de acuerdo con las habilidades y destrezas básicas necesarias para realizar las tareas.

Si todos los alumnos sabían lo que tenían que hacer, disponían de las habilidades aritméticas necesarias y no hubo límite de tiempo, nos podemos preguntar: ¿cómo justificar los resultados dispares de unos alumnos respecto de otros?. La edad o el curso, como hemos visto, son factores importantes pero no determinantes, puesto que se observa bastante divergencia en los resultados de alumnos de la misma edad o pertenencientes al mismo curso.

Desde nuestro punto de vista, a cuyos argumentos pretendemos contribuir favorablemente con el resto de la investigación realizada, el establecimiento de relaciones numéricas no depende únicamente de la instrucción o del aprendizaje escolar, sino también de aportaciones "sui generis" del sujeto. Así por ejemplo: la relación entre varias cantidades no está explicita en ninguna de ellas, siendo el individuo el que la establece y construye; la comparación como actividad básica debe evolucionar desde unos saberes concretos a otros más abstractos así como de unos estados de conocimientos a otros más evolucionados, lo que explica el hecho de que saber dividir no sea suficiente, en algunos casos, para establecer-descubrir una comparación partitiva entre diferentes números.

Por otra parte, teniendo en cuenta que las relaciones que se deben establecer en las series se trabajan en cursos inferiores a quinto y sexto y que existe un elevado porcentaje de alumnos de dichos cursos en niveles inferiores al nivel N4, es razonable pensar que en la realización de estas tareas influyen aspectos de desarrollo intelectual que trascienden la mera instrucción. En definitiva podemos decir que los niveles obtenidos no son sólo niveles de aprendizaje, sino más bien de reorganización intelectual de los conocimientos y saberes.

- De la continuación de la investigación

El desarrollo posterior de la investigación, que se expone en los capítulos siguientes, pretende profundizar en los aspectos estudiados. Para ello nos proponemos: a) construir un modelo teórico que permita establecer una nueva escala por ampliación de la anterior a los niveles inferiores de la Educación Primaria; b) aportar evidencia empírica que confirme y amplie los resultados del estudio exploratorio, en particular los relativos a la categorización de estrategias y niveles y al estudio de la evolución de los mismos.

En el resto del trabajo hemos de realizar, por tanto, dos tipos de estudios: teóricos y empíricos. Los estudios teóricos, cuyo propósito es obtener un modelo evolutivo que fundamente los estudios empíricos posteriores, se exponen en el capítulo 4, mientras que los estudios empíricos, cuyo propósito es confirmar la validez del modelo y profundizar en los aspectos estudiados, se abordan en los capítulos 5 y 6.

Desde el punto de vista teórico necesitamos indagar en los modelos de razonamiento inductivo y en los origenes del número y de las series numéricas desde una óptica epistemológica y cognitiva en un marco inductivista. Igualmente, dado que las estrategias encontradas en las respuestas son todas inductivistas y pensamos que están influenciadas por un desarrollo curricular inductivista de la aritmética en Educación Primaria, vemos la necesidad de analizar las características del tratamiento didáctico del número natural, las operaciones y las series numéricas en el ámbito educativo y en la historia más reciente de la Educación Matemática en España.

Desde el punto de vista empírico, el desarrollo de la investigación irá encaminado a obtener una escala acumulativa completa para el rango de edades comprendidas entre los 6 y los 12 años, determinar las estrategias y características inductivas específicas de cada uno de los niveles y estudiar la evolución, por comparación, del razonamiento inductivo numérico de los escolares de Educación Primaria. Para ello es necesario realizar dos tipos de estudio: a) un estudio descriptivo superficial de características similares al estudio exploratorio realizado; b) un estudio de casos en profundidad mediante la entrevista clínica semiestructurada y el análisis de tareas.

CAPITULO 4

ANALISIS DIDACTICO DEL RAZONAMIENTO INDUCTIVO NUMERICO

4.1.-Introducción

Como ya se ha expuesto en el Apartado 2.4 de esta Memoria, esta investigación consta de dos etapas:

Primera Etapa, de construcción de un modelo teórico evolutivo sobre el razonamiento inductivo numérico.

Segunda Etapa, de evaluación del modelo construido mediante un estudio empírico y un estudio de casos con escolares de Educación Primaria (6-12 años).

La Primera Etapa consta a su vez de tres partes:

1-1 Un primer estudio teórico que plantea la necesidad de un modelo para estudiar el razonamiento inductivo numérico de los escolares.

1-2 Un estudio exploratorio, que confirma la viabilidad del modelo, lo orienta y permite establecer nuevas cuestiones.

1-3 Análisis Didáctico del razonamiento inductivo numérico, que establece el marco interpretativo y el desarrollo conceptual del modelo elaborado.

La primera parte de esta Etapa y los primeros resultados del estudio exploratorio fueron desarrollados en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993), y han sido resumidos en el Capítulo 1 de esta memoria. La conclusión del estudio exploratorio, junto con un análisis completo de los resultados de ese estudio se han presentado en el Capítulo 3 de esta memoria. Queda por presentar la tercera parte de la Primera Etapa, objetivo al que dedicamos este capítulo, que concluye con la elaboración del modelo evolutivo sobre razonamiento inductivo numérico.

La segunda Etapa de la investigación, dedicada a la evaluación del modelo, se desarrolla en los Capítulos 5 y 6 de esta memoria.

El contenido de este capítulo comienza por el análisis del inductivismo matemático, corriente epistemológica que se propone explicar inductivamente la naturaleza de los números, a partir de la experiencia. El inductivismo matemático fue criticado seriamente por Frege (1973) desde un punto de vista lógico y posteriormente por Piaget (1987) desde un punto de vista evolutivo.

También se considera que los planteamientos inductivistas han tenido un arraigo considerable en la aritmética escolar, y se encuentran instalados sólidamente en el currículo y en la práctica docente. Nuestra hipótesis es que el inductivismo matemático continúa vigente en la enseñanza de la aritmética, a pesar de los planteamientos conjuntistas que se incorporaron al currículo de las matemáticas escolares en España a partir de los Programas Renovados del año 70. La enseñanza de la aritmética basada en la fundamentación conjuntista no pudo desterrar las prácticas y procedimientos inductivistas. La revisión que hemos realizado sobre libros de texto publicados en España en el periodo 1900-1990, pone de manifiesto que la enseñanza y aprendizaje de la aritmética escolar se realiza en un contexto inductivista.

En sucesivos apartados de este capítulo delimitaremos el razonamiento inductivo numérico dentro del marco general de la inducción, caracterizaremos la fundamentación inductivista del origen del número natural, revisaremos las interpretaciones inductivistas sobre la enseñanza del número natural y presentaremos la influencia del inductivismo en el currículo de la aritmética escolar. Como consecuencia de estas reflexiones y de los resultados del estudio exploratorio, se construye un modelo teórico para describir la evolución del razonamiento inductivo numérico.

4.2.-Propósito de este capítulo y procedimiento seguido.

El propósito de este capítulo va encaminado a la consecución de los cuatro primeros objetivos de la investigación, establecidos en el Apartado 1.7.2. El logro de estas finalidades permitirá confirmar o rechazar las hipótesis H_1 y H_2, enunciadas en el apartado 1.8 y contextualizadas para el proceso global de la investigación en el apartado 2.4.

En definitiva, con el estudio que se presenta en este capítulo pretendemos:

a) Alcanzar el objetivo O_1: Delimitar el razonamiento inductivo numérico dentro del marco general de la inducción.

Para el logro de este objetivo realizamos una revisión epistemológica de la inducción, de la inducción en matemáticas y del inductivismo aritmético; también tenemos en cuenta los estudios sobre razonamiento inductivo realizados desde la Psicología Cognitiva.

b) Alcanzar los objetivos:

O2: Caracterizar las interpretaciones inductivistas sobre el origen del número natural.

O3: Reconocer las interpretaciones inductivistas y convencionalistas en la transmisión escolar de la aritmética del número natural, determinando las estrategias y procedimientos inductivos utilizados.

Para el logro de estos objetivos, y de acuerdo con el marco metodológico presentado en el apartado 2.4, constataremos la presencia del inductivismo aritmético en la enseñanza de la aritmética escolar en España.

c) Alcanzar el primer apartado del objetivo O4: Establecer un modelo teórico evolutivo del razonamiento inductivo numérico.
Este objetivo se consigue a partir de los análisis precedentes y de los resultados del estudio exploratorio que nos han permitido construir un modelo evolutivo para el razonamiento inductivo numérico

d) De los objetivos complementarios se pretende alcanzar el objetivo C2: "Comprobar la importancia del análisis didáctico para fundamentar y contextualizar investigaciones en Educación Matemática".
Este objetivo se logra al conseguir interpretar el razonamiento inductivo numérico en el contexto de la inducción, relacionando la inducción inferencial con la enseñanza del número natural.

El procedimiento seguido en el estudio se expone en la figura 4.1, en la que se puede apreciar que el análisis didáctico realizado se origina en una revisión de la "información primaria" sobre el problema de investigación en cada una de las siguientes fuentes: Epistemología, Enseñanza y Currículum, Psicología del aprendizaje y desarrollo cognitivo; en concreto:

- En Epistemología se realizan dos estudios con finalidades diferentes:
  - un primer estudio que consiste en indagar distintas definiciones de inducción y presentar diferentes modelos formales de razona-miento inductivo;
  - un segundo estudio consistente en destacar la naturaleza inductiva del número natural y de la aritmética y dentro de ella estudiar el planteamiento que llamamos inductivista.
- En Psicología del aprendizaje y desarrollo cognitivo se han analizado distintas interpretaciones cognitivas de la inducción, de las que se expone una síntesis en el capítulo 1 y un desarrollo más completo en el anexo 4.1.
- En Enseñanza y Currículum no se ha encontrado información acerca de la inducción como objeto de estudio, salvo algunas referencias circunstanciales.

A partir de esta información primaria se analizan, en una segunda fase, las relaciones existentes entre los datos correspondientes a los diferentes campos, obteniéndose las siguientes conclusiones y efectuándose los siguientes estudios para el desarrollo posterior del trabajo:

- la necesidad de acudir a los libros de matemáticas y textos escolares para ver la interpretación inductiva de los contenidos aritméticos así como para constatar que la naturaleza de las nociones transmitidas en aritmética son de origen inductivista. Se realizan en este sentido dos estudios teóricos que vienen a cubrir los aspectos mencionados

- Las diferentes conceptualizaciones de la inducción resultan insuficientes desde un planteamiento evolutivo. Revisamos el concepto de inducción para superar esas dificultades y tener en cuenta el nivel de desarrollo intelectual de los escolares de Educación Primaria. Realizamos por ello una interpretación especifica del razonamiento inductivo numérico desde el punto de vista evolutivo.

- la interpretación de la escala de Mokken a partir del análisis de las respuestas verbales del estudio exploratorio, que se expuso en el apartado 3.8, proporciona evidencia empírica sobre la viabilidad de un modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico y, por tanto, refuerza la necesidad de construcción de dicho modelo.

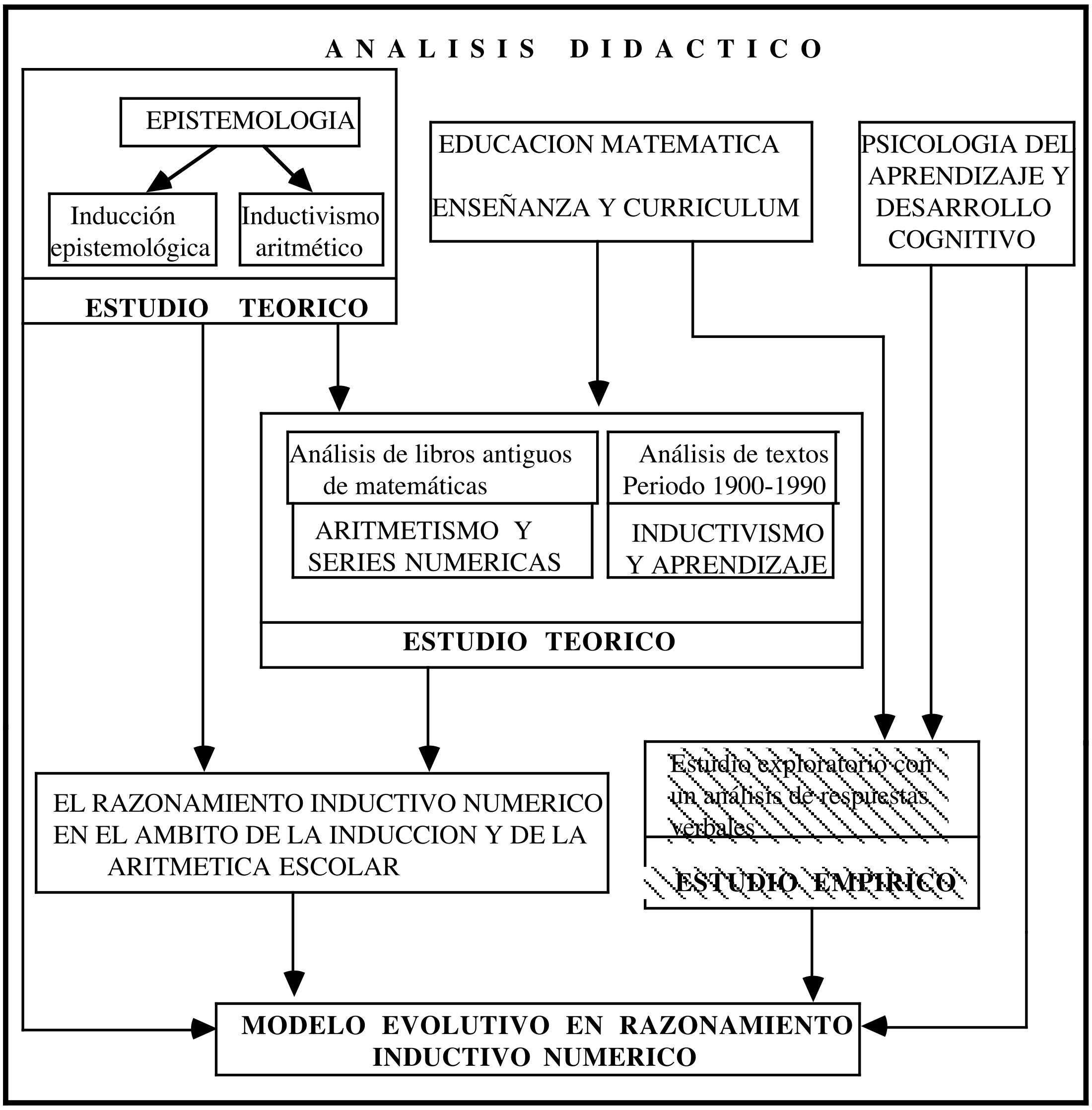

Figura 4.1. Análisis didáctico y consecuencias

Por último, como consecuencia de las reflexiones realizadas y de los resultados teóricos y empíricos obtenidos en la fase anterior, se construye un modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico, tarea que abordamos en los últimos apartados del capítulo.

4.3.- Inducción y Epistemología

Dificilmente podremos encontrar un concepto, como el de inducción, que abarque a tantos otros y, al mismo tiempo, pretenda justificarlos. En la misma medida, es igualmente difícil encontrar y formular una definición universal y formal de dicho concepto sin perder generalidad o desvirtuar su naturaleza. Teniendo en cuenta estas dificultades y limitaciones hemos realizado una revisión sobre dicho concepto, orientada a enmarcar los fundamentos inductivos de la Aritmética según distintas posiciones teóricas. De dicha revisión se exponen aquí los aspectos que entendemos más importantes para los propósitos de la investigación.

La importancia de la inducción en la fundamentación del conjunto de los números naturales se ha mantenido hasta nuestros días en donde, desde un planteamiento axiomático (Aparicio y Payá, 1985), se ha caracterizado el conjunto $\mathbb{N}$ como el mínimo conjunto inductivo de $\mathbb{R}$. La inducción es clave tanto en las teorías que se proponen explicar el origen del número natural como en aquellas otras que atienden a su justificación formal.

La Epistemología estudia los problemas que plantea la inducción como forma de conocimiento (Dancy y Sosa, 1992). En los dos apartados que siguen nos proponemos: primero, resumir algunos problemas ya clásicos de la inducción junto con las ideas de algunos autores que las han estudiado; segundo, realizar una presentación abreviada de los modelos de inferencia sintética utilizados. En el tercer apartado, se expone el análisis de una posición epistemológica particular que considera la inducción como fundamento de la Aritmética.

4.3.1.- Inducción y razonamiento inductivo

Una primera cuestión se refiere a la relación entre inducción y deducción. Aristóteles fue quien planteó y desarrolló modos de razonamiento y estableció las diferencias entre silogismo e inducción, indicando que en el primero el pensamiento va de lo universal a lo particular mientras en el segundo se efectúa **de lo particular a lo universal** (Ferrater, 1982). Desde los orígenes de la filosofía moderna el razonamiento deductivo y el razonamiento inductivo se han presentado como vías alternativas de acceso al conocimiento y a su justificación. Algunos autores, como Jevons (1873), se propusieron hacer compatibles estos dos tipos de razonamiento llegando a presentar la inferencia de los particular a lo general como operación inversa de la deducción y afirmando que no es posible concebir un tipo de razonamiento sin el otro. El razonamiento matemático se ha identificado prioritariamente con los métodos deductivos; solo en fechas recientes (Lakatos, 1978) se ha profundizado en el carácter esencial que tiene la inferencia inductiva en la construcción del conocimiento matemático.

Una segunda cuestión es la relativa al problema de la verdad de las conclusiones inductivas, que ha llevado a considerar el enfoque probabilístico de la inducción, desarrollado por autores como Keynes, Carnap y Black, entre otros. Precisamente, fue el método inverso de las probabilidades el que sugirió a Jevons (1873) su teoría de la inferencia inductiva como método inverso de la deducción. Russell (1912) plantea un modelo probabilístico de carácter frecuencial para la validez de las argumentaciones inductivas:

> "Cuanto mayor es el número de casos en que una cosa de la especie A se halla asociada con una cosa de la especie B (si no conocemos ningún caso en que halla faltado la asociación) tanto más probable es que A se halle siempre asociado con B". (pág. 64).

Popper (1934), sin embargo, cuestiona los planteamientos probabilísticos como justificación de la verdad de una inferencia:

> "El hablar de la probabilidad en lugar de hacerlo de la verdad no nos sirve para escapar de la regresión infinita o del apriorismo". (pág. 293)

Una tercera cuestión hace referencia a la caracterización de la inducción como inferencia. En la memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993, pp. 27-31) hicimos una revisión de los tipos de silogismos usuales. Así, Peirce (1918), desde la silogística, considera que el silogismo “bárbara” tipifica particularmente al razonamiento deductivo y considera que ningún razonamiento inductivo puede ponerse en esta forma. Llega a la conclusión de que la **inducción es la inferencia de la regla a partir del caso y el resultado** y establece que el proceso de hacer una hipótesis es diferente a un proceso de inducción; la hipótesis, para este autor, es la inferencia que obtiene el caso a partir de la regla y del resultado. En definitiva distingue entre la inducción y la hipótesis dentro de las inferencias sintéticas.

Ferrater Mora (1982) denomina “Abducción” a la hipótesis, considerando que es la forma de inferencia que forma teorías y agrega algo al conocimiento. Para este autor **la inducción permite completar el proceso de búsqueda, encontrando hechos confirmatorios de las teorías.**

Finalmente consideramos el papel de la inducción en las ciencias experimentales. En la interpretación del método científico empleado en las ciencias experimentales, Hempel, (1966) retoma el concepto de hipótesis anterior. Según este autor:

> "Al conocimiento científico no se llega aplicando un procedimiento inductivo de inferencia a datos recogidos con anterioridad, sino más bien mediante el llamado "método de las hipótesis", es decir, inventando hipótesis a titulo de intentos de respuestas a un problema en estudio y sometiendo luego estas a la contrastación empírica" (Pág. 37);

afirmación en la que podemos observar relaciones con el principio de falsación de Popper (1934):

> "Una hipótesis solo puede contrastarse empíricamente (y únicamente) después de que ha sido formulada" (Pág. 30).

También, la importancia de la inducción queda patente en los procesos de descubrimiento de leyes, patrones y regularidades:

> "La inducción consiste en descifrar el significado oculto de los fenómenos naturales. Dados acontecimientos que se presentan en ciertas combinaciones definidas, debemos encontrar las leyes que rigen esas combinaciones" (Jevons, op. citada, pág. 110).

Hemos revisado brevemente cuatro cuestiones que ponen de manifiesto la complejidad del razonamiento inductivo: su dualidad con el razonamiento deductivo, el problema de la verdad, su caracterización como inferencia y su relevancia en la construcción del conocimiento científico.

4.3.2.- Modelos de inferencias sintéticas

Siguiendo a Peirce (1918), caracterizamos las inferencias sintéticas inductivas como aquellos juicios generales sobre una categoría de hechos que se emiten a partir de la observación de un número limitado de casos (Ortiz, 1993; pp. 26-28). En este apartado se exponen los modelos de inferencias sintéticas que pueden servir para interpretar el razonamiento inductivo numérico.

La mayor parte de los autores estudiados hacen explícita la importancia de las inferencias sintéticas como las **únicas inferencias que aumentan nuestro conocimiento real**: Poincare (1902), Peirce (1910), Mill (1917), Polya (1954), Chalmers (1976), Lakatos (1978), entre otros. Asímismo, algunos de los autores revisados (Peirce (1901), Stebbing (1967), Chalmers (1976), entre otros) indican la **imposibilidad de reducir la razón sintética a la analítica**, con la única salvedad del razonamiento por inducción completa en Matemáticas.

Los principales modelos revisados son:

Inducción por enumeración simple. Para Stebbing (1967), la forma lógica de la enumeración simple es la siguiente:

"Todas las S observadas son P; por tanto todas las S son P".

La naturaleza de la inducción por enumeración simple queda también patente en el siguiente enunciado:

"Tales o cuales casos de S tienen la propiedad P; no se han observado casos de S que carezcan de P; por lo tanto, toda S tiene P".

Las inferencias de este tipo pertenecen a una etapa muy temprana del pensamiento del hombre. Por otra parte, la ciencia sería imposible sin una considerable acumulación de tales inferencias (Stebbing, 1967).

Inducción perfecta. Desde la silogística Peirce (1867) interpreta este modelo a partir de la figura siguiente:

1) Todo M es P

2) +S es M

+S es P

donde +S denota todas las clases incluidas en M. Si sabemos que la segunda premisa y la conclusión son verdaderas entonces la forma:

1) +S es P

2) +S es M

M es P

representa la inducción perfecta. Es una forma demostrativa válida, puesto que la conclusión es verdadera por enumeración.

Según Jevons (1873):

> "Decimos que una inducción es perfecta cuando todos los objetos o acontecimientos que pueden ser incluidos en la clase considerada se han examinado. La inducción imperfecta se refiere a la inclusión de objetos que están fuera de nuestro alcance y se halla siempre afectada de una incertidumbre mayor o menor". (Pág. 129).

La inducción perfecta no es aplicable a una tarea de continuar una serie infinita de números naturales, por lo que, a menos que se considere como finitas a este tipo de series, no se constata el uso de este modelo en la investigación que venimos realizando sobre razonamiento inductivo numérico.

Analogía. Para este término hemos encontrado diferentes acepciones:

a) Desde la silogística, podemos considerar la definición dada por Peirce (1867): Si S', S'', S''', son tomadas al azar de una clase tal que sus caracteres elegidos al azar son tales como P', P'', P''', la fórmula de la analogía es la siguiente:

$$\frac{\begin{array}{c} t \text{ es } P', P'', P''' \\ S', S'', S''' \text{ son } q \end{array}}{t \text{ es } q}$$

b) Desde una lógica de clases (Copi, 1953), toda inferencia analógica parte de la similaridad de dos o más cosas en uno o más aspectos para concluir la similaridad de esas cosas en algún otro aspecto, es decir:

a, b, c y d tienen todos las propiedades P y Q
a, b y c tienen todos la propiedad R
Luego d tiene la propiedad R.

c) Para Polya (1944), la analogía es es el resultado de una comparación entre objetos de cualquier naturaleza, por la que se descubren semejanzas que pueden llegar a identificarlos como iguales:

> "La analogía es semejanza sobre un nivel definido y conceptual. Objetos semejantes son aquellos que concuerdan entre sí en algún aspecto. Si usted trata de delimitar el aspecto en que concuerdan para definir conceptos, usted mira estos objetos semejantes como análogos. Si tenemos éxito en aclarar los conceptos, hemos clarificado la analogía". (Pág. 38).

Según este autor, la proporcionalidad, o acuerdo en las razones de las partes correspondientes entre dos figuras geométricas semejantes, o la igualdad de dos razones numéricas, son ejemplos de analogías, lo que conduce a que no es un proceso lógico de razonamiento sino el resultado de una comparación que depende del sistema conceptual del individuo. Se trata, por tanto, de una interpretación conceptual que puede llegar a considerar como análogos objetos que en realidad son muy dispares. Por otra parte, dentro de las analogías consideradas en este sentido ("lo análogo"), están los homomorfismos, según los cuales se pueden considerar análogos dos sistemas de objetos que estén sujetos a las mismas leyes o axiomas (Pág 56).

> La conjetura A del estudiante, de que su proyecto de solución daría resultado, puede estar apoyado por una, dos, o más indicaciones B1, B2, B3, ... Estas indicaciones se le pueden ocurrir al estudiante sucesivamente, intensificando cada una de ellas su confianza en el proyecto. Las discusiones anteriores nos llevan a comparar tal proceso de resolución de un problema con el proceso inductivo en que un investigador, examinando una conjetura A, logra verificar consecuencias B1, B2, B3, ... sucesivamente. (Pág 461).

d) Según Deltheil (1948), la analogía consiste en concluir la semejanza en algunos aspectos de ciertos objetos a partir de su semejanza en otros.

En esta conceptualización podemos observar que se produce primero una inducción por enumeración de las características consideradas, para pasar a continuación a una generalización analógica que no consiste en pasar a una superclase, sino en una identificación parcial de entes diferentes. Así, la reducción que se suele realizar en Matemáticas para pasar de un caso a otro en una demostración formal se puede considerar como un tipo particular de analogía. (Entre otras posibilidades, pasar de un caso a otro, significa transformar el enunciado de un teorema o proposición mediante el uso de analogías para situarnos en la hipótesis de un teorema ya demostrado).

La importancia de la analogía como instrumento de descubrimiento es inmensa. La historia de las matemáticas suministra numerosos ejemplos de progresos importantes realizados gracias al descubrimiento de analogías[1].

Razonamiento por recurrencia o inducción matemática. Para Poincaré (1902), el razonamiento por recurrencia se limita a enunciar la premisa menor del primer silogismo y la formula general que contiene como casos particulares a todos los mayores:

> "El carácter esencial del razonamiento por recurrencia es que contiene condensados en una fórmula única infinidad de silogismos" (Pág 24).
>
> "Es un instrumento que permite pasar de lo finito a lo infinito" (pág. 26);
>
> "Sólo es posible si una misma operación puede repetirse indefinidamente" (Pág 30).

[1] "La analogía en matemáticas". Articulo publicado en "Las grandes corrientes del pensamiento matemático". F. Le Lionnais y colaboradores. Eudeba (pág. 50).

Patrones de inferencia inductiva. Entendemos como patrón a un modelo interpretativo de razonamiento inductivo. Además de los modelos de inferencia inductiva que se han expuesto, podemos añadir el silogismo heurístico de Polya, que es el modelo más simple y más corriente de un razonamiento plausible:

Si A entonces B

B es cierto

A es más factible

En la investigación matemática se presentan casos de heurística que se pueden reducir al anterior. En la obra de Polya hemos encontrado los siguientes modelos[2]:

	Demostrativo deductivo	Matizado demostrativo	Matizado inductivo	Inductivo
1. Examinando una consecuencia	A ----> B B falsa	A ----> B B menos cr.	A ----> B B más cr.	A ---> B B verdadera
	A falsa	A menos cr.	A a. más cr.	A más cr.
2. Examinando un fundamento posible	A <---- B B verdadera	A <---- B B más cr.	A<---- B B menos cr.	A <---- B B falsa
	A verdadera	A más cr.	A a. menos cr.	A menos cr.
3. Examinando una conjetura conflictiva	A / B B verdadera	A / B B más cr.	A / B B menos cr.	A / B B falsa
	A falsa	A menos cr	A más cr.	A más cr.

De acuerdo con el procedimiento que estamos siguiendo y que hemos expuesto en el apartado 4.2, con los modelos básicos de inferencias sintéticas inductivas hemos cubierto un primer estudio epistemológico: caracterizar formalmente aquellos modos de argumentación que, con carácter general, denominamos razonamiento inductivo.

[2] <<cr>> significa <<digna de crédito>> , <<a>> significa <<algo>>, A / B indica A incompatible con B, A ----> B A implica B , A<---- B A está implicada en B.

4.4.- Inductivismo aritmético

Es conocido el problema planteado y aún abiero a discusión sobre el origen del número natural y por tanto de la aritmética. Según Prior (1970, pág. 185), Frege llegó a la conclusión de que es probable que la aritmética tenga un estatus analítico a priori; punto de vista que le coloca en oposición a Kant, que mantuvo que las proposiciones de la aritmética eran sintéticas a priori, y en oposición a Mill, que las consideró como generalizaciones inductivas.

Para este trabajo es de especial importancia analizar las ideas de Mill, puesto que en ellas está el núcleo del planteamiento que vamos a denominar inductivista. A él se deben los primeros estudios sobre los métodos de la investigación inductiva en la conexión causal, el perfeccionamiento de las tablas de Bacon y la búsqueda del principio de inferencia mediante el cual se puede pasar de afirmaciones particulares comprobadas al establecimiento de una ley general.

La obra de Mill es anterior a la crisis de fundamentos de la matemática y en su época se está configurando una nueva ciencia formal que es la lógica moderna, que según Prior (1976) comienza con la obra "conceptografía" de Frege, a diferencia de la lógica matemática o matemática de la lógica cuyo origen es el álgebra de la lógica de Boole, álgebra que la considera como una parte de la matemática.

De acuerdo con Niddith (1987), entre 1825 y 1900 el álgebra y la geometría experimentaron grandes cambios; cambios que dieron lugar hacia 1900 a una visión general en la filosofía de la matemática completamente diferente de la que hasta entonces se había mantenido. El cambio de formas y propósitos en álgebra y geometría influyó grandemente en el desarrollo de la lógica matemática. Estos cambios fueron debido fundamentalmente a Jevons, Peirce y Schröder (Niddith, 1987, pág. 54).

Con los planteamientos lógicos aparecen los fundamentos de la aritmética de Frege, cuya aportación fundamental es el concepto de número cardinal cuya más sencilla ejemplificación son los elementos de la serie 0,1,2,3,..., considerando el número cardinal como una propiedad de una clase. Simultáneamente a Frege, Cantor hace uso de los números cardinales sin dar una definición (desarrolla la idea de tener el mismo número cardinal) y de los números ordinales, elaborando una aritmética cardinal y una aritmética ordinal, integradas en lo que se suele denominar aritmética de conjuntos.

Para una interpretación más completa del inductivismo además de la obra de Mill, hemos estudiado la lógica de Jevons, que pretende fundamentar el razonamiento inductivo en la lógica formal, coincidiendo con Mill al admitir la naturaleza inductiva de la aritmética.

4.4.1.- Algunas consideraciones de Mill respecto a la naturaleza inductiva de la aritmética

En este apartado exponemos una síntesis de las consideraciones inductivas de Mill respecto a la naturaleza inductiva del número natural y, por tanto, de la aritmética (Algunos textos originales se pueden ver en el anexo 4.2).

Así, según Mill (1917, pág. 280):

> "Las inducciones en Aritmética son de dos especies:
> - Las definiciones de diferentes números: uno y uno hacen dos, dos y uno hacen tres, etc
> - Los dos axiomas siguientes:
>
> *Las sumas de cantidades iguales son iguales
> *Las diferencias de cantidades iguales, son iguales”

Del mismo modo, hace referencia a la abstracción de la igualdad de cantidades en los siguientes términos (página 235):

> "Para inferir la igualdad tenemos, entre otras, las formulas siguientes:
> 1. Las cosas que aplicada la una con la otra coinciden, son iguales;
> 2. Las cosas iguales a una misma cosa, son iguales;
> 3. El todo y la suma de sus partes, son iguales;
> 4. Las diferencias de cosas iguales, son iguales.
>
> Para inferir la desigualdad tenemos las siguientes:
> 1. Un todo y sus partes son desiguales;
> 2. Las sumas de cosas iguales y de cosas desiguales, son desiguales;
> 3. Las diferencias de cosas iguales y de cosas desiguales, son desiguales".

El hecho de identificar la cantidad "tres", con independencia de la disposición espacial o constelación, es una verdad adquirida inductivamente sobre la que se funda la ciencia de los números:

> "Tres piedras en dos partes separadas y tres piedras en un solo montón no hacen la misma impresión sobre nuestros sentidos, y la aserción de que las mismas piedras pueden, por un cambio de orden y de lugar, excitar la una y la otra sensación, no es una proposición idéntica. Es una verdad adquirida por una antigua y constante experiencia, una verdad inductiva, y sobre estas verdades se funda la ciencia de los números.

Todos los métodos perfeccionados de la enseñanza de la Aritmética a los niños proceden del conocimiento de este hecho" (Pág. 279).

"Podemos definir tres como "dos y uno", pero los cálculos establecidos sobre esta proposición no se siguen de la definición misma, sino de un teorema aritmético que en ella está presupuesto; a a saber: hay colecciones de objetos que impresionan los sentidos de esta manera : 000 y pueden ser separados en dos como esta: 00 / 0"

Para Mill (pág. 586), las verdades elementales o primitivas en la ciencia de los números son los axiomas comunes sobre la igualdad: **"dos cosas iguales a una tercera son iguales entre si" y "cantidades iguales añadidas a cantidades iguales, dan sumas iguales"**, con lo que se debe llegar a la definición de los diversos números que dichos axiomas comprenden. Las palabras dos, tres, etc., denotan fenómenos físicos y connotan propiedades físicas de estos fenómenos, de manera que dos manzanas son diferentes de tres manzanas o 100 y 101 objetos pueden colocarse de forma que se puedan apreciar sus diferencias; lo que connota el nombre de un número es la manera en la que están agrupados los objetos para formar esta colección particular:

"Alguna propiedad perteneciente al agregado de cosas que designamos con este nombre, y esta propiedad no es otra cosa que la manera característica como las partes de este agregado están allí reunidas y en las que puede ser dividido. (Pág. 588)

Afirma que toda proposición aritmética o enunciado del resultado de una operación aritmética es el enunciado de uno de los modos de formación de un número dado (Decir que el cubo de 12 es 1728 equivale a decir que 1728 es un agregado de doce docenas de docenas). Estos modos son innumerables, pero, cuando conocemos o elegimos uno de ellos, podemos determinar todos los demás. Y puesto que el entendimiento percibe y retiene más fácilmente cosas uniformes y, por esto mismo, simples, hay una ventaja evidente en escoger un modo de formación que sea el mismo para todos los números, es decir, fijar la connotación de los nombres del número según un principio uniforme.

Mill (pág. 589), interpreta que nuestro sistema actual de numeración presenta la ventaja mencionada anteriormente, además de la posibilidad de indicar a la vez dos de los modos de formación de un número, es decir:

- cada número se considera formado por la adición de una unidad al número inmediatamente anterior, lo que viene indicado por el **lugar que ocupa en la serie**;
- cada número se considera formado por la adición de un número

de unidades inferior a diez y de un número de agregados iguales a una de las potencias sucesivas de diez; segundo modo de formación que es expresado por el **nombre del número y por su signo numérico.** Es lo que en las aritméticas de la época se entiende por numeración hablada y escrita.

4.4.2.- La complementariedad de Jevons

Jevons (1873), a diferencia de Mill, intenta fundamentar la matemática a partir de la lógica de la época en contra de las tesis de Boole. Según esta aproximación, la igualdad es la relación fundamental de todo razonamiento cuantitativo y, por tanto, de la aritmética y la geometría (Euclides). Por otra parte, la lógica (Aristóteles) se fundamenta en la relación de identidad, que es más general que la relación de igualdad, de lo que resulta que la lógica es más general y fundamental que la aritmética. Con estas ideas Jevons intenta trasladar los axiomas sobre cantidades al campo lógico :

> "Cualquiera que sea la relación en que una cantidad está con respecto a otra, está en la misma relación con toda cantidad igual a aquélla". En este axioma hemos reunido un número grande de axiomas que han sido enunciados más o menos detalladamente por los matemáticos" (Pág.146).

Las consideraciones de Jevons quedan en evidencia en las múltiples alusiones a las generalizaciones inductivas en aritmética, como la siguiente:

> "los grupos de unidades son los que realmente tratamos en aritmética. El número cinco es realmente 1+1+1+1+1 y por razones de concisión el signo más sencillo 5 ó la palabra cinco. Esos nombres se imponen arbitrariamente de alguna manera y luego surgen relaciones entre ellos en variedad infinita, relaciones que no tienen nada de arbitrarias. Si definimos cuatro como 1+1+1+1, se sigue que cinco = cuatro + uno; pero sería igualmente posible tomar ésta última cantidad como definición y, en ese caso, una de las igualdades anteriores se transformaría en una inferencia (Necesaria). Todo número mayor o igual que siete pertenece a la clase m + 7. Todo número es la mitad de algún otro. Y así sucesivamente. Existe una cantidad ilimitada de generalizaciones sucesivas de jerarquía creciente. (Pág. 150).

Jevons pretende obtener una interpretación lógica de la aritmética sin que esta pierda su estatus inductivo para lo que pretende modificar la conceptualización de inducción intentando darle un estatus lógico. De esta manera si la inducción se puede interpretar desde la lógica queda demostrado que la aritmética es una parte de la lógica.

Los intentos de fundamentar la Matemática en la lógica tuvieron su primer escollo en el concepto de unidad matemática, basada en la igualdad. Esta dificultad se pone de manifiesto ante las leyes de absorción e idempotencia de la disyunción, que no se cumplen en aritmética (si bien (p v p) es equivalente a p, no es cierto que 1+1=1):

> "Se ha dicho a menudo que las unidades son unidades en el sentido de ser perfectamente similares entre si; pero, aunque pueden ser perfectamente similares en algunos aspectos deben ser diferentes, por lo menos en uno, de otro modo no serian susceptibles de pluralidad" (pág. 139)
> "La abstracción numérica consiste en abstraer el carácter de la diferencia de la cual surge la pluralidad limitándonos a conservar el hecho"

Estas afirmaciones ponen de manifiesto en estos planteamientos, la necesidad de distinguir entre números concretos y números abstractos:

> "'En la proporción en que especificamos los caracteres lógicos de los objetos numerados, los hacemos concretos. En el número abstracto tres no se afirma nada respecto de los aspectos en los cuales concuerdan los tres objetos; pero en tres monedas o tres caballos no solamente aparecen los objetos numerados sino que se limita su naturaleza. El número concreto, por tanto, implica la misma conciencia de la diferencia que el número abstracto, pero está mezclado con un fundamento de similitud expresado mediante los términos lógicos. Existe identidad, en tanto que intervienen los términos lógicos; y la diferencia en tanto que los términos se mantienen solamente numéricos". (Pág. 141)

Lo que le lleva a la consideración o justificación de la llamada "ley de homogeneidad", que afirma que en todo cálculo aritmético la naturaleza lógica de los objetos numéricos debe permanecer inalterada.

4.4.3.- Caracterización del inductivismo a partir de las consideraciones de Mill y Jevons

Para nuestras pretensiones y desde las consideraciones del origen del número natural expuestas anteriormente, podemos caracterizar el inductivismo aritmético por las siguientes afirmaciones:

1- El origen del número natural es inductivo.
2- La aritmética no es un sistema deductivo sino inductivo.
3- Los números se dicen de las cosas y no de los conceptos (según Frege los números no se dicen de las cosas, sino de las clases).
4- El punto de partida de la aritmética son los axiomas sobre cantidades, basado en el principio empirista: "el todo es igual a la suma de las partes".

En cuanto a la caracterización inductivista de la aritmética destacamos los siguientes aspectos puntuales:

1. Los diferentes números se definen y la definición de los mismos son inducciones
2- Los números se definen como agregados de unidades iguales aunque no idénticas.
3-Todos los números han de ser números de unidades iguales lo que lleva a la distinción entre números concretos y abstractos (Existe identidad, en cuanto intervienen los términos lógicos; y la diferencia en tanto que los términos se mantienen solamente numéricos)
4- El nombre de un número indica la manera en la que agrupamos los objetos para poder diferenciar distintas cantidades
5- Distinguen la numeración hablada de la numeración escrita.
6- La operación de dividir necesita para ser realizada, un conocimiento previo de la de multiplicar.
7- Ley de homogeneidad: En todo cálculo aritmético la naturaleza "lógica" de los objetos numéricos deben permanecer inalterados.
8- Toda proposición aritmética o enunciado del resultado de una operación aritmética, es el enunciado de uno de los modos de formación de un número dado.

4.4.4.-El convencionalismo aritmético

En filosofía el convencionalismo es una concepción según la cual las leyes y teorías científicas son convenciones que depende de la libre elección entre varios modos alternativamente posibles de describir el mundo natural. La aparición de un convencionalismo sistemático en el dominio cognoscitivo se verifica sólo a finales del siglo XIX, después del descubrimiento de la posibilidad de geometrías no euclidianas, al desaparecer el carácter evidente de los axiomas geométricos. En el ámbito de la matemática se considera a Poincaré como un gran teórico del convencionalismo (Blanche, 1973. pág. 86).

El convencionalismo trae también consecuencias importantes para el aprendizaje de la matemática y, en concreto, para la enseñanza del número. Según Helmholtz (1887):

> "Podemos considerar los números como una serie de signos arbitrarios elegidos, pero a los cuales le aplicamos un modo determinado de sucesión a título de sucesión regular o, conforme a la expresión habitual, de sucesión natural. El orden de los signos numéricos es tan convencional como el orden de las letras en las diver-

sas lenguas; orden que, una vez adoptado y empleado de una manera constante, toma igualmente una apariencia normal y regular". (Cita referenciada por Brunschvicg en su obra :"Las etapas de la filosofía matemática". Pág. 398).

"Se evita la noción de número cardinal y la idea de unidad. La serie ordinal basta para constituir el número" (Brunschvicg, 1929).

Para los convencionalistas, la adición entra en el marco de la enumeración puramente ordinal; por ejemplo: por a+b designo el número de la serie sobre el que caigo si cuento uno para a+1, dos para a+2, etc., hasta que haya contado hasta b. Según Brunschvicg (op. citada), Helmholtz fundamenta la teoría de las operaciones aritméticas sin recurrir a la intuición ni tener en cuenta la idea de colección de unidades homogéneas. Así, si suponemos que estamos en presencia de un grupo de términos distintos, podemos hacer corresponder un signo de nuestra serie ordinal a cada uno de dichos términos. Siempre que no haya laguna ni repetición obtendremos el mismo número, sea cual sea el orden que se le asigne a los términos del grupo. La **acción de contar** es la base de todos los cálculos.

Con los planteamientos convencionalistas, según Brunschvicg, la aritmética renuncia definitivamente a todo valor de ciencia, puesto que la ciencia pretende al menos alcanzar la verdad. El convencionalismo rebate por tanto al inductivismo en esta pretensión, encontrándonos ante dos posturas antagónicas pero no contradictorias.

La importancia de la consideración epistemológica del convencionalismo en nuestra investigación es incuestionable y por una razón obvia: independientemente de las perspectivas epistemológicas subyacentes a distintos planteamientos curriculares para el aprendizaje de la aritmética, en el desarrollo didáctico de todos ellos tiene una gran importancia la acción de contar. Más adelante haremos un análisis de la importancia de la acción de contar en distintos planteamientos didácticos del número natural. (Apartado 4.6.2.1))

Las tesis convencionalistas tienen éxito debido al reduccionismo en las tesis de Mill, ya que el origen del número no es sólo la cantidad sino, también, la repetición o la combinación, por citar algunos ejemplos. La repetición, por ejemplo, es temporal pero secuencial; podemos hablar de momentos distintos, de cantidades de tiempo y de frecuencias, de tal manera que, aunque sean idénticas, podemos diferenciar en el tiempo las oscilaciones de un péndulo y contarlas; la repetición nos lleva a contar. Las unidades son totalmente idénticas y sólo se diferencian en su distribución temporal. Aquí podemos decir que **la repetición y la acción de contar están en intima**

relación. En lo que se refiere a la combinación, no hay duda de que las posibles combinaciones de unos dígitos representan un número. En estos casos los axiomas de extensión son de dudosa aplicación: ¿Qué se entiende por diferencia entre una combinación y otra?; ¿qué puede significar sumar combinaciones u oscilaciones?.

Los estudios anteriores nos muestran la existencia de planteamientos inductivistas en la construcción de la aritmética, alcanzandose el objetivo planteado, con lo que damos por finalizado nuestro estudio epistemológico en tal sentido. Se puede seguir investigando sobre el inductivismo y sus consecuencias en la filosofía de la ciencia, pero estaríamos rebazando el campo especifico de este trabajo.

4.5. La perspectiva genética y la inducción en aritmética

En el primer capítulo presentamos una síntesis de las diferentes interpretaciones cognitivas de la inducción entre ellas las de la psicología evolutiva de Piaget. Esta síntesis es el resultado de un estudio más amplio que se desarrolla en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993, págs. 46-65). En dicho estudio se plantea el hecho de que toda teoría en psicología del aprendizaje está en relación con un marco epistemológico, llegando a distinguir dos paradigmas bien diferenciados en investigación psicológica: el conductismo y el constructivismo.

Nuestros planteamientos están en el paradigma constructivista y en concreto en el construtivismo operatorio piagetiano que está sustentado en una interpretación evolutiva del desarrollo psicológico del individuo además de un planteamiento estructuralista de la inteligencia humana con influencias racionalistas. El marco epistemológico que le corresponde al constructi-vismo operatorio es el de la epistemología genética desarrollado por Piaget.

La perspectiva genética del conocimiento es una perspectiva evolutiva de estados de conocimiento más que de conocimientos en si mismos. Desde un punto de vista ontogenético los conocimientos evolucionan en los sujetos pasando por diferentes estados que manifiestan competencias operatorias cada vez más completas mediante equilibraciones sucesivas de las estructuras cognitivas. El sujeto pasa de unos estados de conocimiento más primitivos a otros más evolucionados debido a una progresión hacia una completitud de sus estructuras: Pasa de no poder establecer relaciones con cierta complejidad lógica o matemática a poder establecerlas. La evolución genética individual la podemos caracterizar desde un punto lógico-matemático como un pasaje de no poder establecer una relación a un poder establecer esa relación.

Las posturas empirísta, apriorístas y convencionalistas sobre la naturaleza del número natural no satisfacen a Piaget (1987, pág. 128):

> "Desde las acciones iniciales, las relaciones entre el sujeto y los objetos es un testimonio de un fénomeno mucho más complicado de lo que dejan suponer las interpretaciones empirístas, apriorístas o convencionalistas. La acción de enumerar no puede estar determinada únicamente por los objetos, puesto que ella los estructura en función de un esquema operatorio, que es asimilación de las cosas al doble acto de reunir y ordenar, y puesto que asimilar significa agregar a los objetos caracteres nuevos que no estaban incluidos anteriormente a la acción del sujeto: así la reunión elemental 1+1=2 añade a cada uno de los objetos contados como unidades 1, 1, la nueva propiedad de constituir un todo 2.

Para Piaget, en la evolución de la aritmética son importantes las aportaciones de las acciones intencionadas que realiza el sujeto sobre los objetos que presentan la doble vertiente de la adaptación cognitiva: asimilación y acomodación.

Desde la epistemología genética el razonamiento en matemáticas presenta dos componentes básicas que son la inductiva y la deductiva: El razonamiento matemático presenta la originalidad de ser a la vez una generalización gradual y una deducción enteramente rigurosa: se parece pues a la inducción por su carácter generalizador, pero sin compartir su falta de rigor, y se parece al silogísmo por su carácter de necesidad interna, sin conocer no obstante su infecundidad.

Piaget para reforzar la importancia del razonamiento inductivo en aritmética se apoya en Russell, quien define los números naturales desde la perspectiva inductiva como sigue:

> "definimos los <<números naturales>> como aquellos que se pueden establecer gracias a la inducción matemática, es decir que poseen todas las propiedades inductivas" (Cita referenciada por Piaget,1987, pág. 272).

Según Piaget, esta definición de Russell se basa en las clases "hereditarias" y en los conceptos de sucesor, predecesor, cero, “posterior a cero”, etc.. Russell retoma y precisa los primeros conceptos de Peano para reducir el número entero a las clases, lo que equivale a decir que el principio de inducción matemática se origina en la misma construcción de los números enteros:

> "Tanto cuando se admite la reducción de los cardinales a las clases lógicas como cuando nos limitamos, como hace Peano, a agregar el axioma de inducción a los que determinan la sucesión de los números, el razonamiento por recurrencia se convierte así en la expresión de la construcción de los enteros finitos (Piaget, 1987. Pág. 272).

Desde la perspectiva genética se admite por tanto la importancia de la inducción en la construcción del número natural, pero desconocemos su papel elaborador en dicha construcción, lo que solo se puede resolver desde un planteamiento evolutivo, ya que:

> "El problema de la naturaleza de los entes matemáticos sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo". (Piaget, 1987. Pág. 295).

Esta consideración de la epistemología genética encierra una de las claves de la organización de nuestra investigación. Según la epistemología genética disponemos de dos métodos para investigar la naturaleza de los entes matemáticos en función de su desarrollo: el análisis histórico-crítico y los análisis psicogenéticos. Distinguiendo una sociogénesis de los conocimientos, relativa a su desarrollo histórico en el seno de las sociedades y a su transmisión cultural, y una psicogénesis de las nociones y de las estructuras operatorias elementales que se constituyen en el transcurso del desarrollo de los individuos (Piaget, 1979, pág. 64).

De acuerdo con el plan de trabajo presentado al iniciar este capítulo y en lo relativo a la sociogénesis, hemos realizado un estudio de corte histórico sobre el papel de la inducción en la construcción de la aritmética (apartados anteriores), quedando por analizar hasta que punto se explicitan los aspectos inductivos en la transmisión cultural de la aritmética así como la psicogénesis de la inducción en aritmética. La psicogénesis de la inducción en aritmética es lo que nosotros hemos denominado desarrollo evolutivo del razonamiento inductivo numérico al considerar este problema desde la Didáctica de la Matemática y no desde la Psicología.

En lo que resta del análisis didáctico realizaremos un estudio histórico de la transmisión cultural de la aritmética y de su transmisión escolar concluyendo la psicogénesis de la inducción en aritmética proponiendo un modelo evolutivo del razonamiento inductivo numérico.

4.6.- Aritmetismo y series numéricas.

De acuerdo con lo anterior, continuamos nuestro plan de trabajo expuesto al comienzo del capítulo presentando un análisis detallado del tratamiento de la inducción y las series numéricas en el Curriculo de Aritmética. Llevamos a cabo dicho análisis mediante dos estudios diferentes;

A).- Estudio sobre el aritmetismo matemático y las series numéricas en libros de divulgación matemática españoles de diferentes épocas desde el siglo XVI.

B).- Estudio de corte histórico sobre la enseñanza del número y de las series numéricas en textos escolares de matemáticas publicados en España en el presente siglo.

4.6.1.- Consideraciones generales

A partir de las lecturas realizadas para nuestro análisis histórico hemos comprobado cierta similitud entre los planteamientos inductivistas de la aritmética (ya expuestos) y la aritmética desarrollada en los libros de divulgación matemática consultados y difundidos en España con anterioridad al siglo XX. Podemos decir que las interpretaciones epistemológicas inductivistas de la aritmética tienen un desarrollo matemático concreto. Al hablar del aritmetismo nos referimos a esta manera particular de desarrollar la aritmética por los matemáticos de la época, y que dieron lugar a las síntesis inductivistas sobre el origen y naturaleza de la aritmética del número natural. Por aritmetismo entendemos el tratamiento de la aritmética en base a las consideraciones inductivistas del número natural.

Centrados en la divulgación de la matemática en España, consideramos el aritmetismo como una corriente de divulgación de la aritmética que transmite un sentido inductivista. Su influencia en España ha durado más de cuatro siglos perdurando incluso en la primera mitad del siglo XX a pesar de los cambios producidos en la matemática del siglo XIX, que dentro de unos planteamientos lógicos culminan con la axiomatización de la aritmética.

Sus consideraciones aritméticas no están en relación con la lógica y por tanto permanecen al margen de la revolución axiomática del número natural y por tanto, al margen del progreso matemático. A lo más que llegan es al concepto generalizado de magnitud física en un intento de considerar la magnitud como aspecto general a partir del cual se definen los números. Hemos dicho magnitud física para no confundir con magnitud algebraica en el contexto conjuntista.

En el presente apartado pretendemos dejar constancia de los planteamientos aritmetistas en España con anterioridad al siglo XX y constatar con autores del presente siglo algunos cambios hacia los planteamientos lógicos y en concreto las consideraciones conjuntistas sobre las series numéricas. Poner en evidencia la divulgación aritmetista del número natural y a la vez, fijarnos en como se han considerado las series numéricas dentro de esta corriente.

En la tabla 4.1, presentamos los autores y las obras consultadas para realizar este estudio. Sin pretender un estudio exhaustivo consideramos que los autores consultados son representativos por las siguientes consideraciones:

- Según Paradís y Malet (1989, pág. 240): "La obra de Pérez de Moya es importante por lo que representó desde el punto de vista de la divulgación. La aritmética práctica y especulativa conoció no menos de 14 ediciones en un periodo de 200 años"

- La obra de Tomas Cerdá implica un giro hacia el concepto generalizado de Magnitud pero sin una formalización lógica, manteniendose en un "aritmetismo generalizado" sin perder el carácter inductivo del número natural.

AUTOR	TITULO	AÑO
Perez de Moya, J.	Aritmética práctica y especulativa	1562
Caramuel, J.	Mathesis biceps. Vetus, et nova	1670
Altieri, L.	Elementa philosophie	1785
Cerdá, T.	Lecciones de matemáticas	1816
Bails, B.	Elementos de matemáticas	1816
Boccherine, F.	Aritmética	1849
Cortazar, J.	Aritmética	1862
Fernández y Cardin J.M.	Elementos de matemáticas	1862
Briot	Algebra	1879
Lasala Martinez, A.	Elementos de matemáticas	1919
Llardent Esmet, A.	Aritmética y geometría	1925
Mataix, C.	Aritmética general y mercantil	1942
Salina y Angulo, J.	Aritmética	1943

Tabla 4.1.- Autores y obras consideradas para el estudio del aritmetismo en España.

- Las obras consultadas son una muestra suficiente para dar fe de la divulgación del aritmetismo en España: en los siglos XVI, XVII y XVIII hemos estudiado un autor, destacando Pérez de Moya. En el siglo XIX hemos considerado seis autores ya que en algunos de ellos se aprecian intentos de generalizaciones, como el de Tomas Cerdá previo a las generalizaciones lógicas, considerándose las progresiones aritméticas y geométricas como temas de cierta relevancia. Como se verá, podemos decir que en el siglo XIX las progresiones se consideraron como independientes de la proporcionalidad, cosa que no ocurre en los autores consultados de los siglos anteriores.
- Los autores del siglo XX que hemos estudiado marcan una transición hacia los planteamientos conjuntistas, aunque no integren en dichos planteamientos las progresiones aritméticas y geométricas que son el motivo de su revisión.

Considerando que al hablar de aritmetismo nos referimos a una corriente en aritmética es suficiente la muestra anterior de autores para dejar constancia de la misma. En el siguiente apartado ejemplificamos el planteamiento de alguno de los autores mencionados y seguidamente nos detendremos en el análisis del concepto de serie.

El objetivo pretendido es doble; en primer lugar, poner de manifiesto lo que entienden por aritmética, la importancia que tiene el concepto de cantidad en sus definiciones, aquellas relaciones entre números que consideran como fundamentales y el sentido algoritmico de las operaciones. En segundo lugar obtener la mayor información posible de cómo consideran las series numéricas

4.6.2.- Las relaciones y series numéricas en las Aritméticas clásicas

En las primeras interpretaciones del número aparecen explícitos los procesos de construcción de la serie natural y, por tanto, las relaciones entre los distintos números; relaciones que han determinado las categorías fundamentales en que se clasifican actualmente los números naturales (pares, impares, primos etc.). Según Paul Germain (1948), en el siglo XVII se consolidan unas concepciones y creencias que han perdurado hasta nuestros días y que siguen siendo la base de la enseñanza del número.

De los autores consultados y estudiados, el único que se aparta de la corriente aritmetista es Caramuel (1670), que expone algunas consideraciones idealistas o racionalistas al respecto del número natural en la presentación de su obra "Mathesis biceps. Vetus, et nova" aunque luego desarrolle su obra con un contenido aritmetista.

Ante el problema de la esencia de los números y de su existencia, se sitúa en la linea de considerar el número como una creación del ser humano. Su argumentación se basa en una afirmación de Aureolo:

> "El número proviene de la numeración, y la numeración del numerante (Aureolo)"; Caramuel concluye: "Luego, si no hay numerante, tampoco habrá numeración; y, si no hay ninguna numeración, no habrá número. La forma del número es, por lo tanto, una denominación extrínseca recayente sobre las unidades, que proviene del intelecto numerante. De propósito he dicho <<numerante>>, pues una cosa es reconocer los objetos al mismo tiempo y otra numerarlos. Me explicaré. Hablaba fulano en sueños, y, al dar el reloj las cuatro, dijo:<< una, una, una, una. Este reloj delira dio cuatro veces la una>>. Fulano, pues, numeró cuatro veces una campanada, y no numeró cuatro campanadas. Y, simultáneamente, concebía en el pensamiento cuatro veces el uno, pero no concebía el cuatro. Por lo tanto, numerar es algo distinto de concebir simultáneamente en el pensamiento una pluralidad de cosas. Pues, si tengo cuatro relojes de pared en la biblioteca y todos dan la una, no habrá que decir que dieron las cuatro, sino cuatro veces la una. Esta diferencia no reside en las cosas, independiente de la operación de la mente: luego depende de la mente del que numera. El intelecto, pues, no encuentra, sino que, hace los números, concibiendo en el pensamiento diversas cosas como separadas en si misma y como unidades intencionalmente" (Pág. XLIII).

En estas alusiones, el autor deja claro los aspectos ordinal y cardinal del número natural y rechaza la numerología como ciencia de los números. En cuanto a la representación, podemos leer:

> "Más una vez inventada la sucesión de los números que tienden al infinito, el PROARITHMETES (aquel que por primera vez quiso gobernar los números por leyes) se encontró en una bifurcación; pudo seguir dos vías, a saber: la recta o la circular. 1) Bien la recta, que proyectada al infinito nunca volviera al comienzo. 2) Bien la circular, en la que se traza un circulo y, una vez agotado, se recorre de nuevo en fases cada vez mayores pero proporcionales, y siempre, al final, volviendo al comienzo". (Pág. XLIV).

Quedan de esta manera expuestas los aspectos verbales, gráficos y simbólicos de los números naturales, justificando el uso de los sistemas de numeración posicional relativos. Los sistemas de numeración dan lugar a las diferentes aritméticas: Binaria, Ternaria, etc., según la base de numeración considerada.

Caramuel, J. (1675) se refiere a la aritmética como la ciencia del numerar y establece la diferencia entre cantidad discreta y continua y unidad determinada e indeterminada, siendo en esta última en la que se sitúan las **relaciones** multiplicativas de doble, mitad, etc.. Todos estos aspectos se transmiten en los textos escolares de la época aritmetista y se siguen transmitiendo hoy día, como se puede comprobar en el apartado 4.7.1 y en los resultados de la fase experimental de esta investigación.

Según Perez de Moya (1562):

> "Aritmética es Ciencia, que trata de Números, dicha por los Filósofos, quantidad discreta. Finalmente es un Arte, que nos muestra perfectamente contar".

Para este autor, el fundamento de la aritmética es la unidad, al igual que lo es el punto para la geometría. Distingue dos aspectos fundamentales en el número: el concepto de número y cómo se engendra; el primero se estudia en la Aritmética Teórica y el cálculo con números en la Aritmética Práctica. Para definir el concepto de número, toma la definición de Euclides (multitud de unidades) y compara la obtención de una linea a partir del movimiento de un punto con la obtención de un número a partir de un allegamiento de unidades. Igualmente llega a diferenciar los números dígitos, los números artículos y los compuestos[3].

En cuanto a las relaciones numéricas, en concreto las que determinan series aritméticas o geométricas, Perez de Moya engloba relaciones aditivas y multiplicativas bajo el término **proporcionalidad**, que la define como una similitud de proporciones y distingue tres tipos diferentes: Harmónica, Aritmética y Geométrica. Tanto la proporcionalidad Aritmética como la Geométrica las clasifica en continuas y discontinuas, según que el término medio sea común o no a las proporciones.

En la obra de Laurentino Altieri, "Elementa Philosophie", publicada en el año 1785 en Venecia, se observan los mismos planteamientos. Considera la unidad como principio del número y sólo tiene en cuenta las proporciones geométricas, lo que no ocurre en las obras consultadas y editadas en España hasta avanzado el siglo XIX.

En el siglo XIX se intenta fundamentar la Aritmética a partir de unos principios generales de la Matemática que estén al margen de las disquisiciones filosóficas. Estos principios, al ser comunes para la Aritmética y la Geometría, se basan en el concepto generalizado de magnitud, tal y como queda reflejado en la definición de Matemáticas dada por Tomas Cerdá, en su libro "Lecciones de Matemáticas o Elementos de Aritmética y Algebra"

---

[3]Número dígito es aquel que no llega a diez, número artículo es aquel que es diez ó dieces juntos y número compuesto es aquel que participa de dígito y de artículo.

publicado en 1816:

> "La Mathemática en común es una Ciencia, que trata de la Magnitud, y Extensión. Por nombre de Magnitud se entiende todo aquello, que es capaz de aumento, y disminución"

Cerdá, define la Aritmética como la Ciencia que trata de los Números y que nos da reglas para inferir unas cantidades de otras que el autor reduce a las cuatro operaciones de la Aritmética elemental. Entiende el número como la unidad, el complejo de muchas unidades o alguna parte de la unidad, distinguiendo, por tanto, los enteros de los quebrados. En cuanto a las razones y proporciones las considera como una doctrina que hace posible discurrir en Matemáticas al combinar unas cantidades con otras.

> “Razón de una cantidad a otra, es el modo, con que una cantidad sea respecto de otra de la misma especie, en orden a la magnitud, esto es, si le es igual, mayor o menor y cuanto. De ahí se ve que podemos buscar dos cosas cuando cotejamos una cantidad con otra de su misma especie: la primera, precisamente si una cantidad es mayor que otra, en orden a su diferencia o exceso, y se llama razón Aritmética y la segunda, en orden a cuantas veces una cantidad contiene a otra, o más en general, cual es el cociente de una cantidad dividida por la otra, y en tal caso, se llama razón Geométrica. La razón Aritmética se conoce por el restar y la razón geométrica por el dividir. La razón Geométrica toma diferentes nombres: se llama razón multiplice, cuando el antecedente contiene muchas veces al consiguiente; en particular se llama dupla, tripla, etc.. La igualdad de razones se llama proporción, distinguiendo las Aritméticas y las Geométricas. Una proporción es continua, si el consiguiente de una es el antecedente de la otra. En caso contrario, se le llama discreta” (resumen utilizando la terminología del autor).

Como podemos observar desde Perez de Moya a Tomas Cerdá se mantienen en sus libros, el mismo tipo de relaciones numéricas.

Antes de pasar al siguiente apartado dejamos constancia que hemos comprobado las siguientes coincidencias de estos autores con el inductivismo:

- se considera la unidad obtenida a partir de la cantidad concreta como principio del número y la aritmética como la ciencia de los números;
- el objetivo de la aritmética es la representación numérica basada en el sistema posicional, haciendo hincapié en la numeración hablada y escrita, distinguiendose los números dígitos y polidígitos (dígitos, artículos y compuestos), concretos y abstractos, cantidades homogéneas y heterogéneas, determinadas e indeterminadas, para pasar a definir las operaciones de suma, resta, multiplicación y división desde un punto de vista algorítmico;

-las relaciones numéricas se determinan por las operaciones que ligan los números estando estas relaciones más ligadas a los procedimientos que a los conceptos, incidiendo en la proporcionalidad numérica tanto aditiva como multiplicativa. En general se incide en los procedimientos de cálculo explicando paso a paso las reglas algorítmicas de las diferentes operaciones: el fin primordial es enseñar a operar.

-hemos comprobado que al considerar la relación "mayor que" se establece en relación a la "magnitud numérica" y no al aspecto ordinal del cual poco hemos encontrado aparte de las alusiones dadas por Caramuel al hablar de la numeración en relación con el contar.

4.6.3- Las series numéricas

Según Smith (1958), la palabra "serie" comenzó a utilizarse por los autores británicos del siglo XVII, al escribir "series infinitas" en conexión con las secuencias infinitas utilizadas por los algebristas. Según el mismo autor, en el ámbito latino se utilizó la palabra progresión que se ha mantenido hasta nuestros días.

En los textos consultados y publicados en España, la palabra serie aparece por primera vez, en la obra "Aritmética" de Fernando Boccherini, publicada en 1849. En la página 199 dice textualmente:

> "Cuando se tienen tres o más razones iguales, se dice que se tiene una serie de razones iguales, ya por diferencia o ya por cociente, según sean las razones que entren a componer la serie".
>
> "Se llama progresión aritmética o por diferencia, a toda serie de razones iguales aritméticas tales que el consecuente de la primera sea igual al antecedente de la segunda, el consecuente de esta igual al antecedente de la tercera y así sucesivamente. Es una proporción continua Aritmética continuada indefinidamente. De todo lo anterior se deduce que también se puede decir que progresión Aritmética es una serie de términos tales, que cada uno lleva al que le precede o sigue la misma cantidad, la cual se llama razón" (pág. 201).

De modo análogo define las progresiones geométricas o por cocientes, distinguiendo las series crecientes y decrecientes.

Según la bibliografía consultada, tal y como se puede constatar en las referencias citadas anteriormente, se incluyen las progresiones aritméticas dentro del estudio de la proporcionalidad.

A partir de mediados del siglo XIX, se utiliza el término proporcionalidad exclusivamente para las progresiones geométricas, por lo que, a partir de entonces, los términos razón y proporción se refieren a la comparación numérica por cocientes. En la Aritmética de Juan Cortazar, publicada en 1862, podemos leer:

> "Otra de las reformas introducidas en 1846 es la supresión de las razones y proporciones aritméticas: esta ha sido adoptada por el gobierno francés, según puede verse en los programas modernos franceses. Nosotros conocíamos su completa inutilidad, y antes de ver los referidos programas, teníamos la intención de detenernos en demostrarla; más actualmente la mejor demostración es el hecho citado (pág. IV del prólogo).

Los manuales de matemáticas que proponen un planteamiento más amplio y especializado de las disciplinas matemáticas, incluyen el Algebra como una de las partes a desarrollar. Según Fernández y Cardín, en su obra "Elementos de Matemáticas" publicada en 1862:

> "El Algebra es una ciencia que trata de las propiedades generales de la cantidad, expresada por símbolos en que se prescinde de todo valor numérico. Se llama, por esta razón, Aritmética Universal" (pág. 6). "El Algebra es la ciencia de las fórmulas" (pág. 8).
>
> "La generalización de la Aritmética es el Algebra". "El Algebra es la máxima expresión de la generalización".

La inclusión del Algebra modifica el tratamiento dado anteriormente en algunos apartados aritméticos. Así, el estudio de las progresiones aritméticas y geométricas se independiza del estudio de la proporcionalidad.

No obstante este avance, es posible encontrar textos de Aritmética más recientes que mantienen el planteamiento clásico, fundado en el aritmetismo. Este es el caso de Llardent Esmet, A., que en su libro "Aritmética y Geometría", publicado en 1925, divide la Aritmética en cuatro partes. La cuarta parte se dedica al estudio de la comparación de unos números con otros, a partir de la cual define las proporciones y las progresiones:

> "Comparar dos cantidades en Aritmética es examinarlas para ver cuál es su diferencia o cual es su cociente" (pág, 17).

Como síntesis de todo lo que precede podemos decir que en el aritmetismo más clásico la palabra serie se ha utilizado al hacer referencia a la igualdad de tres o más razones iguales ya sea por diferencias o por cocientes. A las series por diferencias se les denominó progresiónes aritméticas y a las series por cocientes progresiones geométricas. En un principio las progresiones estaban incluidas en el estudio de la proporcionalidad, entendiendo esta como el estudio de la comparación entre números.

En Algebra se consideran las progresiones como un tema independiente de la proporcionalidad. La proporcionalidad queda reducida al estudio de la comparación de razones por cocientes.

Con la teoría de conjuntos desaparece el término serie en el sentido de progresión o de regularidad numérica que le damos en este trabajo y queda sustituido por el de sucesión. Se definen las sucesiones como conjuntos numerables. Así, en el libro de Carlos Mataix Aracil "Aritmética General y Mercantil", publicado en 1942, podemos leer las siguientes definiciones:

> "Se llaman conjuntos numerables o sucesiones, aquellos que quedan caracterizados por las siguientes condiciones:
> 1) Cada elemento del conjunto M tiene un siguiente y sólo uno
> 2) Existe un primer elemento, único, que no sigue a ningún otro
> 3) Todo conjunto que contenga al primer elemento de M y también al siguiente de cada elemento que contenga de M, contiene a todo el conjunto"
>
> "La parte más abstracta de la Matemática es la Aritmética, que es la ciencia que tiene por objeto el estudio de los números, es decir, el estudio de las propiedades de los conjuntos coordinables entre si".

Este autor, a pesar de avanzar desde el positivismo lógico en la construcción de la Aritmética, incluye las progresiones aritméticas y geométricas en la proporcionalidad. Esta situación se da en otros textos de la época, como en la "Aritmética" de Salinas y Angulo publicada en 1943.

Para algunos pensadores de renombre universal, como Whitehead, el sentido aritmético del número natural se pierde con el Algebra y con la teo-ría de conjuntos. En su obra "An introduction to Mathematics", publicada en 1919, podemos leer en la página 12:

> "Esta continua eliminación de números definidos por acumulación sucesiva de parámetros, hace que la cantidad de Aritmética empleada por los matemáticos sea extremadamente pequeña. Muchos matemáticos sienten aversión por los cálculos numéricos y no tienen mayor práctica en ellos. El campo de la Aritmética termina donde comienza el dominio de las ideas de las "variables y de la forma algebraica".

Como conclusión de este apartado decir que:

- en el aritmetismo el sentido numérico de las series de números naturales se trabaja en el tema de la proporcionalidad ya que la comparación numérica es la base para el descubrimiento de una regularidad en una serie indefinida de números naturales;

- en el aritmetismo así como en planteamientos posteriores, las series que se estudian explicitamente son las progresiones aritméticas y geométricas.

4.7.- La enseñanza del número y las series numéricas: una perspectiva histórica

El segundo estudio que mencionamos en el apartado anterior es un análisis de textos escolares. Sus resultados se exponen de manera resumida en el presente apartado y tiene dos cometidos diferenciados:

1) Constatar hasta que punto la enseñanza de la aritmética en España se programa inductivamente, es decir, constatar si en las propuestas didácticas y curriculares se consideran y/o utilizan procesos inductivos como elementos básicos para desarrollar la aritmética;

2) Comprobar en dichos planteamientos las influencias del inductivismo aritmético y del convencionalismo.

Para ello se realiza una revisión de textos escolares, manuales de Aritmética y de Didáctica de la Matemática publicados en España durante el periodo 1900-1990. En dicha revisión, efectuada desde la perspectiva histórica de la enseñanza de la Matemática en España, hemos constatado la existencia de dos períodos fundamentales, al margen de los planes de estudio oficiales, y que hemos denominado: aritmetista y conjuntista. La clave de estos periodos se encuentra en la introducción de la Matemática Moderna en la escuela con la teoría de conjuntos. Por otra parte las diferencias que vamos a constatar mediante la revisión de los textos escolares entre un periodo y otro ya han sido consideradas anteriormente:

> "Antes del año 70 se utilizan técnicas de recuento de objetos para dar paso a la sucesión de términos numéricos y a la simbolización. A partir del año 70, aparecen los conjuntos y el cardinal como expresión de su <<numerosidad>> o de <<tener tantos elementos como>> cualquier conjunto coordinable. Esta diferencia es importante, ya que el modelo elegido sirve para presentar y justificar las operaciones aritméticas y enfatiza ciertos aspectos del número. Antes del año 70 tenían mayor importancia los aspectos ordinales, el contar progresiva y regresivamente; desde el año 70 han dominado los aspectos cardinales" (Rico, L., Castro, E. 1987, pág. 76).

En el momento actual estamos en un periodo de transición sobre el que pensamos es prematuro realizar un análisis. De todas maneras en el apartado

4.7.3 exponemos algunas propuestas curriculares para la Educación Primaria en las que se considera importante que el escolar trabaje el razonamiento inductivo para conseguir un mejor aprendizaje de la aritmética.

En cuanto al primer punto, hay investigaciones recientes que constatan la presentación inductiva de los métodos de cálculo mental a partir del siglo XIX (Gómez, 1995). Según este autor:

> "Como consecuencia de la mayor preocupación por el modo de presentar las ideas, se apuntará hacia un nuevo orden en la secuenciación de los métodos que, en vez de presentarlos como hechos aislados, tenga en cuenta primero el caso particular y después su posible generalización" (Pág. 45)

Veamos en los siguientes apartados el análisis efectuado sobre cada uno de los periodos mencionados.

4.7.1.- Periodo aritmetista: Anterior a 1970

4.7.1.1.- Consideraciones generales

Antes de analizar los libros de textos seleccionados para este periodo, se exponen algunas consideraciones sobre la enseñanza de la aritmética de autores de prestigio, cuya obra se divulgó en España durante este periodo.

El aritmetismo en Didáctica de la Matemática, si bien participa de las concepciones inductivistas de la cantidad en cuanto a la construcción del concepto de número, presenta un desarrollo convencionalista. En cuanto a la relación con el inductivismo decir que se utilizan conceptos del número natural tales como considerar la unidad como principio del número y la diferenciación entre números concretos y abstractos, haciendo recaer el contenido de la enseñanza del número natural en la numeración escrita y hablada. En cuanto a su transmisión escolar se incide en contar y numerar sin entretenerse en presentar la significación del sistema posicional que se acepta por su operatividad.

Por tanto, en cuanto a la fundamentación del número es inductivista y, en coherencia con ello, el contenido lo hemos denominado aritmetista; el tratamiento dado en su enseñanza tiene grandes dosis de convencionalismo.

Para los niveles inferiores algunos autores tienen en cuenta planteamientos psicológicos para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, como es el caso de María Montessori, que en su obra "Psico-Aritmética", publicada en España en 1934, intenta desarrollar la aritmética a partir de un "material científicamente determinado". Asímismo, de acuerdo con la psicología de la época, concede una doble importancia a la aritmética: como "medio de desarrollo mental" y "necesaria y elemental cultura" (Pág.5). A partir de aquí, en los años cincuenta y sesenta, prolifera el material didáctico para la enseñanza del número y de la aritmética dentro de una gran obsesión por encontrar el Método Ideal. Se dan a conocer los materiales de los números en color con las regletas de Cuisenaire (material introducido en España por Gategno) y matemáticos ilustres, como Puig Adam, recomiendan el uso del material en la enseñanza del número.

La vinculación de María Montessori con el aritmetismo es que en sus propuestas intenta en primera instancia conseguir en el niño la idea de **aumento y disminución** de **unidades** con la originalidad de diferenciar las unidades sensorialmente, utilizando unos bastones para que el niño percibiera más claramente el esquema de sucesión uniforme de uno en uno (diez bastones correspondientes a los diez primeros números naturales; cada bastón dividido en unidades pintadas de azul y rosa alternativamente). En principio el niño debe trabajar con bastones del mismo color para percibir el aumento uniforme de las longitudes de unidad en unidad. Una vez que el escolar supera esta etapa debe trabajar la **acción de contar** en el sentido de recuento acumulativo:

> "En cada bastón se puede contar la suma de las unidades que van sucediéndose una a otra hasta el extremo del bastón. La última palabra a la que se llega, se refiere a la suma de las unidades contenidas en el bastón, e indica el total. Esta palabra puede convertirse en un nombre que indica el bastón. Los bastones representan cantidades que se llaman" (Pág. 12)

Estas observaciones también son aplicables, en parte, a las regletas de Cusenaire ya que las regletas están enfocadas para que a través de los colores el escolar llegue a una estructura isomorfa a la de los números naturales con sus operaciones: Ahora el recuento es memorizar los colores de una serie de regletas colocadas en posición vertical formando una escalera para que quede claro el sentido de aumento y disminución. Se puede conseguir que el niño opere memorísticamente con los colores, juntando regletas longitudinalmente y localizando el color correspondiente a la longitud obtenida. De este modo el niño memoriza la adición de los diferentes colores, es entonces cuando se consideran las unidades comparando cada regleta con la longitud unidad que es la regleta blanca, asignando de este modo los diferentes numerales a las distintas regletas y reconvirtiendo las operaciones realizadas con colores al nuevo sistema de representación numérico. Vemos como hay cierta inquietud en busca de la estructura, previamente al recuento acumulativo. Sigue predominando el aspecto ordinal en los colores a partir del aumento y disminución.

En las propuestas didácticas secuenciadas de Monchamp (Referenciado en Hamaide (1931)[4], el autor distingue las siguientes etapas por las que pasa el niño antes de adquirir las nociones de los números:

1.º Noción de la presencia y ausencia
2.º Facultad de diferenciar y de identificar
3.º Etapa de repetición
4.º Noción de la unidad y de la pluralidad; noción de 2
5.º Noción del 3
6.º Facultad de la cantidad o tamaño continuo. Etapa de la síntesis
7.º Noción del 4 (etapa de análisis y síntesis)
8.º Noción del 5 (primera idea de la fracción)

En ellas podemos observar aspectos inductivistas como el de unidad, la definiciones de los diferentes números a partir unidad y pluralidad así como la repetición, que podemos interpretar como la adquisición de un hábito, lo que está más en relación con un convencionalismo en el sentido de llegar a la adquisición de una creencia.

Centrándonos en España destacamos por su amplitud e influencias la obra de Junquera Muné (1960). Para dejar constancia de los aspectos aritmetistas de su obra y por tanto de las influencias inductivistas sobre el origen del número natural, consideramos que las citas siguientes:

> "Se llega a la idea de número a través de la generación ordenada de las cantidades a que se refiere. Es antes la idea de 4 que la de 5, y no es posible ésta sin aquélla" (Pág.42).
>
> "Para idear el número, es superior el proceso del contar sucesivo, seguido del inverso de descontar" (Pág.42).
>
> "La observación del crecimiento y decrecimiento regulares delimitan la idea de cantidad y la correlativa numérica" (Pág.42).

Se manifiesta el origen inductivista del número a partir de la cantidad así como que la numeración es una organización de las cantidades y que no

[4]"Iniciación de la idea del número en los niños". Primer congreso internacional de Paidología. Volumen I, pág. 260. "El método Decroly" Librería Beltran. Madrid. Pág. 87.

puede existir la idea de un número sin la idea de los que le son inferiores. La observación del crecimiento y decrecimiento la podemos relacionar con los principios inductivistas de aumento y disminución.

En la introducción de las primeras cifras se busca explícitamente la distinción entre cantidad, número y cifra, mediante la utilización de círculos o cuadrados que representan unidades y, a veces, se confunde el número con el numeral (ver Junquera Muné, pág. 69 y siguientes o referencia a este autor incluida en el Anexo 4.4).

En el periodo aritmetista y desde el punto de vista didáctico se refuerza el aprendizaje mediante exposiciones netamente inductivas, basadas en un proceso paso a paso que comienza por las cantidades más pequeñas y se repite escrupulosamente para el resto de las cantidades. En el proceso siempre hay una serie ascendente y otra descendente de cantidades, las series ascendente y descendente de las cifras correspondientes y la serie de los numerales. Este proceso y las exposiciones inductivas a que nos referimos se pueden apreciar claramente en el texto de Junquera Muné (op. citada), del que citamos a continuación, a modo de ejemplo, un pequeño detalle. Para una comprobación más amplia de las afirmaciones anteriores nos remitimos nuevamente al Anexo 4.2, en el que se expone una transcripción de los aspectos más importantes del texto mencionado.

o .... uno 1	o o o o o o......... seis 6
o o......................... dos 2	o o o o o............ cinco 5
o o o..................... tres 3	o o o o...............cuatro 4
o o o o................. cuatro 4	o o o.................. tres 3
o o o o o............. cinco 5	o o..................... dos 2
o o o o o o......... seis 6	o......................... uno 1

Serie natural: 1, 2, 3, 4, 5, 6

Serie descendente: 6, 5, 4, 3, 2, 1

```
            6
         5     5
       4         4
     3             3
   2                 2
 1                     1
0                        0
```

Ademas de la serie por agregados de una unidad, la serie de las cantidades puede

> considerarse creciendo por conjuntos de dos o más elementos. (Procesos mediatos de contar. Junquera (Pág. 117)).

En las propuestas didácticas del periodo aritmetista son importantes las distribuciones regulares de cantidades según ciertos patrones de aumento y disminución.

Para Mialaret (1960) siguen siendo importantes tanto la acción de contar de 2 en 2, de 3 en 3, etc., para aprender la numeración (pág. 25), como el lenguaje relacional (doble- mitad, triple- tercio, etc.) que nos aproxima a las clases y relaciones conjuntistas (pág. 24). Vemos en este autor un inductivismo complementado al incidir en la necesidad de desarrollar en los escolares un lenguaje relacional.

A finales de este periodo hay un gran movimiento renovador en la enseñanza de las matemáticas. La teoría de conjuntos se introduce en el bachillerato y se plantea su institucionalización en la escuela elemental. Las propuestas didácticas ya no son de cálculo abstracto, es decir, se tratan de construir las nociones numéricas a partir de situaciones relacionadas con el entorno. Todo ello fortalece la implementación de la teoría de conjuntos en su faceta intuitiva (contacto con los objetos reales) y con miras hacia la construcción lógica de la aritmética.

Por la relevancia e influencia de los autores citados, consideramos que en España durante el periodo aritmetista ha habido un predominio del inductivismo aritmético. Por otra parte, las propuestas didácticas se basan en la repetición y no en favorecer un desarrollo inductivo de la aritmética, prevaleciendo la acción de contar como una repetición continuada en el aprendizaje de los diferentes números lo que en definitiva supone situar al alumno en una espectativa convencionalista.

4.7.1.2.- Análisis descriptivo de textos escolares

El análisis en cuestión, en cuya exposición consideramos que se debe hacer explicita una selección de las actividades propuestas para poner en evidencia la situación inductivista de la enseñanza del número, se ha orientado hacia las siguientes tareas:

1) Analizar las definiciones de número y de las operaciones aritméticas elementales implícitas en las actividades;

2) Indagar sobre actividades relacionadas con la construcción de series numéricas.

Los textos utilizados para este estudio se presentan en la tabla 4.2. Para su búsqueda y selección hemos utilizado los fondos bibliográficos de los departamentos de Didáctica de la Matemática de las universidades de Granada y Málaga, fondo bibliográfico Giner de los Rios depositado en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga y préstamos particulares. Por el número de ediciones y la influencia que tuvo en su época destacamos la obra "Lecciones de aritmética" de Dalmau: De texto, por R.O. de 12 de abril de 1894. Adoptado para la instrucción de S.M. el Rey D. Alfonso XIII, medalla de oro en la Exposición Científica del Palais du travail de Paris. También hemos de destacar las enciclopedias escolares por su influencia en España.

AUTOR Denominación	TITULO	NIVEL	LUGAR	AÑO
Alcala Floran, J.	Curso elemental de aritmética		Madrid	1877
Cirodde, P.L.	Lecciones de aritmética		Madrid	1898
Dalmau Carles, J.	Lecciones de aritmética		Gerona	1926
Edelvives. F.T.D.	Aritmética	2º Grado	Barcelona	1931
Edelvives	Aritmética	1º Grado	Zaragoza	1951
Edelvives	Aritmética	2º Grado	Zaragoza	1951
Estudio	Enciclopedia	Perfecciona-miento	Gerona	1958
Alvarez	Enciclopedia	3º Grado	Valladolid	1960
Hernando	Enciclopedia	Parvulario	Barcelona	1962
Marcos, C.	Matemáticas	Curso 1º Bachillerato	Madrid	1962

Tabla 4.2.- Libros considerados para el análisis de textos escolares del periodo aritmetista.

Además de la revisión de textos escolares hemos realizado una revisión de manuales teóricos de aritmética a niveles superiores que nos han permitido comprobar que en ellos se mantienen los aspectos aritmetistas de épocas anteriores y que, por tanto, las aritméticas escolares siguen influen-ciadas por esta corriente. Para este estudio hemos utilizado los manuales que exponemos en la tabla 4.3.

AUTOR	TITULO	LUGAR	AÑO	EDICION
Llardent Esmet, A.	Aritmética y Geometría	Madrid	1925	Cuarta
Sanchez Vidal, B.	Lecciones de Aritmética	Madrid	1928	Decimo-tercera
Salinas y Angulo, I Benitez y Parodi, M.	Aritmética	Madrid	1943	Decimo-séptima
Gui Casanova, M	Aritmética y Algebra	Barcelona	1948	octava

Tabla 4.3.- Manuales de aritmética del periodo aritmetista

Desde un punto de vista general, la mayor parte de los autores coinciden en definir la cantidad como aquello que puede aumentar o disminuir, la unidad como aquélla cantidad con la que comparamos otra cantidad, el número como el resultado de la comparación de una cantidad con su unidad y la aritmética como la ciencia que tiene por objeto el estudio de los números. Así, José Dalmau Carles en su manual "Lecciones de aritmética" define la cantidad a partir del número y, posteriormente, el número a partir de la cantidad:

> "Cantidad es todo lo que se puede representar por números, exacta o aproximadamente, como la distancia, el dinero, el tiempo, etc."(Pág. 28).
>
> "Unidad es el uno de todas las cosas, como un libro, una mesa, un niño (*Aclaración del autor: Consideramos que esta definición de la unidad es rigurosamente científica y la que ofrece menos duda a la débil inteligencia del niño);
>
> "número es el resultado de comparar la unidad con la cantidad" (Pág.28).

Con el análisis de los textos escolares hemos comprobado las influencias inductivistas en la transmisión escolar de la aritmética. Como evidencia exponemos a continuación algunas referencias con definiciones y actividades encontradas en los libros de texto sobre los siguientes puntos:

-naturaleza de los números naturales;
-la acción de contar;
-definiciones de las operaciones aritméticas;
-secuencia numérica
-seriaciones

Una presentación texto por texto la realizamos en el anexo 4.3. Las referencias que exponemos a continuación las hemos extraido de dicho anexo, en el que se pueden comprobar el origen de las mismas.

- Naturaleza de los números naturales

En la Enciclopedia Estudio (1958, pág. 289), encontramos el cuadro de la figura 4.4, en el que podemos ver los aspectos del número que se transmitían en el periodo aritmetista, muy en relación con el aritmetismo matemático y con el inductivismo.

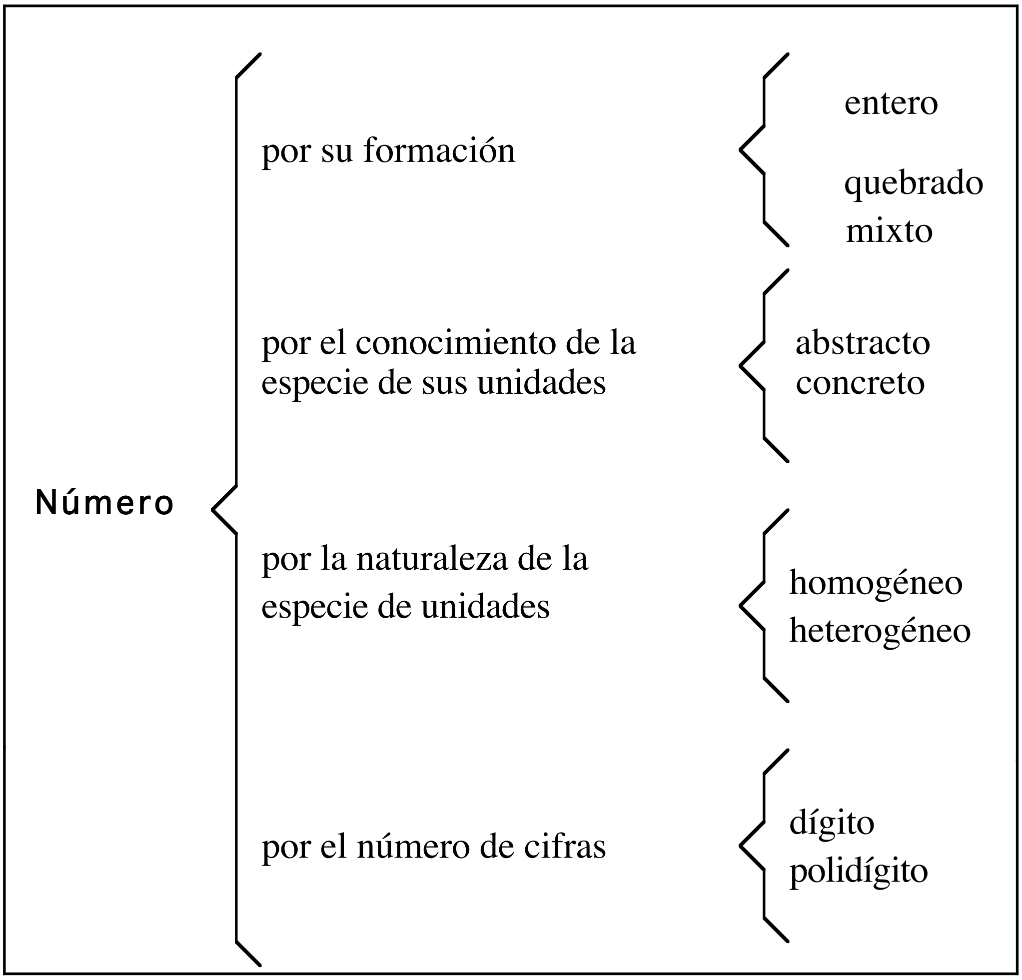

Figura 4.4. Interpretación del número en el periodo aritmetista.

En fechas cercanas podemos encontrar planteamientos inductivistas en la presentación y tratamiento del número natural en los manuales escolares, como es el caso de Marcos y Martinez (1962):

> "La idea de número natural proviene de la consideración de un conjunto o colección de objetos distintos. Se llama unidad cada uno de los objetos de una colección. El número natural expresa cuántas unidades contiene una colección de objetos distintos. Al número natural también se le llama entero positivo" (Pág. 11)

"Cantidad es un estado particular de una magnitud matemática" (Pág. 12).

"La idea de número que hemos obtenido por la operación de contar, también puede conseguirse por la operación de medir. Medir una cantidad es hallar cuántas veces contiene a otra de su misma especie, llamada unidad". (Pág. 13).

-Actividades relacionadas con la acción de contar

La acción de contar, además de ser utilizada para presentar la idea de número, se utiliza para reforzar a su vez la serie numérica básica e incluso, se dan técnicas para contar de n en n:

Contar de 1 a 100 y de 100 a 1..
Contar de 100 a 200, de 200 a 300, de 500 a 600 .
Contar de 1000 a 1100, de 2500 a 2600, de 24 200 a 24 300.

"Para contar de 9 en 9, 8 en 8, ... a partir de un número, se le añade 10 (basta pensar en la decena siguiente) y se disminuye el resultado en 1, 2, ..."

"Para contar de 11 en 11, 12 en 12, ...a partir de un número, se le añade 10, (pensar en la decena siguiente) y se aumenta el resultado en 1, 2, ..."

En números de una y dos cifras. Contar:

1º de 1 a 99 por números impares; 1, 3, 5, ..
2º de 2 a 100 por números pares: 2, 4, 6, ...-
3º de 3 a 99, de 3 en 3
4º de 4 a 100 de 4 en 4, etc.

-Diferentes definiciones de las operaciones aritméticas

En este apartado exponemos las definiciones que hemos encontrado en los distintos textos consultados y que han sido las siguientes:

"Calcular es hallar un número por medio de otros números".

"Sumar es reunir varios números en uno solo"

"Resta es la operación que tiene por objeto hallar la diferencia entre otros dos números". (El número 12 tiene 3 unidades más que el 9. Luego la diferencia entre 9 y 12 es 3, o sea, de 3 a 12 van 9). "La resta tiene por objeto quitar un número de otro".

"Multiplicación es la operación que tiene por objeto repetir un número como sumando tantas veces como unidades tiene otro".

"División es la operación que tiene por objeto partir un número en porciones iguales".

"La división tiene por objeto también hallar las veces que un número contiene a otro".

-Uso de la secuencia numérica

Hemos encontrado ejercicios como el que se cita a continuación, donde se presentan números ordenadamente según la secuencia numérica básica y un operador constante para que el alumno descubra la regularidad y relacione los distintos resultados entre si:

9-2, 19-2, 29-2, ...99-2
9-9, 19-9, 29-9, ... 99-9
8-8, 18-8, 28-8, ... 98-8
18-9, 28-9, 38-9, ...108-9

11-2, 21-2, 31-2, ...101-2

- Seriaciones

En todos los textos consultados se refuerzan las series aditivas y sustractivas con actividades de contar o de sumar y restar como las siguientes:

Escribir los números de 0 a 100 a distancia de 2 unidades.

,,	,,	1 a 101	,,	2	,,
,,	,,	0 a 102	,,	3	,,
,,	,,	1 a 100	,,	3	,,
,,	,,	2 a 201	,,	3	,,
----------	----------	----------	----------	----------	----------
----------	----------	----------	----------	----------	----------
,,	,,	8 a 116	,,	9	,,
,,	,,	0 a 100	,,	10	,,

1. Añadir 2 a un número, añadirle de nuevo al número obtenido, y así sucesivamente, hasta llegar a un número mayor que 100. Así:

1 y 2 son 3, y 2 son 5, y 2 son 7, y 2 son 9...
2 y 2 son 4, y 2 son 6, y 2 son 8, y 2 son 10...

2. Los mismos ejercicios con el número 3. Así:

1 y 3 son 4, y 3 son 7, y 3 son 10, y 3 son 13...

2 y 3 son 5, y 3 son 8, y 3 son 11, y 3 son 14...
3 y 3 son 6, y 3 son 9, y 3 son 12, y 3 son 15...

3. Los mismos ejercicios con el número cuatro. Así

1 y 4 son 5, y 4 son 9, y 4 son 13, y 4 son 17...

----
4 y 4 son 8, y 4 son 12, y 4 son 16, y 4 son 20... "

Sigue proponiendo ejercicios hasta realizar las diez series correspondientes al número 10.

4.7.1.3.- La transición al periodo conjuntista

Antes de introducir oficialmente la teoría de conjuntos en la enseñanza elemental, proliferaron multitud de propuestas didácticas con respecto al número. Algunas hacen referencia a la importancia de la comprensión de la naturaleza del número natural:

> "Para saber contar hasta 100, hay que ir, pues, más allá de la enumeración y comprender la naturaleza de los números para persuadir al niño a operar directamente con ellos. Vale decir que no se debe olvidar jamás que el estudio de los números debe relacionarse con la noción de entero cardinal, cualidad de conjunto que posee una colección independiente de la naturaleza, situación o agrupación particular de sus unidades constitutivas, y de entero ordinal que expresa el lugar ocupado por cierta unidad en la enumeración que se haga" (Leif y Dézaly, 1958, Pág. 21)

Otras estuvieron más en consonancia con un cambio metodológico como es el caso de Mialaret, (1967):

> "El método pedagógico será intuitivo, inductivo y dará lugar a puestas a punto sucesivas que irán constituyendo etapas de una axiomatización progresiva" (Pág. 21).

Este autor plantea el uso del contexto escolar en el aprendizaje del número. Desde una posición aritmetista, considera fundamental la generalización por analogía de ciertos esquemas numéricos aditivos, de los que exponemos a continuación una muestra de lo incluido sobre este autor en el Anexo 4.5, al que nos remitimos.

> "El niño debe llegar a dominar de forma automática las siguientes tablas de resultados:
>
> 1 + 1 = 2

3 = 2 +1 = 3 + 0
4 = 4 + 0 = 3 + 1 = 2 + 2 etc.

Una vez bien conocidos estos resultados se pueden practicar, a medida de las adquisiciones, ejercicios de reagrupamiento:

1 + 2 2 + 2 3 + 2 4 + 2...
1 + 3 2 + 3 3 + 3 4 + 3... . . ." (pág. 43)

4.7.2. Periodo conjuntista

4.7.2.1.- Consideraciones generales

> "La introducción de las matemáticas modernas, ha provocado amplias discusiones entre los profesionales, tanto en su inicio como en su frustrante desarrollo" Informe Cockcroft. (1985) Prólogo a la edición española. (Pág.VIII)

Una contradicción de la enseñanza de la aritmética en este periodo es la que se plantea entre el esfuerzo por fundamentar el concepto de número con argumentaciones deductivas y la tradición docente de orientación inductiva. Partir de nociones generales e intuitivas, como la noción de conjunto, para definir conceptos particulares como los de número cardinal u ordinal, supone ir de conceptos generales a conceptos particulares, por lo que cabe hablar de un proceso deductivo. Sin embargo, el desarrollo didáctico pretende hacer lo contrario, es decir, llegar a los conceptos generales a partir de situaciones particulares, lo que supone partir de lo concreto con una visión inductivista. Para Godement, R. (1948):

> "las matemáticas se pueden clasificar de dos maneras: la primera distingue las teorías abstracta de las concretas; la segunda, las teorías modernas de las teorías clásicas. Una teoría abstracta deja de lado la naturaleza de sus objetos para ocuparse solamente de las relaciones lógicas que presentan entre ellos; una teoría concreta, por el contrario, se aplica a entes de naturaleza perfectamente determinada. Por ejemplo, la aritmética tal como se la enseña en las clases secundarias es una teoría concreta."(Pág. 344 de "Las grandes corrientes del pensamiento matemático").

Con la matemática moderna se evitan las disquisiciones empíricas sobre el número natural. Con ella desaparecen de los textos las nociones de cantidad, numero concreto y abstracto, cantidades homogéneas y heterogéneas, el concepto de unidad integradora, etc., tan importantes en el periodo aritmetista. Ahora no se parte de unos postulados o creencias compartidas sobre la cantidad, sino de nociones generales que pretenden alcanzar conclusiones particulares a través de un recorrido didáctico. Pero, este recorrido debe alcanzar un nivel de aprendizaje del número natural y las operaciones, lo que resulta complicado mediante un proceso que debe compatibilizar una construcción del número, anterior a la escritura numérica y al margen de la numeración, basada en las nociones de cardinal y ordinal, y unas adquisiciones propiamente numéricas y aritméticas que presentan disfunciones en el seno de la teoría de conjuntos.

El que la lógica pusiera de manifiesto algunas contradicciones de la aritmética no significa que debamos llevar a la escuela una construcción lógico-conjuntista de la misma. En parte, el error de llevar a la escuela la teoría de conjuntos se debió a una interpretación inadecuada de la teoría de Piaget:

> "El error que se ha cometido al introducir la teoría de conjuntos en la enseñanza básica se debe en gran parte a una interpretación errónea de la teoría de Piaget acerca del desarrollo intelectual" (Delval, J. 1984. pág. 338)

El gran propulsor de la matemática moderna en la escuela fue Dienes, cuyas propuestas didácticas se condensan en los siguientes principios para el aprendizaje de las estructuras numéricas:

> Principio de constructividad:
> "La construcción precederá siempre al análisis" (pág. 31)
>
> Principio de variabilidad perceptiva:
> “La misma estructura conceptual deberá ser presentada en tantas formas perceptivas equivalentes como podamos" (Dienes, 1964. Pág. 32).

Principio, éste último, que está en íntima relación con la tercera etapa de sus "seis etapas en el aprendizaje de la matemática". Según el autor, en dicha etapa:

> "el niño llega a descubrir las conexiones de naturaleza abstracta que existen entre los elementos de un juego y los elementos de otro, de estructuras idénticas. Así, el niño obtiene la estructura común de los juegos y se deshace de los aspectos carentes de interés" (Dienes, 1970, Pág. 10).

Por otra parte, para trabajar el concepto de sucesión, Dienes considera la conservación del número como aspecto fundamental, que en el caso de cantidades discontinuas se consigue a través de las correspondencias uno a uno.

> "Estos ejercicios proporcionarán un criterio no de percepción, sino de la correspondencia uno a uno, para decidir si los conjuntos contienen o no el mismo número de elementos" (Dienes, 1970, pág. 37).

> "Se puede establecer un orden entre los números, introducidos como propiedades de ciertas clases de conjuntos, tomando como criterio que es imposible establecer una correspondencia elemento a elemento entre conjuntos pertenecientes a clases diferentes" (Pág. 38)

> "La idea de orden no nos da todavía la idea de sucesión o de secuencia. Para introducir la idea de sucesión es necesario introducir la de <<uno más>>. Los niños pueden aprender a <<contar>> repitiendo la serie convencional de los adjetivos numerales, de los números cardinales. Pero esta manera de proceder deja completamente separadas la idea de siguiente y uno más" (Pág. 39)

Tal proceder desliga los aspectos ordinal y cardinal del número, ya que la idea de siguiente es solo ordinal y la de uno más es cardinal en el sentido de acumulatividad y por tanto el contar convencional es puramente ordinal olvidando el aspecto cardinal, lo que conduce a que la sucesión de los números naturales sea un caso particular de la noción de sucesión en matemáticas. Por otra parte, la regularidad <<uno más>> es igualmente particular, puesto que, de acuerdo con Piaget, el número es una síntesis de dos estructuras operatorias (intelectuales) como son la clasificación y la seriación, siendo esta última la que regula, en el sentido de <<autorregulación>>, el aspecto ordinal de la estructura numérica (Ver la obra de Piaget: "El estructuralismo").

> "Si se aprenden bien las palabras-números en el orden correcto, la última palabra número determina el <<número cardinal>> del conjunto de objetos. Es esto lo que queremos decir cuando hablamos de <<contar los elementos de un conjunto>>". (Dienes Pág. 141)

Así es como Dienes presenta la integración de los aspectos ordinales y cardinales en la acción de contar. Además de esta última interpretación del término contar, existe otra que es secuencial y está basada en el aspecto ordinal y en el dominio de la verbalización de la serie numérica (contar en sentido ascendente y descendente, de uno en uno, de dos en dos, etc.; contar n a partir de un número dado, etc.). Castro, E. (1987), además de observar que en este aspecto Dienes (op. citada) se centra en el quinto principio de la acción de contar, es decir, en el principio de cardinalidad, y en el tercer principio de biunivocidad, refleja la importancia de contar en la siguiente frase:

> "Se trata de una técnica que reviste importancia por la utilidad que va a prestar a otras acciones posteriores más complejas con números" (Pág. 98).

La influencia de la matemática moderna en la didáctica de la numeración se aprecia en el descenso de las actividades aritmetistas de la época anterior, tales como, numerar, escritura numérica, memorización de propiedades, etc., así como en la mayor presencia del orden como relación binaria. La teoría de conjuntos utiliza las clases lógicas y, por tanto, un lenguaje relacional que hace que se llegue a considerar la matemática como un lenguaje que en aritmética adquiere un carácter específico para las relaciones de orden y de equivalencia. Todo ello conduce a poner especial énfasis en las nociones de mayor que, menor que, posterior, anterior, doble-mitad, triple-tercio etc., mediante unidades didácticas concretas.

En los libros de texto no se contempla de forma adecuada el trabajo sobre el aspecto ordinal del número, proponiéndose algunas actividades de seriación en las primeras unidades didácticas de los cursos inferiores (series de figuras, por colores, tamaños, etc.) para olvidar totalmente este aspecto en el resto unidades. Tampoco se presta atención suficiente a las series numéricas, que únicamente se utilizan para consolidar la secuencia numérica natural o para evaluar las habilidades correspondientes al igual que en el periodo aritmetista y por tanto se cae, en este aspecto, en un inductivismo

4.7.2.2.- Análisis descriptivo de textos escolares del periodo conjuntista

Hemos analizado 39 textos escolares de Ciclo Inicial y Medio de la Educación General Básica (anexo 4.6). En los fondos bibliográficos del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga se dispone de gran parte de los textos escolares publicado en España durante este periodo y por tanto hemos podido seleccionar algunos de los que más se divulgaron. En la tabla 4.4. presentamos los textos analizados. Las referencias las hemos establecido por editoriales y no por autores, indicando en cada caso los cursos correspondientes a los textos consultados.

EDITORIAL	TITULO	CURSOS	LUGAR	AÑO
Santillana	Orbita. Libro activo de matemática moderna	1º, 2º, 4º	Madrid	1969
Interduc	La nueva matemática	1º,2º,3º,4º,5º,6º	Madrid	1975
Interduc	El mundo del número	1º,2º,4º	Madrid	1975
Santillana	Matemática E.G.B	3º,4º,5º	Madrid	1976
Anaya	Proyecto Granada Mats	1º,2º,3º,4º,5º,6º	Madrid	1978
Miñon	Números	1º,2º,4º,5º	Valladolid	1981
Santillana	Matemáticas E.G.B.	1º,2º,3º,4º,5º,6º	Madrid	1982
Ediciones S.M.	Alero	1º,2º	Madrid	1985
Santillana	Matemáticas	2º	Madrid	1986
Edebé	Matemáticas	3º,4º	Barcelona	1986
Ediciones S.M.	Alerce	3º,5º	Madrid	1990

Tabla 4.4.- Libros considerados para el análisis de textos escolares del periodo conjuntista

Una de las características importantes de los textos de este periodo reside en la amplia utilización de gráficos, que se emplean para representar los conjuntos (diagramas de Venn), los números (recta numérica), las operaciones (flechas que indican saltos en la recta) o las correspondencias entre conjuntos (diagramas sagitales). Algunas actividades consisten en completar estos tipos de diagramas, presentando una falsa apariencia de tareas inductivas. Hemos podido comprobar en **todos los casos observados**, que estas actividades no están pensadas, ni son adecuadas, para que sea el sujeto el que descubra las regularidades o "leyes", sino que es el propio texto el que las anticipa, hurtando la posibilidad de cualquier tipo de razonamiento inductivo. En otros casos, como por ejemplo en las tablas de sumar y de multiplicar, el texto inicia unos cálculos en los que se aprecia claramente la regularidad, o se indica ésta expresamente, y se pide su continuación.

Las definiciones de las operaciones aritméticas son uniformes y se obtienen a partir de las operaciones conjuntistas, desaparecen, entre otros aspectos, el sentido aritmetista del concepto de unidad como generador de los números y la utilización de los axiomas de cantidad en la construcción del número; los aspectos gráficos que indicaban aumento y disminución de unidades son sustituidos por los diagramas conjuntistas de clases, la inclusión de clases y las correspondencias, entre otros.

Dos son los aspectos notorios que queremos destacar una vez realizada la revisión:

a) La acción de contar no pierde su protagonismo;

b) Proliferan las aplicaciones de la inducción en el desarrollo de las actividades. Aunque resulte paradójico, en el periodo aritmetista las definiciones preceden a los ejemplos y por tanto se pretende una presentación deductiva de la matemática con un rigor fuerte en las definiciones y ejercicios; y por el contrario, en el periodo conjuntista las actividades concretas preceden a las definiciones, lo que provoca el que se desarrollen más situaciones que posibilitan el descubrimiento por parte del alumno y por tanto la aplicación de inferencias inductivas.

4.7.2.3.- Papel de la inducción en la enseñanza conjuntista de la aritmética

La revisión realizada, de acuerdo con los aspectos indicados anteriormente, se expone con detalle según los distintos textos consultados en el anexo 4.6. Por su interés desde nuestra perspectiva, en lo que sigue presentamos, a modo de resumen una muestra de las actividades organizadas desde un punto de vista del uso de la inducción y de las inferencias sintéticas. En tal sentido hemos organizado las actividades de acuerdo con los siguientes puntos:

-Vocabulario relacional de interés para determinar y expresar la regla de una regularidad numérica;
-uso de las regularidades numéricas en el aprendizaje de diferentes nociones aritméticas;
-generalizaciones de propiedades numéricas;
-descubrir propiedades
-aplicación de la analogía
-interpretaciones gráficas de la serie numérica básica

Vocabulario

Hacia abajo: Escribe de 3 en 3 y hacia abajo desde el 820 hasta el 790
Hacia atrás: Escribe de 2 en 2 y hacia atrás desde el 720 hasta el 680
Hacia adelante
Par-impar.
Dos veces, tres veces, etc. Para multiplicar por 2, 3, etc.
Entre: Escribe el número que esta entre 99 y 101
Vecinos
Después, antes:

Después del 0 está el... Antes del 9 está el...
Después del 1 está el... Antes del 8 está el...
Después del 2 está el... Antes del 7 está el...
Anterior, posterior: Dado un número escribir el anterior y el posterior. Dada una decena escribir las decenas anterior y posterior.
De 2 en 2, de 3 en 3, etc., tanto en aumento como en disminución: Escribe de 2 en 2 desde 0 a 100. Escribe de 3 en 3 desde 0 a 100, etc. Escribe de 5 en 5 desde 570 a 615.
Dos veces, tres veces, etc. Para introducir el producto.
Ordinales. primero-último: Ordenados de menor a mayor seis cuadrados. Copia: Ordenamos de mayor a menor tamaño: el más grande, primero; el más pequeño, el último.Ordenamos de menor a mayor el más pequeño, primero; el más grande, el último.
Sube y baja: sube y baja de 1 en 1, de 2 en 2, etc.
Suma 1 a cada número, suma 2 a cada número, etc.(1+1=2, 2+1=3,..)
Escribe los números que faltan (huecos entre 20 y 30).
Sigue restando 1, 2, etc.
El doble, el triple. En las tablas de multiplicar por 2 y 3. El doble a partir de las fichas de dominó.
Sumar dos veces: Si sumamos un número dos veces, sale el doble.
Mitad: La mitad es el resultado de dividir una cosa en dos partes iguales; 1 es la mitad de 2 porque 2 : 2 = 1; 3 es la mitad de__ porque 6 : 2 = 3.
Uno más, dos más, etc.
Progresiva y regresivamente
Familia: En la multiplicación, familia del 4, del 5 etc. (Múltiplos).

Uso de regularidades numéricas.

Se emplean para hacer notar al alumno el funcionamiento de una regla, la representación de un concepto o para determinar ordenadamente todos los casos posibles de la descomposición de un número. Entre las regularidades numéricas aplicadas, están la secuencia numérica o serie natural y las correspondencias seriales. Por ejemplo:

- Introducción de las fracciones: Si divido en dos partes1/2, si en tres 1/3, ... si divido en cuatro?

Números decimales: Una décima se escribe 0,1; una centésima 0,01;...etc.. Una decima se escribe 0,1; dos décimas 0,2, tres décimas 0,3;...; 8 decimas 0,8.

- Observa que cuando se multiplica un número natural por 10, la cifra de las unidades pasa a ocupar el lugar de las decenas. ¿Qué lugar pasa a ocupar la cifra de las unidades cuando un número natural se multiplica por 100?.

- Formas diferentes de descomponer una regleta.

- Dividir por la unidad seguida de ceros

- Descomponer en suma de dos sumandos los números del 20 al 29, 30 al 39, etc.

Regularidades aprendidas memorísticamente. Procesos iterativos

- Sumas equivalentes a una dada: 5 + 7. Se disminuye en un término lo que aumentamos en el otro. Para llegar a todos los casos debemos seguir la serie numérica o contar.

- Sistema métrico decimal.

- Reglas de la numeración romana.

- Reglas para sumar y restar fracciones.

- Descomponer un número en las unidades de distintos órdenes:
5.626.348 = 5.000.000 + 600.000 + 20.000 + 6.000 + 300 + 40 + 8

La regularidad como obstáculo

Hay ciertas actividades en las que se resalta el proceso inductivo para establecer una regularidad en lugar de atender al concepto que se debe aplicar. De esta manera el alumno responde inductivamente a una tarea que es conceptual. Lo curioso de este tipo de actividades es que la regularidad numérica se considera como un refuerzo. Por ejemplo:

- Completa: 1 cm = 10 mm
2 cm = 20 mm
3 cm = 30 mm
4 cm =
5 cm =

(El alumno puede actuar inductivamente y no aplicar ni aprender la relación entre centímetro y milímetro).

- Completa estas actividades en tu cuaderno

35 : 7 = 5	64 : 16 = 4	48 : 6 =
35 : 5 = 7	64 : 4 =	48 : 8 =
---x---= 35	---x--- = ---	---x---=

- Fijate en el ejemplo y completa en tu cuaderno las siguientes igualdades:
(35x3)/7 = (35/7)x3 42x5/6 =___ x5 (48x7)/8 =__x__

- Para calcular 1/2 divido por 2; para calcular 1/3 divido por 3; para calcular 1/134 divido por 134; etc.

Aplicación de regularidades en las reglas de cálculo mental

- Todas estas sumas acaban en 8:
  5+3, 15+3, 25+3, 35+3, . .
  2+6, 12+6, 22+6, 32+6, . .
  4+4, 14+4, 24+4, 34+4, . .

- Todas estas restas acaban en 3:
  9-6, 19-6, 29-6, . .
  7-4, 17-4, 27-4, . .

- Para multiplicar un número por nueve se le agrega un cero y se resta dicho número: 14x9 = 14x(10-1) = 140-14.

- Para la multiplicación de números que acaban en cero se propone un ejercicio, como ejemplo, y sobre él se establece la regla explícitamente.

- Observa:
  3x11 = 3x10+3 = 33
  8x11 = 8x10+8 = 88
  12x11 = 12x10+12 = 132

Ahora calcula mentalmente, escribiendo el resultado en tu cuaderno: 6x11; 9x11; 13x11; etc.

Generalización de propiedades numéricas

Para Winter y Ziegler (1975) ("La nueva matemática". Madrid. Interduc), uno de los objetivos de la matemática elemental es completar y generalizar, lo que para los autores:

> "Consiste en reconocer, en ejemplos concretos, la existencia de una regularidad. Esta regularidad aplicada a otros casos puede dar varias posibilidades de continuación: Así: 2, 3, 5, ... puede continuarse como serie de números primos: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ... o, añadiendo la diferencia más uno de dos números seguidos: 2, 3, 5, 8, 12, 17, 23, ..; o, sumando a cada número el doble de su diferencia con el anterior: 2, 3, 5, 9, 17, 33, ... Los alumnos deberán aprender que cierta solución es engañosa y que hay que comprobar la conjetura. Completar y generalizar consiste en reconocer una estructura común en situaciones de diversos contenidos, es decir, en descubrir las analogías que existen y rigen en cada caso" (Pág. 3, "La nueva matemática". E.G.B. 1).

La búsqueda de regularidades es algo patente en la metodología de los libros de texto. Parece como si la matemática tuviese como fin los patrones, las reglas, etc.. Además, hay regularidades en los modos de introducir los temas o los conceptos, de manera que se produce una reproductibilidad del modelo didáctico siguiendo la idea de que el método es independiente de la naturaleza de los conocimientos a enseñar.

En los libros revisados el alumno comprueba la propiedad (conmutativa, asociativa, etc) en unos casos particulares y debe generalizarla a todos los números naturales. Por ejemplo:

- Resuelve estas sumas: 8 + 0, 7 + 0, 6 + 0, 4 + 0. Completa: Cualquier número sumado con cero da _ _ _ _, por eso el cero es el _ _ _ __ _ _ _ _ , de la adición. Lo mismo con la unidad para el producto.

- A partir de unos ejemplos sencillos de disyunciones llegar a propiedades como V o F = V.

- Equivalencias fundamentales de la sustracción:
  3+2=5, 5-3=2, 5-2=3

- Criterios de divisibilidad numérica:
12; 1+2=3, 15; 1+5=6, 18; 1+8=9, etc. Si sumas las cifras de un múltiplo de 3, te debe dar 3 o un múltiplo de 3, y recíprocamente.

- Generalización temporal ("siempre"): Si se suman dos números pares o impares, el resultado es siempre un número par.

Descubrir

Descubrir el significado de lo que se pide. Nos referimos con ello a los tipos de actividades ya iniciadas en el texto y que el alumno debe continuar. Por ejemplo: en una página del libro se expone una actividad para el significado de la pertenencia y su signo; en la página siguiente figura una ficha en la que se presentan diagramas de Venn a los que se antepone un elemento. En la primera página el autor coloca los signos de pertenencia y no pertenencia para que el alumno continúe haciendo lo mismo en la página siguiente.

Descubrir la propiedad característica de un conjunto para definirlo por comprensión.

Descubrimiento de un proceso. Se expone un proceso para que el alumno determine los pasos a seguir y lo aplique en otro caso. Por ejemplo:

Fijate en el producto 2x4x8. Mira cómo lo escribimos en forma de potencias
2 x 4 x 8
2 x (2x2) x (2x4)

2 x (2X2) x (2x2x2) = 2"

Escribe en forma de potencias los siguientes productos: 2x8, 3x9x27.

Descubrir la relación oculta. Se presenta un diagrama de flechas entre dos conjuntos y hay que establecer el criterio (Ley de formación de un producto cartesiano). Ejemplo:

Unir mediante una flecha cada aro con su bastón. (En la ficha hay 4 aros con cuatro colores diferentes y cuatro bastones con los correspondientes colores).

Descubrir el criterio clasificador. Se presentan al alumno diagramas conjuntista de Venn, que representan conjuntos y subconjuntos. El alumno debe averiguar los criterios que se han utilizado.

Series de colores. Los niños deben descubrir las "leyes" que rigen cada una de las series y colorear.

Descubrir el agente extraño. En una serie de números hay uno que no debería estar en ella. Señala cual es este número.

Aplicación de la analogía

- Fijate en el ejemplo y completa:

$2 < 7$ y $7 < 14 \Rightarrow 2 < 14$ 7 <___ y 9 <___ => 7 >___

- ¿Qué número resulta si se le suma 1 al número mayor de cuatro cifras?. Idem de cinco cifras. Idem de seis cifras.

Interpretaciones gráficas de la serie numérica natural

- Escalera ascendente y descendente con 10 escalones. En lo alto el 9 y en el escalón más bajo el 0. En la escalera ascendente se sitúa el 6 y en la descendente el 4. el alumno debe colocar los signos numéricos que faltan.

- Se distribuye algunos términos de una serie finita en un diagrama de sectores, indicando un sentido de giro mediante una flecha. El alumno debe completar los términos que faltan.

4.7.2.4.-Las series numéricas en el periodo conjuntista

En el proyecto "Granada Mats" de Luis Rico (Director) (Edit. Anaya (1978-1982)), se hace referencia en la página 5, en relación con los principios didácticos del Area de Matemáticas y los objetivos generales de la matemática en la E.G.B, al doble canal inductivo y deductivo de las matemáticas, empleando el término "serie" para referirse a una cantidad finita de números (3, 4, 7, 9).

Por lo demás, el uso de las series numéricas para potenciar los procesos inductivos y, por tanto, la conceptualización del número natural, es escaso, limitándose a la representación y verbalización de los números. En ciertos textos no se utilizan en absoluto, como es el caso de la Colección Orbita de Editorial Santillana (Aprobado por el M.E.C. en 1969). Sin embargo, esta misma Editorial presenta algunas actividades con series numéricas en los textos de los años 1981, 1982 y 1986. Hemos de aclarar que las actividades que se van a exponer proceden en su mayor parte de los libros de la editorial Interduc. En los demás textos consultados no aparecen actividades concretas con series numéricas.

En el anexo 4.7 tenemos organizadas todas las actividades relacionadas con las series numéricas que hemos encontrado de acuerdo con los siguientes puntos:

-Series finitas. Nos referimos a series en las que se fija el número de términos, por ejemplo**:**

> - Completar series progresivas y regresivas de números del 0 al 5. Completar series progresivas y regresivas de uno en uno de números del 0 al 19. Idem de dos en dos.

-Números vecinos

> - Escribir el número que va antes y después de los datos:
> ___, 24, ___: etc.
> - Escribe el número que está entre 99 y 101; entre 299 y 301; entre 699 y 701.

-Ordenar números de mayor a menor o de menor a mayor

-Continuar series. En la mayoría de los casos se antepone la regla para que el alumno continúe y por tanto no son tareas para descubrir la regla. Ejemplo:

> - Continua las series:
> 70------>75------>___------>___------>___
> +5
> 95------>85------>___------>___------>___
> -10

-Interpolación en series numéricas. Nos referimos a tareas como las siguientes:

- Una tabla bidimensional simulando la numeración de los pupitres de una clase. Se le pide al niño que complete la numeración de las sillas:

1 2 __ __ 5 __ __ __ __
10 __ __ __ __ etc.

- En la siguiente serie falta uno. ¿Cual es?.

112000, 212000, 312000, 412000, 512000, 71200, 81200, 912000.

-Series de números proporcionales. Dos series de números son proporcionales si existe un operador de multiplicar o dividir que permite pasar de una serie a la otra (Tablas de proporcionalidad).

-Series conceptuales

El concepto que se trabaja es el de par e impar y todas las series se presentan en orden de menor a mayor. Ejemplo
:

- Números pares menores que 20, números pares entre 15 y 35,

-Series no Aritméticas. Nos referimos a series que no son progresiones aritméticas ni geométricas.

- Completa esta sucesión hasta su décimo término: 1, 1, 2, 3, 5, (Fijate que a partir del tercer término, cada uno es la suma de los dos anteriores).

-Series no numéricas

- Series cíclicas con figuras: Ciclos de colores rojo, amarillo y azul; tres rectángulos, tres triángulos, tres pentágonos, etc.
- Alternancias: Circulo, triangulo, ..; bastón, cuadrado, ...
- Orden por tamaños, tanto ascendente como descendente.

4.7.3. Situación actual

El periodo en el cual nos encontramos en la actualidad, ha sido precedido de un gran debate en la comunidad de educadores matemáticos, cuyas reflexiones, aún en curso, se han materializado en proyectos y trabajos curriculares de diversa índole. Entre los más difundidos en España, se encuentra la obra "Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática", N.C.T.M (1991), en cuya página 60 se puede leer:

> "En los niveles P-4, el currículo de matemáticas debe incluir el estudio de patrones y relaciones para que los estudiantes sean capaces de:
> - reconocer, descubrir y crear una amplia gama de patrones
> - representar y describir relaciones matemáticas;
> - explorar el uso de variables y expresiones indeterminadas para expresar relaciones".

Igualmente, en la página 80 de la misma obra, se llega a relacionar el descubrimiento de patrones con la resolución de problemas:

> "La identificación de patrones constituye una poderosa estrategia para la resolución de problemas. Supone asimismo la esencia del razonamiento inductivo".

Estas afirmaciones constituyen un breve testimonio de la valoración que merece el razonamiento inductivo en los nuevos planteamientos didácticos. Cuestión diferente es su concreción en propuestas prácticas para el aula y en libros de texto, en cuya valoración no vamos a entrar aquí por considerar que puede resultar prematuro emitir un juicio sobre una corriente de muy reciente implantación. Sólo hemos de decir, por último, que la mayoría de los nuevos textos, incluidos los que han utilizado los escolares de las muestras de los estudios empíricos de esta investigación, se pueden situar en un periodo de transición, caracterizado por una cierta continuidad de los planteamientos del periodo anterior en lo que al problema de investigación se refiere; dichos textos presentan todavía influencias que esperamos se modifiquen para bien en un futuro cercano.

4.8.- Consecuencias del análisis didáctico

Concluimos este capítulo con una exposición de los resultados, conclusiones y consecuencias que se deducen del estudio realizado. En los dos primeros apartados se relacionan los resultados y conclusiones de todo el estudio bajo dos enfoques diferentes: una reflexión general comentada y una síntesis global. En el tercer apartado se aborda uno de los objetivos fundamentales del análisis didáctico, como es la construcción de un modelo evolutivo del razonamiento inductivo numérico. Dicho modelo permitirá desarrollar los estudios empíricos posteriores dentro de un marco general fundamentado en los resultados y conclusiones que se exponen a continuación.

4.8.1.- Reflexión general

Recapacitando sobre la relación existente entre la interpretación y construcción del conocimiento en el sujeto individual, los modelos de razonamiento inductivo y los casos relevantes de inferencias sintéticas, se llega a la conclusión de que dichas inferencias no se aplican en el vacío, es decir, las premisas y conclusiones que constituyen el razonamiento inductivo en sí tienen un contenido concreto. Este contenido forma parte de un sistema conceptual complejo basado en unos conocimientos, unas creencias y un entramado de relaciones lógicas que hacen posible la inducción.

Tal y como se ha puesto de manifiesto en el análisis epistemológico de la inducción, todas las inferencias que allí se citan son abstracciones y generalizaciones de situaciones concretas en las que funcionan dichos razonamientos, los cuales se justifican, se explican o se interpretan, siempre, en casos específicos (el verdadero origen y no solo el significado de la proposición "X es Y", se encuentra en proposiciones específicas tales como "tres es impar"). Por tanto, **toda inferencia inductiva, independientemente de su naturaleza o esquema lógico subyacente, posee un soporte conceptual que la hace posible.**

De éste modo, cuando hablamos del sentido de las argumentaciones inductivas nos referimos a su integración en un sistema conceptual coherente. Pero, esta coherencia, depende de la naturaleza de los conceptos que constituyen el sistema así como de las concepciones y creencias sobre los mismos, lo que remite inmediatamente a consideraciones de tipo psicológico y epistemológico. En nuestro caso, las consideraciones epistemológicas se circunscriben al problema de la naturaleza, el origen y el modo de existencia del número natural y de la aritmética elemental, de manera que el razonamiento inductivo numérico va a depender, en este punto, de las conclusiones que se establezcan en torno al problema mencionado. Tal y como se desprende del análisis didáctico, **coexisten varios planteamientos epistemológicos sobre el número natural que condicionan las inferencias inductivas que se puedan establecer**. Analicemos a continuación dichos planteamientos.

Por una parte nos encontramos con lo que hemos denominado planteamiento **inductivista** del número natural, que presenta un predominio del aspecto ordinal, en lo numérico, y de la noción de cantidad, en sus orígenes. La inducción recae aquí sobre la noción de cantidad, considerada a su vez como resultado de otras inducciones previas, por lo que decimos que todo concepto o procedimiento aritmético tiene un origen inductivo. Pero aquí nos encontramos con una de las primeras lagunas: los inductivistas no presentan justificaciones acerca de las inducciones previas a la noción de cantidad ni explican en qué consisten dichas inducciones. Ya hemos planteado que los orígenes del número también pueden ser temporales o fenomenológicos, en los procesos llamados de repetición o iteración; procesos no considerados por el inductivismo en la obtención de las cantidades como agregados de unidades.

Por otro lado, algunos problemas como el señalado se evitan dentro de la postura **convencionalista**; una corriente basada en los aspectos ordinales del número y cuyo soporte inicial es la acción de contar y la verbalización de la secuencia numérica. Para este enfoque, que parte de la estructura superficial sin considerar la estructura profunda, los numerales y los signos numéricos son convenciones o normas que actúan mediante unos criterios.

Por el contrario, con el **estructuralismo** se da prioridad a la estructura, en una clara aplicación de la lógica al campo de la matemática. El principio del número ya no es la unidad sino la identidad lógica, que a su vez es el resultado de la composición de una relación y su recíproca. Todo ello desemboca en las construcciones **conjuntistas** de la aritmética del número natural, para las que los orígenes del número se encuentran en las nociones generales de conjunto y correspondencia y cuyo punto de partida es el aspecto cardinal del número. Al partir de nociones generales, sus planteamientos se orientan hacia la construcción lógica de la noción de número para justificar y formalizar el razonamiento matemático y abordar, posteriormente, la algebrización lógica de la aritmética.

Circunscribiendonos a la bibliografía utilizada y en cuanto al problema específico de la investigación, consideramos que los procedimientos y relaciones subyacentes al estudio de regularidades aritméticas **en series numéricas están más explicitados en el planteamiento aritmetista que en el conjuntista.** En el aritmetismo hemos comprobado como se estudian las relaciones numéricas en la proporcionalidad, tema que se presenta en todos los tratados clásicos de aritmética que hemos consultado. A pesar de los intentos conjuntistas de integrar las series en el concepto generalizado de sucesión se siguen estudiando las progresiones aritméticas y geométricas como un tema aislado e independiente de los demás y es cuando se trabajan, para este tipo de series, los procedimientos aritméticos.

Nuestra consideración se debe circunscribir al ámbito de la aritmética del número natural y no al ámbito del Algebra clásica o moderna.

Por otra parte, **las series numéricas están constituidas en objetos de uso pero no de saber**, es decir, no se les concede, por sí mismas, ningún tratamiento específico, como ocurre con otras nociones elementales en matemáticas. Al menos no hemos encontrado ninguna interpretación o definición general del término “serie numérica” que incluya nociones colaterales o particulares como las de “progresión” (tratamiento de Bocherini en su estudio inductivo de la aritmética), “serie de sumas parciales de una sucesión” (Análisis Matemático) o “encadenamiento aditivo de relaciones asimétricas transitivas” (definición de Piaget del término “seriación”). El problema se debe, nuevamente, a la inexistencia de un modelo inductivo o un concepto generalizado de inducción que permita interpretar y analizar las series numéricas. En matemáticas el tratamiento de las series numéricas ha sido y sigue siendo procedimental más que conceptual.

Las diferentes posiciones epistemológicas ante el número natural condicionan la transmisión escolar de la aritmética, pero en todos los casos la inducción es importante para su aprendiza-je. Así, en el periodo aritmetista han predominado la numeración hablada y escrita, la transmisión convencionalista basada en el aspecto ordinal y las actividades de contar en el doble sentido de aumento y disminución. Por el contrario, en el periodo conjuntista predomina el aspecto cardinal y se intenta una construcción lógica de la aritmética a partir de nociones previas a la de número como es la noción de conjunto. En ambos casos, como hemos visto, las actividades de aprendizaje no están exentas de inducciones.

En cuanto a las consideraciones psicológicas y desde una perspectiva del desarrollo del conocimiento (que está en relación con los planteamientos de la epistemología genética) hemos de basarnos en la psicología evolutiva de Piaget. Teniendo en cuenta que el avance del conocimiento de un individuo no siempre es acumulativo en el sentido del aumento de verdades que se incorporan a su sistema conceptual sino también en la modificación del sistema o en su sustitución por otro, es por lo que nosotros consideramos la evolución de los conocimientos ligada a la evolución del sistema conceptual individual. Particularizando para la aritmética del número natural **los conceptos y procedimientos aritméticos han de estar integrados en un sistema conceptual numérico equilibrado con unas propiedades internas del sistema que posibiliten al escolar el razonamiento inductivo numérico. Según la psicología de Piaget, la evolución del sistema conceptual aritmético en el escolar, debe estar supeditado la evolución de sus estructuras operatorias (clasificación, seriación, correspondencia, agrupa-mientos de clases, de relaciones asimétricas y de igualdad etc,) que posibilitan la integración de las operaciones (acciones interiorizadas) en sistemas cada vez más complejos.**

El currículum y el sistema conceptual individual condicionan el descubrimiento de patrones en una serie numérica. Las relaciones y los patrones que un alumno puede establecer o descubrir, dependen de los conocimientos aritméticos aprendidos y de las creencias adquiridas sobre los números. A su vez, dichos conocimientos y creencias estarán condicionados por las características de su sistema conceptual, en el cual inciden directamente, a través de las actividades, los planteamientos epistemológicos implícitos en el proceso didáctico seguido en aritmética. De aquí la importancia determinante del desarrollo del currículum en el razonamiento inductivo numérico.

4.8.2.- Síntesis de conclusiones

Las principales conclusiones del estudio se pueden resumir en los siguientes apartados y puntos concretos:

1) Inducción

C1) No existe un modelo teórico para la inducción ni una definición general que abarque todos sus posibles significados. Destacamos aquí la necesidad de tal modelo, al menos para el caso particular del razonamiento inductivo en aritmética.

C2) Podemos hablar de casos relevantes de inferencias sintéticas según diferentes contextos científicos. Pero, sólo en ámbitos concretos podemos definir e interpretar un modelo inductivo.

C3) El enfoque logicista de la inducción se centra en la silogística y en algunas reglas de inferencia.

C4) La analogía es uno de los pilares de la inducción en matemáticas; la reducción formal se considera como un caso de analogía.

2) Inducción y origen-construcción del número natural

C5) El papel de la inducción en la construcción del número natural y de la aritmética es incuestionable. Lo que sucede es que la interpretación de su papel elaborador depende de la concepción epistemológica del número natural que se considere.

C6) Las distintas interpretaciones epistemológicas sobre los orígenes del número natural se han reflejado en la enseñanza del número en la escuela.

3) Planteamientos sobre origen del número

C7) Se pueden identificar dos corriente clásicas con origen empirísta dearrolladas respectivamente por Mill y Jevons; ambas están dentro de la corriente que hemos denominado inductivista. Esta corriente postula que el principio del número es la cantidad a partir de unidades diferenciables perceptivamente.

C8) Para el convencionalismo, el principio del número radica en la secuencia numérica y en la acción de contar; la serie ordinal es suficiente para construir el número.

C9) Los planteamientos conjuntistas introducen los conceptos de cardinal y de correspondencia para establecer los orígenes del número mediante un método deductivo que parte de conceptos más generales, como el de conjunto.

C10) Se producen intentos de reducir la aritmética a la lógica y el número natural a las clases. Estos intentos se inician con Jevons y culminan con la obra de Russel.

4) Epistemología y cognición

C11) Desde la epistemología genética, el problema de la naturaleza de los números naturales sólo puede ser resuelto en función de su desarrollo.

C12) Un planteamiento cognitivo ha de considerar las referencias espaciales y temporales para establecer relaciones entre números. El orden numérico y la linealidad quedan patentes en las representaciones gráficas de las relaciones numéricas.

5) Revisión histórica de la aritmética escolar en España

C13) En el presente siglo y en relación con la enseñanza de la aritmética, se distinguen dos periodos: el aritmetista, con fundamentación inductivista pero con un planteamiento didáctico convencionalista y el conjuntista, que es deductivista. En el momento actual parece que estamos en un tercer periodo constructivista- interaccionista, que por ser reciente no se conoce aún su desarrollo.

C14) En las transiciones de unos periodos a otros se mantienen determinados métodos y técnicas didácticas.

6) Inducción, series numéricas y acción de contar en los procesos de enseñanza aprendizaje de la aritmética

C15) Las series numéricas no han sido objeto de estudio ni han constituido un contenido en ninguno de los periodos mencionados, salvo actividades aisladas con la intención de reforzar la serie numérica básica. En la actualidad, las series numéricas no son objeto de estudio en Matemáticas; únicamente se estudian las sucesiones y las series de sumas parciales.

C16) La inducción ha jugado un papel importante en las actividades propuestas para la enseñanza-aprendizaje de la aritmética en todos los periodos mencionados.

C17) Desde un punto de vista evolutivo, el escolar puede llegar, mediante la inducción y antes de pasar a la formalización, al descubrimiento, interpretación y significación de los conocimientos aritméticos.

C18) La aritmética escolar tiene grandes dosis de convencionalismo. Por tanto, la acción de contar juega un papel importante en la verbalización y en el aprendizaje.

C19) Se produce una disminución sustancial de las actividades de contar en el planteamiento conjuntista.

C20) Las progresiones aritméticas y geométricas tienen un tratamiento en los currícula previo al estudio de las sucesiones.

Los apartados anteriores se corresponden con dos bloques diferenciados dentro de nuestro análisis didáctico:

- Un primer bloque de conclusiones sobre la inducción y su importancia en las fundamentaciones epistemológicas del origen y naturalza del número. Apartados 1), 2) y 3).

- Un segundo bloque que conecta con el anterior a partir de un posicionamiento epistemológico genético y evolutivo desde cuya optica se concluyen aspectos cognitivos y curriculares en relación con la enseñanza y aprendizaje de la aritmética y las series numéricas en España. Apartados 4), 5) y 6).

> Se confirma la bondad de la hipótesis H1: "Existe una corriente epistemológica y matemática que considera que la aritmética tiene un origen exclusivamente inductivo. Los planteamientos didácticos y curriculares de la aritmética escolar en España han participado de esta tendencia al tener un marcado signo inductivista" y se alcanzan, en consecuencia, los objetivos propuestos (apartado 4.2).

4.9.- Conclusiones sobre la inducción y el razonamiento inductivo numérico

Se exponen a continuación los resultados y conclusiones separados en dos apartados. En el primero se expone una interpretación del razonamiento inductivo numérico desde la perspectiva de la inducción y de las inferencias sintéticas; en el segundo, por su especial relevancia para la investigación, y desde un punto de vista del desarrollo del conocimiento y en concordancia con la evolución del conocimiento según Piaget, se expone un modelo teórico evolutivo del razonamiento inductivo numérico

4.9.1- Interpretación del razonamiento inductivo numérico en el contexto de la inducción

En el capítulo 1, apartado 1.3.1, hemos definido el razonamiento inductivo numérico:

> "Razonamiento en el que intervienen los procesos mentales, lógicos y aritméticos implícitos en la realización de inferencias o generalizaciones inductivas en series numéricas así como los conceptos y propiedades del número que puedan determinar dichos procesos"

Para analizar el razonamiento inductivo numérico hemos partido de una interpretación y organización de la inducción desde una perspectiva generalista y que haga posible situar el desarrollo inductivo de la aritmética en relación con su aprendizaje.

De acuerdo con la figura 4.2, en principio distinguimos entre inducción experiencial e inducción inferencial.

Al hablar de la inducción experiencial nos referimos a las adquisiciones inductivas que realiza el sujeto, bien por repetición o imitación, o bien, por asociaciones implícitas al propio proceso de adaptación al medio; su puesta en práctica conduce a la adquisición de hábitos, costumbres y creencias (Russell 1912). Desde un punto de vista inductivista se pueden incluir en esta categoría, como veremos, muchas de las rutinas y habilidades adquiridas durante el aprendizaje de la aritmética, entre las que podemos incluir la acción de contar, aspecto esencial de los inicios del número, en opinión de muchos autores.

Al hablar de la inducción inferencial nos referimos a los procesos conscientes, generalmente de corta duración, en los que se aplican estrategias de razonamiento (analogías, enumeración, etc). Se trata del tipo de inferencias que se aplica, o se debe aplicar, en las tareas de continuación de series de nuestro trabajo y, en general, en todas las tareas relacionadas con el razonamiento inductivo numérico.

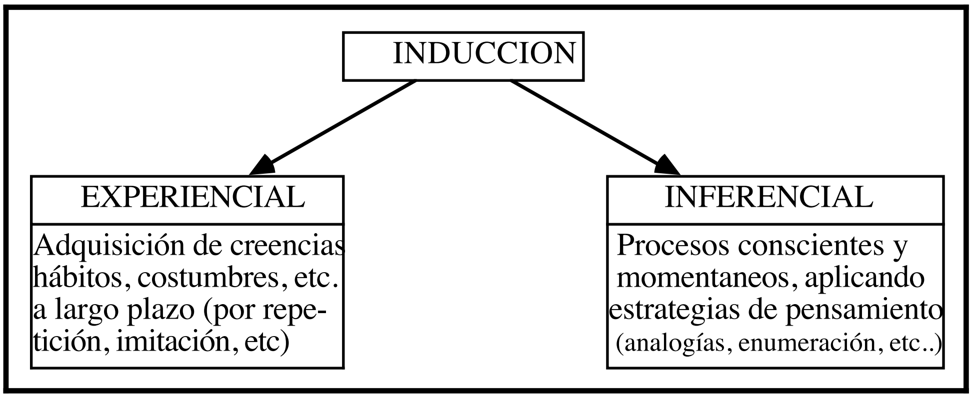

Figura 4.2.- Tipos de inducciones en el contexto escolar

Según se observa en la figura 4.3, en la que se expone un esquema de la inducción aplicada al caso particular del razonamiento inductivo numérico, distinguimos las dos subcategorías siguientes dentro de la inducción inferencial: las inferencias contextualizadas y las enunciadas.

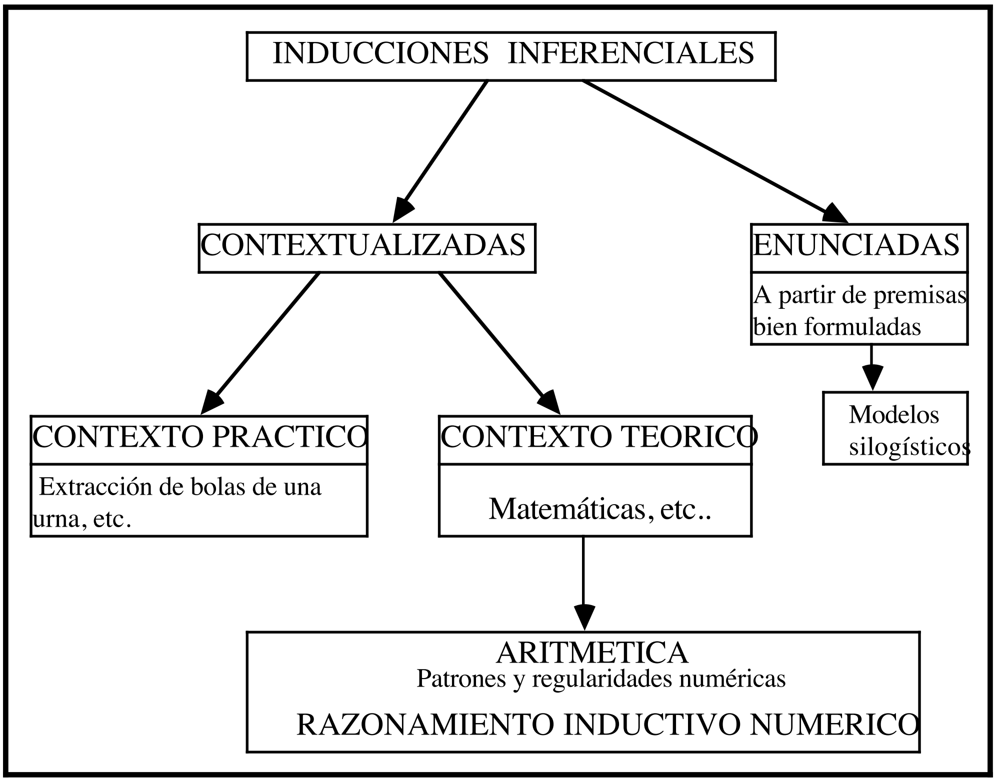

Figura 4.3. El razonamiento inductivo numérico en el contexto de la inducción

Las inferencias enunciadas se refieren a las que se pueden realizar a partir de unas premisas previamente establecidas aplicando los modelos silogísticos. Por el contrario, las inferencias contextualizadas son las que requieren, con carácter previo a la realización de las inferencias lógicas propiamente dichas, de la construcción de las premisas y de las relaciones que las definen en el contexto determinado en el que aparece la necesidad de inducir. Las inferencias en razonamiento inductivo numérico son contextualizadas, siendo de especial importancia para nuestra investigación la construcción de las premisas que dan lugar al descubrimiento de las regularidades.

Como se aprecia en la figura, se distingue también entre contexto práctico y contexto teórico. Una inducción en un contexto práctico es la que se realiza en un ambiente inmerso en el medio socio-cultural de la persona. En las inferencias de este tipo pueden aparecer, incluso, aspectos numéricos; por ejemplo, si se extraen bolas de una urna en las que el sujeto no sabe que todas ellas tienen escrito el número 2, podrá inferir, antes de acabar, que todas las bolas tienen escrito el número 2. Igualmente se incluyen aquí aquéllas inferencias causales que llevan a conclusiones de actuación o de confirmación en un momento dado, como por ejemplo: “si está nublado debo coger el paraguas”; “ya sabía que me ibas a invitar”; etc.. Son inferencias que no situamos dentro de ningún modelo teórico y para las que “a priori” no creemos que existan reglas específicas.

Las inferencias en un contexto teórico son aquéllas cuyas premisas se enuncian dentro de una teoría y de acuerdo con sus reglas, lo que afecta al contenido, a las relaciones que se establecen y a los términos y notaciones empleados. Las inferencias inductivas en aritmética y, en particular, las inferencias en razonamiento inductivo numérico son de contexto teórico. Pero el éxito en las mismas, creemos que también es consecuencia de la inducción experiencial, que es la que hace posible, entre otras cosas, la adquisición del número y de la aritmética según algunas posiciones epistemológicas sobre el origen del número natural. Pensamos que la realización de inferencias de contexto teórico en aritmética pueden estar influenciadas por inducciones experienciales que realiza el sujeto (entre otras adquisición de hábitos y técnicas de trabajo, actitud positiva hacia la aritmética como una costumbre etc). Se trata, evidentemente, de una influencia a largo plazo que comienza en las primeras tareas con cantidades y se consolida en las experiencias con las operaciones aritméticas.

Por otra parte, estamos de acuerdo con Sternberg (1986), en que el comportamiento inteligente se define en su mayor parte por el contexto sociocultural en el que tiene lugar. De este modo, el comportamiento en razonamiento inductivo numérico debe estar en íntima relación con el aprendizaje escolar y se debe poder situar, en su mayor parte, en el contexto de la aritmética escolar.

En definitiva, hemos realizado una reinterpretación general de la inducción para ver el sentido y el lugar que le corresponde al razonamiento inductivo numérico, llegando a la conclusión de considerar como soporte del razonamiento inductivo numérico a la inducción inferencial contextualizada teóricamente en la aritmética escolar del número natural.

4.9.2.- Modelo teórico local de la evolución del razonamiento inductivo numérico natural

En este apartado, como consecuencia del estudio realizado, nos proponemos desarrollar un modelo de competencias cognitivas de carácter evolutivo sobre el razonamiento inductivo en series de números naturales que explique e integre los siguientes factores: la progresión en el descubrimiento de regularidades numéricas por parte del sujeto individual, las características de las regularidades "accesibles" a los distintos niveles de desarrollo intelectual así como las habilidades necesarias para detectar y utilizar cada una de ellas, los tipos de relaciones que se toman en consideración y, sobre todo, la evolución de las competencias inductivas al pasar de un nivel evolutivo a otro superior. Para ello, además de tener en cuenta los resultados del estudio exploratorio como información fundamental, es necesario:

- realizar un análisis exhaustivo de todas las posibles características objetivas atribuibles a cualquier tipo de serie de números naturales así como de todas las regularidades y relaciones que pueden constituir reglas para la construcción de series de este tipo. La naturaleza de los elementos que constituyen la serie así como su modo de construcción determinan sus características y propiedades así como el lenguaje relacional específico.
- establecer las posibles interpretaciones que puede elaborar el sujeto acerca de una secuencia numérica concreta y asignar, a cada una de ellas, un estatus evolutivo que tenga en cuenta los datos conocidos sobre la evolución del conocimiento involucrado, tanto en su filogénesis, expuesta en el análisis didáctico, como en la ontogénesis de determinados conceptos, tales como el espacio, el tiempo, el número, el lenguaje, las estructuras lógicas etc..
- delimitar los distintos tipos de series de números naturales y construir las que se puedan adaptar a las distintas interpretaciones y niveles de competencias (por ejemplo, teniendo en cuenta la relación entre la construcción del espacio en el niño y la evolución de los aspectos seriales desde la percepción).
- examinar el desarrollo curricular de la aritmética escolar y analizar su incidencia en las tareas y competencias en estudio, teniendo en cuenta que el simple desconocimiento de una operación o de un concepto puede dificultar o impedir la ejecución de una tarea inductiva.
- ordenar los tipos de series, agruparlos en categorías y delimitar las características que las definen (lo que luego llamaremos "perfiles de razonamiento inductivo numérico") teniendo en cuenta los resultados de todos los puntos anteriormente expuestos, es decir, construir el modelo.

Por su amplitud, no vamos a tratar separadamente las conclusiones detalladas de las reflexiones e indagaciones anteriores, algunas de las cuales figuran en la Memoria de Tercer Ciclo a la que nos remitimos, sino que se van a incluir a lo largo del desarrollo de la exposición. La opción que hemos elegido es la de un razonamiento progresivo, a partir de los aspectos más elementales hasta los más complejos y de las edades inferiores a las superiores, resumido y estructurado por etapas o aproximaciones según la ordenación y categorización obtenidas. Cada aproximación corresponde a un estado diferente, que viene especificado por su descripción y justificación así como por las competencias teóricas que le corresponden desde **un punto de**

vista de la progresión de las capacidades correspondientes en un sujeto individual ideal.

a) Primera aproximación. Estado 1: linealidad y orden topológico

En el inicio de las primeras nociones numéricas el alumno no está aún en disposición de resolver una serie propiamente aritmética. En Educación Infantil se trabajan seriaciones por colores, formas, etc., basadas en aspectos eminentemente perceptivos y en relaciones alejadas de la propia esencia del número. En consecuencia, si este alumno es capaz de resolver alguna serie numérica, lo será en casos muy específicos y siempre adecuados a los conocimientos y capacidades de un individuo de cinco o seis años, edades a partir de las que vamos a realizar el estudio.

Por otra parte, de acuerdo con nuestro análisis de los orígenes de la noción de número, la aprehensión de una numerosidad de objetos como una totalidad invariante requiere de su comparación con otras totalidades y del dominio de la reorganización espacial. Por tanto, el dominio del espacio, al menos parcialmente, es una de las primeras destrezas para poder establecer comparaciones que permitan determinar las analogías y diferencias necesarias para ordenar cantidades. Pero no sólo es necesaria esta destreza para poder comparar cantidades; también alcanza, como es evidente, al sistema numérico posicional.

Según Piaget, la construcción del espacio matemático por parte del sujeto comienza en los aspectos topológicos, para pasar, posteriormente, a los proyectivos y euclídeos. Uno de estos aspectos es el **orden de los puntos sobre una linea**, el cual hace posible la construcción de referencias ordinales (anterior, posterior, para adelante, para atrás etc.) que se transfieren a la recta numérica y a las series, tal y como hemos podido comprobar en el análisis de respuestas del capítulo 3 de esta Tesis Doctoral y en el análisis de los textos escolares del apartado anterior. Asímismo, el orden lineal está en relación directa con la acción de contar, tan importante en las primeras adquisiciones numéricas desde un punto de vista convencionalista:

> “La idea de "orden" de los puntos sobre una recta (o la noción de punto <entre> otros dos) es una de las nociones geométricas primitivas. Es un <modelo> matemático de la concepción intuitiva de comparación de <magnitudes> o de números enteros” (Dieudonné, J. 1989. Pág. 194).

Por consiguiente, establecemos que el primer soporte intuitivo común a todas las series numéricas está relacionado con el concepto espacial de linea y, en particular, con el concepto de orden topológico de un conjunto finito de puntos pertenecientes a una linea (conjunto que debe contener al menos tres puntos). Este soporte intuitivo se caracteriza por diferenciar los puntos unos de otros y por la aparición de un lenguaje específico (siguiente, anterior, posterior, primero, último, entre, doble sentido de recorrido, etc.). No es necesaria la verbalización ni el conocimiento memorístico. Los puntos se suponen equidistantes, no intervienen las distancias y la linea no tiene porqué ser recta.

b).- Segunda aproximación. Estado 2: etiquetaje

La primera interpretación espacial permite organizar una numerosidad para poder contarla posteriormente, lo que nos conduce a una segunda aproximación más evolucionada que la anterior y caracterizada por el etiquetaje. Entendemos como etiquetaje la asignación de un objeto, símbolo, palabra o concepto a cada punto incluido en un soporte lineal como el descrito en el apartado anterior. Se trata de un proceso de diferenciación y localización en un contexto ya ordenado por la anterior aproximación.

Entre los ejemplos de series que se ajustan a este esquema se encuentran, por ejemplo, la tabla periódica de los elementos químicos o el abecedario, en el que cada punto o término está determinado por su denominación y podemos hacer referencia a él sin necesidad de señalarlo (el siguiente de m es n; entre a y c está b, etc.). La situación o lugar asignado a un objeto puede carecer de justificación, pero, en algunos casos, podemos hacer referencia a otro concepto o serie ordenada, como ocurre en la tabla periódica con el orden creciente de los números atómicos. La ausencia de justificación lógica conlleva la ausencia de regularidad, que a veces el sujeto puede imponer de forma arbitraria y subjetiva, y la imposibilidad de realizar un razonamiento inductivo, salvo que se trate de una aplicación práctica de una serie ya conocida (utilización del abecedario para indicar zonas en un aparcamiento).

Esta segunda aproximación se puede interpretar como el paso de los objetos a su simbolización y de las colecciones de puntos a las colecciones de significantes. Los ejemplos, como el que hemos visto, se refieren a ordenes topológicos ya establecidos, bien por experiencia (objetos fijos en un recorrido), por convenio o por utilidad. Cada vez que realizamos el recorrido presentimos los objetos siguientes, los que quedan, los que hemos pasado, etc.. Podemos hacer referencias verbales para determinar un objeto; estas referencias pueden ser espaciales o temporales (la temporalización esta presente en estas primeras construcciones seriales).

El sujeto puede hacer referencias para determinar un lugar o término de la serie: el siguiente a..., el anterior a..., el que sigue a..., el que está antes, el que está después, etc.. Para ello debe conocer, al menos memorísticamente, alguna serie finita, que si es la de los primeros numerales podemos decir que estamos ante una iniciación en la acción de contar. No es necesario dominar el aspecto cardinal del número, puesto que no es lo mismo pronunciar las palabras uno, dos, tres, a medida que indico sucesivos objetos, que pronunciar las palabras uno, dos, tres, cuando tengo una torre de un objeto, otra de dos objetos, otra de tres objetos, etc. (acumulatividad en el conteo).

c).- Tercera aproximación. Estado 3: regularidades infralógico-simbólicas

El etiquetaje y la identificación de los objetos por sus significantes permite acceder a una tercera aproximación. Es el caso, por ejemplo, de la alternancia por colores, en la que es posible inferir la regla y predecir los siguientes elementos sin necesidad de una previa memorización. Se trata, por tanto, de una regularidad infralógica, ya que depende de como estén situados los objetos en el espacio. No hay orden en el sentido de la antisimetría, salvo que apliquemos las condiciones de las aproximaciones anteriores, asignando un lugar fijo a los objetos. Sin embargo se pueden permutar dos objetos del mismo color para modificar la apariencia (son objetos distintos) sin que se modifique la regularidad. Este cambio de apariencia no se produce, por el contrario, en el caso de los numerales, en el que el intercambio de dos signos iguales no modifica nada (1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, ...).

Este estado, a diferencia de los anteriores, se caracteriza por una competencia inductiva básica que hace posible determinar imaginativamente el término siguiente en una serie no memorizada (se distinguen los dígitos y se identifican los iguales y los diferentes con independencia de los significados atribuidos a los signos). Podemos decir que es el primer paso serial dentro de la numeración escrita.

d).- Cuarta aproximación: regularidades simbólico-cuantitativas (comparar y añadir-quitar signos numéricos)

Si los signos (en nuestro caso, los signos numéricos) se encuentran ya organizados dentro de un sistema con su propia sintáxis, se pueden establecer nuevas relaciones entre ellos de acuerdo con las características de dicha estructura sintáctica; relaciones que trascienden la mera clasificación o identidad lógica de la aproximación anterior. Por ejemplo, el orden de las letras que constituyen una palabra o el orden de las palabras que constituyen una frase no son al azar, sino siguiendo unas reglas lingüísticas específicas.

Del mismo modo, el sistema de representación numérica presenta unas regularidades implícitas en su construcción, en su estructura lógica interna y en su sintáxis. Dicha estructura, que incluye un sistema comparativo jerárquico además del orden posicional de la primera aproximación, hace posible la existencia y construcción de series numéricas con regularidades exclusivamente sintácticas (aún sin significado numérico completo). La más elemental de estas regularidades es la que se puede apreciar por simple comparación entre términos que se diferencian entre sí por la repetición de signos, su cantidad y colocación; por ejemplo: 1, 11, 111, ... o 22, 202, 2002, .., series construidas añadiendo, cada vez, un dígito concreto. Esto, que es posible en el sistema posicional numérico, en el que se generan nuevos números salvo algunos casos particulares (cero a la izquierda), no tiene cabida, por ejemplo, en lingüística, donde añadir una letra a una palabra no siempre da lugar a nuevas palabras. En definitiva, el dominio de estos aspectos "primarios" de la sintáxis del sistema (signos perceptivamente iguales o distintos, su cantidad y colocación) y de su funcionamiento suponen una competencia en el aumento disminución de cantidades discretas (uno más , dos más, etc.) y permiten realizar inducciones sintáctico-estructurales e interpretar series del tipo indicado sin necesidad de usar una aproximación anterior.

e).- Quinta aproximación. Estado 5: representacional o simbólico-ordinal (dominio de la serie numérica básica)

Un paso más en el dominio sintáctico supone superar la mera distinción entre los numerales escritos de una cifra y su diferenciación cuantitativa para considerarlos, además, ordenados en una serie básica. El dominio de esta serie, en lo que se refiere a su estructura ordinal, permite identificar las regularidades implícitas en series del tipo: 10, 20, 30, ..; 21, 22, 23, ..; etc, lo que conlleva, además, el dominio más elemental de la acción de contar, como es contar de uno en uno, de dos en dos, etc..

f).- Sexta aproximación. Estado 6: sintáctico numeral (contar de n en n con n>10)

Simultáneamente al dominio de los aspectos del estado anterior se debe conformar una relación entre la representación y la cantidad. Estamos hablando de una representación significativa de los números basada en el isomorfismo existente entre el sistema posicional y una de las disposiciones espaciales de las cantidades o numerosidades; en concreto, la que supone agrupar las cantidades en decenas, que a su vez se agrupan en centenas, etc.. Esta iteración provoca unos ritmos que hacen posible el conteo de n en n con cierta facilidad en algunos casos. Por ejemplo, contar de 10 en 10, de 11 en 11, etc., supone un paso más en las destrezas numéricas una vez dominado el contar de n en n con $n<10$.

g).- Séptima aproximación. Estado 7: inducción aritmética aditiva

Diremos que hay inducción aritmética cuando se interprete una regularidad desde las operaciones aritméticas; ejemplos: 12, 24, 48, ..; 2, 4, 8, 16, .. (Sumar el anterior a sí mismo). De acuerdo con los resultado del estudio exploratorio, se observan dos niveles diferenciados de inducción aritmética: un primer nivel de competencias aditivas y sustractivas y un segundo nivel de competencias multiplicativas y partitivas. El primer nivel, que corresponde al presente estado, se refiere a la construcción de ciertas relaciones aditivas, tales como: mayor-menor, más que, menos que, etc..

Hay regularidades que no se pueden interpretar de otra manera, como por ejemplo la de una progresión aritmética de diferencia 547, o la de una progresión geométrica de razón 3. En otros casos, al igual que ocurre en los apartados anteriores, la regularidad se puede interpretar con instrumentos de las anteriores aproximaciones; por ejemplo, la serie 22, 32, 42, ... se puede considerar como: contar de 10 en 10 comenzando en 22, la serie básica acompañada del dos, o bien, sumar 10. El reconocimiento de estas regularidades desde el punto de vista aditivo (aplicar en los casos del estado anterior y en otros más complejos la adición o la sustracción: sumar dos, restar cuatro, sumar el anterior, etc.) conlleva una integración de las transformaciones en operaciones de esta clase, lo cual supone la existencia de competencias propiamente aritméticas.

h).- Octava aproximación. Estado 8: inducción aritmética multiplicativa

En el segundo nivel, o de competencias y regularidades multiplicativo-partitivas, se encuentran relaciones como: doble-mitad, triple-tercio, dos veces, tres veces, par impar, etc., que el sujeto puede descubrir aplicando la multiplicación y la división. Ejemplos: 2, 4, 8, 16, ..., que se puede resolver tanto aditiva como multiplicativamente; 3, 12, 48, 96, ..., etc.

i).- Novena aproximación. Estado 9: inducción algebraica

El siguiente nivel de abstracción matemática se corresponde con el paso de la aritmética al álgebra, lo que supone el salto al infinito en las series numéricas. Este salto se inicia con la comprensión de la iteración subyacente al sistema de representación numérico posicional de base diez, por el que es posible expresar cualquier cantidad con pocos signos. Su dominio se caracteriza, entre otros aspectos, por la aplicación de criterios aditivos o multiplicativos, verbales o proposicionales, y por expresiones sencillas para el término general que encapsulan la regularidad de la serie. Ejemplos: 2, 4, 8, 16,.. (el doble de cada número, es decir, 2n).

Se produce el dominio de una visión totalizadora de los números naturales como soporte de relaciones internas: pares, impares, cuadrados perfectos, relaciones partitivas exactas y no exactas, números primos, propiedades de las operaciones aritméticas por prueba, etc. Esto permite las primeras interpretaciones cualitativas de algunas series, como por ejemplo: Series de los números pares, series de los números primos, de los múltiplos, etc.. Algunas de estas definiciones por comprensión se sintetizan algebraicamente: 2n, 2n+1, 5n, etc., llegando así al lenguaje algebraico.

En **resúmen**, el modelo consta de nueve estados de dominio progresivo de la inducción en series numéricas agrupados en cinco bloques diferenciados:

A).- Bloque **general** (no inductivo desde el punto de vista numérico), formado por los estados:

Estado 1: topológico
Estado 2: etiquetaje

(regularidades generales (alternancia, ritmo o cualquier regularidad visual o memorística), para las que no es necesario aplicar conocimientos numéricos);

B).- Bloque **prenumérico**, constituido por los estados:

Estado 3: infralógico-simbólico
Estado 4: simbólico-cuantitativo

(descubrimiento de patrones);

C).- Bloque **numérico**, formado por los estados:

Estado 5: representacional
Estado 6: sintáctico-numeral

(descubrimiento de patrones; dominio de la serie numérica básica y del sistema de representación decimal);

D).- Bloque **aritmético**, constituido por los estados:
Estado 7: aritmético aditivo
Estado 8: aritmético multiplicativo
(descubrimiento de patrones; dominio de las operaciones de la aritmética elemental);

E).- Bloque **algebraico**, formado por el estado:
Estado 9: algebraico
(formalización del razonamiento inductivo)

Aunque no es esta la intención del trabajo, es posible analizar la evolución de los estados desde distintos puntos de vista. Así, desde la representación geométrica, podemos ver una evolución desde intuiciones topológicas a aspectos euclídeos del espacio. Igualmente, desde el desarrollo del lenguaje, se aprecia una evolución que comienza en el etiquetaje para pasar, posteriormente, a un lenguaje aritmético específico y a un lenguaje algebraico. Por último, desde las inferencias, se contempla una evolución desde estados no inductivos, pasando por estados de descubrimiento de patrones, a un estado inductivo formal en el que la regularidad se puede representar mediante el lenguaje algebraico.

Para terminar el presente capítulo, haremos una breve referencia a la proyección del modelo que se acaba de exponer en relación con la continuación del trabajo.

En la primera exploración empírica, realizada en una muestra de 297 sujetos entre 9 y 12 años (4º, 5º y 6º cursos), se han estudiado los estados aritméticos 7 y 8, para los que se construyó y validó una escala acumulativa de Mokken formada por cuatro niveles: dos para el estado 7 y dos para el estado 8. En la continuación del presente estudio pretendemos abarcar toda la Educación Primaria, centrándonos, además, en los estados correspondientes al inicio en el descubrimiento de patrones aritméticos. Esto significa que debemos ampliar los cuatro niveles de los estados 7 y 8 con niveles correspondientes a los estados previos (6 y anteriores), por lo que decidimos completar la escala inicial, según se expone en el capítulo 5 al que nos remitimos, con dos niveles inferiores: uno para el estado 5 y otro para el estado 6. En definitiva vamos a distinguir seis niveles: dos numéricos y cuatro aritméticos, considerando que el estado algebraico, que abarca desde el descubrimiento del término general hasta el método de inducción completa incluyendo los inicios del concepto de limite de una sucesión, debe ser motivo de futuros trabajos.

CAPITULO 5

ESTUDIO EMPIRICO CUANTITATIVO

5.1.-Introducción

El fin primordial de esta investigación, de acuerdo con el marco metodológico y el esquema general que se incluyen en los capítulos 1 y 2, es indagar en determinados aspectos del razonamiento inductivo numérico de los escolares de Educación Primaria. Para ello hemos realizado un estudio empírico exploratorio y un estudio teórico que han servido para fundamentar la investigación, construir un modelo teórico local susceptible de contrastación empírica y orientar el resto del trabajo con ciertas garantías de éxito.

La contrastación y validación del modelo mencionado requiere, a nuestro juicio, para ser completa de dos tipos de estudios empíricos, por este orden:

- un primer **estudio empírico** de carácter descriptivo, orientado a obtener evidencias sobre la evolución de competencias inductivas y aritméticas en los escolares así como sobre las características, regularidades y relaciones que se ponen de manifiesto en las respuestas a tareas de cálculo y de continuar series de números naturales, preparadas de acuerdo con el modelo teórico construido;

- un segundo **estudio de casos**, con el que se pretende confirmar las características observadas y profundizar en ellas, realizar un análisis detallado de las regularidades encontradas y delimitar con mayor precisión, al menos parcialmente, las principales características de perfiles diferenciados de razonamiento inductivo numérico a partir de la información general obtenida en el estudio anterior.

En el presente capitulo se exponen el diseño y los resultados del estudio empírico cuantitativo, que en su parte fundamental tiene un carácter transversal (grupos diferentes de sujetos de distintas edades y niveles escolares) y se ha realizado con enfoque de presente y sobre una muestra intencional. La información que se quiere obtener se refiere al rendimiento de los alumnos de la muestra en las tareas indicadas y dará cuenta de la situación de una parte del razonamiento inductivo en el campo en estudio así como de la disponibilidad efectiva de las relaciones numéricas y aritméticas elementales por parte de los escolares

Paralelamente al estudio anterior y con el fin de obtener más información acerca de las diferencias entre las competencias “aparentes” y “reales” de los escolares en numeración, cálculo y razonamiento inductivo numérico, se ha preparado un cuestionario para conocer la opinión de los profesores sobre la situación de sus alumnos en los aspectos mencionados; esta información se compara posteriormente con las respuestas a las tareas propuestas.

Creemos necesario este estudio por los siguientes motivos:

- Hay poca información sobre el rendimiento en tareas de continuación de series de números naturales y sobre el descubrimiento y utilización de patrones y regularidades numéricas y aritméticas en tareas inductivas finitas de este tipo.

- las respuestas a tareas no usuales en la enseñanza pueden poner de manifiesto, como así se ha comprobado en el trabajo, el estado y los niveles reales de comprensión de los conocimientos, a diferencia de otras tareas rutinarias, en las que diversos factores pueden llegar a enmascarar la verdadera situación de dicha comprensión. En nuestro caso puede resultar de gran utilidad conocer la relación existente entre las respuestas a tareas de cálculo (rutinarias) y de series (no usuales).

- La escala de Mokken, construída y validada en la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz,1993), sólo cubre una parte de la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria. Además, los datos de aquél estudio reflejaron claramente que dicha evolución comienza antes de los 9 años de edad. Es necesario, por tanto, obtener una escala acumulativa completa, por ampliación de la anterior en sus niveles inferiores, para la categorización de los sujetos de toda la Educación Primaria.

- Para poder asegurar con mayores garantías la adecuación del instrumento a los propósitos de la investigación, y puesto que la escala de Mokken debe formar parte de la nueva escala completa, parece conveniente comprobar que se confirman los mismos resultados en la nueva muestra.

- Para una selección fundamentada de los casos del estudio cualitativo, y ante la inexistencia de un marco de resultados empíricos que provean criterios suficientes para ello, resulta imprescindible obtener, previamente, información general sobre una muestra amplia, lo que creemos que constituye un medio idóneo para abordar con garantías el estudio de casos.

En los apartados correspondientes a la primera parte del capítulo se exponen los objetivos del estudio, la metodología y los aspectos fundamentales del diseño. La segunda parte se dedica a la exposición de los resultados y las conclusiones del trabajo.

5.2.- Propósitos del estudio y procedimiento utilizado

Con esta parte de la investigación se pretende alcanzar los siguientes objetivos de los enunciados en el apartado 1.7.2:

O4: "Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y **comprobar con escolares de Educación Primaria la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo numérico**"

O6: "Establecer la relación existente entre el desarrollo del currículum en aritmética y la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria"

O7: "Confirmar los resultados ya obtenidos en la Memoria de Tercer Ciclo".

Para alcanzar los objetivos anteriores se ha de comprobar, previamente, la bondad de las hipótesis H2, H3 y H4. En el presente capítulo se exponen los resultados que inciden en la bondad de las hipótesis H3 y H4, mientras que la hipótesis H2 se debe confirmar en su totalidad mediante el estudio cualitativo que se expone en el capitulo 6. Por tanto, del proceso general que figura en el apartado 2.4 (Articulación de las hipótesis en el proceso metodológico), vamos a llevar a cabo los siguientes pasos, cuyo desarrollo se expone con detalle en los sucesivos apartados del presente capítulo:

Hipótesis H2: "Las diferentes estrategias inductivas que permiten completar con éxito tareas de continuar series de números naturales se pueden organizar en un modelo teórico de desarrollo, que explica y describe, en seis niveles diferenciados, la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de 6 a 12 años".

El proceso seguido para justificar o confirmar esta hipótesis consta de dos etapas, la primera de las cuales se ha culminado en el capítulo anterior definiendo un modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico. En el presente capítulo se exponen los trabajos realizados para llevar a cabo la primera parte de la segunda etapa, cuyo objetivo es la construcción de una escala acumulativa asociada al modelo teórico; dichos trabajos son los siguientes:

-determinación de variables y de posibles tareas de razonamiento inductivo numérico, de acuerdo con el modelo teórico;

-preparación de una prueba sobre el universo de tareas;
-aplicación de la prueba a una muestra intencional controlada de escolares de 6 a 12 años;
-replicación positiva de la escala de Mokken;
-determinación de los ítems que forman una escala acumulativa
-estudio de la fiabilidad de la prueba
-establecimiento de niveles de acuerdo con los resultados de la escala.

Hipótesis H3: "El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una nueva competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico".

Para la confirmación de esta hipótesis se amplía la prueba anterior con las tareas de cálculo asociadas a cada uno de los ítems del estado aritmético, de manera que los escolares realizan una prueba con dos partes diferenciadas: una primera parte con tareas de continuar series y una segunda con tareas de cálculo aritmético. Con los resultados se lleva a cabo:
-un análisis estadístico descriptivo del rendimiento en cada parte de la prueba;
-un análisis comparativo entre los rendimientos;
-un análisis estadístico de la variable "diferencia de puntuaciones" obtenidas en cada parte.

Hipótesis Hc: "El efecto tope no es un efecto casual y local. Se produce en cualquier muestra importante de escolares de Educación Primaria que realice una prueba de continuar series preparada intencionadamente con tal fin".

En la primera parte de la prueba se incluye una tarea preparada para que se presente el efecto tope. Se confirma la existencia de este efecto en la nueva muestra si se reproducen los resultados ya obtenidos en todos los estudios anteriores.

5.3.- Metodología

Se trata de una investigación empírica basada en la recogida de información mediante cuestionarios y en el análisis descriptivo y comparativo de los resultados.

La ausencia de datos sobre el fenómeno estudiado en los seis niveles de Educación Primaria y la inexistencia de un instrumento completo para obtenerlos, ha obligado a construir un cuestionario nuevo, si bien, por ampliación de la escala de Mokken para cubrir los niveles inferiores.

El principal problema para alcanzar los objetivos propuestos es el de confeccionar una prueba escrita adaptada a una muestra de sujetos con diferencias de hasta seis años de edad y cinco cursos escolares. Para ello ha sido necesario cuidar especialmente dos aspectos básicos: el contenido de la prueba y el formato de la misma. El contenido debe cubrir los objetivos pretendidos y ser coherente tanto con el currículum escolar como con los estados establecidos en el diseño teórico; el formato y la presentación de las pruebas debe ser el mismo para todas las edades y cursos de los sujetos de la muestra, cuidando que no afecte de manera no deseada a los resultados.

Para cumplir adecuadamente y con ciertas garantías los requisitos anteriores, hemos realizado una prueba piloto con la intención de explorar el comportamiento de los alumnos de los primeros cursos. En dicha prueba, elaborada de acuerdo con el modelo establecido, se tomaron algunas determinaciones que posteriormente hubieron de ser modificadas a tenor de los resultados. La prueba definitiva se elaboró posteriormente teniendo en cuenta los resultados obtenidos en dicho estudio previo. El proceso completo es el siguiente:

1) Análisis y reflexión teórica sobre el contenido de la prueba piloto;
2) Determinación de las series que podían constituir el contenido de la prueba piloto;
3) Elección del formato y la presentación a los alumnos, teniendo en cuenta los resultados de las pruebas ya realizadas;
4) Análisis de los resultados obtenidos con la prueba piloto;
5) Delimitación del contenido y el formato de la prueba definitiva;
6) Selección de la muestra;
7) Realización de las pruebas por los alumnos seleccionados;
8) Análisis de resultados.

5.4.- Estudio piloto

5.4.1.- Diseño

Como hemos indicado anteriormente, la finalidad del estudio piloto es doble: explorar el comportamiento y las posibilidades de los alumnos de los cursos primero, segundo y tercero de Educación Primaria ante la realización de una prueba con tareas de continuar series, ajustada al estudio teórico realizado previamente, y determinar el contenido adecuado a sus conocimientos y habilidades inductivas.

El contenido de la prueba piloto está formado por series incompletas de números naturales pertenecientes a los estados 3, 4, 5, 6 y 7 del modelo teórico. Así, teniendo en cuenta las variantes posibles, resultan cuatro pruebas distintas que se exponen en la tabla de la figura 5.1.

	1	2	3	4
a	1, 2, 1, 2, ... 4,3,2,4,3,2,...	7, 4, 7, 4,... 7,8,9,7,8,9,...	1,2,3,1,2,3,... 8,7,6,8,7,6,...	4,2,5,4,2,5,...
b	1,12, 122,...	5, 35, 335,...	32,325,3255,...	51,751,7751,... 12,102.1002,...
c	17,27,37,47,... 11,22,33,44,...	90,80,70,60,... 20,31,42,53,...	10,20,30,40,... 10,21,32,43,...	87,77,67,57,...
d	12,10,8,6,...	37,39,41,43,... 25,28,31,34,...	14,16,18,20,... 1,4,7,10,...	3,5,7,9,... 67,65,63,62,...
e	3,7,11,15,... 32,27,22,17,...	68,59,50,41,...	32,27,22,17,...	5,13,21,29,...

Figura 5.1.Distribución por estados de las tareas propuestas en la prueba piloto.

Las columnas representan las series que integran cada una de las cuatro pruebas y las filas los distintos estados a los que pertenecen las series, es decir:

a: Series del estado 3 o Infralógico-Simbólico (N01)
b: Series del estado 4 o Simbólico-Sintáctico (N02)
c: Series del estado 5 o Representacional (N03)
d: Series del estado 6 o Sintáctico-Numerativo (N04)

e: Series del estado 7 o Aritmético-Aditivo (N1 y N2)

donde N01 a N04 representan los cuatro subniveles en que se divide el nivel N0 de la escala de Mokken y N1 y N2 se refieren a los niveles correspondientes de la mencionada escala.

Como se observa en la tabla, el contenido de las pruebas es diferente en cada caso, ya que el interés es llegar a detectar las más adecuadas para estos niveles así como comprobar el ajuste de los escolares al orden de los estados teóricos del modelo. Téngase en cuenta que dicho modelo se ha establecido con la intención de obtener una escala acumulativa que represente un conjunto ordenado de competencias que pongan de manifiesto la evolución real de la parte del razonamiento inductivo estudiada. Así, por ejemplo, los sujetos que realicen correctamente alguna tarea del apartado d, deben haber realizado correctamente las tareas correspondiente de los apartados anteriores, es decir, las tareas a, b y c.

En cuanto al diseño y presentación de la prueba piloto se consideró oportuno, a efectos de explicación del mecanismo de la prueba, anteponer a las series específicas una seriación incompleta, consistente en una alternancia simple del tipo "circulo-triángulo", y una serie acumulativa, también incompleta, de palotes verticales siguiendo la secuencia básica de cantidades naturales. La intención de estas dos primeras tareas es clara: si un niño contesta adecuadamente parece lógico pensar que ha comprendido lo que tiene que hacer y, por tanto, que es capaz de realizar la prueba y que las respuestas a las demás tareas reflejan realmente lo que se pretende medir con ellas.

De las cuatro pruebas que se utilizaron incluimos la segunda de ellas en la figura 5.2; las cuatro pruebas completas, tal y como se le presentaron a los alumnos, figuran en el Anexo 5.1.

Las pruebas se pasaron a un curso de primero, a un curso de segundo y a un curso de tercero de Educación Primaria del colegio privado Cerrado de Calderón de Málaga capital. La muestra fue intencional y estaba formada por 78 alumnos en total. Al pasar las pruebas cada curso de dividió en cuatro partes de acuerdo con las cuatro pruebas que debían realizar, de modo que cada alumno realizó la prueba que le correspondió por azar.

A los sujetos se les presentó la prueba y se les indicó que se fijaran en los recuadros y que completasen las casillas en blanco. Hemos utilizado el término "completar" en vez de la frase "continua la serie" por considerar que es una instrucción más clara y familiar, ya que se emplea a menudo en ciertas tareas usuales en estos niveles educativos.

NOMBRE..

CURSO.................... EDAD............

COMPLETA

○	△	○	△	○	△		
/	//	///	////	/////			
7	4	7	4	7	4		
7	8	9	7	8	9		
	5	35	335	3335			
	90	80	70	60			
	20	31	42	53			
	37	39	41	43			
	25	28	31	34			
	68	59	50	41			

Figura 5.2.- ejemplo de uno de los cuestionarios de la prueba piloto

5.4.2.- Análisis de resultados

En principio hemos observado que la prueba, en general, es adecuada a las edades y niveles de los sujetos de la muestra, con lo que podemos adelantar que puede ser adecuada para todos los niveles de Educación primaria.

Por otra parte, se ha realizado el recuento de alumnos que han interpretado acertadamente lo que se les pedía, figurando en la tabla 5.1 la distribución del número de alumnos por curso y de los cuestionarios que han sido considerados válidos en cada caso. Del examen de los datos se puede comprobar que hay dificultades en primer curso, es decir, de los 27 alumnos encuestados en este nivel, sólo cuatro se han considerado válidos. No obstante hay que hacer constar que la prueba se aplicó el día 2 de octubre de 1995, fecha en la que diez de los veintisiete alumnos sólo tenían 5 años. Por otra parte, como se puede apreciar en la misma tabla, no existen dificultades en los cursos 2º y 3º.

	Válidos	No válidos
1º	4	23
2º	22	3
3º	26	0

Tabla 5.1. Distribución del número de alumnos por cursos y validez de respuestas.

Las dificultades encontradas en primer curso han sido contrastadas con las indagaciones previas realizadas en los inicios del trabajo, donde alumnos de este mismo nivel fueron entrevistados a finales del curso anterior manifestando un buen nivel de comprensión de lo que se les pedía. Teniendo en cuenta, además, que al inicio de segundo curso se presenta un nivel elevado de comprensión de las tareas, adoptamos la decisión de pasar las pruebas definitivas a mediados del curso escolar, con lo que esperamos que los alumnos de primero comprendan la prueba en un porcentaje mayor que el detectado en este estudio piloto.

Por otra parte, como se ha mencionado, pretendíamos comprobar si las respuestas de los sujetos se ajustaban al proceso secuenciado previsto en el modelo teórico, es decir, si existían o no indicios de acumulatividad en las respuestas según los diferentes estados del modelo. Pasemos a analizar a continuación los resultados obtenidos en relación con esta cuestión.

De acuerdo con la terminología utilizada en la Memoria de Tercer Ciclo y la establecida en el capítulo precedente, estamos trabajando en los niveles siguientes: el nivel N0 de la Escala de Mokken, que se corresponde con los estados 1, 2, 3, 4, 5 y 6 del modelo teórico, y los niveles N1 y N2 de la misma escala, que se corresponden con el estado 7 del modelo. Puesto que las estrategias que se deben aplicar en la resolución de las tareas correspondientes a los estados 1 y 2 no las hemos considerado como inductivas, los estados 1 y 2 no se consideran en nuestro estudio y por tanto dividimos el nivel N0 de la escala de Mokken en los subniveles N01, N02, N03 y N04, que corresponden a los estados 3, 4, 5 y 6. Asimismo, a efectos de simplificación, englobamos el estado 7 completo (adición y sustracción) bajo el epígrafe N1.

En los cuestionarios (sujetos) que han sido considerados válidos, se ha comprobado si las respuestas se ajustan a la acumulatividad o escalabilidad establecida en el modelo teórico. En la tabla 5.2 figuran, por curso y nivel, el número de los que cumplen dicha condición, incluyéndose en la fila N.A. los que no se ajustan a la escala, es decir, los que responden correctamente una tarea de la prueba no habiendo respondido correctamente todas las anteriores.

	1°	2°	3°
N01	2	2	3
N02		2	0
N03	1	3	3
N04	1	5	5
N1		6	9
N.A.		4	6

Tabla 5.2.Distribución de alumnos según los diferentes estados

Estos resultados proceden de la aplicación de las cuatro pruebas del estudio piloto, lo que ha dado lugar a una mayor dispersión de los datos. A pesar de ello, podemos observar en la tabla que, globalmente, hay indicios claros de una cierta escalabilidad y de una evidente transición de los niveles inferiores a los superiores al pasar de unos cursos a los siguientes.

5.4.3.- Conclusiones y consecuencias para el estudio definitivo

Los resultados confirman las previsiones y se logran los objetivos pretendidos. Del estudio se obtienen las siguientes conclusiones:

a) El diseño de la prueba es adecuado para los propósitos de la investigación;

b) La prueba definitiva debe tener un formato único, con lo que se conseguirá homogeneizar los resultados en cuanto a esta característica;

c) Hay indicios suficientes de escalabilidad según los distintos estados y niveles;

d) Teniendo en cuenta que las etapas propiamente numéricas se inician en el estado 5 y habiendo constatado que las dos primeras tareas sirven de entrenamiento y orientación en un sentido que no es el del resto de las tareas de la prueba, pudiendo inducir a confusión y enmascarando la verdadera situación de las competencias y capacidades de los sujetos, decidimos la conveniencia de comenzar la prueba definitiva en dicho estado 5 y de no anteponer a las tareas propiamente numéricas ningún tipo de seriación por alternancia;

e) Para determinar los ítems de la prueba definitiva, correspondientes a los estados 5 y 6, se tendrán en cuenta las tareas que mejor se han ajustado a la escalabilidad en las cuatro pruebas realizadas.

5.5.- Estudio definitivo. Análisis y definición de las variables

Para la construcción de la prueba definitiva se han tenido en cuenta las conclusiones del estudio piloto y se ha efectuado una revisión detallada de las variables y factores que inciden en los aspectos que se quieren medir. En lo que sigue se exponen los resultados de dicha revisión, de los que se concluye la elección de las tareas más adecuadas y la elaboración del instrumento definitivo.

5.5.1.-Variables fijadas y controladas

Completando las conclusiones del capítulo II de la Memoria de Tercer Ciclo (Ortiz, 1993) al que nos remitimos, consideramos las siguientes variables controladas:

a) Tipo de serie (restringidos a los que corresponden a los estados 5, 6, 7 y 8);

b) Tipo de número (naturales);

c) Tamaño de los números (el menor posible procurando no superar las tres cifras). Como veremos, solo se superan las cuatro cifras en una serie, aunque el niño razona con números inferiores a partir de la información de los cuatro términos;

d) En las series multiplicativas y partitivas se fija la razón;

e) Tipo de tarea (continuar series de las que se dan los cuatro primeros términos y se piden los dos siguientes);

f) Tipo de relación implícita en cada tarea (se toman las más elementales en cada caso);

g) Cuestionario (único);

h) La dualidad creciente / decreciente de las series se controla incluyendo una de cada tipo en las tareas pertinentes.

5.5.2.- Variables independientes

Las variables independientes que intervienen de manera efectiva en el estudio son de dos tipos: variables de tarea (tipo de serie y tipo de cálculo) y variables de contexto (tipo de colegio, curso y edad). Pasamos a describir a continuación cada una de ellas.

a) de tarea

X: Tipo de serie

Por cada nivel hemos considerado dos series, por lo que la prueba escrita consta de doce series en total. Esto nos proporciona doce modalidades para la variable cualitativa X, que hemos designado por X1, X2, X3, X4, X5, X6, X7, X8, X9, X10, X11 y X12. Estas modalidades se agrupan de acuerdo con los estados de la siguiente forma:

Estado 5 o representacional
- X1: Creciente
- X2: Decreciente

Estado 6 o sintáctico-numerativo
- X3: Creciente
- X4: Decreciente

Estado 7
- Aditivo:
- X5: Diferencia menor que diez
- X6: Diferencia mayor que diez
- Sustractivo:
- X7: Diferencia menor que diez

X8: Diferencia mayor que diez
Estado 8
Multiplicativo:
X9: Razón tres
X10: Razón cuatro
Partitivo
X11: Razón dos
X12: Razón tres

Por otra parte, puesto que pretendemos ampliar inferiormente la escala de Mokken, hemos situado las cuatro tareas correspondientes en las modalidades X5, X7, X9 y X12, atendiendo a los niveles del modelo teórico establecido.

Y: Tipo de cálculo

Correlativamente a las ocho series correspondientes a los estados aritméticos (desde la X5 hasta la X12) vamos a considerar los algoritmos elementales correspondientes a los cálculos implicados en la realización de cada una de ellas (cálculos que determinan, en cada caso, la regularidad de la serie), obteniendo en total ocho tareas que constituyen otras tantas modalidades para la variable cualitativa Y: Y1, Y2, Y3, Y4, Y5, Y6, Y7 e Y8. Estas modalidades se agrupan de acuerdo con los estados de la siguiente forma:

Estado 7
Aditivo
Y1: Sumar doce más seis
Y2: Sumar treinta y seis más doce
Sustractivo
Y3: Restar veinticuatro y dieciséis
Y4: Restar cincuenta y cuatro y cuarenta y uno

Estado 8
Multiplicativo
Y5: Multiplicar tres por seis
Y6: Multiplicar doce por cuatro
Partitivo
Y7: Dividir ochenta y uno entre tres
Y8: Dividir treinta y dos entre dos

b) <u>de contexto</u>

Tendremos en cuenta las siguientes variables:

b1) curso. Sus modalidades representan los diferentes niveles escolares de Educación Primaria y se encuentran en estrecha relación con determinadas características del currículum y con la instrucción recibida;

b2) tipo de colegio. Dado que las características del medio sociocultural pueden influir sobre el rendimiento de los alumnos así como sobre el tipo de instrucción recibida, consideramos las tres modalidades siguientes para esta variable: Público-Urbano, Público-Rural y Privado-Urbano. El motivo de esta elección, que supone añadir una cierta representatividad al carácter intencional básico de la muestra, radica en el mero interés adicional por obtener unos datos que reflejen, lo más fielmente posible, el comportamiento medio real de la población de escolares de Educación Primaria de Málaga y provincia. Consideramos que este criterio añadido viene a contribuir positivamente a la investigación.

b3) edad. De acuerdo con nuestras hipótesis, la edad es un factor importante en la investigación. Pero, se trata de una variable que en teoría debe evolucionar conjuntamente con la variable curso, por lo que puede resultar difícil conocer con seguridad el efecto de cada una de ellas por separado. No obstante, podemos asegurar que esta distinción es pertinente y que será de suma utilidad en el estudio cualitativo que se desarrolla en el capítulo 6, puesto que, como veremos, se producen resultados que se alejan de la supuesta concomitancia mencionada.

5.5.3.- Variables dependientes

Utilizaremos las siguientes variables como medios para analizar el comportamiento de los sujetos ante las tareas estudiadas:

a) Respuesta en series

Variable discreta con dos valores posibles para cada tarea: 1, si la respuesta es correcta; 0, si la respuesta es incorrecta. Diremos que se ha respondido correctamente a una tarea si se rellenan las dos casillas en blanco de acuerdo con el criterio asignado a la serie correspondiente. En los demás casos la respuesta se considera incorrecta.

b) Respuesta en cálculos

Variable discreta con dos valores posibles para cada tarea: correcto (1), incorrecto (0).

c) Nivel alcanzado en la escala de Mokken

Variable discreta que indica la puntuación acumulada en la parte de la prueba correspondiente a las tareas X5, X7, X9 y X12. Los valores que puede tomar esta variable son los siguientes: 0, 1, 2, 3, 4 y 5. El valor 5 indica ausencia de ajuste a la escala, lo que se produce cuando se responde correctamente a una tarea existiendo al menos una respuesta incorrecta en las tareas anteriores. El valor 0 corresponde a los alumnos que no resuelven adecuadamente ninguna tarea de la escala. Los valores 1, 2, 3 y 4 representan los diferentes niveles alcanzados por los alumnos que se ajustan a la escala.

5.5.4.- Variables derivadas

a) Rendimiento por subestados (Z)

Como ya se ha mencionado, la parte del modelo en estudio consta de cuatro estados que se convierten en seis subestados al separar la adición de la sustracción y la multiplicación de la división. Estos subestados incluyen, cada uno de ellos, dos modalidades consecutivas de la variable X y se define el rendimiento alcanzado mediante la suma de las puntuaciones obtenidas en las tareas correspondientes. Tenemos por tanto las seis variables discretas siguientes: Z1= X1 + X2, Z2= X3 + X4, Z3 = X5 + X6, Z4= X7 + X8, Z5= X9 + X10 y Z6= X11 + X12, que pueden presentar los valores: 0, 1 y 2.

b) Rendimiento por bloques (T)

Del mismo modo, las tareas propuestas se agrupan en tres bloques: representacional, aditivo y multiplicativo, constituidos, cada uno de ellos, por las tareas correspondientes a dos subestados consecutivos. Para evaluar el rendimiento en cada bloque se definen las variables: T1= Z1+Z2, T2= Z3+Z4 y T3= Z5+Z6, cada una de las cuales puede tomar los valores: 0, 1, 2, 3 y 4.

c) Rendimiento en cálculo (M)

Para evaluar el rendimiento en cálculo se define la variable acumulada M = Y1+Y2+Y3+Y4+Y5+Y6+Y7+Y8, donde por Yj queremos representar la puntuación de la respuesta en el cálculo j. La variable M puede tomar los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

d) Rendimiento en series aritméticas (L)

Definimos la variable acumulada L = T2 + T3, con los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8.

5.6.- Instrumentos de recogida de datos

5.6.1.- Prueba de continuar series

Teniendo en cuenta todo lo expuesto hasta ahora y considerando que una finalidad del trabajo es la obtención de una escala acumulativa, que, por construcción teórica, debe constar de seis niveles, hemos propuesto dos tareas por nivel, de acuerdo con las variables definidas anteriormente así como con las conclusiones establecidas en el estudio piloto (apartado 5.4.3). La escala, por tanto, deberá estar formada por seis tareas, una por nivel, de las 12 de que consta la prueba. La figura 5.3 ilustra el modelo definitivo de esta prueba, en la que, además de las tareas correspondientes, se solicita información sobre el curso y la edad del encuestado.

5.6.2.- Prueba de cálculos

En la segunda página de la prueba se pide a los encuestados que realicen, uno por uno, los ocho cálculos que corresponden a las regularidades de las series aritméticas (X5 a la X12. Variable Y.). La presentación de estos cálculos, en dos columnas y con los espacios suficientes entre ellos, se ajusta al formato habitual de las “cuentas” escolares tradicionales.

NOMBRE......................... ....

CURSO............. EDAD........ ....

COMPLETA

17	27	37	47		
62	52	42	32		
3	5	7	9		
12	10	8	6		
0	6	12	18		
24	36	48	60		
40	32	24	16		
80	67	54	41		
2	6	18	54		
3	12	48	192		
64	32	16	8		
243	81	27	9		

Figura 5.3.- Prueba definitiva de continuar series

5.6.3.- Encuesta a los profesores

Un factor importante a tener en cuenta para la interpretación de los resultados del estudio, es la valoración u opinión que tienen los profesores sobre las competencias básicas de sus alumnos en aritmética. Con ello dispondremos de una información más amplia sobre las condiciones en las que se realiza el estudio y podremos contrastar, con más elementos de juicio, el verdadero alcance de los conocimientos, capacidades y destrezas de los escolares. Téngase en cuenta que el trabajo se circunscribe a una muestra determinada de alumnos y, por tanto, los resultados pueden estar mediatizados por las circunstancias concretas en las que se ha desarrollado. El conocimiento de tales circunstancias debe favorecer, necesariamente, una interpretación cualitativa más acertada de los resultados.

5.6.3.1.- Objetivos

Nos proponemos los siguientes objetivos:

a) Obtener una información directa del profesor acerca de las competencias básicas de sus alumnos para la realización de las tareas de la prueba escrita;

b) Contrastar los resultados obtenidos por los alumnos en la prueba escrita con la correspondiente valoración de sus profesores;

c) Establecer con mayor precisión las relaciones que pueden existir entre las competencias usuales, a veces aparentes, en aritmética y su utilización efectiva en las tareas de razonamiento inductivo numérico.

5.6.3.2.- Construcción del cuestionario

La información necesaria para alcanzar los objetivos pretendidos se debe circunscribir a las herramientas numéricas y aritméticas elementales que sean importantes para la realización de la prueba escrita. Tal y como figura en el cuestionario, que se incluye completo a continuación, dichos aspectos se han materializado en veinte competencias básicas y dos preguntas complementarias (metodología utilizada en clase y actividades relacionadas con series numéricas), cuya distribución es la siguiente:

Estado 5: de la cuestión 1 a la 4 y la cuestión 8
Estado 6: de la cuestión 5 a la 7
Estado 7: de la cuestión 9 a la 15
Estado 8: de la cuestión 16 a la 20

Por otra parte, el orden de las preguntas es el que se propone en el diseño curricular para Educación Primaria, es decir, escritura y lectura numéricas, orden numérico y operaciones. Como se puede apreciar, las cuestiones atienden a una enseñanza aritmetísta del número natural, lo que supone considerar el número como signo y su representación como un conjunto de reglas que hacen posible interpretar los algoritmos de las operaciones. El profesor debe valorar, en una escala de 1 a 10, el porcentaje de alumnos que él considera que superan las competencias en cuestión.

COLEGIO______________________________________ CURSO_________

VALORAR DE 0 A 10 EL PORCENTAJE DE ALUMNOS DE SU CLASE QUE DOMINAN LA COMPETENCIA ARITMÉTICA INDICADA

1) Escritura y lectura de números menores que 100	
2) Escritura y lectura de números menores que 1000	
3) Ordenar números menores que 100, de menor a mayor	
4) Ordenar números menores que 100, de mayor a menor	
5) Contar en orden creciente y decreciente con números menores que 100	
6)Contar de dos en dos, con números menores que 100: En orden creciente	
En orden decreciente	
7) Contar de tres en tres, con números menores que 100: En orden creciente	
En orden decreciente	
8) Agrupar unidades en decenas y centenas	
9) Realizar sumas con números de una cifra con resultado inferior a 10	
10) Realizar sumas con números de una cifra con resultado superior a 10	
11) Realizar sumas con números de dos cifras, sin llevar	
12) Realizar sumas con números de dos cifras llevando	
13) Realizar restas con números de una cifra	
14) Realizar restas con números de dos cifras, sin llevar	
15) Realizar restas con números de dos cifras, llevando	
16) Dominar las tablas de multiplicar del 2, 3, 4 y 5	
17) Realizar multiplicaciones con números de una cifra	
18) Realizar multiplicaciones de un número de dos cifras por otro de una: Llevando	
Sin llevar	
19) Realizar divisiones exactas (Resto cero) con números de una cifra	
20) Realizar divisiones exactas con números de dos cifras por otro de una	

CONTESTAR SI O NO

a) Se realizan en clase de matemáticas con cierta frecuencia actividades manipulativas, juegos, etc.

b) Se realizan en clase de matemáticas con cierta frecuencia tareas con series numéricas

GRACIAS POR SU COLABORACION

5.7.- Aplicación de las pruebas y cuestionarios

Previamente a la realización de las pruebas se explica a los alumnos, de la forma más simple posible, lo que se pretende con el estudio y se solicita su atención y colaboración. A continuación se les indica que van a realizar una prueba escrita que es voluntaria ("el que no quiera no tiene porque hacerla") y cuyos resultados, que son secretos, no cuentan para la calificación de la asignatura ("no tiene nota"). Por último, se les anima a que respondan lo mejor posible, insistiendo en la importancia de su colaboración y en la necesidad de que no se copien. A continuación se les entrega la prueba a todos los alumnos del curso y se les dice que la hagan despacio, sin límite de tiempo (a diferencia del estudio exploratorio), y que observen cada fila de números y completen las casillas en blanco. En concreto se les da la siguiente instrucción:

"Debes ver como van los números y poner los que faltan. Si no sabes completar alguna fila de números puedes pasar a la siguiente"

Mientras que los alumnos realizan la prueba escrita, la profesora o profesor del curso debe responder a la encuesta preparada para este fin.

5.8.- Población y muestra

De acuerdo con los propósitos de la investigación tomamos como referencia la población de escolares de todos los cursos correspondientes a la Educación Primaria de Málaga capital y provincia. Por razones de tamaño y teniendo en cuenta los propósitos limitados de la investigación, decidimos elegir, mediante un muestreo de conjuntos, una muestra intencional que tenga, además, una cierta representatividad con respecto a la población mencionada. Todo ello se justifica en base a los siguientes motivos:

a) Puede haber diferencias significativas en los resultados según el medio sociocultural, urbano o rural, y según el tipo de enseñanza, pública o privada;

b) Para el estudio cualitativo nos interesa confrontar los resultados de alumnos de distintos cursos y que hayan seguido procesos de enseñanza tanto iguales como distintos. Esta semejanza o diferencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje no es determinante para nuestro trabajo, pero puede ser un factor a tener en cuenta para la interpretación de los resultados;

c) Pretendemos realizar un estudio transversal;

d) El estudio no tiene la intención de generalizar resultados.

En definitiva, se eligen tres Centros Escolares con las siguientes características:

- dos Centros urbanos, uno público y el otro privado (a los que asignaremos los dígitos 1 y 3, respectivamente);
- un Centro público rural (al que asignaremos el dígito 2).

Dentro de cada uno de los Centros mencionados, se eligen al azar los cursos o grupos completos, uno por nivel, a los que se van a aplicar los instrumentos de recogida de datos y de los que, posteriormente, se elegirá una muestra más reducida de sujetos para la realización del estudio interpretativo que se expone en el capítulo 6. Como resultado del procedimiento descrito realizan las pruebas un total de 400 alumnos de los tres centros mencionados y de todos los niveles de Educación Primaria. En el apartado 5.10 se amplia esta información con un análisis de la distribución de la muestra utilizada.

5.9.- Análisis de datos y tipos de estudios

Para el análisis de datos se utilizan instrumentos y técnicas de Estadística Descriptiva así como contrastes y medidas particulares para cuestiones específicas. Dicho análisis se realiza de acuerdo con los fines previstos y según los cinco apartados siguientes:

A: Análisis de la distribución de la muestra. Además de describir la composición y la naturaleza de la muestra, nos interesa comprobar si la distribución de alumnos es equitativa en cuanto a cursos, edades y tipos de colegios.

B: Análisis de la distribución de respuestas según la escala de Mokken. Se realiza un estudio descriptivo de la distribución de alumnos según los distintos niveles, cursos y edades, con el fin de comprobar la escalabilidad y confirmar los resultados los obtenidos en el estudio exploratorio.

C: Estudio descriptivo de respuestas, en el que nos interesan especialmente las que corresponden a las dos pruebas realizadas por los alumnos sobre series y realización de cálculos. En este apartado se realizan los siguientes estudios:

> C1: Prueba de continuar series. Se analizan los siguientes aspectos:

-Estados por edades y por cursos
-Bloques por edades y por cursos
-Puntuación total por edades y cursos

C2: Prueba de cálculo. Se analizan los siguientes aspectos:
-Frecuencias de respuestas a cada tarea por cursos y edades
-Distribución de frecuencias por niveles
-Puntuación total por edades y cursos

C3: Cuestionario profesores. Se estudian y describen las respuestas y se comparan con los resultados de los estudios anteriores.

D: Análisis comparativo. En este apartado se comparan los resultados de las pruebas en función de las diferentes variables que intervienen en el estudio y se analiza la evolución de respuestas a las distintas tareas por edades y cursos. En concreto se realizan los siguientes estudios:

D1: Prueba de continuar series:
- Análisis de dependencia entre pares de variables mediante un contraste chi-cuadrado;
- Análisis de tareas:
    - Distribución de respuestas;
    - Estudio de la acumulatividad y determinación de una escala acumulativa;
    - Dependencia entre variables: Respuesta-edad y respuesta-curso.

D2: Prueba de continuar series y cálculos:
Estudio comparativo de los resultados obtenidos en la prueba de cálculo y en las tareas de continuar las series correspondientes (entre las variables M y L= T2 + T3).

E: Estudio de la fiabilidad de la prueba de continuar series. Se utiliza la técnica de las dos mitades, estudiando la correlación existente entre los resultados obtenidos en las tareas pares y las impares.

Para el tratamiento informático de los datos, hemos copiado los resultados en una hoja de cálculo, utilizando el programa Excel 2.2 de Macintosh. Los datos están recogidos según las distintas columnas: A (tipo de colegio), B (curso), C (edad), D (escala de Mokken), las doce columnas siguientes (desde la E hasta la P) se corresponden con los doce valores de la variable de tarea tipo de serie y las ocho restantes con los valores de la variable tipo de cálculo (anexo 5.2)

En los apartados que siguen se desarrollan con detalle cada uno de los estudios indicados, remitiéndonos a los mismos para una información completa sobre sus aspectos particulares.

5.10.- Distribución de la muestra

Los datos completos sobre la distribución del número de alumnos por colegios, edades y cursos figuran en el anexo 5.3. En la figura 5.4 se representa la distribución del número de alumnos por colegio (público-urbano: 1; público-rural: 2 y privado-urbano: 3), cuyas frecuencias absolutas son, respectivamente, 133, 95 y 172, lo que hace un total de 400 alumnos. El centro con mayor representación es el colegio Privado-urbano, debido a que sus grupos son más numerosos. Por el contrario, en el colegio Público-rural hay un menor número de alumnos por clase, lo que se refleja en el total de la submuestra correspondiente.

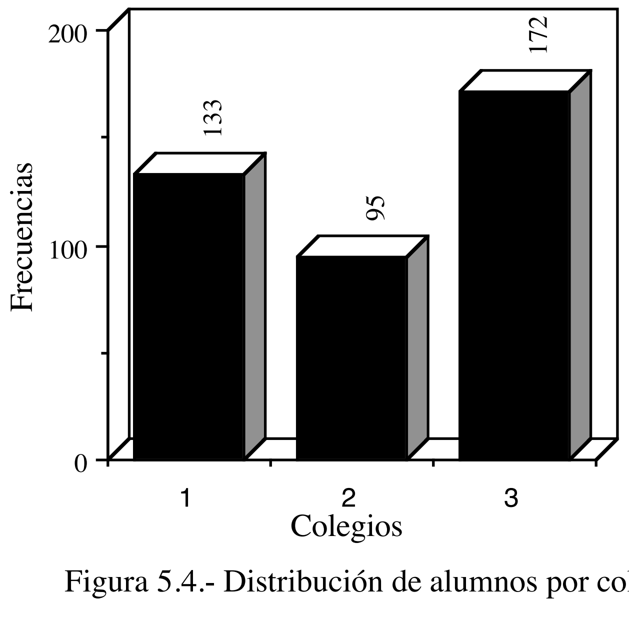

Figura 5.4.- Distribución de alumnos por colegios

En cuanto a la distribución de alumnos por curso, que se representa mediante el histograma de la figura 5.5, se observa una cierta homogeneización de las frecuencias absolutas correspondientes a cada curso. La mayor representación corresponde a quinto curso, con un total de 77 alumnos; la menor representación corresponde a primero, con un total de 61 alumnos.

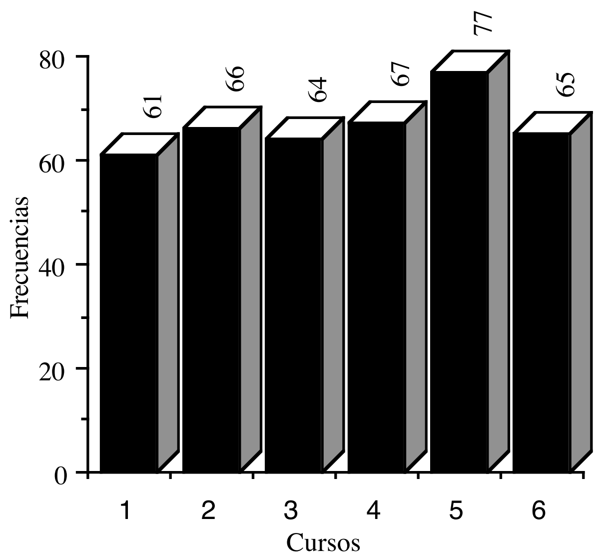

Figura 5.5.- Distribución de alumnos por curso

En lo que se refiere a la variable edad, medida en años, se han computado edades que van desde los seis a los doce años. En la figura 5.6 se presenta la distribución de frecuencias absolutas de las distintas edades que aparecen en cada uno de los seis cursos. En dicho gráfico se observa que en un mismo curso se dan edades diferentes (el gráfico no representa algunos casos aislados) y que las edades se solapan en los pares de cursos consecutivos, por lo que es necesario considerar en lo sucesivo dos coordenadas para caracterizar inequívocamente a cada escolar de la muestra: la edad y el curso.

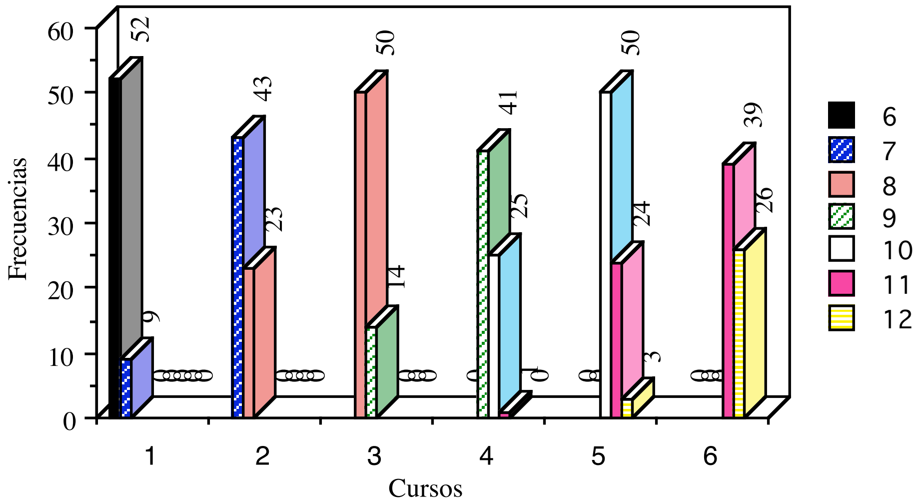

Figura 5.6.- Distribución de alumnos por cursos y edades

Por otra parte se ha constatado que un alto porcentaje de los sujetos de doce años eran repetidores y presentaban problemas de retraso escolar. Este problema no ha sido tan agudo en el resto de los cursos, aunque hay que decir que en todos ellos hemos encontrado algún alumno en estas circunstancias. A pesar de ello, por fidelidad a la realidad, se ha decidido no excluir del estudio ninguna de las respuestas de este tipo.

5.11.- Distribución de respuestas según la escala de Mokken

Al incluir las cuatro series de la escala de Mokken en la prueba de continuar series, es posible comparar los resultados, en lo que se refiere a esta parte de la prueba, con los que se obtuvieron en el estudio exploratorio. Si los resultados son similares se confirmará la bondad y escalabilidad de esta parte del modelo así como la validez de la escala inicial, lo que a su vez justifica la necesidad de la ampliación de los niveles inferiores. Todo ello con independencia de los estudios detallados de las respuestas a las pruebas y del análisis de la escala completa, que se desarrollan en sucesivos apartados del presente capítulo.

Los resultados obtenidos por edad, cuyos datos completos se incluyen en el Anexo 5.4, se distribuyen de acuerdo con el histograma de la figura 5.7 y con el diagrama de frecuencias relativas de la figura 5.8. Igualmente, como se observa en la tabla de contingencia del mencionado anexo, se obtiene un valor de 278,7 para el estadístico chi-cuadrado con 30 grados de libertad y una probabilidad $p<0,0001$. A efectos de interpretación de los resultados, recordamos que el nivel 0 se asigna a los alumnos que no contestan ninguna tarea de la escala (N0), los dígitos 1, 2, 3 y 4 corresponden a los cuatro niveles de la escala de Mokken y el dígito 5 se refiere a los casos que no se adaptan a la escalabilidad de las tareas.

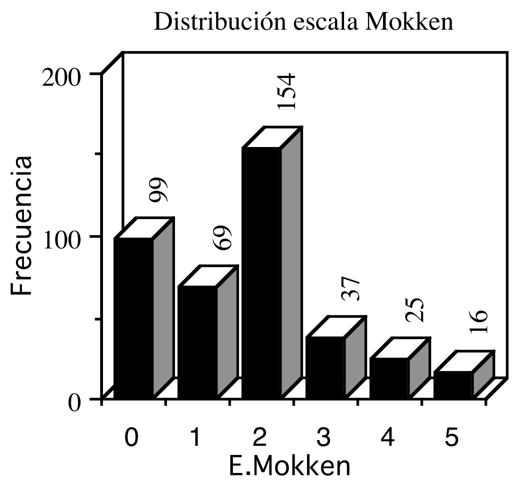

Figura 5.7. Distribución de alumnos según la escala de Mokken

De acuerdo con estos resultados nos encontramos con solo 16 alumnos que no se ajustan a la escala de Mokken lo que corresponde a un 4% de la muestra total o lo que es lo mismo: la escalabilidad es satisfecha por el 96% de los alumnos.

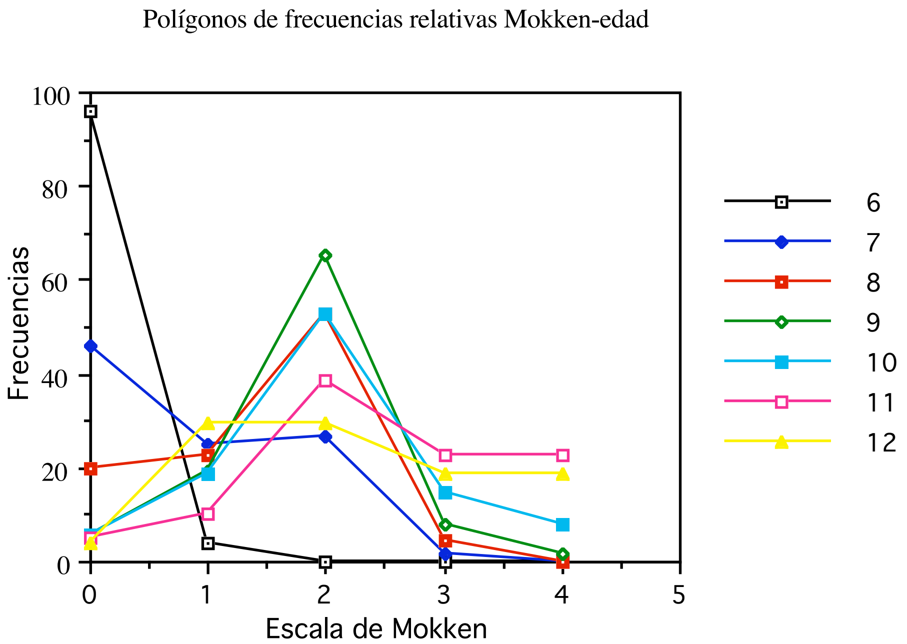

Figura 5.8.-Interacción frecuencias relativas, escala de Mokken y edades.

De los datos incluidos en el mencionado anexo 5.3 y de las figuras anteriores se extraen las siguientes conclusiones:

- domina el nivel N2 con el 38,50% del total, lo que indica un predominio claro del nivel aditivo en Educación Primaria. Este predominio se mantiene incluso en quinto curso, a pesar de producirse ya un descenso en el número de escolares cuyas respuestas corresponden a dicho nivel;

- los 99 alumnos del nivel N0 se distribuyen entre los 6, 7 y 8 años, fundamentalmente;

- Las respuestas de los escolares de 8, 9 y 10 años tienen un máximo notorio en el nivel N2 que supera a la mitad de los alumnos;

- el 96,08% de los escolares de 6 años están en el nivel N0 y el resto, el 3,85%, se encuentran en el nivel N1. Por tanto podemos concluir que los alumnos de 6 años están, en su mayoría, en el nivel N0;

- los alumnos de 7 años se distribuyen en los niveles N0(46,2%), N1(25%) y N2(26,9%). Tan sólo uno de ellos ha alcanzado el nivel N3;

- la distribución de las respuestas de los alumnos de 8 años es la siguiente: N0(20%), N1(22,9%) y N2(52,9%). Por tanto, los resultados anteriores se mantienen en esta edad (no se alcanza, aún, el nivel N3) y se observa un aumento del nivel N2, que se constituye en una especie de barrera que los niños de esta edad no superan (sólo lo consiguen tres alumnos de esta edad;

- tampoco se supera el nivel N2 a los nueve años, cuyas respuestas se distribuyen en dos niveles: N1(18,2%) y N2(61.8%). Vemos, por tanto, un efecto de acumulación en el nivel N2 a medida que se avanza en la edad (desde los 7 hasta los 9 años);

- debemos esperar hasta los 10 años, en los que se produce la distribución: N1(18,9%), N2(52,7%), N3(14,9%) y N4(8,11%), para encontrar una superación significativa del nivel N2 y una expansión hacia los niveles superiores;

- los resultados son similares a los 11 y 12 años, observándose una clara tendencia a la disminución en el nivel N2 y un aumento en los niveles superiores. A los 12 años permanecen aún en el nivel N1 un 29,6% de alumnos de esta edad, debido, posiblemente, a los problemas de escolarización ya mencionados.

Por último se representan, en el gráfico de la figura 5.10, las evoluciones de cada uno de los niveles de la escala según las distintas edades.

Polígonos de frecuencias relativas de la escala de Mokken por edades

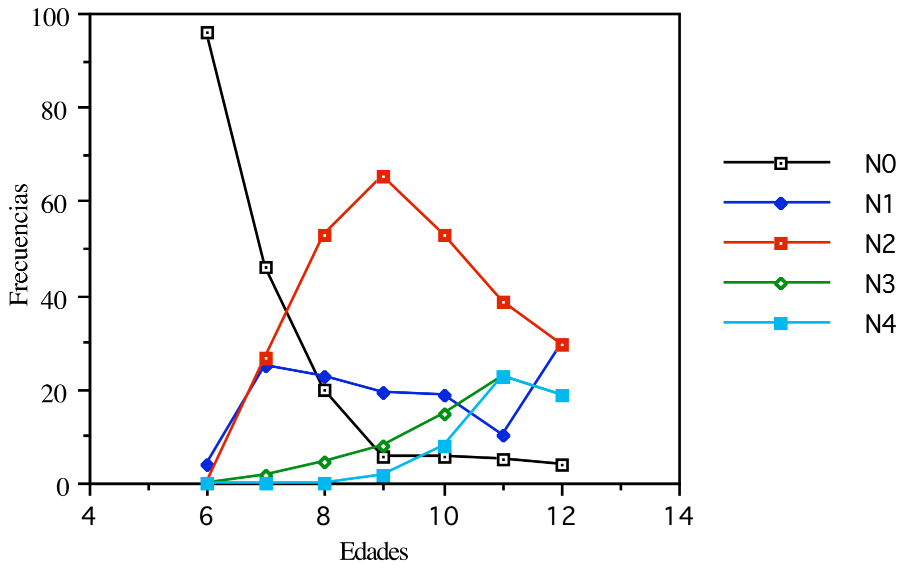

Figura 5.10.- Interacción frecuencias relativas, edades y escala de Mokken

Del análisis de las respuestas a las tareas de la escala de Mokken de los alumnos de la nueva muestra (400 escolares), del que se han expuesto los aspectos fundamentales, se obtienen las dos conclusiones básicas siguientes:

1) Se reproducen las tendencias obtenidas con la anterior muestra de 287 alumnos (Apartado 3.8.2);

2) Las respuestas de 88 alumnos, de un total de 177 con edades inferiores a los nueve años, no entran en la escala, lo que representa el 49,71% del total de la muestra. Este resultado confirma la necesidad de la ampliación de la escala en sus niveles inferiores con tareas adecuadas a estas edades.

5.12.- Estudio descriptivo de los resultados de la prueba de continuar series

Antes de pasar a la ampliación de la escala de Mokken vamos a exponer, en el presente apartado, los aspectos fundamentales del estudio descriptivo realizado a partir de los resultados obtenidos en las distintas tareas de la prueba de continuar series.

Este estudio, cuya finalidad básica es la de obtener una visión global del comportamiento de la muestra ante tareas de razonamiento inductivo numérico, consta de los siguientes apartados: análisis de las respuestas por tareas (variables X), estudio del rendimiento por subestados (variables Z) y por bloques (variables T) y análisis de la puntuación total en la prueba.

5.12.1.- Resultados por tareas

Con las puntuaciones obtenidas en cada uno de los 12 ítems de la prueba, se han construido las tablas de contingencia que figuran en el anexo 5.5 y que corresponden a los resultados de las diferentes tareas según las edades y los cursos. Con dichas tablas se han realizado contrastes de hipótesis mediante el estadístico chi-cuadrado para comprobar, en cada tarea, el grado de dependencia de las respuestas con la edad y el curso. En particular se han contrastado las siguientes hipótesis:

> H0: No existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y las distintas edades
> H1: Existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y las distintas edades
>
> H0: No existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y los distintos cursos
> H1: Existe relación o dependencia entre las respuestas al ítem y los distintos cursos

Los resultados de ambos tipos de contraste se recogen en la tabla 5.3.

	Contraste por edad		Contraste por curso	
	Chi-squ.	Significac.	Chi-squ.	Significac.
X1	72,21	0,0001	69,57	0,0001
X2	93,38	0,0001	98,38	0,0001
X3	132,0	0,0001	131,1	0,0001
X4	112,6	0,0001	111,3	0,0001
X5	186,8	0,0001	195,8	0,0001
X6	131,3	0,0001	134,0	0,0001
X7	115,9	0,0001	117,6	0,0001
X8	89,51	0,0001	97,04	0,0001
X9	66,50	0,0001	82,75	0,0001
X10	83,56	0,0001	105,9	0,0001
X11	76,36	0,0001	109,1	0,0001
X12	55,94	0,0001	78,51	0,0001

Tabla 5.3.- Resumen de los resultados de los contrastes chi-cuadrado por edades y cursos

Como se puede apreciar en los resultados, debemos aceptar, en ambos casos y para todas las tareas, la hipótesis alternativa H1, según la cual existe dependencia entre las respuestas al ítem y las variables edad y curso. Estos resultados difieren de los obtenidos en el estudio exploratorio, en el que sólo había diferencias significativas en las tareas multiplicativas y partitivas y el bloque aditivo era superado, en su conjunto, por todos los alumnos de la muestra, existiendo diferencias importantes con el bloque multiplicativo. Creemos que esto es debido a la ampliación del estudio a niveles inferiores y al mayor rango de edades y cursos que intervienen.

La importancia de este resultado radica en la influencia de las variables edad y curso en el rendimiento, lo que adquiere especial significación cuando pretendemos realizar un estudio de desarrollo. Esta es una de las razones del estudio de la evolución de los resultados por edades y por cursos, haciendo notar las diferencias entre los aspectos propios del desarrollo intelectual y los aspectos propios del desarrollo currícular. Estos resultados no manifiestan por el momento, ninguna diferencia entre cursos y edades.

En los gráficos de la figura 5.11 se puede apreciar la evolución de las respuestas a las tareas por cursos

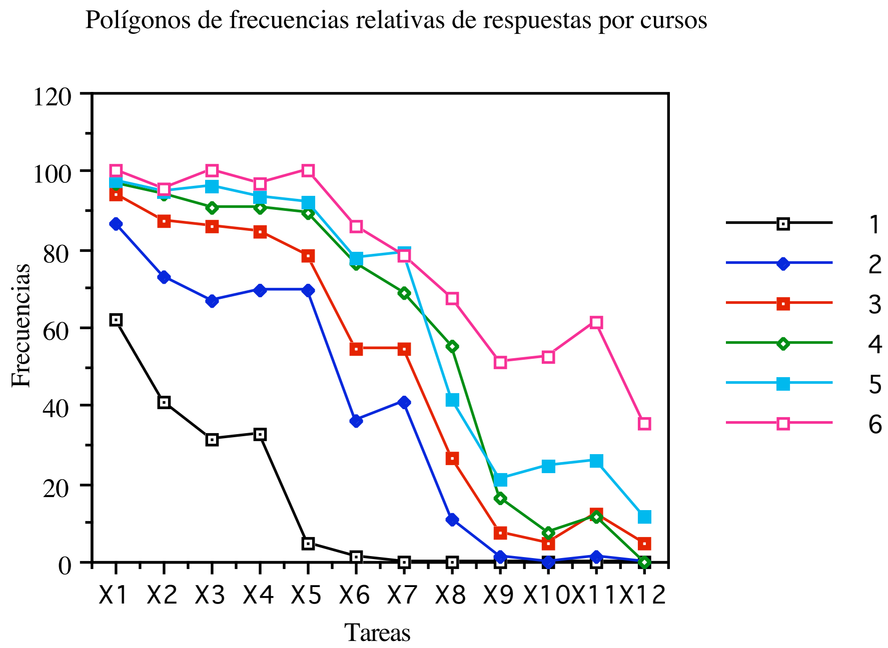

Figura 5.11.- Interacción frecuencias relativas por tareas y cursos

De la interpretación de dichos gráficos podemos destacar lo siguiente:

- En las respuestas por curso se observa un salto significativo de primero a segundo en cuanto al rendimiento y alcance de las tareas realizadas. La linea de segundo está por encima de la de primero y alcanza hasta la tarea X8, mientras que la linea de primero solo alcanza la tarea X5.
- Los índices de respuestas en los demás cursos son altos y similares hasta la tarea X8. En cambio, se produce un salto inverso al anterior, de descenso brusco de los cursos inferiores con respecto a sexto, a partir de la tarea X9. En estas tareas, los cursos inferiores a quinto tienen índices muy bajos, produciéndose un salto de dichos cursos a quinto y un salto mayor de quinto a sexto.
- Se distinguen tres tramos diferenciados: (X1 a X4), (X5 a X8) y (X9 a X12), que se corresponden con los bloques T1 o simbólico-numeratívo, T2 o aritmético aditivo y T3 o aritmético multiplicativo.

5.12.2.- Rendimiento por subestados (variables Z)

Las variables Z1, Z2, Z3, Z4, Z5 y Z6 agrupan los pares de tareas de la prueba de acuerdo con los distintos subestados interpretativos en tareas de continuar series, que son: simbólico-ordinal, contar de n en n (n<4), aritmético aditivo, aritmético sustractivo, aritmético multiplicativo y aritmético partitivo.

Los datos completos del estudio se incluyen en el anexo 5.6 y en la figura 5.12 se representan los polígonos de frecuencias relativas de los rendimientos en todos y cada uno de los subestados por edades. De los datos y gráficos se pueden destacar las siguientes conclusiones:

- En los resultados por tareas se observaba una clara diferencia entre los seis y siete años así como de estos con respecto de las demás edades. En la figura 5.14 se constata que el agrupamiento en subestados diferencia claramente, en el intervalo [Z1, Z2], entre las edades de seis, siete y ocho años y el resto de las edades, que forman un grupo homogéneo.
- A partir de Z2 comienza el descenso de respuestas en todas las edades, desapareciendo el escalón correspondiente a los escolares de 6 años.
- En el intervalo [Z3, Z4] solo aparecen rendimientos positivos para los sujetos con edades superiores a los 6 años, disminuyendo notablemente las diferencias que anteriormente existían entre 7 y 8 años.
- En el intervalo [Z5, Z6] solo aparecen rendimientos positivos correspondientes a los alumnos con edades superiores a 10 años. Se observa un salto entre los 10 y 11 años y no se aprecia salto alguno entre los 11 y los 12 años.
- Las diferencias están más claras entre los cursos superiores con un escalón entre quinto y sexto en el intervalo [Z5, Z6].

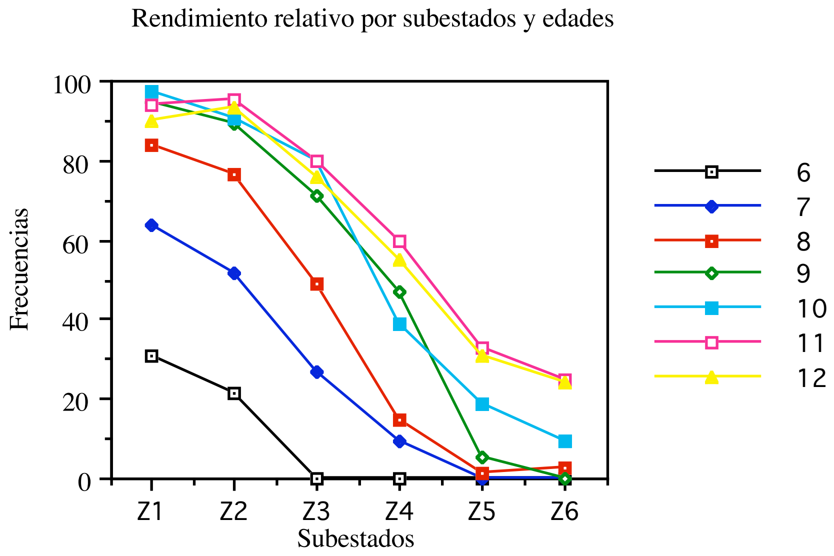

Figura 5.12. Interacción frecuencias relativas, subestados y edades

Si denominamos **alcance** de un grupo de sujetos con respecto a una variable de rendimiento, cuyos valores se encuentran ordenados de menor a mayor, al rango de puntuaciones obtenidas por el 95% de los miembros del grupo, podremos interpretar los resultados del estudio desde un punto de vista acumulativo. En nuestro caso, las puntuaciones se refieren a tareas o grupos de tareas ordenadas en dicho sentido acumulativo, de manera que cada puntuación indica un nivel de dominio en toda esa serie de tareas, por lo que el alcance se puede identificar con el extremo superior del rango mencionado. En definitiva, podemos denominar “alcance inductivo numérico” al mayor rendimiento de entre los obtenidos por el 95% de toda la muestra o de una submuestra específica en las tareas inductivas de la investigación; en otras palabras, el rendimiento de los alumnos más aventajados del grupo.

En la figura 5.16 se representa, tanto por edades (cuadro izquierdo) como por cursos (cuadro derecho), el alcance de los sujetos de la muestra expresado en términos de los subestados a los que llegan, como máximo, respondiendo acertadamente. Como vemos, los distintos alcances en ambos casos son Z2, Z4 y Z6, que coinciden con los subestados terminales de las agrupaciones por bloques, cuyos resultados se describen en el próximo apartado.

ALCANCE POR EDAD ALCANCE POR CURSO

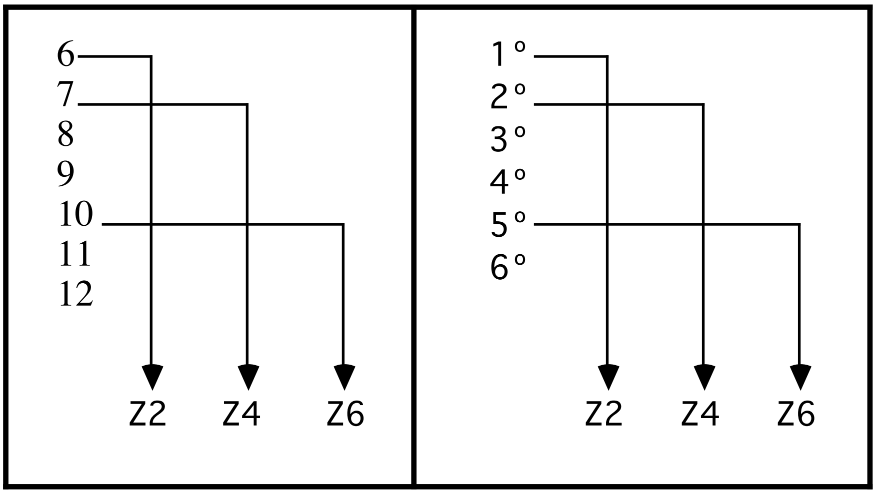

Figura 5.16. Alcance en los distintos subestados según edades y cursos

Como se aprecia en el gráfico de la izquierda, los alumnos de 6 años consiguen llegar al subestado Z2, los alumnos de 7, 8 y 9 años alcanzan el subestado Z4 y los de 10, 11 y 12 años llegan hasta el subestado Z6. En el gráfico por cursos, los alumnos de primero consiguen un alcance Z2, los de segundo tercero y cuarto, un alcance Z4, y los de quinto y sexto, un alcance Z6. Estos resultados se ajustan, a partir de Z4 y de las edades y cursos correspondientes, a los del estudio exploratorio, y están de acuerdo con los tres bloques en que se divide el modelo teórico establecido en el capitulo 4.

5.12.3.- Respuestas por bloques

Las variables T1, T2 y T3 representan el rendimiento o número total de tareas contestadas correctamente en cada uno de los siguientes bloques respectivos: simbólico-numeral, aritmético aditivo y aritmético multiplicativo. Los datos y las tablas de contingencias correspondientes se exponen en el anexo 5.7 y la figura 5.13 representa las distribuciones de respuestas correctas por edades, en cada bloque.

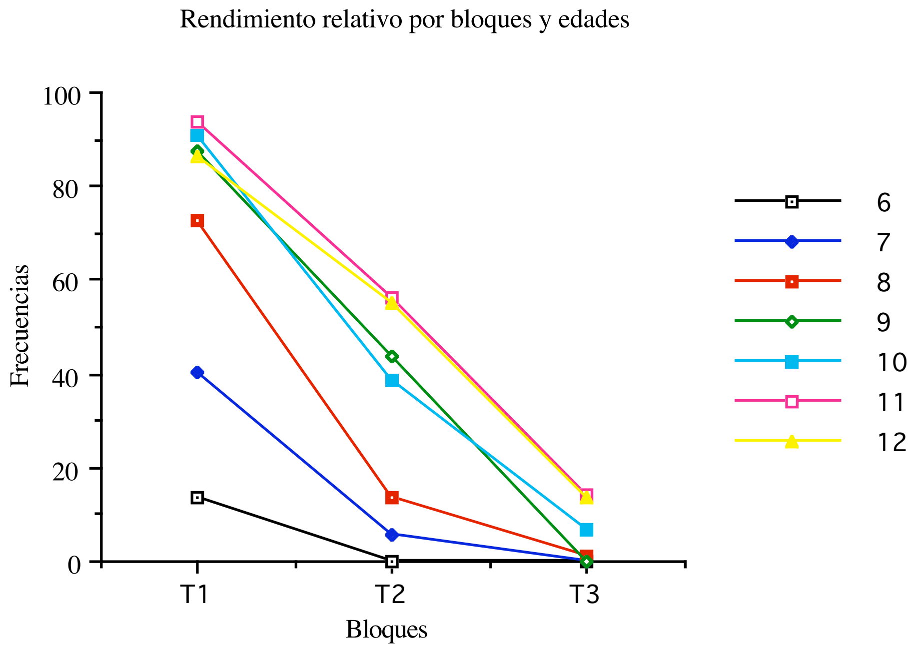

Figura 5.13.- Interacción frecuencias relativas, bloques y edades

De los datos se deduce que hay tres escalones en T3 para las edades superiores a los ocho años, al igual que ocurrió en el estudio exploratorio. Los índices están por debajo de los obtenidos en dicho estudio, pero se conservan las mismas pautas. En el bloque aritmético aditivo (T2), los alumnos de nueve años superan, aunque por muy poco, a los de diez, lo que también ocurre entre los cursos cuarto y quinto, en los que dominan dichas edades.

5.12.4.- Puntuación total en las tareas de continuación de series

En el histograma de la figura 5.14 se representan las frecuencias relativas de las puntuaciones totales por edad obtenidas por los 400 escolares de la muestra. Tal y como se ha comprobado en los apartados anteriores, las puntuaciones más frecuentes son siete y ocho, observándose un aumento paulatino de los porcentajes desde la puntuación dos, que consiguen un total de quince alumnos (3,75% de la muestra), hasta la puntuación ocho, con un total de 64 alumnos (16% de la muestra). A partir de aquí se produce un descenso brusco importante, pasando de los 64 alumnos con ocho puntos a los 27 (6,75%) que han alcanzado nueve puntos.

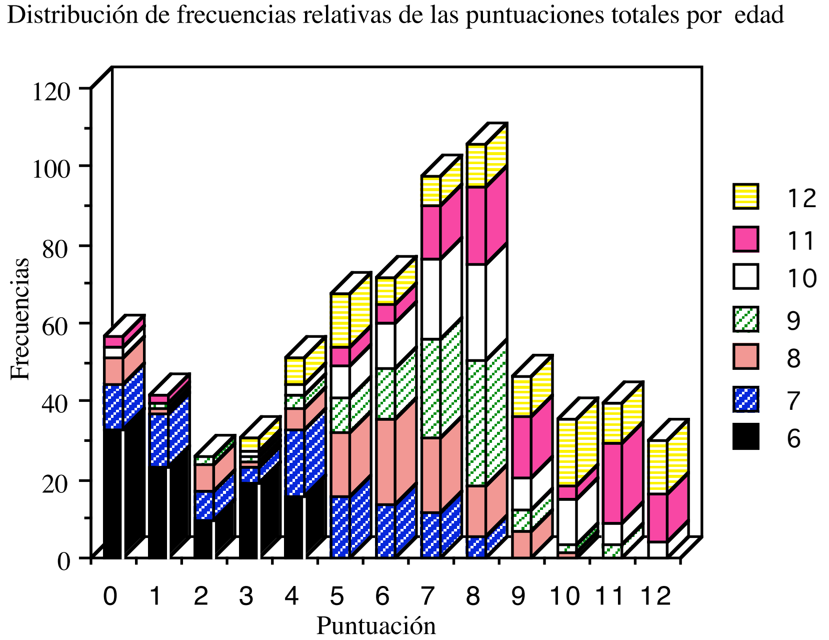

Figura 5.14. Histograma de porcentajes de alumnos por puntuaciones y edades

Por otra parte, podemos observar los tres intervalos diferenciados siguientes: puntuaciones entre 0 y 2 (decreciente), puntuaciones entre 3 y 8 (creciente) y puntuaciones entre 9 y 12 (con pocas variaciones y una gran diferencia respecto del intervalo anterior. Estas tendencias se justifican por la dificultad de las tareas para los alumnos de edades y cursos inferiores así como por el dominio del modelo aditivo en Educación Primaria, que provoca una barrera entre las tareas aditivas y multiplicativas (aumento en el intervalo (3,8) y descenso brusco posterior).

5.13.-Análisis comparativo de resultados en las variables L y M

Como se ha mencionado en apartados anteriores, los alumnos han realizado una prueba con dos partes diferenciadas: una primera parte de tareas de continuar series y una segunda parte con los cálculos aritméticos necesarios para resolverlas. Una de nuestras hipótesis, en concreto la hipótesis H3 (ver apartado 5.2), postula que existe un desfase entre el rendimiento en cálculos y el rendimiento en las tareas de continuar series. En el presente apartado pretendemos comparar ambos rendimientos, para lo que nos disponemos a analizar los resultados de las variables L y M, definidas, como se recordará, de la siguiente manera:

$$L = X5 + X6 + X7 + X8 + X9 + X10 + X11 + X12$$
$$M = Y1 + Y2 + Y3 + Y4 + Y5 + Y6 + Y7 + Y8$$

Debido a la importancia del currículum para interpretar los valores de la variable M, ya que el dominio de los algoritmos de las operaciones son el resultado de un aprendizaje, en este apartado interpretaremos los datos y resultados según los diferentes cursos a diferencia de lo que hemos hecho hasta ahora, con los resultados de las tareas de continuación de series que se ha realizado fundamentalmente por edades.

Las tablas de contingencia de ambas variables por edades y cursos figuran en el anexo 5.8. La evolución de los datos por cursos, para ambas variables, se representa en los gráficos de las figuras 5.15 y 5.16

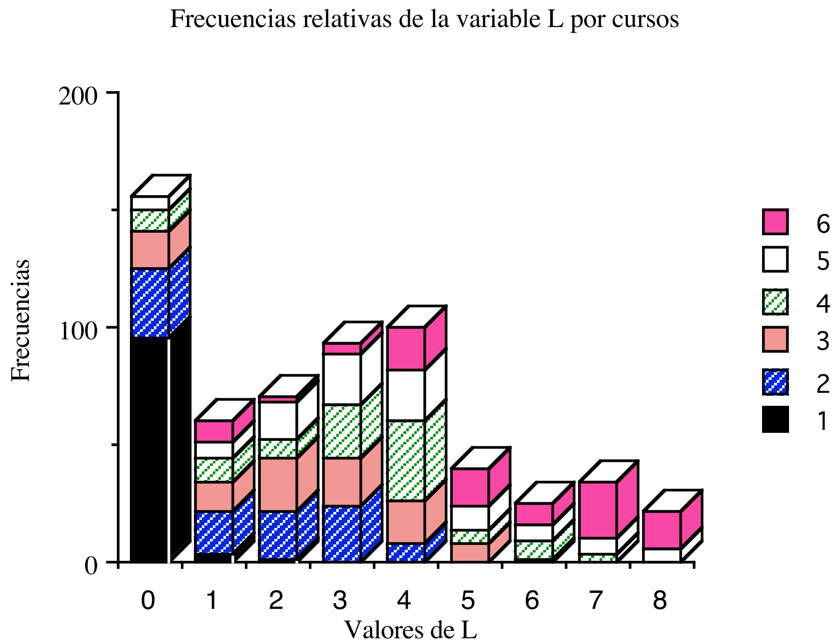

Figura 5.15. Distribución de frecuencias relativas de los valores de L por cursos

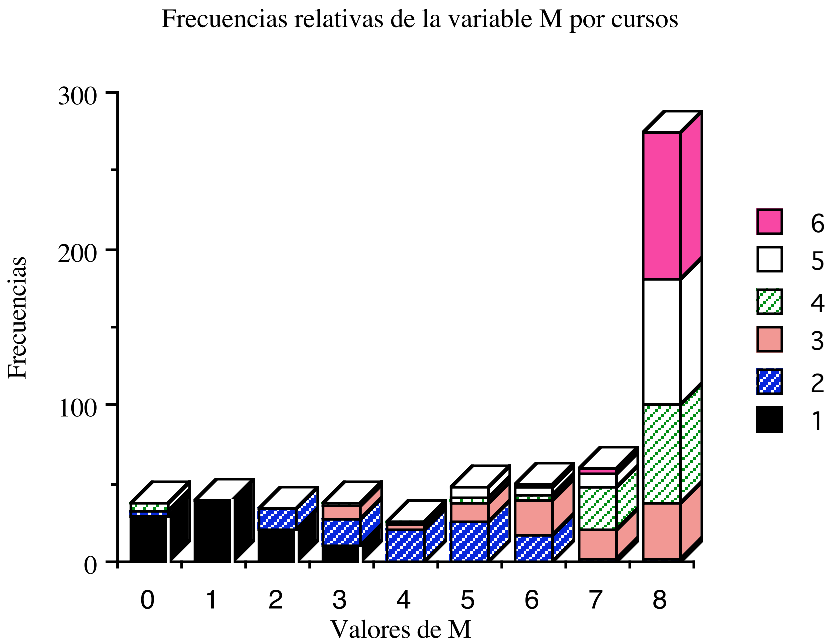

Figura 5.16. Distribución de frecuencias relativas de los valores de M por cursos

En dichas figuras se comprueban directamente los siguientes extremos:

- se produce un rendimiento mucho más alto en cálculos (M) que en las correspondientes tareas de continuación de series (L).
- se pueden apreciar los intervalos de respuestas de cada curso así como los alcances. Por ejemplo, todos los alumnos de primer curso presentan L = 0, pero si observamos la distribución de estos mismos alumnos en cálculos vemos que se sitúan entre los valores 0, 1, 2 y 3, con un alcance que se encuentra tres puntos por encima del valor obtenido en L.
- los resultados globales aumentan paulatinamente a partir de L = 1 y hasta L = 4, con un brusco descenso en L = 5. Se aprecia claramente el estancamiento o bloqueo que se produce en el paso de lo aditivo a lo multiplicativo en las tareas de razonamiento inductivo numérico. Este bloqueo, que se produce en alumnos que ya dominan los algoritmos de las cuatro operaciones básicas (a partir de tercer curso), sin embargo, no se produce en las operaciones aritméticas asociadas a las mismas tareas.
- los alumnos que no superan la barrera del valor L = 4 se dan en porcentajes importantes: 90,6% para tercero, 83,52% para cuarto, 70,18% para quinto y un 35,43% para sexto. Debemos esperar, por tanto, hasta sexto curso para que se empiece a desbloquear la situación. En términos globales, de los 273 alumnos que en teoría deberían superar la puntuación L = 4 tan solo la superan 87, quedándose los 186 restantes en las puntuaciones infe-

riores.

Al comparar los resultados anteriores con los correspondientes a la variable M (cálculos) nos encontramos con diferencias asombrosas. Por poner un ejemplo de lo que vamos a ver a continuación, baste decir que frente a los 186 alumnos que no superan la puntuación L = 4, tan sólo nos encontramos con 9 alumnos que no superan el mismo valor para M.

Con el fin de comparar la evolución de las respuestas computadas en las variables L y M hemos construído, a partir de los datos, la tabla 5.4 En ella se distribuyen, por cursos, los porcentajes de las puntuaciones correspondientes a ambas variables.

	1		2		3		4		5		6	
	L	M	L	M	L	M	L	M	L	M	L	M
0	95	29,5	30,3	3,03	15,6	0	8,96	5,19	0	0	0	0
1	3,33	39,3	18,2	0	12,5	0	10,4	0	6,49	0	9,38	0
2	1,67	21,3	19,7	12,1	23,4	0	7,46	0	15,6	0	3,12	0
3	0	9,84	24,2	18,2	20,3	7,81	22,4	1,49	22,1	0	4,69	0
4	0	0	7,58	21,2	18,8	3,12	34,3	1,49	20,8	0	18,8	0
5	0	0	0	25,8	5,97	12.5	10,4	2,99	14,1	6,49	6,53	0
6	0	0	0	16,7	1,56	21,9	6,49	4,48	9,38	3,90	4,27	3,08
7	0	0	0	1,52	0	18,8	2,99	26,9	7,79	9,09	23,4	3,08
8	0	0	0	1,52	0	35,9	0	62,7	5,19	80,5	17,2	93,8

Tabla 5.4. Frecuencias relativas de respuestas para las variables L y M por cursos

A partir de los resultados expuestos llegamos a las siguientes conclusiones:

a) Las diferencias entre los alcances por curso entre las variables M y L, a favor de las puntuaciones obtenidas en cálculos, son las siguientes: tres puntos para primero, tres puntos para segundo, cuatro puntos para tercero, dos puntos para cuarto, un punto para quinto y cero puntos para sexto. Si la diferencia es de tres o cuatro puntos se puede asegurar que hay un desfase de dominio de dos operaciones en la secuencia lineal: adición, sustracción, multiplicación y división. El diagrama de la figura 5.17, en el que se exponen de forma gráfica estas conclusiones, se ha obtenido a partir de los datos de las tablas anteriores.

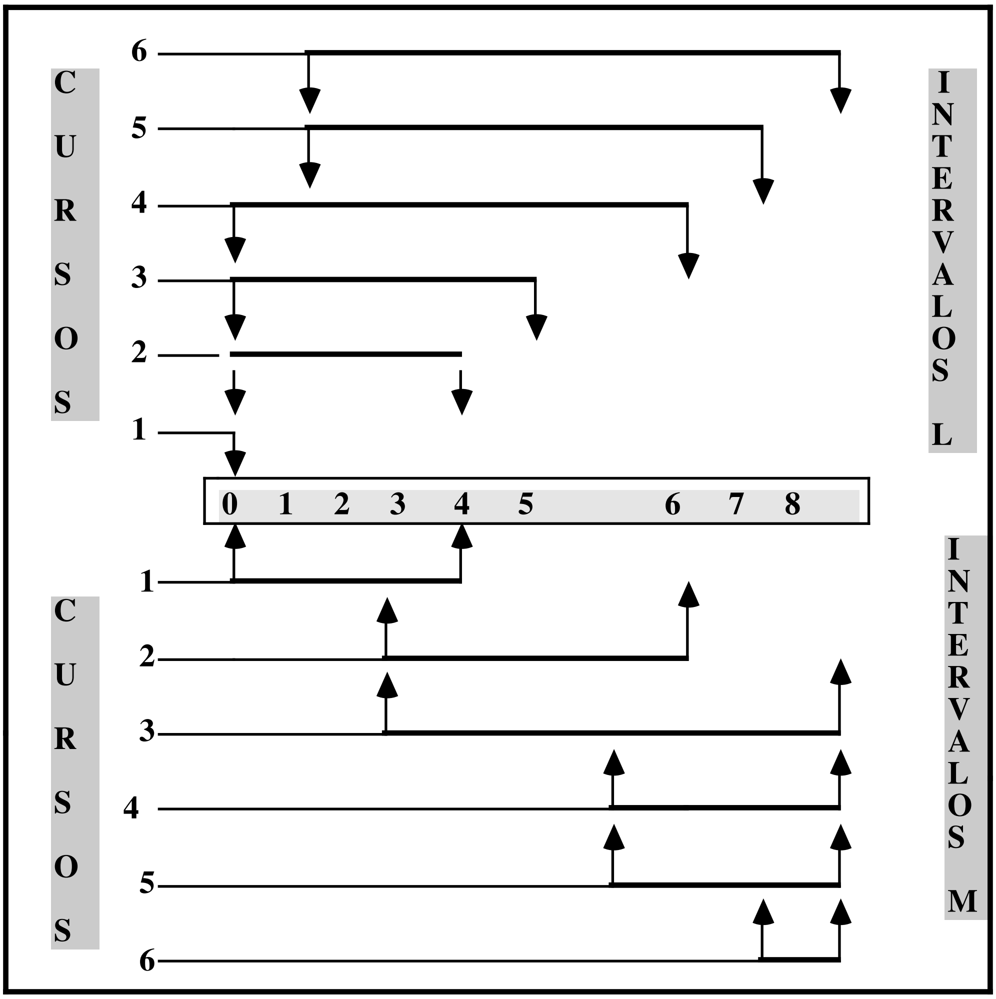

Figura 5.17.- Intervalos de puntuaciones de las variables L y M por cursos.

Cada una de las diferencias detectadas se puede traducir en los siguientes términos:

- El desfase de primer curso indica que los alumnos no realizan ninguna tarea de continuar series pero realizan correctamente las sumas y la primera resta.

- Los tres puntos de diferencia en segundo curso indican que se alcanza el subestado aritmético sustractivo en series numéricas mientras que en calculo se consiguen realizar correctamente los algoritmos correspondientes al subestado aritmético multiplicativo.

- En tercero la diferencia es máxima, con un valor de cuatro puntos, lo que indica un alcance de cuatro puntos en las tareas de continuación de series o, lo que es lo mismo, que en series dominan el subestado sustractivo completo y en operaciones llegan al máximo posible, es decir, al algoritmo de la división.

- A partir de cuarto curso las diferencias se acortan, debido al desarrollo del curriculum escolar en aritmética. Las operaciones se utilizan ya a otros niveles que trascienden lo meramente algorítmico, como por ejemplo en los procesos de razonamiento inductivo necesarios para las comparaciones numéricas.

- En cuarto curso se produce una diferencia de dos puntos, que se corresponde con el estado aritmético partitivo.

- La diferencia de un punto en quinto curso indica que los alumnos más aventajados consiguen aplicar las comparaciones partitivas elementales en las tareas de razonamiento inductivo numérico. Sin embargo, hay que esperar hasta sexto curso para que estas diferencias se anulen.

b) El campo de variabilidad (intervalos de puntuaciones) en cada curso es mayor en L que en M, lo que se interpreta como que la maduración y los logros en razonamiento inductivo numérico son más lentos que la asimilación y el dominio de los algoritmos de las operaciones aritméticas. No obstante, como veremos más adelante al estudiar las intersecciones de los intervalos, algunos alumnos tienen la misma puntuación en L y en M, en consonancia con el desarrollo del curriculum escolar.

Los intervalos de mayor longitud en L se presentan en los cursos superiores (cuarto, quinto y sexto) con una amplitud de seis puntos para un rango máximo de nueve, lo cual es lógico, ya que a partir de cuarto curso la mayoría de los alumnos dominan las cuatro operaciones aritméticas básicas y pueden, como hacen algunos de ellos, aplicar con éxito dichas reglas a las tareas de continuar series, cosa que no ocurre con los niños más pequeños. Por la misma razón, la mayor variabilidad en cálculo se presenta en tercero, con grandes diferencias entre los alumnos, ya que se trata del curso en el que se empiezan a trabajar las cuatro operaciones. Esta variabilidad disminuye a medida que los alumnos dominan los cálculos, hasta llegar al 93,8% de alumnos que en sexto curso realizan todos los cálculos perfectamente. Este resultado contrasta con el 17,2% de alumnos del mismo curso que realizan correctamente todas las series. Ambos porcentajes se invierten en primer curso, donde hay un 29,5% con M=0 frente a un 95% con L=0.

c) Teniendo en cuenta el par de valores (L, M) para cada alumno, se representa, en la tabla 5.6, la distribución de frecuencias absolutas de estas coordenadas en toda la muestra. Los alumnos que han obtenido (0,0) no intervienen en el estudio, ya que, al no realizar tarea alguna, se encuentran fuera del rango de las capacidades y destrezas que venimos estudiando. Estos alumnos, posiblemente puedan entrar en otro estudio que contemple la ampliación de las pruebas y la escala a niveles inferiores.

L \ M	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	19	22	18	13	4	5	8	3	5
1	1	1	1	6	3	8	2	3	5
2	0	0	0	2	2	14	3	8	19
3	0	0	2	3	5	3	9	10	32
4	0	0	0	0	3	2	10	10	43
5	0	0	0	0	0	0	1	3	22
6	0	0	0	0	0	0	0	1	16
7	0	0	0	0	0	0	0	2	21
8	0	0	0	0	0	0	0	0	15

Tabla 5.5. Tabla de doble entrada de frecuencias absolutas correspondientes a las variables L y M

Como es evidente, el equilibrio se produce para los valores L = M y se corresponde con las frecuencias que aparecen en la diagonal, que, excluyendo los 19 alumnos de primer curso, son un total de 24. Estos alumnos son los que al parecer presentan un equilibrio entre la asimilación de las habilidades de cálculo y su aplicación en razonamiento inductivo numérico. El índice, como vemos, es bastante bajo; máxime cuando se observa que 15 de ellos son alumnos de coordenadas (8,8), lo que significa que han superado todas las tareas y que, posiblemente, también se encuentren fuera del rango del estudio y deban ser objeto de otro estudio ampliado en los niveles superiores.

La matriz es triangular superior respecto a la situación de equilibrio, lo que indica un claro predominio, salvo en tres casos, de las habilidades en cálculo con respecto a su aplicación en tareas de razonamiento inductivo numérico finito. De la simple lectura de la última columna de la tabla se deduce que un total de 188 alumnos dominan todas las habilidades en cálculo (47% de la muestra), de los que tan sólo 15 de ellos (3,75% de la muestra) consiguen el mismo resultado en las correspondientes tareas de continuar series.

5.14.- El efecto tope en la nueva muestra

En este apartado queremos presentar evidencia empírica de la existencia del efecto tope para contrastar la hipótesis H4. Revisada la tarea correspondiente, nos hemos encontrado con un total de 26 alumnos que han manifestado dicho efecto. La distribución por cursos ha sido la siguiente: 2 casos en tercero, 3 en cuarto, 8 en quinto y 13 en sexto. El aumento progresivo se debe a que la proporción de alumnos que han realizado la tarea, por ser más difícil, debe aumentar de acuerdo con los cursos. De todo ello se deduce que el efecto tope se reproduce en la nueva muestra.

5.15.- Escala acumulativa de Guttman

De acuerdo con Dofson y Summers (1982, pág. 249), se han propuesto diversas técnicas para elaborar escalas acumulativas de Guttman. De entre ellas, podemos citar las siguientes: técnica de tablas de escalograma (Suchman 1950), técnica Cornell (Guttman 1947), método de cuadrados mínimos (Guttman, 1941) y la técnica de tabulación transversal (Toby y Toby, 1954).

Para reactivos dicotómicos, como es nuestro caso, hemos considerado el método M.S.A. (Multiple Scalogram Analysis), expuesto por Lingoes, J.C.L (1963). Según este autor:

> "Guttman emplea lo que podría llamarse un enfoque dividido, es decir, el experimentador selecciona un conjunto de reactivos que convienen a un "universo", lo prueba en cuanto a dimensionalidad, y si se satisfacen ciertos criterios acepta que tal universo es mensurable por escala. El modelo M.S.A es completamente determinista como el de Guttman y supone que los reactivos que se van a analizar son de tipo acumulativo" (Pág. 334).

En el estudio que hemos realizado se comprueba, en una primera aproximación, que existe una tendencia acumulativa en la serie de tareas X1, X3, X5, X7, X9 y X12, donde las cuatro últimas constituyen la escala de Mokken. Esta acumulatividad, que como ya se ha mencionado consiste en que el éxito en una tarea implica el éxito en las tareas anteriores a ella, se pone de manifiesto en el escaso número de desviaciones que se producen respecto de la situación de acumulatividad perfecta. En nuestro caso, de un total de 6x400 = 2400 celdas (respuestas totales a la prueba de continuar series), sólo ocurren 33 respuestas que no respetan la acumulatividad de los reactivos (se producen 33 cambios con respecto a la acumulatividad perfecta), lo que supone aproximadamente un 1% del total. Téngase en cuenta que en los casos de reactivos dicotómicos, el número de respuestas posibles es 2^n, siendo n el número total de tareas o reactivos. De este número, tan sólo n+1 del total de patrones de respuestas son tipos perfectos o puros; el resto se consideran no escalares o de error.

Por otra parte, según Dofson y Summers (op. citada), lo primordial en una escala acumulativa es demostrar su consistencia interna, para lo que se consideran diversos coeficientes, entre los que destacan el coeficiente de reproductivilidad de Guttman (1950), el coeficiente de adaptabilidad a la escala de Menzel (1953) y la proporción de error de Borgatta (1955). Todos ellos pretenden medir lo mismo, si bien Dofson y Summers aconsejan utilizar la proporción de error junto con la medida de Guttman.(Pág. 255).

5.15.1.- Medida de Guttman

La estimación de la consistencia interna de un conjunto de reactivos se mide aplicando el coeficiente de reproductibilidad:

1 - [(Error total de colocación)/ (Sujetos x Reactivos)]

para el que Guttman fijó un mínimo de 0,90 para superar la monodimensionalidad. La aplicación a nuestros datos de dicho coeficiente arroja el siguiente resultado:

$$1 - 33/4880 = 1 - 0{,}006875 = 0{,}993125$$

Consideramos que este resultado satisface plenamente las exigencias establecidas por Guttman y valida la consistencia de la escala.

5.15.2.-Medida de Borgatta

La medida de Borgatta es la proporción de error:

(Número de errores) / (Número máximo de errores esperados)

El número máximo de errores se calcula utilizando la ley de probabilidades independientes para determinar las frecuencias esperadas de cada tipo no escalar a partir de las marginales de cada reactivo. Los cálculos correspondientes están en el anexo 5.9.

El número máximo de errores que ha resultado es de 400,0205 y para el coeficiente de Borgatta hemos obtenido el valor 0,0824. Como resulta que la proporción de error será 1 cuando el número de errores de colocación sea igual al número de errores y 0 cuando no hay errores, el resultado obtenido valida la consistencia interna de la escala.

A partir de aquí al referirnos a la escala obtenida utilizaremos las siglas E.I.N. (Escala Inductiva Numérica).

5.16.-Distribución de la muestra según la escala inductiva numérica.(E.I.N.)

Para estudiar la distribución de los alumnos por niveles según las edades y cursos así como la evolución de los mismos hemos considerado la variable acumulada S= X1+ X3 + X5 + X7 + X9 + X12, considerando la totalidad de la muestra. No se han eliminado los alumnos que no se adaptan a la escala y que bajan los resultados que se hubiesen obtenido de no haber sido así. Hemos considerado que el estudio es de la totalidad de la muestra y que si con una tendencia a la baja en los resultados estos muestran regularidades importantes como veremos a continuación, aún serían más claros los resultados a favor de nuestras hipótesis si nos hubiésemos restringido a los alumnos que se ajustan a la escala.

De acuerdo con las frecuencias de respuestas obtenidas tan solo un 36,5% de los alumnos de 6 años no han conseguido entrar en la escala lo que viene a reflejar su bondad en cuanto a su adecuación a los niños pequeños. Este resultado disminuye a un 34,4% si consideramos los alumnos de primer curso. Cuando decimos que no han entrado en la escala queremos decir que no han contestado correctamente ninguna de las tareas que la componen. A estos niños le hemos asignado un prenivel N0.

Las tablas de contingencia correspondientes a este estudio están en el anexo 5.10.

5.16.1.-Evolución de los niveles según las edades

El histograma de la figura 5.18. representa la distribución de alumnos por niveles y edades.

Distribución de frecuencias relativas de alumnos por edades y niveles

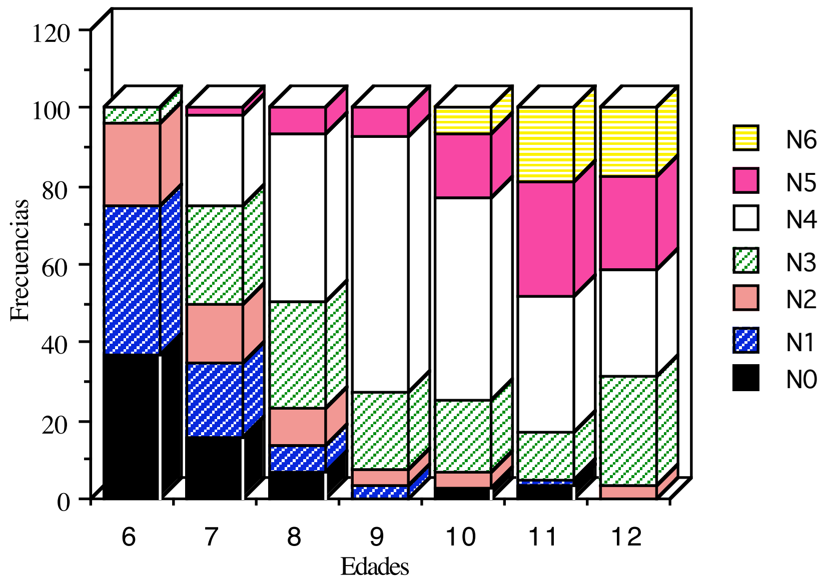

Figura 5.18.- Distribución de alumnos por edades según los niveles de la escala E.I.N

Globalmente se aprecia que hay una transición de los niveles inferiores a los superiores a medida que aumenta la edad. En cada edad nos encontramos con escolares pertenecientes a diferentes niveles:

- Los alumnos de seis años se distribuyen significativamente entre N1(37,7%), N0 (34,4%) y N2(23,0%).

- Al pasar a los siete años nos encontramos con una expansión de niveles estando los escolares distribuidos de manera significativa en cinco niveles: N3(25,00%), N4(23,10%), N1(19,20%), N2(15,40%) y N0(15,40%). Por ello podemos decir que en nuestra muestra de alumnos la edad de siete años es una edad indefinida en cuanto a los niveles con variaciones importantes de unos niños respecto a otros en razonamiento inductivo numérico finito

- A los ocho años se reducen a dos niveles N3(27,40%) y N4(42,50%) aunque el nivel N2(9,59%) tiene una relativa importancia. A esta edad y de acuerdo con los resultados podemos afirmar que se inicia el nivel N5(6,85%)

- Entre los niños de nueve años se reproducen los resultados anteriores pero con un predominio casi absoluto de dos niveles N4(65,50%) y N3(27,40%) ya que el nivel N5(7,27%) sigue en los inicios.

- A los diez años se comienza a consolidar el nivel N5 (16,00%), rompiendose el estancamiento producido en los dos años anteriores en el nivel N4: Los alumnos se inician en el nivel N4 a partir de los siete años pero no comienzan a superarlo hasta los diez años. A esta edad se produce una nueva expansión estando los niños distribuidos significativa-mente entre los niveles N4(52,00%), N3(18,70%) y N5(16,00%). A esta edad se inicia el último nivel de la escala N6(6,67%)

- A los once años se consolida la expansión entre los niveles N4(34,40%), N5(29,70%), N6(18,80%) y N3(12,5%) siempre con tendencia a un aumento de los niveles superiores en deprimento de los inferiores.

- A los doce años se mantienen los niveles anteriores N4(27,60%), N3(27,60%), N5(24,10%) y N6(17,20%).

En síntesis podemos destacar los siguientes resultados:

1) Los alumnos que no han conseguido superar el prenivel N0 se distribuyen entre los 6 y 8 años con un descenso notorio ya que con 8 años tan solo un 6,5% de los alumnos permanecen en ese nivel.

2) Predominio del nivel aditivo N4 desde los siete hasta los doce años, con un aumento paulatino desde los siete años hasta los nueve que consigue un máximo para ir descendiendo en las edades superiores.

3) Inicio de los niveles multiplicativos y partitivos a partir de los ocho años con un crecimiento paulatino a partir de dicha edad

5.16.2-Evolución de los niveles según los cursos

La distribución de alumnos por niveles y cursos queda reflejada en el diagrama de la figura 5.19. Los datos se corresponden a los porcentajes relativos a cada curso.

Debido a que en cada curso hay alumnos de dos edades diferentes se comparten proporcionalmente los resultados obtenidos por edades. Este hecho suaviza los cambios producidos en los resultados de las transiciones de unos cursos a otros con respecto a la edad a pesar de que hablamos de seis cursos y siete edades y al aumentar el número de escalones los saltos deberían ser más cortos.

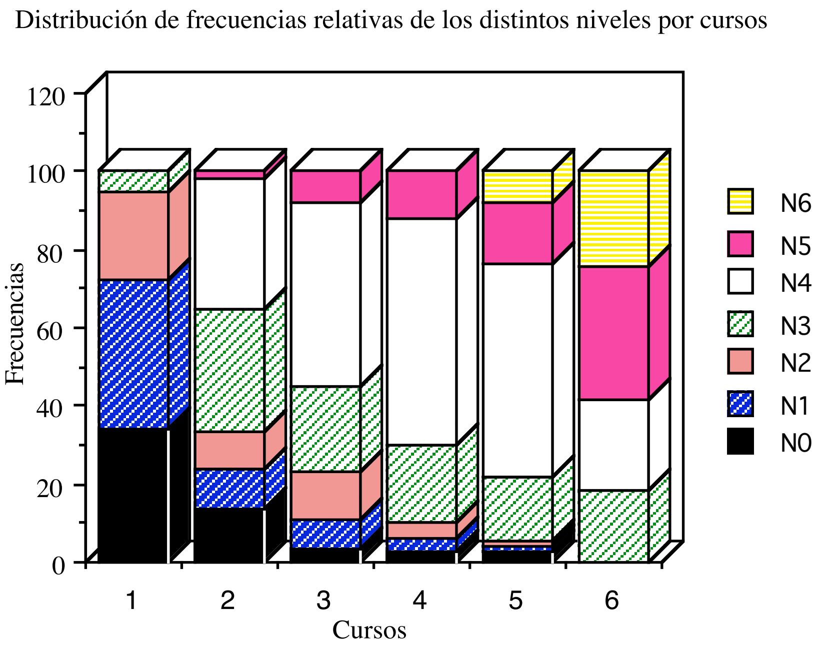

Figura 5.19. Distribución de los alumnos por curso según los niveles de la escala E.I.N.

5.16.3.- Conclusiones

De los análisis precedentes y desde un punto de vista de la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación primaria, dos son las conclusiones fundamentales que se deben considerar:

a) El dominio del nivel aditivo en los escolares de Educación Primaria en el tramo siete-doce años.

b) Tomando como referencia el nivel aditivo, podemos distinguir tres tramos en la evolución del razonamiento inductivo numérico en Educación Primaria : un primer tramo preaditivo que no supera el nivel N2 y que acaba a los siete años con una expansión a niveles superiores. Un segundo tramo aditivo que también acaba con una expansión a los niveles siguientes, a la edad de diez u once años y por último, se inicia un tercer tramo de consolidación del nivel partitivo a partir de los once años.

5.17.-Ajuste de las competencias aritméticas y en razonamiento inductivo a los niveles de la E.I.N.

Desde la óptica del razonamiento matemático no tiene sentido dominar una operación aritmética y no utilizarla en un razonamiento en el que es necesaria su aplicación. En general podemos decir que una operación está asimilada si el alumno la utiliza como herramienta siempre que sea necesario. Uno de los contextos cognitivos de aplicación de una operación es el del razonamiento inductivo numérico finito y si el niño no integra las operaciones en dicho razonamiento podemos decir que no ha completado una parte importante en el aprendizaje de la aritmética elemental.

Los valores obtenidos para las variables L y M según las diferentes edades y niveles nos hace ver que existe un desfase importante entre el logro del algoritmo de una operación y su integración en el razonamiento inductivo numérico.

En el presente apartado vamos a comprobar que la medida del ajuste entre las variables L y M se adapta mejor a nuestros niveles inductivos que a los cursos o a la edad. En concreto queremos decir que el hecho de que un niño supere nuestros niveles en razonamiento inductivo numérico conlleva una integración de las operaciones aritméticas en su capacidad inductiva numérica, cosa que no sucede ni con la edad ni con los cursos en el transcurso de la Educación Primaria.

Para realizar este estudio nos hemos basado en los resultados obtenidos en las tablas de contingencia de la variable M-L por cursos, edades y niveles (anexo 5.11).

A partir de los datos hemos calculado para cada cada curso, edad y nivel el valor esperado (V.E) de M-L, obteniendose los resultados de las tablas de la figura 5.20.

EDAD	V.E M-L
6	1,03
7	2,28
8	3,58
9	4,10
10	3,77
11	3,08
12	3,34

CURSO	V.E M-L
1º	0,96
2º	2,59
3º	4,04
4º	4,16
5º	3,89
6º	2,57

NIVEL	V.E M-L
N1	2,43
N2	3,34
N3	4,35
N4	3,59
N5	1,91
N6	0,31

Figura 5.20. Valores esperados (V.E) de la variable M-L por edad, curso y nivel E.I.N

Circunscrito a nuestra población de alumnos de Educación Primaria, los valores obtenidos hacen ver que ni la evolución de la edad, ni la de los cursos, consiguen un efecto de acercamiento entre las habilidades en cálculo y su integración en el razonamiento inductivo numérico, sin embargo para los alumnos que superan el nivel N6 de nuestra escala no hay diferencias entre ambos aspectos correspondiendoles un valor esperado en M-L de 0,31, lo que significa que integran las cuatro operaciones en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico.

Por edades a pesar de alcanzar los 11 o 12 años vemos como las diferencias entre L y M son de al menos dos operaciones ya que les corresponde un valor esperado de 3,34.

Por cursos también podemos decir algo parecido en cuanto que a los alumnos de sexto les ha correspondido un valor esperado de 2,57 que equivale a una operación.

Para nuestro trabajo este resultado es una medida de una relación positiva entre la consistencia de las pruebas realizadas en cuanto a sus objetivos en relación con la validez de constructo.

5.18.- Fiabilidad de la prueba

Para medir el grado de consistencia de la prueba realizada por los alumnos de la muestra y por tanto confirmar los resultados obtenidos, hemos llevado a cabo un estudio de la correlación entre dos mitades de los ítemes de la prueba, en concreto los pares e impares. A partir de los datos del anexo 5.12, hemos obtenido el valor 0,9287 para el coeficiente de Spearman-Brown y el valor 0,9281 para el coeficiente de Guttman. Estos valores confirman significativamente la consistencia interna y la estabilidad de la prueba.

5.19.-Resultados del cuestionario realizado por los profesores

Los objetivos del cuestionario consistían en contar con información directa del profesorado en las competencias básicas necesarias en los alumnos para la realización de las tareas de la prueba escrita, contrastar los resultados obtenidos por los alumnos en la prueba escrita con dicha información, conocer en opinión del profesor el estado de las competencias de los alumnos en las habilidades y destrezas necesarias para resolver las tareas de razonamiento inductivo numérico en las series soporte de nuestra investigación y obtener evidencia empírica en cuanto a la bondad de dicha opinión respecto a las competencias aritméticas conseguidas por los alumnos en los procesos de aprendizaje y los resultados obtenidos por los alumnos.

Las cuestiones a contestar por los profesores estaban organizadas de acuerdo con nuestro modelo teórico y en relación con las variables independientes de tareas que se corresponden con los diferentes estados: estado 5 o simbólico ordinal, estado 6 o de conteo de n en n, estado 7 o aritmético aditivo (incluyendo las operaciones de suma y resta) y el estado 8 o multiplicativo (incluyendo el producto y el cociente).

Para realizar la comparación entre los resultados obtenidos por los alumnos y los datos de la encuesta hemos considerado los promedios de respuestas acertadas por los alumnos en cada estado y el promedio asignado por los profesores. Los datos los hemos recogido en la tabla 5.6, en la cual las filas representan el promedio de respuestas en cada estado en los diferentes cursos y por columnas los promedios en cada curso según los diferentes estados: de los alumnos en la columna A y de los profesores en la columna B. Los datos tanto en un caso como en otro están referidos al porcentaje de alumnos que superan las tareas correspondientes. En la tabla 5.7 exponemos las diferencias entre los porcentajes asignados por los profesores y los obtenidos por los alumnos.

	1		2		3		4		5		6	
	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B	A	B
5	51,6	60	61,37	87	90,65	97,35	95,5	96	96,1	94	97,7	96
6	31,9	77	68,2	86	85,15	96,66	91	94	94,8	92,66	98,45	94,66
7	1,64	64,28	39,4	94,76	53,52	99,52	72,4	99,52	72,72	100	66,48	100
8	0	0	0,76	22,77	7,42	84,44	8,94	95	20,8	97,77	50	100

Tabla 5.6.Porcentajes de respuestas obtenidas por los alumnos en los distintos estados (columna A) y porcentaje asignados por los profesores (columna B) por cursos

En vista a los datos obtenidos podemos precisar:

a) En el estado 5 no se aprecian unas diferencias importantes en cuanto a los porcentajes de alumnos con éxito asignados por los profesores y los obtenidos en las pruebas realizadas. La mayor diferencia es de un 25,63% en segundo.

	1	2	3	4	5	6
5	8,4	25,6	6,7	0,5	-2,1	-1,7
6	45,1	17,8	11,5	3	-2,1	-3,7
7	62,6	55,3	46	27,1	27,2	35,5
8	0	22	77	86	76,9	50

Tabla 5.7. Diferencias entre porcentajes de respuestas asignados por los profesores y los obtenidos por los alumnos

b)Las diferencias se hacen notorias a medida que avanzamos por los estados y cursos.

c) Podemos decir que las diferencias crecen si se mide una competencia aritmética curricular correspondiente al curso en cuestión: estado 7 en primero y segundo, estado 8 en tercero y cuarto.

d) En todos los cursos las diferencias se hacen notar con una gran importancia en los estados 7 y 8, que se corresponden con las cuatro operaciones de la aritmética elemental.

Como vemos, los profesores estiman el rendimiento de sus alumnos en aritmética muy por encima de los resultados que hemos obtenido.

5.20.- Resultados y conclusiones

De acuerdo con nuestro diseño expuesto al principio de este capítulo, hemos desarrollado un estudio empírico cuantitativo descriptivo que ha permitido obtener información sobre la evolución del razonamiento inductivo numérico en los escolares de Educación Primaria, en concreto en los escolares que han formado nuestra muestra.

Según con el orden en que hemos ido desarrollando el estudio, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

1. Respecto a la escala de Mokken los resultados obtenidos con la nueva muestra no difieren de los obtenidos con la muestra del estudio exploratorio expuestos en el capítulo 3. Este hecho constata la bondad de la escala obtenida entonces y confirman los resultados expuestos en el capítulo 3 y por tanto el soporte empírico de nuestro modelo teórico de la evolución del razonamiento inductivo numérico, basado en connotaciones obtenidas a partir de las respuestas verbales del estudio exploratorio.

2.- Los alumnos quedan agrupados evolutivamente en tres categorías que se corresponden con los bloques simbólico-numerativo, aritmético-aditivo y aritmético-multiplicativo de nuestro modelo teórico. La distribución de las mismas por edades y cursos, sin solapamientos, se exponen en la figura 5.21.

Bloques		Cursos	Edades	Estados
Simbólico numeral	T1	1º	6	5, 6
Aritmético aditivo	T2	2º, 3º, 4º	7, 8, 9	7
Aritmético multiplicativo	T3	5º , 6º.	10, 11, 12	8

Figura 5.21- Evolución de las respuestas por bloques, cursos, edades y estados

Una categoría es un grupo de alumnos homogéneo en cuanto a competencias en razonamiento inductivo numérico, que en su conjunto permanecen en un estado determinado y no necesariamente han obtenido el mismo rendimiento en las tareas de continuación de series dentro del estado que les corresponde. Estas categorías se establecen de acuerdo con los alcances conseguidos por los alumnos más aventajados en las distintas tareas que han realizado (apdo 5.11.2). Los alumnos de seis años no superan ninguna tarea aritmética y permanecen en un estado simbólico-numeral. Los alumnos de siete, ocho y nueve años logran en su mayoría interpretar series aditivas y sustractivas, pero fracasan con las multiplicativas. Por último, los alumnos a partir de los diez años alcanzan significativamente las series multiplicativas y partitivas.

3.- Los resultados anteriores están en relación con la evolución de las frecuencias obtenidas para los distintos valores de la puntuación total (suma de puntos) obtenida por cada alumno en las tareas de continuar series (rendimiento en series) distinguiendo en dicha evolución tres tramos diferenciados: (0,2) decreciente, (3,8) creciente y (9,12) decreciente.(aptdo. 5.11.4).

El máximo conseguido en el valor 8 está en consonancia con el dominio del modelo aditivo en Educación Primaria.

4.-En la muestra de alumnos de Educación Primaria investigada solo aquellos que dominan el algoritmo de la multiplicación dominan las tareas de continuar series aditivas. Según la secuencia de aprendizaje de los algoritmo de las operaciones aritmética existe un desfase de dos operaciones entre el éxito algorítmico y el éxito en tareas de continuar series. Esta diferencia se acorta a partir de sexto curso.

Con esta conclusión se confirma la hipótesis H3: "El dominio del algoritmo de una operación no se traduce de manera inmediata en una competencia en razonamiento inductivo numérico. En los escolares de Educación Primaria existe un desfase de al menos dos años desde que aprenden un procedimiento, propiedad o concepto aritmético hasta que lo integran en sus capacidades de razonamiento inductivo numérico"

5.-Las tareas de continuar series X1, X3, X5, X7, X9, y X12, constituyen una escala acumulativa de Guttmann. Las series asociadas y los distintos subestados del modelo teórico que les corresponden son los siguientes:

X1: 17, 27, 37, 47, ... subestado representacional
X3: 3, 5, 7, 9, ... subestado sintáctico-numeral
X5: 0, 6, 12, 18, ... subestado aritmético aditivo
X7: 40, 32, 24, 16, ...subestado aritmético sustractivo
X9: 2, 6, 18, 54,. .... subestado aritmético multiplicativo
X12: 243, 81, 27, 9, ... subestado aritmético partitivo

Esta conclusión es una conclusión estadística basada en la estimación de la consistencia interna de la escala, para la que hemos obtenido un alto grado de fiabilidad.(aptdo 5.14). A esta escala la hemos denominado Escala Inductiva Numérica y la representamos por las siglas E.I.N..

6.- La distribución de edades y cursos según los distintos niveles de la E.I.N. es la siguiente:

Nivel	Edades							Cursos					
N1	6	7						1	2				
N2	6	7	8					1	2				
N3		7	8	9	10	11			2	3	4	5	
N4		7	8	9	10	11	12		2	3	4	5	6
N5					10	11	12				4	5	6
N6						11	12					5	6

Figura 5.22.- Distribución de los niveles de la E.I.N
por cursos y edades al 95%

6.1.- En primer curso hay alumnos de dos niveles, produciéndose una expansión a cuatro niveles en segundo curso. Lo mismo ocurre al pasar de cuarto curso a quinto curso.
En cuanto a las edades, estas expansiones se producen a los siete y once años.
6.2.- Los niveles N2 y N4 producen un escalonamiento: N2 es una barrera para los alumnos de seis años y primer curso, y N4 es una barrera para los alumnos de nueve-diez años y tercero-cuarto curso

7) El hecho de que un escolar de Educación Primaria haya alcanzado el último nivel de la escala inductiva numérica, significa que ha integrado las cuatro operaciones de la aritmética en sus habilidades y destrezas de razonamiento inductivo numérico. Sin embargo, el que un alumno esté en sexto curso o bien, que haya cumplido los doce años, no significa que tenga integradas las operaciones aritméticas en su capacidad de razonamiento

inductivo numérico.

Este hecho lo hemos comprobado estudiando la evolución del rendimiento en las tareas de continuar series y en los cálculos aritméticos que se deben aplicar para resolverlas. Si el estudio se realiza por edades o cursos, resulta que en todos estos casos hay un mayor rendimiento en cálculo. Si el estudio se realiza por niveles resulta que a partir del nivel N4 las diferencias se van acortando llegando a ser nulas en los alumnos del nivel N6.

8) En el capítulo 1 apdo 1.2.3.3, definíamos el efecto tope: "Dada la tarea de continuar una serie partitiva en la que el último elemento a determinar es 1, diremos que en un alumno se ha producido el efecto tope, si al obtener este término, le asigna el valor 0, habiendo calculado adecuadamente el término anterior así como la regla partitiva correspondiente"

En base a los resultados de las pruebas realizadas anteriormente, enunciamos la hipótesis H4: "El efecto tope no es un efecto casual y local. Se produce en cualquier muestra importante de escolares de Educación Primaria que realice una prueba de continuar series preparada intencionadamente con tal fin"

En el apartado 5.13, se comprueba nuevamente que se reproduce significativamente el efecto tope en la muestra que hemos estudiado, lo que confirma nuestra hipótesis en el contexto de nuestra investigación.

Con estos resultados se logran los objetivos planteados al comienzo de este capítulo en lo que respecta a los objetivos e hipótesis del problema de investigación

Queda por culminar el estudio de casos correspondiente a la segunda etapa del proceso de validación de la hipótesis H2, con el fin de obtener unas primeras características de los diferentes perfiles inductivos correspondientes a los distintos niveles de la E.I.N. que es el objetivo del estudio empírico cualitativo que se desarrolla en el próximo capítulo.

CAPITULO 6

ESTUDIO EMPIRICO CUALITATIVO

6.1.-Introducción

Con el estudio cuantitativo que se ha expuesto en el capitulo anterior se ha cubierto una parte importante de la segunda etapa de la investigación, de la que podemos destacar los siguientes resultados y conclusiones:

a) se ha obtenido evidencia empírica que está de acuerdo con los planteamientos teóricos;

b) se ha comprobado la validez de la escala de Mokken y se ha identificado una nueva escala acumulativa para todos los niveles de Educación Primaria, poniéndose de manifiesto la pertinencia e idoneidad del modelo de desarrollo del razonamiento inductivo numérico (hipótesis H2);

c) se han obtenido resultados que confirman la existencia de un desfase de al menos dos años entre el dominio de los algoritmos de las operaciones aritméticas elementales y su aplicación efectiva en tareas inductivas finitas de continuación de series numéricas (hipótesis H3);

d) se ha comprobado de nuevo la aparición del efecto tope, lo que indica que no es casual y que, efectivamente, se trata de una regularidad que se produce en determinado tipo de alumnos de los niveles estudiados (hipótesis H4);

e) se ha analizado el comportamiento global de la muestra, detectándose regularidades y situaciones singulares (saltos y expansiones) que forman parte de etapas diferenciadas en la evolución de las competencias inductivas analizadas. De estre estas regularidades destacamos, por su especial importancia, las siguientes:

e.1 - se produce un primer salto cualitativo importante de 1º a 2º cursos;

e.2 - se constata una primera expansión o diversificación de niveles de competencias en 2º curso;

e.3 - se produce un claro predominio del nivel aditivo (N4) en la mayor parte de la Educación Primaria y un estancamiento en dicho nivel a lo largo de varios años (desde 2º hasta 5º (7 a 10 años));

e.4 - se identifica un segundo salto cualitativo de 4º a 5º cursos;

e.5 - se constata una segunda expansión o diversificación de niveles en 5º curso, aunque esta vez de menor importancia que la primera;

e.6 - los datos confirman el dominio parcial del modelo multiplicativo en los cursos superiores (5º y 6º), lo que hace pensar en la posibilidad de que el dominio completo se alcance en cursos y edades superiores.

Como es evidente, los resultados y conclusiones que se han expuesto en los apartados a, b, c y d del breve resúmen anterior, sin dejar de ser importantes ni de reconocer que se adaptan a lo previsto, se han obtenido mediante unas pruebas escritas, escuetas y necesariamente limitadas, y se refieren a una información primaria y descriptiva sobre el comportamiento general de la muestra ante las tareas propuestas. Asímismo, los resultados del apartado e) proporcionan una información añadida sobre determinadas características de la evolución que no estaban contempladas en el modelo. Se trata de resultados generales que parecen distorsionar la acumulatividad de la escala y que pueden estar relacionados con las peculiaridades del desarrollo curricular y con el desfase detectado entre destrezas algorítmicas y competencias inductivas. Pero, estas, son sólo conjeturas; lo cierto es, en definitiva, que con el estudio realizado no se puede decir mucho más de lo que se menciona en dichos apartados.

Por tanto, para completar el trabajo, creemos necesario realizar un estudio complementario de carácter cualitativo, basado en la observación de los comportamientos individuales de un grupo reducido de sujetos seleccionados cuidadosamente de entre los que han participado en el estudio cuantitativo, ante situaciones inductivas numéricas finitas. Que duda cabe de que, para atender a las limitaciones y necesidades señaladas en los párrafos anteriores, tanto las situaciones como los procedimientos a utilizar y, sobre todo, la selección de los participantes, se deben fundamentar en unos criterios claros que dimanen directamente de los resultados y conclusiones del estudio cuantitativo.

En los primeros apartados del presente capitulo se expone el diseño del estudio cualitativo realizado; a continuación, en la segunda mitad del capítulo, se expone el análisis de los resultados obtenidos, para terminar con las conclusiones que se deducen del estudio completo. Como veremos, dichos resultados están, en general, de acuerdo con lo observado en el estudio empírico cuantitativo, obteniéndose, además, nuevos datos y referencias que completan el perfil en razonamiento inductivo numérico de los diferentes niveles de la escala acumulativa asociada al modelo teórico.

6.2.- Propósitos del estudio

De acuerdo con el marco metodológico, apartado 2.4, se pretende:

1) completar la evidencia empírica del estudio cuantitativo a favor de las hipótesis H1, H2 y H3 mediante un análisis en profundidad de las respuestas a tareas diferentes a las utilizadas en el estudio anterior, lo que a su vez confirmará la bondad de la escala y del modelo construido; en particular, se espera:

a) confirmar el ajuste de los escolares elegidos al nivel que han manifestado en la prueba objetiva. En otras palabras, comprobar que los escolares alcanzan exactamente el grado de dificultad correspondiente a su nivel ante la realización de actividades distintas a las de la prueba realizada, graduadas en orden evolutivo de acuerdo con el modelo teórico;

b) comprobar que alumnos del mismo curso (o edad) que se encuentran en niveles diferentes también manifiestan competencias diferentes en razonamiento inductivo numérico;

c) comprobar que alumnos del mismo nivel consiguen superar, exactamente y con independencia de la edad o del curso, el mismo grado de dificultad en las actividades que se les proponen, manifestando las mismas competencias en razonamiento inductivo numérico.

2) caracterizar y justificar los resultados de las pruebas escritas y dar significado a los comportamientos generales y a las situaciones singulares encontradas así como a los procedimientos, destrezas y estrategias inductivas que los sujetos utilizan para alcanzar un determinado rendimiento, es decir, completar los perfiles de razonamiento inductivo numérico correspondientes a cada uno de los niveles de la escala acumulativa (hipótesis H2).

La comprobación positiva de los aspectos anteriores consideramos que añade argumentos que aseguran aún más la certeza de las hipótesis H1 y H3 y aporta información suficiente para afirmar la bondad de la hipótesis H2 y completar la evidencia encontrada a favor de la misma, con lo que se habrán alcanzado los siguientes objetivos de los enunciados en el apartado 1.7.2:

O4: "Establecer un modelo teórico evolutivo de razonamiento inductivo numérico y comprobar con escolares de Educacion Primaria la utilidad y eficacia del modelo para describir su comportamiento real en razonamiento inductivo numérico"

O5: "Caracterizar cada uno de los diferentes estados de desarrollo en términos de estrategias y procedimientos inductivos propios de la aritmética escolar".

6.3.- Metodología

Para alcanzar los propósitos de la investigación es necesario examinar casos individuales señalados, con un enfoque más profundo y detallado que el empleado en el estudio cuantitativo anterior. Esto implica que la muestra debe ser pequeña, intencional y elegida de entre los 400 escolares que han participado en el estudio anterior. Por otra parte, esta nueva indagación se deberá realizar mediante los procedimientos y técnicas adecuados a los propósitos específicos del estudio, que consideramos que son, entre otros, la entrevista clínica individual semiestructurada y el análisis de tareas (Cohen 1990, pág. 377). En este sentido estamos de acuerdo con Goetz y Lecompte (1988) cuando afirman:

> En la selección de estrategias de recogida de datos, la concepción etnográfica es que una teoría no se debe limitar al uso de una sola estrategia de recogida de datos: si es válida, debe ser susceptible de confirmación mediante varias estrategias (Pág. 81).

Para simplificar el trabajo decidimos unificar la entrevista y el análisis de tareas en un sólo procedimiento, en el mismo sentido ya utilizado en varios estudios psicológicos sobre la inducción dentro del paradigma mediacional y, más concretamente, en el marco de la teoría de la continuidad (ver Anexo 4.1). Tal es el caso de Bruner, Goodnov y Austin (1956); Restle (1962); Restle y Grenno (1970); Egan y Grenno (1973), etc.. En nuestro caso, vamos a proponer a cada alumno entrevistado la realización de tres actividades, dos de ellas manipulativas y con una cierta componente lúdica, que actuan como campo de observación y como soporte de la entrevista.

Cada actividad tiene una finalidad determinada para obtener un tipo concreto de información y va acompañada de unas preguntas e intervenciones mínimas del entrevistador que son comunes para todos los sujetos. El resto del desarrollo de las entrevistas, en cuyo transcurso se provoca, intencionadamente, la interacción constante entre el entrevistador y el entrevistado, dependerá de las respuestas de cada sujeto. Veamos, a continuación, algunas consideraciones generales sobre las tres tareas, la información que se pretende obtener con cada una de ellas y la justificación de las mismas desde el punto de vista del razonamiento inductivo numérico.

<u>Actividad 1</u>: Al alumno se le muestra una pareja de números y debe decir las semejanzas y diferencias que él cree que existen entre ellos; el procedimiento se repite con varias parejas más.

Se pretende obtener información sobre los conocimientos y competencias del alumno ante la necesidad de establecer relaciones numéricas simples. Una vez recogidas todas las relaciones que el alumno identifica, se categorizan y analizan en relación con los diferentes estados de nuestro modelo teórico, a través de los niveles de la E.I.N.

Actividad 2: El alumno elige un número y el investigador, sin decir nada, pone a su lado otro número que guarda con el anterior una cierta relación que sólo él conoce; el procedimiento se repite con nuevos números elegidos por el alumno, a cuyo lado vuelve a poner el investigador los números que corresponden siguiendo el mismo criterio; el proceso continua hasta que el alumno averigua el criterio o desiste en el empeño.

La información que se espera obtener con esta actividad se refiere a las estrategias y cálculos utilizados ante la necesidad de establecer patrones numéricos basados en relaciones del tipo anterior (actividad 1), según los diferentes estados del modelo teórico y los niveles de la E.I.N. Esta información servirá para confirmar la fiabilidad de los niveles asignados a los alumnos según su rendimiento en la prueba escrita.

Actividad 3: Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debe hacer grupos de parejas, de manera que en cada grupo deben estar todas las parejas de números que guardan entre sí la misma relación.

La información se refiere aquí a la capacidad de los alumnos ante la necesidad de comparar entre sí relaciones numéricas del tipo anterior (actividad 2) e identificar relaciones semejantes y parejas de números entre los que se puede establecer la misma relación.

Estas actividades se encuentran escalonadas en relación con tres planos de significación inductiva:

a) La comparación de dos números escritos permite detectar diferencias y coincidencias entre ellos (primer plano de significación inductiva).

b) Entre varias parejas de números hay diferencias o coincidencias que se mantienen; por ejemplo: (2,4), (3,6), (11,22),... Identificar estas diferencias o coincidencias supone la realización de inferencias inductivas (segundo plano de significación inductiva).

c) Descubrir la regularidad común a varias parejas de números o clasificar parejas de números por relaciones comunes, supone identificar relaciones existentes entre relaciones simples (tercer plano de significación inductiva). Ejemplo: ante las parejas (3,4), (5,10), (3,6), (25,26), podemos emparejar (3,4) y (25,26) por la relación uno más y (5,10) con (3,6) por la relación doble-mitad.

Con los datos obtenidos del desarrollo de las entrevistas en cada una de estas actividades, cuyos detalles se describen en el apartado 6.5, nos proponemos realizar tres estudios específicos y uno general. Los **estudios específicos**, que vienen determinados por los resultados del estudio empírico cuantitativo (apartado 6.1, epígrafe e) y de los que se deducen los criterios para la elección de los sujetos de la muestra, son los siguientes:

Estudio I. De la constatación del predominio del nivel N4 en las edades de 7 a 10 años y en los cursos 2º, 3º, 4º y 5º, estamos interesados en averiguar cuál es la influencia de las edades y cursos sobre dicho efecto de estancamiento. La cuestión es la siguiente: si las respuestas de dos alumnos de edades y cursos diferentes están en el mismo nivel, ¿quiere ello decir que ambos alumnos se encuentran en la misma situación en razonamiento inductivo numérico, con independencia de las diferencias que existen entre ellos en cuanto a edad, curso y conocimientos adquiridos?.

Estudio II. De las expansiones constatadas en 2º curso (7 años) y en 5º curso (11 años), en las que encontramos alumnos de la misma edad y curso pero con diferencias que llegan a veces hasta tres grados en cuanto al nivel de sus respuestas, estamos interesados en comparar las competencias y capacidades de estos alumnos para averiguar si se dan entre ellas las diferencias que aparentemente indican los distintos niveles alcanzados en razonamiento inductivo numérico.

Estudio III. De los saltos que se han observado entre los seis y los siete años (de 1º, nivel N2 a 2º, nivel N4, en sus niveles máximos) y entre los 9 y los 10 años (de 4º, nivel N4 a 5º, nivel N6, en sus niveles máximos), que van acompañados de las expansiones ya mencionadas, nos interesa analizar las respuestas de pares de sujetos extremos en ambas situaciones (seis años, 1º, nivel N2 y siete años, 2º, nivel N4; 9 años, 4º, nivel N4 y 10 años, 5º, nivel N6), para averiguar porqué se producen esas diferencias tan grandes en tan corto espacio de tiempo (1 año de diferencia en la edad).

El **estudio general** requiere, según los propósitos enunciados en el apartado anterior, que se examinen detenidamente las respuestas y los comportamientos de alumnos de todos los niveles y de las edades y cursos más representativos, por lo que a partir de los alumnos ya seleccionados para los estudios anteriores hemos ampliado con lo escolares necesarios para la realización de este estudio general.

La recogida de información, como se expone con detalle en el apartado 6.6, se realiza mediante fichas de campo y grabación en vídeo de las entrevistas completas. Para el análisis de datos se realiza la transcripción completa del desarrollo de las entrevistas, se analizan, clasifican y comparan los diversos comportamientos, de acuerdo con cada uno de los estudios, y se categorizan las respuestas de acuerdo con la escala acumulativa y con el modelo teórico.

6.4.- Elección y distribución de la muestra

La muestra de escolares para la realización del estudio viene determinada, como se ha mencionado, por los requerimientos de los estudios específicos previstos. Así, utilizando una terna formada por el nivel alcanzado en la prueba escrita, la edad y el curso para representar la situación de cada sujeto, obtenemos la siguiente composición básica:

Estudio I Tres alumnos determinados por las coordenadas (N4, 7, 2º), (N4, 9, 3º), (N4, 10, 4º);

Estudio II Dos alumnos de coordenadas (N1, 7, 2º) y (N4, 7, 2º), para la primera parte del estudio y dos alumnos de coordenadas (N3, 11, 5º) y (N6, 11, 5º), para la segunda;

Estudio III Dos alumnos de coordenadas (N2, 6, 1º) y (N4, 7, 2º), para la primera parte del estudio y dos alumnos de coordenadas (N4,9,4º) y (N6,10, 5º), para la segunda;

El total de la muestra requerida para la realización de los tres estudios anteriores asciende, por tanto, a 11 alumnos por colegio. Pero, puesto que una de las ternas se repite en tres de los estudios ((N4, 7, 2)) y es suficiente elegir un sólo alumno de estas características, decidimos que con 9 casos por colegio se pueden cubrir satisfactoriamente las necesidades para la realización de los estudios I, II y III. Por otra parte, para mantener los criterios ya establecidos en el estudio cuantitativo y poder realizar el estudio general es suficiente con 10 casos por centro, lo que hace un total de 30 alumnos elegidos de entre los 400 que realizaron las pruebas escritas.

Una vez establecidas las características y composición de la muestra, se procede a seleccionar los sujetos. Para ello se organizan las 400 pruebas escritas por colegios y cursos y se identifica cada una de ellas por medio de las tres coordenadas ya mencionadas. A continuación, separadas en carpetas las pruebas correspondientes a cada curso de cada uno de los tres centros, se anotan en cada carpeta los datos de los alumnos a seleccionar. Por último, se abre cada carpeta, se van pasando las pruebas una por una y se eligen las primeras que aparecen con los datos requeridos. En todos los casos se toman alumnos de reserva para evitar posibles problemas de ausencia o indisposición en el momento de realizar la entrevista.

La distribución de la muestra de alumnos por colegios y niveles, para la realización de este estudio cualitativo, es la que figura en la tabla 6.1. Como se puede apreciar en dicha tabla, el tamaño muestral es inferior en dos sujetos al previsto, lo que se debe a que en el colegio público-urbano, no existen alumnos de coordenadas (N1,7,2) y (N6,11,5).

Nivel / Colegio	N1	N2	N3	N4	N5	N6
1	0	1	0	4	0	3
2	1	1	1	4	1	2
3	1	1	1	3	1	3
Totales	2	3	2	11	2	8

Tabla 6.1. Distribución de alumnos por colegios y niveles

Como podemos observar con los casos seleccionados podemos realizar todos los estudios que son necesarios para culminar satisfactoriamente la investigación.

6.5.- Actividades

En el apartado 6.3 se han expuesto algunas consideraciones generales sobre las tareas que vamos a completar en el presente apartado con una información mucho más detallada. Al ser una entrevista semiestructurada, deben especificarse en el diseño previo tanto el contenido como los procedimientos (Cohen, 1990. Pág. 379). Por ello, exponemos a continuación, en sucesivos apartados, el objetivo pretendido, el material utilizado, el desarrollo de la entrevista, los aspectos a observar y la codificación utilizada en cada una de las actividades que constituyen el soporte de las entrevistas.

6.5.1.- Actividad 1

"Al alumno se le muestra una pareja de números y debe decir las semejanzas y diferencias que él cree que existen entre ellos; el procedimiento se repite con varias parejas más".

Con esta actividad nos situamos en el primer plano de significación. El alumno sólo tiene que hacer alusión a propiedades numéricas en el momento de establecer o identificar las relaciones.

6.5.1.1.- Objetivo

El aspecto básico que se pretende explorar es el uso de la analogía numérica, es decir, el descubrimiento, por parte de los escolares, de posibles analogías entre pares de números diferentes, lo que implica que las analogías que se pueden establecer varían de unas parejas a otras. Se trata de una actividad que se orienta, principalmente, a los escolares de los primeros cursos de Educación Primaria, con la intención de ampliar los trabajos ya realizados en los cursos más avanzados.

6.5.1.2.- Material

El material utilizado en esta actividad consta de diez parejas de números imitando las fichas del dominó. Las parejas y las relaciones fundamentales que se pueden establecer en cada una de ellas, son las siguientes:

[1 2] : Uno más, doble, impar-par, siguiente, mayor;
[2 7] : Cinco más, par-impar, mayor;
[3 7] : Cuatro más, impares, doble más uno, mayor;
[4 6] : Dos más, pares, doble menos dos, mayor;
[5 9] : Cuatro más, impares, doble menos uno, mayor;
[4 14] : Más 10, pares, aquí hay un 1, en los dos está el 4, una cifra-dos cifras, mayor;
[3 22] : Una cifra-dos cifras, el 2 es 1 menos que 3, 19 más, aquí hay dos cifras iguales, mayor;
[5 37] : Una cifra-dos cifras, impares, mayor;
[44 66] : Dos cifras, cifras iguales, pares, cifras pares en ambos, mayor;
[50 70] : Dos cifras, terminan en cero, veinte más, pares, mayor;

En las relaciones expuestas no se consideran las que tienen que ver con las características gráficas de los signos numéricos (parecidos y diferencias en la forma de los distintos signos). A pesar de ello, las relaciones de este tipo han sido recogidas en el trabajo, ya que una parte importante del trabajo en los primeros niveles se dedica a la numeración verbal y escrita.

6.5.1.3.- Desarrollo de la entrevista

A lo largo del desarrollo de la entrevista correspondiente a esta actividad, cada alumno debe analizar, una por una, las diez parejas de números, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- El investigador le enseña una pareja y le pregunta: **¿En que se parecen estos números?**. Se le insiste para que intente encontrar todos los parecidos.
- A continuación le pregunta: **¿En que se diferencian?.** Se le insiste para que intente encontrar todas las diferencias.

Estas son las preguntas obligadas. En el transcurso de la entrevista se pueden pedir aclaraciones o justificaciones a las respuestas dadas.

6.5.1.4.- Aspectos a observar

De acuerdo con los objetivos del estudio cualitativo se consideran los aspectos siguientes:

a) Relaciones que reconocen los alumnos (lo que nos permitirá distinguir entre ellas por su complejidad, obtener información para caracterizar los niveles de la E.I.N correspondientes y analizar su variación en función de dichos niveles, con independencia de los cursos o edades de los alumnos entrevistados).

b) El grado de incidencia del nivel instructivo, según el currículum, sobre los logros en este aspecto del razonamiento inductivo numérico (lo que nos permitirá confirmar la ausencia de concordancia o sincronía entre el desarrollo del curriculum y los niveles de la E.I.N y que dicho nivel instructivo no es un factor determinante en las competencias en estudio).

6.5.1.5.- Codificación de respuestas

De acuerdo con los distitos niveles de la E.I.N. consideramos cuatro categorías de respuestas para esta primera actividad: Simbólica (S), ordinal

(O), aditiva (A) y conceptual (C). En ningún caso se han empleado argumentos multiplicativos, razón por la cual no se incluye en esta actividad una categoría multiplicativa. En las tres primeras categorías vamos a diferenciar las siguientes subcategorías:

Simbólica

S1: Grafía; respuestas que hacen alusión a la figura o forma de los signos numéricos;

S2: Número de cifras;

S3: Termina en cero;

S4: Una cifra en común.

Ordinal

O1: Ordinal serial; respuestas que hacen alusión a la relación de orden desde un punto de vista serial;

O2: Ordinal cardinal; respuestas que hacen alusión a la relación de orden Mayor-Menor desde un punto de vista cardinal.

Aditiva

A1: Diferencia menor o igual a diez;

A2: diferencia mayor que diez.

En ningún caso se han empleado argumentos multiplicativos, razón por la cual no se incluye ninguna categoría multiplicativa.

6.5.2.- Actividad 2

"El alumno elige un número y el investigador, sin decir nada, pone a su lado otro número que guarda con el anterior una cierta relación que sólo él conoce; el procedimiento se repite con nuevos números elegidos por el alumno, a cuyo lado vuelve a poner el investigador los números que corresponden siguiendo el mismo criterio; el proceso continua hasta que el alumno averigua el criterio o desiste en el empeño".

Para esta actividad se han preparado doce tareas de acuerdo con los criterios de los doce ítems de la prueba escrita del estudio empírico cuantitativo. Las tareas se proponen en el mismo orden que en la prueba escrita y, por tanto, siguen la escala inductiva numérica, correspondiendo dos tareas a cada nivel. Su distribución, en la que se indican también los números que se le entregan al entrevistado para el desarrollo de la actividad, es la siguiente:

Nivel 1: a) Contar de 10 en 10 en orden ascendente (del 1 al 89)
b) Contar de 10 en 10 en orden descendente (del 11 al 99)

Nivel 2: a) Contar de dos en dos en orden ascendente (del 1 al 97)

b) Contar de dos en dos en orden descendente (del 3 al 99)

Nivel 3: a) Sumar 6 (del 1 al 93)
b) Sumar 12 (del 1 al 87)

Nivel 4: a) Restar 8 (del 9 al 99)
b) Restar 13 (del 14 al 99)

Nivel 5: a) Multiplicar por 3 (del 1 al 30)
b) Multiplicar por 4 (del 1 al 24)

Nivel 6: a) Dividir por 3 (múltiplos de 3 menores que 100)
b) Dividir por 2 (múltiplos de 2 menores que 100).

6.5.2.1.- Objetivo

Con la actividad se pretende averiguar si los sujetos llegan a descubrir/establecer los criterios o relaciones comunes a las parejas que se construyen en el transcurso de la entrevista, cuáles son los tipos de relaciones numéricas que son capaces de identificar y cómo las establecen. En cada tarea se mantiene el criterio entre las parejas utilizadas para que el entrevistado intente descubrirlo.

6.5.2.2.- Material

Se han preparado dos conjuntos de 100 fichas magnéticas, de 2x2 centímetros, en las que figuran las cifras del 0 al 99; uno de los dos grupos es para el alumno y el otro para el investigador. Además, se dispone de un tablero, también magnético, dividido en dos columnas con seis celdas de 2x2 centímetros cada una; la primera columna corresponde al alumno y la segunda al investigador (ver figura 6.2).

6.5.2.3.- Desarrollo de la entrevista

Se realiza, en cada caso, de acuerdo con el siguiente procedimiento:

- el entrevistador pide al alumno que ponga un número en la primera celdilla de su columna;
- una vez que el alumno ha puesto el número que ha creído conveniente, el entrevistador coloca en la celda vecina el número que corresponde con el criterio serial seleccionado, sin decir nada;
- el entrevistador pide al alumno que ponga otro número en la

segunda celdilla de su columna;

- una vez que el alumno ha puesto el número, el investigador le pregunta si sabe el número que va a poner o si puede adivinarlo fijándose en los números anteriores;
- si el alumno da una respuesta, se le pregunta por qué ha propuesto ese número. Si ha acertado, se le pregunta como lo ha adivinado y se pasa a otra tarea. Si no acierta, el investigador coloca el número que corresponde y le propone un nuevo ensayo. Así se continúa hasta que el alumno acierte, o bien hasta que agote las seis oportunidades previstas. Se termina la actividad en el momento que se agoten las seis posibilidades.

6.5.2.4.- Aspectos a observar

a) número de ensayos hasta obtener el criterio;
b) explicación del criterio (ajuste a la taxonomía establecida);
c) nivel alcanzado (comparación con los resultados de la prueba escrita);
d) si el alumno aplica el criterio de la tarea anterior en el primer intento de solución de una nueva tarea;
e) estrategia seguida en la elección de los números que propone;
f) criterios aplicados en los intentos fallidos;
g) suficiencia de las respuestas para justificar el nivel alcanzado;
h) si el alumno de un nivel aplica criterios de su nivel ante una tarea de nivel inferior o responde de acuerdo con este último;
i) si el alumno puede superar una tarea de nivel superior al suyo con estrategias de su nivel o modifica sus criterios;
j) si se aplica un criterio aditivo en el primer intento de resolver la primera serie multiplicativa (en los casos que corresponda).

6.5.2.5.- Codificación de respuestas

Las distintas tareas de esta actividad se corresponden con las series de la prueba escrita. Tenemos, por tanto, seis categorias que incluyen, cada una de ellas, dos tareas que vamos a simbolizar según se indica a continuación:

Representacional: R1 y R2
Ordinal: O1 y O2
Aditiva: A1 y A2
Sustractiva: S1 y S2
Multiplicativa: M1 y M2
Partitiva: P1 y P2

6.5.3.- Actividad 3

"Ante varias parejas de números, entre las que existen relaciones diversas, a veces iguales, el alumno debe hacer grupos de parejas, de manera que en cada grupo deben estar todas las parejas de números que guardan entre sí la misma relación".

En las tareas anteriores el alumno debe descubrir las relaciones ocultas en una pareja de números (actividad 1) o las relaciones comunes a varias parejas de números (actividad 2). En ambos casos, todas las parejas presentan la misma relación, a diferencia de lo que ocurre en esta tercera actividad. Aquí, el alumno debe identificar/clasificar las parejas que tengan la misma relación de un total de cuatro parejas que se le presentan.

6.5.3.1.- Objetivo

El objetivo es analizar si el alumno identifica dos relaciones equivalentes, es decir, si establece o no analogías entre parejas de números. Dos parejas son equivalentes si en cada una de ellas se puede establecer la misma relación: (a,b) es equivalente a (a',b') si existe una relación R tal que aRb y a'Rb'.

6.5.3.2.- Material

Para cada uno de los seis niveles obtenidos en el estudio cuantitativo hemos construido cuatro parejas de números imitando las fichas del dominó. Para cada nivel las parejas han sido las siguientes:

Nivel 1: [2 12] [32 42] [52 42] [92 82]

Nivel 2: [3 5] [7 9] [29 27] [84 82]

Nivel 3: [2 8] [3 9] [1 13] [41 53]

Nivel 4: [9 1] [38 30] [72 59] [95 82]

Nivel 5: [2 6] [3 9] [2 8] [3 12]

Nivel 6: [15 5] [12 4] [6 3] [8 4]

6.5.3.3.- Desarrollo de la entrevista

El procedimiento es el siguiente:

- La tarea tiene una primera parte introductoria muy elemental, para asegurar que los alumnos comprenden el mecanismo de la misma. En esta primera parte se le presentan al entrevistado cuatro rectángulos desiguales (dos azules y dos verdes) y se le pide que los empareje. Una vez emparejados se le pregunta en que se ha basado o porqué los ha agrupado de esa manera (debe decir por el color).
- Se le presenta al niño una pareja de números como las obtenidas en la actividad anterior(por ejemplo [2 12]) y nos debe decir como "van" los dos números o que relación cree que puede haber entre ellos;
- Se le explica con detenimiento el procedimiento con las cuatro primeras parejas, presentando las posibilidades de emparejamiento (pueden ir así, poniendo dos en un lado y otras dos en otro, o bien así, o así etc.). Se le hace ver que los emparejamientos deben tener un motivo y que cuando junte dos parejas tendrá que decir porqué deben estar juntas. Se le pregunta, a continuación, si sabe lo que tiene que hacer;
- Se le explica que le vamos a presentar cuatro parejas de números y debe emparejar o juntar, de dos en dos o bien dos en un lado y dos en otro o por separado, etc., las que "van" de la misma manera, tal y como hizo con los rectángulo de colores;
- A continuación se le dice al alumno que las empareje como él crea conveniente. Una vez agrupadas se le pregunta: **¿porqué las has colocado así?**;
- Una vez que ha respondido, se le pregunta: **¿Puedes explicarmelo de otra manera?; ¿Ves otro motivo distinto al que me has dicho?; ¿Se te olvida algo?**;
- Contestadas las preguntas, se le pregunta si es capaz de emparejarlas de alguna otra manera.

Como se puede comprobar en la relación de respuestas recogidas, que se incluye en el anexo 6.1, algunos alumnos dan más de una solución y, en cada una de ellas, más de una justificación.

6.5.3.4.- Aspectos a observar

Los aspectos a obsevar en esta actividad son los siguientes:

a) Comprobar si el alumno llega a comparar relaciones y establecer, en su caso, relaciones entre relaciones;
b) Averiguar en qué se basan para establecer las relaciones;

c) Cuáles son las relaciones básicas que establecen;

d) A partir de qué nivel son capaces de establecer cada tipo de relaciones y cuáles son las relaciones concretas que establecen o descubren.

6.6.- Instrumentos y estrategias de recogida de información

Para la recogida de datos hemos utilizado un instrumento común que ha sido la grabación en video. Para las actividades 1 y 2 se han confeccionado y utilizado, además, las fichas de observación o de campo que se explican con detalle en los próximos párrafos.

a) Grabación en video. Su finalidad es la de poder reproducir las entrevistas y recuperar aquéllos detalles que no se recogen en las fichas de campo. En concreto, además de servir como prueba para esta parte de la investigación, permite completar la información obtenida, subsanar cualquier omisión y describir el perfil inductivo de los distintos niveles.

b) Fichas de campo. Se utilizan para registrar por escrito datos concretos, controlar el desarrollo de la entrevista y prevenir posibles fallos en la grabación.

En las figuras 6.1 y 6.2 se representan las fichas correspondientes a las actividades 1 y 2, respectivamente. En la actividad 1 el entrevistador va señalando las relaciones que el alumno propone, anotando las que no coinciden con las previstas.

La ficha correspondiente a la actividad 2 (Figura 6.2) consta de doce casillas, en las que se transcriben los resultados de la entrevista, es decir, los números que va proponiendo el alumno, el criterio que ha utilizado y su posible modificación, el número de intentos para descubrir el criterio y las estrategias de selección de los números.

NOMBRE............................ ...... CODIGO (.........)

¿Podrías decirme que números están en esta pareja?
Dime en que se parecen estos números. Busca todas las cosas en que se parecen. Ahora, di me en que son distintos o diferentes. Busca todas las diferencias.

1	2

Uno más Doble-Mitad Impar-Par Siguiente-Anterior
Mismo número de cifras Mayor-Menor

2	7

Cinco más Par-Impar Mayor-Menor
Mismo número de cifras

3	7

Cuatro más Impares Mayor-menor
Mismo número de cifras

4	6

Dos más Pares Mayor-Menor Doble menos dos

5	9

Cuatro más Impares Mayor- Menor doble menos uno

4	14

Diez más Pares Cuatro común Mayor-Menor
Distinto número de cifras

3	22

19 más Impar -Par Mayor- Menor Distinto número de cifras
Dos cifras iguales

5	37

32 más Impares Mayor-Menor Distinto número de cifras

44	66

22 más Pares Mayor-Menor Cifras pares en ambos
Cifras iguales Dos cifras

50	70

20 más Pares Mayor-Menor Doscifras Terminan en cero

Figura 6.1. Ficha de campo correspondiente a la actividad 1

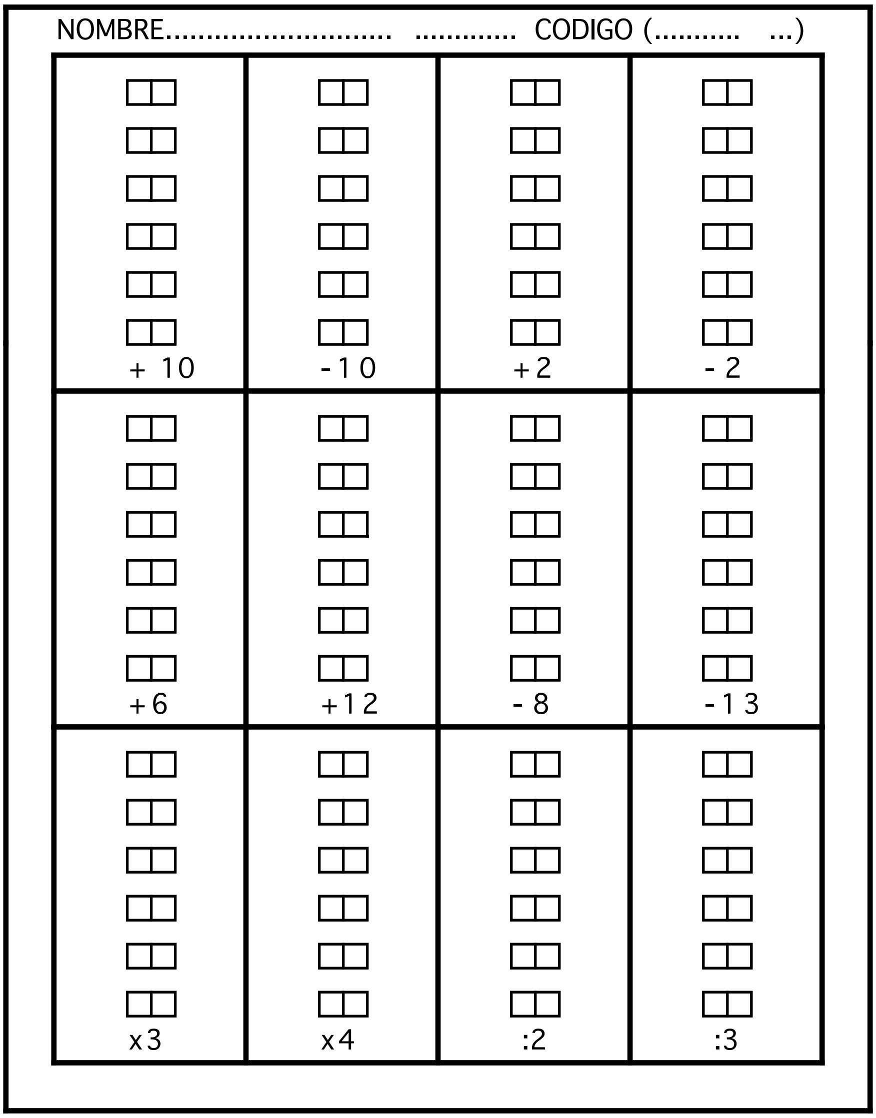

Figura 6.2. Ficha de campo correspondiente a la actividad 2

En la figura 6.3 se puede observar el detalle de la situación de una entrevista, en relación con la actividad 2, en un momento dado. En dicha figura aparece, en la columna de la izquierda, el tablero magnético en el que transcurre la acción, mientras que en la columna de la derecha aparece la celdilla correspondiente a la ficha de campo con la información recogida por el investigador. En este caso, Antonio Nicolás (de coordenadas (N5, 10, 4º)) descubrió el criterio en la segunda pareja sin ningún intento fallido. Como se aprecia en las anotaciones, este alumno utiliza la multiplicación por 4 para adivinar el número (48) que propone inmediatamente después.

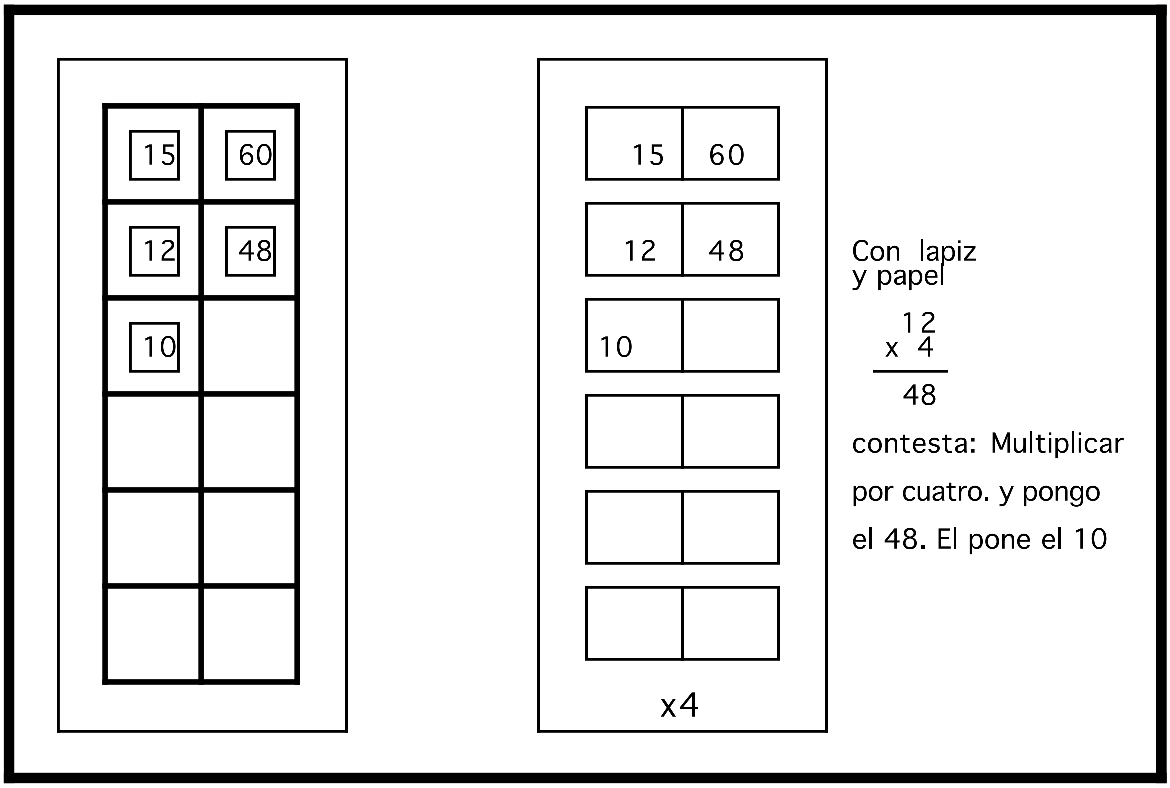

Figura 6.3 . Situación de una entrevista sobre la actividad 2 en un momento dado.

6.7.- Consideraciones generales sobre el desarrollo de las entrevistas

El periodo de las entrevistas comenzó en el colegio público-rural, para continuar, en segundo lugar, con el colegio público-urbano y terminar, por último, con el colegio privado-urbano. Con objeto de evitar que los resultados se pudieran ver contaminados por el efecto de nuevos aprendizajes, se procuró que no transcurriera, en ningún caso, más de un mes desde la realización de la prueba escrita hasta el desarrollo efectivo de las entrevistas.

Se realizaron a puerta cerrada en un despacho preparado a tal efecto en cada uno de los centros y pasando, uno por uno, todos los alumnos seleccionados. Cada entrevista tuvo una duración que osciló entre los 60 y los 90 minutos, por lo que, si tenemos en cuenta que no se permitieron interrupciones y que era obligado respetar el horario de los alumnos, incluido el recreo, sólo se pudieron realizar un máximo de tres entrevistas diarias. Por último hemos de decir que todas las entrevistas tuvieron un desarrollo adecuado, incluso más satisfactorio de lo previsto.

En los apartados que siguen, hasta el final del capitulo, se exponen los resultados y conclusiones de dichas entrevistas y estudios organizados de la siguiente manera:

Primero.- Resultados y conclusiones de cada uno de los estudios previstos en cada una de las tres actividades;

Segundo.- Resultados y conclusiones de cada actividad

Tercero.- Resultados y conclusiones generales del estudio cualitativo.

6.8.- Resultados y conclusiones de la Actividad 1

Recordamos que en esta actividad el alumno compara pares de números y debe decir los parecidos y diferencias que él entiende que existen entre ellos. En este sentido vamos a considerar, para todos los estudios realizados a partir de los resultados de esta actividad, que el alumno establece una relación si la hace explícita al menos una vez en el transcurso de la entrevista.

6.8.1.- Estudio general

De acuerdo con el diseño, las respuestas abarcan cuatro bloques: simbólico, ordinal, aditivo y conceptual, cada uno de ellos dividido en las modalidades que se deducen del planteamiento de la actividad 1 (apartado 6.5.1) y de las respuestas de los escolares. En la tabla 6.2, se exponen los resultados organizados por filas, según la situación de los alumnos expresada mediante coordenadas, y, por columnas, según los tipos de relaciones establecidas. Para la interpretación de dicha tabla debemos añadir las siguientes precisiones:

- La columna n señala las frecuencias correspondientes a cada una de las situaciones (indica el número de alumnos en cada caso);
- Cada asterisco (*) indica que un alumno de los que se ubican en la fila ha establecido la relación de la categoría asignada en la columna correspondiente;
- Las casillas en blanco indican que ningún alumno ha establecido las relaciones que encabezan las columnas respectivas;
- Se utiliza el signo # para destacar una respuesta aditivo-ordinal. Con ello queremos señalar que el alumno ha respondido ordinalmente. Así, Pedro (N4, 7, 2), al comparar 3 con 7 responde "cuatro números en medio", mezclando aspectos ordinales y cardinales.

Bloques / Casos	n	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N1,6,1)	1	*	*	*	*					
(N1,7,2)	1	*	*	*	*	*				
(N2,6,1)	3	**	**	**	**	*				
(N3,9,3)	1	*		*	*	*				
(N3,11,5)	1		*	*	*	*	*	*	*	*
(N4,7,2)	3	**	**	**	*		*	#	#	
(N4,9,3)	3	**	**	***	***	***	*	#		
(N4,9,4)	3	**	***	***	***	***	*		*	
(N4,10,4)	2		*	**	*	**	*	*	*	*
(N5,10,4)	1	*	*	*	*	*				*
(N5,11,6)	1		*	*	*			*	*	*
(N6,10,5)	3	**	**	***	**	**		***	***	**
(N6,11,5)	1		*	*	*	*	*	*		*
(N6,11,6)	2		**	**		*	**	**	*	**
(N6,12,6)	2		**	**	**		**			**

Tabla 6.3. Distribución de relaciones por casos y bloques

Los resultados indican, de acuerdo con lo esperado, que aparecen todos los tipos de relaciones previstas, que existen diferencias entre los escolares de los primeros niveles, lo cual era una de las finalidades de la actividad, y que, por el contrario, dichas diferencias no son significativas a partir del nivel N4. Por otra parte, se ha producido el cumplimiento absoluto de las expectativas según los diferentes niveles, salvo las desviaciones siguientes:

1) Los dos alumnos del nivel N3 no han estado igualados; Marta (N3, 11, 5) establece todos los tipos de relaciones, llegando a las conceptuales, mientras que Manolo (N3, 9, 3) ha tenido un rendimiento por debajo de su nivel, al llegar, únicamente, a las relaciones ordinales.

2) Antonio Nicolás (N5, 10, 4) está en un nivel multiplicativo y en sus respuestas omite las relaciones aditivas.

Las conclusiones del estudio son las siguientes:

a) Las respuestas se ajustan a la escalabilidad de acuerdo con nuestro modelo teórico, es decir:

a1) Los escolares de los niveles N1 y N2 no alcanzan el subestado aritmético aditivo; las relaciones que establecen corresponden a los subestados simbólico aditivo y representacional.

a2) Los escolares de los niveles N3 y N4 llegan al subestado aditivo aunque de manera muy ajustada; sólo establecen alguna relación aditiva de todas las posibles (dos de ellos alcanzan este subestado con referencias ordinales (#)).

a3) Las relaciones establecidas por los escolares de los niveles N5 y N6 se encuentran por encima del subestado aditivo.

b) La única relación conceptual utilizada por los escolares de la muestra es la paridad numérica, que no aparece hasta los 10 años, cuarto curso y nivel N3.

c) Los sujetos dejan de considerar las relaciones que se refieren a la grafía de los signos numéricos como relaciones aritméticas o matemáticas a partir de los 11 años y por encima del nivel N5.

6.8.2.- Estudio I

Como se recordará, con el estudio I se pretende comparar las relaciones establecidas por alumnos del mismo nivel pero de distintas edades y cursos; en particular, nos proponemos en este apartado exponer los resultados y conclusiones de la comparación de las respuestas dadas a la primera actividad por tres alumnos del nivel N4 y de los cursos segundo, tercero y cuarto de Educación Primaria. Las respuestas de los nueve alumnos entrevistados (tres por colegio) se incluyen el anexo 6.1. Los logros alcanzados por dichos alumnos se representan en la tabla 6.3.

I	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N4,7,2)	**	*	**	*		*	#	#	
(N4,9,3)	**	**	***	***	**	*	#		
(N4,10,4		*	**	*	**	*	*	*	*

Tabla 6.3. Distribución de las relaciones establecidas por los escolares del nivel N4

Del análisis de las respuestas y de los datos de la tabla anterior extraemos las siguientes conclusiones:

a) Como queda patente en la tabla 6.4, los escolares del nivel N4, aún perteneciendo a cursos diferentes, establecen el mismo tipo de relaciones al comparar dos números.

b) En las respuestas predominan las relaciones ordinales, muchas de ellas con referencias espaciales. Veamos algunos ejemplos:

> Rocío (N4, 7, 2), al preguntarle ¿Para qué sirven el uno y el dos?, responde categóricamente "Para contar". Asímismo, al preguntarle si puedo decir “tres, dos, nueve, seis, veinte, quince..” me responde: "No, porque tiene que ir derecho" (Referencia espacial);

> Pedro, que es del mismo curso y nivel que Rocío, al preguntarle si dos y siete son distintos, responde que el dos va antes del siete. A continuación se le pregunta: ¿Cómo lo sabes? y su respuesta es: "Porque sé contar";

Miguel (N4, 9, 3), al comparar el dos con el siete responde: "Que se diferencian en que uno es más alto y el otro más bajo"; entonces le pregunto: ¿A qué te refieres?; su respuesta es: "A que uno está más cerca de un número más alto y el otro más lejos";

Isaac (N4, 9, 3), da una interpretación de la cardinalidad de una colección al comparar el uno y el dos: "dos números distintos. No tienen el mismo significado: una cosa, dos cosas". A continuación vuelve a la serie numérica y dice: "Que son unos números que siempre van juntos. El uno va a continuación del dos siempre". En cuanto a la cardinalidad, Isaac ha sido el único niño de este nivel que hace referencia al aspecto cardinal al dar significado a los números.

Manuel (N4, 10, 4), al preguntarle en qué son distintos el uno y el dos, nos responde: "Son distintos porque son distintos. Después que uno va delante y otro detrás; porque tienen un orden; porque tienen que llevar un orden".

c) Algunas respuestas están muy ligadas a la construcción memorística de la serie numérica y al aprendizaje de la numeración escrita, según se pone de manifiesto en las respuestas siguientes:

Sergio (N4, 9, 4), al comparar el cuatro y el seis, explica: "Al cuatro le faltan seis para llegar al diez y al seis cuatro. Lo mismo que antes (se refiere a las tareas anteriores), los dos son unidades y están del cero al diez. Si los juntamos forman el cuarenta y seis y con el cuatro aquí y el seis aquí forman el 64";

Antonio (N5, 10, 4), al comparar el cuatro y el seis, dice: "El seis es mayor, porque el cuatro va en primer lugar que el seis. El cuatro va en el cuarto lugar y el seis va en el sexto lugar".

d) Los alumnos de este nivel no llegan a generalizar resultados aritméticos. Así, Sergio (N4, 9, 4), a la pregunta ¿cuándo dos números son iguales?, contesta sobre el ejemplo: "Son iguales si aquí esta el seis y aquí el seis".

6.8.3.- Estudio II

En este estudio nos proponemos comparar las respuestas de alumnos de la misma edad y curso pero de distinto nivel. Dado que la actividad 1 sólo alcanza a las relaciones aditivas, es evidente que sólo perseguimos interpretar las diferencias que puedan existir en cuanto al establecimiento de relaciones en los primeros estados del modelo teórico.

En los dos apartados siguientes se exponen los principales resultados que se deducen de las dos "expansiones" detectadas, es decir, en 2º curso y en 5º curso. En cada uno de ellos se comparan las respuestas de dos alumnos por colegio con resultados extremos en las pruebas escritas (niveles extremos dentro de cada edad y curso).

6.8.3.1.- Comparación de las respuestas de escolares (N1, 7, 2) con las respuestas de escolares (N4, 7, 2)

En la tabla 6.4 se distribuyen los argumentos o categorias de respuestas proporcinadas por dos alumnos de coordenadas (N1, 7, 2) y tres alumnos de coordenadas (N4, 7, 2), entre cuyas respuestas se aprecian diferencias importantes a pesar de estar en el mismo curso, tener la misma edad y, en teoría, el mismo nivel instructivo.

II	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N1,7,2)	**	*	*	**	*				
(N4,7,2)	**	*	**	*		*	#	#	

Tabla 6.4. Distribución de relaciones establecidas por alumnos de los niveles N1 y N4 con la misma edad y curso

A partir de las respuestas llegamos a las siguientes conclusiones:

a) Todos los alumnos del estudio establecen relaciones simbólicas basadas en la representación numérica;

b) Las diferencias entre los alumnos del nivel N1 y del nivel N4 son ordinales y aditivas; estas diferencias corresponden a competencias de los niveles intermedios.

Los siguientes ejemplos confirman las conclusiones anteriores:

- Con la pareja de números [1 2]

Salvador (N1, 7, 2)
E: Dime algo del uno y del dos. ¿No sabes decirme nada del uno y del dos?
S: Si, son números, son para estudiarlos y para decirlos

Rocío (N4, 7, 2)
E: ¿Para que sirven el uno y el dos?
R: Para contar

- Con la pareja de números [3 22]

Salvador (N1, 7, 2)
"Este ya se ha pasado del veinte. El tres y el veintidós. Al tres le falta mucho, mucho para el veinte. Este ya ha pasado del veinte. Si se le pusiera delante un dos, aquí, sería el veintitrés y sería un número más que este. Ahora en vez de un patito son dos patitos. Este es el mismo dos que antes"

Rocío (N4, 7, 2)
R: Dos y veintidós
E: ¿Qué pasa ahí?, a ver...
R: El veintidós son dos, dos números iguales. En este sólo un número
E: ¿Qué más?
R: El dos parece un pato.
E: ¿Alguna otra cosa?
R: El tres es distinto del dos. El tres y el dos tienen lo mismo en el principio. Pero el dos tiene como rayita y el tres tiene otra

Pedro (N4, 7, 2)
E: ¿Qué números son?
P: Tres y veintidós
E: ¿Se parecen en algo?
P: Así (Señala el redondel superior del tres)
E: ¿Son distintos?
P: El 3 es de una forma y el 22 de otra. El 3 va antes que el 22 y hay **17 números en medio**
E: Hazlo bien
P: Veinte, no!, diecinueve
E: Te has equivocado en uno. ¿Que tienes que hacer para calcular los números de en medio?
P: Sumar

Alberto (N4, 7, 2)
A: El tres y el veintidós. El tres va así y el veintidós aquí.
E: Otra cosa
A: Que el veintidós son dos números y el tres uno solo
E: Muy bien. ¿Qué más?
A: El veintidós tiene una cosa plana y el tres es así

Alberto (N4, 7, 2) permanece en un posicionamiento fijo, estableciendo siempre el mismo tipo de relaciones y quedándose en los aspectos representacionales, por lo que no demuestra con esta actividad las competencias que le corresponden de acuerdo con su nivel

Por otra parte, de acuerdo con nuestro modelo teórico, Salvador, Rocío y Alberto expresan relaciones representacionales incluyendo la grafía y el sistema numérico posicional. Salvador, al comparar con la segunda decena, vuelve a relacionar los números de acuerdo con un posible proceso de aprendizaje o construcción de la serie numérica. Pedro manifiesta claramente relaciones ordinales, que intenta conmensurar aditivamente marcando las diferencias entre los niveles.

6.8.3.2.- Comparación de las respuestas de escolares (N3, 11, 5) con las respuestas de escolares (N6, 11, 5)

En la tabla 6.5 se presentan los resultados de las respuestas a la actividad 1 de los escolares (N3, 11, 5) y (N6, 11, 5) (un sujeto de cada categoría). Como se aprecia en dicha tabla, no se producen diferencias significativas entre las respuestas, lo que era de esperar si tenemos en cuenta que la información recogida en esta primera actividad no sobrepasa el nivel aditivo, el cual se supone superado ya por ambos escolares. Únicamente podemos destacar de dicha información que ambos alumnos no establecen ninguna relación basada en la representación gráfica de los números.

II	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N3,11,5)		*	*	*	*	*	*	*	*
(N6,11,5)		*	*	*	*	*	*		*

Tabla 6.5. Distribución de relaciones establecidas por niños de los niveles N3 y N6 de la misma edad y curso

Veamos algunos ejemplos de las respuestas de estos alumnos ante la pareja [3 22]:

Marta (N3, 11, 5)
M: El tres y el veintidós. El tres es un número impar y el veintidós también. ¿No?
E: Es par

M: El veintidós es mayor que el tres, pero de tres a veintidós hay mayoría o sea que hay más números
E: ¿Cuantos hay?
M: Diecinueve
E: ¿Qué más?
M: Veintidós tiene un número más que tres
E: ¿Distinto número de cifras?
M: Si

Ricardo (N6, 11, 5)
E: ¿Cómo son?
R: Uno es par y el otro impar. Hay dos cifras en uno y en el otro una
E: ¿Qué más?
R: El tres es menor

Los dos alumnos establecen el mismo tipo de relaciones. Sin embargo, Ricardo manifestó un mayor dominio del lenguaje relacional en el transcurso de la entrevista.

6.8.4.- Estudio III

Con este estudio, como se recordará, pretendemos analizar el salto producido al pasar de seis a siete años (primer curso a segundo curso) y el salto producido al pasar de 9 a 10 años (cuarto curso a quinto curso). Para ello, al igual que en el estudio II, vamos a comparar las respuestas de dos pares de alumnos de cada colegio con valores extremos en las coordenadas que definen sus situaciones respectivas, es decir, un alumno de 1º y otro de 2º, de niveles correspondientes N2 y N4, para el primer salto, y un alumno de 4º y otro de 5º, de niveles N4 y N6, para el segundo salto. En los dos apartados que siguen se exponen los resultados de ambas comparaciones.

6.8.4.1.- Comparación de respuestas de escolares (N2, 6, 1) con respuestas de escolares (N4, 7, 2)

En la tabla 6.6 se indican las relaciones que utilizan los tres alumnos (N2, 6, 1) y los tres alumnos (N4, 7, 2). Las diferencias que se observan en dicha tabla son ordinales y aditivo-ordinales.

III	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N2,6,1)	**	**	**	**	*				
(N4,7,2)	**	*	**	*		*	#	#	

Tabla 6.6. Distribución de relaciones establecidas por alumnos (N2,6,1) y (N4,7,2)

Las respuestas de los alumnos (N4, 7, 2) han sido tratadas y ejemplificadas en los estudios anteriores, por lo que en este apartado nos limitamos a exponer las respuestas de los alumnos (N2, 6, 1) ante las parejas numéricas [1 2] y [3 22].

Gema (N2,6,1)
E: ¿Qué números son?
G: El uno y el dos
E: ¿En que se parecen?
G: No se parecen en nada
E: ¿Tú conoces esos números?
G: Si
E: ¿Son distintos?
G: Si
E: ¿Se parecen en algo?
G: No

Damián (N2,6,1)
E: Dime: ¿Qué números son?
D:El uno y el dos
E: ¿Se parecen en algo?
D: Silencio
E: Vamos a ver, ¿en qué son distintos?
D: En el doce
E: Son dos números... ¿Cual es el primero?
D: El uno
E: ¿Y el otro?
D: El dos
E: ¿Son distintos?
D: Si
E: ¿En qué?
D: Silencio
E: ¿Son el mismo número?
D: No
E: El primero y el segundo ¿son iguales?

D: Si
E: Si...¿son iguales?
D: No
E: ¿En que se diferencian?
D: Silencio

María (N2,6,1)
E: ¿Dime qué números son estos?
M: El uno y el dos
E: Se parecen en algo
M: No
E: ¿Son distintos?
M: Si
E: ¿En qué?
M: En como se llaman. Uno está recto y el otro está doblado

En esta actividad los escolares (N2, 6, 1) reconocen los números escritos pero no están en condiciones de establecer relaciones numéricas. Cuando el entrevistador utiliza un lenguaje ordinal (primero, segundo, en el caso de Damián), estos escolares captan lo que se les quiere decir, pero, por sí mismos, no establecen relaciones ordinales. Podemos decir que establecen comparaciones simbólicas y ordinales con referentes infralógicos del tipo “más grande-más pequeño”, como ocurre en las respuestas de Damian (N2, 6, 1) ante la pareja [3 22]. Los siguientes ejemplos ponen de manifiesto las afirmaciones anteriores:

Gema (N2,6,1)
E: ¿qué números son?
G: El tres y el veintidós
E: ¿Se parecen en algo?
G: No
E: ¿Son distintos?
G: Este es así y este es así (Señalando los contornos)
E: ¿Ves alguna otra diferencia que no sea esa?
G: No
E: ¿Ninguna, ninguna?
G: Ninguna

Damián (N2,6,1)
E: Como antes
D: El tres y el veintidós
E: Muy bien. Algún parecido o alguna diferencia?
D: Silencio
E: ¿Son diferentes en alguna cosa?
D: si
E: A ver...

D: El tres es más chico. El veintidós es más grande
E: ¿Hay alguna otra diferencia entre los dos números?
D: Si
E: ¿cual?
D: Silencio

María (N2,6,1)
E: Estos números
M: El tres y el veintidós
E: ¿Son distintos?
M: Si
E: A ver, ¿en qué?
M: En que uno esta doble abierto y el otro abierto
E: ¿En qué más?
M: Uno tiene dos números y el otro uno

6.8.4.2.- Comparación de las respuestas de escolares (N4,9,4) con las respuestas de escolares (N6,10,5)

Se comparan las respuestas de tres escolares de coordenadas (N4, 9, 4) con las respuestas de tres escolares de coordenadas (N6, 10, 5). Los resultados se representan de manera resumida en la tabla 6.8, en la que se aprecia que hay una mayor consistencia del nivel aditivo en los escolares del nivel N6 y que se produce una diferencia significativa entre los dos niveles estudiados en cuanto al establecimiento de relaciones conceptuales. Estas relaciones aparecen en las respuestas de los escolares del nivel N6.

III	S1	S2	S3	S4	O1	O2	A1	A2	C
(N4,9,4)	**	***	***	***	***	*		*	
(N6,10,5	**	***	***	**	**		***	***	**

Tabla 6.8. Distribución de relaciones establecidas por alumnos (N4, 9, 4) y (N6, 10, 5)

En las respuestas de los alumnos de coordenadas (N6, 10, 5) se observan dos tipos de generalizaciones: las relacionadas con las propiedades de las operaciones y las que tienen que ver con la compatibilidad del orden y la numeración escrita, la suma y el producto. Veamos un ejemplo de lo que queremos decir en ambos casos:

En el primer caso:

- Pablo (N6, 10, 5): "Da lo mismo multiplicar dos por uno que uno por dos";

En el segundo caso:

- Alejandra (N6, 10, 5): "Si se junta el uno con un número, sale menor que si se junta con el dos". "Si el veintidós se suma con un número es siempre mayor que el tres con el otro. Si se le pone un cero detrás al veintidós sale mayor que cuando se le pone el tres. Si le ponemos un número al tres delante, sigue siendo menor que si se lo pones al veintidós".

Asímismo, podemos destacar la distinción que establece Alejandra entre la diferencia de dos números con respecto a los números intermedios: "Entre tres y veintidós hay diecinueve números y en medio dieciocho".

Como conclusión global del estudio podemos decir que los alumnos del nivel N6, a diferencia de los del nivel N4, utilizan aspectos conceptuales en el establecimiento de relaciones y manifiestan una generalización de sus comparaciones.

6.8.5.- Conclusiones (actividad 1)

A partir de las respuestas obtenidas y de su análisis en los diferentes estudios realizados establecemos las siguientes conclusiones:

a) Se produce una gran concordancia entre los niveles alcanzados por los alumnos de la muestra según la E.I.N, las relaciones que han establecido en sus respuestas y el modelo evolutivo de razonamiento inductivo numérico. Esta afirmación queda patente en los siguientes resultados:

- Los sujetos entrevistados de los niveles N1 y N2, sólo llegan a establecer relaciones simbólicas, observándose, en los niveles inferiores, un predominio de los aspectos relacionados con el grafismo numérico con respecto a los aspectos propiamente numéricos.
- A partir del nivel N3 empiezan a aparecer relaciones conceptuales. La única propiedad conceptual utilizada ha sido la paridad numérica.
- Hay que esperar hasta los 11 años para que los escolares se adapten al sentido aritmético de las preguntas y no establezcan relaciones de grafísmo numérico.
- Se detecta una evolución de lo simbólico a lo aritmético y a lo conceptual según avanzamos de menor a mayor nivel.
- Hay un predominio casi absoluto de las interpretaciones ordinales so-

bre las cardinales.

b) Los resultados obtenidos en el estudio II ponen de manifiesto que el currículum no es la causa fundamental de los niveles alcanzados por los escolares. Debe haber otros factores que justifiquen estos resultados.

c) Los alumnos se ajustan a las predicciones de esta actividad: discrimina los niveles inferiores (N1 y N2) de los niveles intermedios (N3 y N4) y no establece diferencias entre los niveles superiores.

6.9.- Resultados y conclusiones de la Actividad 2

Recordamos que en esta actividad el alumno elige un número y el investigador, sin decir nada, pone a su lado otro número que guarda con el anterior una cierta relación que sólo él conoce; el procedimiento se repite con nuevos números elegidos por el alumno, a cuyo lado vuelve a poner el investigador los números que corresponden siguiendo el mismo criterio; el proceso continua hasta que el alumno averigua el criterio o desiste en el empeño. En este sentido vamos a considerar, para todos los estudios realizados a partir de los resultados de esta actividad, que el alumno da una respuesta afirmativa cuando descubre la regla en el transcurso de la entrevista.

6.9.1.- Estudio general

El rendimiento general de los alumnos seleccionados se pone de manifiesto en la distribución de respuestas afirmativas (descubre la regla) que se presenta en la tabla 6.9. Desde un punto de vista global hay un ajuste casi perfecto entre estas respuestas y los resultados obtenidos en la realización de las correspondientes tareas escritas del estudio cuantitativo. Téngase en cuenta que todos los alumnos entrevistados en este estudio cualitativo (el 7% del total de la muestra inicial), menos uno, han alcanzado el rendimiento correspondiente al nivel que tenían asignado en la escala de acuerdo con las respuestas a las pruebas escritas. Pero, no sólo han alcanzado dicho nivel, sino que, además, lo han superado en un punto, lo que es razonable que ocurra puesto que se trata de una tarea manipulativa con seis intentos para resolverla y con el aliciente añadido de involucrar un juego de adivinanzas. En efecto:

- Salvador (N1, 7, 2), consigue establecer relaciones aditivas;
- Marta (N3, 11, 5) y Manuel (N3, 9, 3) consiguen establecer relaciones sustractivas;

- Isaac (N4, 9, 3), Sergio y Rubén (N4, 9, 4) consiguen establecer relaciones multiplicativas;
- Antonio (N5, 10, 4) y Ana Mª (N5, 11, 6) consiguen establecer relaciones partitivas.

En el otro extremo, tan sólo Carlos (N1, 6, 1) no alcanza su nivel en las respuestas a esta actividad.

	R1	R2	O1	O2	A1	A2	S1	S2	M1	M2	P1	P2
Carlos (N1,6,1)												
Salvador (N1,7,2)	*	*	*	*	*	*						
María (N2,6,1)	*	*	*	*								
Damian (N2,6,1)	*	*	*	*								
Gema (N2,6,1)	*		*									
Marta (N3,11,5)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Manuel (N3,9,3)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Alberto (N4,7,2)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Rocío (N4,7,2)	*	*	*	*	*	*	*					
Pedro (N4,7,2)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Gonzálo (N4,9,3)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Miguel (N4,9,3)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Isaac (N4,9,3)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
Sergio (N4,9,4)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
Lucía (N4,9,4)	*	*	*	*	*	*	*					
Rubén (N4,9,4)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*		
Manuel (N4,10,4)	*	*	*	*	*	*						
Blas (N4,10,4)	*	*	*	*	*	*	*	*				
Antonio (N5,10,4)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Ana Mª (N5,11,6)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Alejandra (N6,10,5)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Pablo (N6,10,5)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Diego (N6,10,5)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Ricardo (N6,11,5)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Marta (N6, 11,6)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Rocío (N6,11,6)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Raquel (N6,12,6)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*
Francisco (N6,12,6)	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*	*

Tabla 6.8.- Resultados alcanzados por los alumnos entrevistados en la Actividad 2.

De la tabla 6.8 y de las respuestas de los alumnos entrevistados, podemos destacar las siguientes conclusiones:

a) El que un alumno responda correctamente por escrito a una tarea de continuar una serie, no es suficiente para afirmar que ha descubierto o utilizado el criterio correcto que lo sitúa en un nivel determinado. Así por ejemplo, Salvador (N1, 7, 2) se encuentra en la tarea R1 con la pareja completa [31 41] y dice que el número que falta es el veintidós ante la pareja incompleta [12   ]. Si la prueba fuera escrita pensaríamos que ha podido aplicar, correctamente, el criterio “sumar diez” o el criterio “contar diez”. Sin embargo, al tratarse de una entrevista, la respuesta que da es "porque al treinta y uno le saltas un número y en vez del tres le pones el cuatro, cuarenta y uno", que es de un nivel inferior al supuesto, es decir, el nivel simbólico que realmente le corresponde.

Igualmente, Pedro (N4, 7, 2) responde, de forma análoga, "el cuarenta y siete. Ya sé el truco. Que si yo pongo el treinta y siete tú pones el mismo con el cuatro" ante la pareja incompleta [37   ]. Es evidente que ha utilizado un criterio de un nivel inferior al alcanzado en la prueba escrita, lo que tampoco quiere decir que su situación sea de un nivel inferior a N4.

b) No todos los alumnos del nivel N4 han respondido como Pedro ante esta tarea. Así, Isaac (N4, 9, 3), ante la pareja completa [56 66] y la incompleta [34   ], responde "vas a poner el cuarenta y cuatro (cuenta con los dedos). Porque aquí al cincuenta y seis le has sumado diez y al treinta y cuatro le has sumado otros diez".

De todo ello deducimos que los resultados de la prueba escrita son bastante ajustados a la realidad pero ciertamente incompletos, lo que aconseja la necesidad de completar la prueba escrita del estudio cuantitativo con el estudio más detallado que venimos desarrollando.

En los apartados que siguen se exponen, de manera resumida, los resultados de los estudios I, II y III, que, como veremos, permiten profundizar en las estrategias inductivas utilizadas por los escolares de los distintos niveles.

6.9.2. Estudio I

Se trata de un estudio sobre el comportamiento de los sujetos del nivel N4 ante esta segunda actividad, en el que, como veremos, se produce una cierta adaptación de las respuestas al modelo teórico.

A continuación analizamos las respuestas obtenidas a las distintas tareas de esta actividad, de acuerdo con los niveles correspondientes, para obtener finalmente unas conclusiones de todo el estudio.

6.9.2.1.-Nivel representacional: Tareas R1 y R2

En las tareas R1 y R2 todos los niños de siete años y segundo curso han aplicado las mismas estrategias, basadas en el sistema de representación y, a lo sumo, en la acción de contar. Así, Alberto (N4, 7, 2), ante la pareja incompleta [61], responde:

> "El setenta y uno. Si tú pones el cincuenta y uno entonces el siguiente del otro número, del sesenta, es también con el uno, el sesenta y uno"

A partir de los nueve años y tercer curso las respuestas se estabilizan en sumar o restar diez aunque en algunos casos se hace explicita la acción de contar para poder realizar los cálculos:

Isaac (N4,9,3)

[84 74]
[95]

I: Hombre, yo estoy sumando: 95, 94, 93, 92,91,90,89, 88,87,86. El ochenta y seis.
E: Te has equivocado
I: 84,83,82,81,80,79,78,77,76,75,74 95,94,93,92,91,90,89,88,87,86,85. El ochenta y cinco. Quitando diez. Antes estaba quitando nueve

Como podemos observar, ante el error cometido, Isaac comprueba la regla en la primera pareja para verificarla después, contando, en la segunda pareja, lo que le lleva a responder “quitando diez”. Este hecho se vuelve a reproducir en la respuesta siguiente, en la que Manuel utiliza la acción de contar para descubrir el criterio y la suma para calcular el término que falta:

Manuel (N4, 10, 4)

[40 50]
[22] M: El 32. he visto que yo he puesto el cuarenta y tú el cincuenta y he contado y en el veintidós he calculado mentalmente: veintidós y diez: treinta y dos.

Por último, encontramos alumnos que manifiestan una consolidación de las operaciones de sumar y restar. Tal es el caso siguiente:

Blas (N4,10,4):

[55 45]

[65] B: El cincuenta y cinco
E: ¿Qué has hecho?
B: Restar
E: ¿Cuanto?
B: Diez

6.9.2.2.-Nivel ordinal: Tareas O1 y O2

Al pasar del bloque representativo al bloque ordinal se modifican las estrategias en los niños pequeños, en los que predomina la acción de contar. Veamos algunos ejemplos:

Rocío (N4, 7, 2), en la tarea O1, contesta: ¿A que va de dos en dos?; igualmente, en la tarea O2, responde: "Que va de dos en dos para atrás"

Alberto (N4, 7, 2), después de varios intentos en la tarea O1, responde: "Para llegar del 91 al 93, dos".

Pedro (N4, 7, 2) continúa en el subestado representacional, como podemos observar en la entrevista de la tarea O2:

[90 88]
[50] E: ¿Qué número voy a poner?
P: Con dos cifras. Esto parece que se complica. Números grandes. El cuarenta y ..., el cuarenta, el cuarenta y ocho
E: ¿Cómo lo sabes?
P: Porque ahí has puesto un ocho (indica las unidades de 88)
E: Pon otro número
[10] E: ¿Qué voy a poner?
P: El ocho. Por que siempre tú estas poniendo el ocho, ¿no?
[10 8] E: Pon otro número
[8 6] E: Ahora yo pongo el seis. ¿Cómo van ahora los números? Pon otro número
[24] E: ¿Qué voy a poner?
P: El catorce
E: No. ¿Qué has puesto antes?
P: El ocho
E: ¿Y yo?
P: El 6. Entonces el dieciséis
E: Tú has puesto veinticuatro.¿Yo que pongo entonces?
P: El cuatro
E: Concentrate y fijate. Tú has puesto el ocho y yo el seis. ¿Qué pasa entre el ocho y el seis?
P: El veintidós. Porque le quito dos.

A partir de los nueve años se estabilizan las respuestas desde un punto de vista aditivo:

Miguel (N4,9,3)
O1: "Que aquí he puesto el setenta y cinco y tú has puesto dos números más"
O2: "Porque yo aquí he puesto setenta y cuatro y tú has puesto dos números menos"
Isaac (N4,9,3)
O1: "Este es más fácil por que a setenta le has sumado dos"
O2: "El treinta y dos. Por que al noventa le quitas dos"
Gonzalo (N4,9,3)
O1: "Sumarle dos"
O2: "Porque a setenta le quitamos dos y da 68"
Blas (N4,10,4)
O1: "Porque antes has sumado dos"
O2: "Restar. Restar dos"
Manuel (N4,10,4)
O1: "Sumandole dos. Porque he visto que yo he puesto el 40 y tú has puesto el 42. Entonces yo he puesto el 36 y como le sumas dos, es treinta y ocho"
O2: "He restado. Primero he visto aquí que he puesto setenta y tú sesenta y ocho. Si yo he puesto cuarenta y cinco tú tienes que poner cuarenta y tres"

6.9.2.3.-Nivel aditivo: Tareas A1 y A2

Se detecta un avance en los alumnos de menor edad. Podemos ver como interpretan aditivamente las tareas de este bloque:

Rocío (N4, 7, 2):
A1: "Suman seis. Llevar seis, ¿no?"
E: Suman seis
R: Si pero yo no lo hago con los dedos
A2: "yo sumar..., van de doce en doce..., el cincuenta y cinco

Pedro (N4, 7, 2):
A1: "El 37. Porque ahora le pongo seis"
A2: "Ya lo se. Porque ahora le pones doce"

Alberto (N4, 7, 2):
A1: "A cuarenta y cuatro le sumo seis y me da cincuenta"
A2: "A trece le sumo doce y da veinticinco"

Este hecho confirma la adecuación de las tareas en estos niveles elementales. Para los alumnos de esta edad hay diferencias entre las tareas ordinales y las aditivas, que se integran en la estructura aditiva en edades superiores.

En los escolares (N4, 9, 3) la estructura aditiva está ya consolidada, salvo en el caso de Miguel, que al preguntarle lo que hace para calcular nos responde: "contando con los dedos". Este alumno presenta dificultades en la tarea A2:

> [66] M: Ochenta y ocho
> E: A ver...
> M: Tú has puesto el sesenta y seis. Entonces es ..., ochenta y nueve (utiliza conteo)
> E: ¿Qué haces para calcularlo?
> M: Contando con los dedos
> E: ¿Cuanto cuentas?
> M: Creo que veintidós
> E: ¿Cómo que veintidós?
> M: Es que cuento, pero no se cuantos números cuento. Cuento así: sesenta y seis, sesenta y siete, sesenta y ocho,...
> E: ¿No sabes cuentos números cuentas?
> M: No.

Todos los alumnos mayores, de coordenadas (N4, 10, 4), han consolidado el nivel aditivo; sus respuestas así lo manifiestan según se puede observar en el anexo 6.1 al que nos remitimos.

6.9.2.4.-Nivel sustractivo: Tareas S1 y S2

De acuerdo con los resultados obtenidos en las pruebas escritas, se trata de las tareas de máxima dificultad para los alumnos del nivel N4. Esto significa que deben aparecer, necesariamente, errores, fallos y modificaciones en las estrategias correspondientes. Por otra parte, estas modificaciones deben aparecer en los alumnos más aventajados, que, a diferencia de los más pequeños, pueden reinterpretar las tareas con estrategias de niveles inferiores. Hemos de recordar que la tarea S1 se corresponde con la que determinó el nivel asignado a todos ellos en la prueba escrita.

Las respuestas a la tarea S1 responde a las expectativas del nivel y no hemos encontrado nada destacable que se aparte de los aspectos señalados en el apartado anterior. Los alumnos se han adaptado sin dificultad al pasar de lo aditivo a lo sustractivo, salvo Blas (N4, 10, 4), que invierte en un principio la relación para convertirla, posteriormente, en aditiva y dar el término anterior de la posible serie (siguiente en una serie aditiva):

[25 17]
[50] B: "Cincuenta y ocho. De diecisiete a veinticinco..., de diecisiete a veinticinco, ocho. Cincuenta y ocho"

Las principales dificultades se han producido en el descubrimiento de la relación de la tarea S2: "Restar trece". En efecto:

Rocío (N4, 7, 2) no encuentra la diferencia exacta y se confunde de unas parejas a otras; no supera la tarea por defectos en el cálculo mental, aunque sabe que el criterio es restar.

Pedro (N4, 7, 2) consigue superar la tarea una vez que se le propone que realice los cálculos con lápiz y papel.

El caso de Alberto (N4, 7, 2) es especial, por lo que se expone a continuación la entrevista completa:

[50 37]
[40] E: ¿Qué voy a poner?
A: El veintisiete
[40 27] E: muy bien. ¿Cómo lo sabes?
A: Contando diecisiete menos
E: ¿Cómo? . Diecisiete menos
A: También está el cincuenta menos
E: Pon otro número
[53] E: Ahora como sería?
A: Cuarenta
[53 40] E: Muy bien. ¿Cómo lo has hecho?
A: Me he fijado en el cincuenta y tres que se parece al cincuenta. Entonces digo: Si cincuenta el resultado es treinta y siete, tres más, que son estos (Señalando en el 53), serían cuarenta
E: Pon otro número
[32] E: ¿Cual voy a poner?
A: El diecinueve
[32 19] E: ¿Qué has hecho?
A: He cogido un número del tres (Se refiere a coger un número de la tercera decena). Me fijo en este (En el 40 anterior) y digo uno menos (En el 32 hay una decena menos que en 40) serán veinte. Menos uno (En 53 hay tres unidades y en 32 solo dos) son diecinueve.
E: Qué es lo que estas haciendo entonces?
A: He ido contando trece menos

Miguel (N4, 9, 3) continúa aplicando el conteo: "Contando para atrás"

Isaac (N4, 9, 3) recurre también al conteo: "Al setenta quitarle trece. Si al cuarenta le quito trece queda treinta y siete, ¿no?..., veintiocho,..., veintisiete. ¿Sabe lo que había hecho?. Contar cuarenta y nueve, cuarenta y ocho, cuarenta y siete, cuarenta y seis, cuarenta y cinco, cuarenta y cuatro, cuarenta y tres, cuarenta y dos, cuarenta y uno, cuarenta, treinta y nueve, treinta y ocho, treinta y siete".

6.9.2.5.-Nivel multiplicativo: Tareas M1 y M2

De todos los alumnos cuyas respuestas se han analizado en este estudio, tan sólo Isaac (N4, 9, 3) ha superado la tarea M1, y lo ha hecho, además, con suma facilidad. El resto de los alumnos han intentado resolver la tarea sin éxito, como se pone de manifiesto en los siguientes resultados:

Pedro (N4, 7, 2): aplica estrategias aditivas. Agota los seis intentos;
Alberto (N4, 7, 2): aplica estrategias aditivas. Agota los seis intentos;
Miguel (N4, 9, 3): aplica estrategias aditivas. Abandona en el tercer intento;
Blas (N4, 10, 4): aplica estrategias aditivas. Agota los seis intentos.

Estos resultados confirman nuestras predicciones sobre el dominio de estrategias aditivas ante tareas multiplicativas de los alumnos del nivel N4.

6.9.2.6.- Nivel partitivo: Tareas P1 y P2

Isaac (N4, 9, 3) consigue superar la tarea M2 con facilidad. En la tarea P1 aplica estrategias multiplicativas y agota los seis intentos sin conseguir establecer la relación.

6.9.2.7.- Conclusiones del estudio I

Las conclusiones de este estudio son las siguientes:

a) El que un escolar continúe correctamente una serie en una prueba escrita, no es suficiente para conocer cuál ha sido el criterio aplicado por el sujeto, a menos que las tareas resolubles mediante criterios de niveles diferentes se sitúen, cada una de ellas, en el nivel más bajo posible.

b) En las tareas del nivel representacional los alumnos del nivel N4 y de menor edad (siete años) aplican estrategias basadas en el sistema de representación numérico. A partir de los nueve años y tercer curso de Educación Primaria aplican la adición con ayuda de la acción de contar.

c) En las tareas del nivel ordinal, predomina la acción de contar en los escolares de siete años; algunos de ellos continúan aplicando estrategias del estado representacional. A partir de los nueve años se estabilizan las respuestas aditivas.

d) Ante las tareas aditivas, los alumnos de siete años modifican sus estrategias utilizando estrategias aditivas. Los alumnos a partir de los nueve años siguen utilizando estas estrategias aditivas.

e) Ante las tareas sustractivas, los escolares de siete años tienen dificultades en establecer la diferencia; vuelven atrás y utilizan estrategias de niveles anteriores. Los demás alumnos aplican correctamente la sustracción.

f) Salvo un alumno, todos los demás aplican estrategias aditivas y fracasan en los seis intentos ante la primera tarea multiplicativa.

g) En los alumnos (N4, 7, 2) hemos constatado tres tipos de estrategias: representacionales o simbólicas, ordinales y aditivas segun el tipo de tarea.

6.9.3.- Estudio II

6.9.3.1.- Comparación de las respuestas de escolares (N1, 7, 2) con las respuestas de escolares (N4, 7, 2)

Debido a las características de los alumnos (N1, 7, 2), nos tenemos que restringir en este estudio a las tareas representacionales, ordinales y aditivas, que son las únicas en las que podemos obtener respuestas en ambos niveles.

Salvador (N1, 7, 2) manifiesta dos tipos de estrategias: la primera basada en el sistema de representación y la segunda basada en la serie numérica memorística. La primera estrategia la utiliza para diferencias superiores a dos:

Tarea R1:
[31 41]
[12] S: "El veintidós. Porque al treinta y uno le saltas un número y en vez del tres le pones el cuatro, cuarenta y uno"

Tarea A2:
[12 24]
[41] S: "Que va a pasar al cincuenta pero añadiendole tres"

La segunda estrategia la utiliza para la diferencia dos:

Tarea O1: "Saltandose un número"
Tarea O2: "Le vas dejando dos"

Como hemos podido comprobar en el estudio I, los escolares (N4, 7, 2) utilizan tres tipos de estrategias: La primera está basada en el sistema de representación, la segunda está relacionada con la segunda del nivel anterior, pero más en consonancia con un dominio de la acción de contar de n en n, y la tercera es aditiva. La primera se ha puesto de manifiesto, exclusivamente, en las tareas R1 y R2, salvo en el caso de Salvador, que intenta utilizarla con diferencias mayores que dos.

6.9.3.2.- Comparación de respuestas de escolares (N3, 11, 5) con repuestas de escolares (N6, 11, 5)

Esta comparación se realiza sobre las respuestas de Marta (N3,11,5) y de Ricardo (N6,11,5), por lo que sólo podemos analizar las respuestas de ambos hasta la tarea M1, que no logra superar Marta.

A diferencia de lo que ocurre con Ricardo, las respuestas de Marta son aditivas, aunque manifiestan la acción de contar de n en n. Algunas respuestas de Marta parece que indican niveles de instrucción más elementales, a diferencia de otras respuestas que se consolidan en la aritmética del número natural. Esto se comprueba examinando las respuestas que da Marta a las tareas R1, R2, O1, A1 y A2, que se incluyen en el Anexo 6.1 al que nos remitimos.

6.9.3.3.-Conclusiones del estudio II

Se ha llegado a las siguientes conclusiones:

a) Los alumnos del nivel N1 aplican dos tipos de estrategias, unas basadas en el sistema de representación y otras en la serie numérica memorística.

b) Las respuestas aditivas del nivel N3 se encuentran contaminadas por la ación de contar de n en n.

6.9.4.- Estudio III

6.9.4.1.- Comparación de respuestas de escolares (N2, 6, 1) con respuestas de escolares (N4, 7, 2)

Por motivos de limitación en una parte de los sujetos del estudio, la comparación se restringe a las relaciones representacionales y ordinales. Los alumnos (N2, 6, 1) utilizan estrategias representacionales y relacionadas con la acción de contar. Los alumnos (N4, 7, 2), tal como hemos comprobado en los apartados anteriores, utilizan estrategias representacionales, para las relaciones R1 y R2, y estrategias basadas en contar o en la aditividad, en el caso de las relaciones O1 y O2. Veamos algunos ejemplos:

María (N2, 6, 1)

R1: [35] "El cuarenta y cinco. Cuento el treinta y cinco. No porque está ahí y me voy a los del cuatro y con este número de aquí (Se refiere al 5 de 35)."
O1: [21] "En el veintiuno es el mismo número pero con el tres"

Gema (N2, 6, 1)

R1: "Si yo puse el dos tú pusistes el 12. Si yo puse el 26 tú pusistes el treinta y seis. Si yo pongo sesenta y dos tú pones setenta y dos"
O1: "Contando de dos en dos"

Como se aprecia en el ejemplo citado, María no logra superar las relaciones aditivas con estrategias representacionales, mientras que Gema aplica el conteo de diez en diez y de dos en dos, constituyendo instrumentos suficientes, en este caso, para superar el nivel ordinal pero no para conseguir resolver relaciones aditivas en general.

6.9.4.2.- Comparación de respuestas de escolares (N4,9,4) con respuestas de escolares (N6,10,5)

En este estudio debemos destacar el caso de Lucía (N4, 9, 4), que siempre utiliza el conteo para buscar las soluciones pero que no supera la tarea S2. Asímismo, a diferencia de las respuestas de Gema, Lucía manifiesta un adiestramiento en las operaciones de suma y resta a partir del conteo.

Los demás alumnos, tanto los de coordenadas (N4, 9, 4) como los de coordenadas (N6, 10, 5), aplican las estrategias aditivas sin excepción en las tareas representacionales, ordinales y aditivas. Así, Alejandra utiliza estrategias aditivas en la búsqueda de las relaciones, a pesar de responder en términos "de tanto en tanto" y de operar contando.

El primer intento de todos los escolares en la tarea multiplicativa M1 ha sido de tipo aditivo. La diferencia entre los alumnos (N4, 9, 4) y los alumnos (N6, 10, 5) ha estado, precisamente, en el número de intentos necesarios para llegar a establecer la relación multiplicativa, es decir, en el número de intentos necesarios para llegar a cambiar de estrategia. Los alumnos (N6, 10, 5) sólo han necesitado un intento, mientras que Sergio (N4, 9, 4) y Rubén (N4, 9, 4) han necesitado seis intentos. No obstante, ambos superan en dos tareas lo conseguido en la prueba escrita del estudio cuantitativo.

Los alumnos (N4, 9, 4) no superan la tarea partitiva P1, aplicando todos la sustracción. Sin embargo, los alumnos (N6, 10, 5) pasan sin problemas de la multiplicación a la división en el primer intento, descubriendo rápidamente la relación partitiva.

6.9.4.3.- Conclusiones del estudio III

A partir de la comparacion de respuestas, hemos llegado a las siguientes conclusiones:

a) Los escolares (N2, 6, 1) utilizan estrategias representacionales y ordinales. Con estas estrategias intentan resolver, sin éxito, las tareas aditivas.

b) Todos los alumnos, a partir del nivel N4, aplican estrategias aditivas en los primeros intentos de resolver la primera tarea multiplicativa.

c) Los alumnos del nivel N6 modifican sus estrategias a partir del primer intento, lo que no ocurre con los del nivel N4, que persisten en sus intentos.

d) Ningún alumno del nivel N4 consigue superar una tarea partitiva.

6.9.5.- Conclusiones de la actividad 2

En lo que se refiere a los **aspectos a observar** que han sido planteados en el diseño de la actividad 2, podemos decir lo siguiente:

a) El número de ensayos que necesita un alumno para obtener el criterio disminuye al aumentar el nivel. Los alumnos de niveles N5 y N6, salvo errores de cálculo, han utilizado un solo ensayo. Los alumnos de niveles intermedios o inferiores han presentado cierta dificultad al llegar a las relaciones correspondientes a su nivel.

Como era de esperar, en el paso de las series aditivas a las multiplicativas se aplica, en primera instancia, una relación aditiva. Todos los alumnos que se enfrentaron a la tarea M1 han tenido que utilizar un segundo ensayo o han rectificado su respuesta inicial.

b) Las explicaciones dadas por los alumnos se han ajustado plenamente a sus niveles según la escala acumulativa. En este sentido podemos concluir lo siguiente:

- La mayoría de los escolares del nivel N4 y de los cursos inferiores interpretan las relaciones R1 y R2 con criterios representacionales y las relaciones O1 y O2 con el conteo, a diferencia de alumnos del mismo nivel pero de cursos superiores que establecen relaciones aditivas. Esto se debe a que los esquemas representacionales se presentan en los inicios del aprendizaje numérico y son anteriores al conteo en lo que se refiere a su aplicación en razonamiento inductivo numérico. Cuando los escolares integran la numeración escrita y la secuencia verbal en los inicios de la suma y resta "contando", surgen nuevas estrategias para establecer este tipo de relaciones y dan respuestas del tipo "van de n en n".

Esta conclusión es parcial, puesto que se obtiene de una muestra particular de sujetos y, lo que es más importante, porque se trata de un proceso de aprendizaje del número natural que prima la memorización de la secuencia verbal y las estrategias algorítmicas que facilitan el éxito en los inicios del cálculo (Este hecho lo hemos constatado estadísticamente para nuestros sujetos en el capitulo anterior, donde hemos visto el desfase entre los logros en razonamiento inductivo numérico y en procedimientos aritméticos).

c) Los alumnos llegan al nivel que les corresponde, incluso lo superan en alguna tarea. Esto era de esperar, debido a que han tenido más posibilidades y han podido rectificar sus estrategias en el transcurso de la entrevista.

Sin embargo hemos de decir que, a pesar de las facilidades reseñadas, no se han distanciado de los niveles que les correspondían. Este hecho viene a reforzar la idea de que no sólo estamos hablando de saberes concretos y de un tipo determinado, sino de verdaderos estados de conocimientos. Los niveles no indican si el niño sabe o domina algún aspecto de la aritmética sino de que manera lo aplica en razonamiento inductivo numérico.

d) Los criterios se modifican ante nuevas tareas, salvo el caso señalado de la tarea M1 (paso de lo aditivo a lo multiplicativo) y con muchas dificultades en la tarea A1 (paso de lo ordinal a lo aditivo).

e)La mayor parte de los alumnos proponen los números al azar. Aunque a veces tardan en sus propuestas no tienen ningún criterio de elección. Señalar el caso de Pedro (N4,7,2) y Manolo (N3,9,3) que en los distintos ensayos de unos números a otros fijan la cifra de las unidades para obtener las respuestas modificando solo las decenas.

f) En cuanto a los intentos fallidos hemos de distinguir dos casos diferenciados:

- criterios aditivos en tareas multiplicativas;
- criterios representativos y ordinales en tareas aditivas.

g) Tal y como hemos comprobado las respuestas dadas por los niños están en consonancia con el nivel que les ha correspondido en la escala acumulativa. Sus respuestas manifiestan los criterios teóricos de nuestro diseño cualitativo.

h) Los alumnos de los niveles superiores ante tareas de niveles inferiores se pueden adaptar a las mismas aplicando estrategias propias de estos niveles inferiores.

j) Muchos niños con estrategias de niveles inferiores han superado tareas de niveles superiores. Según hemos comprobado este hecho se produce en los niveles anteriores al aditivo.

La facilidad en la modificación de estrategias se ha observado significativamente en niños a partir del nivel aditivo.

k) Los fracasos no se han debido a errores de procedimientos aritméticos sino a la imposibilidad de interpretar inductivamente las tareas propuestas. Es importante este aspecto ya que la investigación apunta al razonamiento y no a las rutinas o procedimientos aritméticos y era importante que estos no fuesen un obstáculo que contaminasen nuestros análisis. En tal sentido decir que ha habido un ajuste total de las tareas y las posibilidades inductivas de los niños y por tanto una nitidez absoluta para obtener claramente nuestras conclusiones.

Globalmente hemos de destacar dos consecuencias importantes:

1) En todas las inversiones producidas al pasar de unas tareas a otras, dentro de cada nivel, los escolares no tienen problemas en invertir las estrategias de los niveles siguientes ante una tarea de su nivel o inferior:

Nivel N1: Aumento-Disminución
Nivel N2: Orden creciente-Orden decreciente
Nivel N4: Adición-Sustracción
Nivel N6: Multiplicación-división

2) Hemos detectado dos "escalones' importantes en las respuestas de los escolares de Educación Primaria:

- el paso de lo ordinal a lo aditivo;
- el paso de lo aditivo a lo multiplicativo.

Estos son los cambios que provocan la acumulación de alumnos (N2, 7, 2) y (N4, 9, 4) en las edades y cursos correspondientes.

6.10.- Resultados y conclusiones de la actividad 3

Esta actividad se corresponde con un tercer nivel de significación y está enfocada para los escolares de los niveles superiores.

Desde un punto de vista evolutivo el establecimiento de relaciones de relaciones debe estar en consonancia con una evolución a la formalización del pensamiento aritmético y, por tanto, en el inicio al álgebra, lo que nos aproxima a los estados 7, 8 y 9 de nuestro modelo teórico.

6.10.1.- Establecimiento de relaciones de relaciones

En la tabla 6.9 vemos la distribución de alumnos que han establecido este tipo de relaciones en las distintas tareas. En las columnas se representan los niveles de las diferentes tareas.

a) Se trata de tareas propias del nivel N6. Los escolares que se adaptaron a lo que se les pedía han sido: Alejandra (N6, 10, 5), Diego (N6, 9, 5), Rocío (N6, 11, 6) y Francisco (N6, 12, 6). Sus respuestas se han dirigido directamente a comparar relaciones y no se han detenido a estudiar otras posibilidades.

b) Isaac (N4, 9, 3) y Sergio (N4, 9, 4) son los más jóvenes en encontrar alguna relación entre relaciones, lo que no significa su adaptación plena a la prueba, ya que detectan estas relaciones por ensayo y error, es decir, a base de proponer varias soluciones.

6.10.2.-Otras respuestas

Excepto los casos indicados anteriormente del nivel N6, el objetivo de los escolares ha sido intentar justificar de algún modo los emparejamientos. Este hecho ha enriquecido notablemente las posibilidades de una interpretación didáctica para seguir profundizando en los perfiles inductivos de los alumnos de los distintos niveles.

	N1	N2	N3	N4	N5	N6
Carlos (N1,6,1)						
Salvador (N1,7,2)						
María (N2,6,1)						
Damian (N2,6,1)						
Gema (N2,6,1)						
Manuel (N3,9,3)						
Marta (N3,11,5)						
Alberto (N4,7,2)						
Rocío (N4,7,2)						
Pedro (N4,7,2)						
Gonzálo (N4,9,3)						
Miguel (N4,9,3)						
Isaac (N4,9,3)			*	*		
Sergio (N4,9,4)		*		*		
Lucía (N4,9,4)						
Rubén (N4,9,4)						
Manuel (N4,10,4)						
Blas (N4,10,4)	*	*				
Antonio (N5,10,4)						
Ana Mª (N5,11,6)						
Alejandra (N6,10,5)	*	*	*	*	*	*
Pablo (N6,10,5)		*	*	*	*	*
Diego (N6,19,5)	*	*	*	*		
Ricardo (N6,11,5)						
Marta (N6,11,6)		*		*		
Rocío (N6,11,6)	*	*	*	*	*	*
Raquel (N6,12,6)						
Francisco (N6,12,6)	*	*	*	*	*	*

Tabla 6.9. Distribución del establecimiento correcto de relaciones de relaciones

Las estrategias que han utilizado estos alumnos ha sido juntar las parejas dos a dos y pensar. Si no podían encontrar una justificación las emparejaban de algún otro modo.

Los esquemas que han manifestado los escolares los hemos organizado en cuatro categorías: Correspondencia representacional, Clasificación representacional, ordinal representacional y aditivo representacional. La distribución de respuestas se puede ver en la tabla 6.10.

6.10.2.1.-Correspondencia representacional

Considerando cada pareja como un conjunto y estableciendo una correspondencia con un criterio representacional:

Carlos (N1,6,1)

3.1.a

[92 82]
[2 12]
"El dos con el dos"

3.1.b

[32 42]
[52 42]
"Juntos el dos con el dos"

Salvador (N1,7,2)

3.1.a

[2 12]
[32 42]
"Aquí también el dos contra el dos y este dos contra otro dos. Los de abajo tienen un número delante"

3.1.b

[92 82]
[52 42]
"Este se parece en el dos, contra el dos y el dos contra el dos. Estos tienen un número delante"

Gema (N2,6,1)

3.1.a

[32 42]
[52 42]
Señalando el cuarenta y dos de cada pareja: "Estos dos sitios tienen cuarenta y dos"

3.1.b

[2 12]
[92 82]

Cubriendo el ocho y el uno, dice: "Estos tienen dos"

6.10.2.2.-Clasificación representacional

Aplicando una correspondencia con un criterio clasificatorio representacional:

Salvador (N1,7,2)

3.2.a

[7 9]
[3 9]

"Este tiene un número"

3.2.b

[29 27]
[84 82]

"Este tiene dos números. No va a ir un número contra dos"

Rubén (N4,9,4)

3.2.a

[84 82]
[29 27]

"Estos tienen dos cifras"

3.2.b

[7 9]
[3 5]

"Estos tienen una cifra"

6.10.2.3.-Ordinal representacional

El establecimiento de la correspondencia se basa en aspectos ordinales de la serie numérica:

Rocío (N4,7,2)

3.3.a

[3 9]
[2 8]

"El ocho y el nueve. El dos y el tres...contando..."

María (N2,6,1)

3.3.a

[3 9]
[2 8]

"El dos va delante del tres y el ocho va delante del 9"

3.4.a

[38 30]
[9 1]

"Después del treinta va el treinta y uno y después del treinta y ocho va el treinta y nueve"

6.10.2.4.-Aditivo representacional

Establecimiento de una correspondencia aditiva:

Sergio (N4, 9, 4)

3.3.b

[41 53]
[1 13]

"Le han sumado en este número cuatro (Se refiere a las decenas de 13)
Aquí como solo hay un uno le han añadido un cuatro (A cero decenas)"

3.3.b

[15 5]
[12 4]

"Del cuatro al cinco le han añadido una y del dos al cinco le han añadido tres"

	N1	N2	N3	N4	N5	N6
Carlos (N1,6,1)	*					
Salvador (N1,7,2)	*	*	*			
María (N2,6,1)	*	*	*	*	*	*
Damian (N2,6,1)						
Gema (N2,6,1)	*	*				
Manuel (N3,9,3)	*	*				
Marta (N3,11,5)						
Alberto (N4,7,2)	*	*				
Rocío (N4,7,2)	*	*	*	*		
Pedro (N4,7,2)	*	*				
Gonzálo (N4,9,3)						
Miguel (N4,9,3)	*	*				
Isaac (N4,9,3)	*					
Sergio (N4,9,4)	*	*	*			
Lucía (N4,9,4)	*	*				
Rubén (N4,9,4)	*	*	*			
Manuel (N4,10,4)	*	*	*			
Blas (N4,10,4)						
Antonio (N5,10,4)	*	*	*			
Ana Mª (N5,11,6)	*	*	*			
Alejandra (N6,10,5)						
Pablo (N6,10,5)						
Diego (N6,19,5)						
Ricardo (N6,11,5)						
Marta (N6,11,6)						
Rocío (N6,11,6)						
Raquel (N6,12,6)						
Francisco (N6,12,6)						

Tabla 6.10. Distribución de las soluciones que no se ajustan a las relaciones de relaciones y niveles que les corresponden

6.10.3.- Conclusiones de la actividad 3

Las conclusiones fundamentales son las siguientes:

a) Hasta que un alumno no consiga el nivel seis parece no tener capacidad para establecer relaciones de relaciones correctamente;

b) Los alumnos de niveles inferiores intentan justificar sus emparejamientos con tres esquemas distintos, que hemos denominado: correspondencia representacional, clasificación representacional y aditivo representacional.

6.11.-Conclusiones del estudio empírico cualitativo

En primer lugar debemos decir que el estudio cualitativo nos confirma la bondad del modelo teórico evolutivo expuesto en el capítulo 4 ya que, con actividades diferentes a las realizadas en los estudios anteriores, se confirman las competencias inductivas que corresponden a los distintos niveles de la E.I.N. En segundo lugar, hemos de decir que el estudio cualitativo ha hecho posible obtener una primera organización de las estrategias inductivas de los escolares de Educación Primaria según los diferentes niveles de la E.I.N.

El objetivo básico del estudio cualitativo era confirmar la bondad de la E.I.N. Por ello, a continuación exponemos el significado de la bondad de una escala en razonamiento inductivo numérico.

Desde un punto de vista teórico la bondad de una escala acumulativa en razonamiento inductivo numérico estriba en que los diferentes niveles representen distintos comportamientos adaptados que persisten en las distintas actividades que se les propongan a los escolares. No solo es cuestión de un dominio de habilidades aritméticas ya que al pasar de unos niveles a otros, las estrategias inductivas se modifican y alumnos de distintos niveles no necesariamente manifiestan la misma estrategia ante una misma tarea. Esta es una de las claves para la bondad de una escala.

Si enfrentamos a los alumnos a diversas tareas graduadas de acuerdo con los niveles de una escala, que no estén determinadas de antemano exclusivamente por unas rutinas aritméticas y que por tanto el éxito no dependa de su dominio, la bondad de una escala vendra en relación con las siguientes puntualizaciones:

a) Alumnos del mismo nivel deben conseguir el mismo alcance en tareas de razonamiento inductivo numérico independientemente de las tareas inductivas propuestas y del nivel instructivo de los alumnos

b) Los alumnos de un mismo nivel ante una variedad de tareas deben manifestar las mismas o parecidas estrategias de razonamiento inductivo numérico.

c) Alumnos de distintos niveles no deben conseguir el mismo alcance y deben manifestar distintas estrategias de razonamiento inductivo numérico

d) Las tareas que consigan superar con éxito alumnos de niveles inferiores deben superarlas alumnos de niveles superiores, aunque no necesariamente con las mismas estrategias, salvo en el caso que la tarea solo se pueda resolver mediante una única estrategia y esta esté supeditada a un conocimiento o habilidad aritmética.

e) Al aplicar la escala a unos alumnos, debe obtener niveles con diferencias cualitativas y no solo de instrucción.

Debe existir cierto paralelismo entre desarrollo del curriculum y la evolución del razonamiento inductivo numérico pero no supeditación. Por mucho que intentemos desligar los aspectos del razonamiento inductivo numérico de la intrucción en aritmética existe cierta dependencia ya que el desconocimiento de la aritmérica imposibilita establecer relaciones numéricas.

Teniendo en cuenta todo lo que precede, consideramos que los resultados obtenidos con las tres actividades propuestas han sido muy satisfactorios ya que:

a) Las actividades han determinado diferencias en razonamiento inductivo numérico entre los alumnos de acuerdo con los diferentes niveles, a pesar de la necesidad que han tenido los alumnos de aplicar propiedades aritméticas que han sido objeto de un aprendizaje escolar. Ello confirma la adecuación de las mismas a nuestras pretensiones.

b) Alumnos de distintos cursos y edades pero pertenecientes al mismo nivel han conseguido los mismos logros, con algunas matizaciones en las estrategias que tienden a evolucionar de los alumnos de menor edad a los de mayor edad. Lo que permite asegurar que el curriculum es importante pero no suficiente como indicador fiable en las posibilidades de los alumnos en razonamiento inductivo numérico.

c) En la actividad 1 se obtuvieron diferencias en los primeros niveles de la escala

d) En la actividad 2 se proponian como un juego, las relaciones de la E.I.N., con la posibilidad de varias tentativas. Los logros conseguidos por los alumnos han sido los del nivel que les correspondió en la aplicación de la escala, confirmandose cualitativamente, en los alumnos entrevistados, los resultados obtenidos en el estudio cuantitativo.

e) Con la actividad 3 se demuestra el significado de la consolidación del nivel N6, diferenciando cualitativamente este nivel de los inferiores.

6.11.1 -Caracterización de los niveles de la E.I.N.

Según el apartado 6.2, uno de los propositos de este estudio era caracterizar y justificar los resultados de la pruebas escritas y dar significado a los comportamientos generales y a las situaciones singulares encontradas así como a los procedimientos, destrezas y estrategias inductivas que los escolares de Educación Primaria utilizan para alcanzar un determinado rendimiento, es decir, completar los perfiles de razonamiento inductivo numérico correspondientes a cada uno de los niveles de la escala acumulativa (Hipótesis H2)

Teniendo en cuenta los resultados obtenidos en todos los estudios realizados desde el inicio de esta investigación hemos conseguido una primera caracterización de los distintos niveles de la E.I.N:

Nivel 1

-Se corresponde con el estado representacional del modelo teórico

-los escolares de este nivel se distribuyen básicamente en los cursos primero y segundo de Educación Primaria, y edades de seis y siete años. (apdos. 5.15, 5.19)

-establecen relaciones simbólicas basadas en la grafía y en las reglas de nuestro sistema de representación (apdo. 6.8.1)

-aplicando las relaciones anteriores pueden resolver series aritméticas de diferencia diez (apdo. 6.9.1)

-manifiestan dos tipos de estrategias inductivas: unas basadas en el sistema de representación numérica y otras en la serie numérica memorística (apdos 6.9.3.1, 6.9.1, 6.9.3.3)

-Consiguen la inversión aumento-diminución o creciente-decreciente (apdo. 6.9.5)

- Pueden establecer correspondencias representacionales y clasificaciones representacionales. (apdos. 6.10.2.1, 6.10.2.2)

Nivel 2

-Se corresponde con el estado sintáctico-numeral de nuestro modelo teórico

-los escolares de este nivel se distribuyen básicamente en los cursos primero y segundo de Educación Primaria, y edades de seis, siete y ocho

años (apdos. 5.15, 5.19)
-establecen relaciones simbólicas basadas en la grafía, en las reglas de nuestro sistema de representación y en la memorización de la serie numérica natural. Manifiestan la comparación ordinal: mayor-menor.(apdos. 6.8.1, 6.9.1, 6.8.4.1)
-aplicando las relaciones anteriores pueden resolver series aritméticas de diferencia diez, dos y tres (apdo.6.9.1)
-manifiestan dos tipos de estrategias inductivas unas basadas en en el sistema de representación numérica y otras en la serie numérica (apdo. 6.9.4)
-consiguen la inversión aumento- disminución o creciente-decreciente (apdo. 6.9.5)
-Pueden establecer correspondencias ordinales-representacionales (apdo. 6.10.2.3)

Nivel 3
-se corresponde con el estado aritmético aditivo de nuestro modelo teórico
-los escolares de este nivel se distribuyen a partir de segundo curso y edad de siete años a lo largo de toda la Educación Primaria (apdos.5.15, 5.19)
-llegan a establecer relaciones simbólicas, ordinales, aditivas y conceptuales (par-impar) (apdo.6.8.1)
-aplicando las relaciones anteriores consiguen resolver series aditivas
-manifiestan estrategias inductivas de tres tipos: representacionales, ordinales y aditivo-ordinales (identifican "sumar n" con "contar de n en n") (apdos. 6.9.1, 6.9.3.3)
-consiguen las inversiones aumento-disminución y orden creciente-orden decreciente (apdo 6.9.5)
-desde un punto de vista de la naturaleza del número natural en sus respuestas priman los aspectos ordinales y no los cardinales (apdo.6.8.3.2)

Nivel N4
-se corresponden con el estado aritmético aditivo de nuestro modelo teórico
-los escolares de este nivel dominan en Educación Primaria y se

distribuyen a partir de segundo curso hasta sexto y desde los siete años hasta los doce, alcanzando cotas máximas en los cursos y edades intermedias (apdos. 5.15, 5.19)
-los escolares de este nivel establecen relaciones simbólicas, ordinales, aditivas y conceptuales (apdo. 6.8.1)
-sobre los diez años aparecen referencias cardinales (apdo. 6.8.2)
-establecen relaciones multiplicativas utilizando esquemas aditivos: "doble de" como sumar dos veces etc.. Intentan resolver aditivamente las series multiplicativas. (apdos 6.8.2, 6.9.2.5)
- consiguen las inversiones aumento-disminución, ordinal creciente-ordinal decreciente, aditivo-sustractivo (apdos. 6.9.2, 6.9.5)

Nivel 5
-se corresponden con el estado aritmético multiplicativo de nuestro modelo
-los escolares de este nivel se distribuyen fundamentalmente a partir de cuarto curso y diez años de edad (apdos. 5.15, 5.19)
-los escolares de este nivel establecen relaciones simbólicas, ordinales, aditivas multiplicativas (no partitivas) y conceptuales. En las simbólicas no aplican aspectos de grafía estableciendo solo relaciones sintácticas del sistema de numeración y por tanto, es a partir de este nivel cuando el escolar comprende que la grafía de un signo no es una propiedad numérica (apdo. 6.8.1)
-en cuanto a las estrategias inductivas presentan intentos aditivos en series multiplicativas siendo capaces de modificar sus esquemas para pasar de las estrategias aditivas a las multiplicativas, teniendo dificultades para pasar de la utilización de estrategias multiplicativas a estrategias partitivas. (apdo. 6.9.1)
-es el nivel que presenta mayor índice de efecto tope (apdos.1.2.3.3, 3.8.1,
- no consiguen la inversión multiplicativo-partitivo (apdo. 6.9.5)

Nivel 6
-se corresponde con el estado aritmético multiplicativo de nuestro modelo teórico
-los escolares de este nivel se distribuyen fundamentalmente a partir de quinto curso y once años de edad (apdos 5.15, 5.19)

-establecen relaciones simbólicas (solo sintácticas), ordinales, aditivas, multiplicativas (incluyendo partitivas) y conceptuales (apdo. 6.8.1)
-llegan a generalizaciones de las propiedades de las operaciones y a establecer la compatibilidad del orden con la numeración escrita (si un número tiene más cifras es mayor), la suma y el producto. (apdo 6.8.4.2)
-pueden distinguir la distancia entre dos números como su diferencia que es uno más que la cantidad de números intermedios en la recta numérica natural (apdo. 6.8.4.2)
-establecen correctamente las relaciones de relaciones.(apdo. 6.10.1)
-consiguen la inversión multiplicación-división (apdo. 9.6.5)

6.11.2.- Conclusión final

Al confirmar la bondad de la E.I.N. hemos culminado el P.E.R.T. (Planned Evaluation and Review Technique) propuesto en el apartado 2.4 para la evaluación del modelo teórico de razonamiento inductivo numérico que se expone en el apartado 4.7.3. Esto significa que se confirma la bondad de la **hipótesis H2**, y se alcanzan, con ello, los objetivos O5 y O6 de los enunciados en el apartado 1.7.2.

REFERENCIAS

Ackerman, R. (1961): "Simplicidad inductiva", en Philosophi of Science, vol. 28, (1961) pp. 152-161. Compilación de P.H. Nidditch. (Trad. cast. de V.M. Suárez Davila: "Filosofía de la ciencia¨. México. Fondo de Cultura Economica 1975).

Adler, J. E. (1980): "Criteria for a Good Inductive Logic". Oxford Clarendon PR, págs. 379-405.

Altieri, L. (1785): "Elementa philosofhie". Venezia. Librería di Venezia e di Padona.

Aparicio, C. ; Payá, R. (1985): "Análisis Matemático I". Granada. Universidad de Granada.

Avital, S. (1972): "Induction and Deduction in a Unit of Early Algebra". School Science and Mathematics. V. N. 8, págs. 692-696.

Avital, S. (1976). "Mathematical Induction in the classroom". Educational Studies in Mathematics, 7, págs. 399-411.

Avital, S. (1978): "Mathematical Induction in the Classroom: Didactical and Mathematical Issues". Educational Studies in Mathematics, 9, págs 429-438.

Bacon, F. (1620): "Novum organum, sive indicia vera de interpretacione nature et regio hominis". (Trad. cast. de Cristobal Litran: "Novum organum. Aforismos sobre la interpretación de la naturaleza y el reino del hombre". Barcelona. Fontanella 1985)

Bails, B. (1816): "Elementos de matemáticas" Tomo II. Madrid. Imprenta de Ibarra.

Bisquerra, R. (1989): "Métodos de Investigación Educativa". Barcelona Ediciones C.E.A.C..

Black, M. (1974): "The Justification of Induction". Oxford University Press. (Trad. Cast. " La justificación del razonamiento inductivo" Madrid: Alianza . 1976)

Blanche, R. (1973): "La epistemología" Barcelona. Oikos-tau.

Blieszner, R. (1981): "Training Research in Aging on the Fluid Ability of Inductive Reasoning". Journal of applied developmental psychology 2, págs. 247-265.

Boccherine, F. (1849): "Aritmética". Madrid. Imprenta nacional.

Bonnie, H. (1985): "Area Formulas on Isometric Dot Paper". Mathematics Teachers. Vol. 82, N 5. May 1985. Págs. 366-369.

Boulger, W. (1989): "Pythagoras Meets Fibonacci". Mathematics Teacher. Vol. 82, April. Págs. 277-282.

Briot (1879): "Algebra". Versión española de Sebastian y Portuondo. Madrid.

Brumfiel, C. (1974): "A note on Mathematical Induction". Mathematics Teacher. Vol. 67, N 7. Págs 617-618.

Brunnschvicg, L. (1929): "Lés etapes de la pholosophie mathématique". (Trad. cast. de Icora Ratto de Sadosky. "Las etapas de la filosofía matemática". Lautaro. Buenos Aires)

Burks A, W. (1980): "Enumerative Inductión versus Eliminative Induction". Oxford: Clarendon PR. Págs 172-189.

Caramuel, J. (1670): "Mathesis biceps. Vetus et niva" Campania. (Versión facsímel "Filosofía de la Matemática" (meditatio prooemialis) Barcelona. Editorial Alta Fulla. 1989)

Carlson, J. (1974): "The relationship between multiplicative classification and inductive reasoning". The Journal of Genetic Psychology. N 125, Págs 265-272.

Carpenter, T.P. (1980): "Research in cognitive development ". Research in Mathematics Education N.C.T.M. Reston. Virginia. Págs 146-206.

Case, R. (1985): "Intellectual development: Birth to Adulthood". Londres: Academic Press. (Trad. cast. de I. Menéndez: "El desarrollo intelectual" Barcelona: Paidós, 1989).

Castro Martinez, E. (1994): "Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación". Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada

Castro, E. (1994): "Exploraciones de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14)" Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E., Rico, L. Castro, E. (1987): "Números y operaciones" Madrid. Síntesis.

Cerdá, T. (1816): "Liciones de Matemática o Elementos generales de Aritmética y Algebra". Barcelona. Agustin Roca.

Cohen, L.; Manion, L. (1990): "Métodos de investigación educativa". Madrid. Muralla

Colberg, M et All. (1982): "Inductive Reasoning In Psychometrics: A Philosofhical Corective". Intelligence. V. 6, N. 2, Apr-jun, Págs. 139-164.

Collette, J.P. (1985): "Historia de las Matemáticas". Madrid. Siglo XXI.

Copi I.M. (1953): "Introducción to logic" New York: Macmillan. (Trad. cast. de Néstor Alberto Miguez: "Introducción a la lógica". Buenos aires: Eudeba, 1962).

Cornell, R.H.-Siegfried, E. (1991): "Incorporating Recursion and Functions in the Secondary School Mathematics Curriculum". En Discrete Mathematics Across the Curriculum K-12. Year Book. N.C.T.M.

Cortazar, J. (1862): "Aritmética". Madrid. Imprenta de D. F. Sanchez.

Costa, N.C.A. (1987): "Outlines of a system of inductive logic". Teoría 2/1987.

Chalmers, A.F. (1976): "What is this thing called sciences?" University of Queensland Press. (Trad. cast: "¿Qué es esa cosa llamada ciencia?" Madrid: siglo XXI, 1984).

Christiansen, B. (1969): "Induction and deduction in the learning of mathematics and in mathematical instruction". Educational Studies in Mathematics 2 (139-149).

Delval, J. (1983): "Crecer y pensar. La construcción del conocimiento en la escuela". Barcelona. Laia.

Dienes, Z. P. Golding, E. (1966): "Ensembles, nombres et puissances" Paris. O.C.D.L.. (Trad. cast. "Conjuntos, números y potencias". Barcelona. Teide. 1980)

Dienes, Z.P. (1964): "Building up mathematics". Hutchinson Educational LTD. (Trad. cast. de Alberto Aispun y Amalia Quiñones: "La construcción de la matemática". Barcelona. Vicens-Vives. 1970).

Dieudonné J. (1989): "En honor del espíritu humano. Las matemáticas hoy" Madrid. Alianza Universidad.

Dubinsky, E. (1986): "Teaching mathematical induction" Journal of Mathematical Behavior.V. 5/3, Dec. Págs. 305-317.

Echeverria J. (1987): "Análisis de la Identidad" Barcelona. Ediciones Juan Granica.

Engen, H. V. (1959): "An Analysis of meaning in aritmhmetic. I". Elementary School Journal. Vol. 49. Págs. 321-329.

Ernest, P. (1984): "Mathematical Induction: A pedagogical discussion". Educational Studies in Mathematics 15. Págs. 173-189.

Fernandez y Cardin, J. M. (1862): "Elementos de Matemáticas". Madrid. Imprenta de Don Alejandro Gómez Fuentenebro.

Fernández Cano, A. (1995): "Metodologías de la investigación en Educación Matemática". En "Investigación en el aula de matemáticas". Berenguer, L., Flores P. Editores. Edita Universidad de Granada. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. S.A.E.M. Thales. Págs. 47-65.

Fischbein, E. (1990): "Introduction". En Nesher, P. ; Kilpatrick, J. (eds). Mathematics and cognition. Cambridg University Press. pp 1-13.

Fraisse, P. Piaget, J. (1967) "Traité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence". Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman,"Tratado de psicologia experimental-VII La Inteligencia". Barcelona: Paidós 1983).

Garcia, A. (1990): " Psicología del razonamiento". Pamplona. Eunsa.

Gawronski, J.D. (1972): "Deductive and inductive learning styles in junior high school mathematics: an exploratory estudy. Journal for Research in Mathematics Education. Vol.3, Nov. 1972. Págs. 239-247.

Ginsburg, H.P; Kossan,N.E. (1983): "Protocol methods in researh on mathematical thinking". En "The Development of Mathematical thinking" Academic Pres National.

Gómez Alfonso, B. (1994): "Los métodos de cálculo mental en el contexto educativo: un análisis en la formación de profesores". Granada. Comares S.L.

González, J.L. (1995): "El campo conceptual de los números naturales relativos". Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Hamburger, J. (1989): "La filosofía de las ciencias hoy". México. Siglo XXI.

Hempel C.G. (1965): " Aspects of scientific explanatión and other essays in the Philosofhy of Science". New York. Free Press. (Traducción castellana de Frasineti, G. M. y Otros: "La explicación cientifica". Barcelona. Paidós. 1988).

Hempel, C. G. (1956): "Sobre la naturaleza de la verdad matemática" En "El mundo de las matemáticas". Barcelona. Grijalbo. 1969. Págs. 7-23.

Hempel, C.G. (1966): "Philosofhy of Natural Science". New Jersey: Prentice-Hall. (Traducción castellana: "Filosofía de la Ciencia Natural". Madrid. Alianza Universidad. 1989).

Hessen, J. (1925): "Teoría del conocimiento" Caracas. Editores Mexicanos Unidos.

Higgis, A. W. (1990): "An interesting example using induction" Mathematics and Computer Education , V. 24/2 SPR, Págs. 130-134.

Hirsch, C. R. (1976): "Making Mathematical Induction Meaningful" School science and Mathematics. V. 76/1, Jan. Págs. 27-31.

Howson, C. (1984): "La metodología de las disciplinas no empíricas". En Feyerabend, P. "Estructura y desarrollo de la ciencia". Madrid. Alianza. Págs. 291-300.

Jevons, W.S. (1873). "Principles of Sciencie" (Trad. Cast. de Carlos E. Prélat: "Los principios de las ciencias". Madrid. Espasa Calpe, 1946).

Keeves, J. P. (Edit) (1988): "Educational Research, Methodology and Measurement". An International Handbook. Oxford. Pergamon.

Klauer, K. J. (1990): "A Process Theory of Inductive Reasoning Tested by the Theaching of Domaing-Specific Thinking Strategies. European Journal of Psicology. Vol. V, n 2, Págs. 191-207.

Klotz, F. S. (1987): "Turtle Graphics and Mathematical Induction". Mathematics Teachers. November 1987. Págs. 636-639.

Lakatos, I (1978): "Mathematics, Science and Epistemology" Fhilosophical Papers. Vol. 2. Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Ribes Nicolás, D.: "Matemáticas, Ciencia y Epistemología". Madrid. Alianza, 1981).

Lakatos, I. (1978): "Pruebas y Refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático". Madrid. Alianza.

Lakatos, I. (1987): "Historia de la ciencia". Madrid. Tecnos.

Lasala Martinez, A. (1919): "Elementos de Matemáticas". Zaragoza. Hijos de Uriarte.

Lee, S. S. (1982): "Acquisition of Inductive Bicondicional Reasoning Skills: Training of Simultaneous and Sequential Proccessing". Contemporary Educational Psychology. 7, págs. 371-383.

Leif, J. Dézaly, R. (1958): "Pédagogie spéciale, deuxiéme fascicule: L'Enseignement du calcul, lecons de choses el sciences appliquées". Paris.

Delagrave. (Trad, cast. de Juan Jorge Thomas "Didáctica del cálculo, de las lecciones de cosas y de las ciencias aplicadas". Buenos Aires. Kapelusz. 1961)

Lingoes, J. C. L. (1963): "Multiple Scalogram Analysis". Educational and Psychological Mesurement", XXIII. Págs 501-523

Lovell, K. (1966): "The growth of basic mathematical and scientific concepts in children". Hodder 8 Stoughton. Londres. (Trad. cast. "Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños". Madrid. Morata. 1977)

Llardent Esmet, A. (1925): "Aritmética y Geometría". Madrid. Imprenta de Julio Cosano.

Macarow, L. (1972): "Mathematical Induction". School Science and Mathematics V. 72, N 7, págs. 647-648.

Madrid.

Malcom, P.S. (1974): "The Well-Ordering Property as an Alternative to Mathematical Induction" School science and Mathematics. V. 74/4, Apr. págs. 277-279.

Martinez Arias, R.; Rivas, M. T. (1991): "Análisis de Escalas Acumuladas: Modelo probabilístico de Mokken para ítems dicotómicos". Psicotema, Vol 3, nº 1, págs. 199-218.

Mataix, C. (1942): "Aritmética general y mercantil". Madrid. Librería Internacional de Romo.

Mataix, C. (1942): "Aritmética general y mercantil". Madrid. Librería Internacional de Romo.

Mayer, R. E. (1981): "The promise of cognitive psychology" Freeman & Company. (Trad. cast. de Antonio Maldonado Rico: "El futuro de la psicología cognitiva". Madrid. Alianza Universidad 1985).

Mayer, R.E. (1983): "Thinking, Problem Solving, Cognition". Nueva York: Freeman and Company. (Trad. cast. de Graziella Baravalle "Pensamiento, resolución de problemas y cognición". Barcelona: Paidós 1986)

Mialaret, G. (1967): "L'Aprentissage des mathématiques". Charles Dessart. Bruselas. (Trad. cast. "Las Matemáticas cómo se aprenden, cómo se enseñan". Madrid. Aprendizaje Visor. 1984)

Mill, J. S. (1843): "System of Logic". Londres. (Traducción castellana de eduardo Ovejero y Maury: "Sistema de Lógica Inductiva y Deductiva" Madrid: Daniel Jorro Editor. 1917)

Montessori, M. (1934): "Psico aritmética". Barcelona. Garrafe.

Moreno, M. & Sastre, G. (1983): "Aprendizaje y desarrollo intelectual". México. Gedisa.

Moreno, M. & Satre, G. (1983): "Aprendizaje y desarrollo intelectual". Barcelona. Gedisa

Nickerson, R. S. (1985): ¨The teaching of the thinking" Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associetes. (Trad. cast. de L. Romano y C. Ginard: "Enseñar a pensar. Aspectos de la aptitud intelectual". Barcelona: Paidós 1987).

Nidditch, P. H. (1987): "El desarrollo de la lógica matemática". Madrid. Catedra

Oléron, P. (1967): "Las actividades intelectuales". En Trité de Psychologie Expérimentale (VII) L'Intelligence. Presses Universitaire de France. (Trad. cast. de Victor Fichman. "Tratado de psicología experimental-VII La Inteligencia". Barcelona. Paidós. 1983)

Ortiz, A. (1993): "Series numéricas y razonamiento inductivo" Epsilon. nº 27. págs. 95-96.

Ortiz, A. (1993): "Series numéricas y razonamiento inductivo". Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de las matemáticas. Universidad de Granada

Ortiz, A. (1994): "Numerical Series and Inductive Reasoning". First Italian-Spanish Research Symposium in Mathematics Education. Modena (Italy). Edited by Nicolina A. Malara and Luis Rico. Págs. 67-72.

Peirce, C. S (1901-1910): "The collected papers of Charles Sanders Peirce". Hardvard Cambridg University Press. 1965. (Trad. cast. de José Vericat: "El hombre, un signo". Barcelona. Critica. 1988).

Peirce, C. S. (1867): "On the Natural Classification of arguments", Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, vol. 7 p.p. 284-312. (Trad. cast. de Pilar Castrillo Criado: "Escritos lógicos". Madrid. Alianza. 1988).

Peirce, C. S. (1878): Popular Science Monthly, XII y XIII (1878) (Trad. cast. de Juan Martin Werner. " Deducción, Inducción e Hipotesis". Buenos Aires. Aguilar. 1970)

Pérez de Moya, J. (1562): "Aritmética práctica y especulativa". Madrid. XIX Edición en la Imprenta de Joseph Otero. (1784)

Piaget J. & Morf, A. (1970): "Estructuralismo y psicología". Buenos Aires. Nueva Visión.

Piaget, J. (1953): "La genese de l'idée de hasard chez l'enfant". Paris. P.U.F..

Piaget, J. (1956): "Régularités Sériales et Proportions". En "Epistémologie et psychologie de la Fonction". Paris. Dunod.

Piaget, J. (1967): "Le jugement et le raisonnement chez l'enfant". Neuchatel: Delachaux & Niestlé. (Trad. cast. de M. Riani: "El juicio y el razonamiento en el niño". Buenos Aires. Guadalupe. 1977)

Piaget, J. (1971): "Essai de logique opératoire". París. Dunod (Trad. cast. de Morales M. R.: "Ensayo de lógica operatoria". Buenos Aires. Guadalupe. 1977).

Piaget, J. (1974): "La prise de conscience". Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana: "La toma de conciencia". Madrid. Morata. 1981).

Piaget, J. (1985): "Introducción a la epistemología genética". Tomo 1. El pensamiento matemático. México. Paidós.

Piaget, J. y otros. (1980): "Recherches sur les correspondances" (E.E.G. XXXVII). Paris. Presses Universitaire de France. (Traducción castellana

"Investigaciones sobre las correspondencias". Madrid. Alianza Editorial. 1982).

Piaget, J., Szeminska, A. (1964): "Le genèse du Nombre chez l'enfant. Editions Delachaucx et Niestlé. Neuchatel (Suisse). (Tradución castellana de Sara Vassallo: "Genesis del número en el niño". Buenos Aires. Guadalupe. 1982)

Piaget, J.; García, R. (1989): "Implicaciones y significaciones aritméticas" en "Hacia una lógica de significaciones". Barcelona. Gedisa. Págs. 47-58

Pinker, A. (1976): "Induction and Well Ordering". School Science and Mathematics. V. 76/3, Mar., págs. 207-214.

Pirie, S. (1989): "Through the recursive eye: Mathematical unthertanding as a dynamic phenomenon" Psychology of Mathematics Education. Actes de la 13º conference internationale P.M.E. 13. Vol. 3, págs. 119-126.

Poincare H. (1902): "La science et l'hipothèse". (Trad. cast. de Besio A.B. y Banfi J."La ciencia y la hipótesis" Madrid. Espasa-Calpe 1963).

Polya, G. (1944): "How to solvet it". Princeton: University Press. (Trad. Cast.: "Cómo plantear y resolver problemas". México. Trillas. 1985).

Polya, G. (1953): "Mathematics and Plausible Reasoning". New Jersey. Princeton University Press. (Trad. Cast. de Abellan, J. L: "Matemáticas y Razonamiento Plausible". Madrid. Técnos. 1966).

Polya, G. (1962-1964): "Mathematical Discovery". New York. Jhon Wiley and Sons.

Popper, K. R. (1934): "The Logic of Scientific Discovery". Londres. Hutchinson. (Traducción castellana de Sanchez de Zavala: "La lógica de la investigación científica". Madrid. Tecnos. 1985).

Popper, K. R. (1972): "Objetive Knowledge". Oxford. The Clarendon Pressxfoll. (Traducción castellana de Carlos Solis: "Conocimiento objetivo". Madrid. Tecnos. 1974)
Puig Adam (1959): "Sobre la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria". Vida Escolar, revista del Centro de documentación y Orientación Didáctica de Enseñanza Primaria, Núm. 7 y siguientes. En Publicaciones de

"Enseñanza Media" Nº 72. Director Rodriguez Lesmes, D.

Rico, L. (1997): "Fundamentos teóricos para el currículum de matemáticas en secundaria". Madrid. Sintesis. Rico editor.

Rico, L. (1997): "Reflexiones sobre los fines de la Educación Matemática" Suma . N. 24, Págs. 5-19

Ropo, E. (1987): "Skills for Learning: A Review of Studies on inductive Reasoning". Scandinavian Journal of Educational Reseaach. V. 31, nº 1, Págs. 31-39.

Runkle, S. & Tansey, P. (1976): "Logic: A United for 4-8 Graders, Especially Gifted and Talented". For related document, see 162, 443- 448 Guides-Classroom Use-guides (for Teachers). (144 págs.)

Russell, B (1912): "Problems of philosophy". Oxford. University Press. (Trad. cast. de J. Xirau: "Los problemas de la filosofía". Barcelona. Labor 1988).

Salinas y Angulo, J. (1943): "Aritmética". Madrid. Librería y casa editorial Hernando.

Salmon, W. C. (1968): "Who needs inductive acceptance rules?". In "The problem of inductive logic". Imre Lakatos (ED), 139-144. Amsterdam. Noth-Holland.

Sastre, G. & Moreno, M. (1980): "Descubrimiento y construcción de conocimientos". Barcelona. Gedisa.

Schwartz, D. & Black, J. (1990): "The Induction of Rules fron Analog, Mental Models". Annual Meeting of the American Educational Research Association. Boston. (29 págs).

Segovia, I. (1995): "Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos". Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada.

Seiffert, H. (1978): "Introducción a la matemática. Números y conjuntos". Barcelona. Herder

Shye, S. (1988): "Inductive and Deductive Reasoning: Astructural Reanalysis of Ability Tests". Journal of Aplied Psychology. Vol. 73, N 2, págs. 308-311.

Sierra Vazquez, M. (1985): "El minicomputador de papy en el ciclo inicial de e.g.b.". Salamanca. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Salamanca.

Sierra Vazquez, M. (1989): "La reforma de la enseñanza de las Matemáticas después de la Segunda Guerra Mundial: Aportación del Centre Belge de Pédagogie de la Mathématique (C.B.P.M.)" Tesis Doctoral. Departamento de Teoría e Historia de la Educación. Universidad de Salamanca.

Skemp, R. (1980): "The psychology of Learning Mathematics" Penguin Books Ltd. (Trad. cast: "Psicología del aprendizaje de las matemáticas". Madrid. Morata. 1980).

Sloane, N. J. A. (1973): "A handbook of integer sequences". San Diego. Academic Press.

Steffe, L. P. (1988): "Children's Construction of Numbers Sequences and Multiplyng Schemes".

Stegmüller, W. (1970): "Probleme und Resultate der Wissenschafstheorie und Analytischen Pilosofhie Band II: Theorie und Erfahrung". Heidelberg. Springer-Verlag. (Traducción castellana: " Teoría y experiencia". Barcelona. Ariel 1979).

Sternberg, R. J. (1982): "Selection and Implementation of Strategies in Reasoning by Analogy. Journal of Educational Psychology. Vol 74, N 3. Págs. 399-413.

Sternberg, R. J. (1986): "Beyond IQA Triarchic theory of human intelligence". Cambridge: University Press. (Trad. cast. de Bordas López M.T: "Más alla del cociente intelectual". Bilbao. Desclee de Bouwer. 1990).

Sternberg, R. J. (1989): "If dancers ate their shoes: Inductive reasoning with factual and counterfactual premises". Memory & Cognition 17(1), págs. 1-10.

Sternberg, R. J: (1983): "Unities in Inductive Reasoning". Journal of Experimental Psychology. General. Vol. 112, N 1, págs. 80-116.

Summers, G. F. (1982): "Medición de actitudes". México. Trillas

Trigg, C. W. (1989): "Polygonal Repdigits". Journal of Recreational Mathematics". Vol. 21 N. 1. Págs.52-53.

Vanlehn, K. (1986): "Arithmetic Procedures are Induced from Examples" En Conceptual and Procedural Knowledge: The case of Mathematics. London: Lawrence Erlbaun Associetes. James Hiebert (Edit).

Vergnaud, G. (1980): "Problemática y metodología de la investigación en Didactica de la Matemática". En "Métodos de observación y análisis de los procesos educativos". Materiales del IX Seminario de Investigación psicopedagógica. Barcelona. Coordinador César Coll.

Vergnaud, G. (1990): "Epistemology and Psychology of Mathemattcs Education". I.C.M.E. Study Series. Mathemathics and Cognition. Cambrige. University Press.

Wason, P. C. & Johnson, P. N. (1980): "Psicologia del razonamiento" Madrid. Debate.

Watkins, J.W. (1968): "Hume, Carnap and Popper". Amsterdam. North-Holland. págs. 271-282.

Wheatley, G. H. (1991): "Constructivist Perpectives on Science and Mathematics Learning". Science Educatión, 75 (1), págs. 9-21.

Wiscamb, M (1970): "A geometric introduction to mathematical induction". Mathematics Teacher. V. 63, N. 5, págs 402-404.

Word, K. J. (1988): "Instructional sequence effects of recursión and Mathematical Inductión in college algebra". Masthers Thesis. University of Texas at Austin. Michigan. U.M.I..