José Luis González Marí

NÚMEROS NATURALES RELATIVOS

Granada, 1998

colección

Este libro se ha editado con la colaboración del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y ha sido subvencionado por la Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía

Editorial COMARES
Polígono Juncaril, Condominio Recife,
parcela 121, nave 11
Tlf. (958) 46 53 82 • Fax (958) 46 53 83
18210 Peligros (Granada)
ISBN: 84-8151-613-9 • Depósito Legal: GR. 235/1998

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES S.L.

PRESENTACIÓN DE LA COLECCIÓN **MATHEMA**

EL considerable desarrollo que la investigación en Didáctica de la Matemática ha experimentado en España en los diez últimos años tiene un contexto y unas circunstancias específicas.

La comunidad de Educadores Matemáticos españoles se ha constituido, recientemente, con unas señas de identidad propias y bien definidas y una fuerte necesidad de autonomía intelectual y profesional. Expresión de este planteamiento son la organización de sociedades de profesores, la edición de revistas profesionales y libros, las jornadas y encuentros periódicos y el sostenimiento de actividades de autoformación y perfeccionamiento; en todas estas actividades encontramos trabajos de investigación relacionados con el ejercicio de la profesión de educador matemático.

Dentro de la organización y desarrollo de la investigación y las enseñanzas propias de los títulos universitarios, derivados de la Ley de Reforma Universitaria, surge el Área de Didáctica de la Matemática. Como el resto de las Áreas de Conocimiento, la Didáctica de la Matemática está implicada en la creación, desarrollo, transmisión y crítica del conocimiento científico y técnico específico, en la preparación para el ejercicio de actividades profesionales y en el apoyo al desarrollo cultural, social y económico. Aunque se trata de un Área de Conocimiento muy joven, no cabe duda que ha emprendido estas tareas con un esfuerzo e ilusión sostenidos.

Los contactos y encuentros periódicos con la comunidad internacional de investigadores en Educación Matemática y la conciencia creciente de la complejidad de cuestiones han obligado a considerar el campo de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas como un territorio sobre el que desarrollar una indagación metódica. La difusión de trabajos, llevados a cabo en muy distintos niveles, han consolidado la idea de que la investigación es un terreno propio de actuación para la comunidad española de educadores matemáticos, cuya ubicación académica se encuentra en los departamentos universitarios correspondientes.

En el contexto descrito comienzan a producirse trabajos de investigación en Didáctica de la Matemática realizados por profesionales españoles. En ellos se abordan, estudian y analizan problemas de aprendizaje en matemáticas de los escolares y se caracteriza la complejidad y dificultades de la enseñanza de esta disciplina dentro del Sistema Educativo y de la tradición cultural española.

Surgen así líneas de investigación que tratan de abordar familias de problemas conectados por una temática común, por un marco teórico compartido o por una aproximación metodológica sistemática; se comienza a configurar un campo científico serio y riguroso, con entidad propia y con unas prácticas de indagación consolidadas.

Las tesis doctorales realizadas en Didáctica de la Matemática constituyen ejemplos logrados de investigaciones, validadas académicamente, que están configurando un corpus científico teórico y práctico consolidado. Aunque su desarrollo es muy reciente, su volumen está creciendo rápidamente; no resultará fácil en un espacio de tiempo relativamente breve, tener acceso a toda la producción que está surgiendo en estos años.

Por ello, la colección **MATHEMA**, de Monografías de Investigación en Didáctica de la Matemática, quiere proporcionar un espacio en el que ubicar y localizar la mayor parte y lo mejor de los trabajos de investigación realizados en este Área de Conocimiento, que incluya las tesis leídas, memorias de investigación y otros trabajos sobre Educación Matemática de reconocido prestigio, que hayan sido evaluados por alguna institución académica o investigadora.

Esta colección quiere convertirse en punto de referencia de la investigación realizada en Didáctica de la Matemática en España y se propone la consolidación de una línea de publicaciones en la que, junto con los trabajos realizados por los departamentos universitarios, aparezcan también trabajos de investigación realizados en otras instituciones. Pretendemos de este modo contribuir a la consolidación del campo científico Didáctica de la Matemática y la autonomía intelectual de los educadores matemáticos.

EL CONSEJO EDITORIAL

Introducción

Esta publicación, que tiene su origen en un estudio realizado en el campo de la Didáctica de los números enteros [1], es el resultado de una investigación realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada para la consecución de la tesis doctoral titulada "El campo conceptual de los números naturales relativos", dirigida por el Profesor Dr. D. Luis Rico Romero.

El trabajo previo, que no hubiera sido posible sin el concurso y el esfuerzo conjunto del grupo de compañeros autores del mismo, no sólo ha sido interesante, sino también necesario para el desarrollo de futuras investigaciones sobre el tema. Además de ofrecer una recopilación de buena parte de la información disponible en aquél momento, ha permitido localizar los problemas básicos y los subordinados, y establecer, como consecuencia, una jerarquía racional de prioridades de investigación que han servido de referencia para el trabajo que presentamos. De hecho, muchas de las conjeturas y conclusiones que figuran en aquella publicación permanecen, todavía, como hipótesis de investigación.

En los sucesivos capítulos de la presente obra se expone una parte de los principales resultados de un análisis epistemológico, fenomenológico, cognitivo y didáctico efectuado sobre el campo de aplicación de los números naturales y los números enteros, afectando, en particular, a las cantidades y medidas discretas así como a las situaciones y problemas aritméticos involucrados en la educación del pensamiento numérico aditivo. El análisis lógico-formal de las relaciones entre las cantidades, los números y las medidas discretas elementales conduce a la detección y delimitación precisa de una laguna en los conocimientos [illegible]

[1] González, J. L. y otros (1990).

relacionados con el campo objeto de estudio. Como consecuencia, se desarrolla un análisis teórico en el que se constata, por un lado, la necesidad didáctica de considerar nuevos entes numéricos (los números naturales relativos), con características diferenciadas de las que poseen los números naturales y los números enteros, y la pertinencia de un modelo global que incluya el nuevo campo conceptual numérico establecido, y, por otro, la necesidad de modificar los planteamientos didácticos usuales sobre numeración y cálculo en los niveles elementales. La constatación empírica, añadida, de la existencia de diferencias en el plano cognitivo, contribuye a reforzar los planteamientos teóricos anteriores y a reafirmar que el tratamiento didáctico usual de los números enteros presenta serias deficiencias que explican una buena parte de los errores y dificultades detectadas en Aritmética y en Algebra y que pueden ser corregidas si se toman en consideración los resultados del estudio que presentamos.

El trabajo se expone en cinco partes diferenciadas que se desarrollan como sigue:

I. *El problema de investigación. Conceptos y métodos*

La primera tarea ha consistido en delimitar el área problemática y el problema concreto de investigación así como explicitar los motivos que justifican el trabajo, los fines o metas que se pretenden alcanzar y, por último, los principios de los que se parte, entre los que ocupan un lugar destacado los principios metodológicos.

En esta parte se exponen las referencias fundamentales de la investigación, distribuidas en dos capítulos: en el **capítulo 1** se presenta, de manera esquemática, el origen, la evolución y la delimitación precisa del problema, estableciendo un nexo de unión entre la publicación previa mencionada y el estudio que presentamos; en el **capítulo 2** se detallan los objetivos, las hipótesis, la metodología, el desarrollo temporal del trabajo y su situación en relación con los paradigmas y marcos convencionales de la investigación científica.

II. *Primera fase del análisis didáctico: revisión de los antecedentes*

Los estudios y publicaciones relacionados específicamente con la **Epistemología y Didáctica de los números enteros** son escasos y se refieren, en su mayor parte, a cuestiones superficiales con poca incidencia en el núcleo de la investigación. La preocupación por los aspectos sintácticos, por el aprendizaje y el dominio de reglas así como por los métodos didácticos más adecuados, de entre lo que destacamos la preocupación por la búsqueda de modelos coherentes y completos para la enseñanza, dominan el panorama del área problemática.

Por el contrario, se han encontrado numerosos trabajos que tienen una relación indirecta, aunque de interés, con el problema de investigación. Tal es el caso, entre otros, de los estudios sobre resolución de problemas, historia y epistemología de la aritmética y el álgebra, enseñanza y aprendizaje en la iniciación al álgebra, aritmética con números naturales, estructuras aditivas y multiplicativas en el marco de lo que Vergnaud (1982, 1983) llama "campos conceptuales", o los trabajos de Bell, A. (1982, 1986) encuadrados dentro de la "enseñanza por diagnóstico".

En un tercer nivel, más general, encontramos una diversidad de trabajos relacionados con errores y obstáculos en Educación Matemática, con el problema de la representación en Matemáticas y en Educación Matemática, con la Historia y Epistemología de la Matemática y de las Ciencias, que han contribuido a la clarificación de los aspectos generales del problema, o con las consideraciones sobre la línea de investigación conocida como Pensamiento Numérico.

La información relacionada en los párrafos anteriores se ha sometido a un procedimiento metodológico de síntesis metaanalítica cualitativa que hemos denominado "análisis didáctico", mediante el que se efectúa un estudio sistemático que se desarrolla en dos fases diferenciadas:

En la primera fase, que hemos denominado de revisión primaria de los antecedentes, se han analizado documentos que se agrupan en tres grandes apartados: **a)** Historia y Epistemología, **b)** Desarrollo cognitivo y aprendizaje, y **c)** Fenomenología, enseñanza y currículum.

La presentación de los resultados de esta primera fase se realiza en tres capítulos que se corresponden con cada uno de los apartados mencionados, es decir: el **capítulo 3** se dedica a la Epistemología y sus relaciones con la Educación Matemática, en general y en el caso de los números enteros; el **capítulo 4** incluye una revisión de las publicaciones sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de los números en general y de los números enteros en particular; el **capítulo 5** presenta una revisión comentada de investigaciones y trabajos publicados sobre fenomenología, enseñanza y aspectos curriculares en relación con el problema de investigación. En cada uno de ellos, por motivos de organización, la exposición va de lo general a lo particular, si bien los tres son independientes y se pueden abordar por separado.

En la segunda fase, cuyos resultados se exponen en el **capítulo 6**, se establecen, a modo de introducción de los capítulos restantes del libro, las primeras conclusiones que se deducen del análisis de las relaciones entre los resultados relevantes de la revisión realizada en la fase 1 (capítulos 3, 4 y 5) y de los resultados del estudio previo realizado. Estas primeras conclusiones del análisis didáctico justifican las decisiones tomadas con respecto al estudio teórico que se desarrolla en la parte III y al estudio empírico que se expone en la parte IV.

III. *Estudio teórico*

Analizar y cuestionar en profundidad los aspectos básicos, tanto matemáticos como epistemológicos, correspondientes a un tema de interés en Educación Matemática puede suponer, en algunos casos, un cambio cualitativo importante en la manera de entender y abordar la investigación. Y es posible, quizás, que sea el único procedimiento para que salgan a la luz nuevos datos sobre temas aparentemente estancados o saturados desde el punto de vista de la investigación educativa. El caso que nos ocupa puede ser uno de ellos, dado que los resultados de esta tercera parte creemos que son un buen ejemplo que ilustra las afirmaciones anteriores.

En los capítulos 7, 8 y 9 se presentan los aspectos fundamentales del trabajo teórico desarrollado a partir de los resultados del análisis didáctico que se expone en la parte II. Con él se pretende configurar un marco instrumental y explicativo que delimite con claridad el conjunto de fenómenos en estudio, permita situar y relacionar entre sí las investigaciones realizadas hasta la fecha y fundamente el desarrollo empírico que se expone en la parte IV y que se centra en la aplicación de algunos aspectos del contenido de esta tercera parte. Al mismo tiempo, desde un punto de vista más general, se espera que los resultados obtenidos contribuyan al desarrollo de futuras investigaciones sobre la Didáctica de la Aritmética y el Álgebra en los niveles intermedios de la escolaridad obligatoria.

A partir de un análisis de los diferentes tipos de cantidades, medidas y números que intervienen en el dominio definido por el problema de investigación se construye, en el **capítulo 7**, un modelo completo que incluye a los números naturales relativos, como tercera estructura numérica, junto a los números naturales y los números enteros; los elementos y relaciones que integran dicho modelo delimitan lo que se define en el mismo capítulo como *campo conceptual de los números naturales relativos*. En los dos capítulos restantes se refuerzan y se complementan los planteamientos anteriores: en el **capítulo 8** se analizan en profundidad las diferencias lógico-formales entre los números naturales relativos y los números enteros, mientras que en el **capítulo 9** se aborda el desarrollo amplio de una de las principales consecuencias del estudio teórico, como es la organización completa de los problemas y situaciones del dominio de aplicación del campo conceptual definido.

IV. *Estudio empírico*

Las consideraciones teóricas de la parte III hacen referencia a aspectos estructurales y formales sobre los números naturales relativos y los números enteros, encuadrados dentro de un modelo que permite organizar formalmente el campo de estudio. Una de las principales conclusiones establecidas es la que se refiere a la existencia de diferencias entre ambos tipos de números, de las cuales ocupan un lugar destacado las que corresponden a la estructura ordinal.

En el estudio empírico que se presenta en este cuarto apartado se somete a contraste una parte de dichas conclusiones teóricas, para lo que se realiza una indagación de carácter exploratorio sobre el funcionamiento del pensamiento numérico relativo a través de las respuestas de una muestra de sujetos a una serie de cuestiones organizadas que se refieren a situaciones cotidianas en las que interviene la comparación aditiva y el orden; estudio que representa una pequeña parte de un panorama más amplio y que abre nuevas vías que configuran, a nuestro entender, un programa de investigación cuyos rasgos se detallan en el capítulo 12.

El estudio se desarrolla en dos capítulos: en el **capítulo 10** se exponen los planteamientos metodológicos, las metas y principios, las variables consideradas y los instrumentos de recogida y de análisis de datos utilizados; en el **capítulo 11** se expone el procedimiento seguido en la recogida de datos así como los resultados y conclusiones que se deducen de la aplicación de los cuestionarios.

V. *Conclusiones generales y perspectivas futuras*

En el **capítulo 12**, junto a las conclusiones de la investigación, se incluye una breve panorámica de los problemas e interrogantes a los que se les debe prestar atención en el futuro.

Para terminar, es justo reconocer el esfuerzo conjunto de un colectivo de personas. En particular quiero expresar mi agradecimiento: a Luis Rico Romero, mi profesor, por su inestimable guía y apoyo; a los compañeros de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga por su colaboración desinteresada y su disposición al diálogo; a la profesora Teresa Rivas y al profesor Ramón Hidalgo por su orientación sobre algunos aspectos del estudio empírico; al profesor Juan José Saameño por la revisión de una parte del estudio teórico; a los profesores David y Alfonso Ortiz Comas por su colaboración en la aplicación de los cuestionarios; a los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y a los compañeros del Programa de Doctorado del bienio 88 - 90 por su aliento y por prestar un marco de debate que ha contribuido a la realización de este trabajo.

PRIMERA PARTE

El problema de investigación. Conceptos y métodos

CAPÍTULO

1

Origen, evolución y descripción general del problema

1.1. Introducción

El trabajo que presentamos se centra en la Epistemología y la Didáctica de los números enteros (fundamentos, recursos, aprendizaje y enseñanza), afectando a partes importantes del campo de investigación en Didáctica de la Matemática denominado Pensamiento Numérico.

Hablar de **Pensamiento Numérico** es hacer referencia a una *"línea de estudio e investigación en Didáctica de la Matemática que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el Sistema Educativo y en el medio social."* (Castro, E., 1994; págs. 1-2). Un campo amplio en el que pretendemos poner de manifiesto la existencia de una parte bien delimitada del mismo que, bajo la denominación genérica de **Pensamiento Numérico Relativo,** se caracteriza por una atención específica a la "relatividad" de los conceptos numéricos. El origen del Pensamiento Numérico Relativo se encuentra en los conceptos que surgen de la comparación de cantidades, números y medidas y se estructura formalmente a través de las relaciones de orden; se manifiesta por las actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de usos de estos conceptos —comparaciones y transformaciones— y se pone en práctica en las aplicaciones de la noción de operador (Dienes, Z. P., 1972)[1] y en el tratamiento y resolución de otros fenómenos y problemas en los que intervienen medidas relativas (Rico, L. y Castro, E. 1995; pgs: 167-168).

[1] El concepto de operador, probablemente es más antiguo. Sin embargo, el autor citado es uno de los que trata por primera vez dicha noción de una forma sistemática en el ámbito de la Educación Matemática (Colección V de la Editorial Teide bajo el título "estados y operadores").

Por otra parte. adentrarse en la línea Pensamiento Numérico supone, necesariamente, tener en cuenta la noción de campo conceptual de Vergnaud (1993, págs. 97 y sgtes.), que en nuestro caso ampliamos considerando que un campo conceptual numérico incluye:

a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

De este modo, el Pensamiento Numérico investiga los campos conceptuales numéricos, con la consideración de los *fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares* involucrados en la aplicación de un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de dicha estructura numérica.

En este marco, el objeto general de nuestro estudio es el **Campo Conceptual de los Números Naturales Relativos,** que abordamos desde una concepción multidisciplinar de la Didáctica de la Matemática, en la que destacamos la contribución de la Epistemología e Historia de la Matemática, la Cognición matemática, la Fenomenología de los conceptos y estructuras matemáticas y la Teoría Curricular. Nos proponemos mostrar en este estudio la pertinencia formal, contextual y cognitiva de este Campo Conceptual y su interés didáctico.

En este capítulo se va a exponer una visión general del área problemática y del tema específico de investigación, que se continuará en el capítulo 2 con la formulación concreta de los aspectos específicos que se van a investigar y se completará en los capítulos 3, 4 y 5. Esta primera aproximación pretende explicitar los planteamientos iniciales y contribuir a una descripción del origen y la evolución del problema. Utilizaremos en ocasiones algunas de las principales conclusiones y conjeturas que aparecen en González, J. L. y otros (1990), a la que nos remitiremos para una información más amplia

1.2. El origen del problema

El origen del problema se sitúa, en primer lugar, en la necesidad de precisar los interrogantes y deficiencias existentes en torno a la enseñanza-aprendizaje de los números enteros y de los conceptos numéricos elementales relacionados con ellos; en segundo término, en la necesidad de encontrar interpretaciones y explicaciones coherentes y útiles para la Didáctica de la Matemática a tales interrogantes y deficiencias; y, en tercer lugar, en la conveniencia de alcanzar respuestas a los problemas detectados, así como para otros interrogantes que encontramos en la

Historia y la Epistemología de los números enteros; un *"proceso histórico sorprendente de más de quince siglos"* (Glaeser, G., 1981).

En lo que sigue exponemos, de forma esquemática, los aspectos básicos que han motivado el trabajo de investigación. La mayoría de ellos serán revisados más amplia y rigurosamente en capítulos y apartados posteriores, a los que desde ahora nos remitimos.

1.2.1. *Interrogantes didácticos*

Algunas cuestiones elementales que pueden surgir por parte del profesor o de los alumnos ante el tratamiento didáctico de los números enteros, y que han sido fuentes de preocupación y debate en el ámbito de la Educación Matemática, son las siguientes:

1. ¿Es lo mismo 2 que +2?; ¿en qué se diferencian?; ¿y 2 y –2?; ¿qué es un número negativo?
2. ¿Por qué "menos por menos es igual a más"?
3. ¿A qué situaciones y contextos corresponden las parejas (a, b) de números naturales?; ¿qué papel desempeñan estas situaciones en la construcción de los números enteros?
4. ¿Por qué se define la multiplicación de pares de números naturales de la forma: $(a, b) \times (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$?; ¿qué significado tiene la multiplicación de pares ordenados?
5. ¿Qué tienen que ver los signos que anteceden a los números enteros con los signos de las operaciones de adición y sustracción?; ¿significan lo mismo?, ¿son diferentes?
6. ¿Sumar números naturales, es la misma operación que sumar números enteros?
7. ¿Por qué no tiene sentido en algunos casos sumar o multiplicar temperaturas?; ¿qué sentido tiene que si multiplico dos deudas obtenga como resultado una fortuna?
8. ¿Por qué es tan difícil encontrar un ejemplo práctico de la multiplicación de números enteros como ley de composición interna?
9. ¿Hay algún campo, algún modelo con significado concreto, alguna situación cotidiana y real en la que se puedan ver claramente los números enteros con todas sus propiedades?
10. ¿Qué tienen que ver los números enteros con el Álgebra?; ¿son realmente números o, por el contrario, deben ser tratados como relaciones algebraicas elementales?
11. ¿Por qué se sacan los números enteros del contexto algebraico en el que

surgieron históricamente para ser enseñados como números, en pie de igualdad con los naturales y racionales?

12. ¿Construcción formal?; ¿situaciones concretas de aplicación?; ¿qué aspectos habría que considerar?; ¿cómo secuenciarlos?; ¿en qué niveles?

13. ¿Por qué cometen los alumnos errores sistemáticos en la resolución de problemas en los que intervienen los números con signo?; ¿cuál es la naturaleza y el origen de dichos errores?

14. ¿Son correctos los ejemplos y situaciones problemáticas que se utilizan en el tratamiento didáctico usual de los números enteros?; ¿hay diferencias entre ellos?; ¿cuáles son esas diferencias?

Éstas y otras cuestiones derivadas constituyen "ideas impulsoras" para el desarrollo de la investigación. Son referencias permanentes que surgen de una preocupación netamente didáctica y que marcan desde el principio el sentido del trabajo. Pero dichos interrogantes necesitan todavía de un análisis detallado que aporte soluciones prácticas. Como afirman Gallardo, A., Rojano, T. y Carrión, V. (1994)[2], "*. .la controversia de los números negativos se resolvió en forma definitiva en el ámbito matemático en el siglo XIX con la extensión del sistema numérico, pero continúa como problema abierto para la Didáctica*". Las cuestiones que se han suscitado anteriormente son precisamente algunos de los indicadores que aportan credibilidad a esta afirmación.

1.2.2. *Hechos observables*

En el trabajo que se desarrolla en las aulas, en los libros de texto, en los programas, en los estudios sobre rendimiento de los alumnos y en otras muchas dimensiones curriculares, se pueden observar los siguientes hechos (González, J. L. y otros, 1990):

Incoherencias y disfunciones en la enseñanza de los números naturales, los números enteros y las operaciones aritméticas elementales:

— Ausencia intencionada en los programas, libros de texto y en el trabajo cotidiano en el aula, de las sustracciones imposibles entre naturales.

— Atención excesiva a las operaciones aritméticas y a las estructuras algebraicas en detrimento de las estructuras ordinales y topológicas de los números, de tal manera que el orden, la comparación y la cuantificación relativa se encuentran descuidadas en el currículum.

[2] "Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones". *Recherches en Didactique des Mathématiques*. En prensa. Pág. 3.

— Predominio de la concepción "absoluta" y "estática" de los números.

— Tratamiento didáctico como copia simplificada y vulgarizada del proceso lineal de construcción formal de los conjuntos numéricos.

— Excesiva algoritmización ante las dificultades que plantea la construcción y comprensión de los conceptos correspondientes.

Problemas didácticos específicos con los números enteros:

— Desfase temporal entre la introducción por necesidades instrumentales y la justificación satisfactoria de los conceptos y procedimientos correspondientes.

— Elección del tratamiento didáctico más adecuado ante la diversidad de construcciones y vías didácticas de acceso.

— Dificultades para abordar coherentemente las relaciones entre la aritmética natural y la aritmética entera; entre la cuantificación "absoluta" y la cuantificación "relativa".

— Insuficiencia del proceso didáctico usual para abordar el paso de la aritmética al álgebra, en el sentido de contemplar adecuadamente las conexiones entre los números naturales, los números enteros y las nociones algebraicas elementales.

Dificultades y errores constatados de los alumnos.

— En la conceptualización y en el dominio de los números enteros.

— En el paso de la aritmética al álgebra.

— En la resolución de problemas en los que intervienen magnitudes dirigidas y números enteros, entre otros.

En los sucesivos capítulos, se hará una revisión detallada de algunos de estos aspectos clave del tema de investigación.

1.2.3. *Otros problemas epistemológicos y psicológicos*

Como veremos en los correspondientes capítulos, las siguientes cuestiones se encuentran abiertas a nuevos enfoques y análisis:

— El número como expresión de una cantidad "absoluta" parece ser un obstáculo[3] histórico persistente. Puede ser también un obstáculo didáctico importante, responsable de la aparición de numerosos errores. En este sentido, pueden existir relaciones profundas entre las dificultades y los errores de los alumnos y los obstáculos y las rupturas epistemológicas, con lo que se podría asegurar que los errores son consecuentes con el proceso histórico.

[3] Bachelard, G. (1974).

— Las relaciones históricas, formales y psicogenéticas entre los números, las cantidades y las medidas.

— La representación de los conocimientos sobre cantidades, números y medidas. La expresión numérica y la expresión algebraica.

— La naturaleza y existencia de los números naturales y los números enteros. La ampliación del conjunto de los números naturales y las relaciones históricas y lógico-formales entre los números naturales y los números enteros.

1.3. Estudio previo. Primeros antecedentes

El estudio presenta dos etapas diferenciadas. La primera de ellas, en la que se presenta el tema general de la Didáctica de los números enteros, se ha caracterizado principalmente por la recogida de información, la elaboración de algunas conjeturas y el planteamiento de los primeros interrogantes de nuestro estudio. La segunda, ha consistido en establecer un orden de prioridades entre los diferentes aspectos involucrados y en la realización de un estudio sistemático sobre algunas cuestiones que hemos considerado básicas.

En el presente apartado vamos a dedicar una reflexión a la primera etapa descrita y que culminó con la publicación ya referenciada. Se trata de los antecedentes cercanos del problema de investigación, cuya inclusión resumida pretende, por un lado, explicitar la complejidad y amplitud del área problemática y del problema general de investigación y, por otro, contribuir a una mejor comprensión del proceso seguido en la investigación. Los diferentes aspectos que se exponen, para cuyo desarrollo extenso nos remitimos al capítulo 3 de González, J. L. y otros (1990), han servido de punto de partida para la formulación definitiva del problema.

1.3.1. *Esquema general y primeras conclusiones*

En el esquema de la figura 1.1 se reflejan los aspectos que se han analizado en la primera etapa así como la trayectoria seguida en el trabajo.

En dicho estudio previo ya se constata, entre otros aspectos:

a) la existencia de numerosos *interrogantes y cuestiones* básicas sobre números enteros que se encuentran aún sin respuesta satisfactoria.

b) la inexistencia de un marco o modelo teórico que explique, de una forma adecuada y completa, las *dificultades y errores* de los alumnos relacionados con la conceptualización y la aplicación práctica de los números enteros, con la resolución de problemas aritméticos y con el paso de los números naturales a los números enteros y de la aritmética al álgebra.

c) La *escasa incidencia de los estudios históricos y epistemológicos en la investigación didáctica* sobre los números naturales y los números enteros así como sobre los conceptos de número, cantidad y medida, lo que conlleva:

— la ausencia, en muchos trabajos de investigación, de una fundamentación sólida basada en la reflexión previa sobre las consecuencias didácticas de la epistemología y la historia de los conocimientos correspondientes.

— la existencia de numerosas investigaciones simplemente descriptivas o sobre aspectos meramente sintácticos.

— la irrelevancia, superficialidad, desconexión entre partes y escasa aplicabilidad de los conocimientos generados.

d) La influencia excesiva e incuestionada del conocimiento matemático formalizado y de la estructura y el desarrollo lógico de la disciplina en los trabajos de investigación didáctica y en el tratamiento curricular de los números enteros.

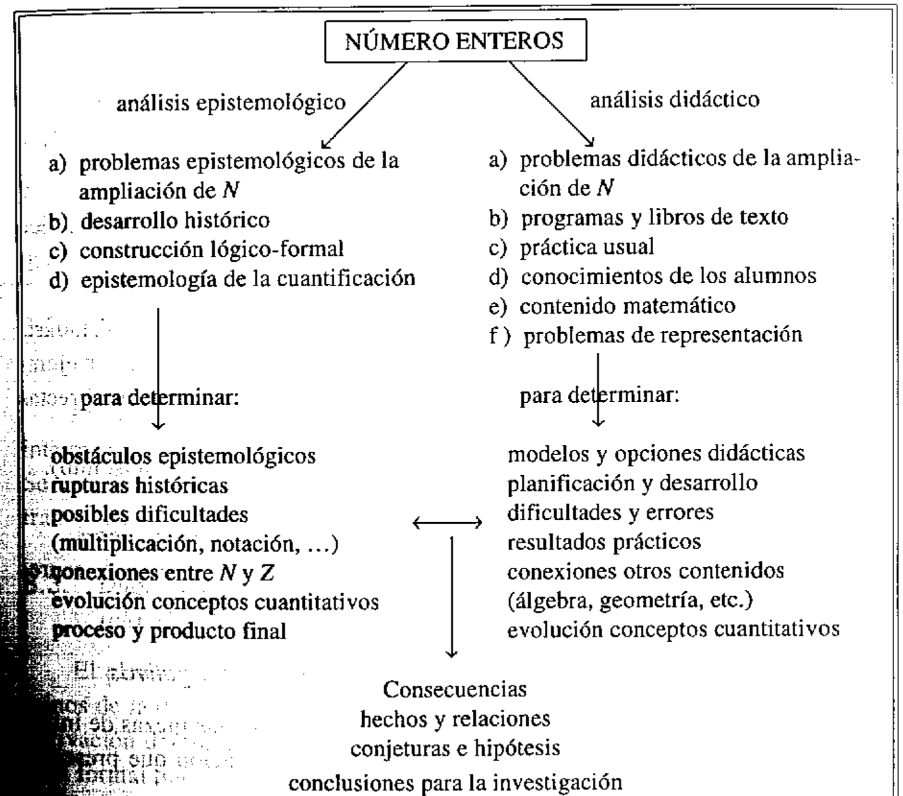


Figura 1.1.—Esquema general del proceso seguido.

1.3.2. ***Epistemología de los números enteros***

El estudio realizado atiende a los tres grandes métodos de la Epistemología desde la perspectiva de la Epistemología Genética (Piaget, 1979): histórico-crítico, lógico-formal y psicogenético.

1.3.2.A. *Elementos para un análisis histórico-crítico*

A.1. *Buscando en la Historia*[4]

¿Cómo surgieron los números enteros?; ¿cuál ha sido la evolución a lo largo de 15 siglos de lo que hoy entendemos por número negativo?; la revisión del proceso histórico proporciona una información que refleja, por sí sola, la complejidad epistemológica del problema que estamos tratando.

Por otra parte, en el capítulo 3 del libro se incluyen algunas consideraciones recientes, como es el caso de la "negatividad" en la Matemática China (Lizcano, E., 1993).

A.2. *Principales obstáculos epistemológicos que marcaron históricamente la construcción de los números negativos*

Glaeser, G. (1981) ha realizado un trabajo crucial sobre el proceso histórico de los números enteros. Encontró los seis obstáculos siguientes:

1.—Incapacidad para manipular cantidades negativas aisladas.

2.—Dificultad para dotar de significado a las cantidades negativas aisladas.

3.—Dificultad para unificar la recta numérica (que se manifiesta por ejemplo en la consideración de la recta numérica como yuxtaposición de dos semirrectas opuestas).

4.—Ambigüedad de los dos ceros (cero origen o relativo y cero absoluto).

5.—Deseo de un modelo unificado.

6.—Dificultad para superar el sentido concreto atribuído a los números.

Estos obstáculos se pueden reducir, básicamente, a uno sólo: "el número representa una cantidad en sentido *absoluto* ".

A.3. *Otras consecuencias de la historia de los números negativos*

Los análisis histórico-críticos proporcionan una parte de las piezas de información que serán examinadas en su conjunto en la investigación que presentamos. El origen algebraico de los números negativos, su carácter intuitivamente contradictorio en relación con los números naturales y el paso de la matemática práctica a la formal con motivo de la construcción de los números enteros, son algunas de las consecuencias mencionadas.

[4] Información extraída de González y otros (1990), cap. 2.

Por otra parte, utilizando la terminología de Douady, R. (1984), se ha realizado un análisis de los significados históricos atribuidos a los números enteros y de su relación con los significados que se suelen atribuir a dichos números en los procesos didácticos usuales.

1.3.2.B. *Elementos para un Análisis lógico-formal*

En los apartados que siguen se relacionan brevemente las principales reflexiones epistemológicas realizadas.

B.1. *El proceso de cuantificación desde el punto de vista de la teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas*[5]

La búsqueda de relaciones entre los conceptos y teorías matemáticas y las postulaciones de la Filosofía de la Ciencia, nos ha llevado a considerar la teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas de Stegmüller como un marco adecuado, que resulta útil para nuestro problema de investigación; en el apartado 7.3, al que nos remitimos, se encuentra un desarrollo detallado de la misma.

B.2. *Una interpretación de la construcción formal usual. La comparación y las situaciones relativas*

La construcción formal del grupo aditivo de los números enteros admite una interpretación que se concreta en términos de comparaciones cardinales u ordinales. Se trata de una interpretación que se desarrolla como una parte relevante de nuestro trabajo en el capítulo 7, apartado 7.4, al que nos remitimos.

B.3. *Diferencia de signo y relaciones asimétricas: el número entero como relación*

El planteamiento de Russell, B. (1973) sobre la diferencia de signo, en términos de la distinción entre una relación asimétrica y su recíproca, conduce a la motivación del doble signo de la propia estructura ordinal de N y a la construcción formal por pares ordenados.

[5] Stegmüller, W. (1979).

1.3.2.C. *Elementos para un análisis psicogenético*

Piaget, J. (1975, 1979) afirma: "*las raíces del número entero, se hunden en el proceso de formación de las* primeras nociones numéricas, *comenzando a tomar entidad a partir del momento en el que el pensamiento se hace reversible*"; planteamiento que resulta contradictorio con el que sostienen autores como Fischbein, E. (1987) y Klein, F. (1927), quiénes defienden el carácter puramente formal y no intuitivo de los números enteros; esto viene a justificar, junto a otras consideraciones, la conveniencia del estudio que presentamos.

1.3.3. ***Enseñanza y aprendizaje de los números enteros***

La información contrastada y publicada que se ha utilizado en este punto, ha sido revisada de manera extensa posteriormente. En los capítulos 3, 4 y 5 presentamos una revisión más detallada y amplia de los trabajos publicados sobre el contenido de este apartado.

1.3.3.A. *Sobre los aprendizajes: algunos errores constatados*

Los siguientes errores de tipo conceptual, en su mayoría derivados de la idea fundamental "el número expresa una cantidad *absoluta*", aparecen como errores constatados en: Bell, A. (1982a, 1982b y 1986); Iriarte, D. y otros (1989) y en González, J. L. y otros (1990)[6]:

— Errores en situaciones de listas y escalas: "subir es aumentar", "ignorar el signo", "signo denota región", "confundir posición y movimiento".

— Diferencias al cruzar el cero en el manejo de temperaturas.

— Inversión y palabras clave engañosas: "fracaso en la inversión".

— Errores en la combinación de movimientos.

— La secuencia temporal como fuente de errores.

— Aplicaciones indebidas de las reglas para las operaciones aritméticas con números naturales al caso de los números enteros.

— Traslado del orden natural al conjunto de los números negativos.

— Identificación de los símbolos literales con números positivos.

[6] Páginas 152-165.

1.3.3.B. *Líneas generales de algunos modelos didácticos no formales que constituyen vías matemáticas de acceso a Z*

En González, J. L. y otros (1990, cap. 4) se hace una descripción detallada y extensa de las principales vías didácticas no formales de presentación de dichos números, de entre las que destacamos: el modelo aritmético inductivo experimental, el modelo algebraico, diversos modelos geométricos y el modelo de las magnitudes dirigidas.

1.3.4. ***Análisis fenomenológico***

En la publicación ya referenciada (op. citada, pág. 74 y siguientes) se incluye un breve estudio sobre los significados fenomenológicos de los números naturales, naturales relativos y enteros. En la obra mencionada no se utiliza aún el término "relativo" con la precisión que se establece para este trabajo en el apartado 7.4 del capítulo 7. Asimismo, en los capítulos 4 y 5 de esta monografía se expone una revisión más amplia y detallada de los usos y contextos de aplicación de los números con signo.

1.4. **Planteamientos iniciales: conjeturas y juicios a priori**

En este apartado se exponen las principales ideas surgidas tras la primera toma de contacto con el campo en estudio, en la seguridad de que ayudará a comprender mejor la totalidad del trabajo realizado y con la intención expresa de explicitar los planteamientos y separar o aislar lo subjetivo de lo objetivo, lo opinable de lo constatado y aceptado por la comunidad.

Al comenzar formalmente los trabajos de la tesis doctoral, se manejaban ya las siguientes conjeturas:

1.—Entre los conceptos numéricos usuales de los números naturales y los números enteros, postulamos la existencia de un tercer tipo de números a los que denominamos números naturales relativos.

2.—Para abordar este nuevo tipo de números, una primera cuestión relevante es precisar la consideración "absoluta" y "relativa" de los números naturales. En nuestra opinión, *los conceptos numéricos son prioritariamente conceptos dinámicos y no estáticos,* al menos en los primeros niveles del proceso de su construcción. El número natural como expresión de cantidad "absoluta" (ordinal, medida, etc.) es una etiqueta, una propiedad de los objetos y colecciones que requiere para su comprensión de un pensamiento avanzado, de un proceso de elaboración que pasa necesariamente por unas etapas previas en las que el individuo tiene que construir relaciones cuantitativas como transformaciones en las que la comparación juega un papel fundamental. Y *es precisamente en las acciones en las que se transforman y comparan cantidades, en la propia dinámica cuantitativa, donde se consolida el sentido "absoluto" del número*, el cual tomará cuerpo cuando dichas cantidades sean consideradas cualidades transformables, susceptibles de aumentar o disminuir, comparables con otras mayores o menores que ellas, es decir, números naturales relativos. *La cantidad aislada, por sí misma, no tiene sentido si no es teniendo en cuenta su comparación o referencia con otras cantidades.* Si no se considera en el juego comparativo el carácter relativo de los números, difícilmente se podrá dotar de un significado "absoluto" a dichos números.

Por tanto, intuimos que *las nociones absoluta y relativa de cardinal y ordinal son coexistentes puesto que expresan los aspectos estático y dinámico, respectivamente, del número*. Por este motivo, es posible hablar en los primeros niveles, de cualidades perceptibles y comparables de los objetos y colecciones, tales como **la numerosidad relativa o posición relativa** en una serie. Estas cualidades no se constituirán en cardinal y ordinal con sentido plenamente numérico hasta que no se haya construido toda una *estructura operatoria intuitiva* basada en transformaciones y comparaciones, las cuales, por otra parte, son el soporte intuitivo para las estructuras aditiva y de orden de los números enteros.

Esta conjetura inicial está en el origen de una de las hipótesis fundamentales de nuestra investigación: la existencia del constructo **número natural relativo** que será presentado en el capítulo 2 y cuya estructura y desarrollo se presentarán extensamente en el capítulo 7, apartado 7.4.

3.—Los números enteros son de naturaleza distinta a los números naturales, aunque algebraicamente y por comodidad se identifiquen parcialmente, de tal manera que la "ampliación" de N a Z es puramente algebraica.

4.—Aun cuando en multitud de ocasiones se identifican los números enteros y los números naturales relativos, nosotros vamos a distinguir entre ambos tipos de números:

Número natural relativo.—Objeto conceptual concreto ligado a experiencias reales con cantidades y medidas (como útil o como objeto en sí).

Número entero.—Objeto conceptual abstracto o ente matemático ligado al saber matemático (como útil o como objeto).

Desde el punto de vista de los significados, distinguimos entre:

— El número natural relativo o número contextualizado como: cardinal u ordinal dirigido o relativo, medida orientada, comparación numérica, operador o transformación aritmética.

— El número entero, como objeto matemático, no tiene significados concretos, abarcando por propia construcción todos los significados y situaciones con la misma estructura básica.

El salto de los números naturales relativos a los números enteros requiere de una actividad matemática importante para dotar a los números naturales relativos de la categoría de objetos matemáticos, incardinados como tales en el resto de conocimientos de nivel matemático, con una estructura y propiedades coherentes con dichos conocimientos. La Didáctica de la Matemática debe proporcionar los medios para la evolución hacia el número entero como objeto matemático, a partir del número natural relativo como relación-útil en contextos concretos.

5.—Los ejemplos mediante los que se contextualizan los números naturales relativos, a los que denominamos **situaciones relativas**, se pueden caracterizar mediante tres elementos combinados:

— Una *cualidad comparable* o magnitud extensiva (con estados comparables entre sí). Para el caso que nos concierne, la numerosidad relativa o la posición relativa en una serie, o bien, número natural en sus distintos significados concretos.

— *Un origen o referencia,*

— *Una dirección y dos sentidos opuestos.*

Las situaciones relativas, constituyen el dominio de aplicación del **campo conceptual de las nociones numéricas relativas elementales.**

6.—*La comparación cuantitativa es una actividad básica natural del ser humano de cualquier cultura; más, incluso, que la actividad de contar, que es un instrumento sofisticado para precisar las comparaciones, primero, y para determinar cardinales y ordinales después.* En este sentido, la estructura comparativa natural, que interviene en la actividad cognitiva usual en el trabajo con números, se formaliza mediante las construcciones matemáticas por pares ordenados. La **reversibilidad operatoria**, la **conservación** de la cantidad y el dominio **de la transitividad**, pueden ser síntomas de la buena salud de la estructura comparativa en dominios cuantitativos. Se constituyen en indicadores del dominio cognitivo de los aspectos dinámicos, operativos y relacionales de la cantidad relativa; del número relativo como relación-útil[7].

7.—Postulamos que, en situaciones concretas, los números naturales relativos negativos (que son números naturales con una cualidad arbitraria "negativa") necesarios, fundamentalmente, para poder resolver situaciones relativas com-

7. Terminología atribuida a Douady, R. (1984) y adaptada al caso particular en: González Marí, otros (1990), pág. 76 y sigtes.

plejas, a pesar de que Fischbein (1987) sostiene que: *"no existe necesidad práctica para inventar los números negativos"*. Con independencia de esto, mantenemos que las referencias reales e intuitivas son insuficientes para explicar determinados aspectos formales de los números enteros, por ello será necesario que la enseñanza de tales aspectos se haga formalmente sin utilizar justificaciones concretas inadecuadas.

8.—Los símbolos + y – se emplean, al menos, con tres significados distintos: para expresar la distinción entre enteros positivos y negativos, para distinguir entre naturales relativos positivos y negativos y para representar las operaciones aritméticas usuales de adición y sustracción en cualquiera de los conjuntos numéricos considerados, según reconocen diversos autores, entre otros, Vergnaud, G. (1983). Entendemos que existe una relación muy directa entre los significados atribuidos a dichos símbolos en los contextos considerados, y ello debido al carácter operacional del número natural relativo así como al tipo de situaciones en las que aparece (comparaciones y transformaciones), las cuales se desenvuelven en una estructura aditiva.

9.—Los significados de cantidad orientada, adjetivada o con sentido de los números naturales relativos se suelen proponer como ejemplos adecuados de la estructura aditiva y de orden del conjunto Z. Sostenemos que este planteamiento es inadecuado: el conjunto de los naturales relativos no tiene estructura de grupo para la adición, y su relación de orden es, formalmente, parcial.

10.—El estudio de la estructura multiplicativa queda fuera de los objetivos de este trabajo. Por un lado, el producto de naturales relativos se ejemplifica mediante situaciones muy forzadas, o bien con situaciones en las que carece de sentido la estructura aditiva y, por otra parte, la multiplicación de números enteros sólo tiene justificación en el ámbito formal. Es un hecho que las contextualizaciones aditivas de los números naturales relativos carecen de sentido para la multiplicación.

11.—*La secuencia que se utiliza explícitamente como referencia para diseñar el currículum de numeración y cálculo en los primeros niveles, y que coincide con el orden lógico de construcción matemática de los conjuntos numéricos (de N a Z), no es la más adecuada por la ausencia de un tratamiento explícito para los números naturales relativos.* En este sentido, se echa en falta un planteamiento didáctico completo y en un marco de conjunto. Este planteamiento didáctico obliga a aplazar la introducción de los números con signo a niveles avanzados del currículum cuando, por el contrario, parece que las relaciones más elementales sobre las que se sustenta el concepto de número natural relativo se manifiestan ya en las manipulaciones cuantitativas básicas.

12.—Postulamos que los antecedentes de la estructura aditiva de Z, del doble signo en el campo numérico, de la estructura de orden total sin primer ni último elementos en dominios numerables, se encuentran en un proceso de desarrollo intelectual que pasa por las siguientes etapas previas:

a) El número relativo como *relación-útil* (transformación-comparación) en contextos concretos;

b) El número relativo como *relación-objeto* (objeto contextualizado);

c) El número relativo como *objeto descontextualizado* (aislado): primeras aproximaciones al número entero, correspondientes a los niveles **protomatemáticos y paramatemáticos** de los conceptos (Brousseau, 1986).

A dichas etapas, habría que añadir otras dos de aprendizaje y desarrollo posteriores, debidas a la instrucción escolar:

d) El número entero como *útil matemático;*

e) El número entero como *objeto matemático;*

ambas correspondientes al nivel **matemático** de los conceptos.
Igualmente, habría que añadir tres descontextualizaciones o abstracciones de diferente naturaleza:

— Paso del número relativo como útil al número relativo como objeto;

— Paso del número relativo al número entero como útil matemático;

— Paso del número entero como útil matemático al número entero como objeto matemático.

A la vista de lo anterior, parece claro, que *el tratamiento usual actual supone una alteración del proceso histórico.*

13.—Otros *errores didácticos:*

La concepción general de que *el número expresa cantidades absolutas*, ha sido un *obstáculo histórico* para el desarrollo de la Matemática. Parece que se vuelven a reproducir en el aula actual las condiciones para propiciar y consolidar a nivel didáctico el mismo obstáculo epistemológico.

En este sentido, se provoca un *obstáculo didáctico* que es corregible abordando las operaciones aritméticas desde la óptica de las transformaciones o acciones relativas con cantidades en un contexto dinámico y potenciando la estructura comparativa y, en consecuencia, el orden, la reversibilidad operatoria, las relaciones asimétricas y transitivas y la abstracción del número como relación, que quedará emparejada la abstracción del número como estado; como cantidad considerada aisladamente; como "medida" aislada.

Un segundo error consiste en utilizar la construcción formal sin un soporte que la sustente, sin un contenido al que dar sentido; una formalización hueca y construida en el vacío, con la que se pretende hacer comprender al alumno que hay que ampliar N con nuevos números (los negativos), de tal manera que ahora ya se pueden considerar iguales a 2 y +2 por ejemplo; que es normal que coexistan, en el mismo conjunto, números con signo y números sin signo, puesto que éstos (los positivos) se pueden suprimir "por comodidad"; que todos cumplen una serie de reglas, unas intuitivas y otras no, aunque todas "funcionan", y que, desgraciadamente, no se pueden poner ejemplos completos válidos.

Estas conjeturas suponen una primera aproximación al problema de investigación que se precisa en el apartado 1.8 y se detalla tanto en los objetivos del trabajo, apartado 2.2, como en los enunciados de las hipótesis, apartado 2.3.

1.5. Necesidades y prioridades. Primeras claves de la investigación

Tal y como se recoge en los apartados anteriores, el estudio previo realizado abarca dos aspectos generales:

1.° Análisis de las raíces epistemológicas para:
   a) focalizar el problema.
   b) clarificar la naturaleza de los conocimientos implicados.
   c) establecer prioridades.

2.° Análisis didáctico para:
   a) contextualizar el problema.
   b) preparar posibles estudios empíricos o experimentales.

Pero la diversidad de los campos implicados, la complejidad y la interrelación de las conjeturas inicialmente formuladas así como la amplitud de las cuestiones que, como consecuencia, demandan una investigación en profundidad, requieren de un proceso de organización de la información y, en general, de todo el campo de estudio. En particular, nos planteamos las siguientes cuestiones:

1.° problema: prioridades (*¿Por donde comenzar?*).

— Conocimientos, destrezas, actitudes, concepciones de los alumnos sobre los números enteros y situaciones relativas de cuantificación.

— Errores y obstáculos en el aprendizaje de los números enteros.

— Epistemología de los números enteros y sus consecuencias para la Didáctica.

— Pensamiento numérico relativo: psicogénesis (¿antes códigos relativos que absolutos?); incidencia en los inicios de la cuantificación; papel del número natural; estructura comparativa; uso cognitivo de las funciones relativas del número; influencias socioculturales, didácticas y otras.

2.° problema: relevancia (*¿Que aspectos son importantes para el área?*).

Detectamos los siguientes: clarificación de las relaciones epistemológicas entre los conceptos numéricos y los conceptos que aparecen en las situaciones concretas de aplicación; errores y causas como instrumentos de diagnóstico didáctico y cognitivo; características del pensamiento numérico relativo.

En el marco de las conclusiones y conjeturas que se han expuesto en los apartados anteriores, después de dedicar una especial atención al análisis de los errores y al problema de la "traducción" entre diferentes sistemas de representación, *detectamos la necesidad de una clarificación previa sobre la naturaleza de los conceptos implicados;* en concreto *de establecer el campo conceptual de los números naturales relativos.* Dedicamos los apartados siguientes a desarrollar esta idea.

1.6. Organización y descripción del Area problemática

Nuestra preocupación no está limitada a un tópico puntual, sino que abarca toda una serie de problemas interrelacionados que requieren de una cierta organización.

Una de las tareas más importantes llevadas a cabo en la segunda etapa de la investigación ha sido la de organizar el campo en estudio y delimitar con precisión el tema específico sobre el que se iba a centrar el interés del trabajo. En este sentido se exponen a continuación, de manera organizada, los principales resultados y conclusiones de este proceso.

1.6.1. *Relación con la investigación en Educación Matemática*

El tema que nos ocupa se puede situar en una parte de la investigación en Didáctica de la Matemática interesada en el Pensamiento Numérico en los niveles elementales. Bajo este epígrafe general se pueden identificar y separar, a efectos teóricos, una serie de parcelas diferenciadas que en la práctica educativa interactúan y operan conjuntamente. De entre ellas podemos destacar, en primer lugar, la que atiende a los aspectos psicológicos de la Educación Matemática y, especialmente a los *aprendizajes* en matemáticas; en particular a los aprendizajes sobre la numeración y el cálculo, abarcando entre otras cuestiones:

— la naturaleza, las características y la evolución de dichos aprendizajes;

— los errores y las dificultades en los procesos de aprendizaje;

— los procesos individuales de constitución de los conocimientos así como semejanzas y diferencias entre individuos diferentes;

— las representaciones cognitivas y significantes de los conocimientos correspondientes;

— las relaciones entre las experiencias y la formación de los conceptos;

— la adquisición de automatismos, procedimientos y destrezas.

Por otra parte, encontramos un campo con entidad propia centrado en la *enseñanza* de la matemática en general y, en particular, en la enseñanza de los conocimientos numéricos, es decir:

— naturaleza, características, relaciones, estructura y organización de los elementos que integran el currículum escolar sobre numeración y cálculo (objetivos, contenidos, metodología, recursos, relaciones de comunicación, evaluación, etc.), en presencia de factores y condiciones complejas propias de toda actividad humana (socioculturales, económicos, medio-ambientales, etc.);

— políticas educativas y proyectos curriculares;

— formación científico-didáctica del Profesor de matemáticas y en particular para la enseñanza de la numeración y el cálculo y otros conceptos numéricos.

Y, en tercer lugar, una parte más ligada a la práctica, basada en los procesos de *enseñanza-aprendizaje* propios del hecho educativo real, en los que interactúan diversos factores de los dos apartados anteriores, es decir:

— métodos y técnicas para provocar aprendizajes óptimos sobre numeración y cálculo;

— recursos y medios necesarios para ello;

— adecuación de los diseños curriculares sobre numeración y cálculo a los intereses, capacidades y necesidades de los alumnos así como a las necesidades científicas, socioculturales o a las diferencias individuales.

A pesar de esta separación, que se observa en el mayor peso dado a la faceta psicológica o pedagógica de la Educación Matemática, lo cierto es que se constata la necesidad de la integración de dichos aspectos en un todo coherente y específico de la Didáctica de la Matemática. En este sentido, el "análisis didáctico" en su significado usual, sujeto a determinadas modificaciones que se exponen en el capítulo 2, puede constituir el instrumento que cohesione los diversos factores que intervienen en los fenómenos educativos y que dé respuestas específicas a las necesidades de la investigación en este campo.

Pero el análisis didáctico no debe agotarse en la integración de los diversos aspectos relacionados anteriormente como una simple adición de datos obtenidos desde estos diferentes enfoques. Por el contrario requiere de una elaboración compleja, en la que se han de relacionar entre sí las distintas informaciones procedentes de dichos enfoques a partir, como veremos, de otros elementos básicos y con unas ciertas prioridades marcadas por la necesidad de efectividad científica. Así, no es difícil constatar, por ejemplo, la dependencia que tienen los tres campos relacionados respecto de la Matemática, su Epistemología y su Historia, o de otros aspectos como es el caso de la Epistemología de las Ciencias, que aporta en este tema concreto una información valiosa sobre la formación de los conceptos científicos.

Los análisis epistemológicos de la matemática en el campo educativo deben tener una orientación marcadamente didáctica (el interés primordial no debe estar en conocer la matemática en profundidad sino en obtener información útil y relevante para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la matemática. Para ello, los estudios epistemológicos se deben hacer pensando en el alumno; su pensamiento, sus necesidades y capacidades; en el aula; en las actividades usuales; en los métodos y técnicas que se utilizan cotidianamente, etc.). Y es conjugando la información obtenida bajo este enfoque peculiar y específico, con los planteamientos actuales sobre la naturaleza y existencia de los objetos y teorías matemáticas, sobre aquellos aspectos de las Ciencias Experimentales que se encuentran en estrecha relación con los contenidos matemáticos considerados así como sobre otros factores que afectan al hecho educativo real, como se encuentra la conexión entre las distintas partes bajo una referencia única: el pensamiento matemático individual y colectivo, su evolución, sus relaciones con otros tipos de pensamiento y su educación, no sólo con miras a la simple transmisión del conocimiento matemático sino lo que es más importante, para que sea posible el perfeccionamiento del conocimiento existente y, sobre todo, la creación de nuevos conocimientos.

Desde este punto de vista, la Psicología de la Educación Matemática, al centrar la atención en los procesos de construcción de los conocimientos matemáticos por parte del sujeto individual, cobra todo su sentido como parte íntimamente relacionada con el conocimiento matemático y con las determinaciones curriculares que conforman los procesos educativos.

Por otra parte, la Educación Matemática en su vertiente pedagógica presenta una estrecha dependencia de los factores anteriores, añadiendo otras consideraciones sociales, políticas, culturales y económicas, que vienen a mejorar y completar los diseños y desarrollos curriculares. No hay más que recordar, por ejemplo, que todos los elementos curriculares deben depender básicamente de consideraciones psicológicas acerca del individuo que se pretende educar y epistemológicas acerca de los conocimientos que van a constituir el contenido de dicha educación (Gimeno, J.; Pérez, A., 1983).

1.6.2. *Elementos concretos que delimitan el área problemática*

A tenor de las consideraciones realizadas en el apartado anterior, el trabajo de investigación se centra en torno a tres campos generales:

a) *Epistemología y Didáctica de la Matemática* y, en particular, de la numeración y el cálculo, con especial incidencia en las estructuras aditiva, ordinal y topológica de los números naturales y los números enteros.

b) *Desarrollo cognitivo de conceptos y destrezas básicas en Matemáticas,* con especial incidencia en el campo del "pensamiento numérico relativo aditivo" como parte del campo de investigación más general conocido como "Pensamiento Numérico".

c) *Currículum de Matemáticas,* con especial incidencia en el bloque de numeración y operaciones aritméticas elementales y, en particular, con la clasificación de los problemas aditivos en los que intervienen los números relativos y su resolución.

Se pretende establecer por tanto unos principios fundamentales de los que se puedan extraer conclusiones válidas para el diseño curricular y el desarrollo práctico en el aula. No obstante, no se pondrá especial énfasis en esta última tarea, ya que deberán ser los responsables de la política educativa y las personas interesadas en la práctica las que, manejando entre otras cosas los resultados y conclusiones de este trabajo y a tenor de los múltiples factores que intervienen en el diseño curricular, opten por una u otra formas de concrección de las cuestiones en estudio.

1.7. Descripción general y racionalidad del problema de investigación

El tratamiento didáctico de los números enteros se realiza actualmente bajo uno de los siguientes enfoques (González, J. L. y otros, 1990):

a.—Mediante situaciones relativas y modelos concretos en tareas prácticas (campo de referencia o de aplicación concreta de los números enteros).

b.—A través de consideraciones puramente formales (extensión de la aritmética, construcción mediante pares ordenados, construcción axiomática).

c.—Mediante el desarrollo de un proceso mixto, mezcla de los dos anteriores, en el que se parte de situaciones concretas y ejemplos prácticos para llegar posteriormente al tratamiento matemático.

Con la opción **a** sólo se atiende a la utilidad práctica de los números enteros, sin ningún intento de construcción o estructuración matemática. Con la opción **b**, se pone el énfasis en los aspectos puramente formales con un descuido notable de los significados y referencias que dan sentido y contenido a los aspectos fundamentales del tema. La opción **c**, en la que se sintetizan aspectos de la **a** y la **b**, convenientemente secuenciados, constituye el modelo didáctico más extendido. En este sentido, una educación orientada al pensamiento numérico relativo concreto, en la que se atienda especialmente y en primer lugar al campo de los números naturales relativos, para pasar después a la simbolización, generalización y construcción matemática formal de los números enteros sobre un cúmulo de significados y experiencias sólidamente construidas, parece el proceso deseable.

Pero la realidad es bien distinta: en cualquier opción se da un salto cualitativo sin el soporte necesario, pues los alumnos pasan rápidamente al enfoque **b** sin un dominio completo del anterior, sobre el que cometen errores sistemáticos que trasladan a temas posteriores en el currículum, como ocurre, por ejemplo, en la iniciación al Álgebra.

Dichos errores, relacionados con la conceptualización y la aplicación práctica de los números enteros, con el paso de la aritmética al álgebra y con la resolución de problemas aritméticos (Vergnaud, G. y Durand, C., 1976; Hart, K., 1981; Bell, A., 1982, 1986; Conne, F., 1985), pueden ser debidos a un tratamiento didáctico inadecuado, concebido al margen de los conocimientos existentes sobre desarrollo cognitivo y evolución de los conceptos numéricos, respondiendo a criterios que atienden fundamentalmente al conocimiento matemático formalizado y, en particular, a la estructura y al desarrollo lógico de la disciplina. En tal sentido nos preguntamos: ¿porqué se actúa de esta manera?; ¿es esta la única forma posible de "enseñar-ayudar a aprender" estos conocimientos?; ¿acaso se encuentra ya en el producto matemático acabado toda la información relevante para un tratamiento didáctico correcto y completo de los conocimientos implicados?.

En una primera aproximación avanzamos, como principal motivo de esta situación, *los desajustes existentes entre las estructuras aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros y las características de las situaciones y problemas a los que se aplican.* Por decirlo de otro modo, *la necesidad didáctica de dotar de significado y de contenido concreto a los números en los niveles educativos elementales, puede conducir a un panorama confuso en el que se mezclan, indiscriminadamente, conceptos, conjuntos y relaciones de diferente naturaleza bajo el control de las construcciones matemáticas formales.*

El proceso de abstracción y generalización matemática[8] no parece que suponga una ayuda para la necesaria clarificación de los contenidos educativos con vistas a su tratamiento didáctico. Es más, pretendemos poner de manifiesto en este trabajo, que el deseo de generalidad y rigor en el quehacer matemático, al resultar prematuro, se contrapone con el deseo de búsqueda de la comprensión individual de los conocimientos que debe caracterizar la labor didáctica. Resulta

[8] Recordemos el "Principio de permanencia de las leyes formales" de Hankel y la construcción formal de Z por pares ordenados.

necesario recorrer en sentido inverso el camino usual de la formalización y abstracción matemática, para encontrar los elementos que se han perdido en su transcurso y que resultan imprescindibles para un tratamiento didáctico adecuado.

Desde esta perspectiva general, nuestro análisis didáctico concreto pretende clarificar y construir el soporte sobre el que se puedan sustentar otras consideraciones y, por tanto, atiende fundamentalmente a los elementos primitivos y básicos de los fenómenos educativos en estudio, que son:

a) Clarificación de la Historia y Epistemología de los números enteros y de las relaciones entre estos y los números naturales. Un estudio que, como ya hemos mencionado, no tiene por objetivo fundamentar la formalización de las construcciones de N y de Z ni explicar su génesis y evolución histórica, sino encontrar aportaciones teóricas, desde la Historia y la Epistemología, con las que construir un modelo para la enseñanza y el aprendizaje de tales conceptos.

Los análisis histórico-críticos, lógico-formales y psicogenéticos aportan informaciones sustanciales sobre las relaciones existentes entre N y Z y llevan a considerar la importancia de las magnitudes y cantidades discretas, así como de la comparación entre ellas y de las relaciones intuitivas entre las cantidades y los números, en la formación y evolución de los conceptos correspondientes. Esto nos lleva a analizar la epistemología de la cuantificación y, en particular, la formación de los conceptos métricos así como las semejanzas y diferencias entre los tratamientos matemático y experimental de estas cuestiones. Análisis que, lógicamente, se complementa mediante consideraciones generales de carácter cognitivo y teniendo presente experiencias concretas y cotidianas con cantidades y medidas que vamos a denominar "situaciones relativas discretas con estructura aditiva".

b) Como reflexión importante, cabe destacar la confusión existente entre los conceptos de cantidad, número y medida, que a veces se utilizan indiscriminadamente. Puesto que dichos conceptos son importantes en nuestro estudio, hemos creído conveniente dedicar un espacio a su clarificación cuidadosa y a una descripción detallada de las nociones que los constituyen.

Conjugando la visión científico-experimental acerca de los procesos de metrización de cantidades, con consideraciones filosóficas sobre la Aritmética y los conceptos de cantidad, número y medida, junto a la visión matemática y epistemológica sobre los números naturales y los números enteros llegamos, por un lado, a la necesidad de diferenciar claramente entre cantidades, números y medidas y, por otro, a constatar *la simplificación realizada en la construcción matemática del conjunto de los números enteros, obviándose en el paso de N a Z la existencia de unos elementos intermedios que hemos llamado "números naturales relativos"* [9] y que aparecen explícitamente en el terreno de las cantidades y de las medidas como cantidades "adjetivadas" o medidas "dirigidas", con un peso importante en las actividades cotidianas del ser humano. Estas medidas naturales relativas, que son el resultado de la comparación aditiva entre cantidades y medidas naturales, son tratadas tradicionalmente dentro del campo de aplicación de los números enteros, a pesar de presentar características diferentes de las que poseen las medidas enteras.

c) Un estudio de las relaciones y elementos que forman parte de cualquier proceso de metrización discreta, permite configurar y organizar un modelo aditivo completo que relaciona las diferentes consideraciones epistemológicas en un planteamiento formal, del que se justifican sus elementos y construcciones.

El análisis formal y estructural que conforma el modelo mencionado permite definir, por un lado, el concepto didáctico de "situación relativa aditiva" como elemento genérico del campo de aplicación de los números naturales relativos, establecido previamente en términos de las relaciones cuantitativas usuales (combinaciones, comparaciones y transformaciones) y, por otro, afirmar y justificar la existencia de diferencias estructurales y lógico-formales entre los números naturales, los números naturales relativos y los números enteros. Tres tipos de conceptos numéricos estrechamente relacionados entre sí, entendidos como estructuras numéricas constituidas por conjuntos de entes entre los que se definen operaciones aritméticas y relaciones diferentes, que ejemplifican tres tipos de campos conceptuales aditivos; es de especial interés para nosotros el estudio del campo conceptual de los números naturales relativos.

d) Si los números naturales relativos son realmente diferentes, si no se ajustan a las estructuras algebraicas de los conjuntos numéricos usuales, cumpliendo propiedades especiales que no verifican ninguno de ellos, conviene comprobar si también son diferentes para los sujetos. Esta será la última parte del problema, que abordaremos parcialmente en la presente investigación y mediante la que pondremos de manifiesto la existencia de funciones cognitivas específicas que contribuyen a establecer el campo conceptual mencionado.

En resumen, el núcleo del problema consiste en clarificar, describir y organizar el campo de los conceptos y relaciones que intervienen en los procesos de enseñanza y aprendizaje sobre números naturales, naturales relativos y enteros,

9 Terminología que coincide con la empleada en el contexto anglosajón para los números enteros ("números relativos"). Conviene aclarar aquí que no nos estamos refiriendo a los números enteros sino a unos conceptos numéricos con estructura y propiedades diferentes de las que poseen los enteros y los naturales.

comprobar la diferencia en el uso de tales conceptos y los tipos de problemas que se abordan en cada caso. Para ello, según se expone con detalle en los diferentes capítulos del trabajo, se realizan los siguientes estudios:

1.—Un *estudio teórico,* basado en un análisis didáctico/conceptual apoyado en criterios metaanalíticos y desarrollado mediante una revisión multivocal con intención integradora, sobre los números naturales y los números enteros, sus estructuras aditivas y ordinales y los campos de aplicación correspondientes; un estudio que se realiza desde cuatro enfoques diferentes: epistemológico, fenomenológico, cognitivo y curricular.

Como resultado de dicho trabajo teórico se identifica, desde la necesidad didáctica, un subdominio intermedio entre el de aplicación de la aritmética natural y el de aplicación de la aritmética entera, que se caracteriza por la intervención de un tipo de números (naturales relativos) del que se analizan sus propiedades y se integra en un modelo descriptivo completo para el campo aditivo. De estos resultados se deducen consecuencias importantes para la organización del dominio que se basan en las diferencias estructurales existentes entre los tres tipos de números.

2.—Un *estudio empírico,* orientado a falsear una parte de los resultados del estudio teórico, con el que se pretende poner de manifiesto que las diferencias lógico-formales y fenomenológicas se manifiestan también como diferencias cognitivas, observables a través de las respuestas de una muestra de sujetos a unos cuestionarios construidos sobre las características diferenciadoras de las estructuras ordinales de los números naturales relativos y los números enteros.

CAPÍTULO

2

Marco metodológico y plan de trabajo

2.1. Introducción

El estudio que presentamos y que ha quedado justificado en las consideraciones que se han expuesto en el capítulo anterior, se centra en torno a la estructura aditiva y ordinal de los números naturales, números naturales relativos y los números enteros y al dominio de problemas y situaciones de aplicación concreta de las mismos. Otros aspectos considerados inicialmente como fundamentales, tales como el análisis de errores y dificultades o la representación del conocimiento matemático en el tema que nos ocupa, han pasado a un segundo plano ante los resultados obtenidos y la orientación definitiva de la investigación.

Este capítulo, junto a la delimitación del problema y de los conceptos que intervienen, según se expone en el capítulo 1, constituye la parte de exposición dedicada al problema de investigación. Aborda los aspectos formales que caracterizan el trabajo que presentamos: los objetivos y las hipótesis de la investigación, por un lado, y las consideraciones metodológicas, por otro. Salvo algunas cuestiones que se explican con más detalle, como es el caso de la noción de análisis didáctico utilizada en el estudio teórico, haremos un planteamiento general que se completará puntualmente en los correspondientes capítulos, a los que nos remitimos.

2.2. Objetivos de la investigación

En los apartados que siguen se exponen las metas que se pretenden alcanzar con la investigación que presentamos. Hemos enunciado los objetivos en tres niveles diferentes: en primer término, un objetivo general enunciado de modo global; en segundo lugar, unos objetivos específicos que están relacionados directamente con las hipótesis del trabajo y que, en su conjunto, deben desarrollar y precisar el propósito central; en tercer lugar, unos objetivos complementarios, secundarios en relación con los objetivos anteriores.

2.2.1. *Objetivo general*

El propósito central de la investigación es *clarificar, describir y organizar, a partir de consideraciones epistemológicas, cognitivas, fenomenológicas y didácticas, el campo conceptual de los números naturales relativos.*

Mediante la consecución de este objetivo nos proponemos dar respuesta satisfactoria a los interrogantes planteados en el campo de aplicación de los números naturales relativos y números enteros, subsanar deficiencias detectadas tanto en el diseño y desarrollo curriculares como en los estudios sobre resolución de problemas aditivos de enunciado verbal e integrar los diferentes planteamientos existentes, proporcionar un marco en el que se puedan formular explicaciones plausibles sobre el origen y condiciones de ocurrencia de los errores y dificultades en el aprendizaje que se han constatado en otras investigaciones, proponer fundamentos para un diseño curricular coherente y completo sobre el dominio organizado, y, por último, aportar bases sólidas sobre las que desarrollar futuras investigaciones en Pensamiento Numérico Relativo.

2.2.2. *Objetivos específicos*

Para la consecución del objetivo general planteado en el apartado anterior, se han de cubrir una serie de objetivos específicos sobre diferentes aspectos puntuales que contribuyen a la consecución de dicho propósito central.

Desde un punto de vista más concreto, la investigación pretende:

a) Identificar, en el campo conceptual aditivo, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas.

b) Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de la totalidad de las situaciones y problemas del dominio.

c) Establecer, con base en argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir carencias detectadas y definir tales números.

d) Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes entre los tres tipos de números (naturales, naturales relativos y enteros).

e) Construir un modelo teórico (campo conceptual de los naturales relativos), que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones; ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema.

f) Proporcionar evidencia empírica a favor del nuevo campo conceptual, la bondad del modelo construido y la idoneidad de las interpretaciones y clasificaciones que de él se derivan.

2.2.3. *Objetivos complementarios*

Como aspectos secundarios, estamos interesados en:

— Iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática.

— Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática.

— Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática.

2.3. Hipótesis de investigación

2.3.1. *Reflexiones previas*

A. En el dominio de los problemas aritméticos elementales y, en general, de las situaciones de aplicación concreta de las estructuras aditivas y ordinales de los números naturales y los números enteros, que aparecen en el ámbito de la Educación Matemática elemental, encontramos que:

A.1. No se aprecia una diferenciación clara y expresa entre los conceptos de cantidad como estado de una magnitud o cualidad medible, número como constructo matemático y medida como síntesis entre cantidad y número (véase apartado 7.2 y siguientes del capítulo 7).

A.2. Según se expone en el apartado 7.4 del capítulo 7 existen tres tipos de cantidades y medidas estructuralmente diferentes sobre las que actúan, aisladamente o de forma combinada, los tres tipos de relaciones básicas conocidas como "transformación", "combinación" y "comparación" que reclaman tratamientos didácticos diferenciados. Se mezclan conceptos, conjuntos, relaciones y operaciones aritméticas de distinta naturaleza.

A.3. Reconocemos medidas que se conocen como "adjetivadas" o "dirigidas" y a las que vamos a denominar *medidas naturales relativas,* en las que intervienen unos conceptos numéricos, a los que hemos denominado *números na-*

turales relativos, que son tratados tradicionalmente como números enteros, a pesar de presentar características estructurales diferenciadas de las que poseen los números naturales y los propios números enteros (véase apartados 7.4.4 y 7.4.5 del capítulo 7).

El dominio considerado se encuentra parcialmente organizado al permanecer encubierta la existencia de un subdominio intermedio entre el de aplicación de la aritmética natural y el de aplicación de la aritmética entera.

B. La aplicación irregular de la estructura aditiva y ordinal de los números enteros a una parte importante del campo mencionado, se pone de manifiesto:

B.1. Desde el punto de vista *epistemológico*, según se expone en el capítulo 3:

— En el análisis del proceso histórico experimentado por los números enteros y, en particular, en los obstáculos y rupturas que se detectan en las reflexiones histórico-críticas.

— En los saltos y lagunas que aparecen bajo el análisis lógico-formal.

B.2. Desde el punto de vista *cognitivo*, según se expone en los capítulos 4 y 11:

— En la diferenciación cognitiva que muestran los sujetos al reconocer estructuras ordinales diferentes en dos tipos de situaciones, naturales relativas y enteras, consideradas didácticamente bajo la estructura única y común de los números enteros.

— En las dificultades y errores de los alumnos, constatados en investigaciones conocidas en relación con la conceptualización y la aplicación práctica de los números naturales y los números enteros, con la resolución de problemas aritméticos aditivos y con el paso de la Aritmética al Álgebra.

B.3. Desde el punto de vista *didáctico*, según se expone en González, J. L. y otros (1990) y se recoge en los capítulos 4, 5 y 6 de la memoria:

— En un tratamiento didáctico usual que es inadecuado por: a) la artificialidad del lenguaje y de los símbolos utilizados, b) la eliminación expresa de situaciones de difícil justificación e interpretación, c) la confusión entre signos de operación y signos numéricos, d) la necesidad de aclaraciones añadidas, análisis complementarios o estrategias particulares que difieren de unas situaciones a otras, e) el paso precipitado al terreno sintáctico y a las consideraciones formales basadas en el concepto de isomorfismo y en el principio de permanencia de las leyes formales, con el consiguiente abandono prematuro de la intuición.

— En los desajustes existentes entre las estructuras aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros y las características de las situaciones y problemas a los que se aplican.

B.4. En los trabajos de *investigación* que se revisan en la primera fase del análisis didáctico y que figuran en los capítulos 3, 4 y 5 de la memoria:

— En las clasificaciones incompletas o defectuosas de los problemas aditivos.

— En la confusión entre la doble interpretación de los números enteros como estados y como operadores.

— En los desfases detectados e inexplicados en el dominio de las operaciones aritméticas y en la resolución de problemas aditivos aparentemente similares.

— En la búsqueda infructuosa de modelos concretos que ejemplifiquen la estructura de anillo.

C. Las deficiencias inicialmente mencionadas (A) y cuya apreciación hemos señalado desde cuatro puntos de vista (B), son debidas a las divergencias que se producen entre las necesidades didácticas y las necesidades matemáticas formales. En este caso, como se irá viendo a lo largo del estudio teórico (capítulos 7, 8 y 9), las reconocemos en los siguientes rasgos:

— La simplificación realizada, por motivos puramente formales, en la construcción matemática del conjunto de los números enteros, obviándose, en el paso de N a Z, la existencia de los números naturales relativos.

— La necesidad didáctica de facilitar el paso del modelo cuantitativo, familiar e intuitivo de los números naturales al modelo formal no intuitivo de los números enteros, lo que requiere dotar de significado y contenido concretos a los números enteros en los niveles educativos elementales.

D. El análisis de los problemas y situaciones del dominio considerado, según se deduce de los argumentos que se exponen en los capítulos 7, 8 y 9, conduce a la construcción de un modelo que satisface la necesidad didáctica de organizar el campo de estudio, integrando y relacionando entre sí sus elementos. Dicho modelo, basado en las diferencias estructurales y lógico-formales entre los tres tipos de números, proporciona criterios suficientes para una nueva clasificación de las situaciones del campo aditivo que regule satisfactoriamente las aplicaciones y problemas aritméticos correspondientes. El modelo, construido a partir de los conceptos de campo conceptual aditivo y de número natural relativo, permite: acceder al estudio de la "relatividad aditiva" como paso previo a la construcción y comprensión de los números enteros y completar las clasificaciones parciales ya construidas.

Como se expone en los capítulos 10 y 11, correspondientes al estudio empírico realizado, las diferencias mencionadas se manifiestan también en el terreno cognitivo a través del tratamiento diferenciado que dan los sujetos a los distintos tipos de situaciones, de acuerdo con los planteamientos teóricos.

2.3.2. *Enunciado de las hipótesis*

El capítulo 1 se concluyó con una formulación del problema de investigación; en el apartado anterior hemos incluido explicaciones adicionales que clarifican y contextualizan dicho problema. Estos planteamientos generales se concretan, a continuación, en las siguientes hipótesis de investigación:

> **I.**—En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

> **II.**—Existe un conjunto de números, a los que llamaremos *números naturales relativos,* que con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas.*

> **III.**—El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

> **IV.**—Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio y regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

> **V.**—El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio que amplían y precisan otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.

> **VI.**—Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[1] dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.

2.4. **Fases de la investigación y desarrollo temporal**

El trabajo realizado se puede dividir en dos fases diferenciadas:

Una primera fase, que llamaremos *teórica,* en la que se espera confirmar mediante un "análisis didáctico"[2] basado en la técnica del meta-análisis cualitativo, que *"existe una laguna en el conocimiento"* (Bisquerra, R., 1989, pág. 20) sobre la didáctica de la numeración y las operaciones aritméticas elementales con números naturales y números enteros.

Las hipótesis I, II, III, IV y V son hipótesis conceptuales que corresponden a esta fase teórica de la investigación. Las dos primeras son fundamentales, dado que su verificación proporciona el soporte teórico sobre el que se desarrolla el resto del estudio. Aunque las hipótesis III, IV y V se pueden considerar consecuencia de las dos primeras, sin embargo, se han enunciado como hipótesis independientes, debido, por un lado, a la intervención en ellas de nuevos factores no contemplados anteriormente y, por otro, a que se trata de proposiciones importantes dentro de la investigación, que además sirven de fundamento e introducción al estudio empírico.

Una segunda fase *empírica,* en la que, según se explica en el apartado 2.5.2, se realiza un estudio descriptivo transversal (Bisquerra, R., 1989, págs. 217 y sigtes.) en el que, a través del método de encuesta y mediante la utilización de cuestionarios, se realiza un análisis exploratorio de datos (Hatwig, Dearing, 1979; Tukey, 1977) y un análisis de correspondencias (Cornejo, J. M., 1988). La hipótesis VI, orientada a la comprobación de que la primera de las cinco diferencias estructurales incluidas en la hipótesis III se manifiesta también como diferencia de carácter cognitivo a través de las respuestas diferenciadas de los sujetos, corresponde a esta fase de la investigación.

La fase teórica ha ocupado la primera parte del trabajo y se ha desarrollado desde comienzos de 1990 hasta junio de 1993, fecha en la que se concluyó esta parte del estudio, obteniéndose una explicación suficiente de las deficiencias detectadas mediante un constructo teórico formalmente estructurado y lógicamente coherente. La organización de la información, la redacción del informe y la fase

---

[1] En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8.° de Educación General Básica, correspondiente a la edad de 14 años.

[2] En el apartado dedicado a las consideraciones metodológicas (apdo. 2.5), se expone una explicación detallada de la interpretación y el contenido de estos términos.

empírica, han ocupado un año completo, desde junio de 1993 hasta septiembre de 1994.

El desarrollo específico de la fase teórica de la investigación se inicia con la revisión sistemática y el análisis de relaciones que se presenta en los capítulos 3, 4, 5 y 6 de la parte II y culmina en los capítulos 7, 8 y 9, que constituyen la Parte III de esta memoria; la fase empírica se expone en los capítulos 10 y 11 que se incluyen en la Parte IV.

2.5. Consideraciones metodológicas

La metodología se ocupa, con carácter general, *de cómo obtenemos conocimientos acerca del mundo* (Denzin, N. y Lincoln, Y., 1994). El desarrollo de las dos fases que se han expuesto brevemente en el apartado anterior, ha requerido del empleo de métodos diversos, ya que la información que se quiere recoger se refiere a aspectos muy diferentes. En particular, se han utilizado estrategias y técnicas metodológicas conocidas y de uso frecuente en los aspectos empíricos, junto a procedimientos menos convencionales en la fase que hemos denominado teórica.

Como consecuencia de las necesidades aludidas, hemos seguido un procedimiento que toma como punto de partida lo que se conoce en metodología de investigación educativa como *análisis conceptual* (Scriven, M., 1988) y lo que, en el ámbito de la Educación Matemática, algunos autores han denominado "análisis didáctico" (Freudhental, H., 1983; Puig, L., Cerdán, F., 1988, pág. 74). Se trata de un procedimiento que aplica el meta-análisis cualitativo sobre diferentes campos de investigación en Educación Matemática.

2.5.1. *Análisis didáctico*

La necesidad de un análisis teórico integrador que se percibe en algunos temas puede venir, en nuestra opinión, por varias vías: bien por causa de las características especiales de los conocimientos implicados, por la existencia de un cierto estancamiento en las investigaciones o por ambos motivos combinados, como es el caso que nos ocupa; también puede producirse por la situación avanzada de los conocimientos en cuanto a cantidad y calidad de los resultados obtenidos, como ocurre con los casos suficientemente conocidos de las funciones (Harel y Dubinsky, 1992; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993) y de los números racionales (Carpenter, Fennema y Romberg, 1993).

El estudio realizado en la fase teórica se puede situar dentro del tipo de estudios denominado *investigación secundaria o de síntesis,* para el que se han venido utilizando dos metodologías diferentes: la *revisión integrativa tradicional* y la revisión cuantitativa también llamada *meta-análisis*[3]. Recientemente, debido a la necesidad que se detecta en numerosas investigaciones cualitativas de sintetizar e integrar un número grande de estudios, ha surgido una modalidad de síntesis denominada revisión de bibliografía multivocal o, abreviadamente, *revisión multivocal* (Ogawa y Malen, 1991). Se trata de un procedimiento de síntesis cualitativa *"..dirigido a indagar un fenómeno complejo de interés en el que no se pueden manipular los eventos y del que se tienen múltiples fuentes de datos eminentemente cualitativos, confiando en obtener un retrato detallado del fenómeno que se estudia"*. (Fernández Cano, A., 1995, pág. 175).

La revisión multivocal de un tópico, se basa en los siguientes criterios, que son similares a los que se proponen para el estudio de casos (Fernández Cano, A., op. citada, pág. 176):

1.—Una clara definición del tópico propuesto a indagar a través de:

— consultar múltiples fuentes;

— mantener cadenas de evidencia entre los registros de las fuentes consultadas y las inferencias extraídas;

— incorporar formalmente las reacciones de los informantes a la definición conceptual establecida.

2.—Valorar la fuerza relativa e individual de cada dato utilizando alguno de los siguientes criterios:

— posición y certitud de la fuente (validez externa);

— claridad, detalle, consistencia y factibilidad del contenido (validez interna);

— capacidad para corroborar la información contenida en cada documento con información adquirida de otras fuentes.

3.—Nosotros añadiremos los siguientes criterios procedentes del meta-análisis :

— revisar el mayor número posible de estudios;

— localizar los estudios a través de búsquedas objetivas y replicables;

— no excluir inicialmente estudios en base a su calidad;

— diferenciar y clasificar cada estudio de acuerdo con el grado de incidencia de sus resultados sobre el problema de investigación.

Se configura así un método general, que podemos denominar *meta-análisis cualitativo* en torno al tópico en estudio. La finalidad del meta-análisis cualitativo, como la de cualquier meta-análisis, es: ". . *la formulación de teorías que ex-*

[3] Para una confrontación de ambas metodologías, ver Fernández Cano, A. (1995, págs. 165 y sgtes.).

pliquen los fenómenos observados en diferentes investigaciones" (Bisquerra, R., 1989, págs. 247-252); la diferencia, en este caso, radica en que seguiremos una metodología interpretativa.

Denominamos **análisis didáctico** *de un tópico o contenido específico en Educación Matemática al procedimiento metodológico global que integra y relaciona, siguiendo un proceso secuenciado y de acuerdo con los criterios del meta-análisis cualitativo, informaciones relacionadas con el objeto de estudio y procedentes de fuentes diversas en torno a diferentes áreas de investigación en Educación Matemática; en nuestro caso: Historia y Epistemología, Aprendizaje y cognición, Fenomenología y Enseñanza y estudios curriculares.*

El proceso metodológico que se menciona consta, en general, de las siguientes fases:

Primera fase.—Revisión primaria de la información en cada área, de acuerdo con los siguientes pasos:

a) análisis y clasificación de acuerdo con los criterios establecidos;
b) obtención de datos relevantes;
c) análisis de las relaciones entre los datos relevantes, síntesis y conclusiones;
d) conjeturas y prioridades de la investigación dentro del campo en relación con el tópico;
e) evaluación de la revisión.

Segunda fase.—Análisis de las relaciones entre campos de acuerdo con el siguiente procedimiento:

a) estudio de las relaciones a partir de la información de los apartados c), d) y e) en cada uno de los campos;
b) conclusiones;
c) conjeturas y prioridades; aspectos a investigar;
d) resultados generales y evaluación del estudio.

Como consecuencia del proceso integrador descrito se establecen prioridades de investigación, se formulan teorías, se realizan comprobaciones experimentales, en su caso, y se deducen consecuencias para futuros estudios teóricos y empíricos.

El análisis didáctico procesa, analiza y sintetiza información procedente de diferentes campos interrelacionados entre sí por su objeto de estudio, en este caso la investigación y reflexión sobre Pensamiento Numérico Relativo y, en particular, sobre el campo conceptual de los números naturales relativos. La técnica utilizada tiene en cuenta la complejidad del campo de estudio abordado así como la pluralidad de aproximaciones que hemos encontrado en la literatura científica al uso y en los resultados de investigación contrastados por la comunidad.

En el caso que nos ocupa, la figura 2.1 refleja de una manera esquemática

los elementos básicos que hemos empleado en el análisis didáctico, la situación de los mismos en un proceso secuenciado, las principales fuentes de información y el tipo de análisis específico que entra en juego en cada una de las áreas y fases del proceso.

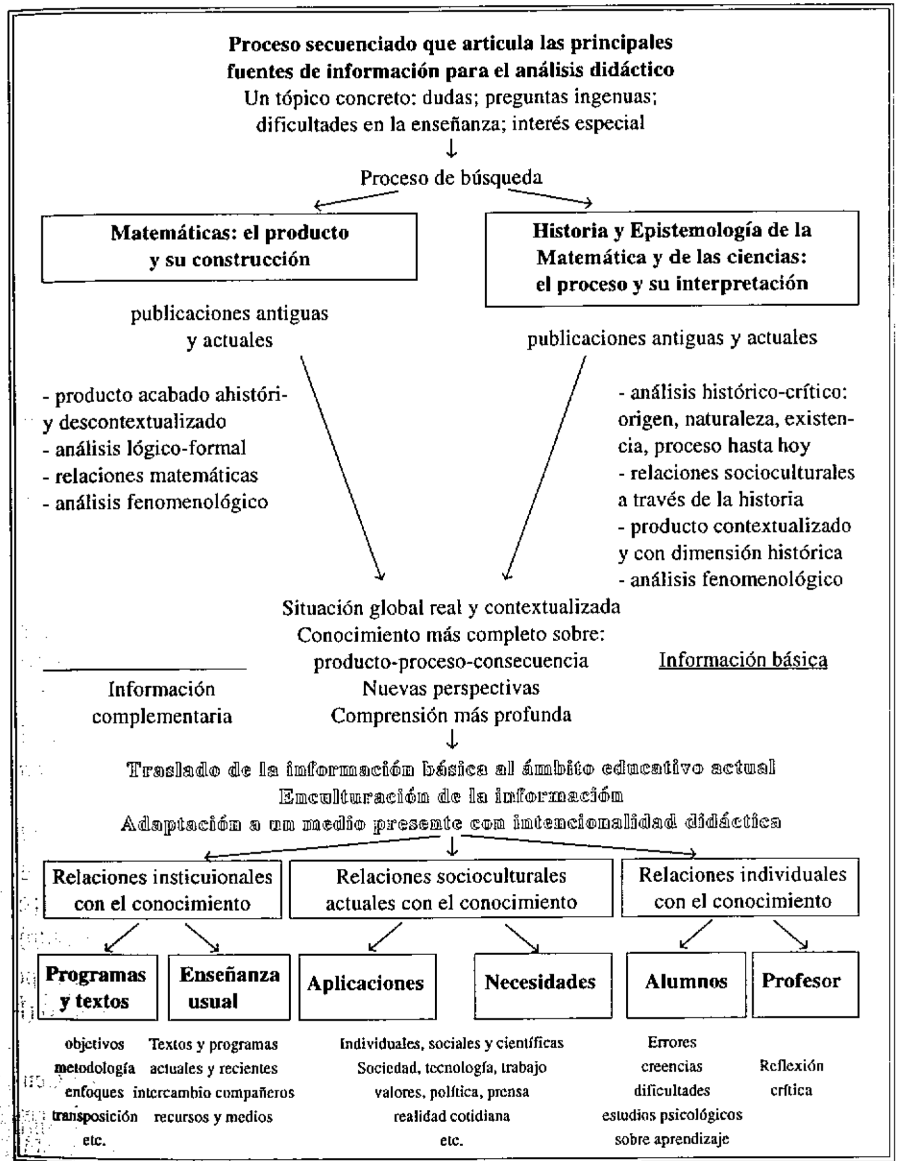


Figura 2.1.—Esquema de aplicación práctica del análisis didáctico.

Se aprecia en el esquema que la interpretación realizada considera la combinación de los análisis epistemológicos y fenomenológicos sobre el campo en estudio como elementos básicos del proceso, a los que se añaden informaciones complementarias de carácter cognitivo, sociológico y curricular existentes en relación con dicho campo, de acuerdo con los planteamientos teóricos que se exponen en el capítulo 1. A lo largo del proceso, se confrontan los datos y se realiza una síntesis explicativa global de los fenómenos en juego, buscando una interpretación coherente con los resultados de investigaciones anteriores.

2.5.2. *Recogida y selección de la información*

Dentro de las consideraciones metodológicas específicas de la investigación que presentamos es de destacar la importancia de la replicabilidad de las búsquedas destinadas a la localización de los trabajos y publicaciones que han servido de base para el estudio teórico. Citamos, a continuación, las principales fuentes de información utilizadas y los criterios empleados en las búsquedas de documentos, de las que se han obtenido los resultados que se exponen en los capítulos 3, 4, 5 y 6 correspondientes a la revisión y análisis de la información disponible en la primera y segunda fases del análisis didáctico realizado.

a) Búsquedas retrospectivas en la *base de datos ERIC*.

— Hasta enero de 1989.

— Descriptores: integer? - relative - negative (w) number? - directed (w) number? - directed (w) magnitude? - order - order (w) natural - order (w) structure?.

— Estos descriptores han sido cruzados entre sí y conjuntamente con los descriptores "elementary" y "arithmetic" para obtener un total de 149 publicaciones.

b) Consultas sistemáticas a la revista *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM)*:

— Entre los años 81 y 92, ambos inclusive.

— En la nomenclatura propia de esta publicación, se han realizado búsquedas en los siguientes campos: A-70, C-30, C-50, C-60, D-20, D-30, E-20, F-10, F-20, F-30, F-40, F-60, F-70, F-90, H-10, H-20, H-30, H-40, H-50, K-30 y N-70, que abarcan desde aspectos generales indirectamente relacionados con el campo objeto de investigación (A, C, D y E) hasta los aspectos específicos del mismo (F y H), relacionados con aritmética, álgebra, números y medidas.

c) Consulta de los fondos bibliográficos y revistas especializadas del Centro de Documentación de Didáctica de las Matemáticas "Thales" y de los Departamentos de Didáctica de la Matemática de las Universidades de Granada y Málaga.

d) Consulta de los fondos UMI (Doctoral Dissertations) sobre investigaciones en Educación desde enero de 1981 hasta julio de 1989.

e) Consulta periódica, desde 1985, de las publicaciones sobre Matemáticas y Didáctica de la Matemática a través de las librerías especializadas PONS y HERDER.

Por otra parte, además de los medios usuales para acceder a las publicaciones encontradas, se ha utilizado, en ocasiones, el contacto escrito con los propios autores.

2.5.3. *Aspectos metodológicos en la fase empírica*

Como ya se ha indicado en el apartado 2.4, en la fase empírica de la investigación se utilizan métodos descriptivos. A través del método de encuesta y utilizando técnicas descriptivas para el análisis de datos, se pretende falsar una parte de las consideraciones realizadas en la fase teórica. Si los datos fueran contrarios a los esperados, habría motivos suficientes para albergar dudas sobre la bondad de los planteamientos y realizar nuevas conjeturas. Si los datos fueran favorables, podríamos albergar esperanzas acerca del buen camino del trabajo teórico, con independencia de que en el futuro se puedan aportar nuevas evidencias empíricas a favor o en contra de su idoneidad. En definitiva, *"Si los datos son favorables, sugieren cosas, aunque no concluyentemente"* (Bunge, M., 1981, pág. 896).

Por otra parte, como se describe con detalle en el diseño experimental que se expone en el capítulo 10 de esta memoria, se ha dedicado la mayor atención a la elaboración de los cuestionarios destinados a contrastar la hipótesis específica de esta parte, teniendo en cuenta que no se conoce en la actualidad un instrumento de recogida de datos que sea específico para las necesidades de nuestra investigación.

Por último, es necesario mencionar que la encuesta se ha realizado a pequeña escala sobre una muestra intencional y que las técnicas estadísticas empleadas para el análisis de datos han sido las propias de la Estadística Descriptiva (tabulaciones de frecuencias, medidas y representaciones gráficas) junto al análisis de correspondencias como instrumento idóneo y potente para establecer el grado de discriminación que las respuestas de los sujetos atribuyen a los aspectos analizados.

2.5.4. *Articulación de las hipótesis y técnicas metodológicas en el proceso de investigación*

En el apartado 12.2 del capítulo 12 y, en particular, en los esquemas de las figuras 12.1 y 12.2 del mencionado capítulo, al que nos remitimos, se sintetiza el proceso de investigación en términos de relaciones entre las hipótesis, las técnicas empleadas, los resultados obtenidos así como las conjeturas y conclusiones parciales en cada etapa del trabajo.

2.6. Modalidad de la investigación y situación con respecto a los paradigmas convencionales

Utilizando la clasificación que propone Bisquerra, R. (1989, págs. 60 y sigtes.) para los modalidades de investigación, podemos situar el trabajo que presentamos en las siguientes coordenadas:

Según el *proceso formal,* utilizamos el razonamiento hipotético-deductivo.

Según el grado de *abstracción,* se trata fundamentalmente de una investigación básica (p. 62).

Según el grado de *generalización,* la investigación es fundamental, dado que el objetivo principal de la misma es el de aportar información en el sentido de contribuir al aumento del conocimiento teórico. No obstante, y dado que nos encontramos al comienzo de una serie de trabajos que con toda seguridad irán modificando las conclusiones que aquí se obtengan, la generalización debe venir como consecuencia de nuevas investigaciones sobre el problema (p. 63).

Según la *naturaleza de los datos,* la parte empírica de la investigación se encuentra dentro de la metodología cuantitativa. En este sentido, se trata de una investigación normativa y nomotética, en la que la recogida de datos se realiza mediante la aplicación de cuestionarios como instrumentos de medida sistemática.

Según la *concepción del fenómeno educativo,* se trata de una investigación nomotética, ya que la finalidad última del trabajo así como de las sucesivas investigaciones que se desarrollen a partir de él, es la de elaborar descripciones generales sobre la base de la regularidad y repetibilidad de los hechos. Nos situamos, por tanto, en la posición de que en algunos aspectos o parcelas concretas de los fenómenos educativos, existen ciertas regularidades que son susceptibles de ser formuladas en términos generales, con la provisionalidad y limitaciones que usualmente tiene el conocimiento científico en el campo de la Educación.

Según la *orientación,* la investigación pretende obtener conclusiones y servir, al mismo tiempo, para la toma de decisiones como objetivo secundario (Cronbach; Suppes, 1969).

Según la *manipulación de variables,* se trata de una investigación de tipo descriptivo que, al mismo tiempo, se puede enmarcar dentro de la categoría de investigaciones "ex post facto" en su interpretación más amplia (op. citada, p. 218).

Según la dimensión cronológica y la *temporalización,* la fase empírica se puede situar entre los estudios descriptivos de carácter transversal, dado que se ha utilizado para la obtención de datos una muestra de sujetos en un instante determinado.

Según los *objetivos* de la investigación, se pretende describir y explicar el fenómeno estudiado e iniciar una línea de investigación cuyo fin último es completar el conocimiento del mismo.

Según las *fuentes,* se trata, por un lado, de una investigación bibliográfica como parte del análisis didáctico, en la que, a partir de los datos y conclusiones de investigaciones anteriores o de interpretaciones y opiniones fundamentadas, se realiza un meta-análisis cualitativo que sirva de base para la construcción de una nueva interpretación global del fenómeno en estudio. Por otro lado, se trata de una investigación empírica basada en la observación obtenida mediante cuestionarios.

SEGUNDA PARTE

Análisis didáctico: revisión de los conocimientos y primeras conclusiones

CAPÍTULO

3

Historia y epistemología

3.1. Introducción

Como se ha argumentado en el capítulo primero, la Epistemología y la Didáctica de los números enteros constituye un área de investigación amplia en Educación Matemática. Esto es así no sólo por la cantidad de investigaciones y trabajos publicados sino, también, por la extensión y diversidad de campos con los que tiene alguna relación.

A lo largo de esta primera etapa del análisis didáctico así como de la fase teórica del trabajo hemos tenido la necesidad de acudir a fuentes documentales más generales, con el propósito de obtener información que permitiera analizar el problema en su globalidad y desde otras perspectivas.

En este capítulo y en los dos siguientes, se expone una *revisión de los conocimientos disponibles* con la amplitud que requiere el objetivo general del estudio y con la finalidad de cubrir la primera fase del análisis didáctico descrita en el capítulo anterior.

3.2. Consideraciones generales sobre Epistemología

A lo largo de esta etapa del desarrollo de la investigación se ha constatado la necesidad de clarificar la naturaleza de los números, en general, y de los números enteros, en particular. Este aspecto, que consideramos básico para la Didáctica de tales conceptos, se encuentra estrechamente relacionado no sólo con reflexiones epistemológicas sobre la Matemática, sino también con planteamientos más generales sobre el conocimiento matemático como parte del conocimiento científico y como parte del conocimiento del sujeto epistémico y del sujeto individual; igualmente, se encuentra relacionado con las diferencias y semejanzas entre las características del conocimiento matemático y de otros tipos de conocimientos. Se trata de cuestiones epistemológicas generales a las que hay que remitirse cuando se pretende analizar la Matemática, o una parte de ella, desde tal punto de vista.

En los apartados que siguen se expone una breve referencia del trabajo realizado en este campo, advirtiendo previamente que se ha profundizado en él lo estrictamente necesario para la clarificación posterior de aspectos específicos de nuestro estudio.

3.2.1. *Publicaciones consultadas*

Citamos aquí las obras principales que hemos manejado en esta revisión de antecedentes. Sobre Filosofía y Epistemología se han revisado las siguientes fuentes:

BACHELARD, G. *La formación del espíritu científico.*
BRUTER, C. P. *De l'intuition a la controverse.*
BUNGE, M. *Epistemología.*
— *La investigación científica.*
LECOURT, D. *Para una crítica de la Epistemología.*
POPPER, K. R. *Conjeturas y refutaciones.*
PIAGET, J. *Tratado de Lógica y conocimiento científico: Epistemología de la Matemática.*
RUSSELL, B. *El conocimiento humano.*
SKEMP, R. *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.*

3.2.2. *Conclusiones*

De la lectura de las obras mencionadas se han extraído ideas básicas que delimitan el marco epistemológico en el que se sitúa la investigación. De entre ellas destacamos las que hacen referencia al conocimiento en sentido amplio, al sujeto epistémico y sujeto individual, a la validez de los conocimientos y del conocimiento científico así como a la Epistemología, sus diferentes vertientes y problemas. Conclusiones adicionales obtenidas han sido su utilidad como marco de referencia para la Epistemología de la Matemática y las relaciones entre la Epistemología y la Educación. Cuestiones tan importantes como: ¿qué es el conocimiento matemático?, ¿qué relación hay entre el conocimiento matemático y otros tipos de conocimientos?, ¿qué relación puede haber entre el conocimiento científico y el conocimiento en el sujeto individual?, han contribuido a orientar la investigación en el sentido que se expone en la memoria.

3.3. Historia y Epistemología de la Matemática

En el proceso de búsqueda de información se han consultado numerosas publicaciones de carácter general, de las que hemos hecho una selección de las más significativas para nuestro estudio y cuya relación se presenta en el apartado 3.3.1.

El propósito de esta revisión ha sido doble: recabar datos para el tema específico y analizar las relaciones del tema de investigación con otros aspectos de la Historia y la Epistemología de la Matemática. Al no ser la Historia de la Matemática el objetivo de este trabajo, no hemos profundizado en documentos originales o ediciones críticas, ni en la búsqueda de nuevos datos históricos; la revisión ha servido para elaborar esquemas y resúmenes que proporcionan un marco general al campo de estudio.

3.3.1. *Publicaciones consultadas*

Sobre la vertiente histórico-crítica se han revisado las siguientes publicaciones:

APÉRY, R. y otros. *Penser les Mathématiques.*
BELL, E. T. *Mathematics: Queen and Servant of Science.*
— *Historia de las Matemáticas.*
BRUNSCHVICG, L. *Las etapas de la Filosofía Matemática.*
BURT, L. N. H. ; BEDIENT, J. D. *The historical roots of elementary Mathematics.*
COURANT, F., ROBBINS. *¿Qué es la Matemática?.*
DAVIS, P. J.; HERSH, R. *Experiencia Matemática.*
DIEUDONNÉ, J. *En honor del espíritu humano. Las Matemáticas hoy.*
DOU, A. *Fundamentos de la matemática.*
ERNEST, P. *The Philosophy of Mathematics Education.*
— *The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account.*
KLEIN, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.*
KLINE, M. *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.*
LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología.*
— *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.*
LE LIONNAIS F. (edt.) *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.*
LOMBARDO, L. *La Matemática de Pitágoras a Newton.*
MADDY, P. *Realism in Mathematics.*
RUSSELL, B. *Ciencia y Filosofía.*
— *Introducción a la Filosofía Matemática.*
TYMOCZKO, T. *New directions in the Philosophy of Mathematics.*

3.3.2. ***Algunas conclusiones***

Como resumen de las lecturas anteriores presentamos tres tipos de conclusiones:

3.3.2.A. *Principales problemas en Epistemología de la Matemática*

En base a las ideas de Piaget, J. (1.979, pp. 147-181) y de Davis, P. J.; Hersh, R. (1988), se ha elaborado el esquema de la Figura 3.1 que pone de manifiesto cuales son, en esencia, los principales problemas y enfoques sobre Epistemología de la Matemática.

3.3.2.B. *Principales corrientes en Epistemología de la Matemática*[1]

A partir de los textos citados se ha hecho una revisión de posiciones epistemológicas. Los planteamientos del Constructivismo Social (Ernest, P., 1991, 1992), que compartimos, junto a la posición cuasiempirista de Lakatos (1986) son compatibles, además, con la descripción que se hace en el apartado siguiente.

3.3.2.C. *El trabajo del matemático profesional como instrumento de análisis*

En el siguiente resumen, elaborado a partir de Hersch, R. (1986), se expone una interpretación sobre la naturaleza y existencia de los objetos matemáticos:

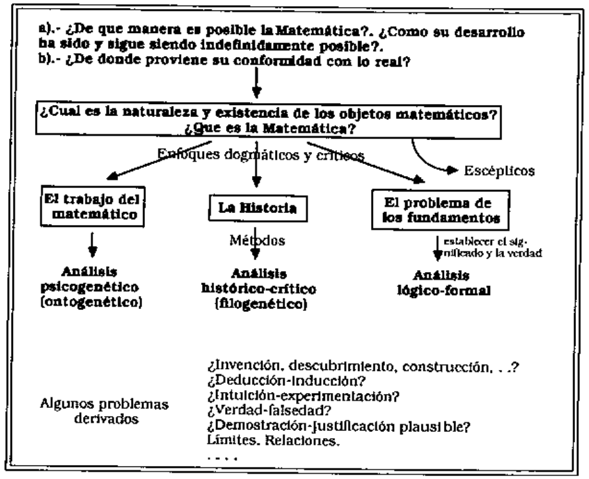


Figura 3.1

[1] Parte de la ponencia sobre Epistemología y Educación Matemática, presentada por el autor de la tesis en el Simposio: *"Plan para la formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas en Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato"*, celebrado en Granada en marzo de 1993 y publicada en Rico, L. y Gutiérrez, J. (edit.) (1994), pp. 23-41.

- La Matemática tiene que ver con *ideas* u *objetos conceptuales.*
- Dichos objetos *son independientes de su simbolización o representación,* ya sea lingüística o mediante objetos materiales que los sugieran.
- Los objetos matemáticos son *inventados o creados* por los seres humanos (a diferencia de los objetos materiales) de una forma *peculiar e irreductible,* por lo que:
- tienen una *existencia ficticia o convencional.*
- La creación *no es arbitraria,* sino que involucra actividades con objetos matemáticos ya existentes y tiene que ver, en muchos casos, con las necesidades de las ciencias y de la vida diaria.
- Los objetos matemáticos ya creados *tienen propiedades objetivas* bien determinadas, que poseen con independencia del conocimiento que de ellos se tenga.
- Los objetos matemáticos, a pesar de ser creaciones humanas sobre abstracciones y objetos matemáticos ya existentes, sin ninguna relación aparente con la realidad, *llegan a ser útiles para la descripción y el manejo de fenómenos naturales o materiales.*
- Los objetos matemáticos, una vez creados y comunicados, pasan a formar parte de la cultura, del patrimonio de conocimientos válidos, consistentes y creíbles (si son aceptados en éstos términos), adquiriendo entonces una categoría de realidad distinta de la del sujeto individual y de la del mundo exterior: una *tercera realidad* a la que pertenecen las tradiciones, las costumbres y las creencias, que no se encuentra ni dentro ni fuera del individuo aunque compartiendo ambos lugares. Existen en la mente como objetos conceptuales sobre los que pensar (*existencia conceptual o individual*) y, al mismo tiempo, una vez aceptados y siempre que exista algún ser capaz de pensar sobre ellos, existen *realmente* fuera de la mente del que los creó, como parte del patrimonio cultural *(existencia supraindividual o cultural)* (Mundo 3 de Popper).
- Las ideas matemáticas son *ideas compartidas,* como si hubiese algo de común en todas las mentes que las piensan, como si existiese una *conciencia compartida* formada por un conjunto de ideas con propiedades objetivas. Coincidencias que pueden tener su explicación en lo que hay de común a todos los individuos: mente, medio y la interacción entre ambos.
- El hacer matemático presenta las características de toda actividad y conocimientos humanos, a saber: *perfectibilidad, sujección a errores, parcialidad e incompletitud,* lo cual induce a poner en duda que la Matemática sea una fuente de verdades universales y absolutas. La historia precisamente nos da la razón en la medida en que la noción de verdad ha sido siempre relativa a un marco histórico,

a las ideas filosóficas dominantes y a las necesidades sociales, científicas y culturales de cada época.

Las corrientes epistemológicas mencionadas al comienzo del apartado adquieren un nuevo significado con estas consideraciones, las cuales constituyen puntos de referencia para el trabajo de investigación. Así, un examen detenido de las mismas nos conduce a la siguiente reflexión: *la Matemática tiende a dar explicaciones formales del pensamiento humano (estructuras madres, categorías, probabilidad subjetiva, etc), de su funcionamiento y de sus interpretaciones de la realidad; se va encerrando en la mente que la crea, intentando dar explicación de su propio funcionamiento.*

3.4. Epistemología de la Matemática y Educación Matemática

En el capítulo 1, con motivo de la descripción del área problemática, se pone de manifiesto la importancia de las relaciones entre la Epistemología y la Educación. Tal y como se explica en dicho capítulo, se trata de un campo de estudio específico y peculiar que, a nuestro juicio, se sitúa en el centro de toda investigación básica en Educación Matemática. En nuestro caso, el proceso de búsqueda de información siempre ha tendido, de forma natural, a consideraciones y reflexiones relacionadas con este campo. Así, hemos podido analizar las relaciones entre el proceso histórico y el proceso didáctico usual con los números enteros, cuestionar la conveniencia de los diferentes modelos didácticos existentes y, por fin, entre otros aspectos, hemos conseguido detectar, diferenciar y construir los números naturales relativos a partir de consideraciones epistemológicas realizadas desde la Educación Matemática.

3.4.1. *Principales fuentes consultadas*

Se expone a continuación una división de las principales referencias consultadas en dos grandes apartados: Epistemología y Educación Matemática y Epistemología y Psicología.

Epistemología y Educación Matemática.

En lo que sigue, se ofrece una relación de textos en los que se abordan algunas de las relaciones entre la Epistemología de la Matemática y la Educación Matemática. En ellos, se han encontrado distintos enfoques: desde la posición sistémica francesa, que trata de fundamentar la Didáctica de la Matemática en la Historia y Epistemología de la Matemática, hasta la posición del grupo TME, representada aquí por Steiner, G., que considera la Epistemología de la Matemática como un ingrediente más de la Educación Matemática.

ARTIGUE, M. *Epistemologie et Didactique*[2].

— *Obstacles as objects of comparative studies in Mathematics and in Physics.*

BEDNARZ, N.; GARNIER, C. (eds.). *Construction des Savoirs. Obstacles et conflicts*[3].

BOUVIER, A. directeur. *Didactique des Mathématiques. Le dire et le faire.*

BROUSSEAU, G. *Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques.*

— *Les obstacles epistémologiques et les problemes en Mathématiques.*

— *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.*

— *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Primera y segunda partes).*

CHEVALLARD, I. *Sur les difficultés "protomathématiques".*

— *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.*

CHRISTIANSEN, B.; HOWSON, A. G.; OTTE, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education.*

DOUADY, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques.*

FISCHBEIN, E. *Intuition in Science and Mathematics. An educational approach.*

FREUDENTHAL, H. *Didactical phenomenology of Mathematical structures.*

— *Mathematics as an educational task.*

GLAESER, G. *A propos des obstacles epistémologiques. Reponse a Guy Brousseau.*

PIAGET, J.; CHOQUET, G.; DIEUDONNÉ, J.; THOM, R. y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas.*

POLYA, G. *Cómo plantear y resolver problemas.*

— *Matemáticas y razonamiento plausible.*

SIERPINSKA, A. *On the concept of epistemological obstacle in research on teaching and learning mathematics.*

STEINER, H. G. y otros (eds.) *Theory of Mathematics Education. ICME 5.*

[2] Los planteamientos básicos de este trabajo y el siguiente se encuentran dentro de lo que denominamos *corriente francesa*, cuyos aspectos más generales se tratan en este mismo apartado. Por otra parte, estas publicaciones se analizan con más detalle en el capítulo 4 a propósito de los errores y obstáculos en el aprendizaje de las matemáticas. Su inclusión aquí obedece a un doble interés: por un lado, incluyen planteamientos generales sobre la Epistemología y la Didáctica de la Matemática y, por otro, dedican una atención especial a los errores y dificultades de los estudiantes así como a sus interpretaciones por medio de la noción de obstáculo epistemológico.

[3] Esta obra, que se analiza con más detalle en el capítulo siguiente, presenta las mismas características de los dos trabajos anteriores. En este caso, además, se incluyen una buena parte de trabajos en los que se estudia lo que se conoce en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje como "conflictos sociocognitivos".

Epistemología y Psicología

Una de las vertientes de la Epistemología de la Matemática se ocupa del conocimiento a nivel del sujeto epistémico, e incluso, del conocimiento en el sujeto individual. Es aquí donde los estudios sobre cognición y epistemología presentan algunos puntos de coincidencia, reflejados en algunas de las publicaciones que se relacionan a continuación. El grupo internacional conocido por las siglas PME (Psicología de la Educación Matemática) contribuye hoy día, de modo importante, en este sentido.

Las publicaciones consultadas son las siguientes:

DAVIS, R. *Learning Mathematics.*

GRAYSON H. W. *Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning.*

PIAGET, J. *Introducción a la Epistemología Genética. El pensamiento matemático.*

— *Investigaciones sobre la contradicción.*

— *Tratado de lógica y conocimiento científico.*

PIAGET, J.; BETH, E. W. *Epistemología Matemática y Psicología.*

SCHOENFELD, A. *Cognitive Science and Mathematics Education.*

STEFFE, L. P. *Inconsistencies and cognitive conflict: A constructivist's view.*

TIESZEN, R. L. *Mathematical Intuition. Phenomenology and Mathematical Knowledge.*

TIROSH, D. *Inconsistencies in student's Mathematical constructs.*

VAN HIELE, P. M. *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education.*

VERGNAUD, G. *Epistemología y Psicología de la Educación Matemática*[4].

VINNER, S. *Inconsistencies: their causes and function in learning Mathematics.*

3.4.2. **Principales conclusiones**

3.4.2.1. *Epistemología de la Matemática y tendencias actuales en Educación Matemática*

En el estudio se han identificado las principales tendencias en el modo de considerar las relaciones entre la Epistemología de la Matemática y la Educación Matemática; se aglutinan en torno a tres vertientes: a) una parte de la comunidad alemana de investigadores en Educación Matemática, dentro de los grupos de investigación PME y TME (Steiner, H. G., 1987), trata explícitamente las relacione mencionadas y las fundamenta en seis tesis que inciden en la consideración de la Epistemología como un componente relevante de la Educación Matemática; b) la conexión entre Epistemología y Psicología de la Educación Matemática es uno de los temas de reflexión del grupo PME. Un ejemplo representativo de esta tendencia lo constituye el trabajo de Vergnaud, G. (1990), en el que se expone una visión de conjunto sobre las relaciones entre la Epístemología y la Psicología al comienzo de la década de los 90. La orientación del trabajo se centra en la consideración del desarrollo cognitivo en un lugar más destacado de lo habitual en las investigaciones en Educación Matemática; c) una tercera tendencia es la denominada sistémica, que encuentra en algunos investigadores franceses sus mejores exponentes. Un trabajo que refleja, a nuestro juicio de forma bastante completa, las relaciones entre la Epístemología y la Didáctica de la Matemática desde este punto de vista es el de Artigue, M. (1989), en el que se considera a la Epistemología e Historia de la Matemática como eje central de la Didáctica de la Matemática. Esta posición entronca directamente con los planteamientos que se exponen en el capítulo 4 a propósito de algunas investigaciones sobre errores y obstáculos en el aprendizaje.

[4] En: NESHER, P.; KILPATRICK, J. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press; 1990: pp. 14-30.

3.4.2.2. *Consideraciones sobre Epistemología y Educación Matemática*

En los siguientes subapartados se incluyen las principales conclusiones del estudio, algunas de las cuales han formado parte de la ponencia citada en la nota al pie 1 de este capítulo.

3.4.2.2.A. *Necesidad del análisis epistemológico del conocimiento matemático*

Algunas proposiciones básicas son las siguientes:

a) Un **hecho constatable:** *Muy pocos diseñadores curriculares, escritores de libros de texto y profesores de matemáticas conocen en su totalidad lo que están "enseñando" o proponiendo "enseñar". Atendiendo estrictamente al contenido matemático, el producto acabado, tal y como se transmite a los futuros profesores en la mayor parte de los estudios universitarios, es insuficiente para cubrir con garantías una parte importante de los fundamentos científicos de la labor docente en Primaria y Secundaria.*

Conocemos una parte importante y necesaria, utilizamos un enfoque entre varios posibles, dominamos una faceta, un matiz crucial de los conceptos y teorías matemáticas, pero, al mismo tiempo, tenemos con frecuencia una visión parcial, incompleta y a veces sesgada de lo que enseñamos, lo que en ocasiones no es suficiente para conducir a los alumnos a la comprensión.

b) Una **propuesta justificable:** *La Epistemología en general, y, en particular, la Epistemología de la Matemática, deberían alcanzar un protagonismo importante en todas las consideraciones y actuaciones que tengan que ver con la Educación Matemática. En este sentido, la Historia y la Epistemología deben ser medios y no fines en sí mismas, pudiendo actuar, por ejemplo, como catalizadores de cambios sustanciales en la mentalidad de los Profesores.*

No se trata sólo de incluir la historia o las reflexiones metamatemáticas en el currículum, sino de algo más profundo que puede afectar significativamente a la elección de contenidos, enfoques y métodos, y que puede suponer un cambio importante del punto de vista bajo el que se tratan actualmente las matemáticas del currículum de Educación Primaria y Secundaria.

c) Una **conjetura plausible:** *Antes de cualquier otra consideración, hemos de buscar en la Historia y Epistemología de la Matemática las claves de la Educación Matemática. Todo cuanto se añada después, desde el punto de vista psicológico, sociológico o pedagógico, sólo puede venir a mejorar los resultados, ya que se apoyará en principios sólidamente fundamentados.*

Al hilo de las proposiciones anteriores, y teniendo en cuenta los enfoques didácticos usuales, un tópico matemático concreto se puede considerar, entre otros, como:

a) Una cuestión de cultura matemática.

b) Un medio más para estimular y favorecer el desarrollo de habilidades, destrezas y capacidades intelectuales.

c) Una herramienta necesaria para otros contenidos matemáticos posteriores.

d) Un instrumento útil para otras Ciencias y para la vida.

e) Un medio de comunicación.

Y aquellos otros que incluirían varios de los puntos anteriores.

"Una planificación y desarrollo didácticos coherentes con todos y cada uno de los enfoques anteriores requieren de un conocimiento profundo y amplio del contenido matemático".

¿Que entendemos por conocimiento profundo y amplio sobre un contenido matemático concreto?:

1.—Dominar las construcciones matemáticas pertinentes, las estructuras y propiedades en juego así como las herramientas matemáticas que se utilizan; conocer, asimismo, los contenidos matemáticos relacionados con el tema y sus aplicaciones en otras ramas de la Matemática y en contextos no matemáticos; dominar, en definitiva, el *producto final del hacer matemático* en su consideración actual, tanto en su aspecto conceptual como contextual y aplicativo.

2.—Conocer los hechos históricos relevantes dentro de un marco de referencias generales de la *Historia* de la Matemática, los marcos y periodos históricos en los que ocurrieron, los obstáculos que han impedido su comprensión y aceptación, las rupturas en las que tomaron parte y la situación actual a la luz de las matemáticas contemporáneas.

3.—Conocer los estudios y reflexiones sobre la naturaleza y existencia de los objetos matemáticos así como sobre los procesos y relaciones implicadas en la formación de los conceptos, en su formalización y en su devenir histórico. En otras palabras, conocer la *Epistemología* del contenido concreto como parte de la Epistemología de la Matemática, atendiendo a varios niveles de análisis (J. Piaget, 1979):

— *nivel histórico-crítico* : en el que se trata de interpretar la historia y buscar en ella respuestas a las cuestiones anteriormente planteadas.

— *nivel psicogenético* : en el que se trata de buscar en el propio individuo el modo de formación de los conocimientos, sus características y su evolución.

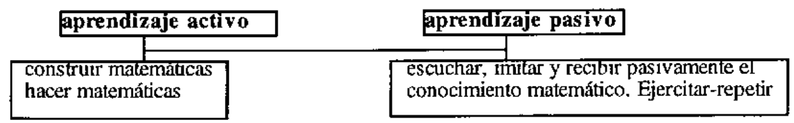
— *nivel lógico-formal* : en el que se pretenden desmenuzar las relaciones lógicas existentes bajo la construcción formal.

La combinación adecuada de las reflexiones realizadas en los niveles anteriores puede ser también una fuente importante de datos epistemológicos. Así, J. Piaget (1.979) afirmó : *"Sólo existe un medio para llegar a las raíces epistemológicas del conocimiento matemático: combinar el análisis lógico con el análisis genético, el análisis general de naturaleza lógica con el análisis elemental de naturaleza psicogenética".*

3.4.2.2.B. *Cuestiones básicas sobre la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática*

Algunas preguntas epistemológicas importantes en Educación Matemática son las siguientes: sobre el aprendizaje: ¿qué es aprender matemáticas?; ¿qué es saber matemáticas?; ¿cómo se aprenden?; sobre la enseñanza: ¿qué es enseñar matemáticas?; ¿qué matemáticas enseñar?; ¿cómo enseñarlas?.

En lo que se refiere a la pregunta *¿qué es aprender matemáticas?* se puede situar la respuesta en el continuo siguiente, que hace referencia al grado de implicación del sujeto:



Igualmente, a la pregunta *¿qué es construir matemáticas?* se puede contestar desde distintas posiciones epistemológicas mediante referencias directas al conocimiento matemático.

Con respecto a la pregunta *¿qué es enseñar matemáticas?* hay muchos planos a los que atender, algunos de los cuales se reflejan en los siguientes esquemas continuos:

Explicar, repetir, realizar ejercicios de aplicación El Profesor organiza sus actividades y exposiciones La principal preocupación es la exposición clara y ordenada de los contenidos (El Profesor como fuente y transmisor de conocimientos)	Organizar los contenidos y las actividades para facilitar a los alumnos la construcción del conocimiento La preocupación se centra en las actividades de los alumnos y en la supervisión y mediación en el aprendizaje (El Profesor como mediador y guía en el aprendizaje)
Simplificar, descomponer, recetar, atomizar, separar en lecciones claramente diferenciadas, no mezclar tareas y aplicaciones para no confundir al alumno	Llevar a los alumnos al corazón de los conocimientos favoreciendo la aparición de obstáculos y conflictos mediante problemas y cuestiones adecuadas
Detectar y formar prioritariamente a los buenos alumnos, discriminando entre los mejor y los peor dotados para las matemáticas	Favorecer el aprendizaje de todo el grupo, utilizando para ello los métodos más adecuados
Restringir las estrategias, procedimientos y respuestas a los que se han establecido, no admitiendo variaciones ni enfoques originales	Admitir la originalidad de pensamiento como elemento importante, animando la búsqueda de estrategias y soluciones alternativas

Igualmente, la pregunta *¿qué matemáticas enseñar?* admite respuestas que se pueden situar entre las posiciones extremas siguientes:

Las que indique la estructura de la propia matemática según el nivel y con independencia de las características de los alumnos	Las que se adapten en cada momento al desarrollo de las ideas matemáticas de los alumnos
El producto matemático acabado siguiendo una secuencia lógica en función de los conocimientos matemáticos necesarios en cada momento para el desarrollo de otros nuevos (el contenido como fin en sí mismo)	Las matemáticas necesarias para resolver problemas y plantear cuestiones e interrogantes (el contenido como medio)
Técnicas y destrezas matemáticas ante todo y como componentes aisladas de la comprensión y resolución de problemas	Primero el sentido de los conceptos y después las destrezas. Estas deben estar relacionadas y supeditadas a la comprensión y a la resolución de problemas

Detrás de todas las posibles respuestas, a estas y a otras preguntas que se puedan plantear, se identifican posiciones epistemológicas claras acerca de la Matemática.

3.4.2.3. *La fundamentación epistemológica en Educación Matemática*

El esquema que se expone en la figura 2.1 del capítulo anterior es una propuesta[5] construida a partir de la bibliografía mencionada. Trata de integrar los diversos elementos que intervienen en el complejo mundo de la Educación Matemática.

[5] Expuesta por el autor en el Curso de actualización científico-didáctica para Profesores de Secundaria. Consejería de Educación y Ciencia de la Junta de Andalucía. Torremolinos (Málaga), junio 1992.

3.4.2.4. *Otras aportaciones*

Algunos autores[6] conectan la Epistemología de la Matemática con diferentes aspectos de la Educación Matemática, resultando especialmente interesantes los trabajos siguientes: Bouvier, A. (1986); varios autores en: Nadine Bednarz; Catherine Garnier (eds.) (1989); Daniéle Coquin-Viennot (1985); Sierpinska, A. (1985); Glaeser, G. (1984, 1986), algunos de los cuales, debido a su relación directa con el trabajo de investigación, se tratan de una forma más extensa en el capítulo 4 de la tesis.

3.5. **Epistemología de la Aritmética**

Una de las cuestiones que han ocupado un lugar destacado en la investigación que presentamos, es la relativa a la naturaleza del número y a las relaciones entre el concepto de número y el de cantidad. Igualmente, se ha indagado sobre la naturaleza de los números enteros y del doble signo en matemáticas, dirigiendo la atención hacia aquéllos trabajos específicos que proporcionaban información para este punto crucial del área problemática.

3.5.1. ***Bibliografía consultada***

Además de los autores y trabajos ya citados, añadimos aquí las aportaciones siguientes:

HUSSERL, E. *Philosophie de l´Arithmétique.*
GARCÍA-BARÓ, M. *Categorías, intencionalidad y números.*

3.5.2. ***Conclusiones***

Ambos autores tratan sobre el origen y las características del pensamiento fenomenológico y sobre las cuestiones elementales que constituyen la base de la filosofía de la Aritmética. Hay que decir también que, a diferencia de la primera, el objetivo fundamental de la segunda publicación no está en clarificar los conceptos que estamos tratando, sino en realizar "*.. una introducción al ejercicio personal de la filosofía ..*" (pág. 11).

La idea básica que queremos destacar es la *diferenciación entre la naturaleza de la cantidad y del número,* lo que queda reflejado en dichos trabajos de los que apuntamos las siguientes afirmaciones:

[6] Nos remitimos al capítulo siguiente y, en particular, al apartado dedicado al aprendizaje y la enseñanza para una información más extensa sobre estos trabajos.

A las cuestiones: *¿de qué se predican los números?* y *¿qué designan los predicados numéricos en los objetos de los que se dicen?* (García-Baró, pág. 23), el autor responde estableciendo una hipótesis y desarrollando una reflexión en los siguientes términos:

".. los números se digan (dicen) *de conjuntos de objetos .."; ".. los números pueden ser ahora propiedades de los conjuntos, o pueden ser relaciones entre los miembros conjuntados ..". ".. nos hallamos ante un 'objeto' que es un todo en el que se reúnen 'colectivamente' (cinco o seis partes). (..) una pluralidad (..)".* (pág. 24). *"Pluralidad es el género; el número, cada número entero positivo desde el dos, es una especie del género pluralidad."* y predica *"sobre la extensión de un concepto".*

"Un número (cardinal) sería, pues, un concepto de conceptos, o la designación de una propiedad común a infinitos conceptos posibles .." (pág. 25). Suposición que utiliza Frege en los *Fundamentos de la Aritmética* mediante el conocido recurso de la correspondencia biunívoca entre conjuntos y que Husserl critica haciendo ver que se puede efectuar una diferenciación entre lo que llama 'contenidos parciales abstractos' o 'momentos conceptuales' como motores psicológicos y la subsunción lógica bajo un concepto (García-Baró, pág. 28). Desde este punto de vista, se distingue entre el concepto de 'pluralidad' o de 'conjunto' y el concepto de 'número' como universales que, si bien están en estrecha relación, puesto que su nexo *".. se encuentra en el hecho de que toda pluralidad concreta posee un número cardinal determinado..* (que) *.. señala el cuanto determinado de una pluralidad; es decir, precisa la noción general de pluralidad al decir cuánta es la pluralidad"* (pág. 29), los números pueden ser *".. las especies del universal genérico pluralidad"*, afirmación que queda supeditada a la *".. consideración atenta del origen y del contenido del universal que designamos con el término 'pluralidad'".*

Por otra parte, con respecto al concepto de número, García-Baró realiza, en los capítulos 2 y 3 de su obra, un análisis de la noción de 'todo' así como del papel de la atención psicológica en lo que se refiere al número. Dichas consideraciones, al igual que hace Husserl, ponen el énfasis en la 'vinculación colectiva' como característica fundamental de las colecciones y de la cantidad como característica especial de las mismas.

A modo de resumen, las ideas básicas que nos interesan son las siguientes:

a) El concepto de cantidad se forma por reflexión sobre la "unión colectiva" o el modo de unificación de los contenidos y no sobre las unidades concretas, su naturaleza, disposición u otros accidentes. Este concepto de "unión colectiva" no está incluido en la representación concreta, de tal modo que cuando no hay conciencia de esa unión colectiva de unidades u objetos concretos no puede haber concepto de cantidad.

b) La cantidad, entendida como *multiplicidad de entes unificados de un modo determinado*, presenta diversas características. Una de ellas es su medida mediante expresión numérica a partir de una unidad de medida. El concepto de número representa, por tanto, *las formas determinadas de cantidad o de sucesión en abstracto*, de manera que de la diferenciación entre la cantidad y la unidad, como conceptos dependientes, surge el número como la "forma vacía" de la diferencia.

c) La cantidad, de por sí, está numéricamente indeterminada hasta que aparezca la pregunta: ¿cuánto?. Es comparable y, por tanto, se puede ordenar con relación a otras diferentes a ella o se puede descomponer o componer con otras. El concepto de cantidad, en consecuencia, es más general e indeterminado que el concepto de número, el cual viene a dar precisión a una de sus características particulares, englobada genéricamente bajo el concepto de medida de la cantidad.

Por otra parte, desde el punto de vista del tema concreto de los números enteros, Husserl dedica el capítulo V (págs. 108-114) de su *Filosofía de la Aritmética* a analizar brevemente las relaciones entre "más" y "menos". En dicho apartado, después de abordar el origen psicológico de estas relaciones, pasa a considerar *las comparaciones de cantidades y de números según el más y el menos* o *".. de los conjuntos que provienen los unos de los otros por aumento o por disminución".* Si los conjuntos son 'homogéneos' se comparan las cantidades y si son 'heterogéneos' se comparan sus cardinales. Como se ve, la comparación se encuentra en la base de lo que entendemos por 'concepto de cantidad' y 'concepto de número'.

La *"separación de las especies de números condicionada por el conocimiento del más y del menos"* (pág. 113), basada en la relación de 'igualdad' de cantidades y de números, constituye la última parte de este capítulo. En la página 113 se cita a Herbart para expresar una idea utilizada en las conjeturas de esta tesis doctoral: *"El concepto propiamente científico de número, no es otro que el de más y menos".*

3.6. Aportaciones de la Epistemología de las Ciencias

Existe una estrecha relación entre el concepto de número y el concepto de cantidad; entre la manipulación, comparación y transformación de cantidades y los conceptos que a partir de dichas manipulaciones y experiencias se constituyen por medio de la abstracción que realiza el sujeto individual; entre las experiencias de tipo físico y las experiencias lógico-matemáticas y, por fin, entre la realidad y las matemáticas, al menos las más elementales. En este orden de cosas la magnitud, la cantidad y la medida de cantidades, que constituyen elementos básicos de las Ciencias Experimentales, se encuentran, al mismo tiempo, en los orígenes del conocimiento matemático que estamos analizando.

Si la construcción de dicho conocimiento a través de la historia ha atendido en sus primeras etapas a problemas y situaciones concretas relacionadas con la experiencia cotidiana y, como parece ser, la construcción de esos mismos conocimientos por parte del sujeto individual tiene una fuerte dependencia de las experiencias concretas con cantidades y medidas, tan importante es averiguar su origen y desarrollo histórico, desde el punto de vista de la Matemática, como averiguar la naturaleza, el modo de existencia y la consideración que tienen los conceptos considerados en la Filosofía de las Ciencias y en las Ciencias Experimentales.

3.6.1. *Publicaciones consultadas*

MOSTERÍN, J. *Conceptos y teorías en las Ciencias.*

POPPER, K. R. *Conjeturas y refutaciones. El desarrollo del conocimiento científico.*

STEGMÜLLER, W. *Teoría y experiencia.*

3.6.2. *Conclusiones: La teoría intuitivo-constructiva de las formas conceptuales científicas*

Stegmüller, W. (1979) y, posteriormente, Mosterín, J. (1984) han dedicado parte de sus trabajos a la estructura de los conceptos científicos y, en particular, a la teoría sobre las formas conceptuales científicas, la cual constituye un elemento importante en este trabajo.

Según esta teoría, la formación de los conceptos comparativos, como paso previo a la introducción de una métrica, concede una importancia especial a la estructura ordinal como elemento básico y prioritario en el proceso de constitución de los conceptos métricos. Conjugando estas consideraciones en el marco de los tres elementos que intervienen: las cantidades, los números y las medidas, con las consideraciones epistemológicas sobre los números enteros, y atendiendo a la comparación como actividad básica en este tipo de procesos, se constata la existencia de relaciones que pueden ser integradas en un modelo formal conjunto y que permiten explicar satisfactoriamente los mecanismos de la aritmética elemental desde el punto de vista aditivo y discreto. En el apartado 7.3 del capítulo 7 se exponen las ideas fundamentales de los textos de referencia.

3.7. **Historia y Epistemología de los números enteros**

En este apartado, básico para el trabajo de investigación, haremos una división entre antecedentes específicos, previos al comienzo de los trabajos sobre la tesis doctoral, y antecedentes específicos revisados y utilizados durante el proceso de investigación propiamente dicho.

3.7.1. *Antecedentes previos*

Podemos destacar por su relevancia los siguientes:

— GLAESER, G. (1981), quien realiza un estudio exhaustivo y minucioso sobre el desarrollo histórico de los números con signo y sobre los obstáculos y las rupturas que marcaron históricamente dicho desarrollo. Se trata de un trabajo clave para la Epistemología y la Didáctica de los números con signo, al que se hace referencia en varios de los capítulos de esta memoria. Asimismo, en relación con este trabajo, se ha revisado también la polémica surgida entre Brousseau, G. (1983) y el propio Glaeser, G. (1984) sobre la naturaleza de los obstáculos que se establecían en el documento inicial.

— SCHUBRING, G. (1986), expone los resultados de un estudio histórico sobre la ruptura en el estatuto matemático de los números negativos, utilizando, entre otras fuentes de información, los manuales escolares de diferentes épocas. Posteriormente, en un trabajo titulado *"Discussions epistemologiques sur le statut des nombres negatifs et leur representation dans les manuels allemands et francais de Mathématiques entre 1795 et 1845"* (1988), plantea una breve reflexión, en el marco de las discusiones sobre la 'transposición didáctica', acerca del papel de los números negativos en el período histórico que se cita. La siguiente conclusión del autor nos parece especialmente interesante:

> "Une analyse précise montre en effet que le processus de reconnaisance des nombres négatifs en tant que concept mathématique "légitime" ne s'est certainement pas déroulé de manière continue, mais a varié selon les milieux culturels nationaux, mettant même en evidence dans ses développements des ruptures et des "retours en arrière". Cette évolution, ces différences et ces ruptures s'expliquent par le fait que les nombres négatifs ne constituent pas un concept isolé au sein de l'arithmétique, mais surgissent par delà le concept de nombre au niveau des fondements des mathématiques, ce qui fait qu'ils ont été considérés comme un défi pour l'intellegence culturelle que l'on avait de la mathématique." (pág. 139).

— RUSSELL, B. (1973) analiza exhaustivamente la naturaleza del doble sentido y del doble signo en Matemáticas (págs. 571-576).

— PIAGET, J. (1975) hace una breve referencia al doble signo en matemáticas, al número negativo y al cero (pp. 109-113).

— Grizé, J. (1979) reflexiona sobre las relaciones entre los números positivos y negativos y sobre la naturaleza y existencia del número natural en lo que concierne a sus relaciones con los números enteros.

— Pycior, H. M. (1981) sitúa los inicios del Álgebra simbólica en la obra de George Peacock, que en 1830 sienta las bases del Álgebra como ciencia separada de la Aritmética y no sólo como mera ampliación de ella. El autor mantiene que fue el problema de los números negativos, pendiente todavía a finales del siglo XVIII, uno de los detonantes del cambio de rumbo que supondría el principio de permanencia de las leyes formales de Hankel, H., introducido previamente por Peacock en sus intentos de fundamentar el Álgebra simbólica.

3.7.2. ***Otras obras consultadas***

Exponemos a continuación, en diferentes apartados, resúmenes comentados de los trabajos más relevantes.

3.7.2.1. *El número entero como síntesis entre la cantidad y la cualidad*

Etayo, J. J. (1970) aborda el tratamiento del concepto de cualidad en la Matemática y la importancia de las relaciones y del álgebra de relaciones como elementos básicos para el trabajo matemático. En particular, nos han interesado sus notas sobre las relaciones entre la cualidad, la cantidad y los números con signo, de entre las que destacamos las siguientes:

> "Parecía concebida la Matemática como ciencia de la cantidad (. .) Esta concepción va a perdurar durante siglos (. .) Parece entonces que la cualidad, como categoría opuesta a la cantidad en la definición lógica, no iba a tener tratamiento desde el punto de vista matemático. Sin embargo, es un fenómeno general, dentro de la evolución del conocimiento humano, el que se ha llegado a conocer como "cuantificación de la cualidad". La cualidad se puede cuantificar y expresar en números; al mismo tiempo, la Matemática crea nuevos números y nuevos entes que pueden interpretarse como expresión de cualidades." (páginas 38-41).

La cuestión fundamental, que según el autor es el origen del trabajo que presenta, es la siguiente: *"¿Cuándo, en la evolución del concepto de número, se llega a construir un tipo de número que exprese no sólo una cantidad, como los naturales o los fraccionarios, sino además una cualidad?"*. La introducción por Cardano de la "unidad negativa" como solución de la ecuación $x + 1 = 0$, fue *"la primera tentativa para introducir los números negativos"*.

Coincidimos con el autor en que la introducción de estos nuevos números fue una pequeña revolución en Matemáticas: *"La idea fundamental que la construcción de los números negativos llega a destruir era la de que el número representa sólo una cantidad."*. Al mismo tiempo, dicha construcción significa: *". . que los números, que hasta entonces expresaban sólo cantidades, podían en adelante expresar, al contar con los positivos y negativos, cantidades, sí, pero de dos cualidades opuestas."*. En relación con esta afirmación entendemos que los números a los que se refiere no son los números enteros propiamente dichos, como pretendemos poner de manifiesto en el capítulo 7 de este trabajo.

3.7.2.2. *Los primeros antecedentes históricos de los números "enteros"*[7]*: la negatividad en la antigua China*

Lizcano, E. (1993) plantea e interpreta "los primeros antecedentes históricos conocidos de los números enteros" (pág. 66). De acuerdo con lo que se establece en esta investigación, podemos adelantar algunas discrepancias con las interpretaciones que hace el autor acerca de la "negatividad" en la Matemática China y que proceden, precisamente, de la naturaleza del "imaginario colectivo" actual desde el que el autor hace dichas interpretaciones, el cual se encuentra fuertemente influenciado por el estado actual de los conocimientos sobre los números enteros y sobre la Matemática en general. Los antecedentes que se relatan, al igual que otros más conocidos como el modelo hindú de bienes y deudas, no contextualizan los números enteros como plantea el autor (apartado II.7, pág. 97), sino que son los primeros antecedentes conocidos de los números naturales relativos.

En el capítulo II del libro, se aborda el análisis *". . de ciertos textos matemáticos en los que se construyen las primeras maneras de negatividad."* (pág. 61) en el contexto del Álgebra y la numerología chinas. El centro de dicho análisis se sitúa en el capítulo octavo de "los nueve capítulos del arte matemático" (Jiu zhang suanshu) llamado *fang cheng*, y en los comentarios de Liu Hui (s. III d.C.) a dicho capítulo. En dicho texto se construye *"... cierta forma de negatividad: la que llamaremos zheng/fu/wu."* (pág. 62) a partir del método de "cálculo en el tablero" y que el autor relaciona con lo que denomina *"Álgebra instrumental"*. Después de establecer las reglas *zheng/fu* (positivo/negativo) (apartado II.5, pág. 83) y contextualizarlas en el caso particular de los problemas originales que se desarrollan en el "capítulo octavo", pasa a justificar su relación con lo que hoy enten-

[7] La expresión entrecomillada, pretende reflejar una cierta reserva con respecto a la naturaleza de los números que figuran en los textos consultados. Nuestro propósito, a la vista de la existencia de unos números (los números naturales relativos) diferentes de los enteros usuales, es mostrar precisamente que estamos ante los primeros antecedentes históricos de los números naturales relativos.

demos por números negativos y números enteros, prestando atención al concepto de "cero" (a nuestro entender el aspecto clave de las interpretaciones que se establecen) y a la estructura de grupo (evidentemente supeditada a la existencia o no de un único cero como elemento neutro).

Por otra parte, los análisis sobre la 'negatividad' en la antigua China se contrastan con las nociones correspondientes en otras culturas. Tal es el caso de la Matemática griega clásica y de la Matemática 'alejandrina', cuyas diferencias con la anterior así como el análisis detallado de los motivos de las mismas ocupan gran parte de la publicación.

Concluimos con un resumen esquemático utilizando algunas expresiones no originales (lo que no figura en cursiva) por razones de simplicidad y de espacio, aunque tratando de no alterar el sentido de las principales conclusiones del estudio (págs. 265-268).

a) Los diferentes imaginarios sociales orientan diferentes maneras de hacer matemáticas. En particular, desde el *imaginario ilustrado actual*, se identifican *diferentes grados de progreso en la construcción de los números negativos.*

b) Con anterioridad al año 202 a. de C. (dinastía de los Primeros Han), *"la negatividad emerge en términos de oposiciones respecto de un centro o hueco..."* y *aparece en diferentes ámbitos de la actividad de aquélla época bajo diferentes formalizaciones. "Estas negatividades formales . ., se manifiestan por: i) ciertos complejos simbólicos . . que operan en términos de oposiciones que pivotan sobre un 'hueco' que actúa como 'quicio' o 'centro' en torno al cual las oposiciones se equilibran; ii) una concepción cualitativa y simbólica del espacio de representación...; iii) ciertos procesos de racionalización asociados (al lenguaje ordinario)*[8]*; iv) un modo de pensar que descansa en los criterios prelógicos 'de oposición' y 'de equivalencia'."*.

c) En la Grecia clásica, la 'negatividad' no surge de un *"criterio básico de oposición"*, sino del juego de *determinación/indeterminación* que caracteriza a la Matemática de dicha cultura. Aquí, *"la negatividad nunca llega a adquirir la suficiente entidad como para siquiera ser susceptible de verse rechazada"*.

d) En el 'alejandrinismo' y, en particular, en Diofanto, *". . la negatividad se construye 'a tientas' y se rechaza en cierto sentido lo que se asume en otros."*. Se trata de un *"imaginario mestizo e inestable"* del que surge *". . la que podríamos llamar propiamente primera forma occidental de 'negatividad'."*.

[8] Lo que figura entre paréntesis es una simplificación del autor de la tesis.

e) *"Las principales diferencias entre las matrices fundamentales de los imaginarios griego y chino son: i) pensar por abstracción . . vs. pensar por analogía, simetría o equivalencias; ii) asumir principios (identidad o no contradicción) ... vs. una matriz conceptual que predispone la realidad y el pensamiento...; iii) suponer un espacio extenso vs. un espacio tenso; iv) la negatividad dentro de una tradición (sustracciones, 'nada'...) vs. en términos de opuestos articulados en torno a un quicio que, rigiendo su enfrentamiento, rige también su anulación recíproca."* (pág. 267).

f) La razón de estas diferencias radicales se encuentra en *"...sus respectivos modos de pensar (...) que a su vez arraigan en sus respectivos imaginarios sociales."*. (pág. 267).

Para terminar, se plantea también en el trabajo la necesidad de un estudio global sobre la historia de los números negativos así como de la profundización sobre las consideraciones que hemos tratado de resumir aquí.

3.7.2.3. *Los números negativos y la resolución de ecuaciones*

GALLARDO A. y otros (1990) abordan una revisión histórico-crítica del papel de los números negativos en la resolución de ecuaciones en culturas y en momentos históricos diferentes. El núcleo del trabajo se encuentra en la revisión histórica aludida y en la interpretación de los datos sobre la base de cuatro categorías, que sirven para realizar una clasificación de los diferentes autores y textos revisados: el lenguaje utilizado, los métodos de resolución de ecuaciones empleados, el nivel de operatividad de los números con signo y el tipo de interpretación que se le da a dichos números. Estas cuatro categorías se analizan posteriormente, como conclusiones del estudio, bajo la óptica de sus interacciones duales, a lo que se añade, como reflexión final, las condiciones que hicieron posible la aceptación histórica de las primeras soluciones negativas.

Dentro de este mismo contexto de la resolución de ecuaciones, SESIANO, J. (1985)[9] ha realizado un trabajo exclusivamente histórico sobre la aparición de soluciones negativas en la Matemática Medieval, que complementa la información y las interpretaciones que ofrecen otros estudios realizados en este sentido desde el ámbito de la Educación Matemática.

En dicha publicación se ponen de manifiesto las interferencias entre los resultados de las manipulaciones algebraicas formales y sus interpretaciones en

[9] Sesiano, J. (1985).- The Appearance of Negatives Solutions in Mediaeval Mathematics. *Arch. Historic of Exact Sciences.* V. 32/2, pp. 105-150.

el contexto de la resolución de problemas concretos. Las dificultades e incoherencias detectadas entendemos que eran debidas a la aplicación de patrones, ideas y conocimientos numéricos existentes sobre situaciones concretas que, por su naturaleza, requerían de tratamientos e interpretaciones diferentes:

> "Desde luego, los pares de conceptos (medibles) opuestos, como crédito y débito, ganancia y pérdida, propiedad y deuda, futuro y pasado, una dirección y su opuesta, podían tener interpretaciones razonables. Pero los casos de un precio negativo, un impuesto negativo, una cantidad negativa de un artículo podían darse también, y no podían descartarse a priori.". (pág. 105).

3.7.2.4. *Teoría general de los números dirigidos de Franco Spisani*

Spisani, F. (1985) y Orman, G. (1985) exponen los elementos fundamentales de una teoría sobre los números positivos y negativos basada en la lógica de la "identidad-diferencia" o Lógica Dialéctica (pág. 66), caracterizada por la eliminación de la dicotomía clásica entre lo verdadero y lo falso de la lógica Aristotélica.

Al margen de los fundamentos lógicos y matemáticos de la teoría, cuyo estudio es complejo y trasciende los intereses de nuestra investigación, resaltamos aquéllos aspectos que nos parecen novedosos y que ilustran, en cierto modo, el sentido que vamos a adoptar en los planteamientos teóricos de este trabajo.

El punto central de la teoría se encuentra en el número cero, que posee la propiedad de "*. . ser extensible en el sentido positivo y en el sentido negativo.*"; "*Cero es considerado como si tuviera dos "caras": una notada por* φ, *que es la base de la extensión hacia la parte positiva de* 0, *y una segunda notada por* n *que marca la posibilidad de disminución de* 0."; "*. .* φ *y* n *son números "coiguales" o equivalentes a* 0 *y representan la tendencia de* 0 *a aumentar o a disminuir.*" (pág. 67). Dichos números, son "*. . el origen de la "dirigibilidad" de los números.*". "*De esta manera, los signos "+" y "−" adquieren una interpretación nueva y original:* pertenecen a 0 *pero sólo en la medida en que* 0 *es expresable respectivamente como* φ *o como* n. *Por tanto, no son simples signos de operaciones a realizar con cantidades o magnitudes próximas a* 0. *La extensibilidad o reducibilidad de* 0 *deriva de la propiedad de* 0 *de ser el origen de la capacidad de aumento o disminución de* φ *o* n. *Son signos de relación entre números, son signos de afinidad con el número derivado de* φ *o de* n *.*" (págs. 68 y 69).

Esta interpretación de un cero con dos caras, con dos signos y susceptible de extensión en ambos sentidos, viene a añadir elementos interesantes a las conjeturas epistemológicas que se han expuesto sobre la naturaleza y existencia de los números enteros y que trataremos de integrar en los fundamentos teóricos de la tesis.

3.8. Epistemología y Didáctica de los números enteros y de la iniciación al Algebra

En este apartado incluimos, finalmente, algunos de los trabajos que presentan la peculiaridad de conjuntar la reflexión epistemológica con el análisis didáctico. Esta manera de proceder, no siempre afortunada como veremos, liga especialmente ambos campos en el sentido expresado en el capítulo 1.

Uno de los elementos clave en las investigaciones que presentamos es el concepto de número entero como "operador" (Dienes, Z. P., 1972, pág. 102), el cual va a servir de base para la construcción del conjunto de números que denominamos "naturales relativos". Desde este punto de vista, el trabajo de Spagnolo, F. (1986) trata, desde un enfoque teórico primero y desde un punto de vista didáctico después, la intervención de la noción de operador en la ampliación de los conjuntos numéricos.

En la parte dedicada a analizar la ampliación de N a Z el autor define el concepto de operador asociado a una aplicación entre números naturales a partir de los axiomas de Peano, llegando a demostrar que el conjunto de operadores así construidos verifica los axiomas de Padoa para los números enteros (Enriques, F., 1987), gracias a la introducción del concepto de *sucesor de un operador*. Este concepto parte de la existencia de una estructura de orden total en el conjunto de los operadores, lo que, a diferencia de la suposición alternativa que adoptamos en el trabajo, es un factor determinante para el perfecto ajuste a la axiomática mencionada.

Con un enfoque diferente al anterior, Freudenthal, H. (1983, págs. 432-460) aborda los números negativos y las magnitudes dirigidas bajo consideraciones epistemológicas, didácticas y fenomenológicas. El autor se muestra partidario de justificar los números enteros a través del principio de permanencia algebraico o, lo que él mismo llama, *"el principio de permanencia geométrico-algebraico"* (pág. 435). La necesidad de la extensión del concepto de número por motivos puramente matemáticos queda manifiesta en el capítulo, lo que el autor justifica al considerar las matemáticas como *"un juego formal de acuerdo a ciertas reglas, o incluso, un lenguaje construido por reglas sintácticas arbitrarias."* (pág. 460).

Después de realizar un análisis de los modelos didácticos usuales y del tratamiento de los números negativos en el contexto de las coordenadas de vectores, vuelve sobre el principal argumento de su exposición: "..el *álgebra es válida porque funciona en geometría... Desde mi punto de vista, es uno de los objetivos de la instrucción en álgebra, convencer al estudiante de la validez de las operaciones y sus propiedades.. El argumento más convincente es mostrarle la operatividad* *del álgebra en geometría.* Yo creo que esta, debe ser nuestra política en la enseñanza de los números negativos." (pág. 450) [10].

Es evidente que el autor no considera el planteamiento fenomenológico en su reflexión sobre los números enteros; estamos ante una visión parcial de la Epistemología y Didáctica de los números enteros: el método de "extrapolación inductiva" y la constante referencia a justificaciones formales y de utilidad matemática, vacían prematuramente de contenido los conceptos correspondientes y olvidan aspectos tan esenciales en Educación Matemática como las ideas previas sobre numeración y cálculo, las conexiones no formales entre los números, las cantidades y las medidas, el papel y la evolución del lenguaje y del pensamiento numérico y algebraico y, por último, la diferencia entre 'educación del pensamiento numérico y algebraico' e 'instrucción en Aritmética y Álgebra'.

Dentro del campo de la Epistemología y Didáctica en la iniciación al Álgebra y en el paso de la Aritmética al Álgebra, CHEVALLARD, I. (1989, pp. 43-72) plantea una reflexión teórica general de carácter epistemológico-didáctica en la que, mediante un discurso complejo, desarrolla una crítica al modo en que se introduce el cálculo algebraico en los primeros niveles educativos: un mundo cerrado de manipulaciones "*...que se suponen significativas por ellas mismas.*" (pág. 47). En niveles posteriores aparecen los ejemplos del "*...empleo funcional del cálculo algebraico..*" que, según el autor, es el que da sentido a las manipulaciones iniciales. Por otra parte, al analizar las relaciones entre el cálculo algebraico y el cálculo numérico, se afirma: "*...el cálculo algebraico constituye el móvil esencial y el útil fundamental de la construcción de los sucesivos sistemas de números.*" (pág. 50); "*...el Álgebra, va a permitir la formulación y el estudio de las propiedades de los sistemas numéricos.*" (pág. 51).

Estamos de acuerdo con el autor en que la iniciación al Álgebra no empieza con la noción de variable y el uso de notación simbólica en la resolución de problemas, sino en el propio corazón del cálculo aritmético, en el que aparecen las propiedades algebraicas que posteriormente se formalizarán en las construcciones matemáticas de los conjuntos numéricos. En otras consideraciones toma como referencia la dialéctica útil-objeto y el papel de la modelización matemática. Después de analizar dichas cuestiones en las partes III, IV y V de la obra (págs. 53-63), compara los útiles aritméticos y los útiles algebraicos y resalta "*.. la posibilidad de calcular sobre expresiones literales*" (pág. 64) que tiene el Algebra y las ventajas, los inconvenientes y las diferencias entre ambos tipos de cálculo; entre "*el mundo cerrado (de la aritmética) y el universo infinito (del Álgebra)*" [11] (pág. 63).

10 Se utiliza la cursiva para resaltar la parte fundamental.

11 Lo encerrado entre paréntesis es del autor de la tesis.

CAPÍTULO

4

Aprendizaje y desarrollo cognitivo

4.1. Introducción

En este capítulo se expone una revisión de los conocimientos sobre una de las grandes áreas de interés de la investigación en Educación Matemática, como es la que concierne al conocimiento desde el punto de vista del sujeto individual, su formación y evolución, las dificultades y los errores así como las teorías sobre el aprendizaje matemático y sus relaciones con las teorías generales sobre el aprendizaje (Nesher, P.; Kilpatrick, J. (eds.), 1990).

Van a tener cabida tanto aquellos trabajos que consideran la Psicología de la Educación Matemática como núcleo del que parten las investigaciones en Didáctica de la Matemática como los que consideran dicha disciplina como una más, entre otras, dentro de la Educación Matemática. Igualmente, revisaremos un tercer tipo de trabajos que relegan a un segundo plano las consideraciones psicológicas. Dentro de este tercer grupo se encuentran, como veremos, aquéllos trabajos que sustituyen los supuestos de la investigación psicológica tradicional por conceptos, modelos e hipótesis que pretenden ser específicas de la Educación Matemática [1]. Continuamos así en la línea emprendida en el capítulo anterior de progresar en el análisis didáctico sobre el campo en estudio.

Al igual que en el capítulo 3, iremos de lo general a lo particular e incluiremos los antecedentes que se han mostrado más relevantes para los objetivos de

1 Existen diversas tendencias en la investigación en Educación Matemática, en lo que se refiere a la finalidad general o a la consideración y valoración de los diversos elementos implicados. De entre ellas, hay algunas que se sitúan al margen de la investigación psicológica tradicional. Así por ejemplo, podemos encontrar una buena parte de trabajos basados en la investigación directa sobre la enseñanza y aspectos curriculares (Bell, A.; Hart, K.; otros autores incluidos dentro de la tradición anglosajona sobre el currículum), cuyo contacto con el aprendizaje y la cognición se realiza a través de estudios que analizan y sistematizan las respuestas y las actuaciones de los sujetos.

nuestra investigación, complementados por aquéllos otros que, habiéndoseles dedicado atención en su momento, pasaron posteriormente a un segundo plano en función de las prioridades de la investigación.

4.2. Psicología y Educación Matemática: Consideraciones generales

4.2.1. *Fuentes consultadas*

La siguiente publicación revisada contiene información especialmente importante para el tema que estamos tratando.
NESHER, P.; KILPATRICK, J. (eds.). *Mathematics and Cognition.*

4.2.2. *Algunas conclusiones*

De la obra mencionada, que incluimos por su interés, por su carácter de revisión general y porque recoge algunos de los principios de los que partimos, es de destacar el capítulo de Fischbein, E. (1990), cuyas principales ideas se condensan en los tres apartados siguientes. En el cuarto apartado se incluye una breve referencia a las consideraciones que presenta el capítulo de Vergnaud, G. (1990) en la misma publicación.

Relaciones entre Psicología y Matemáticas

El marco de las relaciones entre la Psicología y la Educación Matemática viene establecido en el capítulo de Fischbein de la obra mencionada, cuyas ideas fundamentales se exponen en la página 3 del mencionado capítulo.

Nuevas tendencias en Educación Matemática

En una revisión de las principales aportaciones realizadas por el grupo PME desde su fundación en 1976 hasta la edición del trabajo que comentamos, Fischbein señala cuatro direcciones principales que corresponden a otras tantas tendencias en las investigaciones realizadas en el seno del grupo mencionado.

La necesidad de una fundamentación teórica

Finalmente, de nuevo en la obra mencionada, Fischbein señala las metas para el desarrollo futuro del grupo PME y, en consecuencia, de la intervención de la Psicología en la investigación en Educación Matemática (pág. 6). En opinión del autor, ninguna de las actuales tendencias en Educación Matemática (incluyendo

las investigaciones de los aspectos psicológicos), constituyen un paradigma genuino; ninguna de ellas ha demostrado, por sí misma, una síntesis suficientemente poderosa entre las perspectivas teóricas y los instrumentos prácticos como para llegar a ser un paradigma dominante y ampliamente aceptado. No obstante, también en opinión del autor, se puede afirmar que la Psicología de la Educación Matemática tiende a ser, en general, el paradigma de la educación matemática como un cuerpo científico de conocimientos, para lo que se precisa una fundamentación teórica sólida (pág. 12).

El trabajo de Vergnaud

Las consideraciones anteriores se complementan con el trabajo de Vergnaud, G. (1990), ya reseñado en el capítulo 3 de esta memoria. A diferencia del planteamiento anterior, que pone el énfasis en la Psicología de la Educación Matemática, en este trabajo se hace un análisis de las relaciones entre la Epistemología y la Psicología de la Educación Matemática. Los dos están muy relacionados y su separación se debe a motivos de organización de la exposición.

El enfoque que expone el autor y que se sitúa dentro de la teoría de los campos conceptuales (Vergnaud, G., 1981), apunta en la dirección de reforzar las relaciones entre Epistemología y Psicología, concediendo un mayor protagonismo a la Epistemología de la Matemática y al análisis de situaciones.

Además de las consideraciones generales podemos añadir el carácter de aspecto clave que los autores mencionados atribuyen al *análisis de errores* ; elemento básico para las investigaciones sobre el aprendizaje matemático y sobre los fundamentos de la Didáctica de la Matemática.

4.3. Investigaciones sobre errores, dificultades y obstáculos

En lo que sigue, exponemos un resumen de una revisión en profundidad de los estudios englobados bajo la denominación "análisis de errores". Su inclusión en este apartado obedece a los siguientes motivos:

— El análisis de errores y, en particular, de los errores sobre números con signo ha constituido una preocupación importante a lo largo del desarrollo de este estudio; la reflexión sobre este campo ha contribuido decisivamente al desenlace final de la investigación.

— Las conclusiones del trabajo que presentamos proporcionan un marco explicativo en el que interpretar las dificultades y errores constatados en otras investigaciones en relación con los conocimientos propios del campo de estudio.

Los comentarios, notas añadidas, afirmaciones resaltadas y, en general, la selección de cuestiones que se exponen sobre los trabajos revisados, delimitan de forma precisa una parte de los principios de los que partimos para abordar el problema de investigación. Asimismo, se incluye en el apartado 4.6 una revisión de los errores constatados en relación con el problema específico de la investigación.

4.3.1. Fuentes consultadas

Se han revisado los siguientes documentos:

ARTIGUE, M. *Obstacles as objects of comparative studies in mathematics and in physics.*

BLANDO, J., KELLY, A., SCHNEIDER, B. Y SLEEMAN, D. *Analyzing and modelling arithmetic errors.*

BOUVIER, A. *Didactique des Mathématiques. Le dire et le faire.*

BROUSSEAU, G. *Les obstacles épistémologiques et les problémes en Mathématiques.*

— *¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas?*

CENTENO, J. *Números decimales.*

FISCHBEIN, E. *Books reviews:* NADINE BEDNARZ and CATHERINE GARNIER (eds.) *Construction des savoirs. Obstacles et conflicts.*

GIORDAN, A. *Interés didáctico de los errores de los alumnos.*

LECOURT, D. *Para una crítica de la Epistemología.*

MANGAN, C. *Multiplication and division as models of situations: what research has to say to the teacher.*

MAURER, S. B. *New knowledge about errors and new views about learners: what they mean to educators and more educators would like to know.*

MULHERN, G. *New directions in Mathematics Education.*

SLEEMAN, D. *Mis-generalization: an explanation of observed mal - rules.*

VERGNAUD, G. *Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques.*

4.3.2. Principales conclusiones

La información obtenida a partir de la documentación mencionada, se organiza en tres epígrafes generales que incluyen, cada uno de ellos, varios subapartados.

4.3.2.1. *Errores, dificultades y obstáculos en Educación*

Algunas ideas generales que delimitan nuestra posición en este campo de la Educación aparecen en las siguientes notas comentadas de Giordan, A. (1985, pp. 11-17):

"Según la Pedagogía clásica, los errores son debidos al proceso de aprendizaje. Esto parece ser que ahora no tiene la misma consideración. Según Bachelard, el error es un paso obligado *puesto que el saber se construye, y esta construcción, se enfrenta a ciertas resistencias: las primeras evidencias, las ideas preconcebidas, los hábitos, etc., que representan obstáculos epistemológicos*[2] *frente a la construcción del saber."* (págs. 11-12).

El autor fundamenta su trabajo en los siguientes autores e ideas relevantes:

Canghilhem (1968): *"el error es necesario intrínsecamente"*.

Martinand (1981): *"el error no es un defecto del pensamiento, sino el testigo inevitable de un proceso de búsqueda."*.

Raichvag (1983): *"Bachelard esta superado ya: se aprende no solo "contra", sino también "con" y "gracias a" los errores. Es tan ilusorio "purgar" o "provocar una catarsis" de las ideas falsas, como impartir las clases frontalmente"*.

Por otra parte, Giordan manifiesta la conveniencia de definir mejor los errores, situarlos y conocerlos a fin de tenerlos en cuenta. En cuanto a los tratamientos, argumenta a favor de buscar las situaciones o las intervenciones, los medios, etc., que *obligan* al alumno a *romper* con sus conocimientos anteriores y poner en juego los instrumentos que le ayudan a reorganizar sus conocimientos. El problema que se plantea es: *"¿Como hay que apoyarse en estos obstáculos para ayudar al alumno a progresar?."* (pág. 15).

Por último, el autor plantea una *hipótesis didáctica* que considera el análisis de errores como un elemento clave en la investigación en Educación Matemática: *"Los errores de los alumnos pueden convertirse en instrumentos didácticos de diagnosis."* (pág. 16).

4.3.2.2. *Errores y dificultades en la enseñanza-aprendizaje de la matemática*

Presentamos un resumen de la revisión realizada sobre las principales aportaciones al análisis de errores en Educación Matemática dentro del *paradigma*

[2] Tratados ampliamente en las páginas siguientes dentro de este mismo apartado.

cognitivo y sobre algunas investigaciones relacionadas con la *Epistemología y la Didáctica de la Matemática.*

4.3.2.2.A. Mulhern, G. (1989).

Según este autor, el estudio de los errores en Educación Matemática se ocupa fundamentalmente de: **a)** *Contabilización directa del número de soluciones incorrectas* a una variedad de problemas; **b)** Análisis de los *tipos de errores* cometidos; **c)** Análisis de *patrones de errores*; **d)** Construcción de problemas para inducir o provocar expresamente errores por parte del individuo (*Repair Theory*).

Con respecto a la naturaleza de los errores el autor señala un cierto número de características o rasgos comunes encontrados por varios investigadores:

Los errores son frecuentemente *"sorprendentes", "persistentes", sistemáticos y aleatorios*, y con frecuencia, *ignoran los significados*[3].

Además de estas características, Brousseau y otros (1986) (citado por el autor), sugieren cuatro formas en las que los errores pueden ocurrir:

1.—Los errores son a menudo el resultado de conceptos erróneos o malas interpretaciones sobre aspectos fundamentales de las Matemáticas.

2.—Frecuentemente, los errores son el resultado de la aplicación correcta y exacta de un procedimiento sistemáticamente defectuoso que es fácilmente identificable por el Profesor.

3.—Los errores pueden ocurrir cuando el alumno utiliza procedimientos defectuosos y posee conceptos erróneos que son irreconocibles por el Profesor (difícilmente identificables).

4.—El alumno inventa, a menudo, sus propios métodos no formales y altamente originales para resolver los problemas.

En relación con los procedimientos empleados para el análisis de errores, Mulhern apuesta por el "análisis de protocolos" como solución metodológica para la investigación en este campo.

Otras conclusiones de este trabajo son:

Puesto que los procesos mentales son "invisibles", cualquier conjetura sobre la naturaleza del pensamiento matemático debe estar basada necesariamente en la inferencia, a la que se ha de prestar, por tanto, una atención especial.

Los niños y los adultos tienen formas muy personales de representación del conocimiento matemático, lo que debe ser tenido especialmente en cuenta.

[3] La cursiva es del autor de la tesis.

Son necesarias tanto las respuestas correctas como las preguntas correctas.

Al alumno debe dársele la oportunidad de descubrir sus propios errores, sus equivocaciones y sus concepciones falsas o incompletas.

4.3.2.2.B. Maurer, S. B. (1987).

En este trabajo se expone un análisis detallado de los errores en el campo de la sustracción y en la iniciación al Álgebra, utilizando el concepto de "bug" o procedimiento defectuoso y la "Repair Theory". Se trata de una interpretación en la que intervienen conceptos relacionados con nuestro objeto de estudio y en la que se incluyen, entre otras, las siguientes afirmaciones:

"Los estudiantes cometen errores sistemáticos, que son más sintácticos que semánticos" (pág. 171); *"El contenido de los errores está relacionado con la estructura del currículum. Si el currículum fuera diferente, los bugs serían diferentes"* (pág. 174).

El autor sostiene que no deben existir sentimientos negativos con respecto a los errores; pueden ser un buen punto de partida para trabajar, porque *proporcionan información sobre los tópicos matemáticos y sobre la naturaleza de la Matemática.*

4.3.2.2.C. Mangan, C. (1987, pp. 107 y sgtes.)

Algunas de las conclusiones de este autor son las siguientes:

"Niños a los que se les pide que inventen historias que ejemplifiquen determinados cálculos, no pueden conectar los cálculos con los contextos, con las situaciones reales; al resolver problemas están más preocupados por la estructura superficial matemática que por el significado de las situaciones a las que se refieren".

"Las dificultades de los alumnos se pueden asociar con la incapacidad para seleccionar la operación requerida para encontrar la solución".

"Los alumnos se centran sobre los números para guiar la elección de la operación adecuada: los números dicen lo que hay que hacer". "Las estrategias basadas en los números, sugieren que han sido guías útiles con anterioridad".

Errores extendidos, que también se mencionan en el trabajo, son los siguientes: *"la multiplicación hace más grande, la división más pequeño"*; *"es preferible dividir el más grande por el más pequeño"*. Son concepciones y representaciones válidas para un tipo de números pero inoperantes para otros (decimales), lo que el autor justifica diciendo:

"Nuestro pensamiento sobre la multiplicación y división está fuertemente

influenciado por las primeras conceptualizaciones que hacemos de las operaciones. Estas formas intuitivas de pensar sobre las operaciones continúan afectando secretamente a nuestro pensamiento aún después de haber pasado a definiciones más generales. Son herramientas correctas cuando se aplican a una situación en la que funcionan. (...) El lenguaje utilizado para hablar de la multiplicación y división tiende a reforzar los errores. En el lenguaje ordinario hablamos de "alargar" o "encoger" algo; no hay palabras simples que traten de un cambio de tamaño por un factor x, donde x puede ser mayor o menor que la unidad. En la división se utiliza también: "dividir entre" o "dividir por". Frases que se suelen intercambiar son: "dividir en mitades" y "dividir por un medio". También se utilizan palabras del lenguaje ordinario para facilitar la elección de la operación: "x veces.." "..entre.." "menos" "todos". Son "key words" que determinan la forma de resolución del problema[4]*".*

Entendemos que las ideas anteriores tienen también validez en el caso de la adición y la sustracción, habiéndose incluido por tanto en las hipótesis del trabajo que presentamos.

4.3.2.2.D. Teoría de la generalización errónea[5]

Con una orientación similar a la de los trabajos anteriores, dentro del paradigma cognitivo y en particular de la teoría del Procesamiento de la Información, se sitúa esta teoría, cuyas diferencias con respecto a los planteamientos anteriores se reflejan en las siguientes afirmaciones: *"Los errores no son considerados aquí como procedimientos defectuosos que el estudiante hace, sino como* reglas falsas[6]. *Las reglas falsas en Matemáticas son violaciones de reglas legales".*

La teoría de la generalización errónea trata de explicar las causas de un número importante de dichas reglas falsas, para las que pueden existir diferentes etiologías; la teoría establece también que aparecen errores cuando el estudiante infiere *"varias reglas que son consistentes con el ejemplo pero que no son correctas"*. Los fundamentos de estos errores aparecen durante la fase de codificación, *"en la etapa en la que el estudiante está desarrollando hipótesis"*.

[4] Nota del autor de la tesis: parece que es un obstáculo didáctico provocado; siempre se pide al alumno la respuesta correcta, lo que favorece el desarrollo de mecanismos propios para hallar dicha respuesta correcta. Ante la falta de comprensión, acuden a "trucos" que pueden estar basados en estas "key words".

[5] Blando, J. A.; Kelly, A. E.; Schneider, B. R.; Sleeman, D. Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 20, núm. 3, pp. 301-308. 1989.

[6] Sleeman, D. Mis-generalization: An explanation of observed mal-rules (Technical Report). Stanford, CA: Stanford University, Heuristic Programming Project.

Los trabajos dentro de esta perspectiva se orientan a analizar y categorizar los errores de los alumnos en *cálculo aritmético o algebraico* (aspectos fundamentalmente sintácticos) mediante tests, entrevistas y análisis de tareas a grandes grupos de alumnos. La atención se centra, fundamentalmente, en las reglas de las operaciones aritméticas básicas, reglas de paréntesis y reglas de precedencia u orden de operaciones, encontrándose errores de sustitución, precedencia y otros (descuido, falta de atención, etc.).

4.3.2.2.E. Alain Bouvier (1986)

De las ideas de este autor, destacamos las siguientes:

"El error es el primer estado del conocimiento". (pág. 114).

"Parece claro que el análisis de la forma en que la matemática se produjo históricamente, nos puede ayudar en la comprensión de los fenómenos de producción del conocimiento matemático en clase." (p. 482).

Sobre la utilización didáctica de los errores de los alumnos: *"...sólo apareciendo de forma evidente las contradicciones, podrá el alumno modificar las opciones y llegar a un nuevo conocimiento."* (pág. 350), de manera que: *"Los errores de los alumnos pueden constituir un campo de reflexión y de análisis didáctico."* (pág. 376).

"Revelar los errores de los alumnos, reflejar sus posibles significaciones, es descubrir la existencia de modelos espontáneos, lo que impide concebir al alumno como una página en blanco sobre la que se escriben los conocimientos". En este sentido, se resalta *"...el carácter positivo de los errores y de los modelos espontáneos de los alumnos en la enseñanza de la Matemática"* y que *"El error es un aspecto inevitable y formador"* (pág. 382).

4.3.2.2.F. Centeno, J. (1988, pp. 135-149)

Las siguientes consideraciones inciden directamente en el problema de investigación:

"Los modelos implícitos erróneos, si no se hacen explícitos, si no se muestran, si no se cometen errores, se instalan y se consolidan. Los comportamientos del alumno pueden ser correctos a veces durante mucho tiempo, aunque estén sostenidos por modelos falsos" (pág. 141). Aquí se tratan los modelos erróneos de los alumnos como todo aquéllo que no han comprendido o han comprendido mal, lo que no compartimos a la vista de las conclusiones que se obtienen en nuestra investigación.

Al tratar sobre las causas de los errores con números decimales, encontramos: *"Cualquier forma de introducir o presentar estos números que no permita su aparición como números nuevos, con algunas propiedades distintas de los naturales, puede ocasionar obstáculos suplementarios que se añadan a los obstáculos epistemológicos asociados al concepto"* (pág. 143).

Si trasladamos la idea anterior al caso de los naturales y los enteros puede ocurrir que, al tratar la sustracción en Z como operación extendida de la sustracción en N, se provoquen obstáculos añadidos que se suprimirían al considerar una nueva operación aditiva: suma algebraica. Utilizando la misma terminología que la autora, *quizás los modelos didácticos utilizados para introducir Z provoquen obstáculos acentuados.*

4.3.2.3. *Investigaciones y publicaciones en torno a la noción de obstáculo*

El concepto de obstáculo, que queda definido escuetamente en los párrafos que siguen y de una manera más completa en los documentos revisados, se sitúa en estrecha relación con la noción de dificultad y con el análisis de errores dentro de la tradición que pretende establecer conexiones entre la Matemática, su Historia y Epistemología y la Didáctica de la Matemática. Se trata de una noción que se sitúa en el centro de lo que se conoce como "conflicto sociocognitivo" y "enseñanza por conflicto" (Bednarz, N.; Garnier, C. (eds.), 1989).

La noción de obstáculo, si bien no ha sido utilizada explícitamente en el trabajo que presentamos, tiene, junto a la noción de ruptura epistemológica, un papel destacado en parte importante de los trabajos publicados sobre Epistemología y Didáctica de los números enteros (Glaeser, G. (1981), Conne, F. (1985), Coquin-Viennot, D. (1985), Vergnaud, G.; Durand, C. (1976), Doroux, A. (1982)). Asimismo ha contribuido, indirectamente, a orientar los análisis epistemológicos sobre los números naturales y los números con signo y ha permitido establecer conexiones entre las consideraciones histórico-críticas y lógico-formales y entre las psicológicas y didácticas sobre ambos tipos de números.

En los epígrafes que siguen se incluyen algunas conclusiones de los diferentes autores que se han consultado.

4.3.2.3.A. Lecourt, D. (1973)

En las páginas 30 y siguientes de la obra citada, la autora hace un análisis de las ideas de Bachelard desde un punto de vista filosófico, aportando interpretaciones que completan las consideraciones realizadas por otros especialistas. En el trabajo se concibe que el obstáculo manifiesta una *resistencia del pensamiento al pensamiento* y puede surgir en el momento de la constitución de un nuevo

conocimiento, bajo la forma de un *contrapensamiento*, o en una fase ulterior de su desarrollo, como *detención del pensamiento.*

4.3.2.3.B. Fischbein, E. (1990)

Tanto en el artículo reseñado como en el libro que se referencia, se recoge lo tratado en el Simposium Internacional celebrado en 1987 en Montreal sobre las nociones de obstáculo epistemológico y conflicto socio-cognitivo y su papel en los procesos didácticos.

La idea fundamental del libro revisado por Fischbein, y que expresa en su trabajo, es que los errores y dificultades que aparecen en el proceso de aprendizaje no se pueden reducir a simples "bugs"; se encuentran profundamente enraizados en las creencias de los estudiantes, en sus convicciones y en sus interpretaciones básicas de la realidad.

4.3.2.3.C. Bouvier, A. (1986)

En el Capítulo 5, el autor aborda el concepto de obstáculo en el contexto de la Educación Matemática, mencionando como ejemplo el caso de los números negativos:

— *"A propósito de la regla de los signos, Glaeser, G. señala la sorprendente lentitud de su elaboración desde Diofanto hasta Hankel, H., ¡quince siglos! Desarrollo de un conocimiento que ha pasado por diversas etapas y que los matemáticos de una época dada no integraban siempre las adquisiciones de sus predecesores. Algunos indicadores fueron los siguientes:*

— $1/-1$ *no es igual a* $-1/1$, *porque el numerador de la primera fracción es positivo y el de la segunda negativo.*

— $-3 < 2$ *es absurdo, ya que en caso contrario sería:* (-3) exp2 $<$ 2exp2, *es decir:* $9 < 4$.

— *Cauchy distingue los reales positivos, que los considera como números, de los reales estrictamente negativos, que los llama "cantidades"."*

El autor cita también el trabajo de Alain Duroux (1982) sobre la *noción de valor absoluto,* en el que se define un obstáculo por cuatro características:

— *Es un conocimiento que funciona en un dominio de validez suficientemente grande.*

— *Este conocimiento, cuando se intenta adaptar o aplicar a otras situaciones, provoca errores persistentes, localizables y analizables en relación al obstáculo.*

— *El obstáculo resiste las tentativas de adaptación local.*

— *El rechazo de este conocimiento será un conocimiento nuevo.*

Igualmente son de destacar las siguientes afirmaciones: *"Los conocimientos funcionan, pero en una zona donde nada les pone en contradicción. Sólo un suceso que pone en conflicto dichos conocimientos con nuevas informaciones, los pone en evidencia. Solamente se podrá modificar un concepto o la significación subjetiva de algo, si una cierta situación o un cierto contexto fuerzan a ello. Los nuevos modelos no destruyen los antiguos; cohabitan con su propio campo de aplicaciones".*

Por último, se destaca y ejemplifica en el trabajo *la importancia del contexto y la persistencia de las primeras representaciones*, lo que tendremos en cuenta en la investigación objeto de la tesis. Precisamente, en nuestro trabajo queremos poner de manifiesto la necesidad de analizar, explicitar y tener en cuenta esas primeras representaciones sobre el doble sentido y el doble signo, a fin de facilitar el tratamiento didáctico de los números enteros o aportar nuevos datos que aconsejen la conveniencia de modificar el propio proceso de enseñanza de los primeros conceptos numéricos.

4.3.2.3.D. Artigue, M. (1990)

Además de las consideraciones generales, el trabajo de esta autora interesa, en particular, por las conexiones que establece entre la Física y la Matemática a través del concepto de obstáculo epistemológico.

Artigue considera que se ha concedido un papel importante en Didáctica de la Física a los obstáculos relacionados con el *conocimiento común* o el *conocimiento social compartido o cultural*, el cual suele ir en contra del conocimiento científico. En Didáctica de la Matemática, por el contrario, la importancia del conocimiento común como fuente de obstáculos epistemológicos no parece ser tan obvia, sino que, más bien, parece que el proceso de "generalización precipitada" es fuente de obstáculos con mayor frecuencia que el "conocimiento común".

Algunos *mecanismos que producen obstáculos* en Matemáticas, son los siguientes:

— La generalización precipitada.

— La regularización formal precipitada.

— La fijación en una contextualización o modelización familiar; históricamente el proceso más visible se encuentra en la historia del número negativo.

— La mezcla de nociones sobre un soporte dado .

— La adherencia exclusiva a un punto de vista.

4.3.2.3.E. Vergnaud, G. (1989, pp. 33-40)

De este autor, destacamos las siguientes ideas directamente relacionadas con el problema específico de investigación:

"Los obstáculos epistemológicos, parecen intervenir desde los primeros años de la escuela elemental, cuando el niño debe rechazar la idea de que la adición está asociada a un aumento y la sustracción a una disminución. El alumno se encuentra en particular con este problema cuando debe buscar un estado inicial, conociendo la transformación y el estado final: para él ocurre en efecto que hay que "restar el aumento" o "sumar la disminución". Esto implica una operación de pensamiento relativamente compleja (inversión de la transformación directa) y una pequeña revolución intelectual para el niño que tiene que hacer una suma cuando ha perdido canicas, gastado el dinero, o comido los bombones".

"La sustracción como complemento (¿Qué hace falta añadir a lo conocido para obtener el todo?), y la sustracción como diferencia (diferencia entre dos estados conocidos) no creo que tengan que ver con el concepto de obstáculo epistemológico, a pesar del hecho de que representan operaciones más complejas del pensamiento que la sustracción como pérdida, como gasto o como consumo.

Por el contrario, cuando se presentan problemas que implican la composición de dos transformaciones, y sobre todo la descomposición de una transformación en otras dos, aparecen dos obstáculos sucesivos. El primero se refiere al caso en el que la transformación compuesta conocida y la transformación elemental conocida son del mismo signo: la búsqueda de la otra transformación elemental no tiene dificultad si el valor absoluto de la compuesta es mayor, pero los problemas empiezan si el valor absoluto de la compuesta es más pequeño que el de la transformación elemental, ya que ahora habrá que sustraer los valores absolutos en sentido contrario de lo que es habitual para las magnitudes: "la parte menos el todo" en lugar de "el todo menos la parte". La situación es peor aún si las dos transformaciones son de signo contrario".

En particular, estas últimas consideraciones serán tratadas de manera especial en las conclusiones del trabajo que presentamos.

4.3.2.3.F. Brousseau, G. (1983)

El autor distingue tres orígenes posibles para los obstáculos que se encuentran en la Didáctica de la Matemática:

— Origen ontogenético (relacionados con las limitaciones cognitivas de los estudiantes).

— Origen didáctico (relacionados con las elecciones del sistema educativo).

— Origen epistemológico (relacionados con la resistencia de una parte del conocimiento que se encuentra mal adaptada; obstáculos en el sentido Bachelard).

Igualmente subraya la importancia de los análisis epistemológicos, en el sentido de que la identificación de los obstáculos epistemológicos permite clasificarlos y situarlos entre las múltiples dificultades del aprendizaje como partes inevitables de la construcción del conocimiento.

4.4. Antecedentes específicos del problema de investigación. Organización de la información

Las reflexiones sobre los errores, dificultades y obstáculos en Educación Matemática permiten una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje y desarrollo cognitivo en torno a los conceptos y procedimientos matemáticos que intervienen en el dominio de aplicación del campo conceptual aditivo. Y es, precisamente, en el marco de dichas reflexiones, donde vamos a analizar, en lo que resta del capítulo, los antecedentes y la situación actual de los aspectos específicos de la investigación que presentamos y que se centran en el aprendizaje y desarrollo cognitivo de los siguientes tópicos:

a) los números naturales y las operaciones aritméticas aditivas con números naturales.

b) las nociones cuantitativas y métricas elementales.

c) la resolución de problemas aditivos.

d) los números con signo.

e) el paso de la Aritmética al Álgebra y la iniciación al Álgebra.

La revisión de la información que se va a exponer, se estructura en dos grandes bloques: 1. Aritmética aditiva y aplicaciones y 2. Iniciación al Álgebra. El primero de ellos se divide a su vez en dos partes: Aritmética natural [apartados a), b) y c)] y Aritmética entera [apartado d)].

Con respecto al primero de los bloques, las situaciones y problemas elementales propios del campo involucran *cantidades* discretas o discretizadas, *números* naturales, números enteros y *medidas* en las que intervienen ambos tipos de números; tres conceptos entre los que es necesario establecer una diferenciación epistemológica basada en su diferente naturaleza, según se pone de manifiesto en el trabajo que presentamos. Como consecuencia, establecemos una segunda idea básica: la existencia de una diferenciación cognitiva entre los tres conceptos mencionados. Por último, al aceptar las dos proposiciones anteriores aceptamos también la existencia de diferencias específicas entre los procesos de aprendizaje correspondientes.

En los apartados que siguen organizamos nuestra revisión de investigaciones al respecto en tres apartados: el primero de ellos referido a los números naturales, el segundo a los números enteros y el tercer y último apartado, a la iniciación al Álgebra.

4.5. Números naturales: aprendizaje y desarrollo cognitivo

El apartado se organiza en tres epígrafes: nociones numéricas, medida y resolución de problemas, referidos al campo de los números naturales.
De la revisión de los antecedentes hemos encontrado:

a) Una excesiva centralización en los conceptos numéricos, con el consiguiente descuido de los conceptos cuantitativos y métricos. Así, en una parte de los trabajos revisados, se aprecia que los conceptos cuantitativos se suponen adquiridos y que no plantean excesivos problemas, al ser naturales y de fácil dominio por parte de los sujetos.

b) Una cierta confusión entre el concepto de número natural y el concepto de cantidad discreta, de acuerdo con la creencia mantenida durante siglos de que los números representan cantidades y de que éstas pueden ser sustituidas por aquéllos; lo que se refleja en la utilización exclusiva del término "recuento" para el caso de "medidas" de cantidades discretas, cuando se trata de una acción que también aparece como elemento fundamental en los procesos elementales de medida de cantidades continuas, y en la utilización exclusiva del término "medida" para el caso de las cantidades continuas, sin que exista una razón especial para suprimir su utilización en el caso de las cantidades discretas (medidas exactas en las que las unidades son a la vez distinguibles y equivalentes entre sí).

c) También detectamos una ausencia importante de trabajos sistemáticos sobre la comparación aditiva, que suele ser abordada parcialmente y de manera secundaria en la mayor parte de los trabajos, lo que se manifiesta también en una escasa consideración hacia las estructuras ordinales y topológicas de los conceptos implicados.

4.5.1. *La noción de número natural*

En relación con el dominio de aplicación concreta de los aspectos aditivos de los números naturales, tienen interés particular para nuestra investigación los siguientes temas:

— El desarrollo del concepto de número natural.

— Las estructuras lógicas elementales y otros aspectos prenuméricos.

— El recuento y la acción de contar.

— Aspectos cardinal y ordinal del número natural.

— Aspectos básicos de la comprensión de los significados de las operaciones aritméticas con números naturales; los inicios de la operatividad de los números: la comparación cuantitativa, métrica y numérica.

4.5.1.1. *Publicaciones consultadas*

Las investigaciones sobre el desarrollo cognitivo de los aspectos elementales de las primeras nociones numéricas han sido y siguen siendo hoy día tan numerosas y detalladas que sería pretencioso querer citar aquí todos los trabajos que hemos consultado. Ha sido necesario establecer criterios para determinar niveles de concreción crecientes, de los que prestaremos atención al nivel sobre el que se ha realizado una revisión detenida en relación con el problema de investigación. Se expone a continuación una breve referencia de algunas de las publicaciones generales consultadas para tratar posteriormente los trabajos de mayor interés.

4.5.1.1.A. *Antecedentes generales*

Algunas publicaciones consultadas que contienen antecedentes generales relativos al campo de los números naturales y que están relacionadas con el tema objeto de estudio son las siguientes:

— Clásicos como: McLellan y Dewey (1985); Thorndike, L. (1924); Piaget, J. y colaboradores (1975, 1976, 1978, 1982).

— Más recientes como: Shumway, R. (1980); Resnick, L. (1981); Davis, R. B. (1984); Ginsburg, H. edit. (1983); Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. edit. (1982); Dickson, L. y otros (1984); Hiebert, J.; Behr, M. (1988).

4.5.1.1.B. *Antecedentes específicos revisados*

La selección y revisión de documentación realizada respecto de los cinco temas mencionados al comienzo del apartado 4.5.1 tiene un nuevo nivel de concrección, ya que nos limitamos a comentar aquéllos trabajos en los que uno de los siguientes criterios se pone de manifiesto:

1.—Necesidad de diferenciar claramente entre cantidad y número, concediendo a los aspectos cuantitativos la atención que merecen al margen de los aspectos propiamente numéricos, como así se deduce de los comportamientos observables de los individuos sometidos a estudio[7].

[7] En la mayoría de los trabajos se plantea esta diferencia en términos de "problemas concretos" y "problemas abstractos", a los que los sujetos responden de manera diferente, siendo, en general, más fáciles los primeros que los segundos.

2.—Reconocimiento de que el dominio de la composición aditiva de cantidades discretas, que abarca tanto las transformaciones como las comparaciones y combinaciones cuantitativas, es previo y necesario para el dominio de la composición aditiva de números naturales.

3.—Reconocimiento de que los aspectos elementales de la medida discreta tienen también su origen en las primeras acciones con cantidades, pero no se consolidan hasta tanto se alcance el dominio de los conocimientos numéricos correspondientes.

Las referencias revisadas con las condiciones anteriores son las siguientes:

AVESAR, CH.; DICKERSON, J. *Children's judgments of Relative Number by one-to-one correspondence: A planning perspective.*

BAROODY, A. J. *Children's difficulties in subtraction.*

BRYAND, P. E. *Perception and Understanding in young children.*

CARPENTER, T. P.; MOSER, J. M. *The adquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three.*

COMITI, C.; BESSOT, A. *A study of children's strategies for the comparison of numerals.*

DICKSON, L. y otros. *El aprendizaje de las Matemáticas.*

FUSON, K. *More complexities in subtraction.*

MURRAY, P. Y MAYER, R. *Preeschool children's judgments of number magnitude.*

PIAGET, J. *Génesis del número en el niño.*

SCHAEFFER, B., EGGLESTON, V. H. Y SCOTT, J. L. *Number development in young children.*

SIEGLER, R. S. Y ROBINSON, M. *The development of numerical understanding.* En REESE, H. V.; LIPSOTT, L. P. (eds.): *Advanced in child development and behaviour.*

STEINBERG, R. M. *Instruction on derived facts strategies in addition and subtraction.*

ZACHARÍAS, J. R. *The importance of quantitative thinking: A matter of Math.*

En relación con estos trabajos así como con otros consultados, a los que haremos referencia, incluimos a continuación unos breves comentarios sobre la revisión realizada.

4.5.1.2. *Conclusiones*

En relación con los trabajos de Piaget y colaboradores, en torno a los aspectos *cardinal y ordinal, conservación* de la cantidad, *estructuras lógicas elementales* (clasificación, seriación y correspondencias) y los procesos de construcción de los conceptos correspondientes, destacamos la coherencia entre el número como síntesis de procesos lógicos en los que intervienen las estructuras lógicas elementales y los planteamientos que adoptamos en otro nivel sobre la teoría de las formas conceptuales científicas (Stegmüller, W., 1979), según la cual, los conceptos métricos se fundamentan en conceptos clasificatorios y comparativos o topológicos, en los que, a su vez, juegan un papel fundamental las estructuras ordinales.

Igualmente, en relación con los aspectos cardinal y ordinal del número natural, los trabajos de Schaeffer (citados en Dickson, L. y otros (1991)), ponen de manifiesto que la faceta ordinal del número es captada por los niños con anterioridad a la cardinal y a la aparición de las necesarias relaciones entre ambos aspectos.

Por otra parte, en lo que respecta a la *comparación cuantitativa*, que en nuestra opinión se confunde en alguno de los trabajos con la *comparación numérica*, Murray, P. y Mayer, R. (1988), continuando los trabajos desarrollados por Siegler, R. S. y Robinson, M. (1982) y anteriormente por Schaeffer, B., Eggleston, V. H. y Scott, J. L. (1974), han puesto de manifiesto que, previo al dominio de la acción de contar, los niños pequeños son capaces de comparar y ordenar entre sí números de una cifra, emitiendo juicios sobre el tamaño de los mismos. Igualmente, en las etapas previas al recuento, son capaces de "*. . distinguir cuál de dos conjuntos es mayor o menor cuando al menos uno de los números es menor que cinco, a pesar de que no necesariamente comprenden las palabras mayor y menor.*" (Dickson, L. y otros, 1991, p. 185).

Del mismo modo, Avesar, Ch.; Dickerson, J. (1987), en relación con la comparación cuantitativa de colecciones sencillas[8], han encontrado que la mayoría de los niños de 4 años de edad de la muestra investigada utilizan estrategias de comparación en las que interviene la correspondencia "uno a uno" para juzgar el "tamaño relativo" de dos colecciones; resultado que concuerda con los que se han comentado anteriormente y que vienen a confirmar, en parte, algunas de las suposiciones que utilizamos en la investigación y que son:

— la comparación cuantitativa constituye un elemento básico para la adquisición de los conceptos numéricos, siendo previa en el desarrollo cognitivo al dominio del recuento y necesaria para establecer con seguridad la equivalencia de cardinales en cualquier situación así como para poder efectuar comparaciones numéricas y métricas.

[8] Los autores utilizan la terminología "*juicios de los niños sobre el número relativo*", que puede inducir a confusión en el sentido que venimos manteniendo.

— los niños utilizan antes "códigos relativos" (relacionados con la comparación y el orden en contextos cuantitativos) que "códigos absolutos" (cardinación; tamaño absoluto de una colección; medida de una cantidad), lo que fue establecido con anterioridad por Bryand (1974).

Las afirmaciones anteriores se encuentran también avaladas por Zacharías, J. R. (1976), que plantea la importancia del pensamiento cuantitativo y la necesidad de analizar en profundidad la dicotomía entre los "números abstractos" y los "números concretos", estableciendo claramente y en primer lugar sus características diferenciadoras, para proceder, a continuación, a la construcción de los "puentes" necesarios para la integración de la aritmética "con sentido" y la aritmética "abstracta" en un todo coherente dentro del proceso educativo.

Por el contrario, un terreno en el que, a diferencia de los anteriores, se puede hablar con una mayor seguridad de aprendizaje y desarrollo cognitivo de aspectos propiamente numéricos, es el que se refiere a la representación y el significado de los números, a la comparación de numerales así como al valor relativo de los números y al orden entre ellos. Así, Comiti, C.; Bessot, A. (1987) realizan un estudio acerca de las estrategias que utilizan los niños cuando tienen que comparar numerales y poner en funcionamiento el sistema de numeración decimal.

Por otro lado, la mayor parte de los trabajos de investigación sobre la comprensión y el dominio de la *adición* y la *sustracción* se han realizado en el contexto de la resolución de problemas, tal y como se expone en el apartado siguiente. También se han llevado a cabo, hasta la fecha, una serie de trabajos, secundarios para nuestros propósitos, en torno a la adquisición de los conceptos de adición y de sustracción mediante la utilización exclusiva de lo que se conoce como "problemas de enunciado simbólico". Tales son, entre otros, los estudios de Baroody, A. J. (1984), Fuson, K. (1984), Carpenter, T. P.; Moser, J. M. (1984) o Steinberg, R. M. (1985), en los que se establece la dificultad superior de este tipo de problemas abstractos con respecto a los concretos, la mayor dificultad de la sustracción con respecto a la adición y las diferentes estrategias de recuento y de utilización de hechos numéricos conocidos.

En lo que respecta a los aspectos básicos de las *operaciones aritméticas* aditivas con números naturales encontramos, igualmente, una serie de trabajos que ponen de manifiesto que las primeras nociones intuitivas relacionadas con la suma y la resta aparecen en edades tempranas (3-4 años) bajo la forma de *transformaciones cuantitativas* elementales, si bien se reconoce que las operaciones aditivas con números no son dominadas antes de los siete años. Igualmente, se ha encontrado que la comprensión de los significados de las operaciones aditivas se ve favorecida por la combinación, partición en sentido sustractivo y comparación de objetos, colecciones y longitudes continuas. De nuevo nos encontramos aquí con una cierta confusión procedente del hecho de que la *composición aditiva de cantidades discretas* recibe una escasa atención, al ser considerada secundaria y fuertemente supeditada a las *operaciones aritméticas con números naturales*.

Los aspectos tratados se encuentran directamente relacionados con la medida de cantidades y con la resolución de problemas aditivos con números y "medidas naturales"[9]. Hemos observado una cierta confusión entre conceptos cuantitativos y numéricos, que se agudiza cuando además intervienen los conceptos métricos, como veremos en los apartados siguientes.

4.5.2. **Aprendizaje de las nociones de medida**

4.5.2.1. *Bibliografía consultada*

Los estudios sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de las nociones métricas, además de ser escasos y estar circunscritos casi exclusivamente al ámbito de las magnitudes continuas, se encuentran normalmente supeditados a los contenidos matemáticos más cercanos.

De los antecedentes más relevantes sobre las primeras experiencias con la medida y sobre los aspectos cognitivos elementales de la iniciación a la medida, podemos citar los trabajos de Piaget, J.; Inhelder, B. y Szeminska, A. (1960) sobre el desarrollo de la comprensión del proceso de medida en el niño. En ellos se establece que la *conservación* de la cantidad y la *transitividad* son elementos fundamentales para la construcción del concepto de medida y comunes a toda medición operativa. La idea básica que subyace en este planteamiento es que las nociones elementales de la medida se fundamentan en las nociones numéricas.

Por el contrario, en Dickson, L. y otros (1990) se citan los trabajos soviéticos de investigación sobre el desarrollo de los conceptos métricos (pág. 105), que, a diferencia de los anteriores, conceden una importancia especial a los aspectos propios del proceso de medida, como son: la estimación y aproximación, la comparación cuantitativa, la unidad de medida y el proceso de iteración de la misma en la actividad de medir. En este mismo sentido son de destacar, por último, las aportaciones de Chamorro, C. y Belmonte, J. (1990) y Segovia, I. y otros (1989), como obras divulgativas que incluyen sugerencias útiles para nuevas investigaciones.

[9] Utilizamos esta terminología para simplificar lo que entendemos por medidas de cantidades discretas o discretizadas.

Las obras mencionadas son:

CHAMORRO, C. Y BELMONTE, J. *El problema de la medida.*
DICKSON, L. y otros. *El aprendizaje de las Matemáticas.*
PIAGET, J.; INHELDER, B. Y SZEMINSKA, A. *The child's conception of Geometry.*
SEGOVIA, I. y otros. *Estimación en cálculo y en medida..*

4.5.2.2. *Conclusiones*

Destacamos las siguientes consideraciones:

a) La medida, a pesar de ser elemento central en la casi totalidad de los problemas aritméticos escolares, ha recibido muy poca atención en la investigación educativa, en comparación con la que se ha dedicado a otros aspectos del número y las operaciones aritméticas.

b) Es necesario construir un modelo o soporte teórico que sustente las diferentes interpretaciones sobre el desarrollo cognitivo de los conceptos cuantitativos, numéricos y métricos. En nuestra opinión, sobre la base de los estudios epistemológicos realizados, dichos planteamientos teóricos deberían tener en cuenta:

— el papel fundamental de las nociones cuantitativas como soporte de las nociones numéricas y métricas;

— las relaciones que se establecen en el desarrollo cognitivo entre las nociones cuantitativas y las nociones numéricas y métricas así como entre los propios conceptos numéricos y métricos entre sí;

— la intervención tanto de las cantidades discretas como continuas, atendiendo a las diferencias entre ellas;

— el carácter general que tiene la medida como síntesis entre el número y la cantidad así como las diferencias que de ello se deducen entre los conceptos correspondientes.

4.5.3. ***Resolución de problemas aritméticos aditivos y cognición***

4.5.3.1. *Consideraciones generales*

Los trabajos englobados bajo el epígrafe "resolución de problemas" tienen ya una sólida tradición en la investigación en Educación Matemática, con su máximo exponente en las obras clásicas y conocidas de Polya, G. (1954, 1957, 1966) y cuyas principales aportaciones se encuentran relacionadas y comentadas en textos recientes como: Puig, L.; Cerdán, F. (1988); Rico, L. y otros (1988), Castro, E. (1991) así como en algunos de los textos citados en apartados anteriores.

El término "problema de matemáticas", en el ámbito de la línea de investigación que estamos tratando, se refiere normalmente a *problemas escolares de* *enunciado verbal*, en los que hay que utilizar explícita y básicamente conocimientos matemáticos para su resolución. Igualmente, se suelen considerar los problemas matemáticos escolares de enunciado verbal que se refieren a *situaciones de aplicación concreta del conocimiento matemático en contextos diversos*. En este sentido, y a pesar de que algunos autores (Schoenfeld, A. H., 1985) engloban también bajo esta denominación a los problemas manipulativos, pasatiempos matemáticos y problemas puramente formales, lo cierto es que el campo de los problemas aritméticos aditivos constituye hoy día un dominio de investigación con entidad propia, como se pone de manifiesto en múltiples publicaciones (Fuson, K., 1992). Recientemente Castro, E. (1992) ha realizado una revisión y categorización de este campo poniendo de manifiesto los cuatro enfoques de investigación existentes, que tienen su base en un planteamiento cognitivo.

En el trabajo que presentamos utilizaremos un significado más amplio del término "problema" en el sentido de "tarea cognitiva compleja"[10], en la que intervienen conocimientos matemáticos elementales incluidos en el currículum escolar y conocimientos lógico-matemáticos (relaciones, estructuras lógicas, etc.) en la línea propuesta por Vergnaud, G.; Durand, C. (1983, p. 125). Con este criterio, además de los problemas aritméticos escolares clásicos de enunciado verbal, incluimos los problemas "cotidianos" (que aparecen fuera del ámbito educativo formal) y los que no aparecen expresados explícitamente mediante un enunciado verbal, sino que surgen en el propio desarrollo de tareas que requieren de respuestas elaboradas y no inmediatas y que tienen que ver con manipulaciones físicas o representaciones de colecciones, objetos y cantidades.

4.5.3.2. *Documentación consultada*

BELL, A. W. *Developmental studies in the additive composition of numbers.*

BRUN, J. *La resolution de problémes arithmetiques: bilan et perspectives.*

CARPENTER, T. P. *Learning to add and subtract: an exercise in problem solving.*

CARPENTER, T. P., MOSER, J. M. *The development of addition and subtraction problem solving skills.*

— *The adquisition of addition and subtraction concepts.*

— *The adquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three.*

[10] Que atiende fundamentalmente al carácter cognitivo de las tareas implicadas y que a veces sustituiremos por el término "situación" o "situación-problema" con los mismos significados.

CARPENTER, T. P., MOSER, J. M., BEBOUT, H. C. *Representation of addition and subtraction word problems.*

CONNE, F. *Calculs numeriques et calculs relationnels dans la resolution de problemes d'arithmetique.*

DE CORTE, E., VERSCHAFFEL, L. *The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems.*

HELLER, J. I., GREENO, J. G. *Semantic processing of arithmetic word problems.*

LEAN, G. A., CLEMENTS, M. A., DEL CAMPO, G. *Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: a comparative study.*

NESHER, P. *Levels of description in the analysis of addition and subtraction word problems.*

PUIG, L., CERDÁN, F. *Problemas aritméticos escolares.*

RILEY, M. S., GREENO, J. G., HELLER, J. I. *Development of children's problem-solving ability in arithmetic.*

VERGNAUD, G. *A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems.* En CARPENTER, MOSER, ROMBERG (eds.). *Addition and subtraction: a cognitive* perspective.

— *L'enfant, la Mathématique et la réalité.*

VERGNAUD, G.; DURAND, C. *Structures additives et complexité psychogénetique.*

4.5.3.3. *Conclusiones*

Comentamos a continuación aquéllas cuestiones que han resultado más relevantes, estructuradas en los dos enfoques teóricos básicos que hemos encontrado: las consideraciones de Vergnaud, G. sobre estados, transformaciones y campos conceptuales y los trabajos relacionados con las teorías cognitivas del procesamiento de la información y con la estructura semántica de los enunciados de los problemas.

4.5.3.3.A. *La resolución de problemas en el campo conceptual aditivo*

Los trabajos de Vergnaud, G.; Durand, C. (1976)[11] y de Vergnaud, G. (1981[12] y 1982[13]), continuados posteriormente por Conne, F. (1985), encuadran una parte

[11] *Structures additives et complexité psychogénétique. Revue Francaise de Pedagogie*, núm. 36, pp. 28-43. Hay traducción al castellano en Coll, C. (1983). En las referencias que siguen utilizaremos la versión castellana de este trabajo.

[12] *L'enfant, la mathématique et la réalité.* Peter Lang. París.

[13] En Carpenter, T. P.; Moser, J. M. y Romberg, T. (eds.) (obra citada).

del aprendizaje y el desarrollo cognitivo de los números naturales y los números enteros en el ámbito de la resolución de problemas de aritmética elemental, dentro de lo que se conoce como 'campo conceptual aditivo'.

A través de los conceptos de relación y transformación y teniendo en cuenta la dualidad 'estado-transformación', se analizan los tipos de problemas aditivos y se obtienen evidencias empíricas sobre la diversidad y la amplitud de respuestas de los estudiantes, sobre las dificultades que tienen y los errores que cometen.

Aunque los estudios no son exhaustivos y, como veremos, resultan incompletos, pretenden aportar *"un marco teórico suficientemente riguroso para que el estudio de la resolución de problemas aritméticos salga del empirismo que lo suele caracterizar"* (Vergnaud, G., Durand, C., p. 128). Las cuatro ideas básicas que utilizan son: la inadecuación de la noción de ley de composición interna para caracterizar las relaciones numéricas que aparecen en este tipo de tareas; la necesidad de considerar un campo más amplio para el estudio de las relaciones aditivas; la existencia de dos tipos diferentes de representaciones numéricas bajo la denominación de "estados y operadores"; y la existencia de cinco grandes categorías de relaciones numéricas aditivas: composición de dos medidas, transformación de una medida en otra, composición de transformaciones de medidas, transformación de un estado relativo y composición de dos estados relativos. Cada una de estas categorías puede dar lugar a problemas diferentes, en función de cuáles sean los datos conocidos y los que se han de calcular.

Por otra parte, se utiliza la distinción entre cálculo numérico y cálculo relacional subyacentes en todas las tareas. Ambos tipos de cálculos son diferentes y responden a características también diferentes que dan lugar a una amplia gama de posibilidades.

A partir de las consideraciones anteriores, los autores citados realizan diversos estudios experimentales sobre problemas de transformación simple y de composición de transformaciones que proporcionan resultados dispares y difícilmente justificables desde el marco teórico que se propone[14]. Dichos resultados, de los que se concluye que *"la aritmética elemental aditiva no forma un bloque homogéneo, sino que se compone de relaciones heterogéneas que son tratadas de distinta forma por los niños (..) e incluso por los adultos"* (Vergnaud, G., Durand, C. (obra citada); pp. 124-125), ponen de manifiesto la complejidad de las relaciones que intervienen y la posibilidad de que la categorización establecida no sea la más idónea; la divi-

[14] Se han encontrado diferencias de varios años en la resolución de problemas aparentemente similares desde el punto de vista teórico.

sión entre estados y transformaciones debe ser revisada desde diferentes puntos de vista y, en particular, desde el enfoque epistemológico.

Los siguientes hechos y conclusiones avalan la necesidad de un replanteamiento teórico:

— Con respecto a los modelos de representación, Conne, F. (obra citada) menciona explícitamente la distorsión que se produce en el orden entre dos pérdidas[15] con respecto al orden de los números enteros tomado como modelo para las transformaciones (pág. 284).

— La consideración de las transformaciones en un sentido como positivas y en el sentido contrario como negativas no obedece a un criterio uniforme, lo que deja abierta la posibilidad a múltiples confusiones y resultados dispares. Nuestra posición es que dicha asignación es arbitraria (subir-bajar, entrar-salir, etc.), a diferencia de lo que ocurre en los casos de aplicación específica de los números enteros (temperaturas, saldos bancarios, etc.), en los que tal asignación está perfectamente delimitada como consecuencia de la estructura de orden total.

— En el dominio de los problemas concretos, en el que se desarrollan estos trabajos, la propia distinción entre estados y transformaciones o entre número como estado y número como operador parece que se refiere a dos manifestaciones o papeles diferentes del mismo concepto. Nuestra posición es que existen diferencias más profundas de carácter epistemológico entre dichas acepciones, que aconsejan la conveniencia de un análisis más fino en el que se baraje la existencia de conceptos diferentes que den lugar a estructuras numéricas también diferentes.

— La distinción entre cálculo numérico y cálculo relacional, sometidos a reglas distintas según los casos, pone de manifiesto la posibilidad de que se estén mezclando conceptos numéricos de diferente naturaleza, en vista de que *"sobre la misma operación aritmética se proyectan cálculos relacionales distintos* que están muy lejos de ser equivalentes entre sí." [Vergnaud, G.; Durand, C., (obra citada), pág. 125].

— La necesidad de utilizar tres signos de adición para representar cálculos numéricos de diferente naturaleza (Vergnaud, G., 1981, pág. 134) plantea serios problemas de legitimidad en la aplicación del conocimiento matemático formal y, por tanto, de compatibilidad entre los conocimientos matemáticos elementales y la aplicación de los mismos en contextos diversos. Se producen desajustes im-

[15] En un juego, una pérdida de 7 es una pérdida "mayor" que una pérdida de 5, lo que supone una inversión con respecto al orden de los números enteros.

portantes entre las definiciones de las operaciones aritméticas usuales, como leyes de composición interna, y las aplicaciones concretas, que funcionan en realidad como leyes de composición externa. Así lo ponen de manifiesto cuando afirman: *"El estudio de los problemas de aritmética elemental pone en evidencia otras muchas dificultades que manifiestan la insuficiencia, si no inadecuación, de la noción de ley interna para caracterizar ciertas relaciones numéricas."* (Vergnaud, G., Durand, C. (obra citada), pág. 106).

De todo ello, resulta dudoso que el grupo aditivo y ordenado de los números enteros (o en terminología francesa, de los números "relativos") sea, por un lado, un buen modelo para abarcar toda la aritmética de "transformaciones" y, a la vez, un modelo único bajo el que se puedan tratar todas las situaciones-problema que se consideran en los estudios.

4.5.3.3.B. *La influencia del contexto en la resolución de problemas aditivos*

Bell, A. W. (1980) expone los resultados de una investigación realizada para poner de manifiesto como influyen diferentes dominios de aplicación de la composición aditiva de números sobre la resolución de problemas aditivos. Se trata de una línea de trabajo que orienta su atención hacia los números enteros o "dirigidos", dentro de un modelo didáctico llamado "enseñanza por diagnóstico". Volveremos de nuevo sobre estos estudios en la revisión de antecedentes sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de los números enteros.

La investigación fue realizada mediante cuatro series de experimentos, para averiguar como resuelven los alumnos una serie de problemas en los que interviene la composición aditiva: desplazamientos sobre una escala lineal y sobre un reloj, expresiones numéricas que se refieren a cambios positivos y negativos, niveles de dificultad relacionados con el contexto y el modo de presentación de los datos y, por último, composición de movimientos de dos figuras regulares. De sus planteamientos y conclusiones, interesan los siguientes:

— Al comienzo del aprendizaje de los números, los niños tienen una visión muy limitada de sus aplicaciones (pág. 114).

— En las primeras etapas, la interpretación de las operaciones de adición y sustracción no incluye la verdadera composición aditiva. Los niños no ven las operaciones como leyes de composición binarias, sino que distinguen entre ambos elementos, siendo uno de ellos el operador aditivo (estrategia conocida como "count on") (págs. 114 y 120).

— Aunque el trabajo con números dirigidos proporciona experiencias sobre el modo de combinación de tales números, se observa sorprendentemente que *no son integrados en un sistema numérico* (pág. 121), lo que reafirma la hipótesis de

que dominar los números naturales relativos no supone la realización correcta de tareas equivalentes con números enteros.

Bell sugiere que el estudio de estos problemas *puede necesitar de un simbolismo particular diferente de las notaciones matemáticas stándards* (pág. 141).

4.5.3.3.C. *La estructura semántica de los problemas aditivos de enunciado verbal*

Algunos de los planteamientos básicos que nos interesan son los siguientes:

a) Se estudian problemas aritméticos de una sola operación, denominados "problemas de una etapa"; se consideran diferentes componentes de análisis con sus variables correspondientes, entre los que destacan: la estructura lógica de los problemas, la componente semántica y la componente sintáctica (Nesher, P., 1982, pág. 28).

b) Existen varias categorías de problemas "de una etapa" (Puig, L., Cerdán, F., 1988), que varían según los autores y que se deducen del análisis global del significado del texto. Inicialmente, Heller, J. I.; Greeno, J. G. (1978) establecieron tres categorías semánticas: Cambio, Combinación y Comparación. Posteriormente, dicha clasificación fue ampliada para incluir los problemas de Igualación (Carpenter, T. P., Moser, J. M., 1983).

c) Las estrategias de los niños para resolver los diferentes problemas de adición y sustracción están fuertemente influenciadas por la estructura del problema, conclusión que es compartida por las investigaciones de Vergnaud, G. y Bell, A.

d) En cuanto a la dificultad de resolución se han encontrado los siguientes resultados generales: la adición es más fácil que la sustracción; el orden de dificultad es: cambio, combinación y comparación, aunque los dos primeros se invierten en el caso de la sustracción.

Del análisis de estas investigaciones, a la luz de las consideraciones epistemológicas del capítulo 3, enunciamos las siguientes conjeturas:

1.—Las categorías de Cambio, Combinación y Comparación son pertinentes y suficientes para la clasificación de los problemas. Tanto la estructura semántica como la de relaciones, en forma de leyes de composición externa o interna, o la estructura lógica (Puig, L., Cerdán, F., 1988, pág. 96) quedan igualmente justificadas mediante las categorías mencionadas.

2.—Es posible completar el cálculo relacional de Vergnaud haciendo intervenir un tercer modelo numérico (el de los números "naturales relativos") que permite enlazar dichos aspectos.

3.—La cuarta categoría introducida por Carpenter, T. P., Moser, J. M. (1983), denominada de Igualación, resulta ser diferente a las otras tres, por tener una estructura lógico-semántica distinta y más compleja que la que poseen las anteriores.

4.—Es necesario distinguir entre "problemas simples" y "problemas compuestos", que no coincide en general con la división usual en problemas de una etapa y de más de una etapa. Las tres categorías del apartado 1 pertenecen al grupo de problemas simples, mientras que los problemas de igualación pertenecerían al grupo de problemas compuestos. Igualmente, algunos de los tipos de problemas establecidos por Vergnaud, como por ejemplo la composición de transformaciones, pertenecen a esta segunda clase, a diferencia del resto que son simples.

4.5.3.3.D. *Teorías psicolingüísticas y pares de términos comparativos polarizados*

Lean, G. A., Clements, M. A., Del Campo, G. (1990) realizan un estudio en el que, además de comprobar que el principal factor determinante de la dificultad de los problemas es su estructura semántica, concluyen que los datos obtenidos están de acuerdo con las teorías psicolingüísticas sobre la adquisición de los pares de términos polarizados (como por ejemplo: "más" y "menos"). Algunos resultados de estas investigaciones son los siguientes (pág. 168):

— Los términos "positivos" son comprendidos antes que los términos "negativos".

— Los pares de términos multidimensionales, como "grande-pequeño", son aprendidos antes que los unidimensionales (largo-corto, alto-bajo, etc.).

— Los niños sustituyen términos desconocidos por otros del mismo campo semántico.

Los autores añaden las siguientes consideraciones:

— La percepción ligada a la situación de los objetos y colecciones a comparar, influye sobre los significados de los términos comparativos (pág. 169).

— La interpretación de los significados de los enunciados de los problemas, desde el punto de vista lingüístico, es extraordinariamente complicada para los niños (pág. 170).

— Los niños no obtienen las respuestas correctas a los problemas de comparación directa mediante la aplicación de procedimientos de adición o sustracción (pág. 185).

— Los procesos de representar un problema y de obtener su solución son separables, ya que la representación cognitiva de los problemas es una función de muchas variables que no necesariamente intervienen en el proceso de resolución (pág. 186).

Por otra parte, los autores señalan que *las principales dificultades de los niños para resolver problemas aritméticos de enunciado verbal se encuentran en el dominio lingüístico: "Creemos que nuestra investigación demuestra que muchos alumnos de la escuela elemental, no están preparados lingüísticamente para los problemas semánticamente complejos de Cambio y de Comparación."* (pág. 186).

Igualmente constatan que las cuestiones de comparación son especialmente difíciles, debido a la falta de conexión existente entre el lenguaje comparativo y sus significados usuales en las situaciones reales, el lenguaje formal y los símbolos escritos (pág. 188). Este lenguaje comparativo es la base de muchos temas de la escuela primaria y es importante, por ejemplo, en las actividades de medida.

Las consideraciones anteriores han servido para elaborar las siguientes conjeturas:

a) Existen grandes diferencias, en cuanto al dominio o nivel de dificultad, entre las situaciones de comparación, cambio y combinación en las que sólo intervienen cantidades y los problemas escolares convencionales en los que aparecen números o medidas. Las primeras son sencillas y se dominan en edades tempranas, mientras que los segundos resultan complicados por las dificultades lingüísticas de los enunciados y por la intervención de los números.

b) En la práctica escolar usual se presta especial atención a los aspectos numéricos y a las relaciones entre el número y la medida, con descuido de las relaciones entre la cantidad y el número. Una mayor dedicación al recuento, al aspecto cardinal del número y a la noción intuitiva de suma en el sentido de combinación de números o medidas, en detrimento de la comparación de cantidades, números y medidas, del aspecto ordinal del número y de la suma y la resta como transformaciones, son factores que condicionan los resultados obtenidos en las investigaciones revisadas. Por decirlo de otro modo, pudiera ocurrir que las dificultades encontradas en la resolución de problemas sean debidas, en gran parte, a un proceso didáctico que condiciona las respuestas en el sentido indicado.

c) El dominio del lenguaje comparativo requiere de experiencias concretas con cantidades y medidas. De esta forma, si el número se enseña al margen de dichas experiencias, es probable que se produzca una dicotomía entre lo concreto y lo abstracto que haga más difícil establecer los puentes necesarios entre las diferentes estructuras para que se produzca una comprensión gradual y completa de los conceptos y procedimientos que intervienen.

4.5.3.3.E. *Un balance sobre la resolución de problemas de adición y sustracción*

Brun, J. (1989) expone un balance de las principales investigaciones con una visión más amplia de la resolución de problemas que la que proporciona la mera perspectiva psicológica; sitúa el centro de interés en las actividades que los alum-

nos realizan en el aula, fijando la atención en tres puntos: la estructura de los pro-
blemas, las variables de enunciado y las representaciones simbólicas. Analiza las
investigaciones expuestas en los apartados anteriores, comparando sus plantea-
mientos teóricos y resultados, llegando a las siguientes conclusiones.

—La construcción por el alumno de la representación de un problema repo-
sa sobre sus conocimientos lógico-matemáticos, sobre el cálculo relacional entre
los objetos matemáticos identificados y sobre los procedimientos adecuados para
abordar dichas relaciones (pág. 13).

—La variedad de procedimientos y representaciones simbólicas en el trans-
curso de las resoluciones requiere de movilidad por parte del alumno. Esta movi-
lidad es, a la vez, un criterio para saber lo que es en realidad un problema para el
alumno y un motor que le permite trabajar sobre la representación del problema
(pág. 14).

—La resolución de problemas se debe inscribir en el conjunto de fenóme-
nos que ocurren en el aula y no ser considerada, únicamente, como una tarea de
aprendizaje aislado (pág. 14).

4.6. Aprendizaje y desarrollo cognitivo de los números enteros

Los estudios sobre los números enteros, además de ser escasos, se encuen-
tran a menudo formando parte de trabajos más amplios en los que el interés se
dirige hacia otros problemas de investigación. Las pocas publicaciones específi-
cas que hemos encontrado sobre aprendizaje y desarrollo cognitivo de números
enteros se refieren, en su mayoría, a los aspectos formales, simbólicos o de sin-
táxis de las operaciones aritméticas (González, J. L. y otros, 1990).

Por otra parte, dichos trabajos utilizan distintas terminologías para los números
enteros; las más usuales son: "números dirigidos" y "números relativos", que a veces
aparecen combinadas con los términos: número negativo / número positivo y número
entero. Todas ellas se refieren, bien a las aplicaciones concretas, bien al funciona-
miento operativo del concepto matemático formal. Precisamente, el uso de términos
diferentes parece responder al deseo, constatado históricamente y a veces manifesta-
do explícitamente, de completar el campo numérico con nuevos elementos que den
respuesta satisfactoria a los desajustes que aparecen en las investigaciones.

4.6.1. *Bibliografía consultada*

AZE, I. *Negatives ¿Are they for little one's?*
BELL, A. *Developmental studies in the additive composition of numbers.*
— *Directed numbers and the bottom up curriculum.*

BELL, A. *Looking at children and directed numbers.*
— *Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros.*
CID, E. *Estudio de las dificultades de los alumnos en el cálculo de expresiones numéricas.*
COQUIN-VIENNOT, D. *Complexité Mathématique et ordre d'acquisition: Une hierarchie de conceptions a propos des relatifs.*
HART, K. *Positive and negative numbers.*
SHIU, C. M. *Directed numbers 1, 2, 3.*
VAN DEN BRINK. *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen.*
VERGNAUD, G. *Epistemología y Psicología de la Educación Matemática.*

4.6.2. *Conclusiones*

Siguiendo el mismo esquema utilizado en el apartado 4.5, presentamos a continuación las principales conclusiones obtenidas de la revisión realizada.

4.6.2.1. *Experiencias e investigaciones de carácter general*

En lo relativo al *desarrollo cognitivo, pensamiento numérico y aprendizaje de los números enteros* existen pocos antecedentes específicos [16]:

Aze, I. (1989) y Van den Brink (1990) exponen distintas experiencias de aula en las que se constata que niños pequeños entre 5 y 8 años de edad son capaces de manipular y simbolizar "números con signo" (lo que nosotros denominamos "números naturales relativos") en el contexto de problemas elementales con "cantidades dirigidas" y sobre la recta numérica.

Coquin-Viennot, D. (1985) realiza una investigación detallada sobre el concepto de "número relativo" en la que, a partir de la resolución de una serie de ejercicios y problemas elementales, establece una jerarquía de cuatro niveles de concepciones: nivel I. los relativos son tratados como naturales; nivel II. se separan los positivos y los negativos sin ningún tipo de unificación; nivel III. el conjunto de los relativos se trata formalmente y como un todo, apareciendo la relación de orden; se resuelven los problemas aditivos con soluciones en Z; nivel IV. la adición en Z se utiliza correctamente para resolver problemas que no tienen solución en N y la multiplicación se utiliza correctamente.

[16] Nos estamos refiriendo a trabajos de carácter general orientados exclusivamente al tema que nos ocupa en este apartado.

4.6.2.2. *Los números dirigidos en el contexto de la enseñanza por diagnóstico*

Algunos de los trabajos desarrollados por Alan Bell y colaboradores (1979, 1980, 1982a, 1982b, 1986), en el Shell Centre for Mathematical Education de la Universidad de Nottingham, han centrado la atención sobre el aprendizaje y desarrollo cognitivo de los "números dirigidos" en el marco de lo que el propio Bell califica como "enseñanza por diagnóstico".

Los primeros trabajos relacionados con los números enteros fueron desarrollados por Shiu, C. M. (1979)[17] en torno a la enseñanza de la adición y sustracción con números dirigidos. Después de analizar las estrategias de los alumnos y el estado de sus conocimientos, se aborda el diseño de un proceso de enseñanza orientado a provocar el conflicto cognitivo.

Para evaluar la manera de proceder de los alumnos ante expresiones y símbolos aritméticos y algebraicos, se utiliza la entrevista basada en cuestiones relacionadas con la adición y sustracción de números dirigidos, la manipulación de expresiones (numéricas y algebraicas), la resolución de ecuaciones y las propiedades algebraicas de los números enteros.

Las principales conclusiones del estudio son las siguientes:

— Las cuestiones de sustracción son mucho más difíciles que las de adición.

— Los alumnos utilizan los significados comunes que poseen sobre la sustracción.

— La mayoría de los errores son de origen sistemático.

— Los signos de las operaciones dominan sobre los signos numéricos.

Como continuación de la investigación mencionada, Bell, A. (1982b) vuelve a exponer la necesidad de ayudar a los alumnos para que construyan un rico arsenal de significados para los números negativos y sus operaciones; consideraciones que serán tratadas con más detenimiento en el capítulo 5 con motivo de la enseñanza y otros aspectos curriculares.

En un estudio posterior, Bell, A. (1986) presenta los resultados de una investigación en la que se sigue el mismo procedimiento: averiguar primero las dificultades y los errores de los alumnos en la resolución de problemas sobre listas y escalas, dinero y temperaturas, para pasar a continuación a diseñar un proceso didáctico adecuado a partir de los resultados anteriores.

[17] Informe de investigación no publicado en poder del autor de la tesis.

4.6.2.3. *Los "números relativos" en el marco de la teoría de los campos conceptuales*

Además de los trabajos sobre resolución de problemas ya mencionados, Vergnaud, G. (1990) hace referencia, en el capítulo 1, a los aspectos cognitivos en torno a la estructura aditiva de los números enteros:

"*.. los niños tienen una triple experiencia de los números: como medidas (cardinales), como transformaciones y como relaciones de comparación. Si los cardinales abren la vía al concepto de número natural, las transformaciones y las comparaciones abren la vía al concepto de números con signo ..*" (pág. 24).

Dos teoremas - en - acción relacionados con los números con signo, son:

— "*.. un incremento de n queda cancelado por una disminución de n ..*". (pág. 25).

— En una transformación simple se "*.. puede hallar el estado inicial, conociendo el estado final y la transformación, invirtiendo la transformación y aplicando esta transformación inversa al estado final.*" (pág. 25).

Para terminar citaremos los siguientes párrafos que completan la visión del autor:

> "No hay muchos estudios sobre la adquisición de los números negativos; todos ellos revelan obstáculos de larga duración en los estudiantes de 15 y 16 años, especialmente cuando tienen que multiplicar un negativo por un negativo o cuando obtienen una solución negativa. Paradógicamente, como hemos visto antes, hay algunos aspectos de los números negativos que pueden ser fácilmente comprendidos por alumnos de la escuela primaria: una transformación negativa (disminución, pérdida, consumo, desplazamiento hacia atrás), una relación negativa (menos que, deuda) o incluso una abcisa negativa (por debajo del nivel de la planta baja).
>
> Esta paradoja puede resolverse en el nivel teórico, mediante la idea de que los números negativos consiguen su significado a partir de las diferentes clases de problemas que no pueden ser todos dominados en el mismo nivel. Las operaciones con números negativos tienen un diferente significado y un potencial diferente cuando representan una disminución de una cantidad, la cancelación o compensación de una transformación positiva, la inversión de una transformación o una relación, la resta de dos transformaciones o el cierre algebraico de un conjunto de números para la resta." (pág. 27).

Como pretendemos poner de manifiesto en la presente investigación, la situación paradógica que se comenta en los párrafos anteriores puede que no sea debida únicamente a los motivos teóricos que se aluden, existiendo además elementos diferenciadores que no han sido considerados en los trabajos revisados.

4.6.2.4. *Errores y dificultades con números enteros*

Además de las investigaciones citadas en el capítulo 1 de esta memoria, Cid, E. (1989) presenta un estudio exploratorio sobre las dificultades que muestran los sujetos ante la realización de 23 cuestiones de cálculo numérico, de entre las que se dedica una atención especial a los números enteros. El trabajo, centrado en aspectos meramente sintácticos, se enmarca dentro de una pretensión más amplia tendente a construir un modelo único para los números enteros.

Desde una óptica similar a la anterior, aunque esta vez con números enteros, Hart, K. (1981) [18] realiza un estudio sobre los errores que cometen los niños en la realización de operaciones aritméticas. A través de un cuestionario de 20 ítems de adición, sustracción y multiplicación se obtuvieron los siguientes resultados:

— Los ejercicios de cálculo aritmético simple a nivel puramente simbólico son bastante más difíciles y provocan más errores en el caso de la sustracción que en el caso de la adición y multiplicación, existiendo además pequeñas diferencias entre ellos.

— Con respecto a la *adición*, la mayoría de los alumnos utilizan con éxito el modelo de desplazamientos a lo largo de la recta numérica, existiendo poca diferencia entre los ítems de desplazamientos y los puramente numéricos. Los errores se producen por la utilización de la regla que parece consistir en *"ignorar el signo del primer entero y luego sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo"*. Los ítems con respuestas correctas negativas tienden a ser ligeramente más difíciles que los que tienen respuestas positivas.

— Con respecto a la *sustracción*, los sujetos ignoran el signo del primer entero, para después sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo. En los ejercicios en los que hay que restar un entero positivo la estrategia dominante parece ser: *"restar los numerales, seguido de intentos para determinar el signo de la respuesta"*. En los ejercicios en los que hay que restar un entero negativo se aplica mal la regla: *"dos menos hacen un más"*.

Algunas *conclusiones adicionales* incluidas en el trabajo, son:

— El nivel de dificultad de los ejercicios varía según la edad, siendo más difíciles para los sujetos de 15 años que para los de 14, lo que puede ser debido al olvido y a la inconsistencia de los significados de las reglas aprendidas a la edad de 13 años.

[18] Positive and negative numbers. Cap. 6, pp. 82-87. En: Hart, K.; Brown, M. L. y otros. *Children's understanding of Mathematics: 11-16*. John Murray.

— La mayoría de los alumnos de la escuela secundaria tienen una comprensión muy limitada de la sustracción y la multiplicación de enteros [19].

— Las diferencias entre la comprensión de la adición y la sustracción pueden ser debidas a los modelos comunes basados en la recta numérica. La adición tiene significados asociados a cambios o movimientos, mientras que en la sustracción se encuentran asociados a puntos; ambos significados no son mutuamente consistentes, lo que sugiere que la recta numérica debería ser abandonada y sustituida por un soporte *basado en la cancelación.* Esta solución, que es buena para la adición y sustracción, no lo es para la multiplicación, lo que resulta un inconveniente difícil de salvar.

4.7. Aprendizaje y desarrollo cognitivo en la iniciación al Álgebra

Los números enteros constituyen un contenido fundamental para la iniciación al Álgebra. La resolución de ecuaciones y las manipulaciones algebraicas requieren de un dominio previo de las operaciones con números enteros y de las propiedades algebraicas del anillo Z. Por este motivo, nos hemos interesado en aquellos trabajos que podían aportar alguna información al tema que nos ocupa, sin encontrar en ellos datos relevantes para modificar nuestras conjeturas y las conclusiones teóricas de la investigación. Por el contrario, hemos podido constatar la importancia de nuestras conclusiones para las investigaciones sobre pensamiento algebraico.

Por otra parte, la idea de que *".. el álgebra no es simplemente una generalización de la aritmética."* (Kieran, C.; Filloy, E., 1989) ha desviado el centro de interés de las investigaciones hacia los aspectos específicos del álgebra, en detrimento del estudio de las cuestiones que son comunes a ambos campos de la matemática elemental.

4.7.1. *Documentos revisados*

FILLOY, E., ROJANO, T. *Solving equations: the transition from Arithmetic to Algebra.*

GALLARDO, A., ROJANO, T. *Common difficulties in the learning of Algebra among children displaying low and medium pre-algebraic proficiency levels*

KIERAN, C.; FILLOY YAGÜE, E. *El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica.*

[19] Aunque para la multiplicación el nivel de éxito sea mayor debido a la utilización automática de las reglas conocidas.

4.7.2. *Principales conclusiones*

En los trabajos anteriores, que junto a los que se han expuesto en el capítulo anterior forman parte de una línea de investigación amplia y específica en Educación Matemática, se parte de la aceptación del conocimiento existente sobre los conjuntos numéricos para centrar la atención en las relaciones entre la Aritmética y el Álgebra así como en los aspectos específicamente algebraicos tales como: variables, resolución de ecuaciones, funciones, expresiones, etc.. Se exponen a continuación las conclusiones más relevantes.

Kieran, C.; Filloy, E. (1989) revisan las principales aportaciones sobre los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del Álgebra, discuten los esfuerzos por desarrollar una teoría de la enseñanza/aprendizaje del Álgebra y plantean algunas tendencias futuras. En la revisión realizada son de destacar las investigaciones sobre el marco aritmético de referencia, la forma en que los estudiantes 'ven' el signo igual, las dificultades con las convenciones de notación, los métodos de simbolización, la noción de variable y su uso, las expresiones algebraicas, la resolución de ecuaciones, las funciones y sus gráficas y, por último, el aprendizaje cuando se utilizan computadoras.

Desde el punto de vista teórico, los autores plantean la necesidad de conjugar tres componentes: los modelos de enseñanza del álgebra, los modelos de los procesos cognitivos implicados y los modelos de competencia formal en la utilización del lenguaje algebraico. De entre ellos, la investigación que presentamos se puede situar en los niveles más elementales del estudio de los procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra elemental. No sería muy aventurado afirmar que el trabajo que se expone en esta memoria se encuentra en el 'puente' entre la Aritmética y el Álgebra, aportando información relevante acerca de los aspectos más elementales de lo que los autores denominan *"pensamiento algebraico"* (página 238).

Dentro de los planteamientos generales expuestos en los apartados anteriores destacamos los trabajos de Gallardo, A., Rojano, T. (1988) y Filloy, E. y Rojano, T. (1989), en los que se exponen los principales resultados de investigaciones llevadas a cabo sobre la resolución de ecuaciones en dos niveles distintos: un nivel concreto, mediante la utilización del modelo geométrico basado en longitudes y superficies de figuras sencillas y en el conocido modelo de la balanza, y un nivel formal puramente sintáctico. La comparación entre los procesos de resolución de ecuaciones en ambos niveles lleva a los autores a detectar una serie de fenómenos en la primera fase de la investigación.

En una segunda fase, los autores han centrado la atención en la comparación entre los aspectos semánticos y sintácticos involucrados en la resolución de las ecuaciones. En una tercera fase, dirigen la atención hacia la comparación de los dos modelos mencionados.

Desde la óptica de la investigación que presentamos, hay algunas consideraciones básicas que no se han tenido en cuenta en estos trabajos y que hubieran modificado sustancialmente tanto el diseño experimental como los enfoques y las interpretaciones de los resultados obtenidos. Algunos de los factores que en nuestra opinión no se han tenido en cuenta son los siguientes:

— En los modelos concretos utilizados en las tareas existe una mezcla entre la comparación aditiva y la multiplicativa que debe ser analizada primero y por separado.

— En el planteamiento y resolución de ecuaciones con referentes concretos intervienen elementos de diferente naturaleza (cantidades, números y medidas), que deben ser deslindados previamente para poder conocer sus efectos y aislar sus posibles influencias sobre la producción de errores o la aparición de dificultades.

— En los modelos concretos utilizados y en las manipulaciones algebraicas subsiguientes aparecen mezclados dos tipos de números con características diferenciadas, como son los números naturales relativos y los números enteros, con los que se opera de la misma forma y que, sin embargo, requerirían de un análisis por separado.

— No se tienen en cuenta factores tan importantes como: la escasa atención en la instrucción aritmética a los modelos concretos y, en particular, a los modelos cuantitativos experimentales; las deficiencias debidas a un tratamiento insuficiente y defectuoso de la estructura de orden y de las propiedades topológicas de los conjuntos numéricos; la distinción entre los aspectos intuitivos y 'naturales' y los aspectos meramente formales o justificados por la necesidad de completar la construcción de algunos conjuntos numéricos, como es el caso de la multiplicación de números enteros o, incluso, de la adición de números racionales.

En definitiva, los problemas del aprendizaje del álgebra escolar no son sólo los que se derivan de la propia sintáxis algebraica sino, además, los que tienen que ver con la sintáxis y, sobre todo, con la semántica involucradas en el proceso educativo previo sobre numeración y cálculo. En este sentido y para concluir, estamos convencidos de que *los resultados de las investigaciones sobre 'pensamiento algebraico' van a depender en gran medida de la clarificación de los procesos y fenómenos cognitivos que intervienen en la educación del 'pensamiento numérico'.*

CAPÍTULO

5

Fenomenología, enseñanza y currículum

5.1. Introducción

Los antecedentes relacionados con la enseñanza y otros aspectos curriculares de los números enteros, salvo algunas excepciones que se encuentran dentro de una tradición consolidada en el ámbito de la investigación educativa, son puntuales, aislados y, en algunos casos, no reúnen las condiciones necesarias para su credibilidad científica. Por otra parte, es de destacar el escaso interés por el tema, que se pone de manifiesto en la exigua cantidad y poca calidad de las publicaciones existentes, las cuales parecen referirse, además, a un tema cerrado con pocas posibilidades de variación, situado al margen de las investigaciones usuales en Educación Matemática y excesivamente sometido a la rigidez de las construcciones matemáticas formales. A pesar de estas limitaciones, tanto los propósitos de nuestra investigación como las características del análisis didáctico hacen necesaria una revisión de estos materiales.

Los antecedentes que vamos a tratar se aglutinan en torno a dos tipos de trabajos. Por un lado, encontramos publicaciones de carácter divulgativo, en las que se incluyen opiniones relacionadas con la metodología, modelos, recursos, actividades y otras consideraciones didácticas, o sugerencias y propuestas de tipo curricular basadas en experiencias personales que no se explicitan o resultados prácticos no extrapolables o de dudosa credibilidad.

Estos trabajos se pueden considerar como sugerencias útiles para la práctica docente o como información adicional para la reflexión teórica meta-analítica, el planteamiento de conjeturas e hipótesis de investigación y la preparación de diseños experimentales más completos.

Por otra parte, constatamos la existencia de un segundo grupo de publicaciones en las que se exponen los planteamientos y resultados de experiencias docentes en el espacio natural del aula. En este grupo se pueden situar también los trabajos de implementación y evaluación a gran escala de políticas educativas y proyectos curriculares amplios, como es el caso, por ejemplo, del proyecto CSMS (Hart, K., 1981), de cuyos resultados sólo hemos utilizado las consideraciones relativas a errores y dificultades de los alumnos con los números enteros.

En los apartados que siguen se expone una revisión comentada de las publicaciones más relevantes, agrupadas según los temas y enfoques que adoptan. El núcleo de los antecedentes consultados se encuentra en los números enteros y la iniciación al Álgebra, quedando en un segundo plano, por motivos de extensión y de interés de la investigación, otros temas afines.

5.2. La enseñanza de los números enteros

El tema general del presente apartado ha sido objeto de varias publicaciones divulgativas, de entre las que destacamos las siguientes:

— La publicación Colectivo Periódica Pura (1982) trata de dar cuerpo a la Didáctica de los números enteros desde la óptica del proceso didáctico y los recursos, mediante un planteamiento práctico cuyo análisis detallado contribuyó de manera importante a la elaboración de parte del texto que se cita a continuación.

— González, J. L. y otros (1990) ofrece, desde la óptica teórica y de los fundamentos, una información básica sobre la Historia y Epistemología así como sobre la enseñanza de los números enteros desde diversos puntos de vista. Se trata de una revisión reciente en un plano de reflexión teórica alejado de la práctica educativa, siendo necesario abordar en investigaciones futuras las consecuencias metodológicas y curriculares de los resultados del estudio.

Los trabajos que se exponen a continuación nos ayudan a comprender mejor y situar convenientemente el problema de investigación desde la óptica de la práctica docente. Dichos trabajos se presentan en torno a tres grandes núcleos: metodología y situaciones didácticas, experiencias de aula y evaluación.

5.2.1. *Metodología, modelos y situaciones didácticas para la enseñanza de los números enteros*

Estructuramos a continuación la información revisada en cuatro apartados: consideraciones generales sobre la noción de modelo, recursos, modelos y situaciones didácticas puntuales, métodos de enseñanza y modelos mixtos y juegos y material didáctico manipulativo. En los tres últimos bloques utilizaremos para la exposición el mismo esquema seguido para los diferentes apartados en los capítulos 3 y 4.

5.2.1.1. *La noción de modelo: consideraciones generales*

Los métodos de enseñanza constituyen en la actualidad una de las principales preocupaciones de la investigación en Educación Matemática. Sus conexiones con los procesos de aprendizaje son cada vez más evidentes en una dinámica de alejamiento de los métodos formales propiamente matemáticos y de acercamiento creciente a las características del aprendizaje y el desarrollo cognitivo del sujeto. En dicha dinámica, el concepto de modelo adquiere un protagonismo especial, no en vano" . . *los modelos son representaciones estructuradas de nociones o conceptos matemáticos*" (Resnick, L.; Ford, W., 1990, pp. 137-145), lo que hace que tengan una doble utilidad en Educación Matemática: *"por una parte facilitan la interpretación de hechos y relaciones, conectando las representaciones externas con las internas; por otra, ayudan a resolver problemas de acuerdo con los hechos originales."* (Castro, E., 1994, p. 13).

Para Janvier, C. (1985) la principal característica de un modelo es su "transferibilidad" o capacidad de adaptación a múltiples situaciones diferentes. Para el autor existen dos tipos de modelos: los "simbólicos" y los de "imagen mental"; los segundos son más efectivos que los primeros en lo que se refiere al campo aditivo. Por otra parte, en relación con el tema que nos ocupa, el autor distingue también dos tipos de modelos para los "números relativos": los modelos basados en la recta numérica y los que utilizan la noción de "opuestos", algunos de los cuales son físicos y otros, simbólicos o de carácter lúdico.

En nuestro trabajo constatamos la existencia de numerosos modelos concretos y semiconcretos en el campo aditivo [estos últimos se encuentran entre los llamados modelos concretos y los simbólicos (Castro, E., 1994, pág. 18)], cuyos funcionamientos y propiedades se pueden representar y explicar mediante un modelo abstracto único independiente del modelo conocido de los números enteros, aunque en estrecha relación con él, y constituido por un esquema simbólico específico con sus reglas correspondientes. Dicho modelo abstracto, cuya construcción es una de las partes más importantes del presente trabajo, constituye un "sistema de representación" en el sentido de Kaput, J. (en Janvier, C., 1987; cap. 14, pp. 159-195).

Pero no nos interesa tanto la noción de modelo en el sentido de modelo cognitivo, esquema o representación conceptual que interpreta o predice el comportamiento de un sistema, como en el sentido que, a veces, se da al mismo término para caracterizar al propio sistema original al que aquél hace referencia, entendido como campo de experiencias potencialmente útiles para la enseñanza. Por tanto, en dicha dualidad representación-campo de referencia, que a través de ciertos isomorfismos constituye un todo integrado, vamos a prestar especial atención al campo de referencia desde un punto de vista fenomenológico, es decir, como conjunto de fenómenos que dotan de significado a los conocimientos. Al igual que hace Janvier, C. (obra citada), hablaremos de modelos físicos, figurativos, pictóricos, manipulativos y simbólicos, como *modelos didácticos* útiles para la enseñanza de los números enteros y las operaciones aritméticas, en el mismo sentido que se suele emplear cuando se habla de un material estructurado como modelo didáctico para el trabajo en el aula.

5.2.1.2 *Recursos, modelos y situaciones didácticas puntuales*

En los trabajos que se citan a continuación se exponen diversos planteamientos puntuales e independientes que adquieren un valor especial cuando se relacionan entre sí bajo la óptica del problema de investigación.

5.2.1.2.1. *Publicaciones consultadas*

Los siguientes autores aportan información útil para el análisis del campo en estudio.

ARCAVÍ, A., BRUCKHEIMER, M. *How shall we teach the multiplication of negative numbers?*
BARTOLINI, P. *Addition and subtraction of directed numbers.*
BATTISTA, M. T. *A complete model for operations on integers.*
CID, E. *Estudio de las dificultades de los alumnos en el cálculo de expresiones numéricas.*
CORIAT, M. *A la búsqueda del buen modelo.*
COTTER, S. *Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers.*
CROWLEY, M. L., DUNN, K. A. *On multiplying negative numbers.*
CHILVERS, P. *Sam the sentry. A consistent model for operations on directed numbers.*
EASTWOOD, M. *More models for directed numbers.*
ERNEST, P. *The number line as a teaching aid.*
ETTLINE, J. F. Y SMITH, L. M. *Flipping over numbers.*
GONZÁLEZ, J. L. y otros *Números enteros.*
HAVENHILL, W. P. *Though this be madness...*
JENCKS, S. M. Y PECK, D. M. *Hot and cold cubes.*
LEDERMANN, W. *Children choice.*
LUTH, L. M. *A model for arithmetic of signed numbers.*

PHILLIPS, E. R. *Negative number x negative number gives positive number: an understable proof for high school students.*
ROSSINI, R. *A propos des nombres relatifs.*
SNELL, K. S. *Integers. Introduction of directed numbers.*

5.2.1.2.2. *Algunas conclusiones*

Los trabajos que vamos a comentar a continuación se caracterizan por el interés en compatibilizar lo teórico y lo práctico; por acercar los planteamientos formales al dominio de aplicación concreta para facilitar la comprensión de los conceptos. Así lo manifiestan, entre otros, Snell, K. S. (1970) y Ledermann, W. (1972), que recomiendan el uso de referencias a la realidad alejadas del rigor clásico de las matemáticas.

Por otra parte, el interés se centra también en los aspectos didácticos más conflictivos del conocimiento matemático en juego, entre los que se encuentran en un lugar destacado, como veremos, las operaciones aritméticas y, en particular, la multiplicación de números enteros y las conocidas reglas de los signos. En relación con estos aspectos valgan como ejemplo los trabajos de Arcaví, A., Bruckheimer, M. (1981) y Crowley, M. L., Dunn, K. A. (1985) sobre los modelos y las estrategias didácticas para la multiplicación de números negativos, las múltiples propuestas realizadas para justificar o "demostrar" la regla de los signos, como la que propone Phillips, E. R. (1971) a partir de las definiciones de igualdad y de sustracción, o las consideraciones que se exponen en González, J. L. y otros (obra citada) a propósito de sendas revisiones sobre la situación histórica e institucional de dichas cuestiones.

La *recta numérica* como recurso, modelo o ayuda para la enseñanza ha sido, y es hoy día, una representación muy utilizada en las clases de matemáticas. En particular tiene un protagonismo importante en la enseñanza de los números enteros tal y como se refleja en numerosas publicaciones. De entre dichos antecedentes, destacamos las siguientes obras:

Havenhill, W. P. (1969) y Eastwood, M. (1983) proponen la utilización de la recta numérica para ilustrar las operaciones aritméticas básicas mediante el conocido uso de vectores unidireccionales con doble sentido. El principal inconveniente que se suscita con este modelo es el de las diferentes interpretaciones que han de tener los signos. Así, para la adición y sustracción los signos pueden representar tanto cantidades orientadas como operaciones aritméticas o cambios de sentido, mientras que para la multiplicación y división pueden representar tanto cantidades orientadas como cambios de sentido o dilataciones y contracciones según los casos. Los propios autores reconocen la necesidad de usar dos modelos diferentes para la adición y la multiplicación.

Con los mismos problemas mencionados, Chilvers, P. (1984, 1985) propone un modelo similar basado en los desplazamientos de un centinela sobre la recta numérica. En este caso las interpretaciones de los signos son ligeramente diferentes: dar pasos hacia adelante o hacia atrás y mirar a la derecha o a la izquierda. En definitiva, como ocurre en la mayoría de los modelos que pretenden ser completos, se utilizan significados diferentes para los elementos en juego.

En la misma línea de los trabajos anteriores, Ettline, J. F. y Smith, L. M. (1978) proponen un modelo para las operaciones aritméticas basado, igualmente, en la recta numérica, pero introduciendo un nuevo elemento llamado "flipper" o salto centrado en el origen del vector y con radio el módulo del mismo. La mezcla de vectores, signos y saltos resulta tan complicada que el modelo puede dar más problemas de los que realmente intenta solucionar.

Por otra parte, la utilización de la recta numérica como modelo semiconcreto ha suscitado numerosas polémicas entre los investigadores en Educación Matemática. Así Ernest, P. (1985), a propósito de la enseñanza de los números naturales y las operaciones aritméticas, lleva a cabo una revisión de los resultados de algunas de las principales investigaciones realizadas en este sentido. Además de constatar una falta de conexión entre la comprensión de los estudiantes sobre la adición numérica y la comprensión del modelo de la recta numérica, el autor aporta datos y argumentos en contra de la creencia de que la recta numérica sea una ayuda visual útil para aprender a sumar y restar. Por otra parte, parece que su utilización como modelo para la sustracción de enteros provoca dificultades que aconsejan su abandono como recurso didáctico.

Dentro de los modelos y recursos para la enseñanza de los números enteros y las operaciones aritméticas con números enteros, merece la pena destacar los intentos de modelización basados en la noción de *opuestos*, de los que comentamos a continuación los más interesantes por su cercanía a los planteamientos que se exponen en la fundamentación teórica de la tesis.

El problema fundamental de estos modelos, que, por otra parte, consiguen eliminar la ambigüedad del signo "menos" (Janvier, C., obra citada), radica en que sólo son válidos para la estructura aditiva, planteándose serios problemas cuando se pretenden aplicar a situaciones gobernadas por la estructura multiplicativa. Dejando a un lado el problema de la separación entre los aspectos aditivos y multiplicativos, cuya necesidad, por otra parte, tratamos de poner también de manifiesto en la presente investigación, nos encontramos en estos trabajos ante intentos de estructuración intuitiva del concepto que modelizamos bajo la denomi-

nación de número natural relativo; se trata por tanto de ejemplos concretos del modelo teórico que se expone en los capítulos 7 y 8 de la memoria, a los que nos remitimos para su comprobación.

A las situaciones clásicas de las fichas de dos colores propuestas por Papy, G. y por Dienes, Z. P., referenciadas junto a otras en González, J. L. y otros (obra citada, págs. 130 y sigtes.), podemos añadir las siguientes:

Bartolini, P. (1981) y Rossini, R. (1986) proponen, para la representación así como para la adición y sustracción de los números enteros, ligeras variaciones del modelo de fichas anteriormente mencionado, basado en la división de la recta numérica en dos partes "disjuntas". El primero de ellos representa las dos partes por separado, como si fuera un ábaco vertical de dos varillas marcadas con los signos + y – sobre las que se sitúan las cantidades y se realizan las operaciones como si se tratara de un ábaco tradicional. La novedad se encuentra en la utilización de una línea auxiliar horizontal de nivel cero que marca la posición en la que se anulan por compensación las cantidades de signos contrarios que se encuentran emparejadas por debajo de ella. El resultado de dicha anulación será la cantidad de fichas o de marcas que quedan sin emparejar, bien en la varilla positiva, bien en la negativa.

Rossini, R., por el contrario, no basa la distinción en los signos y en las semirrectas separadas, sino en el color de las fichas. Las operaciones aditivas consisten también, según el autor, en anulaciones-compensaciones entre dos hileras de fichas situadas horizontalmente.

Dentro de este grupo de modelos de "opuestos", Janvier, C. (1985) propone un nuevo modelo, debido inicialmente a Luth, L. M. (1967), basado en un globo de aire caliente al que se le atan sacos de arena y/o globos de helio que le hacen bajar o subir respectivamente. Se combinan por tanto las subidas y bajadas con las acciones de añadir o quitar elementos de uno u otro sentido para configurar un sistema intuitivo en el que se siguen mezclando significados y operaciones de diferente naturaleza, aún incluso dentro de la estructura aditiva.

Por último, cabe destacar los modelos que hacen referencia a experiencias físicas en las que aparecen la dualidad y la oposición aditiva entre elementos duales. Tal es el caso del modelo de partículas cargadas de Cotter, S. (1969), utilizado posteriormente por Battista, M. T. (1983), o el que se apoya en la mezcla de unidades o cubos "fríos" y "calientes" debido a Jencks, S. M. y Peck, D. M. (1977). En ambos casos se trata de relacionar las operaciones con números dirigidos con alguna interpretación física, si bien el segundo de ellos plantea el modelo sólo para la suma y la resta de números enteros. Las acciones "aditivas" de ambos modelos son coherentes con las operaciones aritméticas de adición y sustracción, mientras que las acciones "multiplicativas" requieren, como siempre, de significados distintos para el multiplicando y el multiplicador.

Algunos de los trabajos citados anteriormente son intentos parciales de abarcar la Didáctica de los números enteros mediante un modelo único. Actualmente se sigue buscando un modelo único y completo como es, por ejemplo, el modelo algebraico que proponen Cid, E. y Brousseau, G. (1989) utilizando construcciones geométricas sobre la recta numérica, en el mismo sentido tratado con anterioridad por Dieudonné, J. (1987) para construir el cuerpo ordenado de los números reales. En nuestra opinión se trata de un modelo artificial, matemático y no familiar, según reconocen, además, los propios autores (pág. 22); más complicado si cabe que la construcción ordinaria mediante el principio de permanencia de las leyes formales.

En consecuencia, seguimos sin disponer de un modelo único y completo fuera del contexto puramente algebraico. En este sentido, Cid, E. (obra citada) añade: *"Pero no es posible encontrar un modelo físico sencillo que justifique la introducción de los números enteros, porque cuando planteamos un problema simple de la vida real, no es necesario hablar de enteros sino de diferencias"* (pág. 22).

5.2.1.3. *Métodos de enseñanza y modelos mixtos*

La metodología general para la enseñanza de los números enteros ha recibido una atención especial por parte de diversos autores. El problema central de los trabajos que vamos a comentar se puede condensar en el interrogante: ¿Cómo enseñar los números enteros?. Las respuestas son muy variadas, si bien, en la mayoría de los trabajos, se propone la utilización de modelos mixtos que contemplan diversos contextos y recursos en función del desarrollo didáctico y de los conceptos y procedimientos que se pretende trabajar. En todos ellos se constata, por otra parte, el esfuerzo por incluir en el proceso didáctico, situaciones, modelos, estructuras y conceptos considerados usualmente dentro del campo de los números enteros, pero que, como pretendemos poner de manifiesto, constituyen un subcampo separado y con entidad propia dentro del campo conceptual aditivo.

5.2.1.3.1. *Publicaciones consultadas*

BEDNARZ, N., GARNIER, C. (eds.). *Construction des Savoirs. Obstacles et conflicts.*
BELL, A. *Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros.*
BELL, A., SHIU, C. Y COLABORADORES *Obras citadas.*
CABLE, J. *The ground from which directed numbers grow.*
COLECTIVO PERIÓDICA PURA *Didáctica de los números enteros.*

CHANG, L. *Multiple methods of teaching the addition and substraction of integers.*
GALBRAITH, M. J. *Negative numbers.*
GONZÁLEZ, J. L. y otros *Números enteros.*
LEDDY, T. *Mis-directed numbers.*
SEMADENI, Z. *A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts.*

5.2.1.3.2. *Conclusiones*

Una de las polémicas en torno a la enseñanza de los números enteros discute la conveniencia de utilizar modelos concretos. Así, Leddy, T. (1977) cuestiona la utilización de modelos concretos hasta sus últimas consecuencias para explicar o enseñar todas las propiedades y operaciones con números enteros. Constata, en su trabajo, las múltiples vías que utilizan los libros de texto para abordar el tema y asegura que en ninguno de ellos se consigue que el producto de dos números negativos sea intuitivamente obvio, a menos que se trate como extensión de modelos numéricos a través del principio de permanencia de las leyes formales. Más aún, propugna la introducción de los números enteros de forma axiomática en lugar de utilizar los pares ordenados, si bien supone que los alumnos han trabajado ya los números "dirigidos" en una variedad de situaciones concretas, lo que a nuestro juicio supone una contradicción en los planteamientos del autor. El principio básico del trabajo, que creemos razonable, es el siguiente:

> "Todos los modelos llegan a un punto en el que no se puede seguir con garantías. En este momento, los enteros deben haber llegado a ser números por sí mismos, obedeciendo a ciertas reglas que son independientes de los modelos utilizados." (pág. 28).

En este sentido, la propuesta teórica que se expone en el capítulo 7 de González, J. L. y otros (1990) y que se menciona en el capítulo 1 de la memoria, recoge los planteamientos anteriores al proponer una metodología diversificada que incluye una última fase didáctica en la que se trata el número entero como objeto matemático. Nos remitimos al citado capítulo 1 así como al capítulo 5 de la publicación mencionada, para una visión crítica del tratamiento exclusivamente formal de los números enteros.

Otros autores, como Cable, J. (1971) y Chang, L. (1985) proponen un proceso didáctico que parte de situaciones concretas como soporte de los aspectos más abstractos y formales que se han de trabajar posteriormente. Ambos autores sugieren la utilización de varios modelos y situaciones didácticas concretas que dediquen toda la atención a los inicios del proceso, dejando a un lado los aspectos formales posteriores. Así lo manifiesta explícitamente Chang, L. cuando afirma:

"las reglas de las operaciones básicas con enteros pueden ser aprendidas después de que el estudiante ha comprendido los conceptos implicados" (pág. 15).

Por otra parte, mientras que Chang atiende sólo a la adición y sustracción recomendando la utilización de las monedas, los movimientos sobre la recta y las fichas de dos colores, único contexto, en opinión del autor, en el que se puede ver claramente el funcionamiento de la sustracción, Cable extiende su trabajo a las cuatro operaciones básicas, incluyendo todo un arsenal de modelos y situaciones didácticas para trabajar exhaustivamente el campo de aplicaciones concretas antes de pasar a los aspectos formales.

En la publicación mencionada en el apartado 5.2, el Colectivo Periódica Pura plantea una metodología más completa para el tratamiento didáctico de los números enteros. La idea básica consiste en abstraer, en primer lugar, el concepto de número entero de la estructura común a diversas situaciones, para pasar, a continuación, a su ejercitación y aplicación a nuevas situaciones, a la adquisición de mecanismos y al aprendizaje de reglas y propiedades desde un punto de vista intuitivo. La construcción formal parece que queda al margen de la propuesta y, en todo caso, para ser tratada con posterioridad al proceso descrito anteriormente.

En el mismo sentido, siguiendo a Piaget, Galbraith, M. J. (1974) sugiere la distinción entre aspectos "concretos" y "formales", proponiendo la introducción de los números enteros en edades tempranas a partir de *"una colección de modelos que ilustren diferentes aspectos del problema"* (pág. 90). El autor pospone el tratamiento didáctico de las cuestiones más conflictivas (sustracción, multiplicación y división, así como la construcción formal) a aquéllos niveles en los que los alumnos se encuentren ya en el período de las operaciones formales.

En el ámbito del Shell Center de la Universidad de Notingham, Bell, A., Shiu, C. y colaboradores (1981,1982 y 1986) han realizado trabajos de investigación sobre la enseñanza de los "números dirigidos" bajo la óptica del método denominado "enseñanza por diagnóstico" y que incluye la utilización de lo que también se conoce como "enseñanza por conflicto" (Bednarz, N., Garnier, C. (eds.), obra citada). El método tiene básicamente dos partes: una primera, en la que se lleva a cabo un análisis de la comprensión de los alumnos sobre los aspectos básicos del tema mediante la identificación de los errores y las dificultades, y una segunda parte consistente en el diseño de un proceso didáctico orientado a subsanar dichos errores y dificultades mediante la utilización del conflicto-discusión. Aplicando dicho método a una muestra de 400 alumnos de 8 a 9 años de edad, Bell, A. (1986) constata la existencia de numerosos errores conceptuales y obtiene resultados positivos (mediante la comparación pretest-postest) en un proceso

didáctico en el que se eliminaron las reglas vacías de contenido y en el que se dedicó una atención especial a los aspectos estructurales de los números dirigidos.

Desde un punto de vista más teórico y en el contexto de la enseñanza de los conceptos aritméticos, Semadeni, Z. (1984) retoma el conocido principio de permanencia de las leyes formales, así como algunas consideraciones didácticas sobre el mismo realizadas por Freudhental, H. (1973, 1984), para tratar de salvar los inconvenientes de su aplicación directa en el aula mediante la instauración de un método que él mismo denomina "principio de permanencia de lo concreto" (pág. 380). Se trata de una manera de evitar el dilema que se plantea al tener que elegir entre forzar las situaciones concretas hasta sus últimas consecuencias o proceder formalmente en todos aquellos casos en los que es necesario extender las operaciones y propiedades aritméticas a nuevos dominios en los que se han de preservar las reglas de cálculo.

En los casos conflictivos de la sustracción y la multiplicación de números enteros, el autor propone utilizar el conocido modelo de fichas o contadores de dos colores para la sustracción (págs. 389-393) y el producto externo de variables relativas, como son el tiempo discreto y el balance económico, también discreto, en el contexto de ingresos y gastos (págs. 393-394). La idea básica es expresada por el autor en su trabajo cuando afirma: *"Si no existe una motivación satisfactoria en la vida real para la sustracción de números negativos, es preferible una motivación semi-concreta adecuada, a la utilización de argumentos formales"* (pág. 390).

5.2.1.4. *Juegos y material didáctico manipulativo*

Existen numerosas sugerencias, ejemplos y propuestas acerca de la utilización de estos tipos de recursos en las clases de matemáticas. En el caso de los números enteros, sin embargo, las aportaciones son más bien escasas, según vamos a exponer a continuación.

5.2.1.4.1. *Publicaciones consultadas*

Se han revisado las siguientes publicaciones:

BERNARD, J. E. *Constructing magic square number games.*
DEXTER, J. *The development of a product for the concrete manipulation of negative numbers.*
FRANK, CHARLOTTE *Play shuffleboard with negative numbers.*
GINTHER, J. L. *Some manipulative activities for arithmetic drill.*
MILNE, E. *Disguised practice for multiplication and addition of directed numbers.*

MOLINOSKI, M. *Black Jack.*
RINGEL, P. J. *Sliding into negative integers.*

5.2.1.4.2. *Conclusiones*

Además de los juegos y otros recursos, que se incluyen en las dos publicaciones divulgativas generales cuyas referencias aparecen en el apartado 5.2 de este capítulo así como en otros apartados anteriores, se han encontrado algunas publicaciones que aportan sugerencias particulares para el trabajo en el aula. De entre ellas, destacamos las siguientes sugerencias sobre *juegos:*

Para introducir o practicar *las cuatro operaciones básicas con números enteros,* Frank, Charlotte (1969) sugiere la utilización del conocido juego del "guiso" o "tejo" con números enteros. En el mismo sentido, Milne, E. (1969) propone un juego por equipos basado en dos ruletas en las que aparecen números y operaciones indicadas. Los equipos participantes van anotando los resultados parciales que habrá que sumar para saber cuál de ellos es el ganador por tener una puntuación global más alejada del cero. Del mismo modo, Bernard, J. E. (1978) propone los clásicos juegos de construcción de cuadrados mágicos con números positivos y negativos, mientras que Molinoski, M. (1978) plantea un juego de cartas muy sencillo parecido al conocido juego de las siete y media. Por otra parte, Ginther, J. L. (1976) recomienda y ejemplifica la utilización de juegos de cartas con fichas de dos colores para trabajar los cálculos con números con signo.

En lo que respecta al *material didáctico* para la enseñanza de los números enteros y las operaciones, Dexter, J. (1975) (tesis doctoral) expone los resultados de la enseñanza de las operaciones aritméticas con números enteros utilizando un material didáctico construido por el propio autor. El material consiste en una variante de las conocidas *regletas encajables,* en la que el número de regletas se duplica por la introducción de un nuevo elemento o propiedad que da lugar a la división entre *"regletas opacas"* (números positivos) y *"regletas transparentes"* (números negativos). Las reglas de composición se establecen de acuerdo con las reglas de las operaciones aritméticas con números enteros.

Por último, en Ringel, P. J. (1970), encontramos una materialización del modelo de la recta numérica para la suma y la resta de números enteros. En él se propone la utilización de dos reglas graduadas ordinarias que, convenientemente deslizadas o desplazadas una sobre la otra, permiten la realización manipulativa de cálculos de adición y sustracción.

5.2.2. **Actividades de aula y experiencias docentes**

En este apartado exponemos una revisión de una serie de trabajos puntuales basados en actividades de aula y experiencias docentes. Una parte de estos trabajos se refieren a experiencias llevadas a cabo con niños más pequeños que los del nivel en el que se suelen trabajar los números enteros, si bien, en la mayoría de dichas experiencias, sólo aparece la comparación aditiva de medidas naturales y la iniciación a los números naturales relativos, lo que dista mucho de las pretensiones de los autores en el sentido de que se trata de las primeras experiencias con números enteros, números con signo o números negativos. A pesar de ello, consideramos justificada su inclusión en este apartado, puesto que los resultados de dichos trabajos vienen a confirmar una parte de los supuestos teóricos de la tesis.

5.2.2.1. *Publicaciones revisadas*

AZE, I. *Negatives. Are they for little ones?*
GONZÁLEZ, J. y otros *Aproximación a los números enteros a partir de una escalera.*
MALPAS, A. J. *Subtraction of negative numbers in the second year: anatomy of a failure.*
THOMPSON, P. W. Y DREYFUS, T. *Integers as transformation.*
VAN DEN BRINK, D. J. *Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen.*
WHIFFING, P. y AZE, I. *A directed number starter.*

5.2.2.2. *Conclusiones*

Con dos niños de 9 años de edad y mediante *"un experimento de enseñanza constructivista"* (pág. 116), Thompson, P. W. y Dreyfus, T. (1988) exponen el desarrollo de una experiencia clínica sobre los números enteros como transformaciones, utilizando el micromundo computerizado del lenguaje Logo. La adición de enteros se considera como composición de transformaciones y la negación como un operador sobre enteros. Según los autores, después de once sesiones de trabajo, los dos alumnos habían construido reglas de sustitución y operaciones mentales para negar cualquier número entero y determinar el signo y la magnitud de una suma. El objetivo fundamental del trabajo era comprobar la posibilidad de organizar la instrucción sobre la aritmética de los números con signo, de manera que facilitara el desarrollo de operaciones mentales implicadas en el pensamiento algebraico. Según los autores, una cuestión pendiente de investigación es la de averiguar si tal desarrollo conceptual *". . establece alguna diferencia en el modo en el que los estudiantes aprenden álgebra"* (pág. 130).

En la misma línea del trabajo anterior, aunque sin el detenimiento, los detalles y la profundidad del mismo, Whiffing, P. y Aze, I. (1989) exponen otra experiencia con lenguaje LOGO en la que se opera, igualmente, con el número entero como transformación o movimiento sobre la recta numérica con independencia de las referencias elegidas.

En la misma publicación, Aze, I. (1989) presenta una serie de experiencias sobre números negativos con niños entre 5 y 9 años de edad. Con los más pequeños trabajó el doble sentido mediante un juego con dados de números naturales y dos colores sobre un trozo de la recta numérica. Por otra parte, con niños a partir de los seis años y utilizando un juego de ejecución de instrucciones sobre movimientos en la semirrecta natural y acciones de añadir y quitar, constató la necesidad, expresada ya por algunos niños de seis años y por la mayoría de los niños de siete y ocho años, de ampliar la semirrecta natural ante la aparición de resultados que "se salían" de la misma. Como consecuencia, según se describe en el trabajo, los niños acordaron dar nombres a los puntos por debajo de cero y seguir jugando con ellos.

Con niños de 5 años, Van den Brink, D. J. (1990) realizó una experiencia con resultados positivos en la que se aprovecha el recorrido de un autobús escolar para trabajar las comparaciones y transformaciones de medidas naturales. A lo largo de diferentes paradas, en las que suben y bajan personas, los niños describen, con la ayuda de gráficos, lo que pasa en cada una de ellas y lo que ocurre el final del recorrido. La posibilidad, que ya se apunta en algunos trabajos citados en el capítulo anterior y que habría que confirmar en nuevas investigaciones, de que los niños de estas edades sean capaces de dominar algunos aspectos relativos y ordinales de los números naturales, situaría en un mismo nivel los inicios de la aritmética natural y de la aritmética con números naturales relativos.

Pero no todo lo que hemos encontrado en el campo de las experiencias de aula ha dado resultados positivos. Así, Malpas, A. J. (1975) describe un intento fallido de enseñar la sustracción de números negativos a un grupo de alumnos brillantes de 8 y 9 años de edad. Utilizando la recta numérica para representar, mediante diagramas de desplazamientos en los dos sentidos, los gastos e ingresos producidos en diferentes momentos y en situaciones simuladas dentro de un contexto económico familiar, encontró dos tipos de dificultades: la confusión entre puntos y desplazamientos, o entre "espacios" y puntos, y la dificultad que supone entender que *"restar una deuda es lo mismo que añadir una cantidad"* (pág. 5).

En una línea diferente a las anteriores y dentro del mismo nivel en el que se suele trabajar el tema de los números enteros en España, González, J. y otros (1989) plantean una experiencia en la que se introducen los números enteros por medio de una escalera, lo que constituye una variante del modelo de la recta numérica entera. En dicho modelo, la sustracción no es necesaria y la suma traduce una acción consistente en un desplazamiento hacia arriba o hacia abajo. Los números enteros pueden representar tanto puntos o escalones como desplazamientos de cantidades de escalones, lo que obliga a utilizar interpretaciones diferentes para los símbolos.

5.2.3. **Evaluación**

No hemos encontrado trabajos que se refieran a la evaluación de los números enteros como instrumento regulador del diseño curricular y como elemento fundamental de la planificación didáctica. Sin embargo, diversos autores han utilizado tests y cuestionarios con fines de diagnóstico general. Las tareas que utilizan se pueden clasificar en dos grupos: ejercicios sobre aspectos puramente sintácticos y problemas matemáticos o relacionados con los contextos usuales de aplicación de los números enteros.

5.2.3.1. *Obras consultadas*

BELL, A. *Developmental studies in the additive composition of numbers.*
— *Directed numbers and the bottom up curriculum.*
— *Looking at children and directed numbers.*
— *Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros.*
CID, E. *Estudio de las dificultades de los alumnos en el cálculo de expresiones numéricas.*
SHIU, C. M. *Directed numbers 1, 2, 3.*
HART, K. *Positive and negative numbers.*
IRIARTE, D. y otros *Test: Los enteros dentro de un contexto.*

5.2.3.2. *Conclusiones*

En cuanto al rendimiento o eficacia de la enseñanza-aprendizaje de los números enteros, Iriarte, D. y otros (1989) aplican un test de sondeo inicial con el que encuentran numerosos errores (se relacionan brevemente en el capítulo 4). El contenido y la estructura de dicho test es muy variado y responde al criterio de incluir todos los aspectos que intervienen en el tema.

El trabajo ya conocido de Hart, K. (obra citada), que se revisa igualmente en el capítulo 4, recoge el estado de las operaciones aritméticas con números enteros en una muestra de estudiantes. Los resultados, que se comentan en el mencionado capítulo, permiten establecer una jerarquía de dificultades en las operaciones aritméticas.

El trabajo de Cid, E. (obra citada) se basa en una evaluación parcial sobre el dominio de algunas reglas sintácticas con números enteros en una muestra de estudiantes de secundaria.

Por último, los estudios de Bell, A. y colaboradores (obras citadas) se fundamentan en la evaluación diagnóstica de los conocimientos y destrezas de los alumnos sobre los números "dirigidos", mediante la utilización mayoritaria de problemas de enunciado verbal. Nos remitimos al capítulo 4 para una información más detallada.

5.3. Consideraciones fenomenológicas sobre los números enteros

Como se refleja en los apartados anteriores, el dominio usual de aplicación de los números con signo incluye una serie de tipos de situaciones, modelos y problemas relacionados con actividades cotidianas y con experiencias físicas y geométricas. Se trata de fenómenos que dan significado a los conceptos, estructuras e ideas matemáticas involucradas y que ponen en "funcionamiento" y, a la vez, organizan el conocimiento correspondiente. El análisis de la estructura del conjunto de fenómenos y objetos matemáticos relacionados con los números enteros (análisis fenomenológico) puede aportar consecuencias valiosas para un estudio epistemológico complementario.

Existen muy pocos antecedentes específicos sobre este tipo de estudios en relación con el tema objeto de la investigación. Los pocos trabajos que atienden expresamente al dominio de aplicación de los números enteros no son exhaustivos, mezclan fenómenos de diferente naturaleza sin llegar a culminar una clasificación organizada y manifiestan las tendencias de los autores, bien en el sentido de utilizar ejemplos concretos para facilitar la comprensión de los conceptos, bien en el sentido de considerar la matemática como un juego formal como solución elegante para enseñar estos conocimientos numéricos conflictivos.

5.3.1. *Publicaciones consultadas*

BELL, A. *Directed numbers and the bottom up curriculum.*

FREUDHENTAL, H. *Didactical phenomenology of Mathematical structures.*

SCHULTZ, J. E. *Why I don't have any examples of negative numbers.*

SEMADENI, Z. *A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts.*

5.3.2. *Conclusiones*

Dentro de la segunda de las dos tendencias mencionadas anteriormente, el análisis fenomenológico más completo sobre los números enteros es, en nuestra opinión, el que realiza Freudhental, H. (1983, cap. 15, págs. 432-460), algunas de cuyas consideraciones ya se utilizaron en la elaboración de la publicación previa mencionada en los primeros capítulos. Por tanto, sólo haremos aquí una breve mención a los aspectos más importantes, que se completarán desde diversos puntos de vista en el capítulo 6 de la tesis. Las consideraciones más importantes son las siguientes:

Desde un punto de vista histórico, el origen y la necesidad de los números negativos, según el autor, aparece en el álgebra de ecuaciones y se consolida más tarde con la algebrización de la geometría. Su inclusión formal se realiza mediante el conocido principio de permanencia algebraico, o geométrico-algebraico como es denominado por el propio autor (pág. 435). Por tanto, los números negativos son indispensables para el álgebra y la geometría así como para la geometría algebraica, en cuyo contexto sitúa el autor el método que llama de "estrapolación inductiva" en relación con funciones sencillas.

Al margen de dicha "fenomenología histórica", el autor cita también una serie de modelos antiguos y nuevos que han sido utilizados en el contexto de los números con signo: coordenadas en astronomía; medidas relativas a partir de un punto central; haberes y deudas; temperaturas; ganancias-pérdidas; subidas-bajadas en escaleras; contadores positivos y negativos, etc., exponiendo las dificultades que comporta su utilización didáctica y dedicándole una atención particular al modelo geométrico de vectores unidimensionales y a las magnitudes dirigidas en el ámbito del espacio vectorial bidimensional ordinario. Después de argumentar a favor de estos últimos modelos geométricos vuelve a insistir en la permanencia geométrico-algebraica, afirmando que "la justificación de las operaciones numéricas y sus leyes, se *encuentra en la simplicidad de la descripción algebraica de las figuras y relaciones geométricas. O dicho de otro modo, el álgebra es válida porque funciona en geometría*" (pág. 450).

En una línea diferente a la anterior, aunque con reiteradas manifestaciones a favor de la búsqueda de significados concretos para los números y las operaciones aritméticas y claramente en contra de la enseñanza de "reglas vacías" así como del aprendizaje memorístico, Bell, A. (1982) completa los modelos y situaciones concretas usuales que viene utilizando en sus investigaciones (Bell, A., Shiu, C., obras citadas) con un análisis más amplio, en el que se incluyen los contextos matemáticos y científicos en los que son necesarios los números enteros.

Para el autor, la cuestión fundamental es la transferencia de conocimientos de unos contextos a otros, jugando un papel especial en dicha dinámica el plano de coordenadas y los vectores. Desde este punto de vista, expone una revisión de los contextos de aplicación de los números enteros en la que incluye los siguientes temas: exploración de propiedades de figuras planas, transformaciones en el plano, gradientes de líneas, funciones trigonométricas, potencias y exponentes, estadística, mecánica, termodinámica, cálculo, óptica y álgebra.

En un trabajo mucho más modesto que los anteriores y sin ninguna intención aparente de análisis de ningún tipo, Schultz, J. E. (1973), desde un punto de vista irónico, se pregunta el motivo por el que no tiene ningún ejemplo de números negativos, en una clara alusión a la opinión de diversos autores en contra de la utilización de modelos concretos para la enseñanza del tema (ver apartado dedicado a metodología y modelos). El propio autor da la respuesta a la pregunta, encontrando muchos ejemplos: tiempo (antes-después, fechas históricas), temperaturas, ascensores, dinero, saldos bancarios, actitudes positivas y negativas, alturas por encima y por debajo del nivel del mar, juegos (ganancias-pérdidas), bolsa y mercados, etc. Pero, como afirma Semadeni, Z. (obra citada), *"la mejor motivación para el concepto de número negativo, se encuentra en las temperaturas. Este es el único contexto en el que un hombre común encuentra los números negativos en la práctica."* (pág. 389), afirmación que nos parece un tanto restrictiva, dado que, además de ser un contexto incompleto en el que no aparecen las operaciones aritméticas, existen otras situaciones familiares en las que intervienen dichos números (saldos bancarios, economía, golf, etc.). A pesar de ello, la afirmación no va muy desencaminada, en la medida en que, como veremos, la mayoría de las situaciones y modelos que se utilizan comúnmente en la enseñanza no se ajustan realmente a las estructuras de los números enteros.

Nuestra posición, según queremos poner de manifiesto en el trabajo, parte de la idea ya expresada por Freudhental de que son muy pocos los fenómenos y las situaciones de la vida real en los que se aplican directa y correctamente los números enteros, lo cual está en desacuerdo con la opinión ya comentada, en sentido contrario, por otros autores y, en particular, con la orientación que adoptan Bell, A. y colaboradores en sus trabajos de investigación, en los que utilizan un amplio abanico de situaciones y modelos concretos de los que algunos de ellos no verifican las condiciones estructurales requeridas para ser ejemplos de aplicación de los números enteros.

5.4. Iniciación al Álgebra

Aunque no es este el foco de atención del trabajo que presentamos, existe una estrecha relación entre la enseñanza de la Aritmética y la enseñanza del Álgebra, a pesar de lo cual hemos encontrado muy pocos trabajos orientados específicamente hacia los aspectos didácticos relacionados con la conexión entre ambos campos y con el paso de la aritmética al álgebra, en contraposición al interés que despiertan, entre otros temas, el aprendizaje, los errores y, en general, el desarrollo cognitivo, tal y como se pone de manifiesto en el capítulo anterior.

5.4.1. *Trabajos revisados*

FRIEDLANDER, A. *The Steeplechase.*
JOHNSON, D. R. *Making -x meaningful.*
THOMPSON, P. W. y DREYFUS, T. *Integers as transformation.*

5.4.2. *Conclusiones*

En el trabajo de Thompson, P. W. y Dreyfus, T (obra citada) se habla de la importancia de la Aritmética para la iniciación al Álgebra, considerando el trabajo aritmético como el pilar sobre el que se pueden sentar las bases para el verdadero aprendizaje del Álgebra. El trabajo mencionado describe una experiencia que desemboca en la construcción de las siguientes operaciones mentales básicas para las manipulaciones algebraicas: la negación de expresiones representadas por letras y la construcción de reglas de sustitución para negar expresiones enteras.

Por otra parte, Johnson, D. R. (1986), situado exclusivamente en el plano algebraico, plantea los problemas que existen para una correcta interpretación de ($-x$), de entre los que destaca la confusión que se puede producir al definir intuitivamente el concepto de valor absoluto de un número: *". .es el número pero sin signo"*, lo cual es falso. Para salvar estas dificultades recomienda utilizar el concepto de "opuesto aditivo de x" e insistir en que ($-x$) verifica también la ley de tricotomía.

En la línea de favorecer la práctica de los conocimientos algebraicos elementales, incluidas las técnicas básicas así como el dominio de los números enteros, Friedlander, A. (1977) trata de solucionar —aunque no explícitamente— los mismos problemas planteados por Johnson, D. R. (obra citada) mediante un juego específico llamado "Steeplechase", parecido al conocido "juego de la oca".

CAPÍTULO

6

Segunda fase del análisis didáctico

6.1. Introducción

Según se detalla en el esquema de la figura 2.4 del capítulo 2, en el que se articulan las hipótesis y estrategias metodológicas del proceso de investigación, en la primera etapa del trabajo se ha llevado a cabo un estudio de carácter general utilizando la técnica del meta-análisis cualitativo y siguiendo el proceso que hemos denominado análisis didáctico.

A partir de la recogida, organización y estudio de la información localizada se ha procedido a una revisión sistemática basada en la síntesis de los datos, resultados, opiniones y conjeturas más relevantes, y en la búsqueda de relaciones entre ellos en el marco de una reflexión teórica sobre los aspectos básicos del área problemática. De este modo se ha cubierto la fase 1 del análisis didáctico, cuyos resultados se recogen en los capítulos 3, 4 y 5.

Teniendo en cuenta los datos relevantes, conclusiones, conjeturas y prioridades establecidas para cada uno de los cuatro grandes campos a los que se ha aplicado el estudio, pasamos a desarrollar, dentro de la segunda fase, un análisis de las relaciones entre dichos campos, delimitado por un orden lógico de prioridades establecidas en los apartados 1.6 y 1.7 del capítulo 1 y condicionado tanto por la relevancia de los datos epistemológicos y cognitivos, en comparación con la de los datos fenomenológicos o curriculares, como por las conjeturas que figuran en el apartado 1.5 del capítulo 1.

Los temas que han centrado la atención de este estudio han sido los siguientes: el análisis epistemológico y fenomenológico; el análisis de errores y otros aspectos cognitivos; la representación del conocimiento matemático en juego así como la problemática de la interacción entre sistemas de representación diferentes; algunos aspectos del pensamiento numérico y, por último, el currículum sobre numeración y operaciones aritméticas en los primeros niveles educativos. Se trata de estudios que establecen un nexo de unión entre las primeras conclusiones y conjeturas y la continuación del trabajo que se expone en los capítulos restantes. Otras partes, como las que se refieren a la implementación curricular o a los obstáculos y conflictos socio-cognitivos, sólo quedan reflejadas en los mencionados antecedentes por resultar secundarias para los objetivos de la investigación.

Incluimos en el presente capítulo aquéllas conclusiones originales que complementan los antecedentes mencionados, de acuerdo con la orientación dada a la investigación; de ellas, se sigue el estudio teórico que aparece en los capítulos 7, 8 y 9 de la parte III.

6.2. Epistemología de la Matemática, Cognición, Fenomenología y Educación Matemática

6.2.1. *El conocimiento matemático como resultado de la actividad intelectual: un intento plausible de integración de las principales posiciones y corrientes epistemológicas*

A partir de las consideraciones que se exponen en los apartados 3.3.2.B y 3.3.2.C del capítulo 3, y teniendo en cuenta las principales conclusiones que se establecen en el apartado 3.4.2 del mismo capítulo, hemos realizado una reflexión sobre las posiciones y corrientes más recientes en Epistemología de la Matemática y sus relaciones con la Cognición y la Educación Matemática. De dicho estudio se deducen unas consecuencias que constituyen principios generales de los que partimos para la realización del trabajo teórico que presentamos. Pero dichos principios no sólo conforman el marco general, sino que, además, justifican plenamente tanto el enfoque adoptado como la pertinencia del contenido y del proceso metodológico utilizado.

Sostenemos los siguientes principios generales:

a) El conocimiento matemático es un conocimiento *perfectible, sujeto a errores, parcial e incompleto* que tiene que ver con *ideas u objetos conceptuales, independientes de su simbolización o representación*, a los que el ser humano accede mediante el *descubrimiento y la invención o creación no arbitrarias*, con una *existencia ficticia o convencional* que comparte dos ámbitos diferentes: el *conceptual individual* y el *supraindividual, cultural o colectivo*, como parte de la *conciencia compartida*.

b) Las diferentes corrientes y posiciones epistemológicas relevantes sobre el conocimiento matemático no son más que enfoques parciales, a veces extremos, que atienden exclusiva o prioritariamente a alguno de los aspectos mencionados en el apartado anterior. Todas, sin excepción, tratan de describir una parte de la verdadera naturaleza y modo de existencia del conocimiento matemático.

c) La creación/descubrimiento del conocimiento matemático se encuentra condicionada por lo que hay de común a todos los individuos y culturas que la han hecho y la hacen posible: las características comunes de la mente humana (físicas y fisiológicas, entre otras), las características comunes del medio en el que se desenvuelven los sujetos (físicas y sociales, entre otras) y las características comunes de la interacción entre ambos (que proceden, entre otros motivos, de las necesidades propias de la adaptación del sujeto al medio).

6.2.2. *Consecuencias de los principios*

1.—La intervención de los tres factores, mente, medio e interacción entre ambos, se produce, aunque quizás en distinta medida, en todas y cada una de las interpretaciones sobre la naturaleza, modo de existencia y formas de producción del conocimiento matemático. En unos casos dicha intervención es clara y directa (platonismo, intuicionismo, cuasi-empirismo, constructivismo social), mientras que en otros (formalismo, logicismo) se produce una influencia indirecta de los mismos (todo juego de reglas es producto del pensamiento humano, el cual se configura en un medio concreto en el que se desenvuelve en constante interacción con él).

2.—El análisis epistemológico del conocimiento matemático, para ser completo, debe tener en cuenta las características comunes de los tres factores mencionados en relación con el conocimiento matemático: instrumentos y estructuras conceptuales, funciones cognitivas y formas de representación del conocimiento, entre otros; fenómenos, cuestiones y problemas que constituyen el campo de actuación, factores lingüísticos y socioculturales que afectan a la expresión y comunicación del conocimiento, entre otros; necesidades individuales, socio-culturales y científicas, y formas de utilización del conocimiento ya existente, entre otros.

3.—El análisis didáctico del conocimiento matemático debe incluir, como aspectos básicos, el análisis epistemológico (histórico-crítico y lógico-formal), el análisis cognitivo y el análisis fenomenológico, los cuales se han de complementar y relacionar con un análisis sobre la enseñanza y el currículum como aspectos específicos de la Educación Matemática; cuatro grandes campos de análisis que conforman el marco general de la investigación que presentamos.

6.3. Epistemología y enseñanza de los números enteros

A partir de las conjeturas previas, recogidas en los apartados 1.4 y 1.5, y como consecuencia de los antecedentes revisados sobre Historia y Epistemología de los números enteros, que se relacionan en el apartado 3.7 del capítulo 3, y de los antecedentes sobre Historia y Epistemología de la Matemática, recogidos en el apartado 3.4 del mismo capítulo, hemos elaborado los esquemas y reflexiones que figuran en los dos apartados siguientes.

Acerca de estos esquemas hemos de hacer las siguientes puntualizaciones:

— Reflejan aspectos relevantes de la situación actual del campo de investigación, al margen de las nuevas consideraciones que se deducen del trabajo que presentamos.

— Son conclusiones generales ligadas a los estudios epistemológicos previos, que ponen de manifiesto, por una parte, los desajustes debidos a una cierta inver-sión entre los procesos histórico y didáctico usual y, por otra, la mezcla de con-cepciones epistemológicas subyacentes a las determinaciones didácticas. Ambos aspectos justifican plenamente la necesidad del análisis teórico más detallado que se expone en los capítulos siguientes.

6.3.1. *El proceso histórico y el proceso didáctico usual*

En la figura 6.1 se destaca que el proceso didáctico convencional[1], que for-ma parte de la cultura escolar y que aún se puede observar en algunos libros de texto españoles (Ed. Anaya, 1994; Ed. Santillana, 1992, entre otros), se encuentra fuertemente condicionado por el producto final del hacer matemático; el alumno sigue un proceso de instrucción en reglas y propiedades formales, sin demasiadas justificaciones, para finalizar en las aplicaciones concretas, lo que supone, en parte, una inversión de lo que ocurrió en el desarrollo histórico.

Por otra parte, teniendo en cuenta las consideraciones establecidas en los apar-tados 3.7 y 3.8 del capítulo 3, se puede situar el problema central de ambos pro-cesos en el paso del contexto concreto (situaciones y problemas de aplicación prác-tica) al contexto formal (segunda transición, validación e institucionalización del

[1] Nos referimos al modelo didáctico simbolizado por la flecha completa, o por una parte de ella, que ha dominado la enseñanza hasta hace poco tiempo. Otros modelos no siguen este desarrollo lineal, o combinan algunos de los aspectos mediante saltos en ambos sentidos. No obstante, los modelos didácticos revisados hasta 1989 (González J. L. y otros 1990) se encuentran, en general, condicionados por la construcción matemática formal que toman como referencia (las reglas, los símbolos, las propiedades y relaciones se dan prácticamente por definición, a pesar de los honrosos esfuerzos de algunos textos y profesores por conducir a los alumnos a la comprensión).

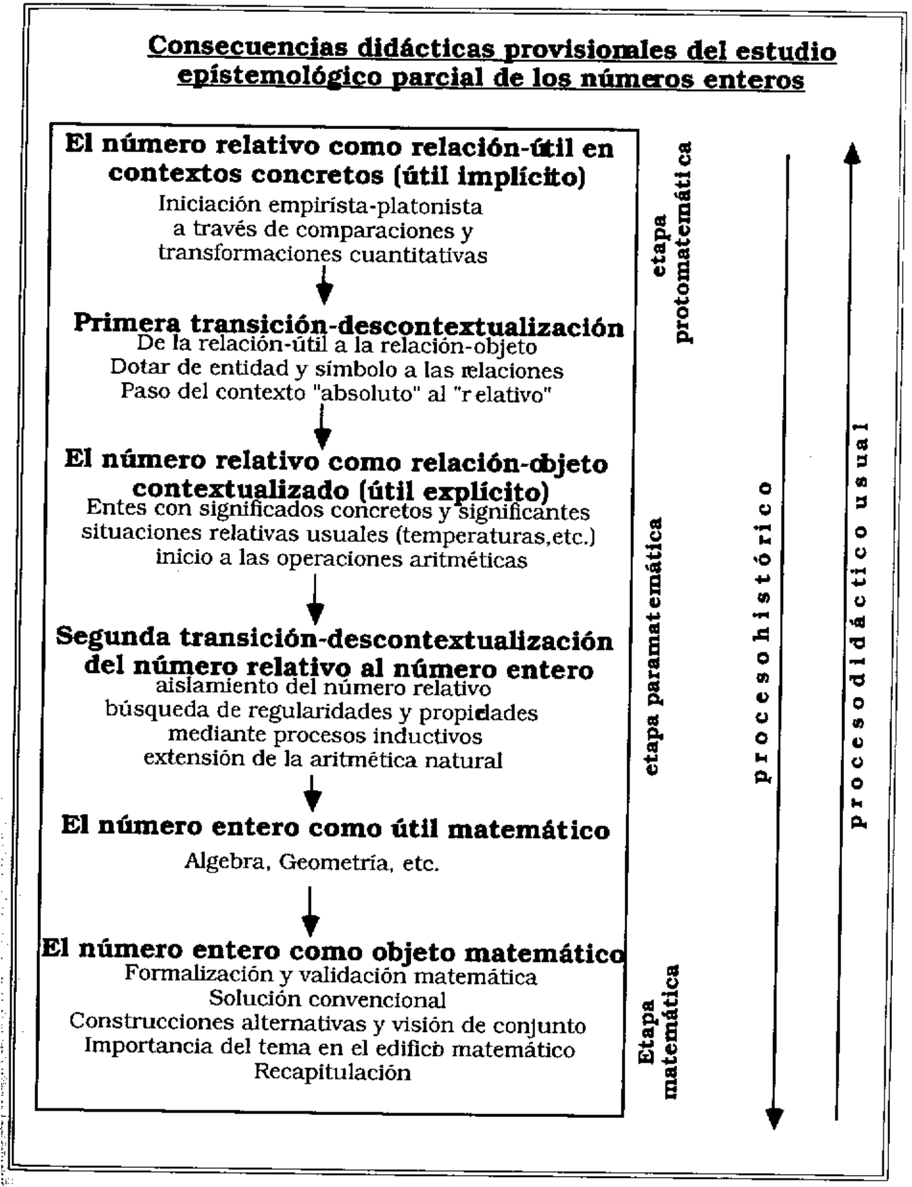


Figura 6.1.

conocimiento), en el que se da una solución que origina ciertos desajustes entre dichos aspectos.

6.3.2. *Principales enfoques didácticos y planteamientos epistemológicos subyacentes*

La pregunta ¿de qué formas se han enseñado recientemente y se enseñan en la actualidad los números enteros y cuáles son los supuestos epistemológicos subyacentes a cada una de ellas? recibe una primera respuesta en el esquema de la figura 6.2, si bien, el proceso didáctico suele ser una mezcla de varios de dichos enfoques, condicionada o dominada, como ya hemos mencionado, por el producto matemático acabado (opción 4).

Las principales conclusiones que se pueden extraer del cuadro son las siguientes:

— Existe una estrecha dependencia entre las diferentes determinaciones didácticas y los supuestos epistemológicos correspondientes, los cuales deben tenerse en cuenta en la medida en que contribuyen a clarificar una parte del conocimiento matemático.

— El predominio de las concepciones más recientes, como es el caso del formalismo, ha provocado una ruptura importante con respecto a las anteriores, hasta el punto de olvidar el mundo de fenómenos concretos a los que, en un principio, se referían las ecuaciones y las manipulaciones algebraicas que daban cierto sentido a los números negativos. Esta incompatibilidad no proviene de las diferencias entre las posiciones epistemológicas bajo las que se analiza y explica la naturaleza y el modo de existencia del conocimiento matemático en cuestión, sino de la pretensión a posteriori, y a partir de la solución formal, de reconciliar lo "viejo" con lo "nuevo". Al querer englobar bajo una única estructura, una única sintaxis y un concepto único, como es el de número entero, una serie de conceptos y relaciones no clarificadas hasta ese momento y que regulan el funcionamiento de un conjunto de fenómenos con características diferentes, se producen desajustes importantes y encontramos que algunas aplicaciones concretas no son tan evidentes ni triviales como otras.

— La diversidad de enfoques y concepciones, a veces incompatibles entre sí, dominadas por la solución formal, que funciona a la perfección en su propio ámbito y para los propósitos para los que fue elaborada, plantea, no obstante, serias dificultades en el terreno didáctico. Si elegimos los enfoques 1 y 2 no podremos llegar muy lejos; si elegimos los enfoques 3 y 4 tendríamos que ser coherentes con la concepción formalista y hacer comprender la necesidad matemática de esta solución convencional. En ambos casos se producen disfunciones y dificulta-

des graves. Si, por el contrario, se adopta una posición mixta habrá que tener sumo cuidado a la hora de elegir las actividades, de justificar las propiedades y de conectar los aspectos concretos con los formales.

Enfoques didácticos "puros"	sustrato epistemológico
1 Por medio de la recta numérica	**- Platonismo con soporte geométrico** **- Mito de Euclides**
2 A través de situaciones concretas - utilidad en las ciencias y en la vida diaria - útil no matemático	**- Pensamiento hasta s. XVIII** **- Concepción platonista-empirista** **- Opción incompleta al no existir un modelo concreto completo para los enteros**
3 Por extensión de la aritmética natural - hacer posible la sustracción en todos los casos - cubrir las necesidades algebraicas - principio de permanencia de Hankel - extrapolación inductiva (Freudhental) - el número entero como útil matemático	**- Pensamiento s. XIX.** **- Los números enteros son una extensión formal de los naturales.** **- Los números enteros son útiles necesarios para el álgebra.** **- Concepción preformalista y prefundamentalista.** **- Atisbos de constructivismo-intuicionismo.** **- Solución convencional forzada por los hechos.**
4 Por construcción conjuntista completada con el enfoque estructuralista. - el número entero como objeto matemático aislado - no se construye rigurosamente en los niveles elementales - se utilizan situaciones concretas para ejemplificar	**- Pensamiento final s. XIX-principios s. XX.** **- Visión fundamentalista (logicismo y formalismo).** **- Se introduce además el punto de vista bourbaquista.** **- Predominio de: estructura, consistencia y rigor lógico sobre el concepto de número y su utilidad práctica.**

Figura 6.2.

6.4. Epistemología, cognición y representación del conocimiento matemático

6.4.1. *El problema didáctico de la representación en Matemáticas*

Algunas de las dificultades que los estudiantes tienen en Matemáticas están relacionadas con los procesos de *traducción* entre diferentes *representaciones* y entre la experiencia común y las ideas matemáticas. A pesar de la importancia que esta cuestión tiene en el aprendizaje matemático y del interés creciente con el que se está abordando, no existe actualmente un cuerpo sólido y coherente de información científica sobre el tema, sino contados trabajos realizados sobre áreas muy concretas[2].

En este apartado abordaremos los procesos y las tareas de traducción-interacción entre los sistemas de representación más comunes en matemáticas, precisando términos e ideas fundamentales, centrando la atención en la representación escrita y haciendo una distinción entre dos grandes bloques de representación implicados en los números naturales relativos, como son los registros comunes y los registros matemáticos. Igualmente, expondremos las teorías y conceptos que manejamos sobre la representación en el ámbito de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; también haremos una breve revisión de algunas investigaciones acerca de la comprensión y el dominio de la sintaxis y la semántica del conocimiento matemático. La adaptación al caso particular de las situaciones relativas con estructura aditiva, completará la exposición del trabajo realizado sobre este aspecto.

6.4.2. *Representación y pensamiento: una interpretación*

El término *representación* es un término complejo y, por tanto, difícil de definir, como se pone de manifiesto en los intentos recientes (Kaput, Lesh, Behr, Post y otros en: Janvier, C., 1987) por construir un marco teórico que permita abordar el uso de diferentes sistemas simbólicos en Matemáticas. Aunque no es una cuestión central en este trabajo, dado que utilizaremos los sistemas de representación como instrumentos para obtener evidencias empíricas sobre la existencia de diferencias cognitivas, nos parece conveniente adoptar una posición que nos permita establecer las conexiones entre las características epistemológicas y las características cognitivas de los números naturales relativos. El análisis de la sintaxis y semántica asociadas a estos números completará el estudio epistemológico realizado.

[2] Ver, entre otros, Janvier, C. (edit.) (1987).

El concepto de representación se puede entender desde una doble óptica: como una cierta relación entre la idea y el objeto representado, o bien, como la idea misma (Howard, R., 1987). Esta consideración refleja los dos sentidos básicos que se suelen considerar en epistemología[3]. Nuestra valoración es que esta idea, además de ser problemática en la medida en que la representación abarca algo más que los conceptos y relaciones, no es excesivamente útil para los propósitos del trabajo, ya que parece que hay que elegir una de las dos opciones puesto que ambas se suelen utilizar por separado y de manera excluyente. Por ello adoptaremos una interpretación particular del término "representación" como contenido mental y, por tanto, de acuerdo en líneas generales con distintas acepciones que tiene el término en Psicología.

Diremos que una *representación* es *un* modelo *mental de carácter cognitivo que hace referencia y se sustenta en las experiencias del sujeto.* El término *experiencia* es considerado en su acepción más general y se refiere tanto a las experiencias externas, en las que el individuo interactúa con el entorno, como a las experiencias internas, por las que el sujeto reflexiona, recuerda, contrasta conocimientos o crea e introduce relaciones y conocimientos nuevos. Admitimos que ambos tipos de experiencias se encuentran relacionadas y tienen como denominador común la actividad intelectual.

Igualmente, figura 6.3, distinguiremos entre la representación y la expresión de una representación. Las representaciones son observables externamente cuando el individuo responde, actúa o expresa de algún modo su pensamiento. En este caso, hablaremos de la *expresión significante* como expresión observable de representaciones; manifestaciones externas que proporcionan información sobre las representaciones del sujeto. A su vez dichas expresiones significantes quedan materializadas en diversos soportes (escritos, gráficos, imágenes, etc.), pasando a integrar el universo de expresiones significantes susceptibles de comunicación y de ser medios para experiencias e interpretaciones por parte de otros sujetos.

Por otra parte, admitiremos que toda representación involucra dos factores: un *contenido,* constituido por una información que dota de significado al conocimiento, y un *formato* que hace las veces de vehículo para su posible expresión observable.

Al optar por la idea de representación como modelo cognitivo, hemos de modificar ligeramente los términos que propone Kaput, J. (Janvier, C., 1987; cap. 14, pp. 159-195) para definir el concepto de *sistema de representación.* Según

[3] Ferrater Mora: Diccionario de Filosofía. Alianza Editorial S. A.. Madrid 1979; pp. 2847-2848.

este autor, un sistema de representación es una terna (*S, F, c*), donde *S* es un esquema simbólico, *F* es un campo de referencia y *c* es una correspondencia entre *S* y *F*. Según nuestros planteamientos, toda representación tiene un carácter privado mientras que toda expresión tiene un carácter público. Sin embargo, para determinados tipos de conocimientos, entre ellos el lenguaje ordinario o el conocimiento científico, existe un consenso en cuanto a su expresión y comunicación, lo que puede inducir *cierta uniformidad* en las representaciones de todos los individuos. Pero esta uniformidad no debe entenderse, en nuestra opinión, ni como identidad en las interpretaciones de la misma experiencia ni como identidad entre representación y su expresión, si tenemos en cuenta el carácter singular e irrepetible de las experiencias de cada individuo.

Al diferenciar entre representación y expresión de una representación diremos que *un sistema de representación* es una terna (*S, F, c*), donde *S* es un esquema simbólico en el mismo sentido dado por Kaput, *F* es un campo de referencia constituido por las relaciones, conceptos, significados y esquemas objetivos de la estructura subyacente que se pretende representar mediante el esquema simbólico, o dicho de otra forma, el conjunto de conocimientos *admitidos y compartidos* por la comunidad de especialistas o por la comunidad de uso (conjunto de significados usuales que dotan de contenido al esquema simbólico), y *c* es una correspondencia específica que relaciona los elementos de *S* y de *F*. De esta manera, *todo sistema de representación es un constructo controlado por la comunidad (es de dominio público), pertenece al ámbito de la conciencia compartida (tercer tipo de existencia del conocimiento*[4]*) y es independiente del sujeto individual,* en la medida en que, incluso en el seno de la comunidad que lo emplea de forma regular, puede haber diferencias individuales.

En el ámbito educativo formal, el alumno tiene experiencias con expresiones incluidas en diferentes sistemas de representación. La interpretación progresiva de dichas expresiones así como el aprendizaje de los términos y de las reglas que gobiernan su funcionamiento proporcionan al sujeto un dominio cada vez mayor en la dirección del status colectivo o público.

6.4.3. *La representación y las expresiones significantes en Matemáticas*

En lo que sigue, nos vamos a referir al conocimiento matemático que manejan y han manejado los especialistas y las comunidades de profesionales. Nos referimos, por tanto, al conocimiento científico aceptado y comunicado.

[4] Popper, K. R. (1989); Davis, P. J.; Hersh, R. (1988).

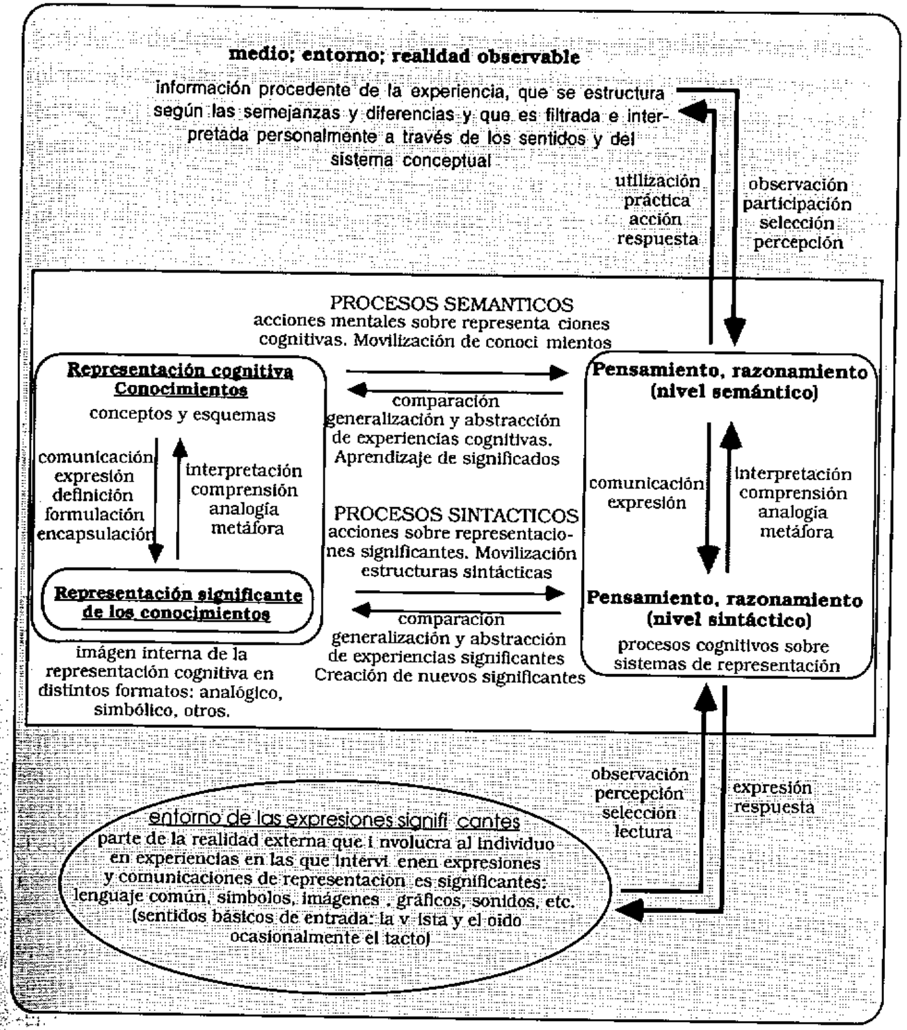


Figura 6.3.—Tipos de representación y pensamiento.

Si adoptamos el punto de vista cuasi-empirista para la naturaleza y el proceso de construcción del conocimiento matemático (Lakatos, I, 1978; Davis, P. J., Hersch, R., 1988; Tymoczko, T., 1986), completado desde el punto de vista de su existencia con los planteamientos recientes del constructivismo social (Ernest, P., 1991), la representación del conocimiento matemático, al igual que ocurre con el lenguaje ordinario, resulta de construcciones intelectuales formadas por representaciones procedentes de experiencias matemáticas con teorías y objetos matemáticos y sus expresiones significantes, y experiencias no matemáticas, incluidas las del lenguaje ordinario. Las representaciones significantes (constituidas por la conjunción entre significados y significantes, contenidos y formatos) no se producen aisladamente, sino mediatizadas por el sistema conceptual global del individuo, influenciadas por el conjunto de representaciones cognitivas y provocadas por las propias experiencias del sujeto.

Las afirmaciones anteriores concuerdan con el trabajo en los niveles elementales o con la producción del conocimiento en matemáticas aplicadas, pero no así con otras áreas y facetas del conocimiento matemático, en las que las experiencias no matemáticas reducen notablemente su protagonismo en una parte de la producción puramente formal. Pero esto, que favorece la consideración de la Matemática como un mundo cerrado de entidades formalmente postuladas al margen de la experiencia no matemática, sucede en aquéllos aspectos en los que no existe, *aparentemente,* ninguna aportación desde fuera del sistema; en cualquier caso parece dudoso que se pueda realizar una separación tan drástica entre los diversos tipos de conocimientos y representaciones coexistentes. Si esto fuera así, ¿cómo se podría explicar la concordancia con lo real manifestada en las numerosas aplicaciones del conocimiento matemático formal a fenómenos cotidianos?.

La representación significante del conocimiento matemático parece estar constituida por modelos privados (no observables) con características parecidas, incluso coincidentes en muchos casos, de unos individuos a otros (a veces, las expresiones significantes son interpretadas de forma diferente por distintos individuos y, a veces, provocan representaciones idénticas). Pero donde se manifiesta una mayor unidad y coincidencia es en la expresión de dichas representaciones, en la utilización de los esquemas simbólicos en base a criterios convencionales y compartidos por los matemáticos profesionales. Un cierto dominio del conocimiento matemático requiere de un cierto dominio simultáneo de varios sistemas de representación; unos son matemáticos y otros no matemáticos, como es el caso del lenguaje ordinario tanto oral como escrito.

Las expresiones significantes en Matemáticas constituyen una combinación de *signos y símbolos* matemáticos, dispuestos a veces en forma de *tablas, diagramas y gráficos* matemáticos y acompañados en ocasiones por algunas *palabras y frases* tanto específicas del lenguaje matemático como tomadas del lenguaje común. El soporte usual para dichas expresiones es el escrito, reducido por diversos motivos (elegancia, rigor, concisión, ausencia de ambigüedad, etc.) a lo estrictamente necesario para su correcta interpretación.

6.4.4. *La representación y las expresiones significantes en Educación Matemática*

A tenor de las consideraciones expuestas en el apartado anterior y teniendo en cuenta que nuestra atención se centra en la representación escrita de información susceptible de ser considerada y estructurada matemáticamente, vamos a distinguir tres campos diferenciados que afectan al aprendizaje de las matemáticas: a) La representación verbal común o los registros verbales comunes; b) Las interacciones entre el lenguaje común y los registros matemáticos; c) La representación matemática o los registros matemáticos. El campo a) constituye una parte del dominio clásico de la Lingüística, el campo c) constituye una parte del dominio de la Matemática y el campo b) es de interés especial para la Educación Matemática.

En el ámbito educativo formal, el conocimiento matemático se suele presentar al alumno de los primeros niveles en un doble formato:

i) Sintáctico-semántico, que incluye explicaciones en lenguaje común, enunciados de problemas y ejercicios en lenguaje común o en lenguaje mixto, haciendo siempre referencia a situaciones de la experiencia ordinaria fuera del aula; se trata, en definitiva, de combinaciones entre expresiones matemáticas y no matemáticas.

ii) Sintáctico puro, que incluye algoritmos, procedimientos matemáticos, ejercicios de aplicación sin referencia al lenguaje común, explicaciones y definiciones matemáticas sin referencia a la experiencia, utilizando términos del lenguaje común pero específicos de las matemáticas.

Un análisis más fino de las expresiones significantes de la matemática elemental permite establecer *tres niveles de expresión:*

1.—*Elementos de primer orden:* elementos básicos simples aislados que podemos clasificar en tres grandes grupos: *signos y símbolos; palabras y expresiones lingüísticas simples; dibujos y gráficos simples.*

1.1.—*Signos y símbolos:* matemáticos (numerales, signos de las operaciones aritméticas, signo igual, de orden, etc.) y no matemáticos (letras como variables o que designan objetos matemáticos (funciones, conjuntos numéricos, ángulos, puntos, etc.) o no matemáticos (expresiones y abreviaturas para medidas y magnitudes físicas, como: temperaturas, longitudes, velocidad, tiempo, o económicas (moneda, interés, porcentaje, etc.)); paréntesis y otros signos lingüísticos).

1.2.—*Términos y expresiones lingüísticas simples:* con significado exclusivo o prioritariamente matemático (monomio, polinomio, circunferencia, círculo, suma, resta, fracción, número, diámetro, ecuación, calcular, raíz cuadrada, par, impar, etc.), con significado tanto matemático como no matemático (significados iguales: igualdad, función, variable, gráfico, mitad, doble, triángulo, cuadrado, ángulo, etc.; significados diferentes: recta, área, potencia, cateto, corona, interior, primo, entero, anillo, grupo, diferencia, positivo, negativo, etc.) y con significado exclusivo o prioritariamente no matemático (ganar, perder, temperatura, subir, bajar; palabras que se utilizan en aplicaciones prácticas y que son accesorias al contenido matemático).

1.3.—*Dibujos y gráficos simples.*

— matemáticos: figuras geométricas elementales (triángulo, círculo, cuadrado, cubo, pirámide, etc.); representación gráfica de: punto, recta, plano, segmento (radio de una circunferencia), altura de un triángulo, ángulos, regiones y superficies (cuadrículas y enrejados), movimientos mediante flechas (giros, traslaciones) o que indican sentido (ángulos, transformaciones sobre la recta numérica), expresión gráfica de longitudes y medidas, etc.

— no matemáticos: dibujos o fotografías de: termómetro, botonera de ascensor, instrumentos de medida, dinero, juegos conocidos, objetos o imágenes alusivas a un tema (naipes, compás, dados, etc.), material didáctico (bloques multibase, ábacos, etc.), elementos gráficos simples de planos, esquemas no convencionales en matemáticas (organigramas).

2.—*Elementos de segundo orden.* Expresiones que representan relaciones complejas entre elementos básicos o de primer orden dentro del mismo sistema de representación: ecuación, fórmula, tabla, igualdades aritméticas, textos en lenguaje común, diagramas de funciones, etc.

3.—*Elementos de tercer orden.* Expresiones complejas tal y como se presentan en los libros de texto o en las clases de matemáticas (combinaciones de elementos de segundo orden): problemas, demostraciones, explicaciones, ejercicios, definiciones, etc.

Una parte importante de las tareas educativas, se centran en torno a la lectura e interpretación de expresiones matemáticas, pero donde realmente culmina el dominio sobre un conocimiento matemático es en las tareas que requieren de la interacción entre varios sistemas de representación.

6.4.5. Los procesos y las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas

Según Janvier, C. (1.987), *"los procesos de traducción son los procesos psicológicos que intervienen en el paso de un modo de representación a otro"* (cap. 3, pág. 27). Matizaremos y ampliaremos a continuación esta definición para utilizarla como soporte intuitivo, considerando que para poder hablar de proceso de traducción se deben dar las siguientes condiciones: a) existencia de una situación

matemática a traducir, b) existencia de un sujeto capaz de llevar a cabo la traducción y c) intencionalidad expresa por parte del sujeto de realizar la tarea.

Llamamos *proceso de traducción-interacción* en Educación Matemática al conjunto de transformaciones y procesos psicológicos correspondientes que intervienen en el paso de un modo de representación a otro. De una manera más concreta, podemos decir que un proceso de traducción-interacción está constituido por todas aquéllas acciones, relacionadas entre sí y convenientemente secuenciadas, que debe efectuar un individuo sobre cualquier situación-problema, expresada en uno o varios sistemas de representación combinados, para ser representada o expresada bien en los mismos sistemas de representación del enunciado original (lo que supone una simple *transformación sintáctica interna* del enunciado dentro de un contexto representacional determinado), bien en otro u otros sistemas de representación diferentes (lo que supone una verdadera *traducción o transformación sintáctica externa*), manteniéndose inalterada la información del mensaje inicial o, lo que es lo mismo, el contenido semántico de la situación-problema. Esto se puede expresar de otra manera diciendo que un proceso de traducción-interacción es aquél que trata de construir y relacionar *situaciones matemáticamente equivalentes* entre sí. En este sentido, hablamos de interacción entre expresiones diferentes de la misma situación-problema, aunque equivalentes desde el punto de vista matemático.

Llamamos *tarea de traducción-interacción* en Educación Matemática a toda actividad de enseñanza-aprendizaje que comporte el desarrollo de un proceso de traducción-interacción entre sistemas de representación. Consideraremos como tareas de traducción-interacción las que se presentan aisladamente en los procesos didácticos (tareas de transformación, de lectura o expresión) y las que forman parte imprescindible de los procesos de demostración o resolución de problemas. Para que una tarea de este tipo pueda realizarse, la situación-problema debe ser transformada *sin que se produzca alteración de su contenido y significados.*

Las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas son actividades que *no se pueden considerar dentro de la categoría de problemas de matemáticas.* Constituyen instrumentos importantes para el hacer matemático, estrechamente relacionados con el lenguaje matemático (sintaxis) y con la red de significados que dan contenido a las representaciones correspondientes (semántica).

4.5.1. Tipos de tareas básicas de traducción-interacción

Haciendo un corte transversal entre los tres niveles de expresiones significantes en matemáticas, encontramos que una parte considerable de la reiguales: igualdad, función, variable, gráfico, mitad, doble, triángulo, cuadrado, ángulo, etc.; significados diferentes: recta, área, potencia, cateto, corona, interior, primo, entero, anillo, grupo, diferencia, positivo, negativo, etc.) y con significado exclusivo o prioritariamente no matemático (ganar, perder, temperatura, subir, bajar; palabras que se utilizan en aplicaciones prácticas y que son accesorias al contenido matemático).

1.3.—*Dibujos y gráficos simples.*

— matemáticos: figuras geométricas elementales (triángulo, círculo, cuadrado, cubo, pirámide, etc.); representación gráfica de: punto, recta, plano, segmento (radio de una circunferencia), altura de un triángulo, ángulos, regiones y superficies (cuadrículas y enrejados), movimientos mediante flechas (giros, traslaciones) o que indican sentido (ángulos, transformaciones sobre la recta numérica), expresión gráfica de longitudes y medidas, etc.

— no matemáticos: dibujos o fotografías de: termómetro, botonera de ascensor, instrumentos de medida, dinero, juegos conocidos, objetos o imágenes alusivas a un tema (naipes, compás, dados, etc.), material didáctico (bloques multibase, ábacos, etc.), elementos gráficos simples de planos, esquemas no convencionales en matemáticas (organigramas).

2.—*Elementos de segundo orden.* Expresiones que representan relaciones complejas entre elementos básicos o de primer orden dentro del mismo sistema de representación: ecuación, fórmula, tabla, igualdades aritméticas, textos en lenguaje común, diagramas de funciones, etc.

3.—*Elementos de tercer orden.* Expresiones complejas tal y como se presentan en los libros de texto o en las clases de matemáticas (combinaciones de elementos de segundo orden): problemas, demostraciones, explicaciones, ejercicios, definiciones, etc.

Una parte importante de las tareas educativas, se centran en torno a la lectura e interpretación de expresiones matemáticas, pero donde realmente culmina el dominio sobre un conocimiento matemático es en las tareas que requieren de la interacción entre varios sistemas de representación.

6.4.5. **Los procesos y las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas**

Según Janvier, C. (1.987), *"los procesos de traducción son los procesos psicológicos que intervienen en el paso de un modo de representación a otro"* (cap. 3, pág. 27). Matizaremos y ampliaremos a continuación esta definición para utilizarla como soporte intuitivo, considerando que para poder hablar de proceso de traducción se deben dar las siguientes condiciones: a) existencia de una situación

matemática a traducir, b) existencia de un sujeto capaz de llevar a cabo la traducción y c) intencionalidad expresa por parte del sujeto de realizar la tarea.

Llamamos *proceso de traducción-interacción* en Educación Matemática al conjunto de transformaciones y procesos psicológicos correspondientes que intervienen en el paso de un modo de representación a otro. De una manera más concreta, podemos decir que un proceso de traducción-interacción está constituido por todas aquéllas acciones, relacionadas entre sí y convenientemente secuenciadas, que debe efectuar un individuo sobre cualquier situación-problema, expresada en uno o varios sistemas de representación combinados, para ser representada o expresada bien en los mismos sistemas de representación del enunciado original (lo que supone una simple *transformación sintáctica interna* del enunciado dentro de un contexto representacional determinado), bien en otro u otros sistemas de representación diferentes (lo que supone una verdadera *traducción o transformación sintáctica externa*), manteniéndose inalterada la información del mensaje inicial o, lo que es lo mismo, el contenido semántico de la situación-problema. Esto se puede expresar de otra manera diciendo que un proceso de traducción-interacción es aquél que trata de construir y relacionar *situaciones matemáticamente equivalentes* entre sí. En este sentido, hablamos de interacción entre expresiones diferentes de la misma situación-problema, aunque equivalentes desde el punto de vista matemático.

Llamamos *tarea de traducción-interacción* en Educación Matemática a toda actividad de enseñanza-aprendizaje que comporte el desarrollo de un proceso de traducción-interacción entre sistemas de representación. Consideraremos como tareas de traducción-interacción las que se presentan aisladamente en los procesos didácticos (tareas de transformación, de lectura o expresión) y las que forman parte imprescindible de los procesos de demostración o resolución de problemas. Para que una tarea de este tipo pueda realizarse, la situación-problema debe ser transformada *sin que se produzca alteración de su contenido y significados.*

Las tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación en matemáticas son actividades que *no se pueden considerar dentro de la categoría de problemas de matemáticas.* Constituyen instrumentos importantes para el hacer matemático, estrechamente relacionados con el lenguaje matemático (sintaxis) y con la red de significados que dan contenido a las representaciones correspondientes (semántica).

6.4.5.1. *Tipos de tareas básicas de traducción-interacción*

Haciendo un corte transversal entre los tres niveles de expresiones significantes en matemáticas, encontramos que una parte considerable de la representación significante se apoya en los siguientes sistemas fundamentales: *simbólico* (incluyendo fórmulas, signos y símbolos), *gráfico, verbal* (lenguaje común) y *tabular,* los cuales se combinan entre sí en el tercer nivel para dar lugar a expresiones complejas. Estas conclusiones concuerdan con el cuadro de la figura 6.4, extraído de los trabajos de Janvier, Kaput, Lesh y Behr (Janvier, C., 1987), que expresa las principales tareas de interacción-traducción entre sistemas de representación escrita.

Las tareas que aparecen en el mencionado cuadro representan sólo una parte del universo de tareas de traducción-interacción posibles. No obstante, este marco particular es suficiente para encuadrar los aspectos específicos que se van a tratar en función de los propósitos de la investigación, en la que vamos a emplear un tipo concreto de tarea: *la transformación-interacción sintáctico-semántica interna dentro del contexto verbal,* con la intervención de algunos símbolos numéricos. En este sentido, dejamos abierta la posibilidad de realización de futuras investigaciones en las que intervengan algunas de las restantes tareas señaladas en el cuadro.

sistemas simbólicos de representación escrita

Desde \ a	Descripción verbal (1)	Tablas numéricas (2)	Gráficos y Diagramas (3)	Fórmulas y Símbolos (4)
Descripción verbal (1)		Medida	Croquis Diseño	Modelo
Tablas numéricas (2)	Lectura relaciones numéricas		Dibujo	Ajuste numérico
Gráficos y Diagramas (3)	Lectura relaciones gráficas	Tabulación relaciones gráficas		Ajuste gráfico
Fórmulas y Símbolos (4)	Lectura símbolos y relaciones simbólicas	Cálculo y tabulación relaciones simbólicas	Croquis diseño	

Figura 6.4.

6.5. Pensamiento numérico relativo

Pretendemos avanzar aquí un poco más en las características del Pensamiento Numérico, en la línea de establecer una estrecha relación entre representación y pensamiento; entre las manifestaciones observables del funcionamiento cognitivo y el propio funcionamiento cognitivo. Las conclusiones que se exponen constituyen la parte del análisis didáctico realizado que afecta directamente al enfoque adoptado en la investigación. Dichos planteamientos generales justifican y enmarcan la decisión adoptada en la última parte del trabajo (hipótesis VI).

Lo que aquí denominamos pensamiento numérico relativo se refiere al conocimiento en su sentido más amplio (conceptos, procedimientos, significados, destrezas, representaciones, etc.) sobre un campo de situaciones (que hemos llamado relativas [5]) caracterizadas por tres elementos [6]: cantidad/medida, origen o referencia y dos sentidos opuestos. En dicho campo se pueden distinguir a su vez, por sus diferencias acentuadas, dos subcampos importantes (aditivo y multiplicativo) en función de las operaciones y propiedades aritméticas que intervienen. El primero de ellos gira en torno a las comparaciones y transformaciones de tipo aditivo sobre un soporte numérico natural o relativo (fundamentos del doble signo y de la estructura de orden total sin primer ni último elementos así como del grupo aditivo de los números enteros en contextos discretos), y el segundo atiende a las comparaciones y transformaciones de tipo multiplicativo (soporte de los números racionales).

En este trabajo dirigimos nuestra atención al primero de ellos, considerado como un subcampo importante del campo conceptual aditivo, limitando, por tanto, la investigación al terreno de las situaciones relativas con estructura aditiva [7]. Igualmente, focalizaremos el estudio en aquéllas situaciones en las que intervie-

[5] Se definirán con precisión en el capítulo 9. Aquí, utilizamos una aproximación intuitiva en el sentido al que se hace alusión en la nota a pie de página núm. 1 de este capítulo.

[6] Consideraremos también como situaciones relativas, aquéllas en las que la cantidad no interviene como elemento relevante, como por ejemplo las de tipo lógico o de cambio de signo (engranajes y poleas, juegos de cara o cruz con monedas, etc.), en las que únicamente aparecen los dos sentidos, o las situaciones de clasificación dicotómica en torno al origen o referencia (pasarse-no llegar, negativos-positivos, más-menos, etc.), en las que intervienen únicamente dos elementos: referencia y sentidos opuestos.

[7] No es sólo la estructura aditiva la que caracteriza a este tipo de situaciones. Podríamos decir que es la estructura comparativa (más general que la aditiva y fundamental como campo de referencia para el Álgebra), basada en las relaciones de precedencia y de coincidencia y, por tanto, la estructura de orden total sin primer ni último elementos, la que subyace en todas las situaciones del área de investigación.

nen exclusivamente valores enteros (no se tendrán en cuenta, por ejemplo, las situaciones con números decimales, fraccionarios o irracionales).

6.5.1. *Pensamiento numérico relativo aditivo y discreto*

El dominio de las tareas propias del pensamiento numérico relativo aditivo está formado por el campo de referencia que da significado a la estructura aditiva del sistema simbólico de los números con signo, incluyendo los aspectos sintácticos (reglas, etc.) y representacionales (lingüísticos, simbólicos, gráficos). Es decir, teniendo en cuenta las consideraciones de Vergnaud, G. y de Kaput, J. J. (1987)[8] y las conclusiones que se exponen en el apartado 6.4.2, el pensamiento numérico relativo aditivo con valores enteros presenta los siguientes aspectos:

— *Un campo de referencia* de las estructuras numéricas, que incluye: objetos, situaciones reales y acciones sobre ellas; significados, conceptos-imágenes y representaciones cognitivas en situaciones relativas con soporte concreto; significados lingüísticos; actitudes personales, valores y normas sociales en torno a los términos relativos en la vida cotidiana, etc. Este campo de referencia se puede, a su vez, subdividir en otros dos íntimamente relacionados: *referentes reales (mundo real; experiencias del individuo) y referentes cognitivos, significados o concepciones* (nivel cognitivo; representaciones privadas).

— *Unos esquemas simbólicos* relacionados con el campo de referencia: estructura aditiva de los números naturales relativos; símbolos matemáticos y reglas sintácticas; recta numérica y coordenadas; tablas; gráficos y diagramas; lenguaje algebraico; lenguaje natural verbal y escrito; conjuntos de signos y/o símbolos y reglas de utilización. Son instrumentos para representar y comunicar ideas; no tienen significados concretos a menos que estén relacionados con un campo de referencia al que sirven de soportes y vehículos de representación y comunicación.

— Unas *correspondencias* (relaciones referentes-significantes) que relacionan entre sí los elementos de los dos puntos anteriores y se encuentran mediatizadas por las experiencias cotidianas y de tipo académico en el terreno de la aritmética y el álgebra elementales.

6.5.2. *Formas de representación de las situaciones relativas*

El cuadro de la figura 6.5. esquematiza, en un continuo que va desde las experiencias intuitivas, cotidianas y no matemáticas a las experiencias dentro del

8 Algunos de estos trabajos se encuentran referenciados en Janvier, C. (edit.), (1987).

ámbito exclusivamente matemático, los diferentes niveles de representación así como los elementos que intervienen.

En los diferentes niveles existen elementos comunes que forman parte del conocimiento lógico-matemático subyacente (relaciones, estructuras, etc.). Asimismo, en los últimos niveles correspondientes a la manifestación y representación externas del conocimiento, se producen mezclas y contaminaciones que pueden ser indicadores del funcionamiento real del pensamiento numérico relativo.

6.6. **Epistemología y fenomenología de la estructura aditiva de los números enteros**

Las situaciones relativas de cuantificación discreta con significado concreto y estructura aditiva son muy variadas y abarcan desde el problema más simple, y a la vez más general, de comparación entre dos cantidades "absolutas" o de transformación de una cantidad en otra, hasta la situación más compleja con magnitudes dirigidas. Asimismo, son numerosas las áreas de aplicación práctica de la cuantificación relativa: economía, física, demografía, deportes, etc.. Por este motivo su clasificación es difícil, a pesar de lo cual trataremos de establecer una categorización que permita comprender y manejar los fenómenos, así como diferenciar unas tareas de otras en un esquema de conjunto lo más completo posible. Esta clasificación, que supone un primer intento de estructuración, es provisional y estará sujeta a modificaciones en función de los resultados que se exponen en los capítulos siguientes así como de los que se obtengan en trabajos posteriores.

6.6.1. *Características básicas*

Los elementos que caracterizan las situaciones y problemas del campo en estudio y que han servido de punto de partida para esta primera clasificación son los siguientes:

Tópico fenomenológico

Los temas o tópicos susceptibles de aplicación del pensamiento numérico relativo aditivo son numerosos. Los temas más comunes y, a la vez, más interesantes son: comparación de numerosidades y posiciones; demografía y cambios poblacionales; listas y colas; clasificaciones deportivas; economía; estimación-aproximación de cantidades; estadística elemental; juegos; deportes; móviles (ascensores, desplazamientos, etc.); geometría (recta numérica, plano de coordenadas, etc.); escalas (temperaturas, cronología y otras); magnitudes físicas y modelos duales (balanza, cubos fríos y calientes, partículas cargadas, etc.).

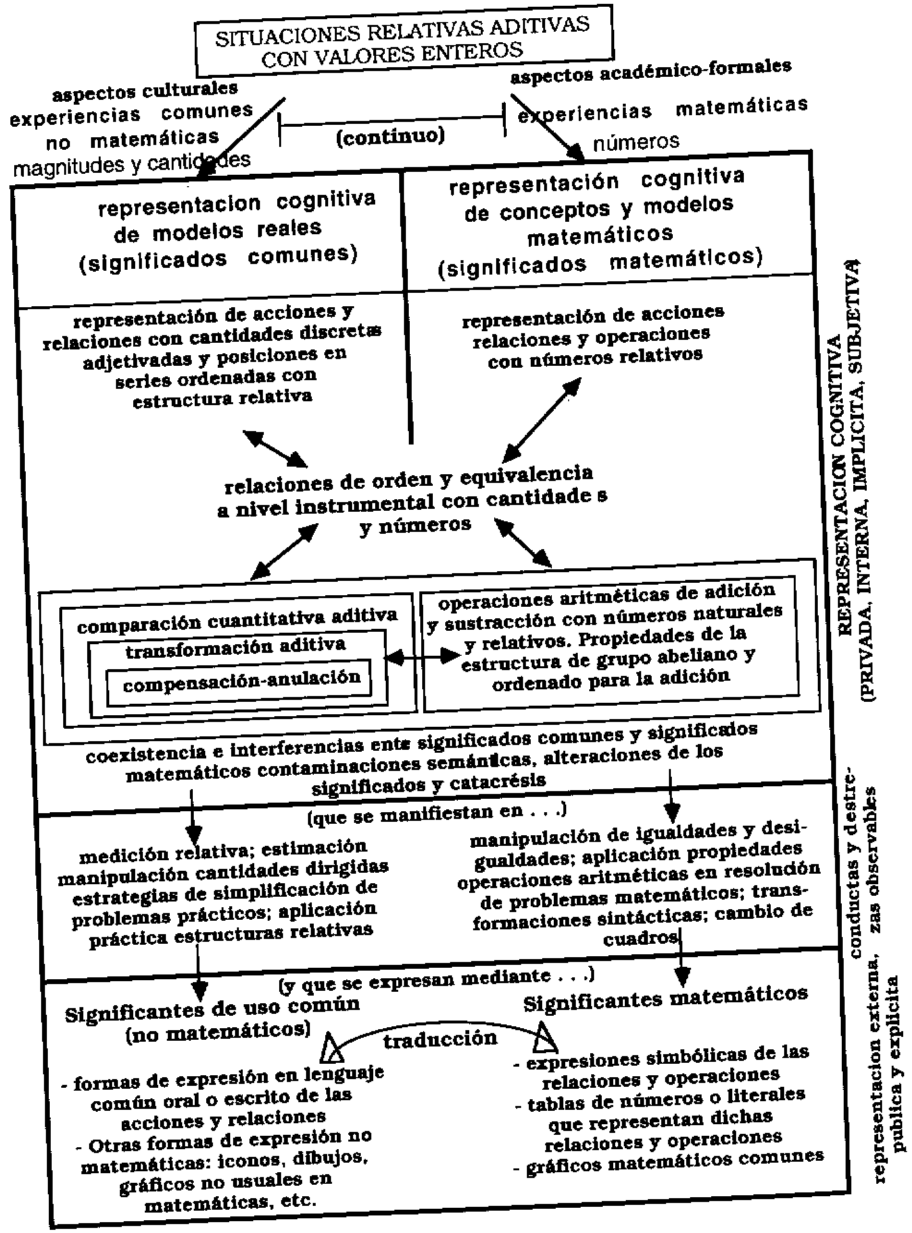


Figura 6.5.—Formas de representación de situaciones relativas.

Por otra parte, a título de ejemplo, los fenómenos caracterizados por consideraciones ordinales y/o topológicas aparecen en diversos ámbitos del conocimiento y de la actividad cotidiana: en Matemáticas (propiedades de figuras planas; plano de coordenadas; transformaciones en el plano y en el espacio; gradientes de líneas; funciones; estadística; cálculo (áreas orientadas, etc.)); en Ciencias Experimentales (termodinámica; óptica; mecánica; topografía); en otras Ciencias y actividades humanas (demografía, cambios poblacionales; economía, etc.).

Soporte, referencia y relación-operación.
En todas las situaciones existen dos elementos, como son *el soporte y la referencia,* que presentan una serie de variantes útiles para la clasificación. El primero de ellos se refiere a las cantidades-números que intervienen como base del problema y que constituyen los objetos sobre los que se aplican las relaciones; el segundo se refiere a la cantidad-número que se toma como origen de relaciones. Las modalidades que presentan dichos elementos son las siguientes:

Para los soportes: *natural cardinal* (Ejemplos: demografía y cambios poblacionales; economía; balanza; etc.); *natural ordinal* (Ejemplos: clasificaciones; listas y colas; llegadas a meta; etc.); *natural relativo* (Ejemplos: medidas en la naturaleza; economía con valores relativos; medida de magnitudes vectoriales; etc.); *irrelevante* (Ejemplos: engranajes y poleas; juegos de cara o cruz; situaciones relativas tratadas desde un punto de vista cualitativo, etc.).

Para las referencias: *natural cardinal* (Ejemplos: estimación-aproximación de cantidades; saldos bancarios; bolsa, inflación; números índices; golf; etc.); *natural ordinal* (serie ordenada con primer elemento); *natural relativa* (Ejemplos: recta numérica; magnitudes escalares y vectoriales; errores de medición, etc); *irrelevante* (Ejemplos: juegos con fichas de dos colores; globo; balanza; partículas cargadas; ganancias-pérdidas, subidas-bajadas, etc.).

Las figuras 6.6 y 6.7 presentan las posibles combinaciones entre ambas categorías y los diferentes soportes, referencias y estructuras.

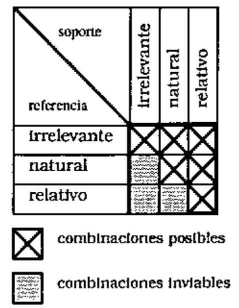


Figura 6.6.—Combinaciones de las categorías: origen o referencia y soporte.

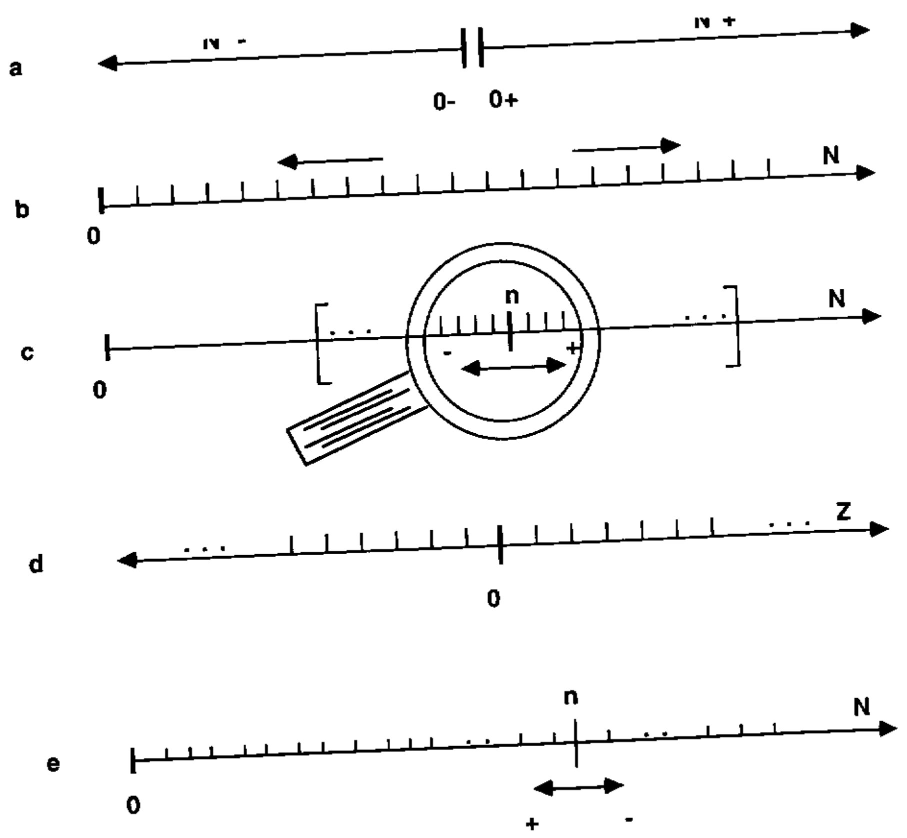


Figura 6.7.—Esquemas gráficos posibles para las situaciones relativas.

Además de las dos características mencionadas, podemos considerar un tercer elemento que influye igualmente en la clasificación de situaciones. Nos referimos al *tipo de relación-operación* existente en la situación-problema, de entre las que distinguiremos provisionalmente las siguientes: adición y sustracción; comparación aditiva; transformación aditiva; anulación-compensación; medida y sus composiciones correspondientes. Este tercer elemento, que va a constituir el factor fundamental del estudio teórico que se expone en el capítulo 7, queda, no obstante, relegado a un segundo plano en la clasificación que se va a exponer a continuación. Precisamente, la consideración prioritaria de los otros dos factores es la que da carácter de provisionalidad e incompletitud a la misma.

6.6.2. *Tipos de situaciones*

Utilizaremos seis tipos de situaciones que van desde las más generales, en las que los aspectos "relativos" se encuentran implícitos en numerosas actividades de la vida diaria, hasta las más concretas, en las que lo relativo domina perdiéndose los aspectos "absolutos" iniciales.

En lo que concierne al orden se ha utilizado, además, la siguiente conjetura: "el grado de dificultad en el manejo y resolución de este tipo de situaciones, debe ir en aumento en el siguiente orden:

— situaciones basadas en la estructura natural y en las operaciones de adición y sustracción, que se corresponden con las denominadas *naturales;*

— situaciones basadas en aspectos topológicos de los números naturales y enteros (vecindad, orden topológico), que se corresponden con las denominadas *topológicas*;

— situaciones basadas en propiedades algebraicas (igualdad; opuestos; elemento neutro, simetría), que corresponden a los tipos *lógico-duales* y *prealgebraicos;*

— situaciones basadas en la estructura de orden sin primer ni último elementos y en la medida, que se corresponden con los tipos *geométrico-representacionales* y *métricos*.

Con independencia de que esta hipótesis se someta o no a contraste empírico, se puede asegurar que la clasificación trata de recoger todas las situaciones relativas con estructura aditiva, agrupa en torno a cada tipo las que tienen una estructura similar y permite vislumbrar una cierta relación de inclusión entre los tipos si se eliminan las prioridades establecidas.

El orden de los tipos de situaciones es el siguiente:

Situaciones lógico-duales: están basadas en el significado más general del concepto de "opuestos" o "contrarios", la operación básica es la inversión dual o cambio de signo y tanto el soporte como la referencia son irrelevantes. Distinguiremos, a su vez, los siguientes tipos: de cambio de signo o *duales sin referencia* (engranajes y poleas; juegos de cara o cruz; circuitos de conmutadores); *duales con referencia no cuantificada* (situaciones relativas tratadas desde un punto de vista cualitativo; comparaciones no cuantitativas basadas en apreciaciones globales y groseras); *duales con referencia cuantificada* [al igual que en los anteriores no se trata de precisar un valor numérico, sino de situar cualidades diferentes a un lado o al otro de la referencia (instantes antes-después de tal momento; capacidad mayor-menor que un litro; costar más-menos de ..; etc.)]. Se trata de la versión concreta y más elemental de la ley de tricotomía.

Situaciones naturales: tienen como soporte los números naturales en sus aspectos cardinal y ordinal, como referencia un número natural y las operaciones básicas son la adición y sustracción de números naturales. La estructura de orden en N, junto a las operaciones de suma y resta, proporcionan los elementos básicos para una estructura relativa implícita, que es limitada al no estar permitidos o no tener sentido los valores por debajo de cero.

Dentro de esta categoría podemos diferenciar, a su vez, dos tipos de situaciones: *con soporte absoluto (esquema b)* [comparación de numerosidades (cardinal) y de posiciones (ordinal)] y *con soporte adjetivado (esquema e)* (cardinal: transformación de cantidades absolutas con referencias naturales; economía sin crédito ni debe (tengo 100 ptas. y me regalan 500, luego me gasto..); personas que suben y bajan en medios de transporte o que entran y salen a un local, etc.; demografía y cambios poblacionales; ordinal: transformación de posiciones con referencias ordinales naturales; listas y colas; clasificaciones deportivas; etc.).

Situaciones topológicas: están caracterizadas por una referencia natural en torno a la que se construye una estructura relativa explícita y local y por la coexistencia de los números naturales y los relativos, adquiriendo estos un significado explícito directamente relacionado con la estructura natural ("distancia relativa" entre pares de números naturales); las operaciones básicas son la adición y sustracción de números naturales y números relativos.

La mayoría de las tareas propias de esta clase se distinguen por una *"concentración"* de valores o cantidades dirigidas en torno a una referencia ("valor normal") que se suele establecer con la intención de "simplificar" la situación. Igualmente consideraremos todas aquéllas situaciones que se caracterizan por el "cambio de origen" y traslación de la estructura relativa. En todas ellas, los valores "giran" en torno a la referencia establecida.

Ejemplos importantes de este tipo de situaciones son los siguientes: *de cambio de origen y estructura relativa local (esquema c)* (economía: Bolsa (referencia: índice del día anterior); Inflación (referencia: índice de precios del mes anterior, etc.); otros números índices); *de concentración (esquema c)* (estimación-aproximación entera de cantidades y medidas; errores de medición; juegos; estadística (valores en torno a la media aritmética como origen); etcétera).

Situaciones prealgebraicas: se caracterizan por la intervención de los conceptos de "igualdad" y de "opuestos aditivos", el soporte es natural adjetivado (las cantidades tienen una etiqueta o significado dual: izquierda-derecha, arriba-abajo, positivo-negativo, etc.), la referencia es irrelevante, cuando se corresponde

con la situación de equilibrio o con un valor implícito que no interviene en la resolución de la situación, y las operaciones básicas son la compensación, la anulación y la adición y sustracción.

Distinguimos dos tipos de situaciones: *estáticas (esquema a)* (fichas o monedas de dos colores (Chang, Lisa); cubos fríos y calientes (Jencks, S; Peck, D.); partículas cargadas (Cotter, S.); economía sin referencias (transformaciones y composición de transformaciones) (ganancias-pérdidas, gastos-ingresos, compras-ventas, balanza de pagos, etc.); economía sobre un soporte adjetivado con referencia natural irrelevante (intercambios comerciales, saldos bancarios, déficit-superávit, etc.); comparaciones y transformaciones de carácter estático sin referencias o con referencias irrelevantes y sobre un soporte natural adjetivado); *dinámicas (esquema a)* (balanza; globo (Janvier, C.); transformaciones dinámicas sin referencias y sobre un soporte natural adjetivado (avances-retrocesos sucesivos, subidas-bajadas sucesivas, etc.).

Situaciones geométricas: la recta numérica y el sistema de coordenadas cartesianas constituyen una imagen gráfica intuitiva de la estructura relativa y sus propiedades. La linealidad, el doble sentido y el doble signo a partir del cero relativo, la medida y el orden sin primer ni último elementos, aparecen reflejados en un dibujo directamente relacionado con la experiencia real del individuo. La adición y sustracción de números relativos y las propiedades características de la estructura de orden total sin primer ni último elementos son las operaciones y relaciones que intervienen.

Consideraremos aquí dos tipos de situaciones con soporte y origen relativo *(esquema d): recta numérica* (transformaciones; distancias; situaciones que involucran al número relativo como estado o punto de la recta y como operador, desplazamiento dirigido o transformación sobre la recta; *plano cartesiano y sistema de coordenadas* (transformaciones geométricas; áreas orientadas; gráficas de funciones; etc.).

Situaciones métricas: constituyen, en su mayoría, los ejemplos más utilizados para ilustrar el tema de los números enteros. El campo de contenidos de este tipo de situaciones es muy extenso, ya que abarca a todas las magnitudes dirigidas discretas o discretizables ya sean escalares o vectoriales. La recta numérica relativa es el esquema simbólico más utilizado para su representación *(esquema d)*.

Distinguiremos dos tipos dentro de este apartado: escalas y otras magnitudes extensivas (cronología; tiempo horario; temperatura y cantidad de calor; mezclas; planisferio; medidas en la naturaleza; etc.) y magnitudes vectoriales (móviles; magnitudes físicas; etc.).

6.7. Algunas conclusiones

De lo expuesto a lo largo del capítulo, extraemos las siguientes conclusiones:

a) El conocimiento matemático presenta características epistemológicas que justifican su análisis desde el punto de vista fenomenológico y cognitivo.

b) El análisis didáctico del conocimiento matemático debe atender a cuatro grandes campos de estudio y reflexión: Epistemología, Fenomenología, Aprendizaje y desarrollo cognitivo y Enseñanza y currículum.

c) Del proceso histórico sufrido por los números negativos y los números enteros, así como del análisis de las relaciones entre dicho proceso histórico y el proceso didáctico usual, se detectan desajustes que tienen una raíz epistemológica, es decir, son debidos a la propia naturaleza de los conocimientos así como a sus relaciones con las situaciones y fenómenos.

d) Las tareas, situaciones y problemas propios del campo de investigación se basan en medidas y números que poseen una estrecha relación con las magnitudes y cantidades a las que se aplican; es preciso clarificar las relaciones existentes entre los conceptos de magnitud, cantidad, número y medida de cantidades.

e) De las relaciones establecida entre la representación cognitiva y significante, o entre las experiencias y los procesos cognitivos, se deduce que, junto a las experiencias con expresiones significantes en matemáticas o en lenguaje común, la representación cognitiva, que dota de contenido semántico al pensamiento numérico, se encuentra influenciada por las experiencias sensibles con magnitudes y cantidades del mundo físico. En consecuencia, parece pertinente considerar las condiciones en que se producen las experiencias cuantitativas y métricas del sujeto en su interacción con la realidad. Conjugando las consideraciones matemáticas con las empíricas conseguiremos tener una visión más completa del problema en estudio.

f) Con respecto a la representación del conocimiento objeto del pensamiento numérico relativo aditivo, existe una mezcla compleja de significados y expresiones significantes pertenecientes al lenguaje común y al lenguaje matemático. En particular, en el contexto verbal (en el que se sitúan los enunciados de los problemas aritméticos elementales), y en una clara interacción entre el lenguaje común y los registros matemáticos, intervienen términos y significados de uso común, asociados al campo de las medidas propias del dominio, junto a símbolos matemáticos y palabras directamente relacionadas con las operaciones aritméticas elementales. Dichos términos comunes están a su vez asociados a percepciones y acciones concretas del sujeto, las cuales pueden y deben ser definidas, sistematizadas e incluidas en el análisis.

g) Del análisis fenomenológico realizado se comprueba la existencia de un tipo de medidas que son de uso común en una amplia gama de situaciones cotidianas y que, sin embargo, presentan características estructurales diferentes de las que poseen las medidas naturales o enteras.

Las conclusiones anteriores reafirman y dan precisión a los objetivos e hipótesis enunciados en el capítulo 2. Podemos concluir diciendo que, de las primeras conclusiones y conjeturas que se indican en el capítulo 1, de las consideraciones que se establecen en los capítulos 3, 4 y 5 así como de las relaciones establecidas entre los datos más relevantes obtenidos en la primera fase del análisis didáctico, se pone de manifiesto el carácter prioritario del análisis epistemológico sobre cualquier otra consideración. En la parte III se exponen los resultados de un estudio teórico que se ha realizado, precisamente, buscando las raíces epistemológicas del problema para clarificar los interrogantes que se detallan en el apartado 1.2 del capítulo 1.

TERCERA PARTE

Estudio teórico

CAPÍTULO

7

Medidas y números naturales relativos

7.1. Introducción

El análisis didáctico que hemos realizado afecta, según se desprende de los antecedentes y de las consideraciones generales que se han expuesto en el capítulo 6, a facetas diferentes del tema objeto de estudio. La extensión de cada una de ellas es de tal magnitud que su desarrollo conjunto correspondería a un programa de investigación a largo plazo que excede los propósitos de nuestro trabajo. Por tal motivo, como se explica en el apartado 1.6 y se deduce de las conclusiones establecidas en el capítulo 6, consideramos necesario atender, de manera prioritaria, a la clarificación de los conceptos y relaciones que intervienen, mediante un estudio de carácter lógico-formal y fenomenológico sobre los conceptos cuantitativos, numéricos y métricos involucrados en el dominio considerado.

En este capítulo y en el siguiente se exponen con detalle los resultados obtenidos y se justifican las diferencias encontradas entre las distintas clases de números y medidas. La parte fundamental se dedica, en primer lugar, a la identificación y definición de las medidas y los números naturales relativos, con los que se construye, en segundo lugar, un modelo que integra dichos conceptos junto al resto de los elementos del dominio. Como consecuencia del estudio citado se obtienen conclusiones importantes para la organización del campo conceptual aditivo y para la delimitación del marco general de referencia en el que situar y justificar el contenido de los capítulos restantes, el estudio en su conjunto y la continuación en investigaciones posteriores. El análisis de las diferencias estructurales, que se desarrolla en el capítulo 8, y una clasificación completa de los problemas y situaciones de la parte del campo aditivo que estamos considerando, que se expone en el capítulo 9, completan el estudio teórico.

7.2. Conceptos usuales de magnitud, cantidad y medida

En este apartado vamos a exponer una revisión de los conceptos teniendo en cuenta los antecedentes establecidos en los apartados 3.6 y 4.4. Básicamente, pretendemos completar dicha información, clarificando los planteamientos existentes en Matemáticas y en Ciencias Experimentales, y adoptar una posición teórica adecuada al problema planteado. Para ello, vamos a caracterizar brevemente los conceptos desde cada uno de los enfoques, analizar sus semejanzas y diferencias, explicitar el punto de partida desde el que vamos a precisar, con nuevos argumentos, la diferenciación epistemológica entre ellos y sentar las bases para identificar los diferentes tipos de magnitudes, cantidades, números y medidas que intervienen.

7.2.1. *Los conceptos de magnitud y los diferentes tipos de magnitudes*

El concepto de magnitud se define, en sentido amplio, como *"cualquier característica de los cuerpos capaz de ser medida"* (Enciclopedia Larousse, tomo 6, págs. 843-844) o, de forma más restringida, como *"conjunto de entes abstractos entre los cuales se puede definir la igualdad y la suma"* (Arregui, J., 1970, pág. 25), lo que conduce a la conocida y más simple definición de magnitud en Matemáticas como un *"semigrupo aditivo conmutativo y ordenado"* (op. citada, pág. 26) o, de forma más completa, como un conjunto de entes llamados *"cantidades de magnitud"* con una estructura de *"semigrupo conmutativo con elemento neutro, absoluto y totalmente ordenado"* (Chamorro, C., Belmonte, J. M., 1988, pág. 135), si bien, la existencia de elemento neutro *"no es imprescindible para la construcción matemática de magnitud"* (op. citada, pág. 133)[1].

Por otra parte, si el semigrupo que constituye la magnitud llega a ser grupo estamos ante una *"magnitud relativa"*[2], mientras que en caso contrario se dice que estamos ante una *"magnitud absoluta"* (De Prada, M. D. y otros, 1979, pág. 15). Por otra parte, esta definición queda nuevamente restringida en Matemáticas al caso de las magnitudes escalares, añadiendo a las anteriores la condición de ser arquimediana (Fernández, J., 1970, pág. 72). En definitiva, una *magnitud escalar absoluta "responde a un semimódulo monógeno arquimediano, con un or-*

[1] Tendremos en cuenta esta circunstancia que permite la definición de un tipo especial de magnitud que llamaremos "magnitud natural relativa".

[2] En un apartado posterior de este capítulo, cambiaremos esta denominación por la de "magnitud entera".

den compatible con su ley de composición, sobre un semianillo formado por números reales" (Chamorro, C.; Belmonte, J. M., 1988, pág. 143). Si el subconjunto de números reales coincide con el conjunto de números naturales o números enteros estamos ante una *magnitud discreta;* si el subconjunto coincide con el de números reales positivos estamos ante una *magnitud contínua.*

Este tipo de magnitudes, que junto a las vectoriales constituyen la parte fundamental y más elemental del concepto de magnitud en Matemáticas, se define en términos, más amplios, en el contexto de las Ciencias Experimentales como *"aquellas que están completamente caracterizadas por un sólo valor numérico que las relaciona con una unidad de medida"* (Enciclopedia Larousse, tomo 6, pág. 843). Por tanto, el concepto de magnitud en Matemáticas es más restringido que en Ciencias Experimentales, donde se consideran también las magnitudes "intensivas" o no aditivas. En consecuencia, adoptaremos la definición más amplia de magnitud para abarcar toda la riqueza del campo de investigación e incluir las consideraciones que nos interesan desde el enfoque didáctico. Así, tendremos en cuenta las magnitudes escalares discretas (tanto absolutas como relativas), que cumplen los requisitos formales de la definición matemática, junto a las magnitudes discretas usuales en Ciencias Experimentales que no cumplen alguna de las condiciones que se establecen en dicha definición (temperaturas, cronología, etc.). Igualmente, además de las consideraciones formales, tendremos en cuenta los aspectos empíricos inherentes a los procesos de metrización y a la práctica de la medida.

En otro orden de cosas se aprecia, desde el punto de vista de la Matemática, una notable influencia de la construcción formal de los conjuntos numéricos en la definición del concepto de magnitud, quedando, por este motivo, restringida a aquéllas cualidades cuyos estados se pueden poner en correspondencia con dichos conjuntos numéricos o con una parte de ellos. Este condicionamiento deja fuera, como veremos, la posibilidad de extender o ampliar los conceptos de magnitud y medida en matemáticas a otras cualidades que pueden entrar también dentro de la categoría de cantidades y, por tanto, capaces de ser medidas. Nos referimos, en concreto, a conceptos cuantitativos y métricos relativos (Ejemplo: aumento de temperatura, bajada de la bolsa, etc.) que son utilizados en situaciones cotidianas, pero cuyas propiedades no coinciden con las de los números naturales o enteros.

Por otro lado, no está clara la distinción entre magnitudes matemáticas y magnitudes físicas, basada en que la medida de las primeras se define abstractamente mientras que la de las segundas se efectúa según unas técnicas e instrumentos apropiados (Diccionario citado, pág. 843). Más bien entendemos que, del universo de posibles cualidades medibles en sentido físico (entre cuyos estados se puede establecer un orden, en algunos casos una composición aditiva y en cualquier caso una asignación numérica biyectiva), la Matemática atiende formalmente a un tipo determinado de ellas (las que tienen una estructura isomorfa a un subconjunto de los números reales con la adición y el orden), mientras que las Ciencias Experimentales tienen en cuenta las necesidades prácticas y los aspectos empíricos de la medición, lo que lleva a la consideración de magnitudes que no cumplen los requisitos formales que la Matemática impone.

A partir de este concepto amplio de magnitud pasaremos a trabajar con modelos formales adaptados a las magnitudes, números y medidas que intervienen en el dominio en estudio.

7.2.2. *El concepto de cantidad*

Un elemento clave en el trabajo que presentamos, y que se encuentra en estrecha relación con el concepto de magnitud, es el concepto de cantidad. Desde un punto de vista genérico, se dice que la cantidad es la propiedad de lo que puede medirse o numerarse; de todo lo que es capaz de aumento o disminución. Si queremos especificar algo más, hemos de tener en cuenta la definición que se adopte para el concepto de magnitud. Así, en Matemáticas, se llama cantidad de magnitud a cada uno de los elementos del semigrupo (o grupo) que constituye la magnitud; cada cantidad es, por tanto, una clase de equivalencia formada por todos los elementos de un conjunto homogéneo[3] que verifican la identidad respecto de la característica sobre la que se define la relación de equivalencia. En Ciencias Experimentales se dirá, alternativamente, que presentan en el mismo grado la propiedad o característica que define la magnitud (o que son elementos "iguales" desde el punto de vista de la magnitud), lo que también se suele expresar diciendo que una cantidad es un "estado" determinado de una magnitud.

Por tanto, el concepto de cantidad en las Ciencias Experimentales es, igualmente, un concepto abstracto, ya que se refiere a la propiedad común de un conjunto de objetos o entes pertenecientes al "mundo sensible". Pero, además de que esta propiedad se refiere al "mundo físico" y, por tanto, está sujeta a las condiciones y limitaciones empíricas que la realidad impone, la diferencia con respecto a las matemáticas radica en el hecho de que existen cantidades numerables o medibles experimentalmente que no son consideradas como tales desde el punto de vista de la teoría matemática de magnitudes (Ejemplo: temperatura, otras mag-

[3] Aquél entre cuyos elementos se puede establecer una relación de equivalencia.

nitudes intensivas y no aditivas). Se puede decir, por tanto, que esta teoría proporciona modelos abstractos que son aplicables a una parte de las magnitudes y cantidades del "mundo sensible". Por el contrario, queremos poner de manifiesto que existen cantidades, mencionadas en otros capítulos como "dirigidas" o "adjetivadas", para las que es necesario adaptar los modelos abstractos de la teoría matemática de magnitudes.

7.2.3. *El concepto de medida*

En Matemáticas *"la medida es un isomorfismo entre semimódulos que conserva el orden"* (Chamorro, C.; Belmonte, J. M., 1988, pág. 145), de manera que lo que se establece realmente es una identificación entre el conjunto de cantidades y un subconjunto de los números reales. Según que este subconjunto sea N, Z, Q o R, la medida será natural, entera, racional o real. Asimismo, como consecuencia de la propia definición de magnitud, cualquier medida de una cantidad de magnitud viene expresada por un número y por una unidad de medida que se toma como referencia.

Con independencia de las limitaciones empíricas de la medición, que conduce a la necesidad de trabajar en algunos casos con valores aproximados, el concepto de medida en Ciencias Experimentales es más general y será el que adoptaremos: *"Medir supone asignar un número a una cantidad de magnitud"* (op. citada, pág. 143), definición que se adapta a cualquier enfoque, puesto que está supeditada a lo que se entienda por magnitud y por cantidad de una magnitud.

7.3. Consideraciones epistemológicas

Al hilo de las reflexiones realizadas en el capítulo 3 en torno a la Filosofía de la Aritmética (apartado 3.5), nos proponemos completar los planteamientos básicos del estudio teórico. Nuestra preocupación se centra en precisar las relaciones que existen entre los conceptos implicados; clarificación que se sustenta en la teoría de las formas conceptuales científicas, que presentamos en primer lugar y de forma resumida. Un análisis posterior de los elementos fundamentales de dicha teoría, realizado bajo el enfoque didáctico, va a proporcionar el soporte para la construcción del modelo sobre el que se sustentan nuestros planteamientos teóricos.

7.3.1. *El proceso de constitución de los conceptos métricos*

Como se indicó en el apartado 3.7 del capítulo 3, exponemos en este apartado un análisis de las ideas fundamentales de la obra de Stegmüller, W. (1979), en la que el autor desarrolla una teoría filosófica sobre la naturaleza y el proceso de formación de los conceptos científicos. Igualmente se mencionará la incidencia de esta teoría en la investigación que presentamos.

Para el autor, la formación de los conceptos científicos está determinada no sólo por convencionalismos sino también por la observación sistemática, la generalización empírico-hipotética, la confirmación empírica así como por consideraciones intuitivas de fertilidad y simplicidad. Se trata, por tanto, de un enfoque en el que juegan un papel importante las consideraciones formales o convencionales y las consideraciones empíricas, dando lugar a un tratamiento más amplio que el que suelen tener las magnitudes en matemáticas, donde, como hemos visto en los apartados anteriores, el contenido queda restringido a los aspectos puramente formales y a un determinado tipo de magnitudes.

El punto de partida lo constituye la idea de que lo cualitativo y lo cuantitativo no expresan una separación o diferencia ontológica en la realidad, sino una *diferencia en el lenguaje*. En la realidad no existen dos tipos de fenómenos reales (cualitativos y cuantitativos), sino que estas expresiones se refieren al modo lingüístico que se utiliza para hacer referencia a ellos. En términos usuales se suele hablar de "cuantitativo" por oposición a "cualitativo", cuando, a veces, una cantidad puede ser interpretada como un estado o manifestación particular de una cualidad. Por otra parte, el término "cuantitativo" se suele utilizar también para hacer alusión a aspectos "métricos", con la consiguiente confusión entre la cantidad y la medida. En lo sucesivo evitaremos estas confusiones distinguiendo entre lo cuantitativo (referente a la cantidad) y lo métrico (referente a la medida), distinción que queremos resaltar especialmente en el trabajo.

En función de que la evolución histórica de los conceptos científicos suele ir desde las formas lingüísticas más primitivas (cualitativas/clasificatorias) hasta las más avanzadas (cuantitativas/métricas), pasando por una fase de transición en la que se utilizan conceptos comparativos o topológicos, el autor establece tres tipos de lenguaje y tres sistemas conceptuales científicos: *clasificatorio* (cualitativo), *comparativo* o topológico y *métrico* (cuantitativo).

7.3.1.1. *Conceptos cualitativos o clasificatorios*

La mayoría de los conceptos de la vida cotidiana y de las ciencias son cualitativos y se refieren al contenido de las designaciones de clases: "hombre", "casa", "virus", etc. "El objetivo de este tipo de conceptos es dividir en diversas clases a los objetos de un dominio".

Las condiciones que deben cumplir los conceptos clasificatorios científicos son las siguientes: que den lugar a clases delimitadas con exactitud (mutuamente [illegible]) y que la partición sea completa, en el sentido de que la unión de

clases sea el universo. Una división conceptual es "satisfactoria" si se cumplen dichas condiciones, de lo que se deduce que un gran número de conceptos comunes no proporcionan una clasificación satisfactoria, bien por vaguedad o inexistencia de criterios exactos de delimitación, bien por inconsistencias personales (una misma persona no utiliza las expresiones siempre con el mismo significado) o interpersonales (los miembros de una comunidad lingüística utilizan distintos significados).

Las formas conceptuales clasificatorias, en la medida en que son un medio para describir fenómenos con la intención de llegar a establecer leyes generales, proporcionan un contenido informativo escaso. En este sentido podemos hablar de formas conceptuales *inferiores* o *primitivas* por oposición a las métricas o cuantitativas, que, por su mayor complejidad, nivel de información, precisión y rigor, pueden denominarse formas conceptuales *superiores*. La *necesidad de precisar más la información y de enriquecer el sistema conceptual clasificatorio conduce a la introducción de conceptos topológicos o comparativos y conceptos métricos,* lo que supone, como veremos, afinar la clasificación y establecer un orden.

A pesar de todo ello, la formación de los conceptos "inferiores o primitivos" no supone una simplicidad de instrumentos y consideraciones, ya que está determinada no sólo por convencionalismos sino también por la observación sistemática, la generalización empírico-hipotética, la confirmación empírica y por consideraciones intuitivas de fertilidad y simplicidad.

7.3.1.2. *Conceptos comparativos o topológicos*

"El paso a las formas conceptuales superiores discurre paralelamente a un aumento del contenido informativo. Los conceptos comparativos o topológicos son conceptos relacionales que permiten hacer comparaciones en el sentido de "más o menos" y se encuentran relacionados desde el punto de vista lingüístico con los comparativos gramaticales".

Los conceptos comparativos o topológicos:

1.—*Permiten emprender diferenciaciones conceptuales mediante el establecimiento de un orden jerárquico que conduce a una "cuasi-serie" (en una misma posición puede haber más de un elemento).*

2.—*Constituyen un importante término intermedio entre los conceptos cualitativos y los cuantitativos. Mediante ellos se introduce un determinado tipo de orden en el dominio de objetos, que facilita el paso a conceptos cuantitativos o métricos mediante una simple metrización del orden en cuestión.*

7.3.1.2.A. *Introducción de conceptos comparativos*

Sea A el dominio de objetos para los que hay que introducir un concepto comparativo (A se concibe como una clase). El primer paso consiste en establecer un *orden serial,* para lo cual se introducen dos relaciones, una de precedencia P (orden) y otra de coincidencia C (equivalencia), que establecen un *cuasi-orden* en el dominio (Hempel, 1952).

La introducción de una relación de orden no se basa en procedimientos puramente convencionales. Por el contrario, se han de utilizar resultados empíricos; las relaciones concretas son empíricas y las condiciones o propiedades formales que deben cumplir las relaciones P y C se convierten, en cada caso particular, en hipótesis empíricas.

Las *condiciones* que deben cumplir las relaciones C y P son:

— C es relación de equivalencia. De su aplicación se obtiene el conjunto cociente A/C.

— P es transitiva.

— P es C-irreflexiva: $x\ C\ y \Rightarrow x\ \neg P\ y$ (ningún objeto del dominio debe precederse a sí mismo y ningún objeto puede preceder a otro con el que esté en la relación de coincidencia).

— P es C-conexa: $(x\ C\ y) \vee (x\ P\ y) \vee (y\ P\ x)$. (Todos los objetos del dominio deben ser comparables respecto de P y C).

Como consecuencia de estas condiciones:

— P es irreflexiva y asimétrica

— Dados x e y cualesquiera, se da una, y solo una, de las relaciones:

— $x\ C\ y$, $x\ P\ y$, $y\ P\ x$

— $x\ C\ y \wedge y\ P\ z \Rightarrow x\ P\ z$

— $x\ P\ y \wedge y\ C\ z \Rightarrow x\ P\ z$

Resumiendo, se dice que P representa una serie respecto a C cuando:

a) C es relación de equivalencia

b) C y P deben excluirse mutuamente

c) P es transitiva

d) Para x e y cualesquiera del dominio A, debe darse una, y solo una, de las afirmaciones: xCy, xPy, yPx.

"El par ordenado $Q = (C, P)$ constituye una cuasi-serie (o concepto comparativo) para el dominio A"; dicho de otra forma, "las relaciones C y P establecen un concepto comparativo en el dominio A", o bien, "el dominio A es representable como cuasi-serie".

Todo concepto comparativo lleva consigo una *operación* que permite establecer la cuasi-serie (un medio práctico que evalúa cualitativamente la acción de

comparar). Se puede decir, también, que el par ordenado $Q = (C, P)$ constituye el instrumento básico para implantar una estructura relacional comparativa en el dominio A.

Algunas de las condiciones anteriores corresponden a hechos empíricos y no a verdades lógicas (no se pueden verificar en todos los casos, sino sólo en un número finito de ellos; no se puede deducir su validez al ser generalizaciones hipotéticas inverificables). En este nivel comparativo se mezclan la *formación de conceptos,* las *experiencias y* la *formación de hipótesis*, siendo necesarios tanto los resultados empíricos como las generalizaciones hipotéticas.

7.3.1.2.B. *Relaciones entre los conceptos comparativos y clasificatorios*

En el nivel de la clasificación se le asignan a las clases unos predicados. "Los predicados utilizados y los conceptos de clases designados por ellos, desaparecen completamente en el nivel comparativo. En su lugar aparecen dos *conceptos relacionales diádicos C y P* ". En este paso del nivel clasificatorio al nivel comparativo se pueden dar dos posibilidades:

1.—La relación de coincidencia establece una partición que coincide con la clasificación inicial: "se sustituyen n conceptos predicativos distintos (nivel clasificatorio) por un solo concepto relacional diádico (coincidencia) con la misma eficacia que los n conceptos anteriores" y, por tanto, "no hay aumento de información, sino sólo simplificación técnica". Con la relación de precedencia y el orden inducido por ella se establece, por otra parte, una información nueva.

2.—La construcción de una cuasi-serie va acompañada de un refinamiento de la división en clases: "el aumento de información conseguido por medio del concepto comparativo es, por lo tanto, doble: diferenciaciones más precisas que en el nivel cualitativo e introducción del concepto relacional P".

El paso de los estadios iniciales puramente cualitativos (división en dos clases) a la introducción de una cuasi-serie completa y exhaustiva o infinita en su caso, con el establecimiento de un concepto comparativo, debe pasar por sucesivas etapas de refinamiento de la clasificación inicial: a) Dualidad simple; b) Tres clases y establecimiento de un orden entre ellas; c) Generalización a un número finito de clases; d) En algunos casos, generalización a un número infinito de clases o hasta conseguir la seriación minimal.

La relación de cuasi-orden inducida por (C, P) se puede hacer más fuerte, convirtiéndola en una única relación de orden R (reflexiva, antisimétrica y transitiva; todas las demás propiedades se deducen de estas tres). De aquí se puede pasar al concepto más fuerte de "buen orden", si bien este concepto no es importante en la metrización.

7.3.1.3. Conceptos cuantitativos o métricos

El paso a los conceptos métricos se realiza mediante funciones monádicas numéricas (correspondencias unívocas): *"Todos los conceptos cuantitativos o métricos, llamados también conceptos de magnitud, se introducen mediante funciones numéricas y se representan formalmente mediante functores"*. La función puede ser de punto o de conjunto. Distinguiremos entre: *metrización* (introducción de un concepto métrico) y *medición* (proceso empírico de determinación de un valor de una magnitud).

Existen dos maneras de introducir conceptos métricos en Ciencias Experimentales:

— metrización primaria o fundamental: metrizaciones de cuasi-series.

— metrización derivada o secundaria: Ej. densidad = masa/volumen; temperatura (más compleja y depende de la longitud).

7.3.1.3.A. *Metrización de cuasi-series que llevan a magnitudes extensivas*

En las magnitudes llamadas extensivas (peso, longitud, volumen, etc.), existe una operación semejante a la adición. Por el contrario, en las magnitudes no extensivas o intensivas (temperatura, etc.) no se cumple esa semejanza con la adición.

El producto de la metrización de una cuasi-serie extensiva es una *escala de proporciones* y se establece mediante un isomorfismo entre el dominio de la cuasi-serie y el dominio de los números (que suele ser un subconjunto de los números reales).

Las *condiciones necesarias* para la metrización de una cuasi-serie son las siguientes:

— Existe una función f entre Q (cuasi-serie o concepto comparativo) y R (números reales), tal que:

— a cada $x \in Q$ se le asigna un número real $f(x)$.

— para todo $x \in Q$ y para todo $y \in Q$, $x\ C\ y \Rightarrow f(x) = f(y)$.

— para todo $x, y \in Q$, $x\ P\ y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

— Existe una operación de combinación en Q (que se puede denotar por $\oplus$), semejante a la adición en R, de manera que $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$.

Por tanto, las tres *reglas* para la introducción de un concepto métrico extensivo son:

— regla de igualdad: $x\ C\ y \Rightarrow f(x) = f(y)$

— regla del valor unidad: elección de un valor stándar arbitrario, motivado por el propio proceso de metrización.

— principio de aditividad: $f(x \oplus y) = f(x) + f(y)$

Con ello "La metrización fundamental de una magnitud extensiva se reduce al proceso de contar" y los elementos fundamentales son: el dominio básico Q, las relaciones C y P, la operación de composición "aditiva" y el objeto stándar o unidad k.

7.3.1.3.B. *Metrizaciones de cuasi-series que conducen a magnitudes "intensivas"* [4]

A diferencia de las escalas de proporciones para magnitudes extensivas (Ej. el peso), la temperatura se mide mediante una *escala de intervalos*, ocurriendo que las escalas de proporciones pueden considerarse como casos particulares de las escalas de intervalos.

En el caso de la temperatura, el paso a lo métrico no es tan sencillo como en el caso de las magnitudes extensivas, ni tampoco menos importante que en ellas, puesto que responde especialmente a la necesidad de objetivizar el concepto. Dado que se carece en estos casos de la operación de combinación $\oplus$ (las temperaturas no se pueden sumar), la construcción se hace constituyendo en primer lugar una *escala ordinal:*

$$(1) \quad \begin{cases} x\ C\ y \Rightarrow t(x) = t(y) \\ x\ P\ y \Rightarrow t(x) < t(y) \end{cases}$$

Para pasar de la escala (1) a una escala métrica se han de añadir tres reglas más:

— elección de valor nulo o punto de partida [0° C (agua en congelación)];

— elección de un valor unidad [100° C (agua en ebullición)];

— introducción de una tercera relación tetrádica (igualdad de diferencias de valor), con lo que aparecen las *longitudes* en el termómetro y se obtiene una metrización derivada.

7.3.2. ***La medida: síntesis entre la cantidad y el número***

La teoría que se ha expuesto sucintamente en el apartado anterior se refiere a los conceptos científicos que tienen su origen en los fenómenos reales; en las

[4] "Algunos autores las llaman extensivas 'no aditivas'" (el término "intensivo" se debe entender en estos contextos como equivalente a "no aditivo").

experiencias con cualidades perceptibles. Pero dichas consideraciones son insuficientes cuando se pretenden estudiar los fenómenos desde la óptica de la Educación Matemática. No hay más que tener en cuenta la existencia de otros elementos importantes que afectan a los fenómenos educativos, tal y como se ha puesto de manifiesto en los apartados 4, 5 y 6 del capítulo 4, que constituyen perspectivas diferentes sobre el mismo tema y que han de ser convenientemente relacionados y combinados entre sí para obtener una información relevante y útil.

Formalmente, un concepto métrico extensivo aparece cuando se establece un isomorfismo entre el dominio de estados de un concepto comparativo (conjunto de cantidades) y una parte del conjunto de los números reales que asigna un número a cada uno de los elementos (clases) de la serie ordenada. Pero la comparación, por sí sola, lo único que aporta es el establecimiento de series ordenadas. Para que sea posible la metrización es necesario, como hemos visto, que, además del orden, exista una ley de composición aditiva o una relación adicional basada en alguna magnitud auxiliar (como es el caso de la longitud en la escala de temperaturas) que completen la estructura del concepto comparativo y permitan establecer el correspondiente isomorfismo. Con ello diremos que el concepto comparativo es metrizable extensivamente, adquiriendo el estatuto de concepto métrico desde el mismo momento en que se establece el isomorfismo. La ley aditiva entre los elementos de la serie ordenada o la relación auxiliar en el caso de las metrizaciones intensivas permitirán, por tanto, utilizar el término "magnitud" en su sentido matemático usual, en lugar del de concepto comparativo, y llamar "cantidades" a los elementos de la serie ordenada o estados del concepto comparativo.

La teoría de las formas conceptuales científicas, al mismo tiempo que clasifica los conceptos en las tres grandes categorías, establece implícitamente que los conceptos métricos se sustentan en los conceptos clasificatorios y comparativos correspondientes, que son los que sirven de soportes para la metrización. Esto quiere decir que un concepto métrico, como es el de "medida del peso", no sólo se caracteriza por un conjunto de valores numéricos con una serie de propiedades y operaciones, sino que integra además, por medio del isomorfismo que establece la metrización, la estructura comparativa de la cualidad "peso", formada por la serie ordenada de los elementos cuya medida son los mencionados valores numéricos y por las relaciones propias de dicha estructura comparativa (operaciones de composición y transformación, similares a las operaciones aritméticas). Es en este sentido que se habla de "peso" o de "longitud" para integrar las estructuras métrica y comparativa en un sólo concepto, que a nivel de su utilización práctica estaría incompleto si se considerase sólo la estructura métrica.

Una determinada medida de longitud tiene pleno significado por la existencia de una cantidad de longitud a la que aquélla hace referencia; por el contrario, las diferentes cantidades de longitudes pueden ser consideradas, con independencia de los valores numéricos correspondientes (medidas de longitudes), como meras cualidades perceptibles y distinguibles entre sí en virtud de la estructura comparativa que poseen. Nuestro planteamiento teórico, sostenido por las aportaciones que acabamos de presentar, establece que:

En el terreno de los fenómenos reales, el punto de vista cualitativo suele ser consustancial al punto de vista cuantitativo, previo y necesario para la existencia de este e independiente de él, lo que no ocurre en sentido contrario (no es frecuente que los números, por sí solos, determinen en la práctica nuevas cualidades o magnitudes inexistentes con independencia de ellos). Más bien, lo que suele ocurrir es que la utilización de los conjuntos numéricos en la metrización de un concepto comparativo (magnitud o concepto cuantitativo) viene a completar y dar precisión y rigor al concepto, extendiendo en algunos casos el propio concepto cuantitativo allí donde aparecen las limitaciones perceptibles de la estructura comparativa.

Bien es verdad que, a nivel formal, *el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo, y es aquí donde reside toda la potencialidad de la metrización. Pero no es menos cierto que dicho proceso de abstracción constituye sólo una parte del estudio de los conceptos métricos (la que corresponde al campo propiamente matemático), requiere de un estado avanzado de los conocimientos y un grado de separación de la realidad* que sobrepasan los límites y el interés de nuestra investigación didáctica. *Centraremos la atención en la metrización de conceptos comparativos; en los prolegómenos concretos del trabajo matemático formal; en los inicios de la construcción de los conceptos métricos; es ahí donde se mezcla lo empírico con lo formal, el conocimiento físico con el conocimiento lógico-matemático.*

Por otra parte, esta indisociabilidad de los conceptos comparativos metrizables y los propiamente métricos, de las cantidades y las medidas, se encuentra también en el proceso histórico de formación de los conceptos numéricos. No hay más que recordar las constantes referencias intuitivas a la longitud, por ejemplo, para la determinación de propiedades y para la propia construcción de los conjuntos numéricos. Podemos decir que, en el ámbito de los fenómenos reales, los conjuntos numéricos constituyen modelos matemáticos para determinadas cualidades metrizables y que, al mismo tiempo, las series ordenadas de estados de cualidades metrizables (conjuntos de cantidades) constituyen modelos cualitativos (experimentales y manipulativos en términos didácticos) de ejemplificación de los conjuntos numéricos. Ambos sistemas son isomorfos y se sustentan mutuamente a nivel de la acción práctica y, posiblemente, a nivel de la construcción de dichos conceptos por parte del sujeto individual.

7.3.3. *Algunas consecuencias para nuestra investigación*

— Los conceptos comparativos albergan por construcción los elementos básicos de una estructura cualitativa relativa (doble sentido y doble signo), caracterizada por la relación de precedencia y el orden inducido por ella.

— Los conceptos métricos se generan en una síntesis entre los conceptos comparativos y los números. Las medidas constituyen así elementos nuevos que integran los aspectos cualitativos y cuantitativos de la realidad. Los primeros son consustanciales a los segundos, previos y necesarios para la existencia de estos e independientes de ellos.

— Los números se tratan en la teoría de Stegmüller como conceptos acabados y construidos al margen del proceso de metrización; utilizados "ad hoc" como instrumentos necesarios para la formación de los conceptos métricos. Desde el punto de vista del aprendizaje matemático cabría interpretar, en virtud de los isomorfismos existentes, que debe darse una cierta simultaneidad en la construcción individual de los conceptos comparativos, los conceptos numéricos y los conceptos métricos. Las relaciones entre los tres son muy estrechas y no se puede entender que se produzcan avances aislados en alguno de ellos sin afectar a los demás.

— La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y epistemológicamente correcta para un análisis del tipo que estamos realizando, tal y como mantenemos a lo largo del trabajo, no puede plantearse en términos analíticos en los inicios de la educación del pensamiento numérico. De hecho, a un nivel formal y una vez establecido un concepto métrico, el isomorfismo permite trabajar aisladamente en el dominio numérico sin necesidad de hacer referencia al dominio comparativo; pero ello ocurre en un nivel de abstracción superior al del propio proceso de formación de dicho concepto métrico.

— Las magnitudes intensivas, como la temperatura, sufren una metrización especial sin necesidad de que exista una ley de composición aditiva. Existen, por tanto, metrizaciones que consisten en la asignación, conservando el orden, de valores numéricos a cantidades.

— Podemos distinguir entre metrizaciones "absolutas" y "relativas", según que el concepto comparativo o dominio de cantidades tenga o no primer elemento para

series infinitas o que el origen de cantidades se encuentre en un extremo o en un lugar intermedio de la serie (serie dualizada). Tratándose de cantidades discretas o discretizadas, las primeras serán funciones con imágenes en el conjunto de los números naturales, mientras que las segundas requerirán de conjuntos numéricos con una "simetría central", como es el caso de los números enteros.

7.4. **Procesos, conceptos y relaciones que intervienen en el dominio usual de aplicación de los números naturales y los números enteros**

En este apartado vamos a centrar nuestra atención en los procesos de metrización de cantidades discretas o discretizables elementales con estructura aditiva o simplemente ordinal, es decir, en el campo de los conceptos métricos discretos elementales, en el que intervienen tres elementos íntimamente relacionados entre sí:

— las *cantidades,* como manifestaciones perceptibles de los estados o modalidades de cualidades o magnitudes;

— los *números,* como objetos matemáticos o entes abstractos con estrechos vínculos con las cantidades y que van a permitir, a través de la metrización, trascender las limitaciones propias de las manipulaciones empíricas meramente cualitativas;

— las *medidas,* como resultados de la combinación o integración de los dos elementos anteriores en el campo de aplicación concreta de la numeración y el cálculo, de donde surgen los problemas y ejercicios prácticos escolares con contenido no exclusivamente formal utilizados en la enseñanza-aprendizaje de los números y las operaciones aritméticas.

Para analizar los problemas y situaciones que se suelen emplear en el tratamiento didáctico de los números enteros, vamos a utilizar los siguientes conceptos fundamentales:

a) cantidad, número y medida;
b) composición aditiva de cantidades y composición aditiva de medidas;
c) transformación de cantidades y transformación de medidas;
d) cambio de origen o referencia;
e) comparación de cantidades y comparación de medidas.

Consideramos, por tanto, conjuntos o dominios de entes de diferente naturaleza, una serie de funciones y unas relaciones que es preciso delimitar y analizar para resolver los interrogantes y lagunas que se constatan, desde la óptica de la Educación Matemática, en la aplicación práctica de los primeros conjuntos numéricos.

Partiremos de los principios expuestos y de la terminología utilizada en los apartados anteriores para *delimitar el campo de las situaciones relativas;* un campo netamente didáctico que trataremos de definir teóricamente como parte importante de la educación del pensamiento numérico. Para ello, además del enfoque científico experimental resumido en el apartado anterior, utilizaremos los conceptos y las construcciones matemáticas expuestas con anterioridad (magnitud, metrización de una magnitud, estructuras algebraicas y aplicaciones relacionadas con la metrización, etc.), junto a consideraciones didácticas que tienen que ver con el currículum, los problemas y situaciones de aplicación práctica y los tipos de representación.

7.4.1. **Diferentes clases de cantidades y medidas discretas**

Sea A un dominio de cantidades discretas o modalidades de una cualidad o magnitud discreta susceptible de metrización, y sean P y C las relaciones de "precedencia" y de "coincidencia" con las propiedades ya definidas anteriormente, las cuales dotan al conjunto A de una estructura comparativa que simbolizaremos mediante el par $[A, Q\ (C, P)]$. El conjunto $Q = (A/C, P)$ es un conjunto ordenado de cantidades o una serie ordenada que puede ser finita o infinita numerable, con primer elemento o sin primer ni último elementos.

Si A es un dominio de cantidades "absolutas" (numerosidades de colecciones o cantidades de magnitudes absolutas discretas o discretizadas), $Q = (A/C, P)$ es un conjunto ordenado con primer elemento, que notaremos por $\mathbf{Q}_N$ y a cuyos elementos llamaremos *"cantidades naturales"*, metrizable mediante una aplicación en el conjunto de los números naturales. Si, por el contrario, A se encontraba originalmente dualizado (cantidades de dos categorías contrapuestas simétricas en torno a una referencia), $Q = (A/C, P)$ es una serie ordenada de cantidades dualizadas, que notaremos por $\mathbf{Q}_Z$ y a cuyos elementos llamaremos *"cantidades enteras"*, bien finita, o bien sin primer ni último elementos, que admite directamente una metrización o una asignación numérica mediante una aplicación en el conjunto de los números enteros (´wste es el caso, por ejemplo, de cantidades que se representan mediante escalas sin principio ni fin; determinadas cantidades en economía; temperaturas y otras). $\mathbf{Q}_Z$ representa tanto a las cantidades enteras sin una ley de composición interna aditiva (temperatura o cronología ordinaria), como a aquéllas entre las que se puede definir una ley de tal tipo (cantidades monetarias discretas en el contexto de los saldos bancarios). En ambos casos, la metrización será o una aplicación entre conjuntos que da lugar a una escala o un isomorfismo. Por comodidad, unificaremos la notación teniendo en cuenta esta precisión.

Además de las cantidades naturales y enteras, postulamos un *tercer tipo de cantidades,* que no se contemplan usualmente como tales a pesar de la existencia muy extendida de las medidas correspondientes, a las que llamamos *naturales relativas*[5] y notamos por $\mathbf{Q}_{N_R}$, las cuales se diferencian de las enteras y las naturales en aspectos básicos de las estructuras ordinales y algebraicas correspondientes.

Las cantidades naturales surgen del establecimiento de conceptos comparativos o series ordenadas sobre objetos o colecciones que presentan unas cualidades en distinto grado, o dicho de otra forma, *de la comparación directa del grado en que se presenta una cualidad en objetos o colecciones,* mientras que las cantidades naturales relativas *surgen de la comparación de las cantidades que resultan del proceso anterior.* Estamos ante dos tipos de cantidades diferentes, lo que no impide que utilicemos la misma terminología para ambas, ya que son susceptibles de una asignación numérica que permite trabajar desde un punto de vista métrico.

En lo que respecta a la medida, existen dos tipos de medidas discretas reconocidas, como son las *medidas naturales* (que notaremos por $\mathbf{D}_N$) y las *medidas enteras* (que notaremos por $\mathbf{D}_Z$). Al mismo tiempo, constatamos la existencia de un tercer tipo de expresiones métricas, conocidas en el ámbito de la Educación Matemática como "números/cantidades dirigidas, adjetivadas o relativas", que se consideran usualmente incluidas en $\mathbf{D}_Z$ pero que vamos a distinguir y separar de las medidas enteras en atención a las características diferenciadoras que presentan. Este tercer tipo de medidas, que llamaremos *medidas naturales relativas* y notaremos por $\mathbf{D}_{N_R}$, no se contemplan como tales medidas separadas de las enteras, a pesar de que ambos conjuntos se refieren a dominios de cantidades diferentes ($\mathbf{Q}_Z$ y $\mathbf{Q}_{N_R}$).

7.4.2. **Los diferentes tipos de números**

Los conjuntos numéricos que regulan matemáticamente el campo de problemas y situaciones del dominio considerado son los números naturales y los números enteros. No obstante, para completar un modelo que trate de organizar completamente el dominio no podemos considerar, tanto desde un punto de vista práctico como por coherencia lógica, sólo dos conjuntos numéricos para atender a los tres tipos de medidas de naturaleza y funcionamiento diferentes.

La necesidad de un tercer conjunto numérico elemental no proviene, como ya hemos mencionado, de una necesidad estrictamente formal, sino de *una nece-*

[5] Llamadas "cantidades dirigidas" por Bell, A. (1986).

sidad didáctica para la comprensión de las nociones matemáticas en juego. Desde esta perspectiva reclamamos, y nos disponemos a desarrollar, un tratamiento más detallado del tema que el que proporcionan las construcciones formales conocidas y consolidadas.

7.4.3. *Las relaciones que intervienen*

Analizando, con respecto a los conceptos de cantidad, número y medida, la estructura y el funcionamiento de las relaciones básicas que aparecen en los fenómenos del dominio considerado, encontramos tres tipos de relaciones simples que regulan el funcionamiento de los tres ámbitos conceptuales en que se divide el campo: el cuantitativo, el numérico y el métrico.

Por ser $\mathbf{Q_N}$ un semigrupo con la composición aditiva de cantidades (y con mayor motivo el grupo $\mathbf{Q_Z}$), compatible con el orden propio de la estructura comparativa, existen unas relaciones cuantitativas en virtud de la combinación entre la asimetría y la adición (lo cual es válido igualmente para las medidas y los números). Estas relaciones[6], que son binarias (se establecen entre pares de cantidades o medidas), se materializan en la práctica en tres tipos de acciones simples diferentes: *comparaciones, transformaciones* y *combinaciones,* terminología[7] que será utilizada también para las medidas en virtud de los isomorfismos existentes y que puede ser adaptada igualmente al caso de los números.

Las *comparaciones,* que notaremos mediante la letra "**C**" y un subíndice que indica el conjunto entre cuyos elementos se realiza la comparación (cantidades, números o medidas), se basan en la *estructura de orden* y se definen mediante *aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia;* las *transformaciones,* que notaremos mediante la letra "**T**"[8] con su subíndice correspondiente al igual que en el caso anterior, hacen intervenir tanto la *estructura de orden* como la *estructura aditiva* y se representan mediante *correspondencias basadas en productos cartesianos mixtos;* por último, las *combinaciones,* que notaremos en cada caso mediante el símbolo que hace referencia a la ley de composición aditiva de que se trate (rectángulo, triángulo o círculo para las cantidades, el mismo símbolo con el signo de la suma en su interior para las medidas y el signo de sumar ordinario para los números), se basan exclusivamente en la *es-*

[6] De utilización aceptable entre cantidades o medidas pero de utilización poco ortodoxa entre números.

[7] Utilizada por Carpenter y Moser (1983) para establecer una clasificación semántica de los problemas aditivos.

[8] Sólo aparecen en la figura 7.1, en la parte del diagrama correspondiente a la medida.

tructura aditiva y se definen mediante la ley de composición interna correspondiente. Aquí nos limitamos a precisar e incluir dichas relaciones en el esquema de la figura 7.3; el caso de la comparación será estudiado con más detalle en los próximos apartados. En el apartado 7.5 y en el capítulo 9 se tratan más extensamente estas relaciones a propósito de las consecuencias del estudio de cara a la organización del dominio tratado.

7.4.4. *Cantidades y medidas naturales relativas*

La necesidad didáctica de dotar de significado y de contenido concreto a los números enteros conduce a un panorama confuso, en el que se mezclan conceptos, conjuntos y relaciones de diferente naturaleza bajo el control de las construcciones matemáticas formales. En este sentido, el proceso de abstracción y generalización matemática ha condensado la información[9], en este caso concreto, de forma encomiable para el bien de las matemáticas pero, al mismo tiempo y por los mismos motivos, de forma excesiva para la necesaria clarificación de los contenidos con vistas a su tratamiento didáctico.

En este apartado, vamos a construir un modelo que ofrezca una explicación satisfactoria a los desajustes que se señalan en el capítulo 1, que sea compatible con los conocimientos y la información disponible mencionada en los antecedentes, y que organice suficientemente el dominio en estudio. Para ello utilizaremos algunos recursos matemáticos, bajo un enfoque de construcción semiformalizada, con el fin de definir nuevos conceptos; el estudio formal exhaustivo, sin embargo, excede de los propósitos de esta investigación.

Salvo algunas cuestiones formales que requieren de un desarrollo detallado y que serán objeto de un estudio posterior, pasaremos a describir el análisis que se resume en la figura 7.3 y cuya notación se detalla en la figura 7.4; ambas se incluyen al final del apartado.

Sea $\mathbf{Q_N}$ un conjunto de cantidades naturales de cualquier cualidad o magnitud discreta metrizable, ordenadas mediante una relación de precedencia que notaremos por "<". Suponemos, además, que estamos hablando de cantidades y medidas de la misma cualidad o magnitud, es decir, estamos tratando en todos los casos con conjuntos "homogéneos".

En $\mathbf{Q_N}$, existe una operación de composición aditiva entre cantidades (que notaremos por ▯) que es compatible con el orden establecido, se define a partir

[9] Recordemos el "Principio de permanencia de las leyes formales" de Hankel y la construcción formal de Z por pares ordenados.

de él y dota al conjunto de una estructura de semigrupo ordenado. De esta mane-
ra, ($\mathbf{Q}_N$, [], <) es un semigrupo aditivo de "cantidades naturales", isomorfo a una
parte de $\mathbf{N}$ con la operación suma y el orden natural establecido y, por tanto,
metrizable mediante el isomorfismo de semigrupos:

$f_N : \mathbf{Q}_N \to \mathbf{N}$ de tal manera que para $a \in \mathbf{Q}_N$ y u la unidad de medida elegida
siendo $a = n \cdot u$, $f_N(a) = f_N(n \cdot u) = n$ con $n \in N$ y $a, u \in \mathbf{Q}_N$.

La metrización de la serie de cantidades naturales $\mathbf{Q}_N$ nos permite definir el conjunto:

$$\mathbf{D}_N = \text{Grafo}\ (f_N) = \{n(u) = (a, n) \,/\, f_N(a) = n\}\ ;\ \mathbf{Q}_N \times \mathbf{N} \supset \mathbf{D}_N$$

de *medidas naturales* de la cualidad o magnitud considerada, cuya relación con el conjunto de los números naturales queda establecida por medio del isomorfismo:

$$f'_N : \mathbf{N} \to \mathbf{D}_N$$

Estas medidas se suelen representar, para cada determinación concreta del conjunto homogéneo $\mathbf{D}_N$, por un número natural acompañado de la denominación de la unidad de medida de que se trate. En términos prácticos hay multitud de ejemplos en la enseñanza elemental: cardinalidad de colecciones ("3 canicas", "5 coches", "2 caramelos", "ningún lápiz", etc.); medidas de magnitudes discretizadas ("3 kilos", "12 kilómetros", etc.), etc..

El isomorfismo f'_N permite establecer en $\mathbf{D}_N$ una "operación" de composición aditiva de medidas naturales definida de la siguiente forma:

$$\boxplus : \mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N \longrightarrow \mathbf{D}_N$$

tal que para cualquier par de medidas homogéneas $[(a, n), (b, n')] \in \mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N$,

$$(a, n) \boxplus (b, n') = n(u) \boxplus n'(u) = (n + n')(u) = (a \ \square\ b\ , n + n')$$

Esta ley de composición aditiva completa el proceso cantidades-números-medidas en el contexto natural, poniendo de manifiesto la diferenciación de los conceptos que intervienen.

El proceso descrito hasta aquí para las cantidades y medidas naturales se repite para las cantidades y medidas enteras sin más que modificar los planteamientos, teniendo en cuenta las estructuras ordinal y algebraica de los conjuntos correspondientes. Hemos optado, en consecuencia, por no incluir dicho proceso, considerando la similitud con el que se ha descrito.

La comparación de cantidades naturales ($\mathbf{C}_{Q_N}$) o de medidas naturales ($\mathbf{C}_{D_N}$) conduce, a partir del conjunto de pares ordenados, al establecimiento de dos *rela-*

ciones o diferencias orientadas, recíprocas entre sí, para cada pareja de cantidades o medidas naturales. Estas relaciones orientadas, que son asimétricas en virtud de la estructura ordinal, van a dar lugar al doble sentido en el campo de las medidas (y, según Russell, B. (1973), al doble signo en Matemáticas) (ver González, J. L. y otros, 1990, págs. 70 y 71) y constituyen el soporte que va a generar la aparición de nuevos entes que llamaremos *cantidades o medidas naturales relativas* (notadas respectivamente por $\mathbf{Q}_{N_R}$ o $\mathbf{D}_{N_R}$). La introducción, en $\mathbf{Q}_N \times \mathbf{Q}_N$ o en $\mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N$, de una correspondencia que da origen al conjunto de comparaciones de medidas naturales y de una relación de equivalencia sobre dicho conjunto, nos permitirá definir, posteriormente, los nuevos entes mencionados; en efecto:

En el caso de las medidas naturales (la construcción sería análoga para cantidades), definimos formalmente la *comparación de medidas naturales* a partir de la correspondencia:

$$\mathbf{c}_{D_N} : \mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N \to \mathbf{D}_N^C \subset \{(\mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N) \times \mathbf{D}_N\} \cup \{\mathbf{D}_N \times (\mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N)\}$$

tal que para cualquier $[(a, n), (b, n')] \in \mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N$, se define:

$$\mathbf{c}_{D_N}[(a, n), (b, n')] = \{[(a, n), (b, n')], n - n'\} \text{ para } a \geq b$$
$$\{n' - n, [(a, n), (b, n')]\} \text{ para } a \leq b$$

De esta forma, cada elemento de $\mathbf{D}_N^C$ es una comparación de medidas naturales, definida mediante un par ordenado cuyas proyecciones son, a su vez, un par ordenado de medidas naturales y una medida natural.

Definimos.—Diferencia natural entre dos medidas naturales distintas: la medida natural que se obtiene como resultado de la composición sustractiva (o descomposición) entre la mayor y la menor de ambas. La diferencia natural es única para cada pareja de medidas naturales.

— *Sentido de una comparación* entre dos medidas naturales: cada una de las dos relaciones referente-comparado que se pueden establecer y que se reflejan en los dos pares ordenados que se pueden formar con ellas.

— *Diferencia orientada o comparación* propiamente dicha: cada par ordenado constituido por la diferencia natural y por el sentido de la comparación; toda pareja de medidas naturales admite dos comparaciones o diferencias orientadas, definidas por la diferencia natural, que es única e igual para las dos, y por cada uno de los dos sentidos de comparación.

— *Comparaciones homólogas:* cuando sus proyecciones son de la misma naturaleza o, en otras palabras, cuando ambas se encuentran orientadas en el mismo sentido.

En $\mathbf{D}_N^C$ se define la siguiente *relación de equivalencia* que notaremos $\mathbf{R}_{D_N}$:

"dos comparaciones pertenecen a la misma clase si son homólogas y sus diferencias naturales son iguales".

Esta relación induce la aplicación:

$$\mathbf{c'}_{DN} : \mathbf{D}_N^C \rightarrow \{\mathbf{D}_N^C / \mathbf{R}_{DN}\} = \mathbf{D}_{NR}$$

definida de la siguiente manera: dada una comparación $\mathbf{c}_{DN}$ $[(a, n), (b, n')] \in \mathbf{D}_N^C$, definimos $\mathbf{c'}_{DN}$ $\{c\,[(a, n), (b, n')]\} = (q_r, r)$ donde $(q_r, r) \in \mathbf{D}_{NR}$ siendo q_r una cantidad natural relativa y r un par compuesto por un número natural y uno de los dos signos duales "+" y "–" que proceden del sentido de la comparación, de tal forma que:

$r = (n - n')^+$ para $a = b \square h$, $n > n'$ y $q_r = h^+$ siendo h una cantidad natural

$r = (n' - n)^-$ para $b = a \square h$, $n < n'$ y $q_r = h^-$

$r = 0^+$ para $a = b \square q_0$, $n = n'$, $r = (n - n')^+$; $q_r = q_{r0} = q_0^+$ siendo q_0 la cantidad natural nula y q_{r0} la cantidad natural relativa nula "positiva".

$r = 0^-$ para $b = a \square q_0$, $n = n'$, $r = (n' - n)^-$; $q_r = q_{r0} = q_0^-$ siendo en este caso q_{r0} la cantidad natural relativa nula "negativa".

Como comparación de medidas aparece el doble aspecto numérico y cuantitativo: *en el aspecto numérico, la comparación se reduce a la sustracción natural; en el aspecto cuantitativo, se reduce a la composición-descomposición aditiva de cantidades y al orden de comparación que da lugar al doble cero.*

El proceso descrito anteriormente se puede resumir en la siguiente composición de correspondencias, que aparece esquematizada como $\mathbf{C}_{DN}$ en el cuadro de la figura 7.3:

$$\mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N \rightarrow \mathbf{D}_N^C \rightarrow \{\mathbf{D}_N^C / \mathbf{R}_{DN}\} = \mathbf{D}_{NR}$$

o de forma abreviada: $\mathbf{C}_{DN} = \mathbf{c'}_{DN} \perp \mathbf{c}_{DN} : \mathbf{D}_N \times \mathbf{D}_N \rightarrow \{\mathbf{D}_N^C / \mathbf{R}_{DN}\} = \mathbf{D}_{NR}$

A partir de la construcción formal indicada se puede definir entre los elementos de $\mathbf{D}_{NR}$, la relación de orden: para $a, b \in \mathbf{N}$ y $a^i, b^j \in \mathbf{D}_{NR}$, $a^i < b^j$ *sii* $(a \leq b) \wedge \wedge (i = j)$, donde hemos simplificado la notación utilizada en los párrafos anteriores.

Dicha relación, inducida por el orden natural, dota al conjunto de una estructura de *orden parcial* que, comparada con la de orden total que poseen las medidas enteras, presenta una inversión en el orden entre los elementos pertenecientes a la "región negativa". En los capítulos 8 y 9 se expone un examen ejemplificado de esta estructura ordinal.

Las cantidades o medidas naturales relativas se suelen representar, en la práctica, mediante una cantidad natural o un número natural y un signo, símbolo, adjetivo, verbo de acción, partícula o elemento dual que indica uno de entre dos sentidos opuestos (para el caso de las medidas: "subir 3 escalones", "ganar 5 canicas", "1 pastel más", "2 pesetas menos", etc.). Por comodidad y para diferenciar las notaciones, utilizaremos para las cantidades y medidas naturales relativas un superíndice con dos símbolos posibles: "+" y "–".

El modelo geométrico de este nuevo conjunto $\mathbf{D}_{NR}$, a diferencia de los modelos natural o entero tan familiares, es el que podemos denominar "doble natural" o "natural relativo" y aparece esquematizado en la figura 7.1 mediante dos semirrectas naturales enfrentadas u opuestas una de la otra; una de ellas representa las cantidades o medidas con superíndice "+" o "positivas"[10] y la otra, las cantidades o medidas con superíndice "–" o "negativas". La figura 7.2 esquematiza las situaciones con dos variables.

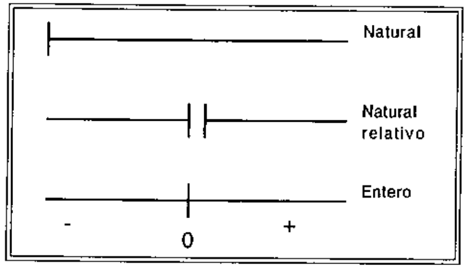


Figura 7.1.—Esquemas geométricos de los tres contextos que intervienen.

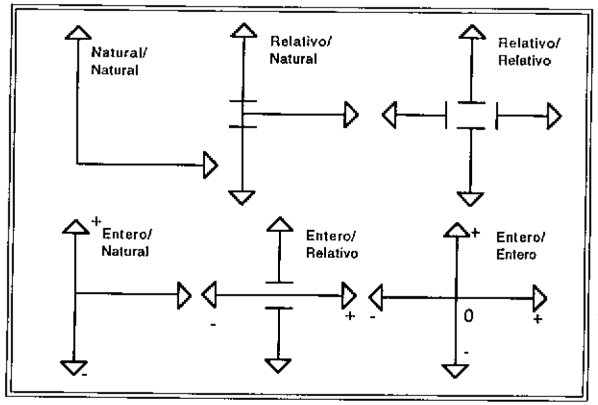


Figura 7.2.—Esquemas para dos variables combinadas.

[10] Esta asignación es arbitraria. Diremos que son positivas por oposición a las negativas o viceversa.

Un examen del funcionamiento práctico en diferentes contextos de las medidas naturales relativas, revela la existencia de composiciones aditivas informales cuya justificación no se deduce directamente de los planteamientos anteriores. En consecuencia, establecemos en $\mathbf{D}_{NR}$ la ley de composición aditiva definida de la siguiente manera:

$$\oplus : \mathbf{D}_{NR} \times \mathbf{D}_{NR} \rightarrow \mathbf{D}_{NR}$$

$(a, n^+) \oplus (b, m^+) = [c, (n+m)^+]$

$(a, n^-) \oplus (b, m^-) = [c, (n+m)^-]$ (estabilidad de cada parte para la suma natural)

$(a, n^+) \oplus (b, m^-) = [c, (n-m)^+]$ si $n > m$

$= [c, (m-n)^-]$ si $n < m$

$(a, n^i) \oplus (b, m^j) = (q_{ro}, 0^i)$ si $n = m$; $i, j \in \{\{+\}, \{-\}\}$; $i \neq j$

donde $n, m \in \mathbf{N}$, $c = a \mathrm{O} b$ (composición aditiva de cantidades naturales relativas), q_{ro} la cantidad natural relativa nula y $a, b, c \in \mathbf{Q}_{NR}$.

Con esta ley de composición, que verifica la propiedad asociativa, el conjunto $\mathbf{D}_{NR}$ tiene una estructura algebraica de *semigrupo aditivo no conmutativo, sin elemento neutro y con dos elementos nulos no permutables entre sí* (Condamine, M. 1971, pág. 108).

Con la unificación de los dos ceros o medidas naturales relativas nulas (aplicación notada por u_{d0}) y la unificación del orden se obtiene el conjunto de medidas enteras $\mathbf{D}_Z$, que con la ley de composición interna aditiva (notada en la figura por un triángulo con el signo de la suma de números enteros en su interior) tiene una estructura de grupo abeliano y ordenado. Las correspondientes transformaciones de medidas naturales y enteras completan la estructura del campo de medidas que aparece esquematizado en la parte punteada de la figura 7.3 y cuya notación se explica en la figura 7.4; un dominio dentro del campo conceptual aditivo al que pertenecen las situaciones y problemas elementales que se analizan con detalle en el capítulo 9.

7.4.5. **Los números naturales relativos**

Del análisis de las características de las medidas naturales relativas, de las diferencias y relaciones existentes entre los tres tipos de medidas y de las relaciones entre las medidas y los conjuntos numéricos se constata, por un lado, la ausencia de un modelo numérico que regule de forma satisfactoria el funcionamiento de dichas medidas y, por otro, la importancia y la necesidad didáctica de disponer de un modelo de tal tipo. En los párrafos que siguen se pone de manifiesto, además, que dicho modelo numérico puede ser construido formalmente mediante un proceso deductivo de características similares al que se ha desarrollado para las medidas.

En lugar de utilizar cantidades o medidas de una cualidad o magnitud concreta, podemos repetir el proceso descrito con cantidades o medidas aisladas referidas a cualquier cualidad o magnitud discreta, lo que se puede hacer mediante el paso al cociente y el establecimiento de la relación de equivalencia apropiada. Desde este punto de vista, el razonamiento se simplifica por supresión de determinadas distinciones introducidas por la pluralidad de cantidades y unidades de medida, dando lugar a un nuevo proceso que, unido a la necesidad lógica de completar el esquema de isomorfismos, nos conduce a los siguientes conjuntos numéricos:

$\mathbf{D}^*_N = \mathbf{N}$

$\mathbf{D}^*_{NR} = \{\mathbf{N} \times \{+\}\} \cup \{\mathbf{N} \times \{-\}\} = \mathbf{N}^+ \cup \mathbf{N}^- = \mathbf{N}_R$

$\mathbf{D}^*_Z = \mathbf{Z}$

Además de los números naturales y los números enteros, se obtiene un tercer tipo de números que llamamos *"números naturales relativos"* y que distinguimos claramente de los otros dos conjuntos numéricos desde el mismo enfoque didáctico que nos ha llevado a realizar este análisis. Como se refleja en el esquema de la figura 7.3, este conjunto de números *cubre una laguna* salvada por la aplicación natural k y la definición de suma de números enteros.

La construcción formal del conjunto de los números naturales relativos no se va a abordar en este trabajo de forma rigurosa. En su defecto se expone a continuación una descripción ejemplificada del funcionamiento y de las principales propiedades de estos números. Las cuestiones formales que quedan pendientes, serán objeto de atención de una investigación posterior.

7.4.5.1. *Un ejemplo de los números naturales relativos*

La estructura entera aditiva es bien conocida, mientras que la estructura natural relativa aditiva, aunque de utilización cotidiana y familiar, no es conocida y tampoco se encuentra formalizada más allá de lo que aparece en el presente trabajo de investigación. Por este motivo, y con objeto de proporcionar un soporte intuitivo para el estudio fenomenológico y lingüístico que vamos a exponer en el capítulo 8, desarrollamos a continuación un ejemplo concreto.

Supongamos un juego en el que se dispone de dos dados ideales iguales con infinitas caras cada uno. En cada cara hay un número natural y cada número aparece en dos colores diferentes en el dado (por ejemplo: rojo y azul). El color rojo significa "ganar" y el azul "perder" la cantidad que indica el número. Cada número coloreado representa una medida natural relativa.

Cada jugador tira, en cada jugada, los dos dados y debe componer los resultados independientes para obtener un resultado único, de acuerdo con los siguientes criterios:

m (rojo) ⊕ n (rojo) = $(m + n)$ (rojo) gana m y gana n, entonces gana $(m + n)$ siendo "+" la suma natural y m y n, cualesquiera números naturales

m (azul) ⊕ n (azul) = $(m + n)$ (azul) pierde m y pierde n, pierde $(m + n)$ (iguales condiciones anteriores)

m (azul) ⊕ n (rojo)= $(m - n)$ (azul) pierde m y gana n con $m > n$, pierde $(m - n)$ donde "–" es la sustracción natural.

= $(n - m)$ (rojo) pierde m y gana n con $n > m$, gana $(n - m)$

(1) = 0 (rojo) y 0 (azul) pierde m y gana n con $m = n$, *ni gana ni pierde*

Desde un punto de vista informal, el último resultado es intuitivo y tiene un claro significado en todas las situaciones de aplicación concreta en las que aparece este tipo de medidas. No obstante, introduce una indeterminación que puede afectar al tratamiento formal y, en particular, al carácter interno de la ley de composición. Para eliminar dicha indeterminación, adoptamos el convenio, ya expresado, de tener en cuenta el orden en que se realiza la composición. Con dicho convenio, que además es lógicamente admisible, se obtiene un único cero que tendrá el signo del primer sumando. De esta forma el resultado (1) quedaría así:

= 0 (rojo) si el primer dado que se considera es el rojo

= 0 (azul) si el primer dado que se considera es el azul

7.4.5.2. *Propiedades algebraicas y ordinales*

En el ejemplo planteado anteriormente se observa que la adición hace intervenir tanto la suma como la resta de números naturales (denominada aquí como anulación-compensación para diferenciarla de la propia sustracción natural)[11]. No hemos de olvidar que lo que estamos denominando como "anulación-compensación" es una operación única, compuesta de una comparación previa (por la que se determina el orden de los valores) y de una sustracción entre números naturales (aquélla de las dos que es posible y tiene sentido entre dichos números).

[11] Esta diferencia es necesaria, dado que la anulación-compensación lleva consigo dos partes diferenciadas: una es la sustracción natural y la otra el sentido de dicha sustracción de manera que siempre sea posible (el mayor valor absoluto menos el menor).

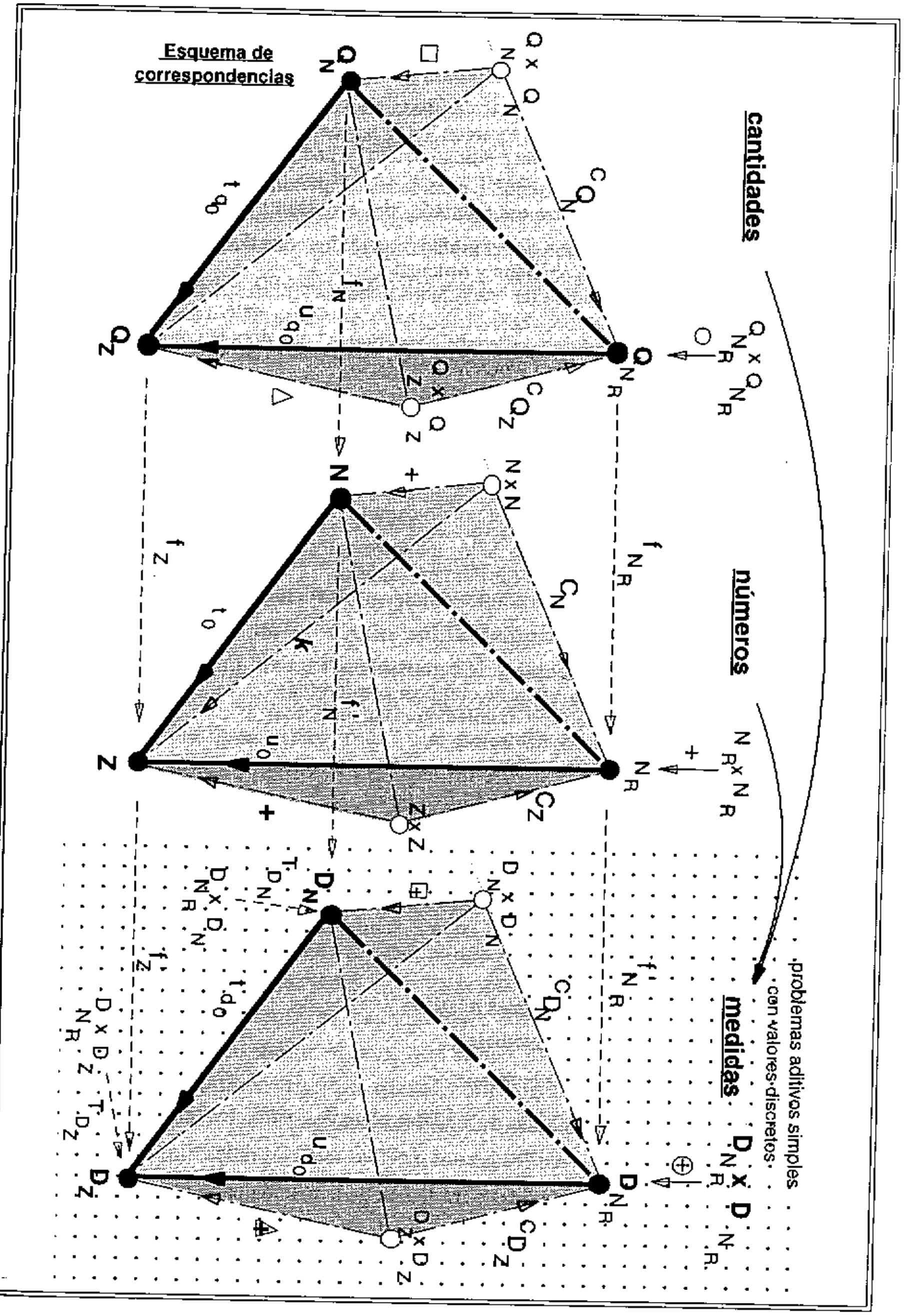


Figura 7.3.—Esquema completo de los elementos y relaciones que intervienen en el dominio.

Q_N	Conjunto de "cantidades naturales" ordenadas de una magnitud discreta concreta.
Q_R	Conjunto de "cantidades relativas" de una cualidad o magnitud discreta o discretizable determinada (se utilizan también los términos: "cantidades dirigidas" o "adjetivadas" constituídas por una cantidad natural y una partícula dual).
Q_Z	Conjunto de "cantidades enteras" o cantidades de un dominio dualizado a partir de un origen o referencia central (considerado como cantidad nula).
$\square$	Ley de composición aditiva de "cantidades naturales" que dota al conjunto de una estructura de semigrupo abeliano y ordenado.
$\bigcirc$	Ley de composición aditiva de "cantidades relativas" (correspondencia no aplicación.
$\triangle$	Ley de composición aditiva de "cantidades enteras" que dota al conjunto de una estructura de grupo abeliano y ordenado.
C_{Q_N}	Comparación de "cantidades naturales".
C_{Q_Z}	Comparación de "cantidades enteras".
u_{q_0}	Unificación de las cantidades naturales relativas nulas (correspondencia unívoca).
t_{q_0}	Traslación de la cantidad natural nula o cambio de origen (aplicación).
$\mathbf{N}$	Semigrupo aditivo y ordenado de los números naturales.
$\mathbf{Z}$	Grupo aditivo y ordenado de los números enteros
$\mathbf{N_R}$	Conjunto de los "números naturales relativos" (estructura "doble natural").
f_N f_{N_R} f_Z	metrizaciones (isomorfismos).
$+$	Suma de números naturales (ley de composición interna).
$\mathbf{+}$	Suma de números enteros (ley de composición interna).
$\mathbf{+}$	Suma de "números relativos" (anulación-compensación).
C_N	Comparación de números naturales.
C_Z	Comparación de números enteros.
k	Aplicación natural (construcción formal de Z).
u_0	Correspondencia unívoca que unifica el orden y los dos ceros relativos.
t_0	Traslación del cero natural o cambio de origen.
f'_N f'_{N_R} f'_Z	Isomorfismos entre números y medidas (grafos de las correspondientes metrizaciones).
$\mathbf{D_N}$	Conjunto de "medidas naturales" de una cualidad o magnitud discreta o discretizable determinada (conjunto de pares de cantidades y números naturales).
$\mathbf{D_Z}$	Conjunto de "medidas enteras".
$\mathbf{D_{N_R}}$	Conjunto de "medidas naturales relativas".
C_{D_N}	Comparación de medidas naturales.
C_{D_Z}	Comparación de medidas enteras
$\boxplus$ $\oplus$ $\triangle$	Composiciones aditivas de medidas naturales, naturales relativas y enteras
u_{d_0}	Correspondencia que unifica las dos medidas relativas nulas
t_{d_0}	Cambio de origen de medidas o traslación de la medida natural nula.
T_{D_N} T_{D_Z}	Transformaciones de medidas naturales y enteras

Figura 7.4.—Notación del esquema de correspondencias.

Del mismo modo se constata la existencia de dos ceros, que caracterizan aquéllas composiciones de números naturales relativos de distinto signo y con valores numéricos naturales iguales. En estos casos el resultado es "ganar cero" o "perder cero", dependiendo del sentido en el que se realiza la composición. Ambos resultados se encuentran incluidos lógicamente en la frase "ganar cero y perder cero", lo que se traduce vulgarmente en decir que "ni se gana ni se pierde" (como jugada aislada) o que "se queda igual" (como aportación de la jugada aislada al *saldo total* del juego, que corresponde a una variable con estructura entera). Para valores numéricos diferentes de cero, tanto 0 (rojo) como 0 (azul) son elementos nulos con independencia del color, de forma que:

$$8\ (\text{rojo}) \oplus 0\ (\text{azul}) = 8\ (\text{rojo}) \oplus 0\ (\text{rojo}) = 8\ (\text{rojo})$$

En el primer miembro la composición se efectúa mediante la anulación-compensación, mientras que en el segundo miembro interviene la suma de números naturales. Pero, ambos ceros no son elementos neutro para la operación definida, de manera que cada uno de ellos actúa como elemento neutro para todos los números naturales relativos menos para el cero de signo contrario, como se puede comprobar fácilmente aplicando la definición.

Por otra parte, el orden "doble natural" es un orden parcial con inversión en la "región negativa" con respecto al orden total entero, de manera que "ganar m, para $m > 0$, es siempre ganar "más" que ganar 0" y, al mismo tiempo, "perder n, para $n > 0$, es siempre perder "más" que perder 0"[12]. En este contexto "perder m" y "ganar n" no son comparables con las relaciones anteriores, sino que hay que introducir una nueva relación: "ganar es mejor o más que perder", distinta de las relaciones iniciales, que lleva a una construcción lingüística complicada si se quiere eliminar el doble sentido[13]; la comparación, aún en valores absolutos, carece de sentido. Igualmente, la independencia de cada serie, en este orden parcial doble natural, se manifiesta claramente cuando se pretenden comparar los términos generales de la dualidad en otras situaciones: "subir no es ni mayor ni menor que bajar", "entrar no es ni mejor ni peor que salir", etc..

A modo de resumen diremos que el conjunto de los números naturales relativos, con la adición y el orden que se han descrito, presenta las siguientes características estructurales:

[12] Obsérvese la inversión que se produce aquí, en relación con el orden entero entre números negativos.

[13] Perder 2 es perder 1 menos de lo que se gana al ganar 3.

Estructura ordinal: Orden parcial constituido por dos subconjuntos totalmente ordenados con primer elemento (orden natural).
Estructura algebraica: Semigrupo aditivo no conmutativo sin elemento neutro.

7.5. Primera conclusión: nueva distribución del campo conceptual aditivo

La figura 7.5 recoge esquemáticamente la situación del campo estudiado y la distribución de las partes que lo integran. La notación que se emplea para denominar cada una de las partes del esquema es meramente auxiliar y no se va a utilizar para otros fines.

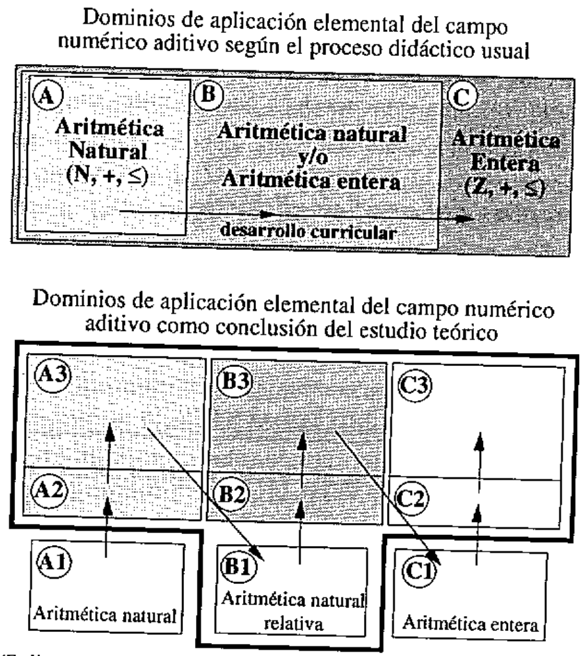
El cuadro superior refleja la situación actual y el desarrollo curricular que se sigue usualmente para progresar del contexto de aplicación de la aritmética natural (subdominio *A*) al de aplicación de la aritmética entera (subdominio *C*), pasando por una zona intermedia (subdominio *B*) con límites no definidos con los subdominios colindantes, que se caracteriza por la intervención de medidas naturales relativas y de situaciones y problemas que se suelen resolver mediante la aritmética natural, la aritmética entera, o ambas combinadas.

El cuadro inferior del esquema representa una nueva distribución que elimina satisfactoriamente los problemas que se derivan de la distribución descrita en el cuadro superior; al mismo tiempo, sugiere un proceso didáctico secuenciado que organiza de forma más clara el desarrollo curricular y el trabajo en el aula. De una manera gráfica y simple se puede decir que el cuadro superior ha estado situado "encima" del cuadro inferior, de manera que los números naturales relativos han permanecido literalmente "tapados" por los números enteros.

Las diferentes partes que integran la nueva distribución, son las siguientes:

A1.—Combinaciones naturales simples.
A2.—Comparaciones y transformaciones naturales simples.
A3.—Composiciones de dos o más relaciones naturales simples.
B1.—Combinaciones naturales relativas simples.
B2.—Comparaciones y transformaciones naturales relativas simples.
B3.—Composiciones de dos o más relaciones naturales relativas simples y composiciones de al menos una relación natural relativa simple con al menos un elemento de A2 o de A3.
C1.—Combinaciones enteras simples.
C2.—Comparaciones y transformaciones enteras simples.

C3.—Composiciones de dos o más relaciones enteras simples; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de A2 o de A3; composiciones de al menos una relación entera simple con al menos un elemento de B2 o de B3.



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relativos)
(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

Figura 7.5.—Los dominios sobre los que se ha realizado el estudio y la modificación que se deduce del análisis didáctico.

La distribución que se ha descrito no contempla ni el problema formal de la ampliación de los conjuntos numéricos, con la consiguiente unificación de los aspectos sintácticos y semánticos que aquí se encuentran separados, ni, como consecuencia de ello, el salto que se ha de realizar a niveles superiores para pasar a los aspectos básicos del Álgebra elemental. Dichas consideraciones, así como el enfoque didáctico que se adopte, deberán surgir como consecuencia de nuevos trabajos que continúen la investigación que presentamos.

7.6. Segunda conclusión: el campo conceptual de los números naturales relativos

La delimitación establecida en el apartado anterior y las características generales del estudio teórico realizado permiten establecer unas referencias que sitúan los resultados en el contexto más amplio de las investigaciones sobre Pensamiento Numérico. En los apartados que siguen, se exponen las principales conclusiones respecto de la situación de la investigación dentro del marco mencionado y se introducen nuevos elementos teóricos que delimitan dicha situación con una mayor precisión.

7.6.1. Componentes del análisis didáctico

El análisis didáctico desarrollado durante la fase teórica se ajusta al esquema de la figura 7.6. En él se aprecian los cuatro grandes campos de análisis que hemos tenido en cuenta para abordar el problema de investigación.

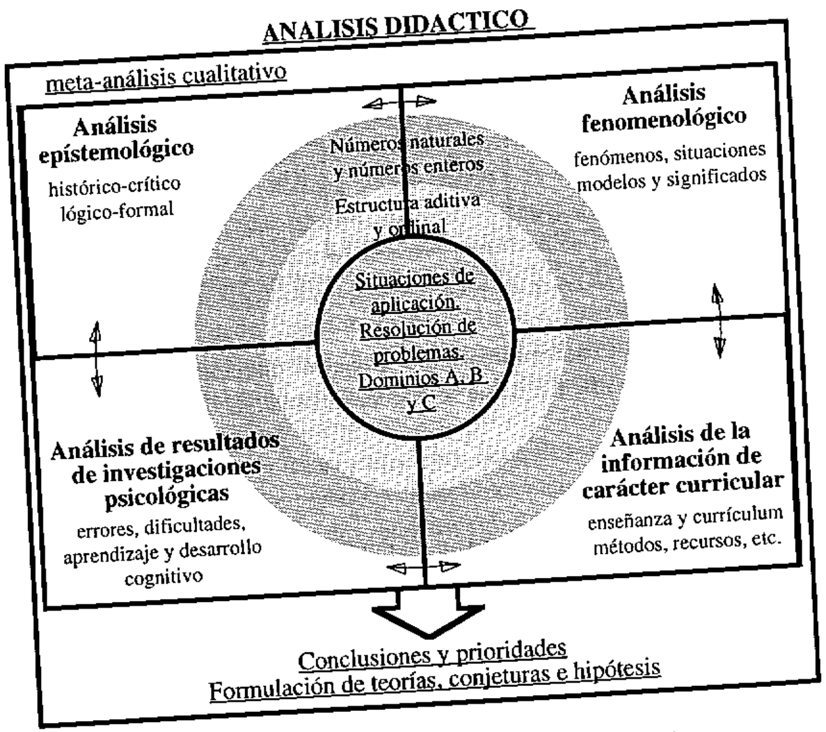


Figura 7.6.—Esquema general del análisis didáctico.

7.6.2. Pensamiento numérico natural relativo y campo conceptual de los números naturales relativos

El modelo presentado por Castro, E. (1994) y que se detalla en Rico, L., Castro, E. (1995, pág. 167) para estructurar la línea de investigación denominada *Pensamiento Numérico,* contempla tres elementos fundamentales:

a) unos instrumentos conceptuales: sistemas simbólicos estructurados;
b) unos modos de uso de los sistemas simbólicos: funciones cognitivas;
c) un campo de actuación: fenómenos, cuestiones y problemas.

Por otra parte, dicho modelo tiene una relación muy estrecha con la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1993, págs. 97 y sgtes.), para el que un campo conceptual está formado por un conjunto de situaciones y por el conjunto de los conceptos que permiten analizar esas situaciones como tareas matemáticas. Las relaciones de los dos planteamientos, entre sí y con el esquema de componentes del análisis didáctico, son evidentes:

1.—La línea Pensamiento Numérico amplía las consideraciones de Vergnaud para definir el campo conceptual numérico como marco teórico de investigación. Hablar de Pensamiento Numérico es hablar, por tanto, de un campo conceptual numérico (en el sentido ampliado) con la consideración añadida de los *fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares* involucrados en la aplicación de un *conjunto de conceptos, relaciones y sistemas simbólicos* a un *conjunto de situaciones, fenómenos, cuestiones y problemas* que admiten ser analizados mediante conceptos y procedimientos que forman parte de una estructura numérica.

2.—El análisis didáctico utilizado en nuestro trabajo contempla, igualmente, las componentes anteriores, aplicadas, en este caso, sobre la parte más elemental del campo conceptual aditivo. Esta metodología de análisis constituye, a nuestro entender, el núcleo de interés de la corriente Pensamiento Numérico.

En consecuencia denominamos *campo conceptual de los números naturales relativos* a la parte del campo conceptual aditivo constituida por:

— El conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos.

— El conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones propios del sistema simbólico de los números naturales relativos.

— El campo de actuación formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

Igualmente, por *pensamiento numérico natural relativo* entendemos una línea de investigación en Educación Matemática interesada en el campo conceptual de los números naturales relativos y en los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares en torno al mismo.

7.6.3. *El campo conceptual de los números naturales relativos como estructura didáctica*

Admitiendo la noción de estructura como elemento primitivo y en su sentido más general, establecemos las siguientes definiciones:

Definimos como *estructura didáctica de un campo conceptual numérico* a la terna (L, C, F), donde L representa la estructura lógico-formal del campo numérico, C representa la estructura cognitiva asociada a dicho campo y F representa la estructura de los fenómenos y de los problemas y situaciones propios de dicho campo. L se conoce también como estructura numérica; C es un constructo, todavía poco definido, que recoge los aspectos estructurales de las actividades y funciones cognitivas específicas del dominio; F está constituido por esquemas fenomenológicos y clasificaciones de las situaciones y problemas.

La estructura didáctica del campo conceptual de los números naturales relativos o, de manera resumida, el campo conceptual natural relativo, está formado por las tres componentes anteriores particularizadas al caso de los números naturales relativos.

Del mismo modo, podemos extender estas nociones al campo de los números naturales y de los números enteros. En los tres casos suprimiremos, por comodidad, el término "didáctica" para hablar simplemente de *campo conceptual natural (estructura natural), campo conceptual natural relativo (estructura natural relativa) y campo conceptual entero (estructura entera).*

En los capítulos siguientes se utilizan explícitamente estas definiciones: en el capítulo 8 se analizan las diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros, centrando la atención en la estructura lógico-formal y en algunos aspectos fenomenológicos; en el capítulo 9 se presta toda la atención a la estructura de los fenómenos, problemas y situaciones del campo conceptual; en el estudio empírico, que se expone en la parte IV, se ponen de manifiesto algunas diferencias en las estructuras de las actividades cognitivas del campo de los números naturales relativos y del campo de los números enteros.

7.7. Otras conclusiones

A las consecuencias que se exponen en el apartado 7.3.3, en relación con el análisis realizado sobre los conceptos de magnitud, cantidad y medida, así como a las que se han expuesto en los apartados anteriores, añadimos las siguientes conclusiones:

1.—En el dominio estudiado se distinguen tres tipos de cantidades, medidas y números (naturales, enteros y naturales relativos), tres leyes de composición interna aditiva (adición de números naturales, adición de números enteros y adición de números naturales relativos (combinación entre adición natural y anulación-compensación)) y tres tipos de relaciones básicas, definidas a su vez por tres tipos de correspondencias diferentes y con distinto grado de implicación de las estructuras ordinales y algebraicas:

comparaciones	aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia; intervención exclusiva de la estructura ordinal;
transformaciones	leyes de composición externa; estructura ordinal y algebraica;
combinaciones	leyes de composición interna; intervención exclusiva de la estructura algebraica.

2.—Las comparaciones, transformaciones y combinaciones naturales relativas presentan similitudes en sus esquemas lógicos, si bien las leyes de composición son diferentes.

3.—El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden que se han descrito, presenta las siguientes características estructurales:

Estructura ordinal: Orden parcial constituido por dos subconjuntos totalmente ordenados con primer elemento (orden natural).

Estructura algebraica: Semigrupo aditivo no conmutativo sin elemento neutro.

4.—El conjunto de los números naturales relativos regula satisfactoriamente el funcionamiento de las medidas naturales relativas, usualmente consideradas en el dominio de la aritmética natural o entera con los consiguientes problemas didácticos mencionados en el capítulo 1.

5.—El modelo construido es cerrado; es posible acceder a los números y medidas naturales relativas a través de la comparación de los números y medidas tanto naturales como enteras. Del mismo modo es posible, aunque no se ha tratado en el trabajo, que la comparación de números y medidas naturales relativas (que no se incluye en el esquema de la figura 7.1) pueda dar lugar, formalmente, a los números y medidas enteras, sustituyendo, a efectos prácticos e intuitivos, el proceso de unificación del orden y de los dos ceros, que es bastante más complejo. De esta manera, las nociones aritméticas y métricas enteras procederían de un doble proceso de comparación a partir de las nociones aritméticas y métricas naturales, simplificado formalmente por medio de la aplicación natural (k).

6.—Es de destacar la "superposición" de los esquemas de cantidades y números para dar lugar al esquema de la medida. Dichos esquemas se pueden disponer espacialmente, de manera que el diagrama refleje esta circunstancia.

7.—Las relaciones entre los tres tipos de números ponen de manifiesto una serie de diferencias estructurales dignas de tenerse en cuenta; en particular, el tipo de orden y el tipo de estructura algebraica que presentan los números naturales relativos y los números enteros.

8.—El modelo atiende a las relaciones simples que sirven de base a todos los problemas y situaciones del dominio, proporcionando una estructura y una terminología adecuadas para proceder a una clasificación exhaustiva que será desarrollada en el capítulo 9.

9.—Los números naturales relativos se han utilizado, sin formalizar y como útiles matemáticos, hasta finales del siglo XIX. Al aparecer la formalización de los números enteros desaparecen del trasfondo práctico en el que aportaban significados concretos a los problemas.

10.—Encontramos dos elementos clave en el proceso de construcción semiformalizada que hemos realizado: la comparación y la equivalencia que dan lugar a nuevos entes numéricos. En el trabajo que presentamos hemos invertido el orden del proceso que dio lugar a los números enteros: equivalencia - comparación. Al mismo tiempo, hemos iniciado la formalización del uso histórico previo a la construcción de Z, para poner de manifiesto que los conceptos que funcionaban antes de dicha construcción también tienen entidad de "números".

7.8. **Logros y hallazgos**

En este capítulo se han alcanzado logros que avalan la bondad de las *hipótesis* I, II y IV enunciadas en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dichas hipótesis son las siguientes:

I.—En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

Podemos dar por comprobada esta hipótesis, dado que los resultados del procedimiento teórico ponen de manifiesto, de forma satisfactoria, la veracidad de lo que en ella se afirma.

II.—Existe un conjunto de números a los que llamamos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden adecuados, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas.*

A partir del conjunto de medidas naturales relativas con la adición y el orden que se definen, y en virtud del isomorfismo que caracteriza todo proceso de

metrización, se puede asegurar la existencia del conjunto de números naturales relativos con las estructuras convenientes para que se cumplan las condiciones formales requeridas.

IV.—Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio, regulando las manipulaciones aritméticas aditivas correspondientes.

Las relaciones teóricas que se establecen entre los tres conjuntos numéricos, así como entre las cantidades, los números y las medidas, junto a la nueva distribución del dominio que se deduce de la introducción de estos nuevos conceptos, avalan la credibilidad de esta hipótesis.

La comprobación de las hipótesis señaladas permite la consecución de los objetivos marcados. En particular, de los objetivos enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, se han cubierto en este capítulo, y en diferente grado, los siguientes:

a) *Identificar, en el dominio de aplicaciones considerado, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas;* objetivo que damos por cubierto en su totalidad y de forma satisfactoria.

b) *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio;* objetivo cubierto parcialmente en este capítulo y que se completa en los capítulos 8 y 9.

c) *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números;* objetivo que damos por cubierto en este capítulo desde el punto de vista epistemológico. En los capítulos 8 y 9 así como en el capítulo 11 se aportan argumentos fenomenológicos y cognitivos que refuerzan la necesidad de tales números.

e) *Construir un modelo teórico que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones y ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema;* objetivo alcanzado en este capítulo en sus aspectos fundamentales, es decir, las funciones de permitir una nueva clasificación de las situaciones o la de explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones se tratan en el capítulo 9.

De los *objetivos complementarios* enumerados en el apartado 2.2.3, podemos realizar las siguientes consideraciones:

Con respecto al primero de ellos, que se refiere a iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática, se han establecido en este capítulo los aspectos básicos que delimitan un nuevo campo de estudio: el campo conceptual de los números naturales relativos. No obstante, será necesario tener en cuenta también los argumentos y consideraciones de los capítulos 8, 9 y 11, para tener una visión más completa del mencionado campo, así como de los que se exponen en el capítulo 12 a propósito de las perspectivas futuras de la investigación, para poder realizar una valoración sobre el grado de incidencia que sobre este objetivo pueden tener los logros alcanzados en este capítulo.

En relación con los otros dos objetivos, a saber:

— Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática;

— Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática;

creemos que se han cubierto suficientemente al finalizar este capítulo, a tenor de la relevancia de los resultados obtenidos mediante la metodología que se ha puesto en práctica.

Adicionalmente, tal y como se expondrá con mayor extensión en el capítulo 12, se ha conseguido una nueva distribución del campo conceptual aditivo, la delimitación precisa del campo conceptual de los números naturales relativos y su situación como soporte conceptual y teórico dentro de la línea de investigación conocida como Pensamiento Numérico.

CAPÍTULO

8

Diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros

8.1. Introducción

El número natural relativo se presenta en situaciones y problemas de comparación aditiva, mientras que el número entero está relacionado, básicamente, con situaciones de escalas y medidas sin principio ni fin con una referencia central o con aquéllas otras en las que, por diversos motivos (cero no accesible, interés centrado en torno a unos valores determinados, resolución algebraica, etc.), se efectúa un cambio de referencia u origen en series de valores discretos representables inicialmente mediante números naturales. Esta diferenciación, que no se contempla como tal en el currículum y que puede ser origen de desajustes didácticos, se ha salvado tradicionalmente mediante la aplicación de los conceptos, procedimientos y estructuras de los números naturales o enteros. Esta solución, que no tiene muchos inconvenientes desde el punto de vista formal, presenta, sin embargo, serios inconvenientes desde la perspectiva de la práctica escolar, en la que se constata la necesidad de una selección cuidadosa de los ejemplos, evitando determinadas situaciones y apelando a la abstracción.

El panorama merece, por tanto, un detenido examen desde el punto de vista educativo, ya que el esquema usual de trabajo lleva al alumno a aplicar conceptos y procedimientos matemáticos a situaciones que no cumplen las condiciones necesarias, a englobar conceptos diferentes bajo una misma estructura, a confundir los números naturales con los números naturales relativos y con los números enteros, en el paso del terreno formal al aplicado o viceversa, y a confundir las operaciones aritméticas entre sí y con determinadas acciones sobre cantidades.

El modelo numérico que ha sido preciso considerar para completar el esquema formal tratado en el capítulo anterior, se apoya en la existencia de cantidades y medidas que presentan características peculiares y diferenciadas de las que poseen las cantidades y medidas naturales y enteras. De hecho, las medidas naturales relativas proceden formalmente de aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia (comparación de medidas naturales o enteras), lo que supone una diferencia básica en cuanto a la naturaleza lógico-formal de los conceptos de cantidad, número y medida. Además de esta diferencia formal, debida a las características del proceso constructivo, encontramos dos aspectos que se presentan bajo características también diferentes, como son la ley de composición aditiva y el orden, que en los dos casos considerados presentan las diferencias que aparecen en los cinco epígrafes de la figura 8.1.

En este capítulo, además de explicitar y analizar las diferencias estructurales y lógico-formales entre los dos tipos de números para justificar y reforzar el planteamiento realizado en el capítulo anterior, se pretende completar el estudio teórico mediante un análisis minucioso de dichas diferencias desde el punto de vista de los fenómenos que intervienen y de la representación del conocimiento implicado, lo que involucra las tres estructuras básicas mencionadas en el apartado 7.6 del capítulo 7: la estructura lógico-fomal, la estructura fenomenológica y la estructura de las funciones cognitivas. El centro del análisis, en este caso, será la estructura lógico-formal de los campos conceptuales comparados.

Como consecuencia de este estudio esperamos detectar cuestiones de orden práctico mediante las que poner de manifiesto algunas diferencias cognitivas entre los números naturales relativos y los números enteros. Esto permitirá corroborar que ambos campos conceptuales presentan diferencias cognitivas y no sólo formales, es decir, tienen status diferenciado como herramientas intelectuales. De ser así, una consecuencia didáctica sería la necesidad de un tratamiento específico, gradual y diferenciado para ambos tipos de números.

Para cubrir la doble finalidad descrita (ilustrar, justificar y reforzar los planteamientos teóricos y preparar el estudio empírico) abordaremos, en primer lugar, las diferencias ordinales y algebraicas entre los dos tipos de números así como algunas consideraciones sobre las relaciones entre las diferencias lógico-formales y las diferencias cognitivas; en segundo lugar, como paso previo al estudio empírico, desarrollaremos un análisis ejemplificado de las diferencias estructurales tomando como referencia las diferencias lógico-formales.

8.2. Diferencias ordinales y algebraicas entre números naturales relativos y números enteros

De las consideraciones generales realizadas en los capítulos anteriores, así como de la comparación de las propiedades de la estructura entera y de la estructura natural relativa, se identifican cinco diferencias lógico-formales que se refle... el esquema de la figura 8.1.

Sobre los términos utilizados en el esquema, haremos las siguientes precisiones:

— La inversión del orden en una de las dos "regiones" que conforman la estructura natural relativa, se produce con respecto al que cabría esperar si dicho orden fuera total. En este sentido, el orden entre los números enteros negativos es justo el opuesto al que existe en el subconjunto de números naturales relativos considerados usualmente como "negativos".

— Al decir que la estructura ordinal de los números naturales relativos posee primer elemento queremos decir que los dos ceros relativos constituyen primeros elementos, respectivamente, para cada una de las dos series ordenadas que forman el conjunto.

— Aunque se explicará con detalle en el apartado 8.4, hemos utilizado el término "continuidad" en el sentido de "conexión entre regiones". El cero entero hace las veces de puente entre los números positivos y negativos, permitiendo el paso (entendido como posibilidad de efectuar medidas discretas entre valores de diferente signo) de una región a la otra, lo que conlleva la comparabilidad de regiones, medidas y números de diferente signo. Por el contrario, el doble cero natural relativo establece un corte entre regiones que impide la conexión y la posibilidad de comparación. Aunque se deduce del tipo de orden que se establece en el apartado a), hemos preferido tratar esta diferencia por separado, teniendo en cuenta que se trata de un aspecto crucial que puede producir numerosos errores específicos.

Estructura entera (números enteros ordinarios con la estructura de grupo abeliano y ordenado para la suma)	**Estructura natural relativa (números naturales relativos)**
a).- Orden total.	a).- Orden parcial (natural doble con inversión en la "región negativa").
b).- Sin primer elemento.	b).- Con primer elemento.
c).- "Continuidad" de medidas al cruzar el cero.	c).- "Discontinuidad" de medidas. (no tiene sentido cruzar el cero).
d).- Cero único (elemento neutro para la suma).	d).- Cero doble (dos elementos nulos para la adición).
e).- Composición aditiva: adición entera	e).- Composición aditiva: adición natural y anulación-compensación.

Figura 8.1.—Diferencias básicas entre las estructuras entera y natural relativa.

— Las diferencias d) y e) son de tipo algebraico y compatibles con el orden establecido. En ambos casos, la composición aditiva es una ley de composición interna definida mediante una proposición simple para los números enteros y mediante una compuesta para los números naturales relativos. En este caso, además de la adición natural, para la que se verifica la estabilidad de cada una de las dos "regiones", es obligado añadir la "anulación-compensación aditiva" para definir la composición de elementos de diferente signo.

8.3. Diferencias lógico-formales y diferencias cognitivas

Las diferencias que se han indicado en el apartado anterior deben reflejarse como tales en la representación mental y simbólica de situaciones relativas cotidianas en las que intervienen ambos tipos de números, es decir, las diferencias estructurales de carácter lógico-formal se pueden manifestar también desde el punto de vista cognitivo (conceptos, significados y representaciones) y desde el punto de vista sintáctico (lenguaje, símbolos y reglas). Si esto es así, como sostenemos en el trabajo y nos proponemos poner de manifiesto en el estudio empírico, parece lógico que se den confusiones y errores que deben influir negativamente en la resolución de problemas y en aprendizajes matemáticos posteriores. Utilizar el concepto y la estructura aditiva de los números enteros en situaciones en las que no funcionan - a menos que se prescinda de cierto rigor y coherencia - y en las que sería más adecuado utilizar el concepto y la estructura aditiva de los números naturales relativos, creemos que es el origen de tales errores.

Es nuestra intención obtener evidencias empíricas del comportamiento observable y diferenciado de los sujetos ante dos tipos de tareas representativas de las estructuras en estudio. Dicho comportamiento se puede poner de manifiesto sacando a la luz las interferencias y contradicciones que se producen entre ambos tipos de conceptos y estructuras cuando el individuo se ve obligado a pensar y tomar decisiones sobre situaciones similares en las que intervienen. A priori, se pueden conjeturar tres tipos de comportamiento cognitivo:

a) Que el tratamiento y las respuestas sean, en su mayoría, efectivamente diferentes y correctas, lo que llevaría a concluir que la hipótesis VI es cierta, es decir, que el individuo trata de forma diferente las situaciones con números enteros y con números naturales relativos, lo que implicaría que se trata de dos campos conceptuales diferentes.

b) Una segunda posibilidad se podría caracterizar por la duda, la confusión o la respuesta en blanco, lo que denotaría una inseguridad en los conocimientos sobre ambos campos. En este caso no sería posible asegurar nada sobre la verdad

o falsedad de la hipótesis empírica, sino que se constataría la existencia de conflictos cognitivos debidos a múltiples causas.

c) Por último, podemos encontrar tratamientos iguales, en cuyo caso el individuo utilizaría los mismos patrones y esquemas para tareas que teóricamente requieren tratamientos diferenciados. Aquí se daría la predominancia de uno de los dos campos numéricos.

En este último caso, el instrumento de recogida de datos iría encaminado a constatar: 1) que el conocimiento aprendido sobre los números enteros (el único que aparece explícitamente en los programas y libros de texto) se aplica correctamente en aquéllas situaciones conocidas y utilizadas comúnmente en el tratamiento didáctico del tema (temperaturas, cronología, saldos bancarios, etc.), pero de forma inadecuada, mecánica e indiscriminada en situaciones sencillas que se resuelven en el campo numérico natural relativo; 2) que, en muchos casos, el individuo comete errores por aplicación de su "pensamiento relativo natural" a situaciones que requieren de un "pensamiento entero", mucho más formalizado y menos intuitivo que el anterior.

Estas breves consideraciones son un adelanto de lo que va a constituir el estudio empírico, que completaremos en lo que sigue con un análisis de las cinco diferencias mencionadas.

8.4. Un primer análisis de las diferencias estructurales

Exponemos a continuación un estudio ejemplificado sobre las diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros desde la óptica de sus aplicaciones a situaciones concretas. Para ello utilizaremos problemas y situaciones cotidianas, enunciadas verbalmente, sobre temperaturas, saldos bancarios y saldos de juegos, cronología y ascensores para los números enteros, y sobre ganancias-pérdidas, subidas-bajadas, ingresos-reintegros bancarios y haberes-débitos para los números naturales relativos. Además, para evitar interferencias significativas con otros factores, emplearemos valores numéricos inferiores a 10 y frases y términos en lenguaje común formadas por expresiones cotidianas y familiares.

Los tres tipos de estructuras básicas mencionadas en la introducción intervienen: a través de las características ordinales y algebraicas de los conjuntos numéricos y de sus sistemas de representación (estructuras lógico-formales y de los sistemas simbólicos), a través de los tipos de funciones semánticas y actividades mentales de carácter cognitivo asociadas a cada uno de los campos conceptuales (estructuras cognitivas) y a través de las características de los diferentes contextos de aplicación (estructuras de fenómenos, situaciones y problemas). Por otra parte, los ejemplos que se van a utilizar se han extraído de las tareas incluidas en los dos cuestionarios previos que se mencionan en el capítulo 10. Nos remitimos, por tanto, a los apartados 4 y 5 de dicho capítulo para una información más completa sobre la aplicación empírica de la primera de las cinco diferencias establecidas.

8.4.1. *Primera diferencia : orden total (entero)-orden parcial o doble natural con inversión en la región "negativa" (natural relativo)*

Tanto en las situaciones que se modelizan mediante la estructura ordinal (Z, ≤) (Ejemplo: temperaturas, cronología ordinaria y otras), como en aquéllas situaciones que se modelizan mediante el grupo aditivo y ordenado (Z, +, ≤) (Ejemplo: saldos bancarios, golf y otras), la estructura entera se caracteriza por un orden total sin primer ni último elementos. Así, sabemos que una temperatura de 3 grados *sobre cero* (+3 grados) es mayor que otra de 2 grados *bajo cero* (–2 grados), o que un saldo bancario positivo de 3 (+3) es mayor que un saldo negativo de 2 (–2). Por el contrario, esto no ocurre en la estructura natural relativa, que, si bien se comporta igual que la entera para la comparación y el orden de valores numéricos "positivos", presenta diferencias en el orden de valores numéricos "negativos" y, sobre todo, en el orden entre valores de diferente signo, que no existe en virtud del orden parcial definido.

Un análisis detallado de las características de ambos tipos de orden conduce a considerar los cuatro aspectos puntuales que se abordan en los apartados que siguen y que constituyen manifestaciones de la diferencia que estamos analizando.

a.1. *Atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones.*— Los términos, signos y significados que se utilizan para adjetivar o calificar a las medidas, cuyos valores numéricos pertenecen a las "regiones duales" de ambas estructuras ordinales, difieren en función de la posibilidad de comparar entre sí los pares de elementos de signo contrario y de la existencia de "conexión" entre dichas regiones duales. Esta asignación es:

— *Justa y determinada para números enteros* (positivos y negativos usuales o términos "mayores que cero" y "menores que cero", si bien, en algunos casos, se utilizan los números naturales en lugar de los enteros positivos), de manera que cada región tiene una valoración fija indudable relacionada con su posición usual en el esquema lineal de la recta numérica.

— *Arbitraria e indeterminada para números naturales relativos.* En unos casos la costumbre determina el "signo" de cada región: "ganar" se suele considerar "bueno", "mejor", o incluso "positivo", y perder, "malo", "peor" o "negativo", aunque, en este último caso, las palabras positivo-negativo tienen significados asimilables a los de "favorable-desfavorable" a diferencia de sus significados matemáticos. En otros

casos, la adjetivación es claramente arbitraria y depende de la situación (subir puede ser positivo o negativo, según las circunstancias). En general, podemos decir que en los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relativos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, *no existe en ningún caso una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a las regiones.*

Estas diferencias se pueden manifestar en cuestiones como las siguientes:

> *Completa las siguientes frases para que tengan sentido :*
> *— Las temperaturas sobre cero son* .... *y las temperaturas bajo cero son* ....
> *no lo sé* ☐ *no es posible completar la frase* ☐ *depende* ☐ *de* ....
> ....
> *— Subir escalones es* .... *y bajar escalones es* ....
> *no lo sé* ☐ *no es posible completar la frase* ☐ *depende* ☐ *de* ....
> ....

en las que tendremos en cuenta, para el estudio empírico, que los adjetivos que se pueden emplear (ejemplos: maravilloso, canallesco, estupendo, nefasto, etc.) son muchos más de los que realmente nos interesan, que son aquéllos que aparecen en los problemas aritméticos de enunciado verbal y que se refieren específicamente al orden y la comparación.

a.2. *Comparación-valoración global de regiones.*—La diferencia en el orden se manifiesta, también, al realizar una comparación entre las dos regiones opuestas. A diferencia del apartado anterior, en el que los términos lingüísticos eran adjetivos, nos encontramos aquí con comparativos gramaticales, cuya utilización también es diferente para ambos tipos de números. Así, una comparación global de regiones es:

— *Justa y determinada para medidas enteras* (los positivos son "mayores" que los negativos);

— *Arbitraria e indeterminada para medidas naturales relativas* (ganar suele ser "mejor" que perder, si bien esto no tiene porque ser así; subir no es ni mejor ni peor que bajar en todos los casos[1], etc.). En rigor, y al margen de los

[1] Nótese aquí, que muchos errores que se cometen en la resolución de problemas en los que intervienen números naturales relativos pueden ser debidos a las diferentes valoraciones socioculturales e individuales (subjetivas a veces) que de hecho tienen la mayor parte de las variables relativas. Toda valoración-comparación de pares de medidas naturales relativas opuestas, además de ser ajena a la propia estructura relativa, es conflictiva en virtud del carácter indeterminado, subjetivo o circunstancial de las mismas.

condicionamientos que aparecen en las situaciones cotidianas, las dos regiones naturales relativas no son, en ningún caso, comparables entre sí.

Estas diferencias se pueden manifestar en cuestiones como las siguientes:

> *— Di si son o no comparables los siguientes pares de términos. En caso afirmativo, construye una frase que exprese dicha comparación.*
> *Una planta por encima de la planta baja - una planta por debajo:* ....
> *(sí/no)* ....
> *Regalar - que te regalen:* .... *(sí/no)* ....
> ....

> *— Se trata aquí de comparar cosas. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una* x *en la casilla correspondiente, añadiendo si quieres lo que creas conveniente):*
> *1.—Faltar es* .... *que sobrar.*
> *no lo sé* ❑ *no es posible completar la frase* ❑ *depende* ❑ *de* ....
> ....
> *2.—Una temperatura negativa es* .... *que una positiva.*
> *no lo sé* ❑ *no es posible completar la frase* ❑ *depende* ❑ *de* ....
> ....

a.3. *Comparación de medidas con valores numéricos "negativos" (inversión en el orden entre enteros y naturales relativos).*—Como se ha puesto de manifiesto en el apartado a.1, toda asignación o atribución que se haga a las regiones en la estructura natural relativa es arbitraria. Por este motivo, y dado que se suelen utilizar calificativos similares a los que se emplean objetivamente para los números enteros, vamos a elegir como "región negativa" para los números naturales relativos a aquella que es considerada usual y mayoritariamente como tal en los contextos más representativos. Una vez elegida dicha región, el orden entre los elementos de ambos subconjuntos es:

— *El orden usual entre números enteros negativos* (es menor el de mayor valor absoluto).

— *El orden inverso al entero entre los números naturales relativos* considerados como "negativos" (orden natural).

Esta diferencia se puede manifestar en cuestiones como las siguientes:

> *Se trata de hacer comparaciones. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una* x *en la casilla correspondiente, añadiendo lo que creas conveniente):*
> *Una pérdida de 3 en una jugada es* .... *que una pérdida de 1*
> *no lo sé* ❑ *no es posible completar la frase* ❑ *depende* ❑ *de* ....
> ....
> *Un saldo deudor de 3 es* .... *que un saldo deudor de 1*
> *no lo sé* ❑ *no es posible completar la frase* ❑ *depende* ❑ *de* ....
> ....

Los términos que pueden dar sentido a las frases anteriores son de diversos tipos, incluyéndose en el capítulo 10 el análisis y la delimitación precisa de sus diferentes categorías.

a.4. *Comparación (orden) de medidas con valores numéricos de diferente signo o región.*—Este último criterio, que resulta una variante del a.2 por inclusión de valores numéricos sencillos, se centra en torno a la comparación de medidas con valores numéricos de signos o regiones diferentes. Además de las consideraciones realizadas, se produce aquí una:

— *Conexión y homogeneidad entre regiones para números enteros,* lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones [Ejemplo: un saldo de 2 pesetas a favor del cliente (saldo positivo o acreedor) siempre será un saldo "mayor" o "superior" a un saldo de 3 pesetas a favor del banco (saldo negativo o deudor)].

— *Desconexión entre regiones para números naturales relativos,* lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a las comparaciones. En estos casos, la utilización de palabras precisas, propias de la estructura entera, vacían de sentido lógico a las comparaciones (Ejemplo: una pérdida de 3 pesetas es "menor" (?) que una ganancia de 2 pesetas). A lo sumo se pueden utilizar algunos términos subjetivos y vagos que, en sí mismos, expresan la dependencia de las circunstancias, del lenguaje ordinario o del contexto sociocultural (Ejemplo: Una subida de 3 escalones se puede decir que es "peor" que una bajada de 1 escalón por el esfuerzo que es necesario realizar. Sin embargo, teniendo en cuenta que es bueno hacer ejercicio, también se puede decir que es "mejor" porque beneficia el estado físico del sujeto). Las diferencias se pueden observar en cuestiones como las siguientes:

Se trata de hacer comparaciones. Completa las siguientes frases para que tengan sentido (si no es posible, depende de algo o no lo sabes, deja la frase en blanco y pon una x *en la casilla correspondiente añadiendo a continuación si quieres, lo que creas conveniente):*

–3 grados es .... *que* +1 *grado*
no lo sé ☐ *no es posible completar la frase* ☐ *depende* ☐ *de* ....
....

una ganancia de 3 *es* .... *que una pérdida de* 1
no lo sé ☐ *no es posible completar la frase* ☐ *depende* ☐ *de* ....
....

una subida de 3 escalones es . . . . *que una bajada de 1 escalón*
no lo sé ☐ *no es posible completar la frase* ☐ *depende* ☐ *de* ....
....

Las cuatro diferencias tratadas en este apartado van a constituir la base del estudio empírico que se desarrolla en la parte IV y que amplia las consideraciones expuestas hasta ahora.

8.4.2. *Segunda diferencia: Sin primer elemento (entero)-con primer elemento (natural relativo)*

La existencia de primer elemento, como así ocurre en el caso de los números naturales relativos, impone limitaciones que afectan a la naturaleza de los números, al campo de aplicación, a la simbolización y a la posibilidad de realización de transformaciones; manifestaciones distintas de la segunda diferencia y que pasamos a analizar a continuación.

b.1. *Naturaleza de los números y de las situaciones.*—En la aplicación concreta de la estructura natural relativa, los números representan medidas de cantidades discretas de dos modalidades opuestas (llamadas "cantidades dirigidas o adjetivadas"). Estas "cantidades dirigidas" suelen representar transformaciones cuantitativas discretas, mientras que el signo, la partícula dual o la palabra que acompaña al número natural representa la pertenencia a uno de entre dos conjuntos complementarios en que se divide el universo de valores, en cada uno de los cuales no son posibles los valores inferiores a cero.

Los números enteros representan, o posiciones en una serie única con respecto a un elemento central (cero entero) que sirve de referencia, o bien, "distancias" a dicha referencia central. El signo se refiere a la situación "por debajo" o "por encima" de dicha referencia. Aquí, en contraposición a la estructura natural relativa, sí son posibles los valores "inferiores a cero", en el bien

entendido que el cero significa posición central y no medida en sentido absoluto.

Las diferencias en este punto, se pueden considerar en varios apartados:

b.1.1. *Significados usuales asociados a los tipos de número según el contexto.*—Las siguientes cuestiones hacen alusión a diferentes significados de los números.

— *En cada uno de los siguientes casos, señala el* tipo de número *que se debe utilizar para que la frase sea correcta y tenga sentido:*

En una frase en la que se habla de:	*se debe utilizar un número:* *sin signo (natural)*	*con signo (entero)*
— *"Una temperatura de ... "*	☐	☐
— *"Una ganancia de ... "*..............	☐	☐
— *"Un saldo bancario de ... "*	☐	☐
— *"Una bajada de temperatura de ..."*	☐	☐

Subraya las opciones que consideres ciertas.

–5 puede representar:	*un ingreso negativo*	*una variación de temperatura*
	una subida negativa	*un saldo deudor*
	una ganancia negativa	*una temperatura negativa*
+5 puede representar:	*un ingreso positivo*	*una variación de temperatura*
	una subida positiva	*un saldo acreedor*
	una ganancia positiva	*una temperatura positiva*
5 puede representar:	*un ingreso*	*una variación de temperatura*
	una subida	*un saldo*
	una ganancia	*una temperatura*

b.1.2. *Posibilidad de valores inferiores y superiores a cero.*—Se juega con el doble significado para el término "cero": como cantidad natural y como posición o referencia central. En el primer caso se trata de primer elemento y en el segundo no. El siguiente ejemplo muestra una de las posibilidades de manifestación de esta diferencia.

Decir si es o no posible que ocurran las siguientes cosas (poner una cruz bajo la opción u opciones elegidas):

	sí	*no*	*no sé*	*depende*
— *Una subida de temperatura menor que cero*	☐	☐	☐	☐
— *Una pérdida económica mayor que cero*	☐	☐	☐	☐
— *Un ingreso mayor que cero*	☐	☐	☐	☐
— *Una temperatura menor que cero*	☐	☐	☐	☐
— *Una deuda menor que cero*	☐	☐	☐	☐
— *Un saldo mayor que cero*	☐	☐	☐	☐

b.1.3. *Existencia de límites inferiores.*—Aquí se trata de poner de manifiesto, de una forma más explícita, la diferencia entre tener o no primer elemento. En el siguiente ejemplo se pide directamente dicho valor.

¿Cuál es en teoría el menor valor posible? *(si no existe, no se conoce o no lo sabes, ponlo a continuación):*

— *de un saldo bancario* ....

— *de un aumento de temperatura* ....

— *en un ascensor, de una planta que está por debajo de la planta baja* .....

....

— *de una temperatura* ....

— *de una pérdida en un juego de canicas* ....

— *de una fecha dada en años (calendario)* ....

— *de un reintegro en el banco (sacar dinero)* ....

b.2. *Representación.*—En la estructura entera se utilizan números con signo que a veces se sustituyen por términos netamente relativos, sin afectar para nada a la naturaleza de los números; por ejemplo: indistintamente se habla de una temperatura de "–5 grados" o de "5 grados bajo cero", o también del año "+320" o del año "320 después de Cristo", o simplemente del año 320. En cualquier caso, estamos ante una estructura ordinal sin primer elemento, cuya ausencia implica la unicidad de la serie y del orden, lo que permite, entre otras cosas, utilizar una terminología común y efectuar transformaciones a lo largo de la serie. En este caso, la representación adoptada para los números enteros tiene una estrecha relación con la de los números naturales relativos, a pesar de lo cual presentan diferencias notables.

En la estructura natural relativa existen dos series duales con primer elemento, lo que supone que la terminología a emplear debe señalar claramente la diferencia

entre ambas [2]. La terminología usual es la numérica adjetivada con números naturales (ganar 6, subir 2, etc.), aunque, al igual que ocurre en la estructura entera, se utilizan en algunos casos los números enteros para representar números naturales relativos, con la consiguiente confusión; por ejemplo: en el contexto clásico de las cargas positivas y negativas (Cotter, S.; op. citada en el cap. 4) es normal sustituir "5 cargas negativas" por "una carga de –5", empleando a continuación las reglas y propiedades de los números enteros. En estos casos, el problema radica en que se provoca un cambio de variable y de estructura (de una adjetivación dual se pasa a una valoración global, un saldo total o un estado en torno a un cero único), es decir, se transforma una variable natural relativa en entera.

En resumen, las principales diferencias en cuanto a la representación son las siguientes:

b.2.1. *Tipos de representación simbólica (variedad y naturaleza de las representaciones).*—En la estructura entera se utilizan tres representaciones (adjetivada, con signo y natural). Las dos primeras de forma indistinta, mientras que la tercera está muy extendida en situaciones cotidianas (las temperaturas positivas o los pisos por encima de cero en un ascensor, entre otras). Por el contrario, en la estructura natural relativa se utiliza la representación mixta o adjetivada y la representación con signo bajo ciertas condiciones; una mezcla de representaciones que puede llevar a la confusión y al error cuando se enfrentan entre sí ambas estructuras.

La representación aislada, mediante un número con signo, no es suficiente para los números naturales relativos, puesto que debe ir acompañada, explícita o implícitamente, de alguna información sobre el tipo de dualidad a la que se refieren y sobre el significado de los signos (que como hemos visto, es arbitrario). Por otra parte, no es correcta, inviable en algunos casos o no tiene sentido la utilización de los números naturales, a menos que se haga expresamente la identificación de los "positivos" con los naturales, al igual que ocurre con los enteros.

Las siguientes cuestiones pueden reflejar estas diferencias. En el subapartado siguiente se completan estas consideraciones en lo que se refiere a la simbolización matemática.

[2] El signo o el adjetivo de los números naturales relativos indica la pertenencia a una serie determinada de entre dos posibles. Los números naturales relativos con diferente signo o adjetivo son números que pertenecen a conjuntos distintos, a diferencia de los números enteros, en donde el signo representa una posición en la serie única. Esta diferencia entre posición y pertenencia es una característica esencial de la naturaleza de ambos objetos.

— Escribe dentro del paréntesis, si es posible, un símbolo numérico que represente de forma adecuada cada uno de los siguientes hechos (si no es posible, ponlo a continuación):
— Un saldo bancario deudor de cinco .... (   ) ....
— Subir cinco escalones .... (   ) ....
— Una bajada de temperatura de tres grados .... (   ) ....
— Quitar 3 cartas del montón .... (   ) ....

— Escribe en cada hueco un símbolo numérico *sencillo que complete las siguientes frases:*
— Entre ayer y hoy ha habido una variación de temperatura de .... grados.
— El ascensor ha bajado a la planta ....
— El globo ascendió .... metros en la última media hora.
— Hasta ahora el saldo total del juego, para mí, es de ....

— Escribe una frase con sentido que incluya cada uno de los siguientes símbolos y que se refiera, en cada caso, al tema escrito entre paréntesis:
+5 (con dinero)
....
3 (con temperaturas)
....
–3 (con desplazamientos)
....

b.2.2. *Simbolización matemática.*—Los números enteros se representan usualmente mediante números con signo, si bien, a veces se prescinde del signo "+" debido a la *identificación de los enteros positivos con los números naturales*. Por el contrario, los números naturales relativos carecen de simbolización matemática y las medidas naturales relativas se suelen representar mediante expresiones mixtas compuestas por números naturales y adjetivos, partículas duales o verbos de acción. En concreto, la simbolización matemática es:

— *Conocida y determinada para los números enteros:* 2, +2, –4, etc.

— *Inexistente para los números naturales relativos.*

Hay aquí un posible motivo de confusiones, ya que se suele acudir a la simbolización entera o natural ante la necesidad de simbolizar un número natural relativo. La siguiente tarea pretende poner de manifiesto el problema inverso, es

decir, la dificultad de interpretar expresiones matemáticas con números enteros cuando intervienen variables naturales relativas.

Dos personas han estado hablando en una mesa y se han marchado dejando un papel con la siguiente nota: $-2+4-(-1)$. *¿De que pueden haber estado hablando? Inventa dos historias diferentes.*
1.—Con ganar y perder en un juego
2.—Con ingresos y reintegros bancarios

b.2.3. *Intercambio de símbolos.*—Los signos son necesarios en la mayoría de las aplicaciones prácticas de los números enteros: una temperatura de +5 grados; un saldo bancario de –3; etc.; aunque a veces tiene sentido utilizar como alternativa la adjetivación dual (5 grados sobre cero o un saldo de 3 pesetas a favor del banco). Por el contrario, para los números naturales relativos es difícil encontrar expresiones alternativas sin modificar el sentido de la frase original. Estas diferencias se pueden reflejar en respuestas a cuestiones como las siguientes:

Escribe en los casos en que sea posible, otras frases cortas que signifiquen lo mismo.
— Subir 3 pisos *No es posible expresarlo de otra forma* ❑
.... ; ....
— El año 1993 *No es posible expresarlo de otra forma* ❑
.... ; ....
— Un saldo bancario de +6 *No es posible expresarlo de otra forma* ❑
.... ; ....
— Perder 5 canicas *No es posible expresarlo de otra forma* ❑

b.2.4. *Compatibilidad entre adjetivación y signo.*—En un sentido estricto, se puede decir que en ambas estructuras existe una incompatibilidad entre la adjetivación dual y los signos usuales. Sin embargo, hay ciertos matices que introducen diferencias en cuanto a la utilización conjunta de dichos símbolos. En concreto:

— *Existe incompatibilidad manifiesta entre adjetivación y signo en la estructura natural relativa,* tanto si son del mismo sentido ("Juan ha ganado +3 canicas" o "he bajado –4 escalones"), como si son de sentidos opuestos ("subir –5 escalones" o "efectuar un reintegro de +3"), siendo aquí más clara la incoherencia que en el caso anterior.

— En la estructura entera puede existir *redundancia en unos casos* (términos del mismo signo: "la temperatura de hoy ha sido de +5 grados sobre cero") e *incompatibilidad e incoherencia en otros* (términos de distinto signo: "la temperatura ha sido de +5 grados bajo cero").

La siguiente tarea incluye ejemplos en los que se manifiesta esta diferencia.

Tachar lo que esté mal en cada una de las siguientes expresiones:	
— Una temperatura de +5 grados sobre cero	*— Subir +5 escalones*
— Un ingreso de –5 en la cuenta bancaria	*— Un reintegro de –5*
— Una temperatura de –5 grados sobre cero	*— Un saldo deudor de +5*
— Bajar –5 pisos	*— Subir –5 pisos*
— Una temperatura de –5 grados bajo cero	*— Un saldo a favor de +5*

b.3. *Transformaciones.*—Las transformaciones cuantitativas y métricas ordinarias son duales; pueden ser "positivas" (aumentar, agregar, etc.) o "negativas" (disminuir, perder, etc.). La ausencia de primer elemento y la unicidad de la serie permiten, en el caso de la estructura entera, realizar todo tipo de transformaciones discretas en cualquier sentido y de cualquier valor absoluto. Por el contrario, en la estructura natural relativa las transformaciones se encuentran *limitadas inferiormente*. En las siguientes cuestiones se ponen de manifiesto estas diferencias.

— Un ciclista está el 3.º en la clasificación, ¿cuántos puestos puede subir? ¿Y bajar?
— Si la temperatura es de 3 grados bajo cero, ¿Cuánto puede subir?, ¿y bajar?
— Si tengo 3, ¿puedo gastar más de esa cantidad?, ¿y menos? ¿Cuál es la menor cantidad que puedo gastar? ¿En qué casos puedo gastar más de lo que tengo?

— Una bajada de temperatura de menos de 0 grados sería: una subida positiva, una bajada negativa, una subida negativa, una bajada positiva o sería imposible?
— Un ingreso menor que cero sería : un reintegro negativo, un ingreso negativo, un reintegro positivo o sería imposible?

8.4.3. *Tercera diferencia: "Continuidad" de medidas-"Discontinuidad" de medidas (al cruzar el cero)*

Una de las características de la estructura entera es la de poder "pasar" de la zona de valores numéricos negativos a la de valores numéricos positivos y viceversa, es decir, "poder cruzar a través del cero", lo que hemos denominado "continuidad" de medidas o ausencia de "rupturas" desde un punto de vista intuitivo. En este sentido, es perfectamente normal decir que entre un saldo de –15.000 ptas. y un saldo de +5.000 ptas. hay una *diferencia* de 20.000 ptas. Sin embargo, en la estructura natural relativa, debido a la inversión del orden, al orden doble y al doble cero, no es posible efectuar medidas entre valores opuestos ("bajar 6 pisos es bajar o subir 3 pisos más o 3 pisos menos que subir 3 pisos?"), lo que, por el contrario, sí es posible entre valores del mismo signo ("entre perder 3 y perder 4, hay una diferencia de 1").
Las siguientes cuestiones pueden poner de manifiesto estas diferencias.

— ¿Es necesario "pasar por cero" en los siguientes cambios?
La temperatura ha pasado de –3 grados a +2 grados.
Juan ha pasado de ir ganando 2 en la primera jugada a ir perdiendo 3 en la segunda.
Juan ha perdido 3 en la primera jugada y ha ganado 2 en la segunda.

— ¿Qué diferencia hay entre subir 3 pisos y bajar 4 pisos?: una diferencia de 7 pisos; una diferencia de 1 piso; no hay diferencia; son acciones contrarias e independientes y, por tanto, no tiene sentido hablar de diferencia entre ellas.

— ¿Cómo será una temperatura de 3 grados bajo cero con respecto a una temperatura de 2 grados sobre cero?
Si "Ganar 3" es ganar uno más que "ganar 2" y "perder 3" es perder uno .... (más/menos) que "perder 2". ¿Cómo será "ganar 3" con respecto a "perder 2"?:
"ganar 5 más"; "ganar 1 más"; "perder 1 menos"; no son comparables.

— Juan tiene un saldo de +3 y Pedro tiene un saldo de –2. Explica la diferencia.
— Juan gana 3 y Pedro pierde 5 en una jugada. Explica la diferencia.

8.4.4. *Cuarta diferencia: Cero único - Cero doble (natural relativo)*

Se trata de una diferencia importante y lógicamente compleja. La complejidad se manifiesta en el lenguaje y en la dificultad de una manipulación coherente de las situaciones. Algunas de las cuestiones que evidencian esta diferencia, son las siguientes:

> *— Si hablamos de no ganar (ganar* 0*) y no perder (perder* 0*), ¿podemos hablar de una temperatura positiva* 0 *(*0 *grados sobre cero) o negativa* 0 *(*0 *grados bajo cero)?.*
>
> *— ¿Qué diferencia hay entre: "no subir" y "no bajar"; "no ganar" y "no perder"; un ingreso de* 0 *y un reintegro de* 0*?; un saldo positivo de* 0 *y un saldo negativo de* 0*?; "no ganar" y "ganar* 0*"; "no ganar" y "perder* 0*"; "no perder" y "perder* 0*".*
>
> *— Simboliza cada término y explica cómo se puede pasar: de no tener nada a no deber nada; de no deber nada a no tener nada; de no deber nada a tener algo; de no tener nada a deber algo; de que no te deban nada a no deber nada.*
>
> *— Si tener un saldo de* +2 *en una cuenta y un saldo de* –3 *en otra se puede resumir en un saldo de* –1*, ¿en qué se puede resumir: un saldo de* +2 *y otro de* –2*?*
> *Si perder* 3 *primero y ganar* 4 *después se puede resumir en ganar* 1 *entre las dos partidas, ¿en qué se pueden resumir los resultados siguientes?: perder* 3 *y ganar* 3*; ganar* 4 *y perder* 4*; no ganar y no perder; ganar* 0 *y perder* 0.

8.4.5. *Quinta diferencia: Composición aditiva: Adición entera-Adición natural y anulación-compensación*

Como se deduce del ejemplo presentado en el apartado 7.4 del capítulo 7, la composición aditiva o "suma" de números naturales relativos presenta diferencias con respecto a la suma de números enteros. Estas diferencias, que se deducen de la naturaleza de las definiciones correspondientes (simple y homogénea para números enteros y compuesta y heterogénea para números naturales relativos) y que están relacionadas con el tipo de estructura ordinal, se basan en la intervención, por un lado, de la suma de números naturales, y por otro, de la noción de opuestos aditivos que conduce a lo que hemos denominado como "anulación-compensación".

La noción de opuestos aditivos tiene más sentido en la estructura natural relativa que en la entera, ya que se encuentra relacionada con el funcionamiento de la anulación-compensación y con la composición de transformaciones que conduce a la transformación identidad. Sin embargo, se utiliza en la estructura entera como idea básica para la construcción del grupo aditivo, en el que un número positivo y uno negativo con el mismo valor absoluto se anulan.
Los siguientes ejemplos ilustran las diferencias mencionadas.

> *— En una jugada, Juan ha pasado de ir perdiendo* 3 *a ir ganando* 2*. ¿Qué ha pasado en esa jugada? Simboliza aritméticamente y explica el significado de cada símbolo numérico que utilices.*
>
> *— En una jugada Juan ha perdido* 3 *y en la siguiente jugada ha ganado* 2*. ¿Qué ha pasado entre las dos jugadas? Simboliza con números y operaciones y explica el significado de cada uno de ellos.*
>
> *— Completa y representa mediante símbolos aritméticos:*
> *Hacía* 6 *grados bajo cero y la temperatura ha subido* 5 *grados, luego hace* ....
> *Debo* 3 *y pago* 1*, luego* ....
> *Debo* 3 *y pago* 3*, entonces* ....
> *Tengo* 5 *y gasto* 7*, luego* ....
> *Hacía* 6 *grados sobre cero y ha bajado* 8 *grados, entonces* ....
> *En una cuenta tengo un saldo de* –5 *y en otra un saldo de* +2*. Entre las dos tengo en total un saldo de* ....

8.5. Conclusiones

1. El número natural relativo presenta unas características estructurales propias y diferenciadas de las que definen al número entero, que se ponen de manifiesto a través de representaciones semánticas y sintácticas "naturales" e intuitivas y de amplia utilización cotidiana; si estos conceptos numéricos no reciben un trato curricular adecuado se puede dificultar la comprensión y el dominio de un concepto más abstracto como es el de número entero, afectando, como es lógico, a la enseñanza y el aprendizaje de todo el conocimiento matemático que utilice dichos conceptos y propiedades o que esté fundamentado en él.

2. Las cinco diferencias lógico-formales estudiadas inciden en la *estructu-*

ra fenomenológica de ambos campos conceptuales. Como se ha puesto de mani-
fiesto por medio de las cuestiones, problemas y situaciones concretas que han ser-
vido de ejemplos, las diferencias lógico-formales se traducen, igualmente, en di-
ferencias fenomenológicas:

— Los números naturales relativos organizan, dan respuesta, adquieren
significado concreto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas
en los que interviene la comparación o la transformación aditiva, tanto natural
como entera, o en las que existe una estructura dual de medidas discretas forma-
da por dos series independientes y opuestas una de la otra.

— Los números enteros organizan, dan respuesta, adquieren significado con-
creto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas de escalas sin
principio ni fin con una referencia central o en las que se efectúa un cambio de
referencia u origen en series de valores discretos representables inicialmente me-
diante números naturales (fenomenología concreta), o bien, en situaciones y pro-
blemas susceptibles de una manipulación algebraica o relacionados con activida-
des matemáticas derivadas (fenomenología matemática).

3. La estructura de los fenómenos se encuentra también relacionada con
la estructura de actividades cognitivas correspondiente. Uno de los elementos
fundamentales dentro de esta estructura cognitiva es el concepto de esquema
(Vergnaud, G., 1993, págs. 88 y sgtes.), entendido como *"organización
invariante de la conducta por una clase de situaciones dadas"* (op. citada, pág.
89) y compuesto por *"reglas de acciones para alcanzar cierto fin, invariantes
operatorios e inferencias para hacer actuar el esquema en cada situación par-
ticular.."* (pág. 93).

En nuestro caso intervienen, entre otros, los siguientes esquemas: compara-
ción, transformación y combinación de medidas y de números; intercambio de
símbolos; medida entre elementos opuestos en un contexto entero; anulación-com-
pensación.

4. La primera diferencia ordinal se manifiesta en cuatro tipos de tareas-es-
quemas diferentes: atribución de significados, signos y adjetivos duales a las re-
giones; comparación-valoración global de regiones; comparación de medidas con
valores numéricos "negativos"; comparación de medidas con valores numéricos
de diferente signo o región.

Las principales características diferenciadoras son las siguientes:

— En los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relati-
vos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, no existe, en ningún
caso, una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a
las dos regiones opuestas.

— Toda comparación global de regiones es justa y determinada para números enteros y arbitraria o indeterminada para números naturales relativos.

— El orden entre los elementos de la "región negativa" es el usual entre números enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto) y el inverso al entero entre los números naturales relativos considerados como "negativos" (orden natural).

— Existe conexión y homogeneidad entre regiones para los números enteros, lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones, y desconexión entre regiones para números naturales relativos, lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a dichas comparaciones.

5. Existe similitud entre ambas estructuras numéricas en la tarea-esquema de comparación de medidas dentro de la región "positiva". En términos más precisos habría que decir que de las dos regiones opuestas que componen la estructura natural relativa, una de las dos (cualquiera de ellas) posee la misma estructura ordinal que la que tienen los números enteros positivos, mientras que la región opuesta presenta el orden inverso al que poseen los números enteros negativos. La arbitrariedad que supone asignar a una de las dos regiones naturales relativas el término "positiva" o "negativa" admite una solución convencional basada en usos lingüísticos o en la costumbre. En sentido estricto, sólo se deben contemplar elementos o regiones opuestas una de la otra, sin hacer intervenir calificativos o términos duales para dichos elementos o regiones.

6. La segunda diferencia, que se refiere a la existencia de primer elemento, se pone de manifiesto en los significados concretos y en la naturaleza de los elementos, en la representación simbólica y en las transformaciones permitidas en cada una de las estructuras.

7. La tercera diferencia, que se refiere a las consecuencias métricas que se deducen de la "conexión-desconexión" entre regiones, está relacionada con la posibilidad de comparación de valores de diferente signo. Si se toma como referencia la estructura entera, la "ruptura" existente entre los números naturales relativos de un signo y sus opuestos no permite efectuar medidas entre dichos números, lo que hemos puesto de manifiesto mediante ejemplos diferentes que deberán ser tratados más detenidamente en investigaciones posteriores.

8. La diferencia existente entre poseer un único cero (estructura entera), que es además elemento neutro, y poseer dos ceros que no son permutables bajo la ley aditiva (estructura natural relativa), presenta una complejidad lógica que no hemos abordado suficientemente en el trabajo y que deberá ser objeto de una atención especial en el futuro. No obstante, se ponen en evidencia las diferencias de tipo lógico existentes en este punto entre ambas estructuras.

9. Se constatan y se analizan dos tipos de leyes de composición interna: suma de números enteros y suma de números naturales relativos, formada esta, a su vez, por la combinación de la suma de números naturales y la operación denominada "anulación-compensación".

8.6. Logros y hallazgos

En este capítulo, se han alcanzado logros que avalan la bondad de la *hipótesis* III enunciada en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dicha hipótesis es la siguiente:

III. El conjunto de los números naturales relativos, con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

La identificación y el análisis ejemplificado de las cinco diferencias, junto a argumentos que se sustentan en las características de las estructuras algebraicas y ordinales de los dos conjuntos numéricos, presentadas en el capítulo 7, avalan la credibilidad de esta hipótesis, que consideramos corroborada en su totalidad y a plena satisfacción en este capítulo.

De los *objetivos* enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, y como consecuencia de la comprobación de la hipótesis mencionada, se han cubierto en este capítulo, en diferente grado, los siguientes:

b) *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio;* objetivo cubierto parcialmente al detectarse que una parte de situaciones y problemas del dominio presenta características que no son compatibles con dichos conceptos numéricos usuales.

c) *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números;* objetivo cubierto parcialmente en el capítulo anterior, en el que quedó establecida su necesidad lógica, y reforzado en este capítulo al ponerse de manifiesto las cinco diferencias detectadas. La constatación de dichas diferencias, la nueva organización del campo que se presenta en el capítulo 9 y la constatación empírica de diferencias en el tratamiento cognitivo (capítulo 11), son argumentos añadidos en favor de la consecución de este objetivo.

d) *Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes entre los tres tipos de números*; objetivo cubierto plenamente en este capítulo, a cuya consecución se ha dedicado la totalidad del mismo.

CAPÍTULO

9

Fenómenos, situaciones y problemas del campo conceptual de los números naturales relativos

9.1. Introducción

En los capítulos 7 y 8 se ha caracterizado un nuevo marco de conceptos cuantitativos, numéricos y métricos, al que hemos denominado *campo conceptual natural relativo*; también hemos establecido las diferencias principales con el campo conceptual natural y el campo conceptual entero. Por otra parte, en el capítulo 8 se ha insistido en una de las cuestiones clave del trabajo, recogida en el objetivo d), apartado 2.2.2 y en la hipótesis III, apartado 2.3.2. No sólo hemos establecido la existencia de números y medidas naturales relativas, sino que hemos probado con detalle que son entes diferenciados de los números y medidas naturales y, sobre todo, de los números y medidas enteras.

Un aspecto importante que queda por desarrollar es el que concierne a las implicaciones efectivas para el currículum, la investigación y la Educación Matemática en general, las cuales están relacionadas con la consecución de los objetivos específicos e) y f), citados en el apartado 2.2.2, así como con la comprobación de las hipótesis V y VI, enunciadas en el apartado 2.3.2. De dichas implicaciones, hay una especialmente importante por su incidencia en otras investigaciones así como por sus implicaciones para el currículum, libros de texto y trabajo diario en el aula. Nos estamos refiriendo, como se enuncia escuetamente en la hipótesis V, a las consecuencias sobre la organización global del dominio de la aritmética elemental aditiva, incluidas las clasificaciones de situaciones y problemas de dicho dominio. Igualmente, debemos destacar la posible incidencia en los resultados, interpretaciones y clasificaciones a las que se ha llegado en anteriores investigaciones sobre el campo aditivo, el pensamiento numérico y algebraico o la resolución de problemas aditivos de enunciado verbal.

En el presente capítulo, vamos a dirigir la atención a las situaciones y problemas de aplicación práctica de los conceptos y relaciones que intervienen en el campo conceptual natural relativo. Después de definir el concepto de situación relativa, como elemento central del campo conceptual mencionado, se expone un estudio y revisión detallada de los diferentes tipos de situaciones y problemas. Este estudio conduce a una nueva clasificación que organiza completamente el dominio en lo que se refiere a las situaciones más elementales. Se concluirá el capítulo con una exposición de las principales consecuencias y con una breve comparación con clasificaciones y resultados obtenidos en otras investigaciones.

9.2. **Elementos básicos, criterios y representación utilizada**

En el desarrollo del capítulo van a intervenir los siguientes *elementos básicos:*

1.—Tres tipos de números y medidas con sus correspondientes significados.

2.—Tres tipos de adición, cada uno de ellos representado mediante un signo diferente.

3.—Tres tipos de relaciones y sus correspondientes definiciones lógico-formales.

Al mismo tiempo, se van a utilizar los siguientes *criterios:*

a) Focalización del análisis en el campo de las situaciones y problemas con medidas.

b) Consideración conjunta del cálculo numérico y del cálculo relacional en un todo inseparable (ver apartado 4.4.3.1).

c) Distinción entre situaciones "simples" y "compuestas".

d) Exposición ejemplificada y comentada, similar a las que se han empleado en otros trabajos (ver apartado citado).

e) Utilización de esquemas y diagramas generales para resumir y referenciar el trabajo.

Y los siguientes *diagramas y tipos de representación:*

— Diagramas de flechas que enlazan entre sí símbolos diferentes para cada uno de los tres tipos de medidas, que suponen una ampliación de los utilizados por Vergnaud, G. (1982), y que son: cuadrado para indicar medida natural, círculo para indicar medida natural relativa y triángulo para indicar medida entera.

— Notación simbólica para definir los diferentes tipos de situaciones relativas simples.

9.3. **Situación relativa discreta con estructura aditiva**

9.3.1. ***Caracterización general***

Las situaciones relativas aditivas y discretas tienen su origen en las primeras situaciones experimentales con cantidades/medidas y en los primeros problemas aritméticos con significados concretos en los que intervienen medidas expresables mediante números naturales. Una parte importante de estos problemas y situaciones, con excepción de los llamados de "combinación natural o entera", constituyen el punto de partida para el proceso que lleva a la aplicación práctica de los números naturales relativos y, en general, al dominio de las relaciones y estructuras aditivas subyacentes a las manipulaciones algebraicas elementales.

La característica fundamental de esta parte importante del campo conceptual aditivo radica en la intervención de las cantidades o medidas que hemos llamado "naturales relativas", es decir, de los elementos del conjunto $\mathbf{Q}_{NR}$ (cantidades) o del conjunto $\mathbf{D}_{NR}$ (medidas). Estos elementos pueden actuar sobre cantidades/medidas naturales o enteras, bajo la forma de comparaciones o transformaciones, o bien como objetos en sí mismos en comparaciones, transformaciones y combinaciones de cantidades/medidas naturales relativas.

En general, y como primera aproximación, diremos que una *situación relativa discreta con estructura aditiva* es *un problema aritmético concreto en el que intervienen cantidades/medidas discretas elementales, que operan entre sí bajo uno o varios de los tres tipos básicos de relaciones aditivas (combinación, comparación y transformación) y de las cuales, al menos una de ellas es una cantidad/medida natural relativa.*

Esta definición general pretende incluir un amplio abanico de actividades, que van desde la simple manipulación/composición aditiva de cantidades hasta la realización de tareas aditivas complejas con medidas en la realidad cotidiana, en el trabajo y en el medio extraescolar, pasando por la resolución de problemas de enunciado verbal y otras tareas en el medio escolar. La intención es considerar que existe una situación relativa cuando se produce una actividad concreta de un sujeto en el sentido indicado. No obstante, la definición anterior ha de ser restringida para que sea operativa a los efectos del estudio que vamos a presentar. No es nuestra intención salirnos del ámbito educativo ni del campo de las actividades ordinarias en las clases de matemáticas, y puesto que el interés del trabajo se centra en la *educación* del pensamiento numérico relativo aditivo consideraremos, en lo que sigue, el campo delimitado por los *problemas, actividades y ejercicios escolares de aritmética*, ya sean manipulativos (con material didáctico), de enunciado verbal o incluidos en alguna actividad o tarea más amplia del alumno, como puede ser un razonamiento, una demostración o una tarea de traducción-interacción.

Por otra parte, vamos a tener en cuenta las estructuras lógico-semánticas globales de las relaciones que intervienen, definidas formalmente mediante correspondencias entre conjuntos de cantidades o medidas. La estructura sintáctica así como los aspectos lingüísticos no van a ser considerados aquí por varios motivos: a) para los intereses de la investigación es un aspecto secundario y debe ser estudiado en trabajos posteriores, b) requiere de una atención específica, ya que se trata de una componente compleja, c) la aplicación del modelo que hemos construido simplifica la estructura sintáctica, mediante la integración, bajo los conceptos de cantidad, número y medida natural relativa, de aquéllos verbos, términos y palabras clave que dan sentido a estos nuevos elementos.

Con las restricciones mencionadas se puede concretar la descripción general expuesta anteriormente, según se indica a continuación.

9.3.2. *Caracterización formal*

Una *situación relativa simple discreta con estructura aditiva,* en el contexto de los problemas, actividades y ejercicios escolares de matemáticas, se puede caracterizar mediante un par $\{[(a, b), c], g\}$ donde a, b y c son cantidades/medidas discretas singulares y g una correspondencia definida por la terna $(A \times B, C, g)$ de tal manera que:

1.—Para $[(a, b), c] \in [(A \times B) \times C]$, $g[(a, b)] = c$

2.—$A, B, C \in \{D_N, D_{NR}, D_Z\}$ (para el caso de las medidas)

3.—$A = B \leftrightarrow C = D_{NR}$

4.—$A \neq B \leftrightarrow A = D_{NR} \vee B = D_{NR}$

5.—La estructura lógico-semántica global de la situación viene dada por el tipo de relación g, que se corresponde con una de las tres categorías de relaciones aditivas básicas: combinación, transformación o comparación.

6.—Desde el punto de vista lógico, los conjuntos A, B y C deben ser *g-compatibles* (homogeneidad de cantidades o medidas, que se traduce en la viabilidad lógica de la correspondencia g)[1].

Cuando una de las medidas es desconocida y se trata de encontrar su valor a partir de las otras dos, estamos ante la estructura de un problema aritmético elemental.

9.3.3. *Tipos de situaciones relativas discretas*

De la definición anterior se deduce que la correspondencia **g** admite las siete posibilidades siguientes, cuyas estructuras quedan representadas en los recuadros rayados de la figura 9.1:

[1] Esto no se cumple cuando, por ejemplo, se pretenden "sumar peras con lápices" o "aumentar 3 metros una cantidad de 6 canicas". Esta viabilidad, además de salvaguardar las condiciones lógico-formales necesarias, respeta criterios empíricos que tienen que ver con la homogeneidad de las cantidades y medidas que intervienen.

Esquemas gráficos de las estructuras de las situaciones relativas aditivas discretas simples

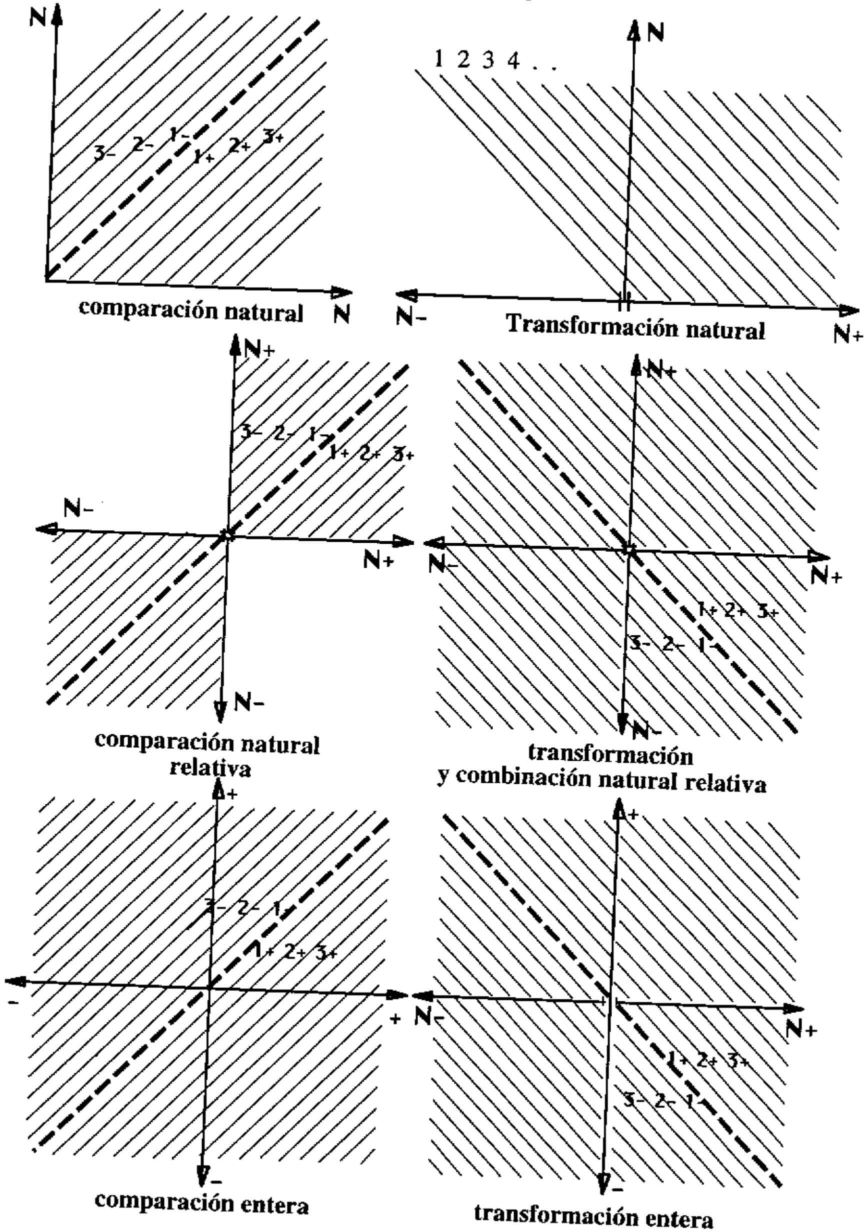


Figura 9.1.—Esquemas gráficos de los tipos de situaciones simples.

Comparación y transformación naturales, donde se excluye la combinación natural en la que no intervienen cantidades/medidas relativas sino, únicamente, la adición natural.

Comparación y transformación enteras, donde se excluye la combinación entera por el mismo motivo del párrafo anterior (sólo interviene la adición entera).

Comparación, transformación y combinación relativas, con particularidades motivadas por el doble cero, el paso de medidas de un signo al otro, etc.

Estas modalidades darán origen a otros tantos tipos de situaciones relativas discretas simples con estructura aditiva que se analizarán con más detalle en el apartado siguiente. Todas ellas se refieren a situaciones que involucran cantidades, medidas y números; elementos importantes para la educación del pensamiento numérico relativo. Las situaciones relativas con cantidades, materializadas en experiencias físicas (manipulación de cantidades) o en experiencias lógico-matemáticas (razonamiento sobre cantidades y sus relaciones), según se desprende del análisis realizado en apartados anteriores, deben ocupar un lugar destacado en los procesos didácticos.

En lo que sigue, vamos a dirigir nuestra atención hacia las situaciones en las que intervienen medidas, puesto que la división entre situaciones "cuantitativas" y "métricas" la podemos considerar meramente formal. En particular, nos vamos a referir a *situaciones métricas relativas discretas con estructura aditiva,* es decir, a situaciones relativas en las que *A*, *B* y *C* son conjuntos de medidas. Los motivos de esta decisión radican, por una parte, en el hecho de que la medida constituye una síntesis entre la cantidad y el número y, por otra, en que la mayor parte de las actividades y ejemplos con significado concreto que se utilizan en la enseñanza de la numeración y el cálculo son situaciones métricas.

9.4. Estudio de las situaciones métricas relativas discretas con estructura aditiva

Exponemos a continuación una relación ejemplificada y comentada de los diferentes tipos de situaciones relativas que se pueden dar en los casos más elementales. En primer lugar, nos encontramos con las situaciones básicas que se deducen de la definición, a las que llamaremos "simples". En segundo lugar, con las que se obtienen de combinar dos a dos las situaciones simples bajo las condiciones teóricas establecidas, a las que llamaremos "compuestas". Ambos tipos se abordan, por este orden, en los dos subapartados siguientes. El resto de situaciones recibirán el calificativo de "complejas", quedando fuera del interés de esta investigación.

9.4.1. *Tipos de situaciones simples*

Los tipos que se relacionan a continuación, y que aparecen esquematizados en el cuadro de la figura 9.2, corresponden a situaciones relativas en las que el grafo de **g** consta de un sólo par ordenado. Se trata de situaciones en las que intervienen únicamente tres medidas que se refieren a la misma magnitud o cualidad medible, o al mismo contexto fenomenológico (una variable), de las cuales al menos una de ellas es una medida natural relativa.

Los siete tipos mencionados son los siguientes:

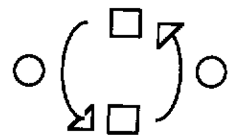
a) *Comparación natural simple.*—Se trata de las situaciones más elementales del dominio y que dan origen, como hemos visto, a las medidas naturales relativas. Según se desprende del modelo establecido en el capítulo 7, la medida natural relativa es un *resultado o relación* que procede de la comparación entre medidas naturales. Una definición equivalente a la establecida en dicho capítulo para la comparación de medidas naturales, es la siguiente:

$$C_{D_N} : D_N \; x \; D_N \rightarrow D_{N_R}$$
$$(a, b) \rightarrow c^i = (a - b)^+ (u) \text{ si } a = b \oplus x \text{ con } x \in D_N$$
$$= (b - a)^- (u) \text{ si } b = a \oplus x \text{ con } x \in D_N$$

siendo $i \in \{+, -\}$; $a, b, c \in N$; u la unidad de medida y "–" la operación de sustracción ordinaria.

Nótese como el orden en el que se lleva a cabo la comparación, en el caso en que x sea la medida natural nula, es el responsable de la aparición del doble cero natural relativo.

La comparación natural simple se puede representar mediante el siguiente esquema:



en el que la doble flecha ilustra la doble conclusión directa y recíproca de toda comparación. Así, desde un punto de vista lógico, se puede establecer una doble implicación entre ambos resultados: $a\ (c^+)\ b \leftrightarrow b\ (c^-)\ a$, donde a, b y c^i son los mismos elementos establecidos en la definición; cada miembro es una proposición enunciada en términos de una relación entre elementos genéricos, lo que aconseja como conveniente la inclusión de las dos conclusiones en el esquema. En la práctica basta con una de ellas, quedando la otra sobreentendida.

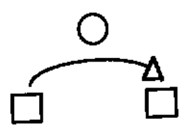
La definición y el esquema anteriores se ajustan a situaciones del tipo: "Juan tiene 12 canicas; Pedro tiene 5 canicas. Por tanto, Juan tiene 7 *canicas más que* Pedro y/o Pedro tiene 7 *canicas menos que* Juan". Como problemas aritméticos han sido estudiados por Carpenter y Moser (1981) y por Nesher, Greeno y Riley (1982), entre otros, bajo la denominación de "problemas de comparación", en los que se trata de averiguar una de las medidas conocidas las demás. Como ejemplo, podemos citar el problema 32 incluido en Puig, L.; Cerdán, F. (1988, pág. 103): "Pedro tiene b. Pedro tiene *c menos que* Juan. ¿Cuántos tiene Juan?".

b) *Transformación natural simple.*—La medida natural relativa es, en este caso, un *operador aditivo* que actúa sobre una medida natural transformándola en otra medida natural. La transformación natural simple se puede definir mediante la siguiente correspondencia, que no es aplicación:

$$T_{D_N} : D_{N_R} \, x \, D_N \rightarrow D_N$$
$$(a^i, b) \rightarrow c = a^i \, T_{D_N} \, b = (b + a)\,(u) \text{ si } i = \text{“}+\text{”}$$
$$= (b - a)\,(u) \text{ si } i = \text{“}-\text{” y } a \leq b$$

con $a, b \in N$, u la unidad de medida y las operaciones de adición y sustracción natural.

El esquema de la *transformación natural simple* es el siguiente:



que se ajusta a situaciones del tipo: "Juan tiene 6 canicas. En una partida *gana* 3 *canicas*. En total tiene 9 canicas después de jugar la partida". Como problemas aritméticos han sido estudiadas sus 6 variantes, según la posición de la incógnita y bajo la denominación de "problemas de cambio", por Carpenter y Moser (1981) y por Nesher, Greeno y Riley (1982), entre otros. Del mismo modo, tanto esta versión simple como la compuesta, que veremos más adelante, han sido estudiadas por Vergnaud, G. (1981), si bien, como también veremos, la versión compuesta se puede reducir a una combinación natural relativa simple. Un ejemplo característico de los problemas de este tipo lo encontramos en Puig, L.; Cerdán, F. (1988, pág. 100): "*Cambio 1: Juan tenía a. Le dan b. ¿Cuántos tiene ahora?*".

Los dos tipos de situaciones descritos hasta aquí corresponden a dos categorías semánticas consideradas como "tradicionales" dentro de los estudios sobre resolución de problemas aritméticos de enunciado verbal, consideración que sigue inalterada después del trabajo que presentamos. No obstante, en la medida en

que todo operador aditivo es un elemento que surge en un contexto comparativo, ambos tipos de situaciones se encuentran íntimamente relacionadas, apoyándose mutuamente tanto desde un punto de vista lógico como epistemológico (en ambos tipos de situaciones interviene la estructura ordinal, a diferencia de las situaciones de combinación, en las que únicamente interviene la estructura aditiva).

c) *Comparación, transformación y combinación natural relativa simples.*—En este caso, la medida natural relativa juega el doble papel de *operador* y *estado* sobre el que se construye una *aritmética natural relativa.*

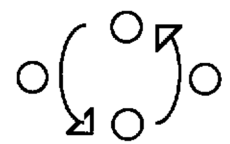
Los tres tipos de situaciones de este apartado tienen la misma estructura formal, que se puede definir mediante la siguiente ley de composición interna:

$$\oplus : D_{N_R} \, x \, D_{N_R} \rightarrow D_{N_R}$$
$$(a^i, b^{i'}) \rightarrow c^{i''} = a^i \oplus b^{i'}$$

establecida con detalle en el apartado 7.4.4 del capítulo 7 al que nos remitimos.

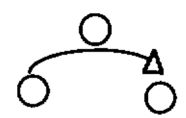
Aunque se han agrupado los tres tipos en un sólo epígrafe, el análisis semántico global revela algunas diferencias que pueden ser de interés para la investigación y que aconsejan la distinción a efectos de posteriores investigaciones. Las diferencias fundamentales se centran en torno al carácter estático-dinámico de las acciones, a la estructura sintáctica y al status/significado operador-estado que pueden tener las medidas, aspecto este último que, sin embargo y como veremos, se diluye ante la posibilidad que existe en este tipo de medidas de cambiar de formato sin afectar al significado. Por estos motivos, tratamos a continuación cada uno de dichos tipos por separado, quedando este hecho reflejado en el cuadro de la figura 9.2.

La *comparación relativa simple,* se ajusta al esquema de la figura siguiente:



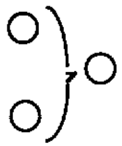
y se presenta en situaciones del tipo: "Juan y Pedro juegan con otros amigos una partida de canicas. Juan *gana 6 canicas* y Pedro *gana sólo 2*. Juan *ha ganado* 4 *canicas más que* Pedro o Pedro *ha ganado 4 canicas menos* de las que ha ganado Juan".

La *transformación relativa simple,* se ajusta al esquema de la figura siguiente:



y se presenta en situaciones relativas del tipo: "Juan le *debe* 4 *canicas* a Pedro. Le *devuelve* 3. Por tanto, sólo le *debe* 1", donde al igual que ocurre en la transformación natural, la medida natural relativa actúa como operador (ligada a una "acción", usualmente puntual en el tiempo, que modifica una "situación"). La diferencia radica en que, en este caso, lo hace sobre una medida natural relativa que interviene como estado, es decir, ligada a una "situación" estable en el tiempo y que puede ser modificada mediante una acción-transformación.

La *combinación relativa simple,* presenta el esquema de la figura siguiente:



que aparece en situaciones relativas del tipo: "Después de repartir el material escolar han *sobrado* 2 *lápices rojos y* 3 *lápices verdes*. En total han *sobrado* 5 *lápices*"; o también: "*Debo* 5 *canicas* a Pedro y él *me debe a mi* 2. En total, sólo *le debo* 3 *canicas*". O, también, para ejemplificar la composición de transformaciones estudiada por Vergnaud, G.[2]: "He jugado dos partidas a las canicas. En la primera he *ganado* 3 *canicas* y en la segunda he *perdido* 5 *canicas*. En total, entre las dos partidas, he *perdido* 2 *canicas*". Hay que decir que la proposición "ganar 3 canicas", que podría ser interpretada como una transformación, puede ser considerada también como un estado en el sentido usual del término, lo que ocurre si la expresión anterior se sustituye por la equivalente: "una ganancia de 3 canicas". Esta posibilidad de cambio del enunciado sin alteración del significado global de la frase y de los términos que intervienen, es la que caracteriza la doble naturaleza de las medidas de este tipo.

d) *Transformación entera simple.*—La "medida natural relativa" es un *operador aditivo* que actúa sobre una medida entera transformándola en otra medida entera. Se puede definir, por similitud con la transformación natural simple, mediante la siguiente ley de composición externa:

$$T_{D_Z} : D_{NR} \, x \, D_Z \rightarrow D_Z$$
$$(a^i, z) \rightarrow z' = a^i \, T_{D_Z} \, z = (z + h)\,(u)$$
$$\text{donde } h = (+a) \text{ si } i = \text{“+”}$$
$$h = (-a) \text{ si } i = \text{“−”}$$

[2] Ver referencia en el apartado siguiente.

siendo $a \in N$; z, $h \in Z$, u la unidad de medida, "+" la adición entera y "+" y "−" los signos usuales de los números enteros.

La transformación entera simple, se puede representar por el esquema de la figura:

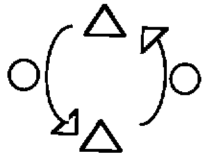
al que se ajustan situaciones relativas como: *"Mi cuenta tenía un saldo deudor de 5.000 ptas. Me han ingresado 20.000 ptas. Después del ingreso, la cuenta queda, por tanto, con un saldo a favor de 15.000 ptas.".*

e) *Comparación entera simple.*—La medida natural relativa es un *resultado o relación* que procede de la comparación de medidas enteras. Se puede definir mediante la aplicación:

$$C_{D_Z} : D_Z \, x \, D_Z \rightarrow D_{NR}$$
$$(z_1, z_2) \rightarrow a^i = |\, z_2 - z_1 \,|^{-}\,(u) \text{ para } z_1 \leq z_2$$
$$= |\, z_1 - z_2 \,|^{+}\,(u) \text{ para } z_2 \leq z_1$$

siendo z_1, $z_2 \in Z$ y u la unidad de medida.

La comparación entera simple se puede representar mediante el esquema:



que refleja situaciones relativas como la siguiente: *"A las 9 de la mañana el termómetro marcaba una temperatura de* 18 *grados. A las* 12 *de la mañana, marcaba una temperatura de* 24 *grados. Por tanto, a las* 12 *de la mañana marcaba* 6 *grados más que a las* 9 *y a las* 9 *de la mañana marcaba 6 grados menos que a las* 12".

Salvo algunas definiciones, que se han simplificado o suprimido por problemas de espacio, el cuadro de la figura 9.2 recoge los siete tipos analizados.

Situaciones relativas discretas simples con estructura aditiva

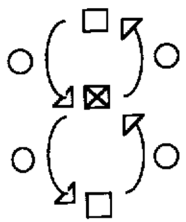
	comparación simple	transformación simple	combinación simple
natural	$C_{D_N}: D_N \times D_N \to D_{N_R}$ $(a, b) \to (a-b)^+$ $a = b + x$; $x \geq 0$ $(b-a)^-$ $b = a + x$; $x \geq 0$	$T_{D_N}: D_{N_R} \times D_N \to D_N$ $(a^i, b) \to b + a$; $i = \{+\}$ $b - a$; $i = \{-\}$ y $a \leq b$	no aparecen números naturales relativos
natural relativo	$\oplus: D_{N_R} \times D_{N_R} \to D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)	$\oplus: D_{N_R} \times D_{N_R} \to D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)	$\oplus: D_{N_R} \times D_{N_R} \to D_{N_R}$ (definido en el capítulo 7)
entero	$C_{D_Z}: D_Z \times D_Z \to D_{N_R}$ $(z, z') \to \lvert(z'-z)\rvert^-$ $z \leq z'$ $\lvert(z-z')\rvert^+$ $z' \leq z$	$T_{D_Z}: D_{N_R} \times D_Z \to D_Z$ $(a^i, z) \to z + a$; $i = \{+\}$ $z - a$; $i = \{-\}$	no aparecen números naturales relativos

Figura 9.2.—Cuadro de las situaciones métricas relativas discretas con estructura aditiva.

9.4.2. *Tipos de situaciones compuestas*

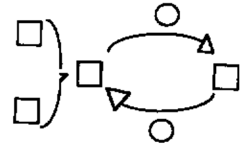
Los tipos simples, descritos en el apartado anterior, se pueden combinar o componer entre sí para dar lugar a situaciones relativas compuestas. En ellas interviene un único contexto y unos elementos característicos que podemos denominar "elementos puente", los cuales tienen el papel de relacionar entre sí las dos partes que componen cada una de las situaciones. Exponemos a continuación un resumen comentado de algunas de las composiciones que aparecen esquematizadas en el cuadro de la figura 9.3, situado al final de este apartado.

Situaciones naturales compuestas.—Se caracterizan por la intervención de dos relaciones naturales básicas combinadas. De los seis tipos que resultarían excluimos la composición de combinaciones naturales, en la que no aparece ninguna medida natural relativa. Resultan, por tanto, los cinco tipos siguientes:
Composición de comparaciones naturales simples, con el siguiente esquema:



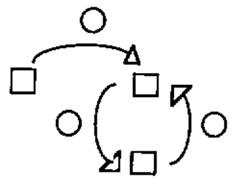
donde el elemento marcado con una x sirve de enlace entre las dos comparaciones. Se da en situaciones del tipo: *"Juan tiene 3 años más que Pedro y 2 años menos que Antonio. Si Antonio tiene 14 años, entonces Pedro tendrá 9 años".*

Composición de comparación y combinación naturales simples, con el siguiente esquema:



que se ajusta a situaciones del tipo: *"Sergio tiene 2 canicas verdes y 4 canicas rojas. Juan tiene 3 canicas más que Sergio. Por tanto, Juan tiene 9 canicas".* Aquí, el total de canicas de Sergio es el elemento puente necesario para completar la información.

Composición de comparación y transformación naturales simples, con el siguiente esquema:

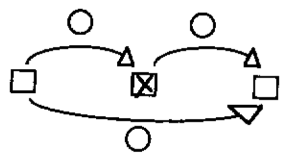


como por ejemplo: *"José Luis tenía 8 canicas antes de jugar con Sergio. Ganó 3 canicas y terminó el juego con 6 canicas más que las que tenía Sergio. Por tanto Sergio tenía 5 canicas".*

Del mismo modo, se pueden situar aquí los problemas aritméticos denominados "de *igualación*" por Carpenter y Moser (1981). A modo de ejemplo y cambiando el sentido de la transformación del esquema anterior, podemos citar el problema: *"Juan tiene 6 canicas y Pedro tiene 2. ¿Cuántas canicas debe comprar Pedro para tener las mismas que Juan?".* Por tanto, los problemas de "igualación" se sitúan, según nuestro estudio, en un nivel diferente al de los problemas que hemos denominado "simples", en contraposición a lo que establecen los autores mencionados.

Composición de transformaciones naturales

Siguen el esquema siguiente (el recuadro con una x corresponde al elemento puente):



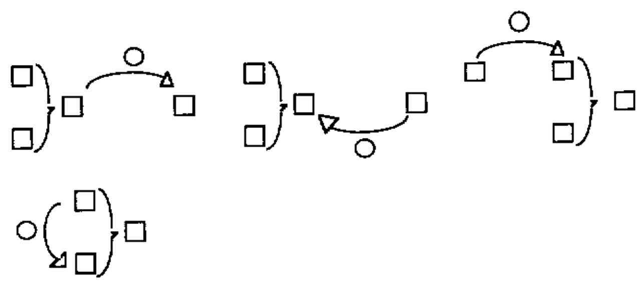
al que se ajustan situaciones como la siguiente: *"Pedro tenía* 6 *caramelos. Se comió* 2 *y le regalaron* 8. *Por tanto, al final, tenía* 6 *caramelos más que al principio, es decir,* 12 *caramelos".*

En términos de problemas aritméticos tenemos, en este caso, los resultados ya conocidos de Vergnaud, G. (1982, págs. 48-49) sobre los problemas del tipo "TTT", en algunos de los cuales, según el autor, la dificultad supera con creces a la de otras situaciones similares. En concreto, según los resultados obtenidos, se produce una diferencia de tres años en lo que se refiere a la resolución con éxito de los dos problemas llamados "Bertrand" y "Bruno":

> "Bertrand juega un juego de canicas. Pierde 7 canicas. Después de jugar, tiene 3 canicas. ¿Cuántas canicas tenía antes del juego?".
>
> "Bruno juega dos partidas a las canicas. Una primera partida y después una segunda. En la segunda partida, pierde 7 canicas. Después de las dos partidas ha ganado, en total 3, canicas. ¿Qué ha pasado en la primera partida?". (Op. citada, pág. 49).

donde el primero pertenece al grupo de situaciones simples tratado en el apartado anterior, en particular al tipo que hemos denominado "transformaciones *naturales simples*", mientras que el segundo presenta, según el autor, la estructura de las situaciones de composición de transformaciones naturales, de lo cual discrepamos. El problema "Bruno", en el que no intervienen números o medidas naturales, se ajusta, según nuestro estudio, al esquema de las situaciones de *combinación natural relativa simple*, a diferencia del problema "Bertrand", que se encuentra inmerso en la aritmética natural. Esta diferencia puede explicar el desfase detectado entre ambos problemas y justificar la introducción del campo conceptual natural relativo.

Composición de transformación y combinación naturales, con los siguientes esquemas:



a los que pueden ajustarse toda una variedad de situaciones diferentes, como por ejemplo:

Juan tiene 5 *canicas de las que* 2 *son rojas y el resto verdes. En una jugada pierde* 2 *canicas verdes. ¿Cuántas canicas verdes le quedan?*

María tiene 5 *cromos grandes y* 4 *pequeños. Compra* 3 *cromos más. ¿Cuántos cromos tiene en total?*

Luis tiene 6 *canicas rojas y negras de las que* 2 *son negras. Le regalan* 4 *rojas. ¿Cuántas canicas rojas tiene Luis?*

Situaciones compuestas naturales relativas.—Se caracterizan por la intervención de dos situaciones naturales relativas simples. En total resultan seis tipos de la combinación de los tres simples existentes, cuyos esquemas y ejemplos son similares a los ya tratados para las situaciones compuestas naturales; el sexto tipo corresponde a la composición de combinaciones relativas, que sí pertenece al dominio. Los siguientes problemas elementales son algunos ejemplos de las situaciones de este tipo:

— Comparación / comparación: *En una partida de canicas, José Luis ha ganado 6 canicas, Pedro ha ganado 2 canicas más que José Luis y Sergio ha ganado 3 canicas menos que Pedro. ¿Cuántas canicas ha ganado Sergio?*

— Comparación / transformación: *Antes de empezar una partida de canicas entre Antonio y Eva, Antonio debía canicas a Eva y Eva le debía 6 canicas a Antonio. En la partida Eva le ganó a Antonio* 3 *canicas, de manera que después de la partida Eva sólo le debe a Antonio 1 canica más de las que Antonio le debe a ella. ¿Cuantas canicas le debía Antonio a Eva antes de empezar la partida?.*

— Comparación / combinación: *Si Juan gana hoy* 5 *canicas más de las que ganó ayer, tendrá las canicas justas para devolver las* 8 *que le debe a Antonio y las 6 que le debe a Alicia. ¿Cuántas ganó ayer?*

— Transformación / transformación: *De las* 6 *canicas que ganó Pedro el domingo, el lunes regaló* 2 *y el martes se le perdieron* 3. *¿Cuántas le quedan de las que ganó?.*

— Transformación / combinación: *Juan debe a Luis 6 canicas rojas y 3 verdes. Deciden jugar una partida en la que Juan gana 4 canicas. ¿Cuántas canicas le debe Juan a Luis después de la partida?*

— Combinación / combinación: *María debe dinero en el supermercado y en el kiosko. En el supermercado debe* 5 *pesetas en la frutería y* 8 *en la panadería. Entre lo que debe en el supermercado y lo que debe en el kiosko, debe en total* 16 *pesetas. ¿Cuánto debe en el kiosko?*

Situaciones compuestas enteras.—Se caracterizan por la intervención de dos relaciones enteras simples. Al igual que para el caso de las naturales, resultan cinco tipos diferentes por exclusión de la composición de combinaciones enteras. Los siguientes problemas son ejemplos de las situaciones de este tipo:

— Comparación / comparación: *El saldo de la cuenta de José el miércoles por la mañana era de 6 mil pesetas. Si el martes hizo un reintegro de 3 mil pese-*

tas y el día anterior, lunes, un ingreso de 5 mil pesetas, ¿cuál era el saldo antes de hacer el ingreso del lunes?

— Comparación / transformación: *La temperatura máxima de ayer fue de 4 grados más que la de hoy. Si la temperatura hubiera subido ayer 6 grados más de lo que lo hizo, hubiera llegado el termómetro a los 40 grados sobre cero. ¿Cuál ha sido la temperatura máxima de hoy?*

— Comparación / combinación: *Sergio tiene dos cartillas de ahorro. En una tiene 8 mil pesetas. Sumando los saldos de las dos cartillas tiene un saldo total que supera al de Enrique en 5 mil pesetas. Si el saldo de la cartilla de Enrique es de 10 mil pesetas, ¿cuál es el saldo de la otra cartilla de Sergio?*

— Transformación / transformación: *La temperatura a las 9 de la mañana era de 12 grados. De las 9 a las 14 horas subió 6 grados y de las 14 horas a las 20 horas bajó 3 grados. ¿Qué temperatura hace a las 20 horas?*

— Transformación / combinación: *Dos líquidos idénticos A y B en dos recipientes de la misma capacidad están a diferente temperatura. Sabemos que A está a 8 grados sobre cero. Mezclamos los dos líquidos suponiendo que se compensan las temperaturas y subimos después la temperatura de la mezcla 5 grados más. Si a continuación medimos y resulta una temperatura de 9 grados sobre cero, ¿Cuál era la temperatura de B?*

Situaciones compuestas mixtas.—Proceden de la combinación de dos situaciones con soportes diferentes, es decir, son situaciones relativas que combinan una situación natural y una natural relativa, una situación natural y una entera, o bien, una situación natural relativa y una entera. No todas las combinaciones son viables; no es posible compatibilizar la combinación natural con ninguna situación natural relativa o entera (parte de la zona rayada de la figura 9.3) ni tampoco con la combinación entera simple. Por otra parte, los ejemplos que corresponden a algunas de las combinaciones restantes son rebuscados, como ocurre en los siguientes casos:

— Composición entre la comparación natural y la comparación entera: *De la 9 de la mañana hasta las 2 de la tarde de ayer subió la temperatura tantos grados como años tengo yo más que tú. Si tú tiene* 13 *años, a las 9 de la mañana de ayer el termómetro marcaba* 12 *grados sobre cero y a las 2 de la tarde marcaba* 20 *grados, ¿cuántos años tengo?*

— Composición entre comparación natural y comparación natural relativa: *Antonio y Luis le deben canicas a Pedro. Antonio le debe a Pedro con respecto a lo que le debe Luis tantas canicas más como años tiene más Antonio que Luis. Si Luis tiene* 20 *años y Antonio debe* 6 *canicas, ¿cuántos años tiene Antonio?*

Por el contrario, otros ejemplos de este grupo son más "normales":

— Composición entre transformación natural y combinación natural relativa: *Si Pepe tiene* 5 *canicas y gana en una partida* 4 *canicas rojas y* 5 *azules, ¿cuántas canicas tiene al terminar la partida?*

El resto de los ejemplos se construyen de la misma manera.

En el cuadro de la figura 9.3 se recogen los esquemas gráficos de todos los tipos posibles de situaciones relativas compuestas. La zona rayada corresponde a situaciones gobernadas por una ley de composición interna aditiva, en las que no intervienen las medidas naturales relativas, o a combinaciones que no son viables en la práctica.

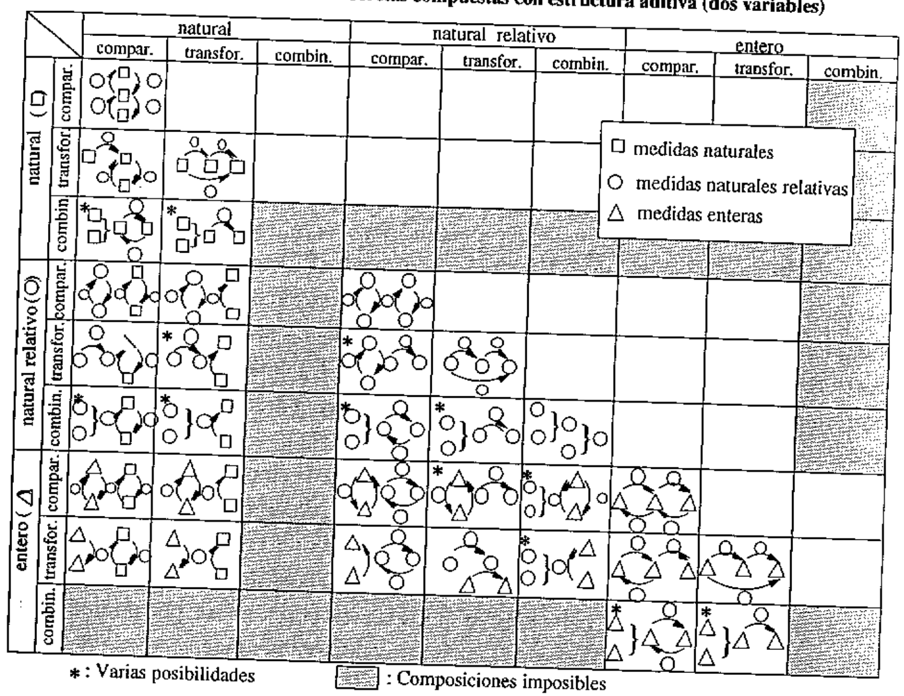


Figura 9.3.—Cuadro de situaciones relativas compuestas por dos simples.

De la distribución de las situaciones simples y compuestas que se ha realizado en este apartado se pone de manifiesto la complejidad del campo conceptual de los números naturales relativos. Con la delimitación precisa de este nuevo campo queda completamente organizado el dominio de aplicación de las estructuras aditiva y ordinal de los tres conjuntos numéricos que intervienen: naturales, naturales relativos y enteros.

9.5. Los tipos de situaciones relativas y los contextos aritmético y algebraico

Los tipos simples y compuestos relacionados en el apartado anterior, así como las situaciones relativas más complejas en las que intervienen más de un contexto fenomenológico (dos o más variables), admiten, en muchos casos, una representación tanto aritmética como algebraica, necesaria para algunas situaciones problemáticas y accesoria en otras. No obstante, podemos decir que la representación algebraica requiere de la existencia de un valor desconocido que se determina a partir de la información conocida, lo que remite necesariamente a las situaciones relativas enunciadas en términos de problemas con una o más incógnitas.

Los tipos simples se pueden resolver tanto aritméticamente como algebraicamente, si bien la representación algebraica y su manipulación resultan innecesarias ante la existencia de vías aritméticas más sencillas. No obstante, aunque no se trate de averiguar un valor indeterminado, la expresión algebraica puede ser útil para representar las relaciones existentes, de manera que expresiones como "$y = x + 5$" representan generalizaciones aritméticas propias del pensamiento algebraico. En los tipos compuestos existen, por el contrario, algunos casos en los que la representación y/o la resolución aritmética no son útiles ni viables, resultando obligado acudir al lenguaje algebraico. Tal es el caso, por ejemplo, de la situación compuesta siguiente: "Juan cobra 9.000 ptas. más que Pedro. Entre los dos cobran 85.000 ptas.. ¿Cuánto cobra cada uno?". En este, como en otros casos más complicados, el lenguaje y las técnicas algebraicas simplifican la representación y la resolución correspondiente.

Con excepción de los comentarios anteriores, que pretenden simplemente ilustrar la necesidad de considerar los dos tipos de representaciones, conceptos y procedimientos, al hilo de los resultados que se exponen en este capítulo, no vamos a profundizar más en este tema, aún siendo conscientes de su importancia y de que se abren aquí nuevas perspectivas para los estudios sobre pensamiento algebraico, que deberán ser analizadas en futuras investigaciones.

9.6. Ubicación del dominio dentro del campo aditivo y sus relaciones con otros factores

Las consideraciones anteriores, junto a las que se han expuesto sobre los tipos de situaciones y las clasificaciones realizadas, quedan reflejadas en el cuadro general de la figura 9.4, en la que se incluyen las referencias oportunas en relación con los campos aditivo y multiplicativo así como con el carácter discreto o continuo de las cantidades y medidas.

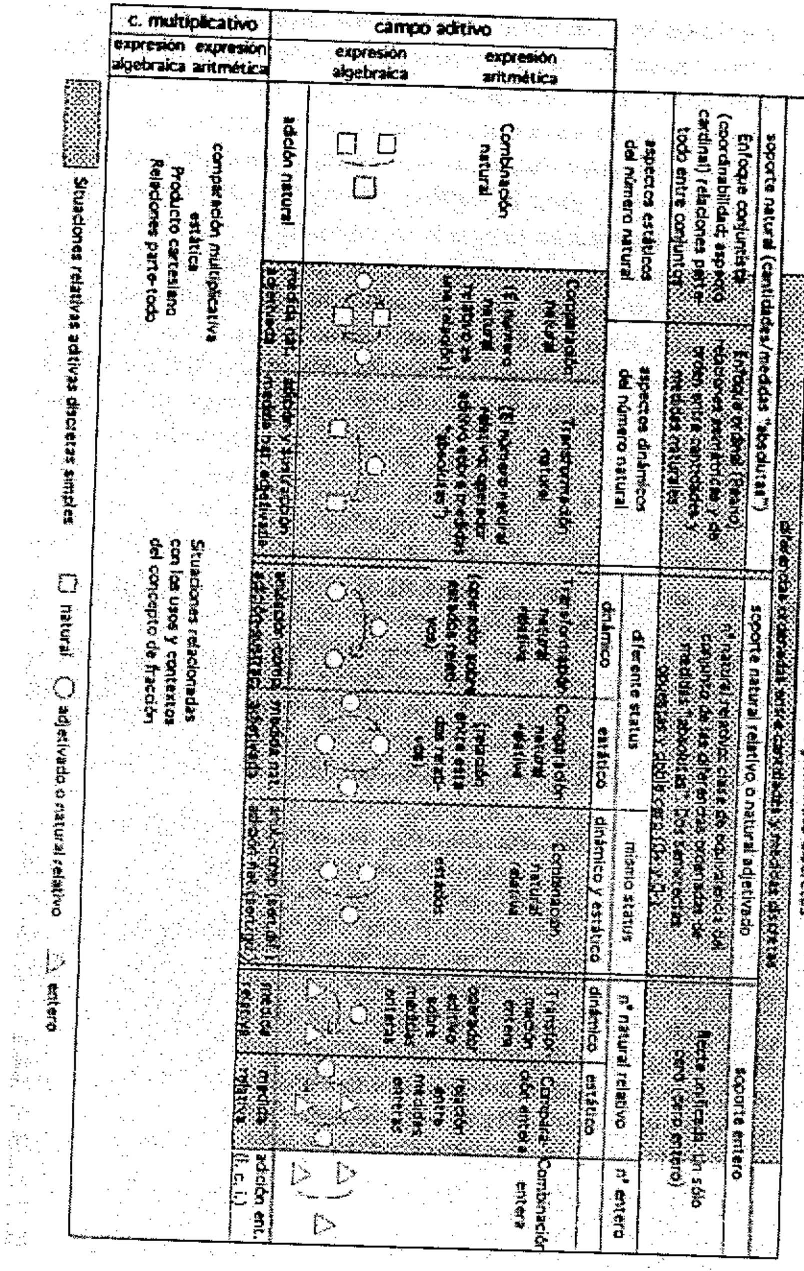


Figura 9.4.—El campo de las situaciones relativas como parte del campo aditivo.

En la figura 9.4 las situaciones simples del dominio se sitúan en la parte rayada correspondiente al campo aditivo, observándose una estrecha similitud con el diagrama de la figura 7.5 del capítulo 7, en el que se distinguen tres bloques separados con respecto a los tres tipos de leyes aditivas que intervienen: natural, natural relativa y entera. Nos remitimos al mencionado apartado para una visión más completa de la nueva organización del dominio que resulta como consecuencia de la investigación realizada.

Por otra parte, aunque no es nuestra intención profundizar en ello, se ha querido reflejar también en dicha figura la posibilidad de la existencia de alguna similitud entre el modelo de los números naturales relativos en el campo aditivo y el concepto de número fraccionario en el campo multiplicativo. Una semejanza que cabría analizar detenidamente sobre la base del doble carácter aditivo y multiplicativo que puede adoptar la comparación como relación básica que da lugar a los conceptos correspondientes.

9.7. Conclusiones

A las consideraciones incluidas en los apartados anteriores añadimos, a modo de resúmen, las siguientes conclusiones:

1. El concepto de situación relativa discreta con estructura aditiva permite organizar el campo conceptual aditivo con valores discretos. Dicha organización se fundamenta:

— en los tres tipos de números y medidas establecidos: natural, natural relativo y entero,

— en la estructura lógico-semántica de los tres tipos de relaciones aditivas que intervienen: comparación, transformación y combinación, con las características ya mencionadas en la consecuencia 1 del apartado 7.7.

2. Del análisis general del campo se deduce la existencia de tres bloques de situaciones aditivas: un primer bloque formado por las combinaciones naturales simples y compuestas, un segundo bloque integrado por las combinaciones enteras simples y compuestas, y un tercer bloque en el que intervienen las transformaciones y comparaciones simples o combinadas entre los tres tipos de medidas, lo que concuerda con el esquema del apartado 7.5. Esta nueva organización del campo aditivo reduce notablemente los dominios de aplicación de la adición natural y de la adición entera, que quedan restringidos a aquéllas situaciones cuyas medidas cumplen las condiciones exigidas por el carácter interno de la ley de composición.

3. Se obtienen 7 tipos de situaciones relativas simples, que, junto a las dos situaciones de combinación natural y entera, dan lugar a 9 tipos de situaciones/problemas aditivos simples. Los siete tipos simples son los siguientes:

Comparación y transformación naturales, donde se excluye la combinación natural, en la que no intervienen cantidades/medidas naturales relativas sino la adición natural.

Comparación y transformación enteras, donde se excluye la combinación entera por el mismo motivo del párrafo anterior (sólo interviene la adición entera).

Comparación, transformación y combinación naturales relativas, con particularidades motivadas por el doble cero, el paso de medidas de un signo al otro, etc.

4. De la composición de los tipos simples se obtienen 32 tipos de situaciones relativas compuestas por dos situaciones simples, que, junto a las composiciones de dos combinaciones naturales y de dos combinaciones enteras (que quedan fuera del campo conceptual de los números naturales relativos), dan un total de 34 tipos compuestos por dos situaciones simples.

5. Si nos restringimos a las medidas naturales y naturales relativas se obtienen:

a) 5 tipos de situaciones relativas simples que, unidos a la combinación natural, dan un total de 6 tipos de situaciones/problemas aditivos simples, que contrasta con los cuatro tipos que se proponen en Carpenter, T. P., Moser, J. M. (1982, págs. 10 y sgtes.) y con la clasificación que propone Vergnaud, G. (1983, pág. 107). En particular, además de la no consideración de los números y medidas naturales relativas como elementos con entidad propia, se detectan las siguientes deficiencias en dichas clasificaciones:

— la consideración de los problemas de "igualación" como un tipo simple, cuando en nuestra clasificación se sitúan entre los tipos que hemos denominado compuestos;

— la consideración de entes semántica y lógicamente diferentes bajo una misma estructura numérica (la natural);

— la consideración de los problemas de "combinación natural relativa" como "composición de transformaciones";

— la consideración, como tipo simple o, al menos, al mismo nivel que el resto de las categorías, de los problemas de composición de transformaciones;

— la atribución de dos papeles o significados diferentes a las medidas naturales relativas: estados relativos y transformaciones;

— la utilización de los números enteros (denominados en este caso "números relativos") para operar aditivamente en el caso de las medidas naturales relativas;

— la separación expresa entre cálculo numérico y cálculo relacional, obligada por la complejidad de un campo aún sin organizar.

b) 17 tipos diferentes de situaciones relativas compuestas por dos simples, que, unidos a la composición de dos combinaciones naturales simples, dan lugar a los 18 tipos de problemas/situaciones compuestas que hemos encontrado para el campo aditivo.

9.8. Logros y hallazgos

En este capítulo se han alcanzado logros que avalan la bondad de las *hipótesis* IV y V, enunciadas en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dichas hipótesis son las siguientes:

IV. *Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio y regulando las manipulaciones aritméticas aditivas correspondientes.*

Las relaciones teóricas que se establecen en el capítulo 7, junto a la nueva distribución del dominio que se deduce de la introducción de estos conceptos numéricos y que se ha puesto de manifiesto en el capítulo, avalan suficientemente la credibilidad de esta hipótesis.

V. *El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio, que amplia y precisa otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.*

Creemos que esta hipótesis ha quedado suficientemente corroborada en este capítulo.

La comprobación de las hipótesis anteriores permite la consecución de los objetivos. En particular, de los *objetivos* enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, se han cubierto en este capítulo, en diferente grado, los siguientes:

b) *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio;* objetivo cubierto parcialmente en este capítulo completando las consideraciones efectuadas en los dos capítulos anteriores. Se aportan aquí argumentos que ponen de manifiesto la insuficiencia de los números naturales y de los números enteros para un tratamiento satisfactorio del dominio estudiado.

c) *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números;* objetivo que damos por cubierto en este capítulo desde el punto de vista epistemológico. En estrecha conexión con el objetivo anterior podemos afirmar que, en este capítulo, se aportan argumentos fenomenológicos que refuerzan la necesidad de tales números.

e) *Construir un modelo teórico que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones y ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema;* objetivo alcanzado parcialmente en el capítulo 7 y completado aquí con una nueva clasificación que sirve de marco para una explicación plausible de los resultados obtenidos en otras investigaciones.

De los *objetivos complementarios* enumerados en el apartado 2.2.3, podemos realizar las siguientes consideraciones:

El contenido del capítulo contribuye a poner de manifiesto la importancia de los análisis epistemológicos y fenomenológicos para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática. Con ello creemos que se ha cubierto suficientemente dicho objetivo, a tenor de la relevancia de los resultados obtenidos mediante la metodología que se ha puesto en práctica.

Adicionalmente, tal y como se expondrá con mayor extensión en el capítulo 12, se ha conseguido una nueva distribución del campo conceptual aditivo, que afecta de manera importante al campo de la resolución de problemas aditivos, y la delimitación precisa, en términos prácticos, del campo conceptual de los números naturales relativos, con consecuencias curriculares inmediatas que quedan fuera de los propósitos de esta investigación.

CUARTA PARTE

Estudio empírico

CAPÍTULO

10

Diseño del estudio empírico. Variables e instrumentos de recogida y análisis de datos

10.1. Introducción. Presentación y justificación del estudio

Teniendo en cuenta los objetivos generales y las hipótesis enunciadas en el capítulo 2, nos proponemos realizar la evaluación de nuestro modelo teórico en términos de indicios empíricos razonables de conformidad con parte de las conclusiones establecidas en los capítulos anteriores. Se trata de una investigación de tipo exploratorio con enfoque de presente sobre una muestra intencional, en la que, mediante un estudio de encuesta en profundidad, se van a analizar las relaciones entre las diversas variables consideradas, la pertinencia de las tareas utilizadas y de los instrumentos construidos, así como el grado de ajuste de los resultados a los planteamientos teóricos. Igualmente, se dedicará especial atención al análisis transversal de las relaciones mediante la aplicación simultánea de los cuestionarios a individuos de edades diferentes.

Creemos necesario este estudio por los siguientes motivos:

— Existen variables que no han sido estudiadas con anterioridad y que deben contemplarse en las investigaciones que tengan que ver con el campo de estudio. Parece razonable, por tanto, realizar una primera toma de contacto para analizar su comportamiento y características.

— Los trabajos realizados hasta la fecha no han considerado el número natural relativo como entidad diferenciada del número entero, ni las estructuras ordinal y topológica de dicho tipo de números como elementos centrales de análisis epistemológico y didáctico. Este nuevo enfoque, debe tener en cuenta los resultados obtenidos en otras investigaciones, lo que aconseja un estudio exploratorio que ofrezca ciertas garantías sobre la potencia explicativa de un constructo teórico que pretende integrar planteamientos desligados entre sí y, por tanto, que sea capaz de sostener dichos resultados.

— El problema de la representación en matemáticas y, en particular, el uso de números con signo en contextos verbales, se encuentra todavía poco desarrollado y parece conveniente guardar una cierta cautela, sobre todo en lo que concierne a los aspectos semánticos.

— Los estudios sobre errores se han limitado a constatar su existencia, enumerar los más frecuentes, describir las relaciones entre ellos y con respecto a las variables consideradas, así como establecer las condiciones de ocurrencia y las posibles causas de los mismos. Si, como es nuestra intención, el modelo teórico que presentamos debe explicar satisfactoriamente la ocurrencia de comportamientos erróneos, se hace necesaria una comprobación en tal sentido.

Por todo ello nos parece conveniente un estudio en profundidad sobre la existencia de diferencias de carácter cognitivo entre los números naturales relativos y los números enteros, cuya constatación añadiría nuevos argumentos a favor de la bondad del modelo teórico. Dada la extensión y complejidad de esta tarea, ha sido necesario limitar el campo de la investigación, lo que será explicado con detalle a lo largo de la exposición que vamos a realizar.

En el presente capítulo se muestra el trabajo realizado hasta la elaboración y aplicación de los cuestionarios definitivos, cuyos resultados se analizan en el capítulo siguiente. En primer lugar, se aborda el diseño, la aplicación y los resultados del estudio piloto previo; en segundo lugar, se expone el diseño del estudio definitivo, en el que se incluyen: el análisis de las variables que intervienen, el procedimiento a seguir, la composición y características de la muestra, la construcción de los cuestionarios y los instrumentos de análisis de datos.

10.2. Objetivos e incidencias sobre las hipótesis de investigación

Con carácter general, este estudio pretende evaluar una parte del modelo teórico; comprobar empíricamente la existencia de indicios sobre la bondad de las hipótesis enunciadas. Mas en concreto, el estudio se propone verificar la hipótesis que postula la existencia de diferencias cognitivas en el tratamiento de la estructura ordinal de los conceptos numéricos que intervienen en situaciones en las que tienen un significado concreto. Con ello, se pondrá de manifiesto el *ajuste de las respuestas empíricas a los criterios teóricos establecidos*. La consecución de este objetivo se va a articular mediante los siguientes objetivos parciales:

a) Realizar una primera toma de contacto empírica con el problema de investigación, mediante una evaluación diagnóstica del funcionamiento cognitivo de una muestra de sujetos ante unos cuestionarios estructurados de respuesta múltiple.

b) Construir los instrumentos de recogida de datos para obtener información que avale la bondad de la teoría y de las hipótesis enunciadas.

c) Explorar las respuestas de los encuestados en función de las características de los distintos grupos de cuestiones planteadas.

d) Preparar la realización de un estudio experimental posterior, para el que este trabajo permitirá: ajustar las pruebas y cuestionarios según la dificultad que arroje la aplicación de las tareas planificadas, modificar los tipos de situaciones en función del grado de familiaridad y nivel de comprensión de los términos utilizados, modificar las variables y sus modalidades y delimitar con mayor precisión las características de la población y la elección de la muestra.

La consecución de los objetivos permitirá confirmar a nivel descriptivo la hipótesis VI y obtener información a favor de las hipótesis II, III y IV enunciadas en el capítulo 2.

10.3. Breve descripción de la metodología

Ante la inexistencia de un instrumento contrastado de recogida de datos, que sea adecuado para los propósitos del trabajo, se ha dedicado la mayor parte del estudio a la construcción del cuestionario definitivo. El proceso seguido presenta dos fases diferenciadas:

1. Un *estudio piloto*, caracterizado por la elaboración, aplicación y análisis de resultados de un *cuestionario inicial general de carácter exploratorio*, constituido por una selección discreccional de tareas específicas del campo en estudio. El procedimiento seguido en esta parte se ajusta al siguiente esquema:

1.1.—Elaboración y aplicación de un cuestionario a una muestra intencional [1].

1.2.—Análisis de resultados y conclusiones.

2. Un *estudio definitivo*, en el que se pueden distinguir los siguientes aspectos:

2.1.—Elaboración de unos *cuestionarios definitivos* a partir de los resultados anteriores, en cuyo proceso se han utilizado: juicio de expertos, aplicación puntual de cuestionarios intermedios y entrevistas ocasionales para analizar las respuestas y la idoneidad de las cuestiones planteadas. Como resultado del mismo se ha conseguido: valorar la amplitud del campo, detectar y eliminar deficiencias en los enunciados, evaluar la adecuación de la prueba a los planteamientos teóricos, registrar las respuestas posibles y las más frecuentes así como las respuestas en blanco, recabar y contrastar las opiniones de los encuestados sobre la prueba y su duración, valorar la necesidad de aclaraciones añadidas, detectar y eliminar redundancias y confusiones, revisar y modificar el formato de las cuestiones y el lenguaje utilizado.

[1] Ver apartado dedicado a "población y muestra" en este capítulo. El carácter intencional está justificado por los motivos que se exponen en 10.4.1.4 y que se explican con más detalle a propósito del estudio definitivo.

Una vez lograda una nueva versión de los cuestionarios, se sigue:

2.2.—Aplicación a una nueva muestra, también intencional, de los cuestionarios definitivos, en cuya elección se ha tenido en cuenta un cierto rango de variabilidad respecto a edad, tipo de actividad y nivel de formación.

2.3.—Análisis de los resultados, para lo que se estudian sistemáticamente las respuestas de los individuos a las tareas propuestas. Para ello se utilizan registros de frecuencias y porcentajes así como tablas de contingencia, sobre las que se realiza un estudio de las relaciones entre las variables mediante análisis de correspondencias. El apoyo de gráficos y tablas de frecuencias y porcentajes completa el estudio meramente descriptivo de los resultados.

2.4.—Como complemento, y a la luz de los planteamientos teóricos, se hace una valoración cualitativa global de la aplicación de los cuestionarios y de los resultados.

10.4. **Estudio piloto**

El punto de partida se encuentra en el análisis de las diferencias estructurales y lógico-formales que figuran en el apartado 8.4. A partir de dicho análisis pretendemos materializar, en un primer cuestionario piloto, las cinco diferencias formales, de manera que en las respuestas se pudiera detectar que tales diferencias también se dan a nivel cognitivo, es decir, que los individuos interpretan de manera diferente cuestiones similares en las que intervienen números naturales relativos y números enteros. El principal problema en esta etapa ha sido el del control de las variables independientes de tarea y la delimitación precisa de las posibles respuestas de los sujetos.

En lo que sigue, presentamos algunas consideraciones sobre las variables intervinientes, la construcción y aplicación de los cuestionarios y la discusión de los resultados.

10.4.1. ***Variables***

Puesto que se trata de un primer estudio de carácter general, parece conveniente iniciarlo con un análisis amplio del campo de variables, el cual nos conducirá, en función de los objetivos y de las hipótesis enunciadas, a la delimitación del mapa efectivo de variables para las sucesivas etapas de la investigación. Se trata de una primera toma de contacto que no hemos querido omitir con intención de describir en su totalidad el proceso seguido.

Partimos de una descripción general de las variables, para pasar a establecer en sucesivos apartados y mediante un proceso de afinamiento y establecimiento

de restricciones, el conjunto de variables y de niveles o modalidades que van a intervenir en el trabajo que presentamos.

10.4.1.1. *Variables independientes de tarea*

Utilizamos parcialmente las clasificaciones dadas por Kilpatrick (1978) y por Kulm (1979) para las variables de tarea en el contexto de la resolución de problemas. Tenemos en cuenta sólo aquéllas categorías que son útiles para el propósito del trabajo, haciendo la salvedad de que las tareas que se van a proponer no son problemas de enunciado verbal (puesto que no requieren de una solución en el sentido usual), sino cuestiones de respuesta directa que pretenden poner de manifiesto la situación de los conocimientos de los individuos encuestados.

En primera aproximación encontramos las siguientes variables:

<u>*Por el contexto y el contenido:*</u>

— *Nivel de abstracción de las tareas.*

Variable controlada mediante el empleo de situaciones cotidianas y familiares.

— *Tipo de contexto.*

Variable controlada mediante el ajuste al "contexto verbal".

— *Campo algebraico (aditivo/multiplicativo).*

Variable controlada al restringir las tareas al campo aditivo.

— *Finalidad.*

Variable fijada en la "interpretación-comprensión" de relaciones elementales.

— *Tópico fenomenológico.*

De los tópicos relacionados en el apartado 6.5, haremos una selección de los más conocidos y familiares así como de los de más amplia utilización. En el estudio piloto se utilizan: listas y colas; clasificaciones deportivas; economía (saldos y movimientos bancarios); juegos (ganancias-pérdidas); móviles (ascensores y desplazamientos) y escalas (temperaturas y cronología), sin un criterio definido acerca de su distribución en el cuestionario. En el estudio definitivo se amplía dicha relación y se efectúa un mayor control sobre esta variable.

Otras variables de contenido, como pueden ser los tipos de números y el tamaño de los mismos, se fijan mediante números naturales y enteros inferiores a diez en valor absoluto.

<u>*De sintaxis*</u>

Vamos a utilizar, en esta primera parte, la sintaxis usual para los problemas de enunciado verbal (Puig, L., Cerdán, F., 1988) y las variables:

— *Tipo de representación de los conceptos numéricos.*

Con las siguientes modalidades: a) representación simbólica mediante números con signo; b) representación simbólica-verbal o mixta mediante un número natural y una palabra o grupo de palabras que acompañan al símbolo numérico.

— *Palabras clave, verbos y términos duales.*

Sus modalidades son los adjetivos, adverbios y verbos que se refieren a situaciones duales en las que intervienen aspectos opuestos. En el estudio piloto se van a utilizar, sin un control sistemático, las siguientes: a) verbos: ganar-perder, subir-bajar, deber-tener, ingresar-gastar; b) adjetivos y otros términos duales: ingreso-reintegro, acreedor-deudor, bajo-sobre, más-menos, mayor-menor, positivo-negativo, más que-menos que. En el cuestionario definitivo, esta variable será objeto de una atención especial.

Estructurales[2]

De los capítulos dedicados a la fundamentación teórica son dignas de destacar, por su importancia, las siguientes variables de constructo teórico:

— *Tipo de estructura implícita en la tarea.*

Con dos modalidades: estructura entera y estructura natural relativa. En el estudio piloto se incluyen ambos tipos de estructura en cada una de las cuestiones.

— *Tipo de diferencia estructural.*

Con sus cinco modalidades ya establecidas: a) tipo de orden (total o parcial), b) existencia de primer elemento, c) posibilidad de cruzar el cero, d) unicidad del elemento neutro, e) tipo de composición aditiva.

10.4.1.2. *Variables dependientes o de respuesta*

— *Tipo de respuesta a cada tarea.*

Con las posibilidades: correcta, incorrecta y en blanco.

— *Valoración individual de la prueba.*

En el estudio piloto se va a realizar una valoración cualitativa de la prueba por individuo. En el estudio definitivo se lleva a cabo una modificación sustancial de estas consideraciones.

10.4.1.3. *Variables de la situación*

No se ha dedicado una atención especial a este tipo de variables. No obstante, a título orientativo para posteriores investigaciones, habría que tener en cuenta las variables usuales con respecto al entorno, al Centro escolar y al grupo-aula.

[2] Hemos de hacer notar aquí, que no nos estamos refiriendo a la estructura de la tarea en el sentido en que se utiliza en la resolución de problemas. Por el contrario, queremos indicar con ello las características estructurales que, como contenidos fundamentales de las tareas, se someten a juicio de los encuestados.

10.4.1.4. *Variables del sujeto*

Las variables: edad, sexo, nivel socioeconómico familiar, actitud hacia las matemáticas, motivación-interés y rendimiento en matemáticas no van a intervenir de manera efectiva en el estudio. Serán fijadas previamente mediante la elección de una muestra cuyas características vengan a reforzar positivamente las hipótesis de la investigación[3], lo cual es razonable si se tiene en cuenta que los resultados pueden depender de múltiples causas ajenas a las que realmente deben provocar el tratamiento diferenciado.

10.4.2. **Características de la muestra**

La muestra elegida para la aplicación del primer cuestionario ha consistido en una muestra intencional formada por un grupo de 20 estudiantes universitarios de 2.° curso de la especialidad de Preescolar de la diplomatura de Profesorado de E.G.B de la Universidad de Málaga.

10.4.3. **Instrumentos y técnicas de recogida de datos**

Se ha construido un primer cuestionario y una segunda versión incompleta[4] que ha sido el punto de partida para la construcción de los cuestionarios definitivos.

En lo que sigue, expondremos, en primer lugar, las características del cuestionario inicial y los resultados y conclusiones de su aplicación así como las primeras correcciones efectuadas sobre sus dos primeros apartados. En segundo lugar, se incluye una valoración global y una relación de las principales consecuencias para la construcción de los cuestionarios definitvos.

10.4.3.1. *Cuestionario inicial*

Se trata de un cuestionario escrito constituído por dos tipos de preguntas: cuestiones directas de respuesta libre y cuestiones de elección múltiple. Consta de 21 cuestiones de los siguientes tipos: 1) completar frases mediante palabras,

[3] Si, por ejemplo, los mejores alumnos, los de mayor edad y formación o que mejor dominan los conceptos matemáticos en juego, no discriminaran bien ambas estructuras, se podría pensar, con una mayor seguridad que en otros casos, que los planteamientos teóricos de los que se deducen dichas diferencias no serían acertados, teniendo en cuenta, además, la influencia negativa que sobre la bondad de las hipótesis ejerce el proceso usual de enseñanza de los números enteros.

[4] Ver Anexos IV.1 y IV.2 en González, J. L. (1995), págs. 535-546. Las tareas incluidas en el capítulo 8 constituyen una muestra amplia del mencionado cuestionario.

frases o símbolos; 2) responder libremente a una pregunta; 3) subrayar opciones de entre varias posibilidades; 4) explicar relaciones cuantitativas; 5) poner un ejemplo y 6) responder a una tarea mixta en la que se combinan dos o más de los tipos anteriores. Igualmente, las cuestiones se dividen en dos grupos según el tipo de pregunta que se realiza: de pregunta directa y de pregunta previamente ejemplificada. Por otra parte, se han incluido una o varias cuestiones para cada una de las cinco modalidades de la variable "tipo de diferencia estructural" y se ha procurado que en cada cuestión apareciesen las dos modalidades de la variable "tipo de estructura". Los tópicos utilizados, los tipos de representación así como las palabras y términos duales figuran de manera equitativa y variada a lo largo del cuestionario.

La presentación de la prueba se concreta en una frase situada en el encabezado de la primera página, que explica el objetivo y proporciona una orientación general sobre la manera de contestar y el sentido de las respuestas. A continuación, en la misma página, se presentan las cuestiones separadas entre sí por un espacio en blanco.

Por último, hemos de indicar que este primer cuestionario se aplicó a la muestra elegida sin ningún comentario ni aclaración añadida. Sus resultados se exponen en el apartado 10.4.3.3 en términos de consideraciones para el cuestionario definitivo.

10.4.3.2. *Segundo cuestionario parcialmente corregido*

De la aplicación de la primera prueba, al margen incluso de sus resultados, se vio la necesidad de llevar a cabo ciertas modificaciones que tuvieran en cuenta:

1. La consideración de la diferencia estructural como una variable independiente, lo que requiere de un análisis detallado de los factores que la determinan y de una categorización exhaustiva de los diferentes aspectos bajo los que se ponen de manifiesto sus cinco modalidades. Por ejemplo, la diferencia estructural a) admite, al menos, las siguientes posibilidades: a.1.- valoración global de regiones, a.2.- comparación global de regiones diferentes, a.3.- comparación de situaciones con valores numéricos pertenecientes a la región "negativa" y a.4.- comparación de situaciones con valores numéricos de diferente signo o región. Corresponden a cuatro tipos de acciones diferentes que, efectuadas sobre pares de medidas naturales relativas o enteras, pueden reflejar claramente la oposición entre ambos tipos de estructura ordinal.

2. Un control sobre las respuestas posibles, en el sentido de cerrar el abanico de posibilidades, ajustándolas a los propósitos de la investigación.

3. La presentación en un formato único, claro y homogéneo de todos los apartados y tareas del cuestionario.

4. Un control de las variables: tipo de representación, palabras y términos clave o tipo de estructura implícita, haciendo intervenir sus diferentes modalidades con el mismo peso en todas las cuestiones.

El segundo cuestionario resulta de aplicar las modificaciones **1**, **3** y **4** sobre las dos primeras diferencias estructurales, es decir, orden total - orden parcial y existencia o no de primer elemento. Asimismo, se han mantenido las restricciones establecidas para la primera prueba, salvo una ampliación de los tópicos utilizados, y se ha intentado efectuar un control parcial de las respuestas (modificación **2**), aunque con la sospecha de que dicho control era insuficiente, como vamos a ver a continuación. Igualmente, se han sometido las tareas al examen crítico por parte de dos expertos de cada uno de los niveles de formación siguientes: Profesores de Universidad, Secundaria y E.G.B. y Profesores en formación, a los que se les entregó el cuestionario y se les pidió que respondieran a la siguiente pregunta:

"Se trata de un ensayo piloto con el que se pretende ver si unas cuestiones de dominio básico sobre los números enteros son o no adecuadas como ítems de evaluación.

Cada ítem trata de evaluar un aspecto, concepto o procedimiento diferente sobre los números enteros; cada ítem incluye seis o más opciones que son variantes del aspecto clave.

1.° *¿Cuál es el conocimiento que se evalúa en cada pregunta?*

2.° *Hay varias opciones por pregunta; se pide eliminar la redundancia. Una vez eliminada, se pide, asimismo, distinguir y elaborar categorías básicas.*

3.° *Fallos generales detectados y no contemplados; propuesta de modificación."*

Los expertos consultados han aportado sugerencias relacionadas, en su mayor parte, con las respuestas posibles y con el formato de presentación de las tareas. La principal observación recogida se refiere al carácter demasiado abierto de las respuestas, debido a la amplitud de significados y términos lingüísticos válidos para su conformación. Se trata de un defecto de construcción del cuestionario que debía ser subsanado, al incidir negativamente sobre la categorización de las respuestas y la interpretación de los resultados. Como consecuencia, decidimos desistir de la aplicación de este segundo cuestionario y dedicar mayor atención a mejorar los aspectos mencionados; este segundo cuestionario ha servido, únicamente, como elemento intermedio para la construcción del cuestionario definitivo.

10.4.3.3. *Resultados y conclusiones globales del estudio piloto*

Del proceso de construcción de ambos cuestionarios, de la aplicación del primero de ellos así como de una posterior revisión, se obtienen las siguientes conclusiones adicionales:

1. El campo de respuestas posibles, en los casos de respuesta libre, no esta cerrado, habiéndose constatado respuestas inesperadas y de difícil categorización; por ejemplo, en la tarea a.1, a pesar del ejemplo introductorio en el que se utilizan intencionadamente los términos comparativos "mayor que" y "más que", se producen respuestas del tipo: "mejor", "peor", etc., lo que obliga a proceder a una modificación que permita el control de dichas respuestas.

2. El cuestionario resulta demasiado largo en opinión de los encuestados, lo que provoca cansancio y, como consecuencia, una disminución en la fiabilidad de los resultados. Es conveniente, por tanto, acortar la prueba y, en consecuencia, reducir el campo de estudio.

3. Algunas tareas resultan demasiado complicadas y se prestan a confusión.

4. No hay una distribución equitativa entre las tareas correspondientes a las cinco diferencias estructurales, lo que se corrige mediante la combinación de las variables consideradas. Sin embargo, esta medida conlleva una excesiva ampliación del área sometida a investigación, lo que redunda en favor de la conveniencia, mencionada en el punto 2, de acortar la prueba.

5. El formato de las tareas no es uniforme para los distintos apartados; de todos los formatos utilizados, el más sencillo es el de elección entre varias respuestas posibles. Por otra parte, en aquéllas cuestiones en las que se piden varias tareas simultáneas (completar y subrayar, explicar y representar, etc.), dicho formato resulta engorroso y poco claro.

6. La inclusión de respuestas abiertas, en las que se admite un amplio abanico de términos y expresiones, dificulta el tratamiento de las respuestas y su posterior interpretación.

7. El contenido de las tareas es repetitivo y redundante, con un cierto abuso de juegos de palabras que pueden inducir al error (se trata de cuestiones dicotómicas que pueden variar de sentido por la intervención de matices lingüísticos sutiles que escapan al control de un análisis lógico superficial). Este problema se agrava cuando se trata de situaciones que, siendo estructuralmente diferentes, son tratadas de forma similar en el proceso educativo usual.

8. El cuestionario cubre tan sólo una parte de las diferencias teóricas establecidas. En la prueba definitiva habrá que completar dicho trabajo y tener en cuenta, entre otros, los factores lingüísticos que intervienen (significados de las palabras empleadas, objetividad-subjetividad de los términos, relación entre los significados y las estructuras lógicas subyacentes, etc.).

10.5. **Diseño del cuestionario definitivo y su aplicación**

En este apartado se aborda la construcción del cuestionario definitivo, las variables y los criterios utilizados así como las líneas generales del diseño seguido y el posterior análisis de resultados. Al igual que en la fase anterior, la principal preocupación se ha centrado en la elaboración del instrumento de recogida de datos, cuya preparación va a ocupar el resto del capítulo. Por otra parte, al ser una continuación del estudio piloto, sólo trataremos aquellos aspectos que supongan una novedad con respecto a planteamientos anteriores.

10.5.1. ***Variables***

Una de las consecuencias del estudio piloto aconseja reducir el campo experimental en aras de mayor control y profundidad en el trabajo. Por este motivo, vamos a centrar el contenido del cuestionario en la primera de las cinco diferencias estructurales que presentan ambos conjuntos numéricos: *orden total* para los números enteros - *orden parcial* para los números naturales relativos, quedando pendientes para futuras investigaciones las diferencias restantes.

La restricción anterior y las conclusiones tratadas en el apartado 10.4.3.3 modifican el mapa de variables diseñado en el estudio piloto, según se expone a continuación.

10.5.1.1. *Variables independientes*

Se van a considerar, en el estudio definitivo, las siguientes:

a) *Cuestionario*

Variable independiente de carácter cualitativo que se presenta bajo cuatro modalidades que se identifican, en el apartado 8.4.1, mediante los epígrafes a.1, a.2, a.3 y a.4.

Por otra parte, las palabras y frases cortas que expresan valoraciones y/o comparaciones de medidas o conjuntos de medidas se pueden agrupar en torno a las siguientes categorías opuestas, que reflejan el grado de arbitrariedad y dependencia o variabilidad de los significados con respecto a otros valores personales, contextuales o socioculturales: 1) términos *objetivos*[5] tales como: más, menos;

[5] Diremos que un término es objetivo, para la investigación que presentamos, cuando su significado es único, claro y convencional o universal en todas las situaciones a las que da sentido, es decir, cuando su significado es invariable ante cualquier circunstancia. En caso contrario, diremos que el término es subjetivo.

mayor, menor; superior, inferior; anterior, posterior; positivo, negativo; mayor que cero, menor que cero, y 2) términos *subjetivos* tales como: mejor, peor; bueno, malo; fácil, difícil; alto, bajo, etc.

En el orden total de los números enteros son comparables/valorables cualesquiera dos valores que se consideren y, en particular, los valores pertenecientes a "regiones diferentes" (positivos o mayores que cero y negativos o menores que cero). Dicha comparabilidad se materializa en la existencia de una relación asimétrica que da lugar a las siguientes categorías:

— *Términos ordinales o comparativos* (relación directa entre los elementos): más, menos; mayor, menor; superior, inferior; anterior, posterior; mejor, peor, etc.; de estos, unos son *objetivos* (mayor, menor; superior, inferior; anterior, posterior) y otros, *subjetivos* (mejor, peor).

— *Términos clasificatorios* (relación indirecta): positivo, negativo; mayor que cero, menor que cero; bueno, malo; fácil, difícil; alto, bajo, etc., siempre que exista un convenio implícito que conecte ambas categorías [6] mediante otra intermedia que establece el orden. De estos términos clasificatorios, unos son *objetivos* (positivo, negativo; mayor que cero, menor que cero) y otros, *subjetivos* (bueno, malo; fácil, difícil; alto, bajo).

Por otra parte, la estructura de orden parcial de los números naturales relativos [7] no admite la comparación de cualesquiera dos valores, sino sólo de aquéllos que sean del mismo signo (por ejemplo, una ganancia de 3 es mayor que una ganancia de 2). En estos casos, los términos lingüísticos son los mismos que los mencionados para la estructura de orden total, salvo los correspondientes a la región negativa, que deben ser los opuestos. Por el contrario, la comparación es estricta y formalmente inadecuada para valores o medidas naturales relativas de diferente signo o región, aunque se suelen utilizar arbitrariamente algunos de los términos relacionados en el párrafo anterior. Aquí se dan, por tanto, tres posibilidades no excluyentes: a) una valoración fija aunque subjetiva, b) una valoración dependiente de las circunstancias y del contexto, y c) una independencia total incompatible con las anteriores. Dichas opciones se pueden resumir en la que adoptaremos para interpretar los resultados: *ausencia de valoración objetiva fija*, en contraposición a lo que ocurre para la estructura ordinal de los enteros.

[6] Por ejemplo, la clase "cero" se encuentra entre las clases "mayor que cero" y "menor que cero". Desde otro punto de vista, entre "bueno" y "malo" se puede situar la categoría "indiferente", o entre "alto" y "bajo" se suele utilizar el término "normal", etc. En todos estos casos y de una manera más o menos precisa, existe implícitamente una estructura de orden total entre los valores numéricos o las medidas a las que hacen referencia dichos términos.

[7] La que hemos denominado como "orden doble natural con inversión en los valores 'negativos'."

En consecuencia, definimos la siguiente variable independiente:

b) *Tipo de valoración mediante expresión lingüística* (a la que también denominaremos "variable columna") para expresar la comparabilidad de regiones duales y pares de medidas, con las siguientes categorías básicas: 1) valoración fija mediante términos *objetivos o stándards;* 2) otros tipos de valoraciones: fija mediante términos *subjetivos o discreccionales;* variable, dependiendo del caso; independencia entre comparados y ausencia de valoración. A los términos citados en párrafos anteriores añadimos, dentro de la segunda categoría, los siguientes: "depende del caso", "son independientes" o "es indiferente". Igualmente incluiremos los términos "más .." y "menos ..", que suelen ir acompañados de adjetivos (liviano, caliente, interesante, etc.) que encajan mejor dentro de esta segunda categoría.

En el cuestionario a.1 se presentan las modalidades anteriores agrupadas en pares opuestos (positivo-negativo, bueno-malo, etc.), mientras que en los demás cuestionarios cada palabra ocupará una columna separada. Con esta diferenciación se elimina la elección de términos de valoración diferentes para cada una de las regiones opuestas en el caso de las comparaciones naturales relativas [8]. Otras variables de sintáxis, relativas a la disposición y relación entre palabras, frases y símbolos, se fijarán mediante un formato único y común para todos los cuestionarios, tal y como se expone en el apartado 10.5.3.

c) *Tipo de término en función del sentido de la relación.*

Se trata de una tercera variable independiente, relacionada con la anterior, que presenta las siguientes modalidades: términos del sentido de mayor a menor (mayor, superior y posterior), y términos del sentido de menor a mayor (menor, inferior y anterior). Una variable que será utilizada, únicamente, para las valoraciones objetivas de los cuestionarios a.2, a.3 y a.4.

d) *Tipo de situación* ("variable fila") que se somete a la consideración de los encuestados. Variable cualitativa que presenta dos modalidades: entera y natural relativa; los temas concretos que se van a utilizar en ambos casos aparecen relacionados en el apartado 10.5.3.

La variable "tópico fenomenológico" se controla parcialmente mediante la elección de una muestra amplia de situaciones para cada una de las dos modalidades. Igualmente, la variable "tamaño de los números" se restringe a valores absolutos pequeños y no consecutivos para su mejor distinción. Tanto los tópicos

[8] Bajar escalones puede ser fácil o difícil, dependiendo de las circunstancias. Si se elige fácil para bajar, subir se encuentra ya determinado si se piensa en términos opuestos, pero puede tener otras valoraciones que complicarían el trabajo. De esta manera, se obliga a elegir el par de términos para cada par de situaciones contrarias.

como los valores numéricos se combinarán mediante un procedimiento sistemático que anule los posibles efectos no deseados de ambas variables.

10.5.1.2. *Variable dependiente*

La variable dependiente que intervendrá en los cuestionarios es la siguiente: *Tipo de respuesta* a los ítems. Variable discreta, concebida inicialmente con tres posibles valores: correcta, incorrecta y en blanco, y modificada posteriormente para admitir las dos modalidades siguientes: sí o no; elegida o no elegida. El motivo de la modificación se encuentra en la simplificación que introduce la división de las modalidades de las variables fundamentales en dos grandes categorías contrapuestas, lo que afecta a la intención original de analizar todas las respuestas posibles sin aplicar un formato cerrado que eliminara parte de la información.

10.5.2. **Población, muestras y niveles**

La muestra para la aplicación de los cuestionarios definitivos es una muestra intencional que se ha elegido utilizando los siguientes criterios:

1. *Sujetos con un nivel mínimo de conocimientos matemáticos necesarios para responder a los cuestionarios.*

Todos los individuos integrantes de la muestra conocen y están familiarizados con los números enteros o, al menos, se puede asegurar que los han trabajado con anterioridad, tanto en la primera toma de contacto escolar con ellos (7.° de E.G.B.) como en las primeras aplicaciones de los mismos en el curso siguiente (8.° de E.G.B.), ya que todos los encuestados se encuentran a partir del nivel correspondiente al tercer trimestre de 8.° de E.G.B.

2. *Sujetos con un alto nivel de rendimiento escolar y formación general.*

Se intenta evitar así las contaminaciones debidas a un bajo nivel de comprensión verbal o a un bajo dominio de los conceptos matemáticos elementales (lo que se reflejaría en respuestas en blanco, incoherentes o contradictorias), o bien, a una actitud negativa o pasiva ante el tipo de cuestiones propuestas (lo que se reflejaría en respuestas asistemáticas y sin sentido).

3. *Sujetos de diferente procedencia sociocultural, edad y tipo de actividad.*

Aún no siendo tan importante como los anteriores, se ha procurado aplicar este criterio con el fin de controlar los posibles efectos de estas variables.

Además de las condiciones aludidas, se pueden añadir otras que se derivan de las características del estudio. Así, la mayor parte de la muestra está formada por sujetos cuya residencia o lugar de trabajo se sitúa en Málaga capital y provincia, existiendo además una submuestra importante formada por sujetos que tienen alguna vinculación con la Universidad de Málaga.

La composición de la muestra se puede describir estratificadamente como sigue:

— Estudiantes (65): a partir de 8.° de E.G.B. incluido y, en concreto, de los siguientes niveles: 8.° de E.G.B. (4); 1.° de B.U.P. (8); F. P. (2); 1.°, 2.° y 3.° de la diplomatura de Profesorado de E.G.B. de varias especialidades (51).

— Personas que trabajan (23): Profesores universitarios de varias especialidades (10), personal laboral de la Universidad (5) y personas que realizan actividades fuera de la Universidad (8) (médicos, A.T.S. y auxiliares de Pediatría del Hospital Materno-infantil de Málaga).

— Sexo: varones (14); hembras (63).

— Domicilio: rural (25); urbano (52).

— Edades comprendidas entre los 14 y los 47 años.

La población es, por tanto, heterogénea y no definida de forma precisa. El tamaño de la muestra, de la que no es importante la necesidad de su representatividad debido a las características del trabajo, es reducido, a pesar de que se ha procurado que sea el mayor posible dentro de las limitaciones del estudio. A este respecto, teniendo en cuenta la extensión del cuestionario, lo que dificulta un estudio de masas o sobre una muestra de gran tamaño, se ha estimado que 77 sujetos es un tamaño suficiente para los propósitos de la investigación.

10.5.3. **Instrumentos y técnicas**

La mayor parte del contenido de este apartado se va a dedicar a la construcción de los instrumentos de recogida de datos y a la exposición de sus principales características. Igualmente, aunque el estudio que se va a realizar es descriptivo, dedicaremos unas líneas a describir y justificar brevemente los instrumentos y técnicas de análisis de datos que se van a emplear.

10.5.3.1. *Instrumentos y técnicas de recogida de datos*

La recogida de información se va a realizar mediante los cuestionarios que figuran en las páginas que siguen y que se acompañan por las páginas de introducción y aclaraciones necesarias para su cumplimentación. Se trata de cuestionarios similares a las *escalas de diferencial semántico,* a los que los sujetos deben responder mediante la elección múltiple. En ellos, se pueden apreciar dos partes diferenciadas: la primera, formada por el cuestionario a.1, y la segunda, por los cuestionarios a.2, a.3 y a.4. La diferencia radica en que el cuestionario a.1 se refiere a *valoraciones* de situaciones duales mediante términos lingüísticos, mientras que los otros tres se refieren a *comparaciones* realizadas también mediante expresiones verbales.

10.5.3.1.1. *Estructura, contenido y sintáxis de los cuestionarios*

La estructura es similar para los cuatro cuestionarios: situaciones duales simples (enteras y naturales relativas) enunciadas verbalmente y dispuestas por filas, y palabras y frases cortas dispuestas en columnas. Ambos elementos se encuentran conectados por una frase única para cada cuestionario, de manera que la composición completa: situación (fila) - término que conecta - palabra o frase corta (columna), para cada par de valores, resulta una frase que en unos casos tiene sentido y en otros no. Al encuestado se le pide que marque con una cruz todas las combinaciones que él crea que tengan sentido. La estructura y el contenido de la frase completa es diferente dependiendo de la finalidad de los cuestionarios:

— En el cuestionario a.1 se plantean, en cada fila, dos situaciones opuestas sobre un tópico concreto, y se pide una valoración mediante uno o varios elementos de la variable columna (pares de términos opuestos o frase corta que indique dependencia, independencia o ausencia de valoración).

— En los cuestionarios a.2, a.3 y a.4 se plantea, en cada fila, una frase típica de comparación en un contexto concreto, y se pide la elección de uno o varios términos simples o frases cortas (variable columna) que definan la comparación y den un sentido usualmente correcto a la frase compuesta resultante. En el caso de la prueba a.2, se trata de la comparación global de regiones (ganar con respecto a perder, saldo a favor del banco o negativo con respecto a saldo a favor del cliente o positivo, etc.) sin ningún tipo de cuantificación; la prueba a.3 se refiere a la comparación de dos medidas diferentes en la región negativa, mientras que la prueba a.4 se refiere a la comparación de dos medidas diferentes (con valores numéricos de diferente valor absoluto) pertenecientes a regiones también diferentes.

Analizaremos a continuación cada uno de los tres elementos básicos que intervienen.

Situaciones (Variable fila): estructura, contenido, sintáxis, distribución y número.

Para cada una de las dos modalidades de la variable fila se va a utilizar un número igual de contextos diferentes[9], elegidos a partir de los criterios establecidos en el apartado 10.4.1.1. En concreto, la distribución de tópicos es la siguiente:

[9] Inicialmente, este número era igual para ambos tipos de situaciones. No obstante, en sucesivas revisiones de los cuestionarios, se ha modificado la categorización de alguna de las situaciones.

Cuestionario a.1: situaciones enteras: saldos bancarios, cronología (2), temperaturas, alturas por encima y por debajo del nivel del mar, balances económicos, plantas por encima y por debajo de la principal, puntuaciones de golf, tiempo horario (2), índices de bolsa; *situaciones naturales relativas*: ganancias-pérdidas, faltar-sobrar, ingresos-reintegros bancarios, movimiento de ascensores, bajadas-subidas de escalones, aumentos-disminuciones de peso, subidas-bajadas de personas a un autobús, salidas-entradas, variaciones de temperatura, perder-encontrar, ascenso-descenso en globo, descuentos-recargos, añadir-quitar.

Resultan, en total, 24 situaciones diferentes, que simbolizaremos a partir de ahora desde la x_1 hasta la x_{24}, distribuidas de la siguiente forma: 11 situaciones enteras y 13 situaciones naturales relativas, intercaladas entre sí de manera alternada en el cuestionario.

Cuestionario a.2: situaciones enteras: temperaturas, cronología (2), saldos bancarios, alturas por encima y por debajo del nivel del mar, balances económicos, resultados de golf; *situaciones naturales relativas*: faltar-sobrar, ganancias-pérdidas, movimiento de ascensores, subidas-bajadas, ingresos-reintegros bancarios, poner-quitar, salidas-entradas de personas, variaciones de temperatura, variaciones de peso.

Resultan, en total, 16 situaciones diferentes intercaladas entre sí de manera alternada en el cuestionario, que simbolizamos desde la y_1 hasta la y_{16}, y de las cuales 7 son enteras y 9 naturales relativas. Asimismo, dentro de cada bloque, se utiliza el sentido de la comparación, apareciendo 4 tipos de situaciones diferentes alternadas sistemáticamente en el cuestionario y que simbolizaremos: $Z+-$, $Z-+$, $R+-$ y $R-+$.

Cuestionario a.3: con los mismos tópicos que para el caso anterior.

En total son 16 situaciones diferentes intercaladas entre sí y alternadas, simbolizadas desde la z_1 hasta la z_{16}, de las cuales 6 son enteras y 10 naturales relativas. Del mismo modo, en relación con los valores numéricos, se intercalan las situaciones en una secuencia en la que interviene el orden de los valores absolutos de los números que forman parte de los términos comparado y referente en cada una de las cuestiones. De esta manera, el valor absoluto del comparado es menor que el del referente en la mitad de las situaciones, mientras que en la otra mitad ocurre lo contrario. La combinación con los dos tipos de situaciones posibles da lugar a una secuencia alternada sistemática que simbolizaremos: $Ra < b$, $Za < b$, $Ra > b$ y $Za > b$.

Cuestionario a.4:

Los tópicos son los mismos que ya se han relacionado, distribuidos en 16 situaciones diferentes (7 enteras y 9 naturales relativas) que notaremos desde la t_1

hasta la t_{16}. Además del tipo de situación y del orden de los valores absolutos de los números, interviene un tercer factor en la variable fila, como es el sentido de la comparación entre las dos regiones diferentes (positiva con respecto a negativa y viceversa). Se puede decir que estamos ante una combinación de los dos cuestionarios anteriores, con un factor más que cada uno de ellos. La secuencia de situaciones se puede esquematizar de la forma: *R*–+<, *Z*+–>, *R*+–<, etc., de manera que de la combinación de los tres factores obtenemos 8 estructuras diferentes (4 relativas y 4 enteras) que se aplican, cada una de ellas, a dos tópicos también diferentes. Las 16 posibilidades se intercalan también de forma sistemática.

En lo que respecta a la sintaxis, existen diferencias entre el cuestionario a.1 y los tres restantes. En el primer caso se presentan los pares de situaciones opuestas separadas por una barra (Ejemplo: "un índice que indica una bajada de la bolsa / uno que indica una subida"). En el segundo caso se utiliza la siguiente frase clave común: "*con respecto a*" (Ejemplo: "sacar dinero de mi cuenta *con respecto a* ingresar dinero en ella", o bien, "un aumento de 3 kilos de peso *con respecto a* una disminución de 1 kilo").

Términos ordinales y comparativos (Variable columna): estructura, contenido, distribución y agrupamiento por bloques.

Las modalidades de esta variable en el cuestionario a.1 se encuentran agrupadas en torno a los tres bloques que vamos a utilizar para la interpretación de los resultados, los cuales no se aprecian en el cuestionario ni existe indicación alguna sobre su existencia:

— bloque **1**.—Cuatro pares de términos de *valoración fija objetiva* (positivo-negativo, mayor que cero-menor que cero, superior-inferior y anterior-posterior);

— bloque **2**.—Tres pares de términos de *valoración fija subjetiva* (bueno-malo, fácil-difícil y alto-bajo);

— bloque **3**.—Dos frases cortas que indican *valoración variable o dependiente y ausencia de valoración fija* en cualquier caso ("depende del caso" y "son independientes y la valoración es indiferente en cualquier caso").

En los cuestionarios restantes, el número y la disposición de las modalidades de esta variable son idénticos para los tres y responden a los mismos criterios utilizados para el cuestionario a.1, salvo que en este caso los términos no se disponen por parejas, ocupando cada uno de ellos una columna separada. La distribución es la siguiente:

— bloque **1**.—Seis términos de comparación objetiva fija separados en dos partes: 1.a) los tres que indican superioridad en el orden (mayor, superior, posterior); 1.b) los tres que indican inferioridad (menor, inferior, anterior);

— bloque **2**.—Cuatro términos de comparación subjetiva fija, separados en dos partes: 2.a) los que indican superioridad (mejor, más..) y 2.b) los que indican inferioridad (peor, menos..);

— bloque **3**.—Dos opciones relativas a la ausencia de valoración fija para la comparación ("depende del caso" y "siempre son independientes").

Términos de conexión.

La relación entre las dos variables anteriores se lleva a cabo mediante una frase completa que comienza en una situación-fila para terminar, por medio de una palabra o frase corta de enlace, en un hiato gramatical en el que situar uno o varios valores de la variable columna para que la frase completa tenga sentido. Ejemplo: "Una pérdida de 1 en una jugada con respecto a una pérdida de 3 en esa jugada, SIEMPRE ES: . .". El hueco se sustituye por una cruz en los casilleros que el encuestado considere convenientes para completar la frase con sentido.

En el caso del cuestionario a.1, la frase de enlace presenta dos opciones: la primera se refiere a la existencia de una valoración fija y es la siguiente: "*Son situaciones contrarias que normalmente se valoran mediante el par de términos:* .. "; la segunda es la negación de la anterior: "*Son situaciones contrarias para las que no existe una valoración fija y por tanto:* .. ".

Para los cuestionarios a.2, a.3 y a.4, en los casos de valoración fija, la frase es: "*Siempre es:* ..". En el caso de ausencia de valoración fija no ha sido necesario construir una frase de enlace, teniendo pleno sentido las respuestas directas a cualquiera de las dos opciones.

10.5.3.1.2. *Presentación y formato*

El cuestionario consta de siete hojas escritas por una sola cara: una hoja introductoria, dos hojas explicativas (una que corresponde al cuestionario a.1 y otra a los cuestionarios a.2, a.3 y a.4), en las que aparecen un par de ejemplos resueltos similares a los incluidos, y cuatro hojas conteniendo cada uno de los cuatro cuestionarios propiamente dichos.

Primera página: introducción y datos personales.

La primera hoja cumple la función de introducción, presentación y recogida de algunos datos personales, de entre los que se excluyen el nombre y los apellidos con la intención expresa de que los resultados sean anónimos. Con respecto a estos datos, hemos de hacer notar que no se pretende obtener conclusiones a partir de toda la información que se solicita, ya que no es intención del trabajo aplicar el cuestionario a una muestra exhaustiva de todos los niveles contemplados. En posteriores investigaciones habrá que analizar con mayor profundidad los resultados en los diferentes niveles y las diferencias dentro de un mismo grupo de niveles.

Hojas explicativas.

Con la intención de proporcionar a los encuestados una información clara, se incluyen dos hojas explicativas sobre el contenido, la estructura y el formato de las pruebas, se ponen algunos ejemplos y se indican las pautas para su cumplimentación. Cada hoja termina con una copia reducida de una parte del cuestionario, en la que aparecen los ejemplos propuestos y las respuestas a los mismos así como una invitación a pasar la hoja y realizar la prueba. La primera de ellas se encuentra en la página 2; la segunda se encuentra en la página 4, existiendo entre ellas pequeñas diferencias derivadas de las características de los dos grupos de cuestionarios.

Hojas de respuesta.

Se presentan en forma de enrejado o tabla de doble entrada para las dos variables fundamentales. Fuera del cuadro central y en la parte superior de la hoja, se vuelve a incidir en la finalidad de la prueba y en la manera de responder así como en el procedimiento a seguir cuando se produzcan equivocaciones. En el encabezado de las columnas se sitúan las frases de enlace en relación con las modalidades de la variable columna. Cada casilla corresponde, por tanto, a una situación y a una palabra, frase o grupo de palabras de la variable columna.

Cuestionario definitivo

(página 1).—Presentación y datos personales.

CUESTIONARIO

Trabajo de investigación realizado por José Luis González Marí, profesor de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga. Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales. Facultad de Ciencias de la Educación.

Objetivo: El cuestionario pretende obtener evidencias empíricas sobre la existencia de diferencias cognitivas en el dominio numérico y en particular, en aspectos ordinales y aditivos de los números enteros y los números relativos.

El cuestionario es anónimo. Sin embargo, hay algunos datos personales que pueden ser de interés para la investigación. Se ruega por tanto, rellenar el formulario que figura a continuación, antes de pasar a la hoja siguiente. Gracias por tu colaboración.

TRABAJA? SI ☐ NO ☐		**ESTUDIA?** SI ☐ NO ☐				
ACTIVIDAD QUE REALIZA		ESTUDIOS QUE REALIZA				
		EGB	BUP	FP	UNIVERSIDAD	
DOMICILIO FAMILIAR (nombre del pueblo o ciudad)					Grado medio	Grado superior
		4º ☐ 5º ☐ 6º ☐ 7º ☐ 8º ☐	1º ☐ 2º ☐ 3º ☐ COU ☐	FP1 1º ☐ 2º ☐ FP2 1º ☐ 2º ☐	1º ☐ 2º ☐ 3º ☐	1º ☐ 2º ☐ 3º ☐ 4º ☐ 5º ☐
Nº DE HERMANOS:						
EDAD:	**SEXO:**					
	hembra ☐ varón ☐					

(página 2).—Hoja explicativa del cuestionario a.1.

Cuestionario a.1

(LEE DETENIDAMENTE ESTA HOJA ANTES DE PASAR A LA SIGUIENTE)

El cuestionario al que vas a responder en la página siguiente, consiste en una tabla de doble entrada en la que figuran a la izquierda unas ***situaciones*** sencillas y conocidas que suelen aparecer de dos formas opuestas o contrarias una de la otra (salir-entrar, subir-bajar, saldo a favor del banco - saldo a favor del cliente, etc.), y en la parte superior, unos ***términos***, palabras o frases cortas agrupadas tambien en sus dos formas opuestas o contrarias (positivo-negativo, fácil-difícil, etc.), que se suelen utilizar para dar valores, adjetivizar o caracterizar las situaciones anteriores.

Ejemplos.—*Tener un beneficio-tener una pérdida* en mi empresa, son situaciones que normalmente se consideran como *positiva-negativa* o también como *buena-mala*, empleándose también los términos *fácil-difícil* (suele ser difícil tener beneficios y fácil tener pérdidas). Igualmente, *recorrer unos kilómetros en un sentido-recorrer unos kilómetros en sentido contrario*, son hechos independientes cuya valoración *depende del caso* que estemos considerando (no se puede decir que en la mayoría de los casos uno de los recorridos sea bueno y el otro malo o viceversa).

En la parte central del cuadro, hay unas casillas en blanco que corresponde cada una a un par de situaciones opuestas y a un par de términos contrarios. Se trata por tanto, de *elegir los pares de términos contrarios que mejor se ajusten a cada par de situaciones opuestas*, marcando una cruz en las casillas correspondientes (se pueden marcar una o más de una cruz por cada par de situaciones (por cada fila)). En el caso de los ejemplos que hemos puesto, señalaríamos de la siguiente forma:

(a.1) **Pon una cruz en las casillas que creas conveniente)** (Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro) Si quieres tachar una cruz que ya has colocado por equivocación, dibuja un círculo así: ⊠	SON SITUACIONES CONTRARIAS . . . QUE NORMALMENTE SE VALORAN MEDIANTE EL PAR DE TERMINOS:							PARA LAS QUE NO EXISTE UNA VALORACION FIJA Y POR TANTO:	
	POSITIVO(A) - NEGATIVO(A) (signo + /signo -)	MAYOR QUE CERO - MENOR QUE CERO	SUPERIOR - INFERIOR	ANTERIOR - POSTERIOR	BUENO(A) - MALO(A) (positivo / negativo)	FACIL - DIFICIL	ALTO(A) - BAJO(A)	DEPENDE DEL CASO	SON INDEPENDIENTES Y LA VALORACION ES INDIFERENTE EN CUALQUIERCASO
....									
En mi empresa un balance que supone una ganancia / uno que supone una pérdida	X				X	X			
Con mi coche, kilómtros recorridos en un sentido / kilómetros recorridos en sentido contrario								X	
....									

(PASA LA HOJA Y RESPONDE AL CUESTIONARIO a.1 procurando no dejar preguntas en blanco).

(página 3).—Cuestionario a.1.

(a.1) **Pon una cruz en las casillas que creas conveniente)** (Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro) Si quieres tachar una cruz que ya has colocado por equivocación, dibuja un círculo así: ⊠	SON SITUACIONES CONTRARIAS . . . QUE NORMALMENTE SE VALORAN MEDIANTE EL PAR DE TERMINOS:							PARA LAS QUE NO EXISTE UNA VALORACION FIJA Y POR TANTO:	
	POSITIVO(A) - NEGATIVO(A) (signo + /signo -)	MAYOR QUE CERO - MENOR QUE CERO	SUPERIOR - INFERIOR	ANTERIOR - POSTERIOR	BUENO(A) - MALO(A) (positivo / negativo)	FACIL - DIFICIL	ALTO(A) - BAJO(A)	DEPENDE DEL CASO	SON INDEPENDIENTES Y LA VALORACION ES INDIFERENTE EN CUALQUIERCASO
En mi cuenta bancaria, un saldo acreedor / un saldo deudor									
Cuando voy a comprar, Faltar dinero / sobrar dinero									
Cuando estoy jugando, una ganancia / una pérdida									
Con relación a una fecha dada, un día previo / un día después									
En mi cuenta bancaria, un ingreso / un reintegro									
Una temperatura bajo cero / una temperatura sobre cero									
Con relación al nivel del mar, una altura por encima / una por debajo									
En un ascensor, un descenso / un ascenso									
Un año previo al nacimiento de Cristo / un año después									
Una bajada / una subida de una cantidad de escalones									
En una persona, un aumento / una disminución de peso									
En la economía de mi familia, un balance conmás gastos que ingresos/viceversa									
En una parada de autobús, una subida/ una bajada de un número de personas									
En un edificio, un piso por debajo de la planta baja / uno por encima									
En el golf, una puntuación "sobre par" / una "bajo par"									
En una cafetería, una salida / una entrada de un nº de personas									
En una ciudad, un aumento / una disminución de temperatura									
Perder una cantidad de botones/encontrar una cantidad de botones									
A la edad de una persona, añadir un nº de años / quitar un nº de años									
Con respecto a la hora del lanzamiento, un segundo previo/un segundo después									
En un globo, un ascenso / un descenso de un nº de metros									
Un índice que indica una bajada de la bolsa / uno que indica una subida									
En una cita, minutos que han pasado / minutos que faltan									
Un número que representa un descuento / un recargo sobre un precio									

(página 4).—Hoja explicativa de los cuestionarios a.2, a.3 y a.4.

Cuestionarios a.2, a.3 y a.4

(LEE DETENIDAMENTE ESTA HOJA ANTES DE PASAR A LAS SIGUIENTES).

En los cuestionarios de las tres páginas siguientes a esta, se trata de comparar situaciones opuestas, eligiendo los términos (palabras o frases cortas que se encuentran en la parte superior de la tabla) que se ajustan mejor a cada comparación. Los tres son similares y tienen una forma parecida a la del que ya has realizado. Las diferencias más importantes con el cuestionario anterior (a.1) están: en la sencillez de las tablas, en el menor número de situaciones propuestas y en los términos utilizados que aquí se presentan aislados y no agrupados por parejas.

Para responder correctamente, basta con *leer primero cada frase de la izquierda y a continuación el encabezado de la tabla, marcando después en los cuadrados en blanco de la fila correspondiente a cada frase, las cruces que creas conveniente (una o más de una) para que la frase completa tenga sentido.* Utiliza para ello exclusivamente el sentido común.

Ejemplos.—Un año previo al nacimiento de Cristo con respecto a un año después de dicho nacimiento, SIEMPRE ES: ANTERIOR. No tendría sentido decir que siempre es peor, inferior o mayor o que siempre son independientes.

En un avión, un ascenso de un número de metros con respecto a un descenso de un número de metros, DEPENDE DEL CASO, ya que puede ser mejor o peor dependiendo de si va a aterrizar o no. También se puede optar por decir que son situaciones INDEPENDIENTES si pensamos que da igual subir que bajar siempre que el piloto actúe correctamente.

En el caso de los ejemplos que hemos puesto, señalaríamos de la siguiente forma:

(Pon una cruz en las casillas que creas conveniente) (Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro) Si quieres tachar una cruz que ya has colocado, dibuja un circulo así: ⊠	**SIEMPRE ES:**											
	MAYOR	SUPERIOR	POSTERIOR	MENOR	INFERIOR	ANTERIOR	MEJOR	MAS . . .	PEOR	MENOS . . .	DEPENDE DEL CASO	SIEMPRE SON INDEPENDIENTES
....												
En un avión, ascender unos metros con respecto a descender unos metros											X	X
Un año previo al nacimiento de Cristo conrespecto a un año después del mismo						X						
....												

(PASA LA HOJA Y RESPONDE A LOS CUESTIONARIOS a.2, a.3 y a.4 procurando no dejar preguntas en blanco)

(página 5).—Cuestionario a.2.

(a.2) **(Pon una cruz en las casillas que creas conveniente)** (Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro) Si quieres tachar una cruz que ya has colocado, dibuja un circulo así: ⊠	**SIEMPRE ES:**											
	MAYOR	SUPERIOR	POSTERIOR	MENOR	INFERIOR	ANTERIOR	MEJOR	MAS . . .	PEOR	MENOS . . .	DEPENDE DEL CASO	SIEMPRE SON INDEPENDIENTES
Una temperatura positiva con respecto a una temperatura negativa												
Faltar caramelos con respecto a sobrar caramelos												
Un dia después de una fecha con respecto a un dia previo a dicha fecha												
Ganar con respecto a perder												
En mi cuenta, un saldo negativo con respecto a un saldo positivo												
En un ascensor, un descenso con respecto a un ascenso												
Un año previo al nacimiento de Cristo con respecto a un año después												
Subir escalones con respecto a bajar escalones												
Una altura por encima del nivel del mar con respecto a otra por debajo												
Sacar dinero de mi cuenta con respecto a ingresar dinero en ella												
En una empresa, un balance económico negativo con respecto a uno positivo												
Poner una cantidad con respecto a quitar una cantidad												
En el golf, una puntuación "bajo par" con respecto a otra "sobre par"												
En un local, salir una cantidad de personas con respecto a entrar												
En una ciudad, una variación positiva de temperatura con respecto a una negativa												
Un aumento de peso con respecto a una disminución de peso												

(página 6).—Cuestionario a.3.

(a.3) **[Pon una cruz en las casillas que creas conveniente]**
(Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro)
Si quieres tachar una cruz que ya has colocado, dibuja un círculo así: ⊠

	SIEMPRE ES:											
	MAYOR	SUPERIOR	POSTERIOR	MENOR	INFERIOR	ANTERIOR	MEJOR	MAS . . .	PEOR	MENOS . . .	DEPENDE DEL CASO	SIEMPRE SON INDEPENDIENTES
Una pérdida de 1 en una jugada con respecto a una pérdida de 3 en esa jugada												
Una temperatura de 1 grado bajo cero con respecto a otra de 3 grados bajo cero												
En un ascensor, una bajada de 3 pisos con respecto a una bajada de 1 piso												
En una cuenta atrás, el segundo 3 con respecto al segundo 1												
En un local, una salida de 1 persona con respecto a una salida de 3 personas												
En mi cuenta, un saldo de - 1 con respecto a un saldo de - 3												
Faltar 3 caramelos de mi bolsa con respecto a faltar 1 caramelo de ella												
El año 3 antes de Cristo con respecto al año 1 antes de Cristo												
En un autobús, una bajada de 1 persona con respecto a una bajada de 3 personas												
Bajo el nivel del mar, una altura de -1 metro con respecto a otra de -3 metros												
Una disminución de 3 kilos de peso con respecto a una disminución de 1 kilo												
En una empresa, un balance económico de - 3 con respecto a un balance de - 1												
Una bajada de 1 escalón con respecto a una bajada de 3 escalones												
Una variación de temperatura de - 1 grado con respecto a una de - 3 grados												
En mi cuenta, un reintegro de 3 (sacar 3) con respecto a un reintegro de 1 (sacar 1)												
En el golf, una puntuación de 3 "bajo par" con respecto a otra de 1 "bajo par"												

(página 7).—Cuestionario a.4.

(a.4) **[Pon una cruz en las casillas que creas conveniente]**
(Antes de contestar a cada pregunta, lee las opciones de la parte superior del cuadro)
Si quieres tachar una cruz que has colocado por equivocación, dibuja un círculo así: ⊠

	SIEMPRE ES:											
	MAYOR	SUPERIOR	POSTERIOR	MENOR	INFERIOR	ANTERIOR	MEJOR	MAS . . .	PEOR	MENOS . . .	DEPENDE DEL CASO	SIEMPRE SON INDEPENDIENTES
En un local, una salida de 1 persona con respecto a una entrada de 3 personas												
En mi cuenta, un saldo de + 3 con respecto a un saldo de - 1												
Sobrar 1 caramelos de mi bolsa con respecto a faltar 3 caramelo de ella												
El año 3 antes de Cristo con respecto al año 1 después de Cristo												
Una pérdida de 3 en una jugada con respecto a una ganancia de 1 en esa jugada												
Una temperatura de 1 grado sobre cero con respecto a otra de 3 grados bajo cero												
En un ascensor, una subida de 3 pisos con respecto a una bajada de 1 piso												
El minuto 1 antes del lanzamiento con respecto al minuto 3 después del lanzam.												
Una bajada de 1 escalón con respecto a una subida de 3 escalones												
3 metros sobre el nivel del mar con respecto a 1 metro bajo el nivel del mar												
En mi cuenta, un ingreso de 1 con respecto a un reintegro de 3 (sacar 3)												
En el golf, una puntuación de 3 "bajo par" con respecto a otra de 1 "sobre par"												
En un auto, una bajada de 3 personas con respecto a una subida de 1 persona												
Una variación de temperatura de + 1 grado con respecto a una de - 3 grados												
Un aumento de 3 kilos de peso con respecto a una disminución de 1 kilo												
En una empresa, un balance económico de - 1 con respecto a un balance de + 3												

10.5.3.1.3. *Valoración de los ítems y de los cuestionarios*

El criterio de valoración de las respuestas es el siguiente: se da el valor 1 a la casilla respondida con una cruz y el valor 0 a la casilla en blanco. Las respuestas se traducen, por tanto, en cadenas de unos y ceros que van a servir de base para el estudio posterior.

Con independencia del criterio de valoración establecido, que es común a los cuatro cuestionarios, existen diferencias entre ellos en lo que respecta a la interpretación de los resultados. El cuestionario a.1 presenta características estructurales diferenciadas de las de los demás cuestionarios, si bien comparte con los cuestionarios a.2 y a.4 un aspecto básico de la investigación, cual es la diferenciación entre valoración objetiva y subjetiva para ambos tipos de situaciones. Por otra parte, el cuestionario a.3 no presenta esta diferenciación, puesto que lo que se plantea es la comparación de valores dentro de la región "negativa"[10]; en este cuestionario, no se persigue poner de manifiesto si el individuo utiliza o no valoraciones objetivas o subjetivas para los distintos tipos de situaciones, puesto que ambos admiten de pleno derecho una valoración objetiva concreta además de las subjetivas a que hubiere lugar, sino comprobar si realmente el individuo utiliza valoraciones objetivas (o subjetivas) contrarias, lo que vendría a reforzar la hipótesis VI. No existe, por tanto, un criterio homogéneo para la interpretación de los datos de los cuatro cuestionarios, lo que requerirá de un análisis separado, tal y como se explica con detalle en los apartados correspondientes del capítulo 11.

El casillero número 12, que corresponde a la respuesta "siempre son independientes", se podría haber eliminado del cuestionario a.3. No se ha hecho así por mantener la homogeneidad de la estructura de los cuestionarios a.2, a.3 y a.4. Somos conscientes de que su eliminación tendería a mejorar los resultados en el sentido esperado, pero también sabemos que si los resultados son los que se espera obtener, la hipótesis quedaría reforzada por el hecho de que los individuos no consideran como independientes las situaciones comparadas.

10.5.3.1.4. *Validez de los instrumentos de recogida de datos*

Según se desprende del proceso seguido en la elaboración de los cuestionarios, podemos asegurar que se garantizan tres tipos de validez de los instrumentos de recogida de datos:

[10] En las situaciones relativas la atribución del significado "negativo" es arbitraria, a pesar de lo cual, en la mayoría de ellas hay una consideración "usual" acerca de esta atribución que es la que hemos tenido en cuenta en el cuestionario (se suelen considerar normalmente como "negativas": las pérdidas, bajadas, reintegros, las cantidades que faltan por oposición a las que sobran, las disminuciones, ect.).

— Validez de construcción de los cuestionarios: en base al análisis de ítems y a la intervención de jueces externos; en realidad, todo el estudio teórico previo para llegar a la hipótesis VI se puede considerar como una aproximación a la validez de constructo;

— Validez externa: en virtud de que las muestras de ítems empleados son representativas del estudio que se pretende realizar;

— Validez interna: se puede asegurar sobre la base del control realizado sobre las variables concomitantes.

10.5.3.2. *Instrumentos de análisis de datos*

Desde el punto de vista cuantitativo, se van a calcular las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas a cada uno de los casilleros así como las frecuencias absolutas y relativas de las respuestas a cada uno de los bloques en que hemos dividido la variable fila y la variable columna, es decir: respuestas objetivas, subjetivas y otras, de menor a mayor y viceversa, para la variable columna; situaciones relativas y enteras para la variable fila.

Los resultados, en términos de frecuencias, se dispondrán en tablas de doble entrada para cada uno de los cuestionarios por separado. Estas tablas servirán de base para la representación gráfica mediante los diagramas que mejor reflejen los resultados obtenidos (barras, puntos y líneas de frecuencias). Igualmente, con fines meramente descriptivos, se efectuará un análisis de correspondencias simple (Cornejo, J. M., 1988) para estudiar las relaciones entre las variables.

10.5.3.3. *Instrumentos de organización y gestión de los datos*

Para la aplicación de los instrumentos indicados ha sido necesario recurrir al uso de paquetes informáticos. Se han utilizado los siguientes programas y equipos:

a) Para las tablas, cálculos y gráficos, la hoja de cálculo y representaciones gráficas sencillas denominada Excel 2.2 en castellano, implementada sobre un ordenador Macintosh Classic 4/40 de Apple.

b) Para el análisis de correspondencias, el paquete SPSS, implementado en un ordenador Macintosh LCIII 8/80, y el programa específico SAS de Digital Equipment Corporation, implementado en el ordenador VAX/VMS versión v5.5-2 del Centro de Proceso de datos de la Universidad de Málaga.

10.5.3.2.1. *Codificación de los datos*

Para simplificar la manipulación de los datos, que son en su mayor parte de tipo cualitativo, se ha llevado a cabo la traducción de las diferentes modalidades de las variables pertinentes a un lenguaje cuantitativo discreto. Los datos personales se codifican de acuerdo con lo establecido en la tabla de la figura 10.5 y las respuestas mediante el código ya mencionado.

dígitos	1°		2°		3°		4°	5°	6°	7°
variables	trabaja		estudia		domicilio		nº de hermanos		edad	
respuestas	SI	NO	SI	NO	rural	urbano	dos dígitos a partir de 00		dos dígitos a partir de 00	
códigos	1	0	1	0	1	0				

dígitos	8°		9°					10°
variables	sexo		estudios					nivel
respuestas	varon	hembra	EGB	BUP	FP	Universidad	Medio Superior	COU: 4 FP: 1, 2, 3, 4 resto: nº
códigos	1	0	1	2	3	4	5	

Figura 10.5.—Codificación de datos personales.

10.5.3.2.2. *Disposición y entrada de datos codificados*

Cada individuo responde a un cuestionario completo, que consta del cuadro de datos personales y cuatro partes diferenciadas relativas a los cuatro cuestionarios. La información correspondiente se estructura en un único fichero por individuo, que contiene:

— Los 9 primeros dígitos para los datos de tipo personal, de acuerdo con la codificación establecida en el apartado anterior.

— 24 × 9 dígitos para los resultados de los ítems del cuestionario a.1.

— 16 × 12 dígitos para los resultados de los ítems del cuestionario a.2.

— 16 × 12 dígitos para los resultados de los ítems del cuestionario a.3.

— 16 × 12 dígitos para los resultados de los ítems del cuestionario a.4.

Para cada individuo se disponen los datos por columnas, en una única tabla de doble entrada (801 filas × 77 columnas) que contiene la información completa de toda la muestra.

CAPÍTULO

11

Aplicación de los cuestionarios. Resultados y conclusiones

11.1. Introducción

Los cuestionarios definitivos han sido el resultado del proceso descrito detalladamente en el capítulo anterior. Como corresponde a un estudio exploratorio, contienen una gran variedad de situaciones y de respuestas posibles, habiéndose conseguido, salvo pequeñas modificaciones que se deducen del análisis de los resultados que vamos a presentar, una versión simplificada sin alterar en lo sustancial la finalidad del trabajo.

En el presente capítulo, después de unas breves consideraciones sobre el proceso de aplicación de los cuestionarios así como sobre el tratamiento de los datos, se expone un análisis detallado de los resultados y conclusiones que se deducen de dicha aplicación. Esta última parte se desarrollará de forma ordenada y de acuerdo con el siguiente esquema:

1.—Estudio descriptivo de cada cuestionario por separado, con arreglo al siguiente orden:

1.1.—Tablas de frecuencias.

1.2.—Medidas centrales y de dispersión.

1.3.—Representaciones gráficas.

1.4.—Análisis de correspondencias y otros instrumentos utilizados.

2.—Conclusiones globales de la prueba y del estudio exploratorio.

11.2. Algunas consideraciones previas sobre el proceso de aplicación de los cuestionarios y el tratamiento de datos

Los cuestionarios, anónimos y grapados en un documento único, se aplicaron: en el caso de los estudiantes, a grupos completos y en una hora de clase sin indicación ni aclaración añadida; a los demás sujetos se les entregó individual-mente, requiriendo su entrega en el plazo más breve posible. A todos se les pidió que trataran de responder a todas las cuestiones.

Una vez concluida la fase de aplicación se procedió a la valoración de las respuestas, introduciendo en el fichero Excel los datos completos de cada sujeto. Previamente, mediante una primera inspección, se hizo una selección de cuestionarios basada en los siguientes criterios:

a) Se apartaron todos los que tenían cinco o más respuestas en blanco, los cuales quedaron definitivamente fuera del grupo de los que iban a ser analizados.

b) Se apartaron los que habían sido respondidos de forma sistemática y sin sentido (misma respuesta o elección de todas las opciones para la mayoría de las cuestiones).

En total se rechazaron quince cuestionarios. Del resto, hasta un total de 108, una vez comprobado que resultaba un número excesivo para los propósitos y las limitaciones de la investigación, se hizo un muestreo intencional del que se establecieron los 77 que iban a ser utilizados. La elección de estos cuestionarios se realizó mediante una segunda aplicación, más restrictiva, de los criterios que se exponen en el apartado 10.5.2 del capítulo 10.

Los resultados de los cuestionarios se recogen en tres tipos de tablas:

— una primera tabla en la que se disponen los datos en formato numérico, figurando en cada columna una cadena de 801 números correspondientes a los resultados de la prueba para cada individuo; los nueve primeros números corresponden a los datos personales, mientras que los 792 restantes reflejan las respuestas a cada uno de los casilleros de los cuatro cuestionarios;

— de la tabla original se separan, a continuación, las cuatro partes que corresponden a cada uno de los cuestionarios en estudio y que servirán para el análisis de correspondencias. De cada una de estas partes se construye una segunda tabla de frecuencias absolutas agrupadas en torno a las modalidades de las variables, que servirá para el estudio de cada cuestionario;

— a partir de los datos anteriores, mediante los agrupamientos de las modalidades en función de las hipótesis enunciadas, se construye una tercera tabla para cada cuestionario, en la que se incluyen las frecuencias relativas y otros datos de interés para el estudio descriptivo.

11.3. Estudio descriptivo sobre la valoración global de regiones opuestas. Resultados y conclusiones del cuestionario a.1

En el primer cuestionario se presentan, por filas, los dos tipos de situaciones y, por columnas, los pares de términos y frases que se someten a juicio de los encuestados. Las modalidades de esta variable columna se han dividido en dos

partes: el bloque I ("objetivo"), que consta de los cuatro pares de términos propios de una estructura de orden total, y el bloque II ("subjetivo"), formado a su vez por el subapartado II.a (tres pares de términos "subjetivos" propios de un orden parcial), y el II.b (dos frases que indican ausencia de valoración fija).

Aunque los dos últimos grupos se han refundido en uno sólo, a efectos del estudio, se encuentran relacionados entre sí y con el primero de los bloques, existiendo una cierta dependencia entre ellos. Así por ejemplo, cualquier situación entera formulada en términos de opuestos admite una valoración de tipo I, a la que se puede añadir una segunda valoración de tipo II.a, no admitiendo, por incompatible, una valoración del tipo II.b. Por el contrario, toda situación relativa formulada en términos de opuestos admite, teóricamente, una valoración de tipo II.a o de tipo II.b, e incluso ambas en algunos casos, pero nunca una valoración del tipo I. Esto significa que las valoraciones subjetivas no son exclusivas de las situaciones relativas, lo que favorece, en teoría, que las diferencias entre las respuestas sean menos acentuadas para las situaciones enteras que para las relativas. A pesar de ello, veremos que la incidencia teóricamente negativa de esta circunstancia no afecta, en favor de las hipótesis, a la tendencia general, que coincide con lo que se esperaba.

En los apartados que siguen se expone un análisis detallado de los resultados. Por comodidad en la exposición trataremos por separado las tablas de frecuencias, las medidas centrales y de dispersión, las representaciones gráficas y el análisis de correspondencias.

11.3.1. *Tablas de frecuencias*

En las tablas 11.1 y 11.2 se reflejan las frecuencias absolutas originales y los cálculos realizados. Asimismo se han sombreado, en la primera de ellas, las zonas que deberían recoger en total, de acuerdo con las hipótesis enunciadas, el mayor número de respuestas por fila.

De las dos zonas de respuestas posibles (de tipo "objetivo" y de tipo "subjetivo"), las situaciones enteras (x_1, x_4, x_6, x_7, x_9, x_{12}, x_{14}, x_{15}, x_{20}, x_{22} y x_{23}) deberían ser respondidas mayoritariamente en la primera de ellas, mientras que para las situaciones relativas (x_2, x_3, x_5, x_8, x_{10}, x_{11}, x_{13}, x_{16}, x_{17}, x_{18}, x_{19}, x_{21} y x_{24}) se debería esperar una mayor frecuencia de respuestas en el segundo bloque ("subjetivo"). Como se deduce de una primera inspección de la tabla 11.1, se produce esta tendencia en 20 de las 24 situaciones, lo que representa el 83,33 % de las mismas. En el 16,67 % restante la tendencia es la inversa de la prevista, aunque con diferencias muy pequeñas que pueden ser explicables por las características especiales de las situaciones y por el uso predominante del lenguaje subjetivo sobre el objetivo.

En la tabla 11.2 aparecen las frecuencias absolutas y relativas así como los porcentajes y las diferencias entre porcentajes correspondientes a los bloques de respuestas objetivas y subjetivas a ambos tipos de situaciones. La tabla de frecuencias relativas presenta, por este orden, las siguientes columnas: frecuencias absolutas de respuestas a los bloques objetivo y subjetivo, totales de frecuencias, porcentajes y diferencias entre frecuencias absolutas y entre porcentajes.

11.3.2. ***Medidas centrales y de dispersión***

Se han calculado la media aritmética y la desviación típica a las cuatro variables que resultan de combinar los dos tipos de respuesta (objetiva y subjetiva) con los dos tipos de situaciones (enteras y relativas). La tabla 11.3 recoge los datos y los cálculos correspondientes, figurando, en la última fila, las cuatro medias y las desviaciones típicas respectivas. Las cuatro primeras columnas corresponden a las frecuencias absolutas para situaciones enteras (columnas A y B) y relativas (columnas C y D). Los resultados son los siguientes:

a) Respuestas de tipo objetivo a las situaciones enteras:
$\bar{x}_1 = 86{,}2728$
$\sigma_1 = 15{,}0096$

b) Respuestas de tipo subjetivo a las situaciones enteras:
$\bar{x}_2 = 55{,}4545$
$\sigma_2 = 25{,}9382$

c) Respuestas de tipo objetivo a las situaciones relativas:
$\bar{y}_1 = 46{,}6923$
$\sigma'_1 = 17{,}0311$

d) Respuestas de tipo subjetivo a las situaciones relativas:
$\bar{y}_2 = 79{,}3077$
$\sigma'_2 = 11{,}3841$

En la figura 11.4 se han representado los intervalos para las cuatro variables, observándose que las diferencias entre las respuestas objetivas y subjetivas son apreciables en ambos casos, si bien, son mayores en el caso de las situaciones relativas, en las que no existe solapamiento. Igualmente, se observa que existen diferencias importantes en las respuestas objetivas a ambos tipos de situaciones. Por el contrario estas diferencias no son tan patentes en lo que se refiere a las respuestas subjetivas, debido a que son comunes a ambos tipos de situaciones.

En lo que respecta a la variablidad, es de destacar la homogeneidad de las respuestas subjetivas a las situaciones relativas, que contrasta con la dispersión en el caso de las situaciones enteras. Esto se puede explicar si tenemos en cuenta

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	a.1	POSIT-NEG.	MAYOR-MEN.	SUP-INF	ANT-POST	SUMA	BUENO-MALO	FACIL-DIFICIL	ALTO-BAJO	DEPENDE	INDEP	SUMA	SUMA TOTAL
2	x_1	68	32	11	0	111	53	8	12	1	0	74	185
3	x_2	23	11	4	1	39	48	19	0	12	1	80	119
4	x_3	47	8	9	0	64	58	16	6	2	0	82	146
5	x_4	2	1	4	68	75	3	4	0	11	0	18	93
6	x_5	44	7	18	2	71	33	9	14	9	3	68	139
7	x_6	23	60	26	4	113	16	1	32	10	0	59	172
8	x_7	9	11	49	4	73	7	0	56	6	0	69	142
9	x_8	3	0	26	6	35	3	3	35	17	11	69	104
10	x_9	7	9	2	70	88	5	1	1	3	1	11	99
11	x_{10}	7	1	16	3	27	12	37	24	12	3	88	115
12	x_{11}	14	2	14	1	31	41	32	8	27	1	109	140
13	x_{12}	58	12	7	3	80	54	17	5	6	0	82	162
14	x_{13}	12	6	14	7	39	13	3	7	29	12	64	103
15	x_{14}	9	16	52	19	96	7	0	35	0	5	47	143
16	x_{15}	41	10	25	1	77	36	25	16	3	1	81	158
17	x_{16}	15	8	11	5	39	21	6	5	24	11	67	106
18	x_{17}	21	32	24	3	80	29	3	26	19	2	79	159
19	x_{18}	15	2	5	5	27	35	24	0	11	9	79	106
20	x_{19}	18	2	19	7	46	33	9	5	22	6	75	121
21	x_{20}	13	5	2	60	80	15	2	0	6	2	25	105
22	x_{21}	11	4	26	1	42	10	7	47	18	5	87	129
23	x_{22}	57	9	24	3	93	44	16	25	4	0	89	182
24	x_{23}	20	4	5	34	63	22	7	2	20	4	55	118
25	x_{24}	32	4	21	10	67	58	9	10	3	4	84	151

Tabla 11.1.—Frecuencias absolutas y zonas de respuesta esperada

a.1. Frec. enteras

	Variables	Objet. ent.	Subjet. ent.	Total	Porc. ob. ent.	Porc. sub. ent	Column7	Dif. porc. ent
1	x_1	111,000	74,000	185,000	0,600	0,400	37,000	0,200
2	x_4	75,000	18,000	93,000	0,806	0,194	57,000	0,613
3	x_6	113,000	59,000	172,000	0,657	0,343	54,000	0,314
4	x_7	73,000	69,000	142,000	0,514	0,486	4,000	0,028
5	x_9	88,000	11,000	99,000	0,889	0,111	77,000	0,778
6	x_{12}	80,000	82,000	162,000	0,494	0,506	−2,000	−0,012
7	x_{14}	96,000	47,000	143,000	0,671	0,329	49,000	0,343
8	x_{15}	77,000	81,000	158,000	0,487	0,513	−4,000	−0,025
9	x_{20}	80,000	25,000	105,000	0,762	0,238	55,000	0,524
10	x_{22}	93,000	89,000	182,000	0,511	0,489	4,000	0,022
11	x_{23}	63,000	55,000	118,000	0,534	0,466	8,000	0,068

a.1. Frec. relativas

	Situaciones	Objetivas	Subjetivas	Totales	Porcent.	Porcent.	Dif. rel.	Dif. porc. rel.
1	x_2	39,000	80,000	119,000	0,328	0,672	−41,000	−0,345
2	x_3	64,000	82,000	146,000	0,438	0,562	−18,000	−0,123
3	x_5	71,000	68,000	139,000	0,511	0,489	3,000	0,022
4	x_8	35,000	69,000	104,000	0,337	0,663	−34,000	−0,327
5	x_{10}	27,000	88,000	115,000	0,235	0,765	−61,000	−0,530
6	x_{11}	31,000	109,000	140,000	0,221	0,779	−78,000	−0,557
7	x_{13}	39,000	64,000	103,000	0,379	0,621	−25,000	−0,243
8	x_{16}	39,000	67,000	106,000	0,368	0,632	−28,000	−0,264
9	x_{17}	80,000	79,000	159,000	0,503	0,497	1,000	0,006
10	x_{18}	27,000	79,000	106,000	0,255	0,745	−52,000	−0,491
11	x_{19}	46,000	75,000	121,000	0,380	0,620	−29,000	−0,240
12	x_{21}	42,000	87,000	129,000	0,326	0,674	−45,000	−0,349
13	x_{24}	67,000	84,000	151,000	0,444	0,556	−17,000	−0,113

a.1. Diferencias enteras

	Situaciones	Dif. ent.	Dif. porc. ent.	Porc. obj. ent.	Porc. subjet.
1	x_1	37,000	0,200	0,600	0,400
2	x_4	56,000	0,613	0,806	0,194
3	x_6	54,000	0,314	0,657	0,343
4	x_7	4,000	0,028	0,514	0,486
5	x_9	77,000	0,778	0,889	0,111
6	x_{12}	−2,000	−0,012	0,494	0,506
7	x_{14}	49,000	0,343	0,671	0,329
8	x_{15}	−4,000	−0,025	0,487	0,513
9	x_{20}	55,000	0,524	0,762	0,238
10	x_{22}	4,000	0,022	0,511	0,489
11	x_{23}	8,000	0,068	0,534	0,466

Tabla 11.2.—Frecuencias, porcentajes y cálculos para las representaciones gráficas.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	110	72	39	79	611,438017	304,661157	49	1,15976331
2	74	18	63	80	127,07438	1335,57025	289	4,31360947
3	112	59	70	66	714,347107	19,8429752	576	142,159763
4	72	68	35	68	176,165289	181,024793	121	98,4674556
5	87	11	27	87	2,98347107	1896,20661	361	82,3905325
6	79	81	31	107	39,3471074	699,842975	225	845,467456
7	95	46	37	64	94,6198347	73,0247934	81	193,852071
8	77	79	37	66	68,4380165	598,024793	81	142,159763
9	79	24	79	77	39,3471074	933,024793	1089	0,85207101
10	92	87	27	77	45,2561983	1053,29752	361	0,85207101
11	61	55	45	74	589,165289	0,20661157	1	15,3905325
12			41	86			25	65,2366864
13			67	82			441	16,6213018
14	938	600	598	1013				
15	85,2727273	54,5454545	46	77,9230769	15,1002162	25,3963621	16,8705478	11,1248961

Tabla 11.3.—Cálculos para las medias y desviaciones típicas.

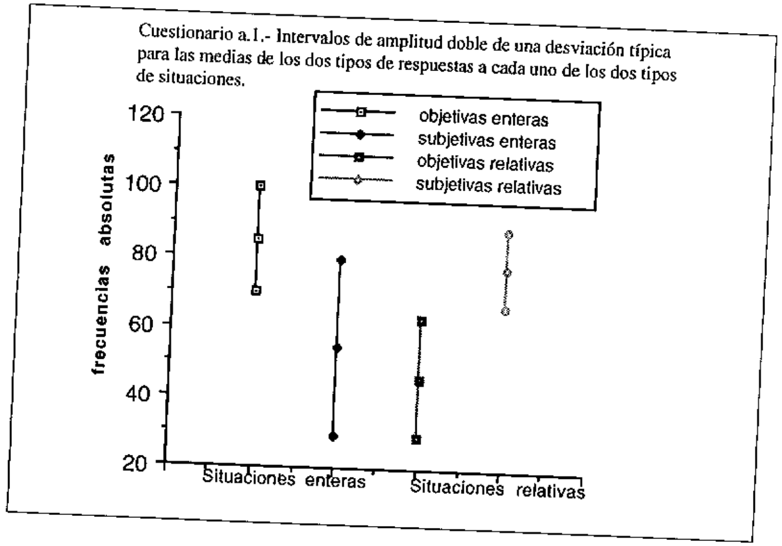
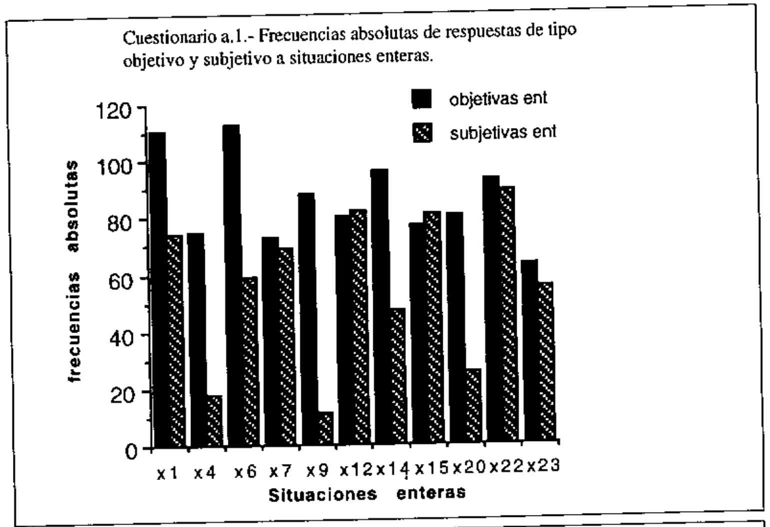


Figura 11.4

que en el cuestionario coexisten situaciones utilizadas como ejemplos típicos de la estructura de orden total (temperaturas, cronología, etc.), con situaciones inusuales en el ámbito educativo y tratadas de forma similar a las situaciones relativas (golf o balances económicos familiares).

11.3.3. ***Representaciones gráficas***

Con las representaciones gráficas se pretende poner en evidencia las relaciones implícitas en los datos, diferenciando los aspectos que interesan de los que son secundarios para la investigación. Al ser variables cualitativas utilizaremos: diagramas de puntos, polígonos de frecuencias y diagramas de barras, haciendo distinción entre frecuencias absolutas, relativas y diferencias de frecuencias relativas.



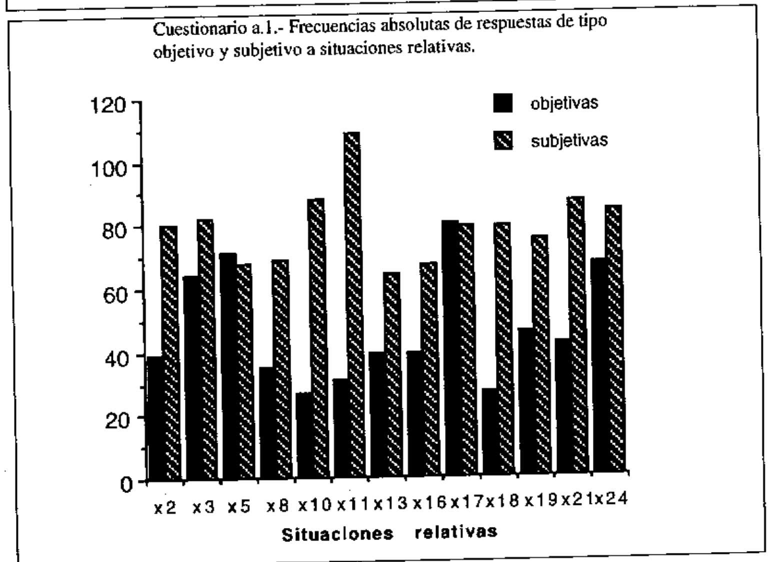


Figura 11.5

Frecuencias absolutas.—En los gráficos de la figura 11.5 se representan, mediante diagramas de barras dobles, las frecuencias absolutas de los dos tipos de respuestas a los dos tipos de situaciones.

Una primera inspección de la figura 11.5 permite apreciar los siguientes hechos, diferencias y regularidades:

a) Predominio general de las respuestas de tipo objetivo (barras negras) para situaciones enteras y de las de tipo subjetivo (barras sombreadas) para situaciones relativas, lo que confirma, a un nivel descriptivo, la hipótesis que asegura que los individuos consideran de manera diferenciada a ambos tipos de situaciones. La diferenciación se manifiesta en las preferencias sobre términos característicos de dos estructuras de orden diferentes, o que suponen la negación de alguna de las propiedades específicas de una de ellas, y se produce por oposición entre la elección de términos ligados a una estructura de orden total (positivo-negativo, mayor que cero-menor que cero, anterior-posterior, etc.) y la elección de términos y frases cortas cuyos significados no se pueden asociar a una estructura de tal tipo, o excluyen dicha posibilidad.

b) Existencia de tres tipos de situaciones enteras en función del grado de "objetividad" de las respuestas: situaciones con una valoración fuertemente objetiva y en las que existe una diferencia apreciable con respecto a la valoración subjetiva: x_1, x_4, x_6, x_9, x_{14} y x_{20}; situaciones con una valoración objetiva superior a la subjetiva pero con pequeñas diferencias entre ambas: x_7, x_{22} y x_{23}; situaciones en las que la valoración subjetiva es ligeramente superior en términos absolutos a la valoración objetiva, invirtiéndose la tendencia prevista: x_{12} y x_{15}.

Se produce, por tanto, una valoración objetiva superior a la subjetiva, en el 81,8 % de las situaciones enteras. Se puede decir que las 9 situaciones correspondientes se encuentran, para la mayoría de los encuestados, dentro de la estructura de orden total de los números enteros.

c) Aunque las diferencias son muy pequeñas y podríamos incluso hablar de un equilibrio entre los dos tipos de valoraciones, las situaciones x_{12} y x_{15}, que representan el 18,2 % del total de situaciones enteras, se valoran preferentemente mediante términos subjetivos, si bien, como se aprecia en la tabla 11.1, las respuestas puntuales de mayor frecuencia se dan en la zona objetiva ("positivo-negativo" con los valores respectivos 58 y 41). Esta pequeña discrepancia se puede explicar en los siguientes términos:

—Las respuestas subjetivas son más familiares y de una utilización mucho más extendida que las respuestas objetivas. En caso de duda, puede ser preferible utilizar términos menos comprometidos y rigurosos que los que han sido clasificados como objetivos.

— La situación x_{12} alude a balances económicos familiares, en el sentido de confrontación entre gastos e ingresos producidos. Aquí ocurre algo similar a lo que sucede en el contexto bancario, es decir, los ingresos y reintegros se encuentran en un contexto relativo y, sin embargo, los saldos se encuentran en un contexto entero. La confusión está servida si se utiliza, además, un término comercial como es el de "balance", poco usual en el tratamiento de la economía familiar y un tanto desconocido por su carácter técnico, cosa que no ocurre con el término "saldo bancario", que es mucho más común y conocido que el anterior.

— La situación x_{15}, que se refiere al juego del golf, se encuentra contaminada por el funcionamiento y las normas de puntuación de dicho juego; normas que admiten valoraciones peculiares y a veces contradictorias [1]. Además de coexistir interpretaciones que tienen que ver con los dos tipos de estructura ordinal, el término "par" es poco conocido, no se suele asociar a cero y a veces no se interpreta como la referencia que separa las puntuaciones "sobre par" y "bajo par", a diferencia de lo que ocurre con las temperaturas.

d) En 11 de las 13 situaciones relativas, lo que representa el 84,61 % del total, se da un predominio importante de las respuestas de tipo subjetivo sobre las de tipo objetivo. Por el contrario, en las cuestiones x_5 y x_{17} ha existido un ligero predominio de las respuestas objetivas sobre las subjetivas (70 - 66 y 79 - 77, respectivamente).

La situación x_5 se refiere a la valoración de ingresos-reintegros en una cuenta bancaria, cuya respuesta más frecuente ha sido "positivo (signo +) - negativo (signo –)". Creemos que esto es debido a que los ingresos y reintegros bancarios se pueden considerar de dos maneras diferentes: como acciones opuestas que se conocen vulgarmente como "meter-sacar" dinero de la cuenta (variable de tipo relativo), o como un apunte que suele hacer el banco mediante un número entero y que indica una cantidad a añadir o a restar a la ya existente. En este caso estamos ante valores numéricos enteros ligados al saldo bancario y valorables objetivamente.

La situación x_{17}, que se refiere a aumento-disminución de temperatura, presenta también un ligero desfase (79 - 77) con respecto a lo esperado. Creemos que el motivo se encuentra en la utilización prioritaria de la escala de temperaturas; una variación de temperatura ambiental, además de ser de uso poco frecuente, se encuentra indeterminada a efectos de valoración hasta que sea asociada con la temperatura a partir de la que se ha producido la variación. De esta manera, es frecuente asociar un aumento de temperatura con una temperatura "mayor" o "superior"; de aquí es fácil pasar a "mayor que cero" o "positivo (signo +)" sustituyendo la estructura de orden parcial por la de orden total correspondiente.

[1] Aunque se utilicen los números enteros, el orden en la clasificación de una serie de puntuaciones es el inverso del usual. Así, una puntuación de –4 siempre será "superior" o "mejor" que otra de –2 o de +1, por ejemplo.

La mayor homogeneidad, entendida como un mayor "consenso" en el significado de los términos, se da en las valoraciones esperadas a tenor de las hipótesis del trabajo, es decir, en las respuestas de tipo objetivo a situaciones enteras y en las de tipo subjetivo a situaciones relativas. Por el contrario, la utilización de términos objetivos para las situaciones relativas y de términos subjetivos para las situaciones enteras son bastante más irregulares.

Frecuencias relativas.—El análisis sobre frecuencias absolutas se puede completar con las evidencias que proporcionan los diagramas de frecuencias relativas. En la figura 11.6 se representan los polígonos de frecuencias correspondientes a las respuestas de los dos tipos a las dos clases de situaciones analizadas.

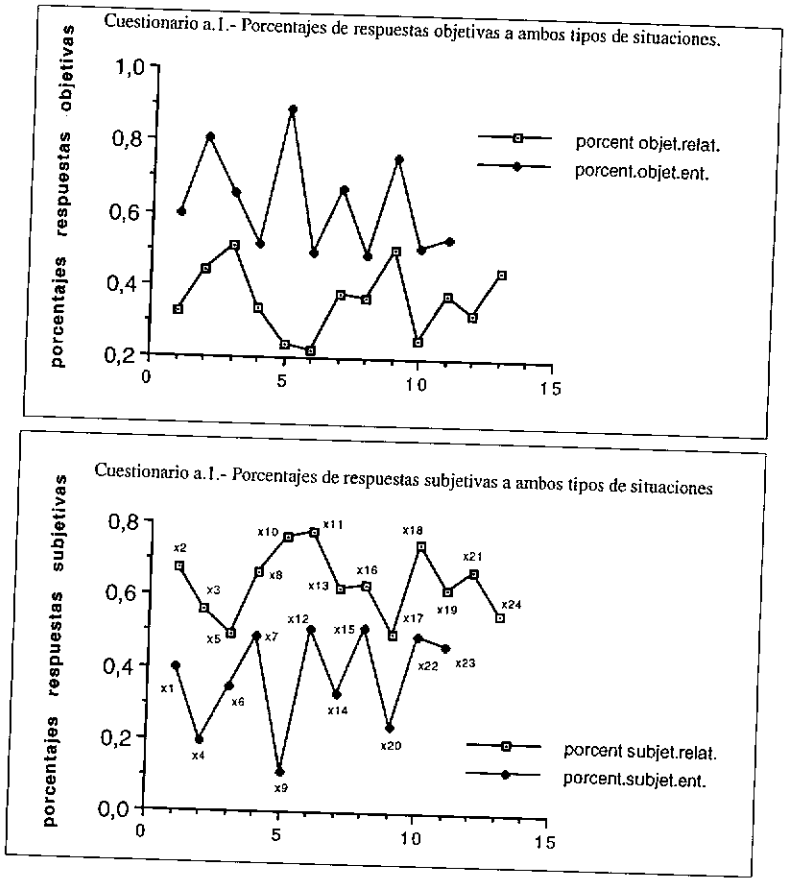


Figura 11.6

Las frecuencias relativas de cada tipo de respuesta se han calculado sobre el total de respuestas dadas a cada cuestión, lo que permite comparar directamente las valoraciones en las figuras correspondientes.

Como se observa en la figura 11.6, las respuestas objetivas y subjetivas a ambos tipos de situaciones ocupan zonas separadas en los diagramas. Las respuestas objetivas para situaciones relativas ocupan una franja que se encuentra entre el 20 % y el 50 % mientras que este mismo tipo de valoraciones se sitúa en el caso de las situaciones enteras entre el 50 % y el 90 %. La parte superior de la primera poligonal (situaciones relativas que ocupan los lugares 3 y 9 y que corresponden a las situaciones x_5 y x_{17}) se encuentra aproximadamente a la misma altura que los picos inferiores de la segunda poligonal (situaciones enteras x_7, x_{12}, x_{15} y x_{22}). En todas estas situaciones se da un cierto equilibrio entre los dos tipos de respuesta, como se puede observar en el diagrama simétrico de las respuestas subjetivas.

A las representaciones anteriores añadimos los diagramas de las figuras 11.7 y 11.8, en los que se reflejan las diferencias entre las frecuencias relativas correspondientes a las valoraciones objetivas y subjetivas para los dos tipos de situaciones.

En la figura 11.7 tenemos las dos poligonales resultantes de los cálculos efectuados en la tabla 11.2. Como se puede apreciar claramente, los datos correspondientes a las situaciones enteras se encuentran por encima de cero y los que representan en términos relativos las diferencias "objetivo - subjetivo" para situaciones relativas se encuentran, prácticamente en su totalidad, por debajo de cero. Para resaltar aún más estas diferencias, que creemos que son suficientemente patentes, hemos construido los diagramas de barras de la figura 11.8, que representan las diferencias entre las frecuencias relativas de cada una de las situaciones.

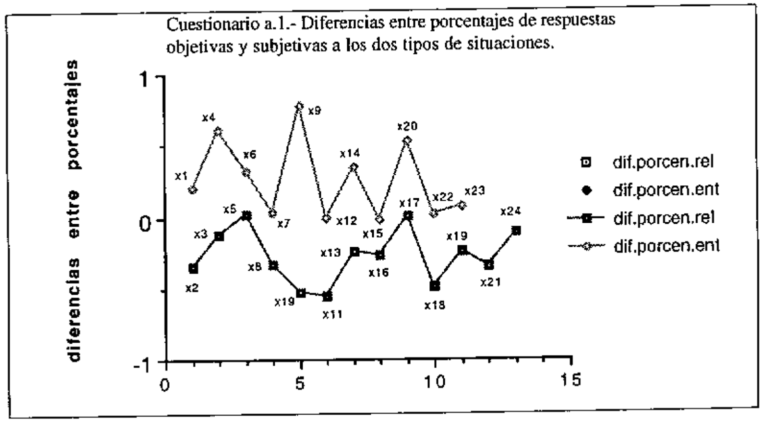


Figura 11.7

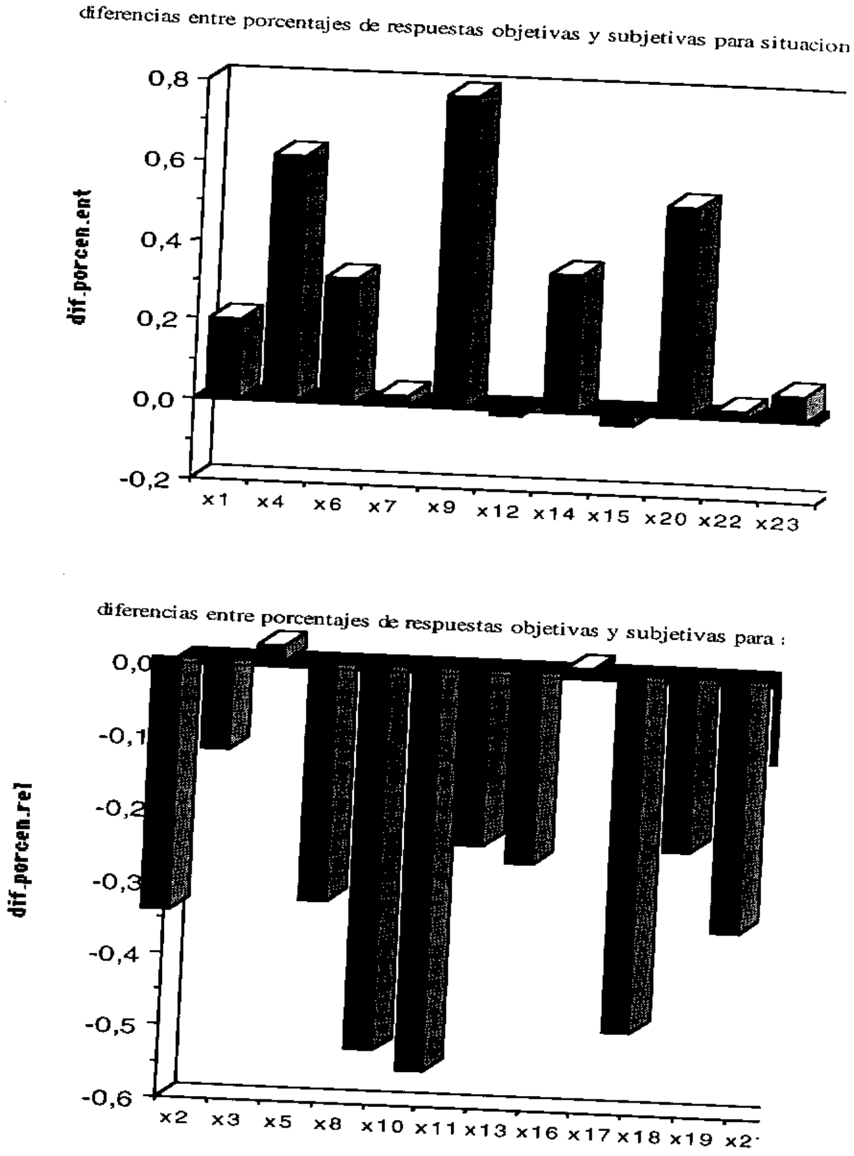


Figura 11.8

11.3.4. *Análisis de correspondencias*

A partir de los datos originales se ha construido una tabla de contingencia formada por las 24 situaciones dispuestas por filas y por los tres grupos de respuestas en las columnas (grupo 1: valoraciones objetivas; grupo 2 (denominado anteriormente como II.a): valoraciones subjetivas; grupo 3 (denominado anteriormente como II.b): ausencia de valoración fija). Con estos datos se ha realizado el análisis de correspondencias cuyas tablas y cálculos figuran en González, J. L. (1995, págs. 553-565). El motivo por el que hemos realizado la división mencionada no es otro que el de posibilitar la realización del estudio, de manera que podamos disponer de una proyección de los datos en dos dimensiones, para lo que es necesario construir una tabla de contingencia de más de dos variables por fila y columna. Como veremos, esta división no impide la interpretación de los resultados en el sentido previsto inicialmente (estudio de las relaciones entre los dos bloques de términos de valoración y los dos tipos de situaciones), sino que, por el contrario, añade la posibilidad de análisis de las relaciones existentes entre los dos subgrupos incluidos dentro del segundo bloque.

El estudio pretende poner de manifiesto, con la menor pérdida de información posible, la estructura de relaciones cuya existencia se supone a priori implícita en los datos obtenidos, para comprobar de forma meramente descriptiva el grado de ajuste de dicha estructura a los planteamientos teóricos enunciados en las hipótesis del trabajo y evaluar, consecuentemente, la bondad de dichos planteamientos. Para una información extensa de los principios y características de estos procedimientos de análisis de datos, así como de su justificación matemática, nos remitimos a Cornejo, J. M. (1988), Benzécri (1976) y Lebart et al. (1977, 1982).

En la figura 11.9 se representa la distribución de las proyecciones de los puntos fila y de los puntos columna sobre el plano de coordenadas. Las dos dimensiones representadas corresponden a las distancias ponderadas entre los perfiles de filas y columnas calculadas mediante la chi-cuadrado. La dimensión 1 es el resultado de una mayor contribución de los puntos columna 1 y 3, mientras que la dimensión 2 tiene una mayor contribución del punto columna 2, que se refiere a las valoraciones de tipo subjetivo. No obstante, podemos decir que los términos de valoración objetiva contribuyen, básicamente, a la inercia de la dimensión 1, los términos de valoración subjetiva a la inercia de la dimensión 2, mientras que los términos que indican ausencia de valoración fija contribuyen a ambas dimensiones con una ligera diferencia a favor de la dimensión 1. De la figura mencionada se obtienen las siguientes conclusiones:

a) Existe oposición entre el punto 1 y los puntos 2 y 3, separados por el eje de la dimensión 2; oposición que se produce entre valoraciones objetivas y otro tipo de valoraciones que inicialmente catalogamos como "subjetivas".

b) El eje vertical se sitúa como línea de separación entre las situaciones enteras y las relativas. Las primeras se encuentran en los puntos con abcisas negativas, mientras que las segundas se sitúan en los puntos con abcisas positivas, a la derecha del mencionado eje.

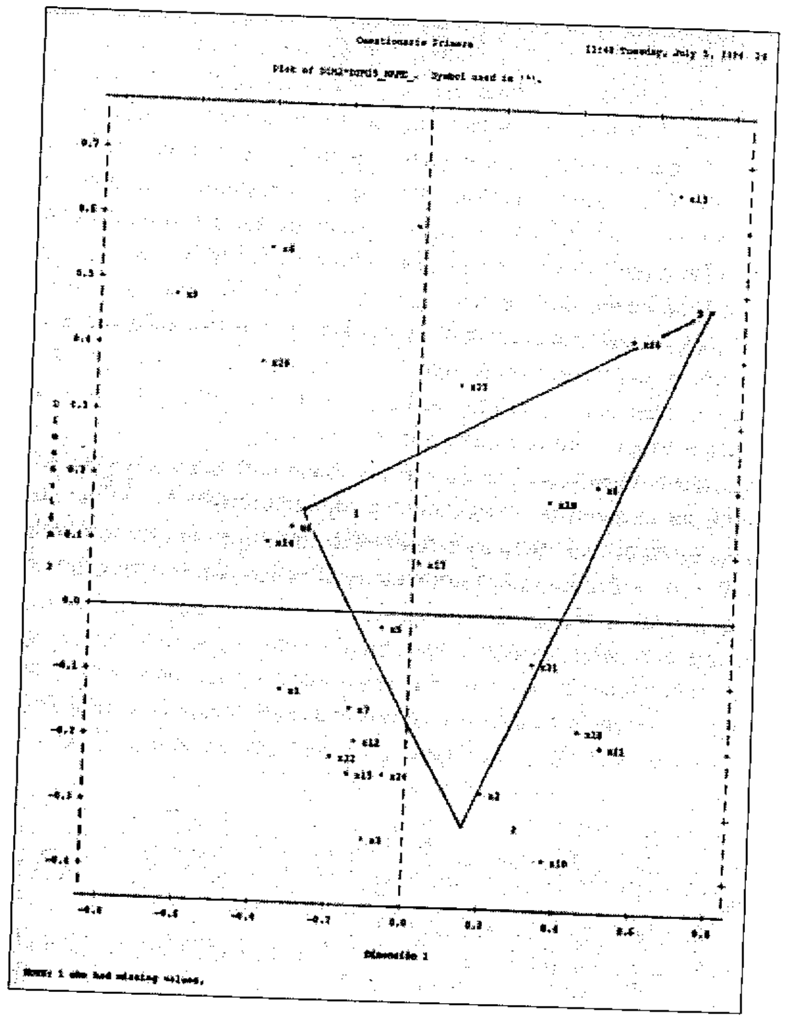


Figura 11.9

En particular se observa que los dos ejes tienen una contribución similar a la inercia total, presentando, además, las siguientes características:

— *Eje primero:* marca la oposición entre las respuestas objetivas y las respuestas subjetivas o aquéllas en las que se produce la ausencia de valoración fija.

— *Eje segundo:* marca la oposición entre las valoraciones subjetivas y las objetivas junto a aquéllas que denotan ausencia de valoración fija.

En lo que respecta a los dos ejes, conjuntamente, se puede interpretar lo siguiente:

Ambos ejes son independientes entre sí, lo que quiere decir que *en un mismo ítem,* el hecho de que las respuestas subjetivas aumenten o disminuyan no guarda relación (o es pequeña) con el porcentaje de respuestas objetivas.

En lo que respecta a las coordenadas, podemos decir que en el primer cuadrante [coordenadas positivas (+, +)] predomina la ausencia de valoración fija; en el tercer cuadrante [coordenadas negativas (– , –)] predominan tanto los elementos objetivos como subjetivos; en el segundo cuadrante (coordenadas +, –) predominan los elementos subjetivos; en el cuarto cuadrante (coordenadas –, +) predominan los elementos objetivos.

c) El mapa resultante permite constatar las siguientes asociaciones:

En torno a las *valoraciones de tipo 1.*

— Las situaciones x_1, x_4, x_6, x_9, x_{14} y x_{20}, todas ellas enteras, presentan valoraciones marcadamente objetivas (grupo 1).

— Las situaciones x_5, x_7, x_{17}, x_{22} y x_{23}, de las cuales x_5 y x_{17} son relativas y el resto enteras, se encuentran situadas en una zona intermedia entre el punto 1 y el punto 2, presentando valoraciones equilibradas entre las del grupo 1 (valoraciones objetivas) y las del grupo 2 (valoraciones subjetivas fijas) pero con una ligera ventaja a favor de las del tipo 1.

En torno a las *valoraciones de tipo 2.*

— Las situaciones x_3, x_{12}, x_{15} y x_{24}, de las que x_{12} y x_{15} son enteras y las otras dos relativas, se encuentran situadas en una zona intermedia entre el punto 1 y el punto 2, presentando valoraciones equilibradas entre las del grupo 1 y las del grupo 2 pero con una ligera ventaja a favor de las del tipo 2.

— Las situaciones x_2, x_{10}, x_{11}, x_{18} y x_{21}, todas ellas relativas, se encuentran claramente asociadas al punto 2 correspondiente a las valoraciones de tipo subjetivo fijo.

En torno a las *valoraciones de tipo 3.*

— Las situaciones relativas x_8 y x_{19} se encuentran en una zona intermedia entre los puntos 2 y 3, por lo que su valoración está entre la subjetiva fija y la ausencia de valoración fija.

— Las situaciones relativas x_{13} y x_{16} son las que presentan la mayor tendencia hacia la valoración dependiente o la ausencia de una valoración concreta.

d) De las 11 situaciones enteras, tal y como adelantábamos en apartados anteriores, podemos decir que 9 de ellas tienen una valoración objetiva fija, mientras que las dos restantes (x_{12} y x_{15}), cuyos resultados anómalos creemos que se encuentran justificados según las consideraciones ya realizadas, presentan una ligera tendencia hacia la valoración de tipo subjetivo.

Igualmente, 11 de las 13 situaciones relativas presentan una valoración subjetiva (tipos 2 y 3), mientras que x_5 y x_{17} presentan una ligera tendencia hacia la valoración objetiva fija, lo que supone una pequeña desviación con respecto a lo previsto y que también ha quedado justificado en apartados anteriores.

La aplicación del análisis de correspondencias al cuestionario primero, cuyo constructo subyacente es el análisis factorial para datos nominales y cuya interpretación queda resumida en los párrafos anteriores, se repetirá para los tres cuestionarios restantes. Con ello se pretende, como ya hemos mencionado, obtener la forma general en que los factores se agrupan en unos ejes cartesianos. En este sentido hemos dirigido el estudio y la interpretación de los resultados hacia aquéllos aspectos generales de los datos que aportan indicios razonables acerca de la bondad de los planteamientos teóricos.

Como información añadida, se puede realizar la prueba chi-cuadrado para el contraste de frecuencias de variables nominales y utilizar estadísticos de asociación para datos dicotómicos, como es el caso del coeficiente de contingencia o el coeficiente de correlación biserial por puntos. Dicha información, que excede los propósitos de esta investigación, debe formar parte de un estudio experimental más detallado que corrobore los *indicios* encontrados aquí. En el capítulo 12, a propósito de las perspectivas futuras del trabajo, se explican con más detalle los aspectos generales de la continuación de la investigación en estudios posteriores.

11.4. Estudio descriptivo sobre la comparación de regiones y medidas. Resultados y conclusiones de los cuestionarios a.2, a.3 y a.4

A diferencia del cuestionario a.1, tratado en apartados anteriores, el resto de la prueba constituye un bloque formado por tres cuestionarios con características comunes y claramente diferenciadas de las de aquél. Las diferencias más importantes, como ya vimos en el capítulo anterior, se encuentran en la estructura, en las modalidades de la variable columna y, sobre todo, en la finalidad de las tareas. Se trata de tres cuestionarios en los que se ha reducido a 16 el número de situaciones de la variable fila, se ha ampliado a 12 el número de términos y frases cortas, que se sitúan en cada columna aislados y no por parejas, y, por último, dado que los tres cuestionarios se refieren a la comparación de regiones y medidas, se utiliza una estructura diferente y más sencilla que la anterior para la construcción de las frases que enlazan las dos variables. Igualmente, en dos de los tres cuestionarios intervienen valores numéricos sencillos que también determinan el sentido de las respuestas en función de sus valores absolutos.

Como se podrá apreciar en el sentido de algunas conclusiones, en estos tres cuestionarios sigue existiendo la posibilidad de realización de un análisis global de las respuestas de tipo objetivo y subjetivo, aunque en esta ocasión estaremos interesados en el sentido del resultado de la comparación, es decir, en las respuestas que indican superioridad e inferioridad ante la comparación entre el referente y el comparado. Para ello utilizaremos, en general, la siguiente división en bloques de las modalidades de la variable columna: el grupo Ia, formado por los términos objetivos que indican superioridad (mayor, superior y posterior), el grupo Ib, formado por los términos objetivos que indican inferioridad (menor, inferior y anterior), y el grupo II, formado por el resto de términos y frases cortas que indican subjetividad en la comparación, ausencia de un resultado fijo o imposibilidad de una valoración concreta.

En lo que sigue, trataremos por separado los resultados y conclusiones de cada uno de los tres cuestionarios, siguiendo el mismo esquema utilizado para el cuestionario a.1. En su momento, daremos cuenta también de las pequeñas modificaciones que hemos tenido que realizar "a posteriori", algunas de ellas antes del tratamiento de datos, debidas a errores en la clasificación de algunas situaciones (una en el cuestionario a.2, dos en el cuestionario a.3 y una en el cuestionario a.4) así como a erratas no advertidas antes de la aplicación de la prueba.

11.4.1. ***Cuestionario a.2: Comparación de regiones opuestas***

Con este cuestionario se pretende poner de manifiesto que los individuos utilizan, en el caso de las situaciones "enteras", términos precisos para comparar regiones opuestas que se ajustan a una estructura de orden total, junto a términos imprecisos, subjetivos o que indican dependencia o imposibilidad de comparación, en el caso de las situaciones "relativas".

Si nos atenemos estrictamente a las consideraciones teóricas, la comparación sólo tiene sentido en el primer caso. No obstante, además de las dos respuestas idóneas para las situaciones relativas ("depende del caso" y "siempre son independientes"), hemos querido incluir dos pares de términos opuestos que se utilizan para hacer este tipo de comparaciones (mejor-peor, más. .-menos. .), pero de los que habría que decir, por su imprecisión y subjetividad, que son característicos de "pseudocomparaciones", por cuanto siempre existen contraejemplos que avalan la falsedad de la afirmación general contenida en la frase construida en el cuestionario (Ejemplo: en el sentido usual no es cierto que ganar sea siempre mejor que perder).

11.4.1.1. *Tablas de frecuencias*

En las tablas 11.11 y 11.12 aparecen las frecuencias absolutas y los cálculos realizados en torno a los grupos de respuestas que van a ser analizados: las de tipo objetivo (I.a y I.b), por separado y conjuntamente, y las de tipo subjetivo (II) en ambos tipos de situaciones.

En la tabla 11.11 se han sombreado las zonas de respuesta esperada. De los tres bloques, los dos primeros corresponden a las respuestas objetivas de tipo "superior" y de tipo "inferior", de las cuales se encuentran sombreadas las relativas a las situaciones enteras: y_1, y_3, y_5, y_7, y_9, y_{11} e y_{13}. El resto de filas corresponden a las situaciones relativas, de las que se espera que se dé el mayor número de respuestas en el tercero de los bloques. La situación y_{15}, según se explica en el apartado dedicado al cuestionario a.1, se incluyó originalmente como entera, clasificándose posteriormente como relativa cuando se advirtió el error cometido.

De un primer examen de la tabla 11.11 se desprende que los resultados se ajustan a lo esperado en el caso de las situaciones relativas y se producen algunas anomalías en lo que se refiere a las situaciones enteras. Así, las situaciones y_1, y_3, y_7 e y_9 se responden mayoritariamente según lo esperado, mientras que en las situaciones y_5 e y_{11}, y en menor medida en la y_{13}, se produce un mayor número de respuestas de tipo subjetivo que objetivo, lo que supone una inversión de los resultados esperados; anomalía que se produce en las mismas situaciones problemáticas del cuestionario anterior (saldos, balances y juego del golf).

En las tres situaciones aludidas se produce el mayor número de respuestas en los términos subjetivos "mejor" y "peor", salvo en el caso del juego del golf, en el que las diferencias son muy pequeñas y la igualdad de tipos de respuesta puede ser fruto del desconocimiento y de las confusiones que origina el funcionamiento peculiar de este juego; es evidente que los sujetos encuestados asocian, a efectos de comparación, los saldos bancarios y los balances económicos con una estructura ordinal de tipo relativo, porque, aparte de los motivos expuestos en el análisis de los resultados del cuestionario a.1, los términos que emplean mayoritariamente en sus respuestas son los que comúnmente se utilizan para ese tipo de situaciones.

En general, podemos decir que existe una tendencia a la utilización de términos comparativos subjetivos. Esta tendencia se puede considerar [illegible]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	a.2	Mayor	Superior	Posterior	SUMA	Menor	Inferior	Anterior	SUMA	Mejor	Más	Peor	Menos	Depende	Indep.	SUMA	S. Total
2	y_1	48	54	0	**102**	0	1	0	**1**	16	18	4	0	9	1	**48**	151
3	y_2	0	0	0	**0**	18	7	0	**25**	4	1	47	25	14	3	**94**	119
4	y_3	1	3	67	**71**	0	0	6	**6**	2	4	7	0	5	1	**19**	96
5	y_4	6	5	0	**11**	0	0	1	**1**	68	10	2	0	11	1	**92**	104
6	y_5	0	0	0	**0**	24	23	0	**47**	2	1	64	16	3	0	**86**	133
7	y_6	0	0	3	**3**	5	20	1	**26**	1	0	1	3	36	23	**64**	93
8	y_7	1	1	0	**2**	3	0	71	**74**	1	1	2	1	1	3	**9**	85
9	y_8	3	16	0	**19**	0	1	1	**2**	2	10	20	2	26	21	**81**	102
10	y_9	18	55	3	**76**	1	0	0	**1**	4	7	2	0	13	4	**30**	107
11	y_{10}	0	0	6	**6**	0	7	0	**7**	5	2	44	8	22	4	**85**	98
12	y_{11}	0	1	0	**1**	8	20	0	**28**	3	0	63	13	5	0	**84**	113
13	y_{12}	12	8	0	**20**	1	0	0	**1**	27	12	4	0	38	2	**83**	104
14	y_{13}	6	8	1	**15**	15	21	1	**37**	30	4	17	2	2	2	**57**	109
15	y_{14}	3	2	3	**8**	5	6	1	**12**	2	1	10	13	44	13	**83**	103
16	y_{15}	12	8	1	**21**	3	1	2	**6**	27	10	3	1	30	5	**76**	103
17	y_{16}	15	10	0	**25**	0	1	1	**2**	4	13	20	2	48	3	**90**	117

Tabla 11.11

cuanto es más cómodo y más simple utilizar una estructura clasificatoria dicotómica, a la que siempre se puede llegar por simplificación y relativización de una estructura ordinal, que la propia estructura ordinal. Igualmente, se consta-ta también la existencia de un gran número de respuestas en la columna "depende del caso", lo que es característico de las situaciones relativas.

frec. a.2

	situaciones	frec. ord. s.	frec. ord. inf.	frec. sub.	total	por. ord. s.	por. o. inf.	por. sub.	dif. p. s. inf.	dif. f. s. in
1	y_1	102,000	1,000	48,000	151,000	0,675	0,007	0,318	0,669	101,000
2	y_2	0,000	25,000	94,000	119,000	0,000	0,210	0,790	−0,210	−25,000
3	y_3	71,000	6,000	19,000	96,000	0,740	0,062	0,198	0,677	65,000
4	y_4	11,000	1,000	92,000	104,000	0,106	0,010	0,885	0,096	10,000
5	y_5	0,000	47,000	86,000	133,000	0,000	0,353	0,647	−0,353	−47,000
6	y_6	3,000	26,000	64,000	93,000	0,032	0,280	0,688	−0,247	−23,000
7	y_7	2,000	74,000	9,000	85,000	0,024	0,871	0,106	−0,847	−72,000
8	y_8	19,000	2,000	81,000	102,000	0,186	0,020	0,794	0,167	17,000
9	y_9	76,000	1,000	30,000	107,000	0,710	0,009	0,280	0,701	75,000
10	y_{10}	6,000	7,000	85,000	98,000	0,061	0,071	0,867	−0,010	−1,000
11	y_{11}	1,000	28,000	84,000	113,000	0,009	0,248	0,743	−0,239	−27,000
12	y_{12}	20,000	1,000	83,000	104,000	0,192	0,010	0,798	0,183	19,000
13	y_{13}	15,000	37,000	57,000	109,000	0,138	0,339	0,523	−0,202	−22,000
14	y_{14}	8,000	12,000	83,000	103,000	0,078	0,117	0,806	−0,039	−4,000
15	y_{15}	21,000	6,000	76,000	103,000	0,204	0,058	0,738	0,146	15,000
16	y_{16}	25,000	2,000	90,000	117,000	0,214	0,017	0,769	0,197	23,000

enteras	frec. ent. sup.	frec. ent. inf.	su. fre. inf. o	frec. ent. sub.	frec. rel. sup.	frec. rel. inf.	su. frec. rel. o
y_1	102,000	1,000	103,000	48,000	0,000	25,000	25,000
y_3	71,000	6,000	77,000	19,000	11,000	1,000	12,000
y_5	0,000	47,000	47,000	86,000	3,000	26,000	29,000
y_7	2,000	74,000	76,000	9,000	19,000	2,000	21,000
y_9	76,000	1,000	77,000	30,000	6,000	7,000	13,000
y_{11}	1,000	28,000	29,000	84,000	20,000	1,000	21,000
y_{13}	15,000	37,000	52,000	57,000	8,000	12,000	20,000
					21,000	6,000	27,000
					25,000	2,000	27,000

	frec. rel. s.	porc. ob. e.	porc. sub. e.	porc. ob. r.	porc. sub. r	difer. por.
1	94,000	0,318	0,166	0,623	0,364	−0,457
2	92,000	0,160	0,101	0,773	0,487	−0,672
3	64,000	0,896	0,302	0,667	−0,406	−0,365
4	81,000	0,087	0,202	0,779	0,644	−0,577
5	83,000	0,226	0,098	0,624	0,353	−0,526
6	83,000	0,903	0,226	0,892	−0,591	−0,667
7	83,000	0,671	0,235	0,976	−0,059	−0741
8	76,000		0,265	0,745		−0,480
9	90,000		0,252	0,841		−0,589

Tablas 11.12

11.4.1.2. *Medidas centrales y de dispersión*

En la comparación global de regiones se analizan los dos aspectos siguientes: a) Si los encuestados responden utilizando términos comparativos específicos de una estructura de orden total para las situaciones enteras y términos propios de una estructura de orden parcial para las situaciones relativas, y b) Si el sentido de la comparación, en el caso de las situaciones enteras, es el correcto (respuestas de tipo I.a o de tipo I.b).

Como se puede apreciar en los datos de la tabla 11.11, podemos responder afirmativamente a la segunda de las dos cuestiones planteadas en el párrafo anterior. Sólo nos resta analizar los resultados en relación con la primera de dichas cuestiones, para lo que necesitamos agrupar las respuestas de tipo I.a y I.b en un sólo bloque y compararlas con las de tipo II para las dos clases de situaciones. En este sentido, comenzaremos dicho estudio calculando las medias y desviaciones típicas de las respuestas de tipo I y de tipo II, cuyos resultados, que aparecen en la tabla 11.13 y que se representan esquemáticamente en la figura 11.14, son los siguientes:

Respuestas de tipo "objetivo" para situaciones enteras:

$\bar{x}_1 = 65{,}85714$

$\sigma_1 = 22{,}79366$

Respuestas de tipo "subjetivo" para situaciones enteras:

$\bar{x}_2 = 47{,}57143$

$\sigma_2 = 28{,}04515$

Respuestas de tipo "objetivo" para situaciones relativas:

$\bar{y}_1 = 21{,}6667$

$\sigma'_1 = 5{,}71547$

Respuestas de tipo "subjetivo" para situaciones relativas:

$\bar{y}_2 = 83{,}1111$

$\sigma'_2 = 8{,}62096$

Un breve análisis de los datos conduce a las siguientes conclusiones:

— Las dos situaciones enteras cuyos resultados son los inversos de los previstos influyen de manera significativa en los resultados, si bien no llegan a modificar de forma sustancial la tendencia que se mantiene en las hipótesis y que se ha confirmado en el cuestionario primero.

— Las diferencias entre medias para las situaciones enteras son mucho menores que las correspondientes para las situaciones relativas. En otras palabras, podemos decir que la tendencia a la utilización de términos comparativos imprecisos y subjetivos, que se observa en todos los casos, contribuye a disminuir las diferencias para las situaciones enteras y a acentuarlas en el caso de las situaciones relativas. No obstante, a pesar de las características de algunas de las situaciones enteras utilizadas, que contribuyen negativamente en el sentido esperado, podemos afirmar que existen diferencias entre ambos tipos de respuesta

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	103	48	25	94	1379,59184	0,18367347	11,1111111	118,567901
2	77	19	12	92	124,163265	816,326531	93,4444444	79,0123457
3	47	86	29	64	355,591837	1476,7551	53,7777778	365,234568
4	76	9	21	81	102,877551	1487,7551	0,44444444	4,45679012
5	77	30	13	85	124,163265	308,755102	75,1111111	3,56790123
6	29	84	21	83	1358,44898	1327,04082	0,44444444	0,01234568
7	52	57	20	83	192,020408	88,8979592	2,77777778	0,01234568
8			27	76			28,4444444	50,5679012
9			27	90			28,4444444	47,4567901
10								
11	461	333	195	748				
12	65,8571	47,5714	21,6667	83,1111	22,7936618	28,0451531	5,71547607	8,62096211

Tabla 11.13

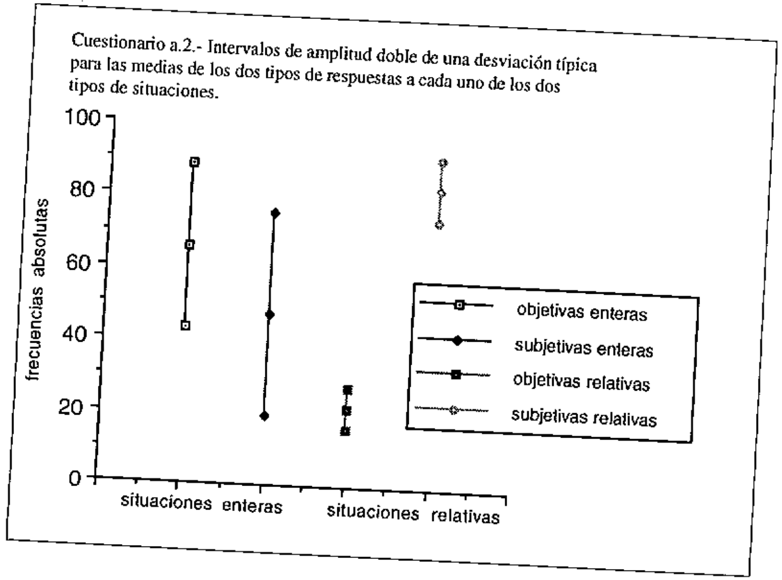


Figura 11.14

— Existe un predominio de las respuestas de tipo II sobre las de tipo I en el caso de las situaciones relativas. Los individuos encuestados tienen claro que las regiones opuestas en las que interviene una estructura ordinal relativa, o no son comparables o lo son sólo en algunos casos en los que existe una fuerte influencia del contexto sociocultural. Aquí, incluso, da la impresión de que la palabra "siempre" se utiliza en el sentido de "normalmente" y no en el sentido riguroso de "en todos los casos", como debería ser en realidad.

— Es de destacar, al igual que ocurre en el cuestionario a.1, la gran variabilidad de las respuestas de ambos tipos a las situaciones enteras, en oposición a la homogeneidad en las respuestas a las situaciones relativas. La mayoría de los sujetos están de acuerdo en el tratamiento de las situaciones relativas, mientras que no tienen tan clara la comparabilidad de regiones opuestas en situaciones enteras. Identifican el orden parcial, mientras que, en algunos casos, no identifican el orden total, utilizando en su defecto términos imprecisos o subjetivos.

Por último, es de destacar las diferencias entre las respuestas de tipo objetivo, por un lado, y las de tipo subjetivo, por otro, a ambos tipos de situaciones; tendencia que coincide con los resultados obtenidos en el cuestionario anterior.

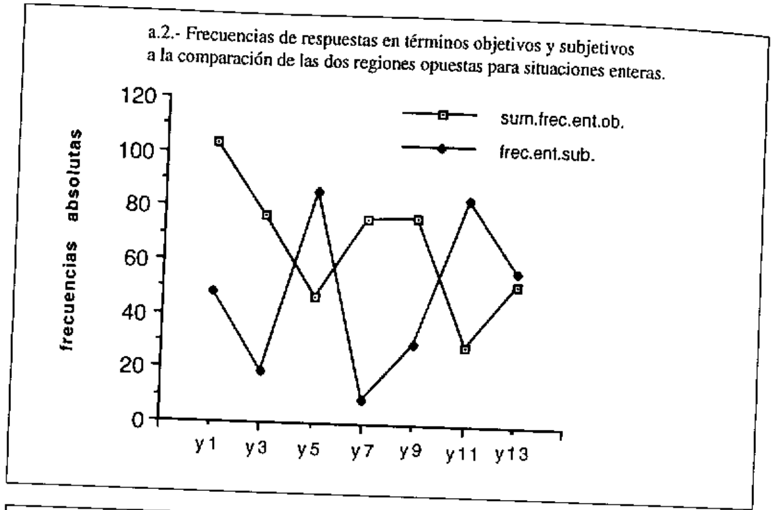
11.4.1.3. *Representaciones gráficas*

Los resultados y conclusiones generales que se han expuesto se completan con el estudio que abordamos a continuación. La orientación, los fines y los criterios utilizados son los mismos que para el resto de los cuestionarios, advirtiendo que vamos a hablar, indistintamente, de frecuencias relativas y de porcentajes, en los que se ha suprimido el factor multiplicativo.

Frecuencias absolutas.—La figura 11.15 representa, mediante diagramas poligonales, las frecuencias absolutas de los grupos de respuestas I y II a ambos tipos de situaciones. En ellas se aprecia claramente la regularidad existente en el caso de las situaciones relativas así como las alteraciones debidas a las situaciones enteras y_5, y_{11} e y_{13}. Es de destacar, por tanto, que los saldos bancarios y los balances económicos de signos opuestos se consideran independientes o no comparables, recibiendo el mismo tratamiento que las situaciones relativas[2].

En definitiva, todas las situaciones relativas son tratadas significativamente como tales, mientras que podemos establecer tres tipos de situaciones enteras: un primer tipo formado por las situaciones marcadamente enteras y_1, y_3, y_7 e y_9; un

[2] Esta conclusión, a la vista de los resultados del cuestionario a.1, es más clara en el caso de los balances económicos que en el caso de los saldos bancarios, en donde los términos empleados para esta situación en ambos cuestionarios pueden haber influido notablemente en los resultados.



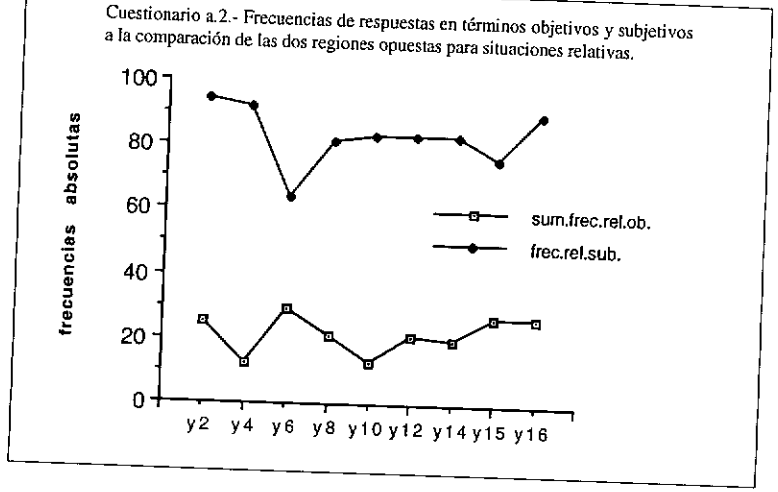


Figura 11.15

segundo tipo constituido por y_5 e y_{11}, que para los encuestados son relativas, y un tercer tipo formado por la situación y_{13}, correspondiente al juego del golf, en la que se vuelven a confirmar las sospechas, ya tratadas a propósito del cuestionario primero, de que estamos ante una situación especial por el desconocimiento de los mecanismos del juego y la coexistencia de los dos tipos de estructura.

Frecuencias relativas.—La figura 11.18 pone de manifiesto la distribución de respuestas de ambos tipos a cada uno de los dos grupos de situaciones y acentúa las diferencias en el sentido de las hipótesis de la investigación. Con respecto

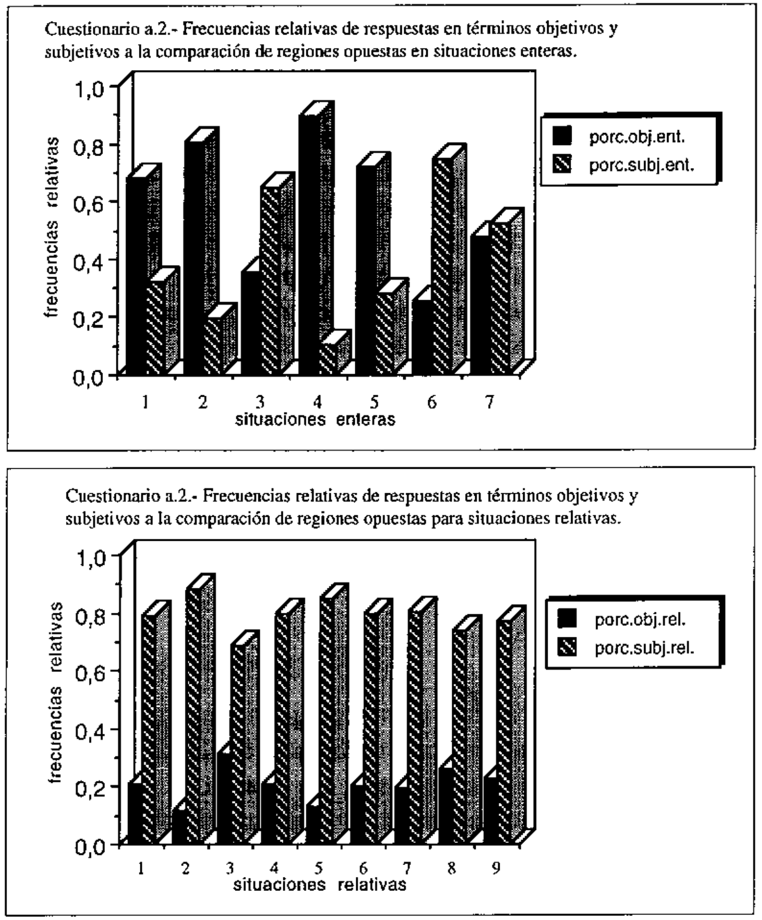


Figura 11.18

a las irregularidades debidas a las situaciones enteras y_5 e y_{11}, hemos de decir que el nivel de "objetividad" de ambas situaciones, aún encontrándose muy por debajo del de las demás situaciones enteras, está por encima del de todas las situaciones relativas en el primer caso y es muy alto, en comparación con este, para el segundo caso. Es decir, estamos ante dos situaciones que no son consideradas, a efectos de comparación global de regiones, como situaciones enteras, pero que tampoco alcanzan los niveles esperados para asegurar que sean consideradas como situaciones relativas. Las afirmaciones anteriores se confirman, por último, en los gráficos de las figuras 11.19 y 11.20.

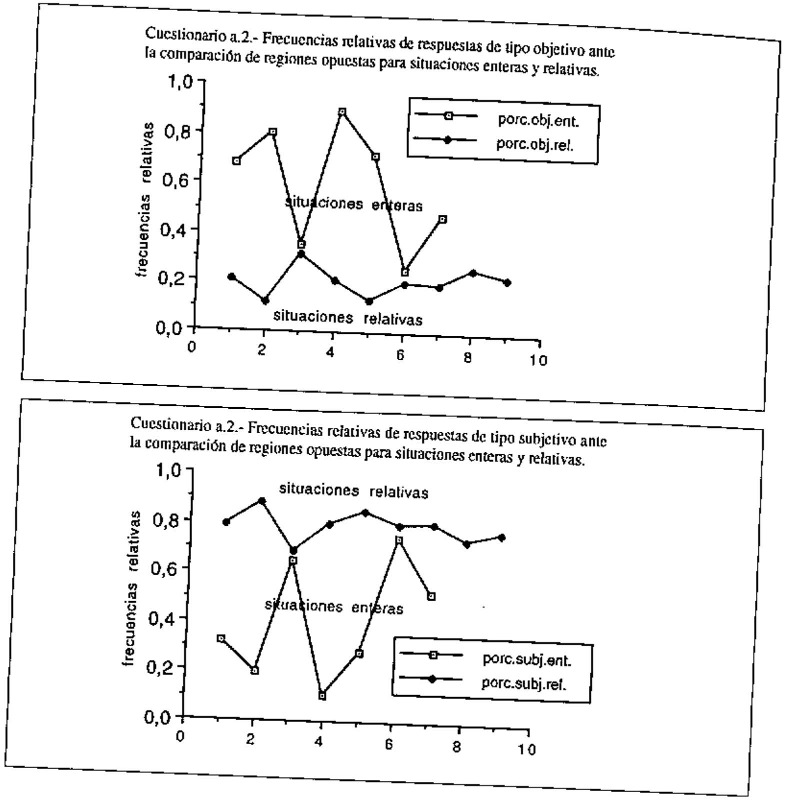


Figura 11.19

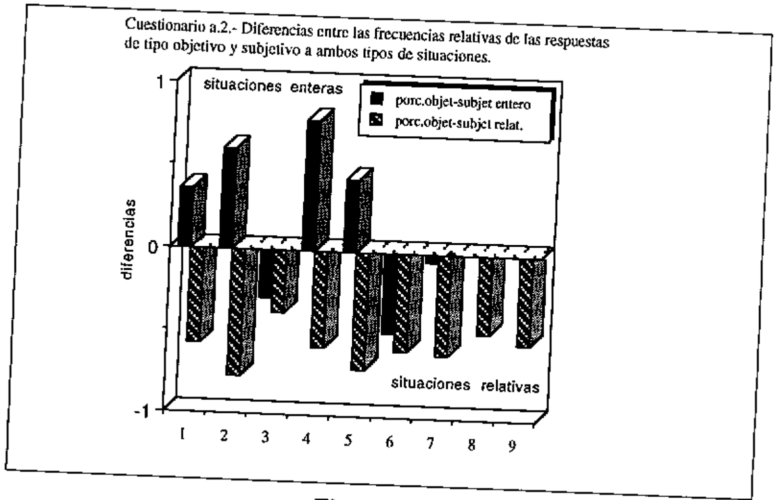


Figura 11.20

11.4.1.4. *Análisis de correspondencias*

Para simplificar el estudio y la interpretación de los resultados hemos agrupado las modalidades de la variable columna en tres categorías: en la *categoría 1* se engloban las respuestas de tipo I.a [los tres términos comparativos que indican superioridad en un orden total (mayor, superior, posterior)], en la *categoría 2* se incluyen las respuestas de tipo I.b [los tres términos comparativos que indican inferioridad en un orden total (menor, inferior, anterior)] y en la *categoría 3* las respuestas de tipo II [términos y frases de tipo subjetivo o que expresan relaciones de comparación en una estructura de orden parcial (mejor, más.., peor, menos.., depende del caso y siempre son independientes)]. Esta clasificación coincide con los tipos de respuestas esperadas y que aparecen sombreadas en la tabla 11.11.

Con los datos y cálculos correspondientes (González J. L., 1995, págs. 553-565) se obtiene el gráfico de la figura 11.21, de cuyo análisis se deducen las siguientes conclusiones:

a) El eje de la dimensión 1 separa las situaciones enteras (ordenadas positivas) de las situaciones relativas (ordenadas negativas). A su vez, las situaciones enteras se encuentran separadas por el eje de la dimensión 2, figurando con abcisas negativas las de mayor frecuencia de respuestas en el bloque 2 (inferioridad en un orden total) y con abcisas positivas las de mayor frecuencia de respuestas en el bloque 1 (superioridad en un orden total). Esta situación supone una cierta concordancia con los planteamientos teóricos, ya que si realizáramos la proyección sobre el eje de ordenadas, las situaciones enteras se encontrarían por encima de las relativas y, en su mayoría, en la zona de ordenadas positivas.

b) Según los datos que se deducen del estudio, existe oposición entre las respuestas de tipo 1 y de tipo 2, lo cual es lógico si tenemos en cuenta la oposición radical de ambos tipos de respuestas. En este sentido, es de destacar la homogeneidad de las respuestas a las situaciones y_1, y_3 e y_9, que se agrupan en torno a la categoría 1, en contraposición a la distribución de las situaciones enteras y_5, y_7, y_{11} e y_{13}, que se encuentran más dispersas en torno a la categoría 2. Creemos que existen dos motivos por los que esto sucede: por un lado, la fuerte contribución negativa de la situación y_7 hace que las distancias al punto 2 sean mayores; por otra parte, los resultados bajos de las situaciones y_5, y_{11} e y_{13} aumentan dichas distancias produciéndose una gran dispersión en el grupo. No olvidemos que y_5 e y_{11} presentan resultados muy cercanos a los típicos de las situaciones relativas, lo que se traduce en una distancia pequeña al punto 3.

c) De los puntos columna, el punto 3, en torno al que se sitúan todas las situaciones relativas, presenta una contribución especial (la mayor en valores relativos) a la inercia y a la situación del eje de la dimensión 2, pudiéndose afirmar

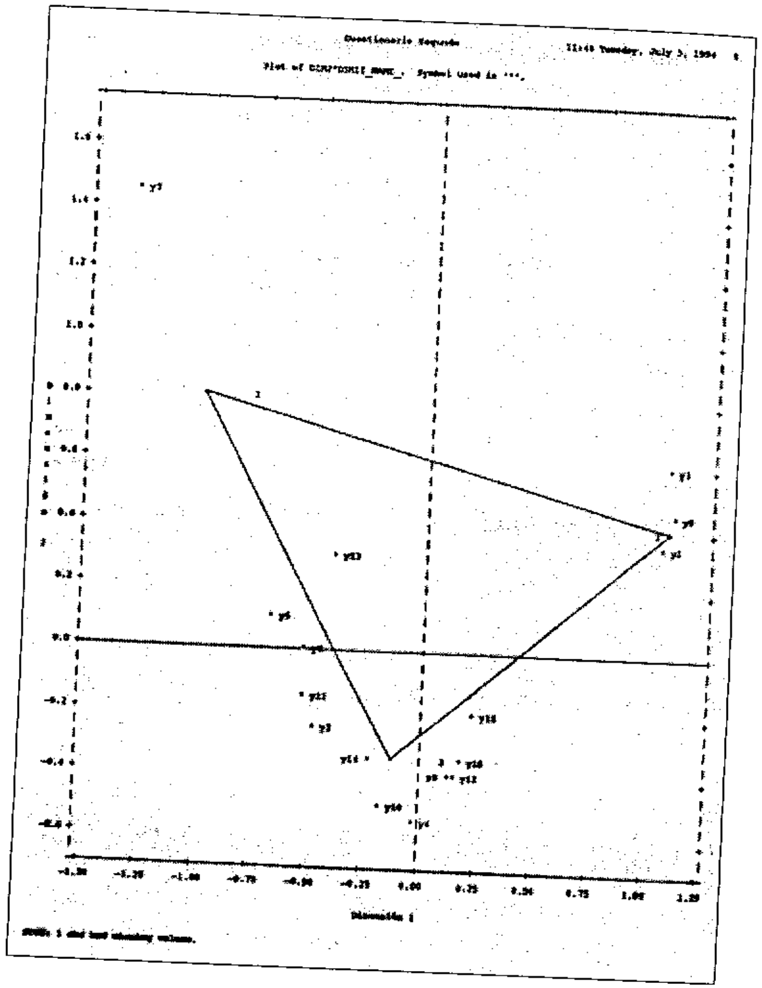


Figura 11.21

que existe oposición entre este punto y las situaciones que se agrupan en torno a él y los otros dos puntos y grupos respectivos.

d) En resumen, el análisis de correspondencias muestra que en la comparación global de regiones opuestas, en el caso de las situaciones relativas, se utilizan términos que, o bien niegan completamente la posibilidad de conexión entre las regiones ("siempre son independientes"), o bien hacen alusión a una relación ordinal netamente subjetiva y no generalizable a todos los casos ("mejor", "peor", etc.), o expresan una indeterminación que pone en duda la existencia de una relación de orden total. En todos los casos, las respuestas se adaptan a una estructura de orden parcial del tipo de la que posee el conjunto de los números naturales relativos, aún admitiendo la existencia de conexiones subjetivas y familiares que no resisten el más mínimo análisis lógico y de las que, una vez eliminadas las condiciones y características bajo las que se enuncian, no se puede afirmar que sean ciertas en todos los casos. No hemos de olvidar que a los sujetos se les ha pedido que respondan desde el mismo punto de vista particular que utilizan en sus experiencias cotidianas, en las que se manejan escalas ordinales objetivas y determinadas junto a escalas subjetivas y condicionadas por todo tipo de circunstancias.

11.4.2. *Cuestionario a.3: Comparación de pares de medidas con valores numéricos pertenecientes a la "región negativa"*

El tercer cuestionario, dedicado a la comparación de medidas pertenecientes a la "región negativa", presenta dos importantes novedades que lo diferencian de los dos anteriores. Por un lado, aparecen dos medidas a comparar en todas las situaciones propuestas, interviniendo los valores numéricos sencillos 1, 3, –1 y –3. Por otra parte, dado que en todos los casos las dos medidas que aparecen son comparables mediante la utilización de términos de los tipos I.a y I.b, estaremos interesados, fundamentalmente, en las respuestas dadas a los dos primeros bloques de la variable columna, a pesar de lo cual hemos querido mantener la estructura del cuestionario, en la seguridad, como se ha explicado en el capítulo anterior, de que este aspecto no iba a afectar sensiblemente a la interpretación de los resultados. No obstante, tendremos en cuenta esta circunstancia en la interpretación de los resultados del análisis de correspondencias.

En este cuestionario debemos esperar respuestas con términos comparativos opuestos, según que las situaciones sean enteras o relativas, para los mismos valores numéricos situados en el mismo orden en la frase, lo que confirmaría que los individuos encuestados tratan de forma diferente la comparación de medidas en la región negativa. Dicho de otro modo, la inversión en el orden en la región negativa, que teóricamente se da entre números naturales relativos y números enteros, se debe dar también, en el mismo sentido, en las respuestas de los sujetos a las comparaciones simples en ambos tipos de situaciones. Paralelamente, podríamos comprobar que el orden es el mismo en la región "positiva", pero hemos preferido centrar la atención en las diferencias y no complicar un cuestionario que ya resulta demasiado largo.

Antes de pasar a la exposición de los resultados del estudio descriptivo hemos de decir que, en la revisión posterior a la aplicación de la prueba, se observó que las situaciones z_{10} y z_{14} fueron consideradas inicialmente como enteras, cuando en realidad son relativas. El motivo de esta confusión, detectada por los encuestados al contestar de acuerdo a la clasificación rectificada, creemos que se encuentra en el hecho de que las dos situaciones se refieren a contextos que normalmente se utilizan como ejemplos de aplicación de los números enteros (variaciones de temperaturas y alturas sobre el nivel del mar). En ambos casos, pequeñas variaciones en los enunciados introducen matices específicos que convierten las situaciones en relativas. Así, la inclusión del término "con respecto a" convierte en relativa a una situación que sería entera de estar redactada de otra manera. Del mismo modo, una variación de temperatura de –1 grado es una transformación, con lo que estamos ante una situación netamente relativa.

11.4.2.1. *Tablas de frecuencias*

Las tablas 11.22 y 11.23 recogen las frecuencias absolutas y los cálculos efectuados, figurando sombreadas las zonas que, en teoría, deben aparecer con una frecuencia superior.

Como se puede observar directamente, los resultados son los esperados, existiendo grandes diferencias en cuanto al número de respuestas de los dos tipos en la mayoría de las situaciones. Únicamente se produce un cambio con respecto a las expectativas en la situación z_{16}, relativa al juego del golf, el cual, como veremos, está perfectamente justificado sin alterar el sentido de las hipótesis de la investigación. Dicho cambio, que se refleja en la tabla 11.22 en la que aparece sombreada la zona I.a, no se ha tenido en cuenta en los cálculos posteriores ni en las representaciones gráficas, lo que provoca una alteración importante en todos los casos en los que aparece esta situación. La explicación de esta anomalía se basa en que las puntuaciones de golf, a pesar de acomodarse a la estructura de los números enteros, se valoran en sentido inverso al usual para la estructura de orden total de dichos números: los valores negativos se consideran superiores (en el sentido de mejores) a los positivos, lo que produce la inversión que hemos señalado y que se refleja claramente en todos los resultados. Este hecho aconseja clasificar dicha situación en el grupo de situaciones enteras que hemos simbolizado mediante el par $(Z, <)$ y no en el grupo $(Z, >)$ como figura en los gráficos, lo que explica sobradamente la inversión que se observa en la tendencia de las respuestas.

Por último, queremos llamar la atención sobre el bajo nivel de frecuencias de respuestas al bloque tercero en comparación con los cuestionarios anteriores, a pesar de lo cual sigue siendo importante la tendencia a la utilización de este tipo de términos imprecisos y subjetivos, quizás debido a su uso extendido en situaciones cotidianas y familiares.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	a.3	Mayor	Superior	Posterior	SUMA	Menor	Inferior	Anterior	SUMA	Mejor	Más	Peor	Menos	Depende	Indepen	SUMA	S. Total
2	z_1	1	2	0	**3**	35	13	0	**48**	58	1	6	10	8	0	**83**	134
3	z_2	36	44	1	**81**	9	2	0	**11**	19	11	6	4	8	2	**50**	142
4	z_3	43	13	1	**57**	2	7	0	**9**	2	15	2	1	16	14	**50**	116
5	z_4	12	5	6	**23**	4	5	44	**53**	0	8	0	3	4	4	**19**	95
6	z_5	0	0	1	**1**	40	16	2	**58**	12	0	6	13	20	4	**55**	114
7	z_6	25	18	0	**43**	12	8	2	**22**	45	4	6	3	3	1	**62**	127
8	z_7	16	8	0	**24**	4	7	2	**13**	6	16	47	10	5	0	**84**	121
9	z_8	0	1	4	**5**	6	4	63	**73**	0	4	0	1	0	2	**7**	85
10	z_9	2	1	0	**3**	35	13	1	**49**	8	2	2	13	22	6	**53**	105
11	z_{10}	2	23	1	**26**	37	13	2	**52**	2	0	2	11	5	3	**23**	101
12	z_{11}	41	14	0	**55**	1	0	0	**1**	13	18	3	4	23	4	**65**	121
13	z_{12}	12	3	0	**15**	11	24	0	**35**	3	2	48	4	2	1	**60**	110
14	z_{13}	1	3	0	**4**	39	18	1	**58**	10	1	3	15	11	9	**49**	111
15	z_{14}	11	14	1	**26**	29	14	2	**45**	9	7	2	6	13	0	**37**	108
16	z_{15}	31	16	0	**47**	1	0	0	**1**	6	15	23	2	19	4	**69**	117
17	z_{16}	17	14	2	**33**	3	7	1	**11**	32	6	15	1	5	2	**61**	105

Tabla 11.22

a. 3. R <

	$R<$	frec. $a<b$	frec. $a<b$	suma 3	por. $R<$ sup	por. $R<$ inf.
1	z_1	3,000	48,000	51,000	0,059	0,941
2	z_5	1,000	58,000	59,000	0,017	0,983
3	z_9	3,000	49,000	52,000	0,058	0,942
4	z_{10}	26,000	52,000	78,000	0,333	0,667
5	z_{13}	4,000	58,000	62,000	0,065	0,935
6	z_{14}	26,000	45,000	71,000	0,366	0,634

a. 3. R >

	$R>$	frec. $a>b$ rel(s)	frec. $a>b$ rel(i)	suma 4	por. $R>$ sup.	por. $R>$ inf.
1	z_3	57,000	9,000	66,000	0,864	0,136
2	z_7	24,000	13,000	37,000	0,649	0,351
3	z_{11}	55,000	1,000	56,000	0,982	0,018
4	z_{15}	47,000	1,000	48,000	0,979	0,021

a. 3. tabla Z >

	$Z>$	frec. $a>b$ ent(s)	frec. $a>b$ ent(i)	suma 2	por. $Z>$ sup.	por. $Z>$ inf.
1	z_4	23,000	53,000	76,000	0,303	0,697
2	z_8	5,000	73,000	78,000	0,064	0,936
3	z_{12}	15,000	35,000	50,000	0,300	0,700
4	z_{16}	33,000	11,000	44,000	0,750	0,250

a. 3. tabla Z <

	$Z<$	frec. $a<b$ ent(sup)	frec. $a<b$	suma 1	por. $Z<$ sup.	por. $Z<$ inf.
1	z_2	81	11	92	0,880	0,120
2	z_6	43	220	65	0,662	0,338

a. 3. tabla Z < R > tabla

	$(Z<)(R>)$	$(Z<)(R>)$ sup.	$(Z<)(R>)$ inf.	suma 1	porc. $(Z<)(R>)$	porc. $(Z<)(R>)$
1	z_2	81,000	11,000	92,000	0,880	0,120
2	z_3	57,000	9,000	66,000	0,864	0,136
3	z_6	43,000	22,000	65,000	0,662	0,338
4	z_7	24,000	13,000	37,000	0,649	0,351
5	z_{11}	55,000	1,000	56,000	0,982	0,018
6	z_{15}	47,000	1,000	48,000	0,979	0,021

a. 3. tabla Z > R < tabla

	$(Z>)(R<)$	$(Z>)(R<)$ sup.	$(Z>)(R<)$ inf.	suma 2	porc. $(Z>)(R<)$	porc. $(Z>)(R<)$
1	z_1	3,000	48,000	51,000	0,059	0,941
2	z_4	23,000	53,000	76,000	0,303	0,697
3	z_5	1,000	58,000	59,000	0,017	0,983
4	z_8	5,000	73,000	78,000	0,064	0,936
5	z_9	3,000	49,000	52,000	0,058	0,942
6	z_{10}	26,000	52,000	78,000	0,333	0,667
7	z_{12}	15,000	35,000	50,000	0,300	0,700
8	z_{13}	4,000	58,000	62,000	0,065	0,935
9	z_{14}	26,000	45,000	71,000	0,366	0,634
10	z_{16}	33,000	11,000	44,000	0,750	0,250

Tablas 11.23

11.4.2.2. *Medidas centrales y de dispersión*

La clasificación de las respuestas a las situaciones presentadas en este cuestionario y en el siguiente (a4) tiene en cuenta tres elementos diferentes, que codificamos como sigue:

— Designaremos por Z y R las situaciones enteras y relativas, respectivamente.

— Utilizaremos los símbolos "<" y ">" para especificar el orden de los valores absolutos de los números que, en el sentido de la lectura, intervienen en el enunciado de las situaciones. Así, "<" quiere decir que la comparación es de una medida con valor numérico absoluto 1 (comparado) con respecto a una medida con valor numérico absoluto 3 (referente).

— Las palabras "superior" e "inferior" se refieren al grupo de respuestas del tipo I.a y del tipo I.b, respectivamente.

Con este convenio, llamaremos "$Z >$ superior", por ejemplo, a las respuestas dadas en las tres primeras modalidades de la variable columna a las situaciones enteras en las que se compara una medida cuyo valor numérico es –3 con otra medida de la misma naturaleza cuyo valor numérico es –1. Igualmente, utilizaremos una notación combinada para agrupar, en una sola categoría, aquéllas situaciones que, en función de los planteamientos teóricos, tienen el mismo tratamiento. Así, "$Z > R <$ superior" representa las respuestas para las situaciones enteras y relativas cuyos valores numéricos, en sentido absoluto, presentan dichas relaciones.

Las tablas 11.24 recogen los datos y cálculos realizados para hallar las medias aritméticas y las desviaciones típicas de los diferentes grupos de situaciones y respuestas. En la primera de ellas aparecen los datos de los cuatro grupos formados por los dos tipos de situaciones "$Z > R <$" y "$Z < R >$" combinados con los dos tipos de respuestas posibles (de tipo superior e inferior). En la segunda tabla se ha efectuado la separación de los cuatro grupos anteriores en los ocho que resultan de separar las situaciones enteras y relativas. En las dos tablas figuran, en la última fila y por este orden, las medias aritméticas de cada grupo, en el mismo orden en que aparecen en las representaciones gráficas, y las desviaciones típicas correspondientes.

En las figuras 11.25 (I y II) se representan los intervalos de centro las medias aritméticas y de amplitud doble de una desviación típica para cada uno de los grupos. De los datos y de las representaciones gráficas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

a) En lo que se refiere a los dos grupos mixtos, se observa claramente que existen diferencias notables entre los intervalos correspondientes de las medias de las respuestas de ambos tipos. Así, las respuestas de tipo "superior" se dan con

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	3	48	81	11	77,0493827	18,7777778	1051,61224	1,65306122
2	23	53	57	9	125,938272	0,44444444	71,0408163	0,51020408
3	1	58	43	22	116,160494	32,1111111	31,0408163	150,938776
4	5	73	24	13	45,9382716	427,111111	603,755102	10,7959184
5	3	49	55	1	77,0493827	11,1111111	41,3265306	75,9387755
6	26	52	47	1	202,271605	0,11111111	2,46938776	75,9387755
7	15	35	33	11	10,382716	300,444444	242,469388	1,65306122
8	4	58			60,4938272	32,1111111		
9	26	45			202,271605	53,7777778		
10								
11	106	471	340	68				
12	11,7778	52,3333	48,5714	9,71429	10,0970598	9,86576572	17,0868132	6,73401357

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	81	11	23	53	3	48	57	9	822	13,4	75,1	0,44	56,3	13,4	127	9
2	43	22	5	73	1	58	24	13	87,1	53,8	87,1	374	90,3	40,1	473	49
3	33	11	15	35	3	49	55	1	374	13,4	0,44	348	56,3	7,11	85,6	25
4			26	52	47	1							240	0,11	1,56	25
5			4	58									42,3	40,1		
6			26	45									240	44,4		
7																
8																
9																
10																
11	157	44	43	161	63	310	183	24								
12	52,3	14,7	14,3	53,7	11	52	46	6	20,7	5,19	7,36	15,5	11	4,92	13,1	5,2

Tablas 11.24

mucha mayor frecuencia en las situaciones "$Z < R >$" que en las situaciones "$Z > R <$", mientras que las respuestas de tipo "inferior" se dan mayoritariamente, con una gran diferencia, en las situaciones "$Z > R <$". En ambos casos, creemos que las diferencias pueden ser altamente significativas ante cualquier contraste.

b) En las respuestas de tipo "superior" al grupo de situaciones "$Z < R >$", se da una mayor heterogeneidad que en las otras tres, debido a la presencia en dicho grupo de las situaciones más "conflictivas", como veremos a propósito de las representaciones gráficas.

c) El tratamiento que recibe la comparación de situaciones enteras y relativas con inversión del orden en sus valores numéricos es, en promedio, el mismo.

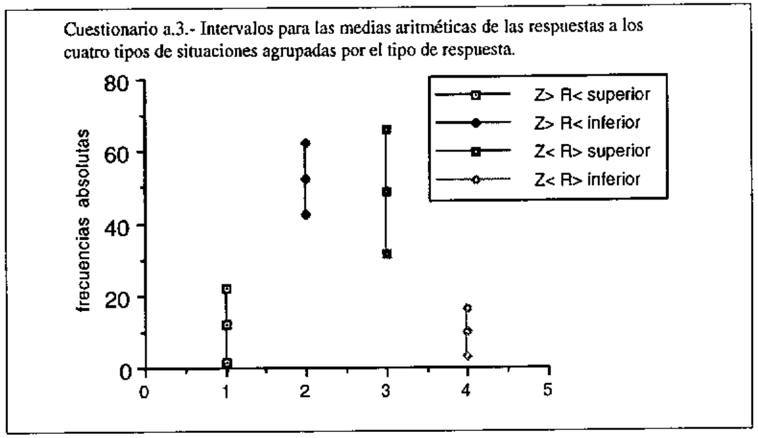


Figura 11.25 (I)

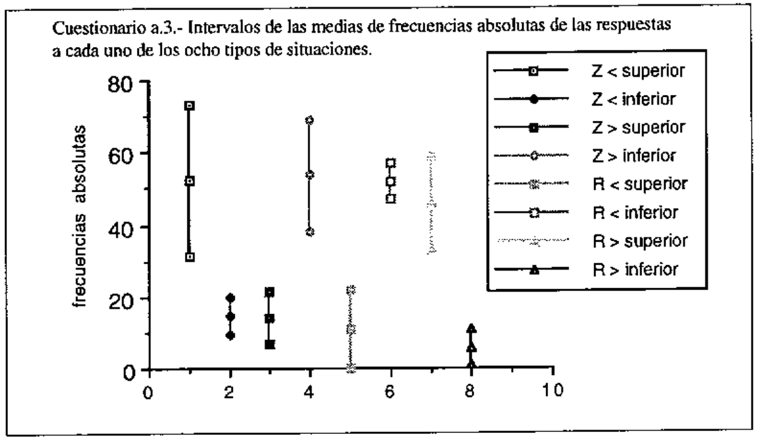


Figura 11.25 (II)

Esto nos permite asegurar que existen indicios razonables para afirmar que los sujetos consideran el orden en la región negativa para situaciones enteras, justo el inverso al que corresponde a las situaciones relativas.

d) En el gráfico relativo a los ocho grupos de respuestas se aprecia la inversión señalada: la disposición de los cuatro primeros intervalos (dos en la zona de frecuencias altas y dos en la zona de frecuencias bajas) es justamente la opuesta de la de los cuatro últimos intervalos.

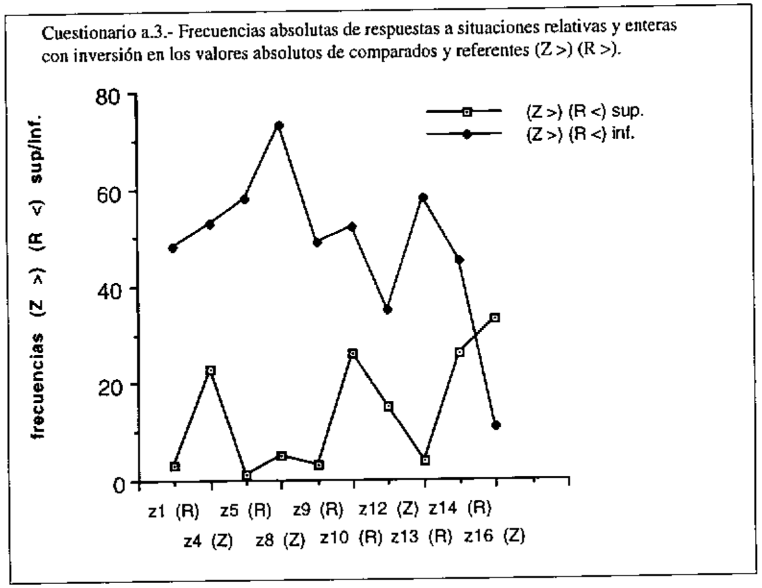
e) Se dan cuatro tipos de situaciones cuyas medias aritméticas se encuentran entre 45 y 55, mientras que los cuatro tipos restantes tienen medias comprendidas entre 6 y 15. Se puede afirmar, por tanto, que las respuestas a los ocho grupos de situaciones las clasifican en dos grandes grupos relativamente homogéneos: por un lado, las situaciones "$Z <$ y $R >$" y, por otro, las situaciones "$Z >$ y $R <$", tal y como habíamos previsto. Por otra parte, como se observa en los datos y en el gráfico de la figura 11.27, se dan grandes diferencias entre las respuestas a las situaciones $Z <$ y $Z >$, por un lado, y las respuestas $R >$ y $R <$, por otro.

11.4.2.3. *Representaciones gráficas*

En las páginas que siguen se incluyen varios tipos de representaciones gráficas, que ponen de manifiesto las regularidades encontradas en las respuestas al cuestionario a.3. Como ya hemos explicado, tan sólo se produce una divergencia con lo esperado en el caso de la situación z_{16}, cuyos datos se incluyeron en la categoría contraria a la que realmente pertenece. Se trata de una situación entera cuyo dominio se ajusta a una estructura de orden total, pero en la que el sentido de dicho orden es justamente el opuesto al usual. Esta circunstancia, así como el carácter especial del cuestionario, en el que se analizan comparaciones dentro de la región "negativa", obliga a incluir dicha situación, a efectos del mencionado análisis, en el grupo ($Z <$), con cuyas situaciones tiene en común el sentido del orden entre los elementos a comparar.

La figura 11.26 representa las frecuencias absolutas de las situaciones enteras y relativas con valores absolutos opuestos para comparados y referentes, agrupadas así en función de las expectativas teóricas. Como se observa claramente, salvo la situación z_{16} ya mencionada y la situación z_7, respondida mayoritariamente en la zona de términos subjetivos, los resultados son los esperados. Por un lado, se mueven en bandas relativamente homogéneas para cada par de situaciones opuestas ($Z <$, $R >$ y $Z >$, $R <$) y, por otro, las respuestas de tipo "superior" e "inferior" alternan sus valores entre altos y bajos en función de los tipos de situaciones.

La figura 11.27, en la que se han agrupado en un sólo gráfico las cuatro poligonales opuestas dos a dos para su mejor comparación, refleja las frecuencias relativas de los cuatro tipos básicos de situaciones. En la figura 11.29 se han separado las situaciones enteras y relativas, observándose, con excepción de la inversión que se produce en el caso de la situación entera z_{16}, las tendencias a las respuestas de cada tipo en función de la estructura ordinal y de las características y posición de los comparados y referentes en cada caso.



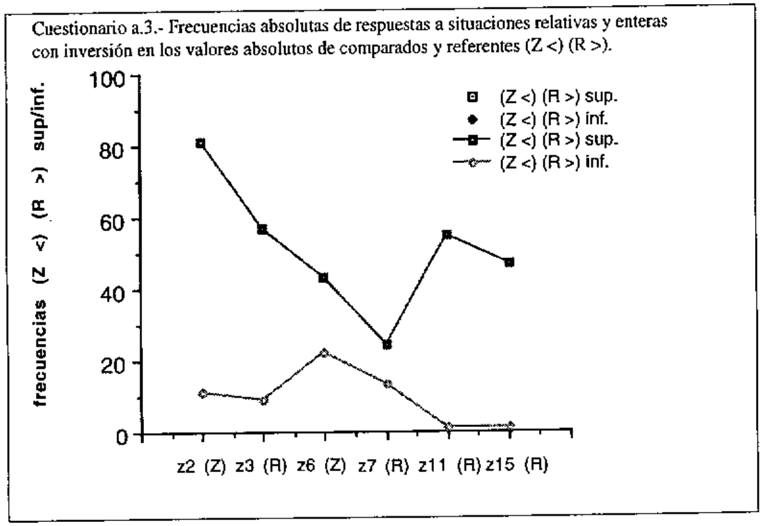


Figura 11.26

Además de las observaciones realizadas, podemos añadir las siguientes conclusiones:

— Los porcentajes para los dos tipos de respuestas se mueven, en todos los casos, en las dos bandas en torno al 80 % y al 20 %; resultados que son satisfactorios y significativos.

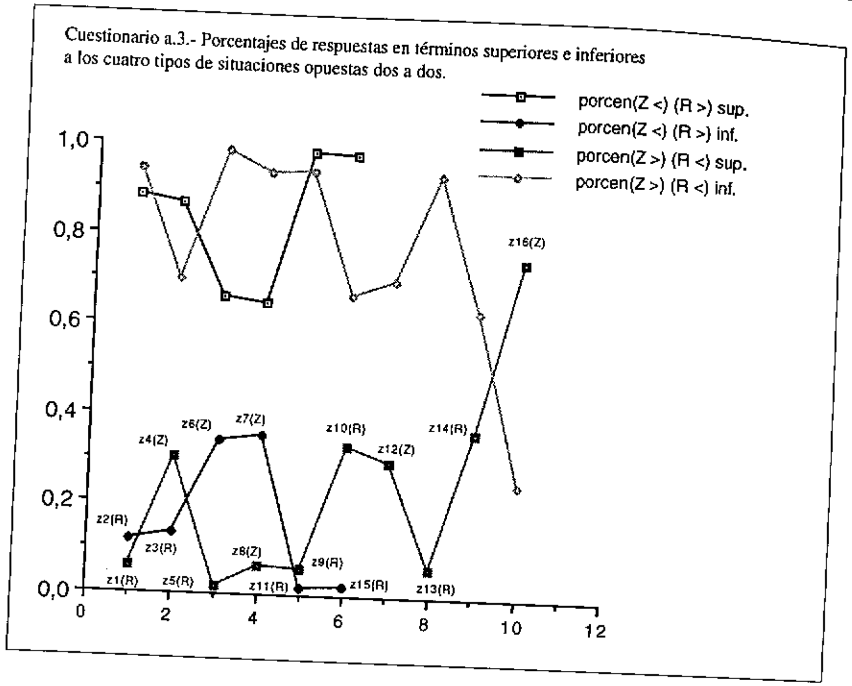


Figura 11.27

— De las seis situaciones relativas del tipo "$R <$", las cuatro introducidas originalmente (z_1, z_5, z_9 y z_{13}) presentan diferencias muy acentuadas en el sentido previsto. Por el contrario, las dos restantes (z_{10} y z_{14}), en las que se cometió el error de clasificación, presentan diferencias también en el sentido esperado, pero menos acentuadas que en los casos anteriores.

— De las cuatro situaciones relativas del tipo "$R >$", z_3, z_{11} y z_{15} presentan también diferencias muy acentuadas en el sentido opuesto al de las anteriores. Sin embargo, en la situación z_7, que se refiere a "faltar y sobrar caramelos", dichas diferencias son menores, aunque, como siempre, en el sentido esperado. La explicación, en este caso, hemos de buscarla en las respuestas al bloque 3, no considerado en el análisis. En efecto, esta situación tiene un alto número de respuestas en dicho bloque, en detrimento de las frecuencias absolutas de las respuestas de tipo I.a y I.b., lo que puede haber dado lugar al sesgo mencionado.

— En lo que respecta a las situaciones enteras se observa que, dentro de la regularidad existente, las situaciones z_6 (saldos bancarios) y z_{12} (balances económicos) siguen dando resultados que se apartan un poco de la tónica general para dicho tipo de situaciones.

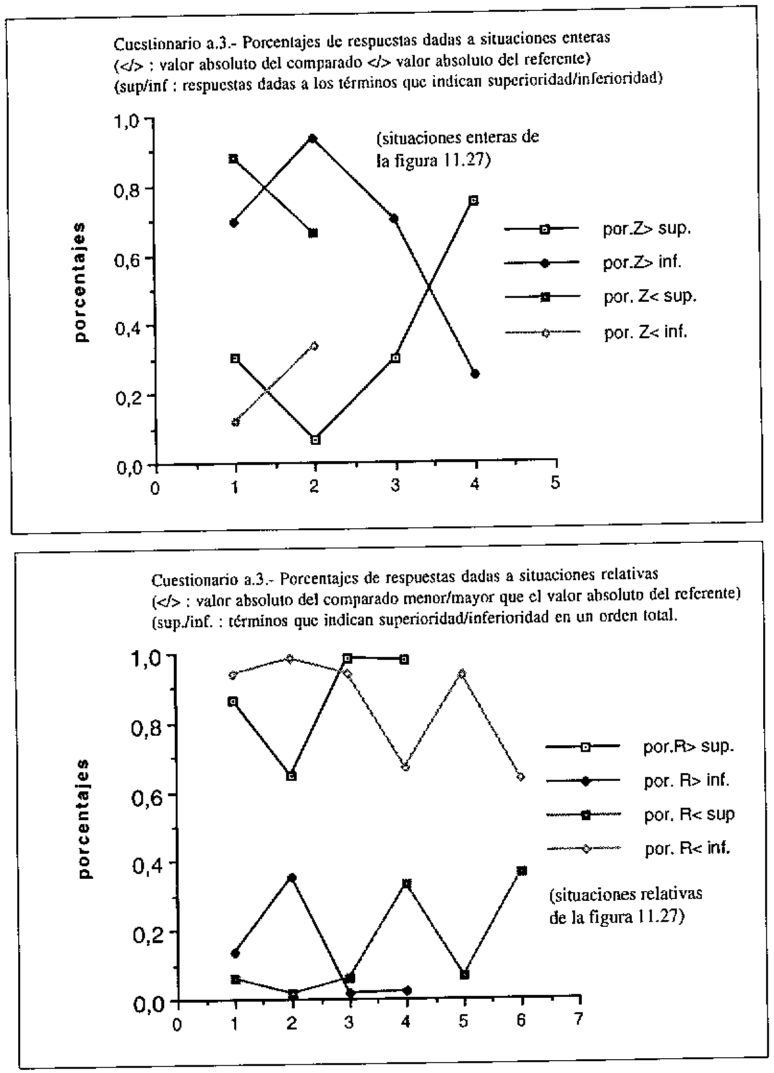


Figura 11.29

11.4.2.4. *Análisis de correspondencias*

Se ha realizado un análisis de correspondencias agrupando los datos originales en una tabla de contingencia formada por 16 filas y tres columnas (González, J. L. 1995, págs. 561-563), correspondiendo éstas a los tres grupos de respuestas ya mencionados en apartados anteriores: bajo el epígrafe "1" se agrupan las res-

puestas del tipo I.a o "superior", bajo el epígrafe "2" se agrupan las respuestas del tipo I.b o "inferior" y bajo el epígrafe "3", las respuestas a las seis modalidades restantes de la variable columna.

Al mismo tiempo se ha realizado un segundo análisis de correspondencias, en el que se utilizan por separado las 12 modalidades de respuesta de la variable columna. Con ello se pretende completar la interpretación de los datos obtenidos con el primer estudio, en el que van a influir valores que no nos interesan como son los correspondientes a la categoría 3, mediante un segundo análisis de la estructura de relaciones existente entre los primeros seis tipos de respuesta por separado.

El gráfico de la figura 11.30, que corresponde al primer estudio, muestra la distribución de los puntos sobre el plano de coordenadas y las contribuciones de las diferentes categorías en términos de distancias a los ejes y de distancias relativas entre ellas. La situación del eje de la dimensión 1 viene determinada por la mayor contribución de la categoría 2, mientras que la posición del eje de la dimensión 2 se encuentra influenciada por los valores de las categorías 1 y 3. El gráfico de la figura 11.31, que corresponde al estudio separado de las doce modalidades de la variable columna y en el que se han marcado los seis tipos de respuesta correspondientes a los grupos I.a y I.b, numerados desde el 1 hasta el 6, muestra la distribución de las 16 categorías de fila y de las 12 categorías columna. Según los datos, la proyección sobre los dos ejes principales de inercia aporta información sobre el 65% de la estructura real de relaciones, lo cual es suficiente para apreciar la separación existente entre el grupo de situaciones que se encuentran en el área de influencias de los tres primeros tipos de respuestas (1, 2 y 3) y el grupo de las que se sitúan en torno a los tres tipos restantes (4, 5 y 6).

En la figura 11.30 se comprueba que todas las situaciones de los grupos "$R <$" y "$Z >$", cuyas respuestas esperadas deben ser del tipo 2 y todas ellas con el valor del comparado menor que el del referente (z_1, z_5, z_9, z_{10}, z_{13} y z_{14}), y las situaciones enteras z_4, z_8 y z_{12}, con valores -3 y -1 para comparados y referentes, respectivamente, se encuentran a la izquierda del eje de la dimensión 2, es decir, en la zona de valores negativos para la dimensión 1, en la que también se sitúa el punto 2 correspondiente a las respuestas de tipo "inferior". La distribución de dichas situaciones, desde ordenadas extremas negativas, como es el caso de z_1, hasta ordenadas extremas positivas, como ocurre con z_8, se debe a la influencia de los valores obtenidos para las respuestas de tipo 3, que presentan la mayor contribución parcial de los puntos columna a la inercia de la dimensión 2.

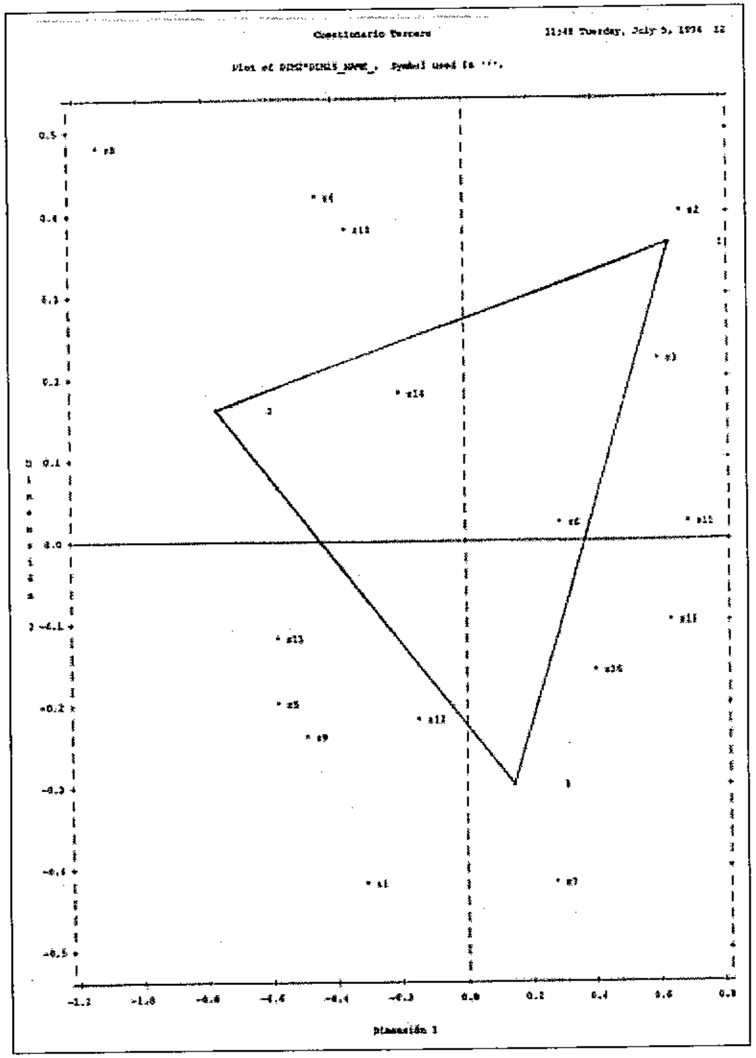


Figura 11.30

De otra parte, con una separación significativa con respecto a las anteriores, se encuentran, en la banda de abcisas positivas y distribuidas desde la ordenada negativa extrema de z_7 (con el mayor valor para las respuestas de tipo 3) hasta la ordenada positiva extrema de z_2, todas las situaciones que teóricamente deben tener sus respuestas en el grupo 1 o "superior"; se trata de las situaciones de los

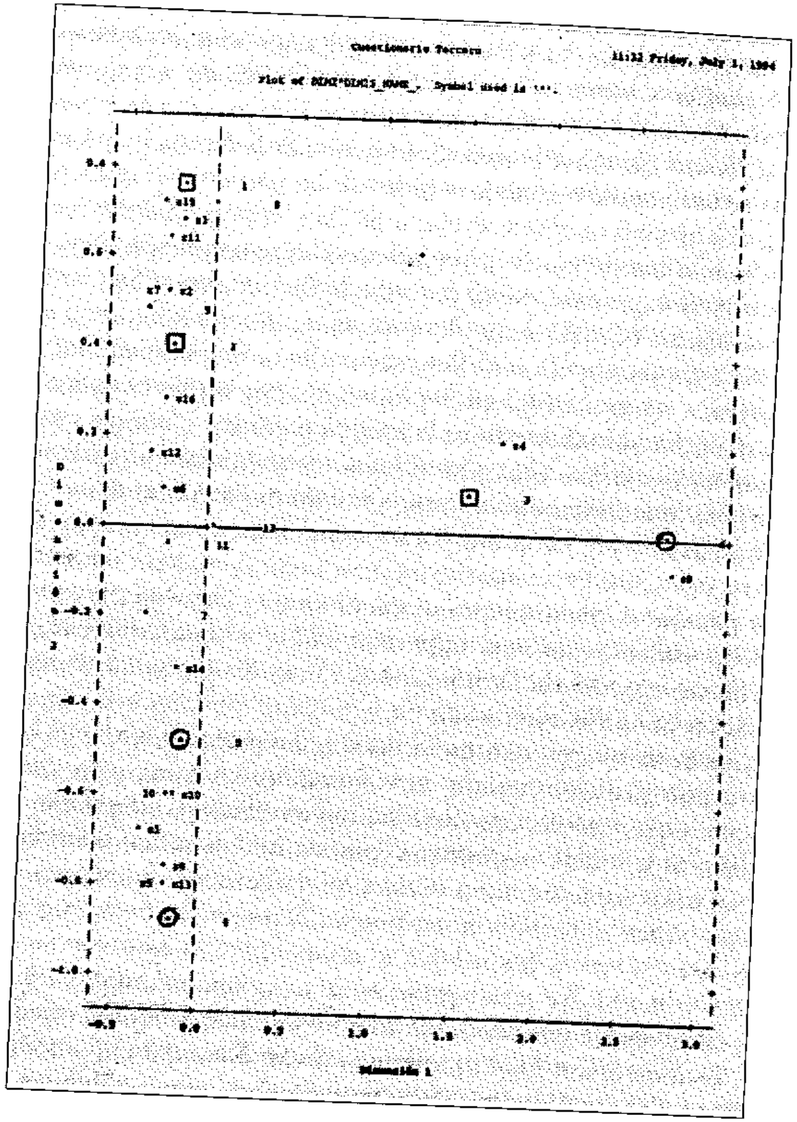


Figura 11.31

grupos "$R >$" y "$Z <$", incluida la situación z_{16}, en la que la inversión del orden usual es detectada perfectamente por los encuestados, que la sitúan en el grupo "$Z <$"; en concreto, se trata de las situaciones relativas con valores del comparado mayores que los del referente (z_3, z_7, z_{11} y z_{15}) y las situaciones enteras con valores numéricos de -1 y -3 para comparados y referentes respectivamente (z_2 y z_6)

además de la mencionada situación especial z_{16}. Todas ellas se encuentran en posiciones opuestas al punto 2 y en una banda opuesta también a la que ocupa la serie de situaciones más cercanas a dicho punto.

La influencia que ejerce el punto 3, en el sentido de separar los puntos en la dirección vertical dependiendo de la magnitud de las respuestas en este tercer bloque, se podría eliminar parcialmente obteniendo la proyección de todos los puntos sobre el eje de la dimensión 1, lo que proporcionaría una imagen más clara, aunque más reducida, de la posición opuesta de los dos bloques de situaciones contrarias.

En la figura 11.31 destacamos los seis puntos que nos interesan y que corresponden a las tres respuestas de tipo "superior" y a las tres de tipo "inferior". Como se puede observar fácilmente, las situaciones con respuestas de tipo "superior" se sitúan, mayoritariamente, en la zona de ordenadas positivas, en torno a los puntos 1 y 2, mientras que las situaciones con respuestas previsibles de tipo "inferior" se sitúan, mayoritariamente, en la zona de ordenadas negativas y en torno a los puntos 4 y 5. Los puntos 3 y 6 se encuentran separados de los anteriores bajo las influencias importantes de las situaciones z_4 y z_8 respectivamente. Esto no es de extrañar, si tenemos en cuenta que el mayor número de respuestas a los términos "posterior" y "anterior" se produce en dichas situaciones, con grandes diferencias con respecto a las demás (6-44, 4-63), en las que los valores normales para dichos tipos oscilan entre 0 y 2.

Podemos concluir, por tanto, que se detectan dos grupos separados de situaciones que se distinguen por el volumen de respuestas dadas a los dos grupos de términos opuestos y que se pueden considerar opuestos en cuanto a la comparación de medidas dentro de la "región negativa". En cada uno de ellos se encuentran todas las situaciones en las que teóricamente se esperaba el mismo tipo de respuesta. Por último, es de destacar, si bien con ciertas reservas, el menor número de respuestas de tipo 3 en relación con las de tipo 1 y 2, en comparación con las producidas en los anteriores cuestionarios; creemos que esto denota una mayor seguridad de los sujetos ante este grupo de situaciones que incluyen medidas claramente comparables entre sí. También en este caso, aunque en menor medida que en los anteriores, se da una tendencia a la utilización de los términos subjetivos de comparación.

11.4.3. *Cuestionario a.4: Comparación de pares de medidas con valores numéricos pertenecientes a regiones opuestas*

Con el cuestionario anterior se ha puesto de manifiesto que la inversión en el sentido del orden, establecida teóricamente, entre pares de medidas con valores numéricos diferentes pertenecientes a la región "negativa" para situaciones

enteras y relativas, también se produce, en los mismos términos, en las respuestas de los sujetos, es decir, dicha inversión no sólo es una diferencia formal o teórica entre los números o las medidas enteras y los números o las medidas relativas, sino que también es una diferencia cognitiva que se manifiesta en los comportamientos y en las respuestas de los sujetos ante experiencias y situaciones de comparación aditiva.

El cuestionario cuyos resultados vamos a analizar en este apartado es una reiteración del cuestionario a.2, aunque con la intervención añadida de valores numéricos. Se trata, por tanto, de comparaciones de pares de medidas cuyos valores numéricos pertenecen a regiones opuestas. Con ello se pretende, por un lado, confirmar que el sentido global de las respuestas es el mismo que el detectado en el cuestionario a.2 y, por otro, averiguar si la introducción de valores numéricos diferentes, que son además los mismos que los utilizados en el cuestionario a3 (1, –1, 3 y –3), modifica la tendencia observada en las respuestas al cuestionario a.2, o si, por el contrario, dicha introducción no produce una alteración regular y definida en los resultados.

En este cuestionario se espera que los sujetos detecten el orden total, en términos de relaciones precisas, en el caso de la comparación de medidas con valores enteros, eligiendo términos del bloque I.a o I.b dependiendo de los comparados y referentes (tres para el bloque I.a o "superior" y tres para el bloque I.b o "inferior"). Al mismo tiempo, se espera confirmar que el funcionamiento cognitivo se ajusta a una estructura de orden parcial, en términos de relaciones imprecisas o de ausencia de relaciones, para el caso específico de la comparación de medidas opuestas con valores numéricos relativos, lo que se detecta mediante respuestas al bloque II con independencia de los valores numéricos o de la situación de comparados y referentes.

Al igual que ha ocurrido en las pruebas anteriores, la situación t_{14}[3], que se refiere a variaciones de temperaturas, se incluyó originalmente como situación entera, modificándose posteriormente su clasificación. Por otra parte, la situación t_{16} ha tenido que ser suprimida del análisis de resultados, al observarse, una vez corregidas las pruebas, una errata de impresión en una buena parte de los cuestionarios, consistente en la aparición de un signo menos en el valor numérico del referente, lo que modifica los resultados globales y aconseja su supresión[4].

[3] Hemos notado las situaciones de este cuestionario mediante la letra *t*, seguida, como es usual, de un número que indica el orden de las situaciones en la distribución por filas.

[4] Aproximadamente un 40 % de los cuestionarios incluidos en el estudio están equivocados en este sentido, lo que afecta de manera significativa a las respuestas, que son de signo contrario ("superior") a las que corresponden a la situación correctamente enunciada y que figura igualmente en el 60 % restante.

Frecuencias absolutas cuestionario a.4. Comparación de valores numéricos de diferente signo o región

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	**a.4**	Mayor	Superior	Posterior	SUMA	Menor	Inferior	Anterior	SUMA	Mejor	Más	Peor	Menos	Depende	Indepen.	SUMA	SUMA TOTAL
2	t_1	4	4	0	**8**	15	13	0	**28**	13	4	6	12	28	10	**73**	**109**
3	t_2	49	38	0	**87**	0	1	0	**1**	52	13	3	0	1	1	**70**	**158**
4	t_3	8	8	0	**16**	2	0	1	**3**	61	14	3	1	5	0	**84**	**103**
5	t_4	1	1	5	**7**	3	1	63	**67**	1	1	1	1	0	2	**6**	**80**
6	t_5	9	2	1	**12**	2	12	1	**15**	3	5	62	0	3	0	**73**	**100**
7	t_6	31	48	0	**79**	5	1	0	**6**	22	5	2	2	9	1	**41**	**126**
8	t_7	18	20	0	**38**	0	1	0	**1**	3	10	2	0	26	11	**52**	**91**
9	t_8	1	1	2	**4**	2	6	68	**76**	0	1	1	3	4	1	**10**	**90**
10	t_9	2	0	3	**5**	16	12	1	**29**	8	1	2	8	30	10	**59**	**93**
11	t_{10}	22	53	0	**75**	0	2	0	**2**	1	10	1	0	10	4	**26**	**103**
12	t_{11}	12	11	0	**23**	7	3	2	**12**	45	7	11	4	8	1	**76**	**111**
13	t_{12}	11	11	0	**22**	7	15	0	**22**	29	2	14	4	9	1	**59**	**103**
14	t_{13}	13	5	1	**19**	8	12	0	**20**	15	6	4	4	26	9	**64**	**103**
15	t_{14}	21	33	3	**57**	11	7	0	**18**	13	4	3	2	23	1	**46**	**121**
16	t_{15}	22	14	1	**37**	0	2	0	**2**	8	11	17	1	38	2	**77**	**116**
17	t_{16}	5	9	1	**15**	19	19	0	**38**	26	5	29	5	4	1	**70**	**123**

Tabla 11.32

a. 4. frecuencias

	situac.	f. ent. s.	f. ent. i.	f. ent. o.	f. ent. s.	total ent.	situac.	f. rel. s.	f. rel. i.	f. rel. o.	f. rel. s.	total rel.	p. ent. s.	p. ent. i.	p. ent. o.	p. ent. s.	p. rel. s.	p. rel. i.	p. rel. o.	p. rel. subj.
1	t_2	87,000	1,000	88,000	70,000	158,000	t_1	8,000	28,000	36,000	73,000	109,000	0,551	0,006	0,557	0,443	0,073	0,257	0,330	0,670
2	t_4	7,000	67,000	74,000	6,000	80,000	t_3	16,000	3,000	19,000	84,000	103,000	0,087	0,837	0,925	0,075	0,155	0,029	0,184	0,816
3	t_6	79,000	6,000	85,000	41,000	126,000	t_5	12,000	15,000	27,000	73,000	100,000	0,627	0,048	0,675	0,325	0,120	0,150	0,270	0,730
4	t_8	4,000	76,000	80,000	10,000	90,000	t_7	38,000	1,000	39,000	52,000	91,000	0,044	0,844	0,889	0,111	0,418	0,011	0,429	0,571
5	t_{10}	75,000	2,000	77,000	26,000	103,000	t_9	5,000	29,000	34,000	59,000	93,000	0,728	0,019	0,748	0,252	0,054	0,312	0,366	0,634
6	t_{12}	22,000	22,000	44,000	59,000	103,000	t_{11}	23,000	12,000	35,000	76,000	111,000	0,214	0,214	0,427	0,573	0,207	0,108	0,315	0,685
7							t_{13}	19,000	20,000	39,000	64,000	103,000					0,184	0,194	0,379	0,621
8							t_{14}	57,000	18,000	75,000	46,000	121,000					0,471	0,149	0,620	0,380
9							t_{15}	37,000	2,000	39,000	77,000	116,000					0,319	0,017	0,336	0,664

	situac.	f. z -+ sup.	f. z -+ inf.	f. z -+ sub.	situac.	f. z +- sup.	f. z +- inf.	f. z -+ sub.	situac.	f. r -+ sup.	f. r -+ inf.	f. r -+ sub.	situac.	f. r +- sup.	f. r +- inf.	f. r -+ sub.
1	t_4	7,000	67,000	6,000	t_2	87,000	1,000	70,000	t_1	8,000	28,000	73,000	t_3	16,000	3,000	84,000
2	t_8	4,000	76,000	10,000	t_6	79,000	6,000	41,000	t_5	12,000	15,000	73,000	t_7	38,000	1,000	52,000
3	t_{12}	22,000	22,000	59,000	t_{10}	75,000	2,000	26,000	t_9	5,000	29,000	59,000	t_{11}	23,000	12,000	76,000
4									t_{13}	19,000	20,000	64,000	t_{14}	57,000	18,000	46,000
5													t_{15}	37,000	2,000	77,000

	situac.	f. z -+ sup.	f. z -+ inf.	f. z -+ sub.	situac.	f. z +- sup.	f. z +- inf.	f. z -+ sub.	situac.	f. r -+ sup.	f. r -+ inf.	f. r -+ sub.	situac	f. r +- sup.	f. r +- inf.	f. r -+ sub.
1	t_4	8,750	83,750	7,500	t_2	55,060	0,633	44,300	t_1	7,340	25,690	66,970	t_3	15,530	2,910	81,550
2	t_8	4,440	84,440	11,110	t_6	62,700	4,760	32,540	t_5	12,000	15,000	73,000	t_7	41,760	1,090	57,140
3	t_{12}	21,360	21,360	57,280	t_{10}	72,820	1,940	25,240	t_9	5,380	31,180	63,440	t_{11}	20,720	10,810	68,470
4									t_{13}	18,450	19,420	62,140	t_{14}	47,110	14,880	38,020
5													t_{15}	31,890	1,720	66,380

Tablas 11.33

11.4.3.1. *Tablas de frecuencias*

En la tabla 11.32 figuran las frecuencias absolutas de las respuestas dadas a los tres bloques en que se han dividido las modalidades de la variable columna. Igualmente, aparecen sombreadas las zonas de respuesta en las que se esperan las mayores frecuencias por filas. En las tablas 11.33 se recogen los cálculos realizados por bloques y por tipos de situaciones. Dichos cálculos servirán de base para el análisis de resultados y las representaciones gráficas.

Una revisión de los datos de la tabla 11.32 nos confirma que los resultados son, en general, los esperados, con excepción de las situaciones t_{12} y t_{14} que se refieren, como veremos, a los mismos contextos que han presentado resultados dispares en los cuestionarios anteriores.

Por otra parte, de la comparación de estos datos con los correspondientes al cuestionario a.2, podemos adelantar ya que los porcentajes de respuestas de tipo objetivo (I.a y I.b), tanto en el caso de las situaciones relativas como en el de las enteras, presentan un incremento importante, a diferencia de lo que ocurre con las respuestas al segundo bloque (II). Así, las respuestas en términos ordinales precisos (los seis primeros términos de la variable columna) pasan, en el caso de las situaciones enteras, de un 58,06 % a un 67,88 % y, en el caso de las situaciones relativas, de un 20,68 % a un 36,22 %. Teniendo en cuenta que el número total de respuestas es similar para ambos cuestionarios (situaciones enteras: 794 (a.2) y 660 (a.4), de las que en términos objetivos se responden 411 (a.2) y 448 (a.4); situaciones relativas: 943 (a.2) y 947 (a.4), de las que en términos objetivos se responden 195 (a.2) y 343 (a.4)), se produce un incremento relativo notable de las respuestas de tipo objetivo a ambas clases de situaciones, lo que concuerda con los resultados obtenidos en el cuestionario a.3, es decir, *la introducción de valores numéricos parece que favorece la elección de términos precisos y objetivos,* con la consiguiente disminución de la tendencia a la utilización de términos subjetivos o imprecisos que se observa en los dos primeros cuestionarios, en los que no aparecen valores numéricos.

11.4.3.2. *Medidas centrales y de dispersión*

En la tabla 11.34 se incluyen los datos de las respuestas a los bloques I y II de ambos tipos de situaciones (A y B para situaciones enteras; C y D para situaciones relativas) y los cálculos para la obtención de las desviaciones típicas de los cuatro grupos. En la última fila figuran las medias y desviaciones, que vuelven a aparecer en forma de intervalos en la figura 11.35.

Los datos confirman la suposición de la existencia de diferencias globales

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	88	70	36	73	173,361111	1201,77778	4,45679012	34,6790123
2	74	6	19	84	0,69444444	860,444444	365,234568	285,234568
3	85	41	27	73	103,361111	32,1111111	123,45679	34,6790123
4	80	10	39	52	26,6944444	641,777778	0,79012346	228,345679
5	77	26	34	59	4,69444444	87,1111111	16,9012346	65,7901235
6	45	59	35	76	890,027778	560,111111	9,67901235	79,0123457
7			39	64			0,79012346	9,67901235
8			75	46			1360,79012	445,679012
9			39	77			0,79012346	97,7901235
10								
11	449	212	343	604				
12	74,8333	35,3333	38,1111	67,1111	14,1352593	23,7463447	14,4640892	11,929836

Tabla 11.34

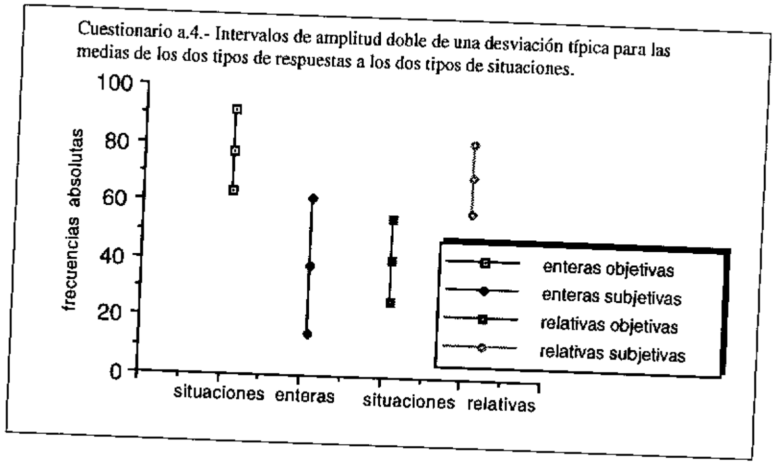


Figura 11.35

entre las respuestas. Dichas diferencias, que se manifiestan tanto en las frecuencias de respuestas de los dos tipos, dentro de cada clase de situación, como en la inversión que se produce en los tipos de respuesta para los dos tipos de situaciones (frecuencias altas para situaciones enteras y bajas para relativas en el tipo I y a la inversa para las respuestas de tipo II), son las mismas que las encontradas en los demás cuestionarios, si bien, en este caso, se aprecian mayores diferencias en las situaciones enteras y menores en las relativas, lo que se puede traducir en términos de una mayor seguridad en las respuestas a las situaciones enteras y, al mismo tiempo, un leve desacuerdo entre los encuestados a la hora de elegir los términos más adecuados para las situaciones relativas. Esta conclusión se refuerza, aún más, si tenemos en cuenta que en este cuestionario se ha producido, con respecto a los demás, una disminución importante en términos absolutos de las respuestas de tipo I, mientras que se han mantenido las de tipo II.

Además de las diferencias mencionadas, y tomando como referencia los resultados del cuestionario a.2, se constata un aumento relativo de las respuestas objetivas, una disminución relativa de las respuestas de tipo subjetivo y una mayor homogeneidad en las respuestas a las situaciones enteras, produciéndose, como siempre, la mayor variabilidad en las de tipo subjetivo a las situaciones enteras.

11.4.3.3. *Representaciones gráficas*

En las páginas que siguen se presentan y analizan algunos gráficos elaborados a partir de los datos de las tablas de frecuencias que se han tratado en apartados anteriores. Por su comodidad y simplicidad para la finalidad del estudio, utilizaremos diagramas de barras que pongan en evidencia las regularidades encontradas. Asimismo dedicaremos una atención preferente a los diagramas de frecuencias relativas. Por otra parte, al igual que en los cuestionarios anteriores, nos vamos a referir a grupos de situaciones y tipos de respuesta, constituidos expresamente a partir de los datos originales, en función de los propósitos de la investigación.

En este caso, al igual que en el cuestionario a.2, estamos interesados en la distribución de respuestas de los tipos I y II a las dos clases de situaciones y en la distribución de las respuestas de los tipos I.a, I.b y II a los cuatro grupos de situaciones que se obtienen de combinar el orden entre comparados y referentes (región "positiva" con respecto a "negativa" y viceversa) con dichos tipos de situaciones (enteras y relativas).

Los diagramas de la figura 11.36 representan las distribuciones de frecuencias absolutas según el mismo esquema utilizado en el cuestionario a.2. Como se puede comprobar, las respuestas se ajustan en general a lo esperado y concuerdan también con los resultados obtenidos en el cuestionario a.2, salvo las pequeñas diferencias ya apuntadas en apartados anteriores. En particular, en trece de las quince situaciones analizadas se producen resultados regulares y en sentidos opuestos para los dos tipos de situaciones. Tan sólo destacan, por sus resultados contrarios a la mayoría, la situación entera t_{12}, en la que se produce un mayor porcentaje de

respuestas al bloque II, y la situación relativa t_{14}, que ha sido respondida como si de una situación entera se tratara; ambas son suficientemente conocidas por sus resultados anómalos (la primera se refiere al juego del golf y la segunda a variaciones de temperatura).

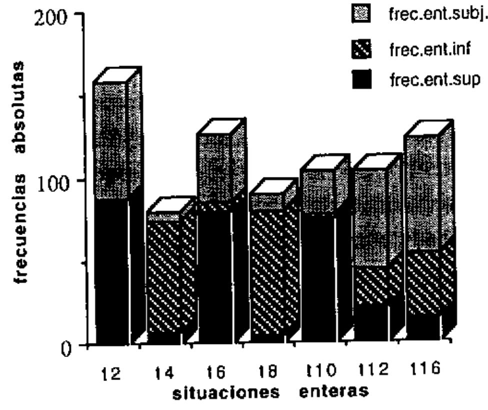
En el primer caso, los encuestados han preferido utilizar el término "mejor" para calificar la comparación entre "3 bajo par" y "1 sobre par", respuesta perfectamente válida y con la cual no se arriesgan a tener que invertir el orden usual de los números enteros contestando "mayor" o "superior", como indica el sentido común para que haya acuerdo con el término "mejor". Esta discrepancia se manifiesta también en el mismo número de respuestas a los bloques I.a y I.b, lo que indica que se trata de una cuestión conflictiva en este sentido. En el caso de la situación t_{14} pensamos que la inclusión de los números con signo ha podido llevar a los encuestados a elegir mayoritariamente las respuestas "mayor" y "superior".

En la figura 11.37 se representan las frecuencias relativas de las respuestas a cada uno de los tres bloques ("superior" o I.a, "inferior" o I.b y "subjetivo") para cada uno de los dos tipos de situaciones por separado. En el diagrama de barras para situaciones enteras aparece la cuestión t_{16}, que no debería figurar por los motivos expuestos con anterioridad. No hemos querido suprimirla, tanto de este diagrama como del correspondiente a las frecuencias relativas, porque su inclusión no afecta para nada a las conclusiones.

Salvando la diferencia de escala que aparece en los dos gráficos de la figura 11.36 y que se subsana en los gráficos siguientes mediante la utilización de las frecuencias relativas, podemos adelantar algunas de las conclusiones que se analizarán con más detalle en las páginas que siguen. En concreto, en el gráfico correspondiente a las situaciones enteras, se observa:

a) Un predominio de las respuestas de tipos I.a y I.b; b) Una alternancia en las respuestas de ambos tipos, dependiendo de la posición de comparados y referentes; c) Una cierta irregularidad en las frecuencias, lo que puede ser debido a un diferente grado de conocimiento sobre las situaciones propuestas; d) De las seis situaciones sometidas a análisis (las seis primeras de izquierda a derecha en el gráfico), las de respuesta mayoritaria en la zona I.a o "superior" presentan a la vez una frecuencia alta de respuestas en la zona II, cosa que no ocurre en las situaciones con respuesta en la zona I.b. Curiosamente, parece que existe una mayor tendencia a la utilización de términos "subjetivos", en el caso de valores enteros de signos opuestos, cuando el sentido de comparación es de mayor a menor.

Cuestionario a.4.- Distribución de frecuencias absolutas de respuestas en los bloques "superior", "inferior" y "subjetivo" a las situaciones con valores enteros.



Cuestionario a.4.- Distribución de frecuencias absolutas de respuestas a los bloques "superior", "inferior" y "subjetivo" para situaciones con valores relativos.

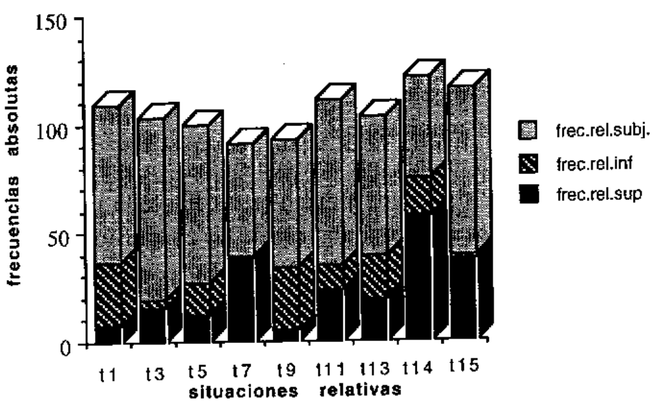
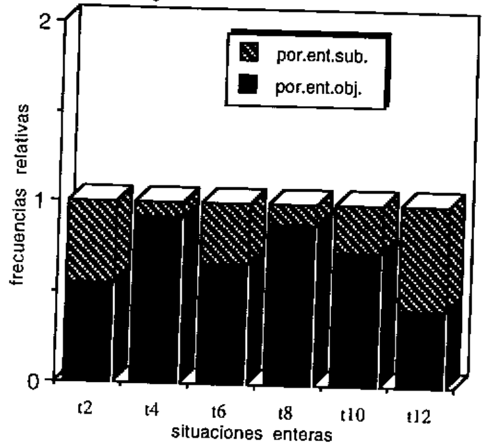


Figura 11.36

En lo que se refiere a las situaciones relativas, se puede observar: e) Un predominio claro de las respuestas de tipo II en la mayoría de los casos; f) Inexistencia de la alternancia que se observa para las situaciones enteras, lo que se traduce en que ni la posición ni el tamaño de comparados y referentes afectan de forma regular a las respuestas; g) Una gran homogeneidad en las respuestas que se encuentran todas muy cercanas al valor 100.

Cuestionario a.4.- Distribución de frecuencias relativas de las respuestas de tipo objetivo y subjetivo para situaciones de comparación con valores numéricos enteros de diferente signo.



Cuestionario a.4.- Distribución de frecuencias relativas de las respuestas de tipo objetivo y subjetivo para situaciones de comparación con valores numéricos relativos de diferente signo o región.

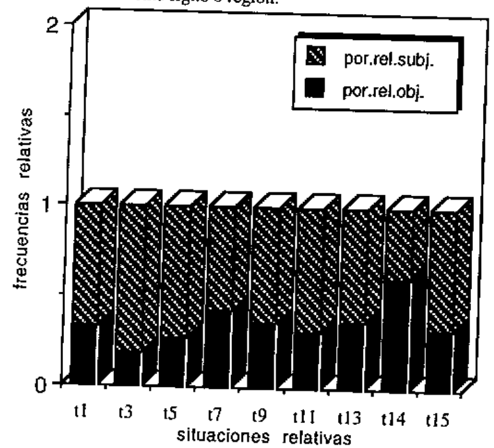


Figura 11.37

Las consideraciones anteriores se aprecian más claramente en los gráficos de la figura 11.38, en los que se pone de manifiesto la distribución de frecuencias relativas para los tres tipos de respuesta y los dos tipos de situaciones.

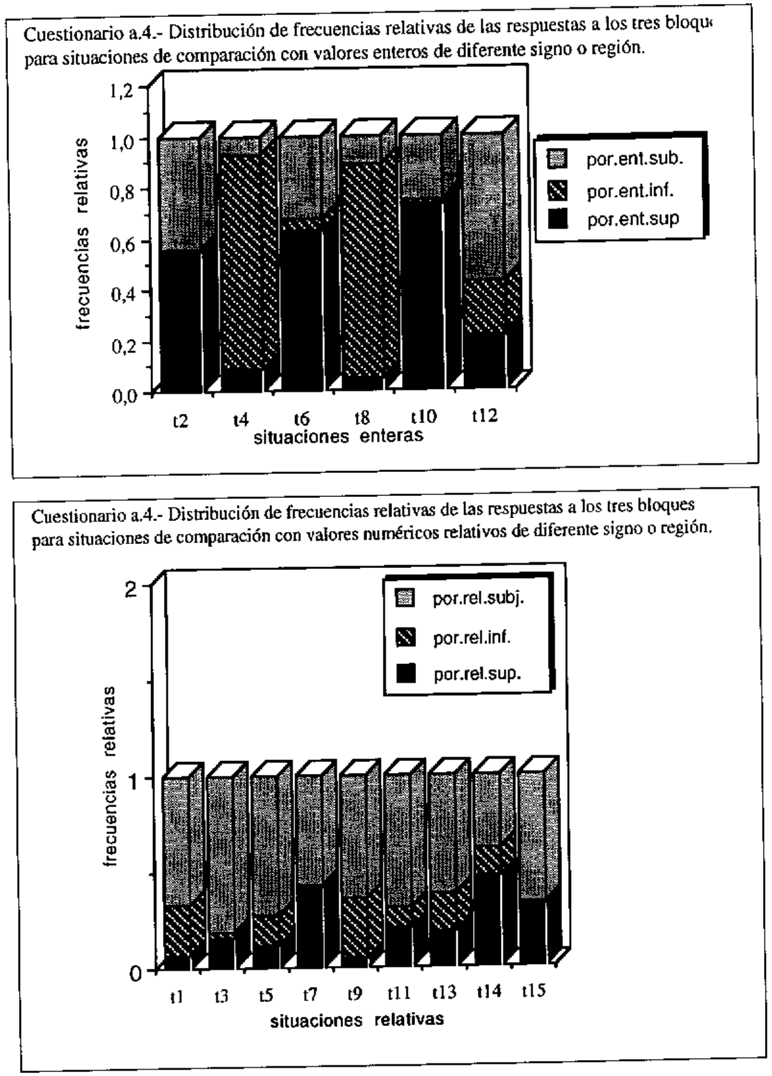


Figura 11.38

El estudio presentado en las páginas anteriores se puede completar mediante la descripción y discusión de los datos obtenidos para las respuestas a los cuatro grupos de situaciones semejantes que constituyen la base sobre la que se ha construido el cuestionario, es decir, los cuatro tipos de comparaciones correspondientes a los dos tipos de situaciones, combinados con los dos tipos de sentidos posi-

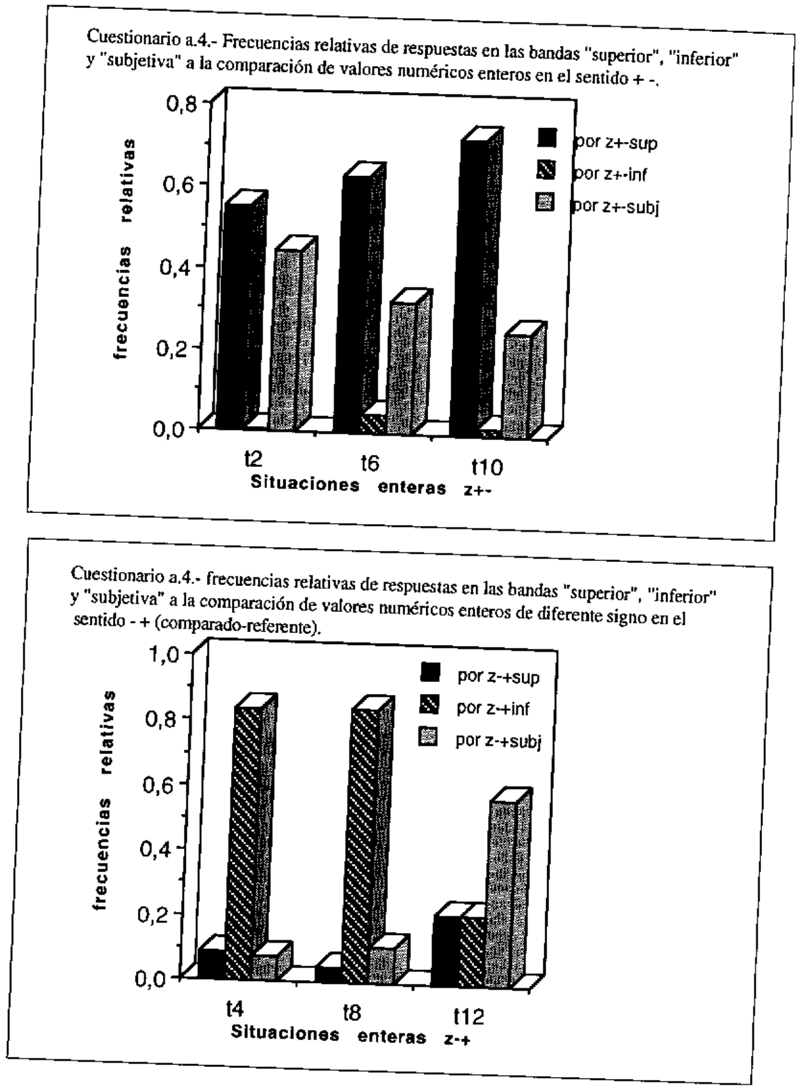
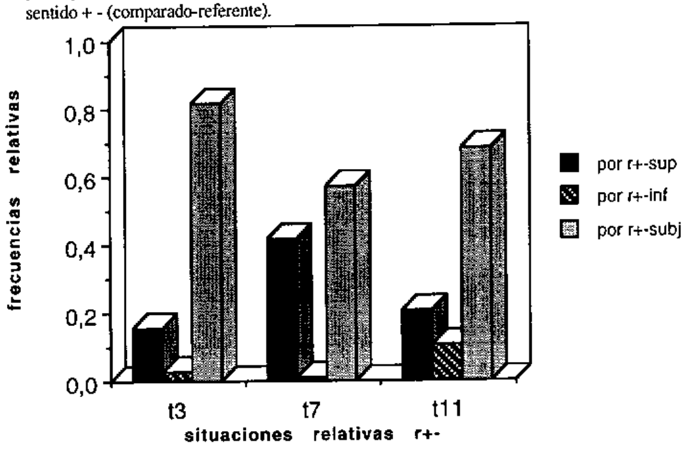


Figura 11.39

bles (de – a + y de + a –). Los gráficos de las figuras 11.39 y 11.40 proporcionan una imagen idónea para analizar las respuestas a dichos grupos.

En los gráficos de las figuras 11.39 y 11.40 se observa: en las comparaciones del tipo "Z + –", las respuestas mayoritarias, en porcentajes, se dan en la zona 1.a o "superior"; en las comparaciones del tipo "Z – +", con excepción de la si-

Cuestionario a.4.- Frecuencias relativas de respuestas en las bandas "superior", "inferior" y "subjetiva" a la comparación de valores numéricos relativos de diferente región en el sentido + - (comparado-referente).



Cuestionario a.4.- Frecuencias relativas de respuestas en las bandas "superior", "inferior" y "subjetiva" a la comparación de valores numéricos relativos de regiones diferentes en el sentido - + (comparado-referente).

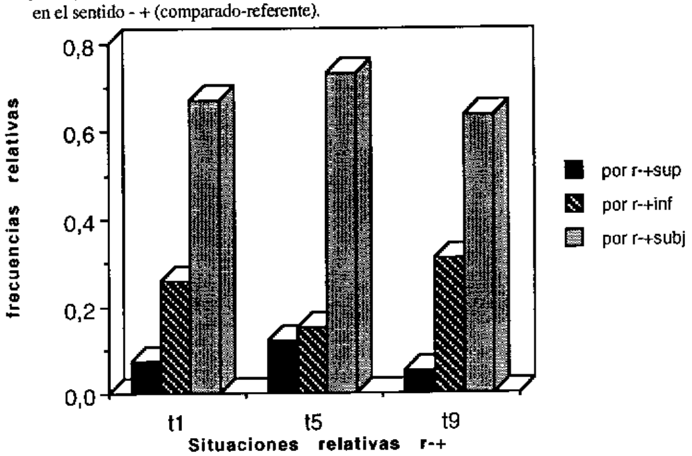


Figura 11.40

tuación t_{12} relativa al juego del golf, las respuestas se producen en la zona I.b o "inferior"; se da un alto porcentaje de respuestas de tipo II para el primer caso y un bajo porcentaje de respuestas de tipo II en el caso de las situaciones *t*4 y *t*8 del grupo "Z – +"; se aprecia una gran homogeneidad para las respuestas a las cuatro

situaciones del tipo "*R* – +" y una cierta heterogeneidad para las respuestas a las situaciones "R + –", la cual se suaviza si no se considera la situación t_{14}, cuyos resultados difieren del resto; prescindiendo de la situación t_{14} podemos constatar, en los dos grupos, un mayor porcentaje de respuestas del tipo II que de los tipos I.a y I.b, como era de esperar.

Por otra parte se observa una cierta regularidad en las respuestas de tipo I.a y I.b, cosa que no sucedía al analizar los gráficos de frecuencias relativas para el conjunto de todas las situaciones. En efecto, aunque sus porcentajes sean en general pequeños, en comparación con los de las respuestas de tipo II, y las califiquemos como respuestas erróneas, se observa un mayor porcentaje en las de tipo "superior" a las situaciones "*R* + –" (en negro) y un mayor porcentaje en las de tipo "inferior" a las situaciones "*R* – +" (en rayado).

A modo de resumen del estudio gráfico presentado podemos decir que *los sujetos encuestados responden en general de manera diferente ante las comparaciones de pares de medidas con valores numéricos enteros y naturales relativos pertenecientes a "regiones opuestas"*. En el primer caso, eligiendo términos de comparación que establecen una relación ordinal precisa que conecta las dos regiones opuestas en una estructura de orden total. En el segundo caso, interpretando el término "siempre" como "normalmente", "casi siempre" o "por lo general" y eligiendo términos familiares e imprecisos o que ponen de manifiesto las dificultades que se presentan cuando se pretende comparar lo que no es comparable mediante un frase concisa.

11.4.3.4. *Análisis de correspondencias*

Con el fin de completar el trabajo realizado, poniendo de manifiesto la estructura de relaciones que subyace en el conjunto de los resultados, se ha aplicado el procedimiento del análisis de correspondencias a los datos que figuran en la tabla de contingencia construida a tal efecto (González, J. L., 1995, págs. 564-565). El estudio presenta características similares a los que ya se han realizado para los anteriores cuestionarios, por lo que pasaremos directamente a analizar la distribución conjunta de las diferentes modalidades de la variable fila y de los puntos correspondientes a los tres grupos formados con los tipos de respuesta de la variable columna, en los mismos términos ya indicados para el caso de los cuestionarios a.2 y a.3.

Una primera inspección a las tablas mencionadas anteriormente nos indica que las respuestas de tipo I.b o "inferior" aportan la mayor contribución a la posición del eje de la dimensión 1, mientras que las respuestas de los otros dos tipos determinan, con un mayor peso, la posición del eje de la dimensión 2. En la

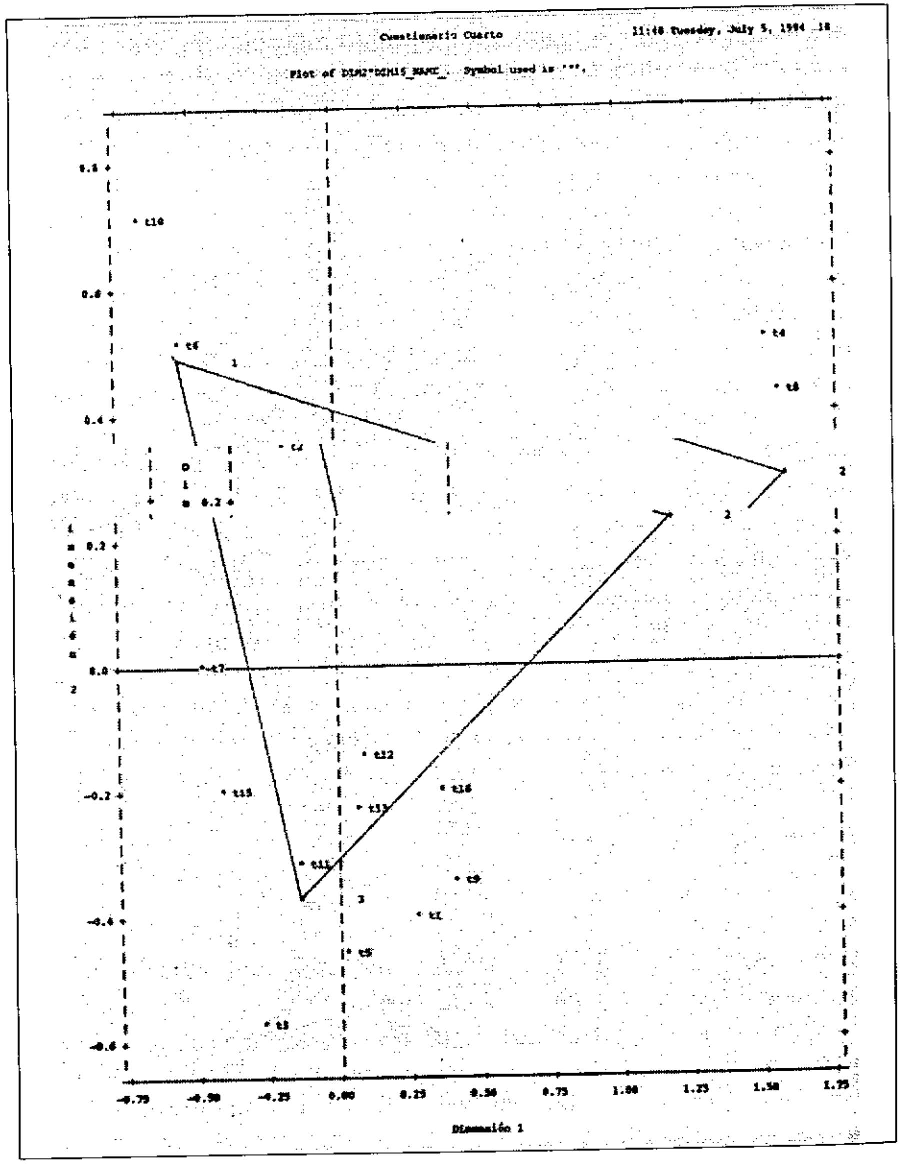


Figura 11.41

figura 11.41 se representa la distribución de las proyecciones de los puntos fila (correspondientes a las 16 situaciones propuestas en el cuestionario) y de los puntos columna (correspondientes a los tipos de respuesta I.a, I.b y II, numerados desde el 1 hasta el 3) sobre el plano de coordenadas.

En el gráfico de la figura 11.41 se observa también que el eje de la dimensión 1 separa las situaciones relativas (con ordenadas negativas) de las situaciones enteras (con ordenadas positivas), y que el eje de la dimensión 2 separa, en la zona de ordenadas positivas, las situaciones enteras de respuestas I.a o "superior" con abcisas negativas de las situaciones enteras de respuestas I.b o "inferior" con abcisas positivas.

Por tanto se detectan tres grupos de situaciones o puntos fila en torno a los tres grupos de respuestas o puntos columna:

a) Un primer grupo, formado por las situaciones t_2, t_6, t_{10} y t_{14}, en torno a la categoría 1 de respuestas. Las tres primeras son, efectivamente, las tres situaciones que componen el grupo "Z + -", mientras que la situación t_{14} ha sido considerada como una situación entera de esta clase, cometiendo los encuestados el mismo error que tuvimos nosotros al incluirla entre dicho tipo de situaciones. No es de extrañar, por tanto, que los números enteros que aparecen en el enunciado lleven a confundir las temperaturas con las variaciones de temperaturas.

b) En posiciones opuestas a las anteriores, separadas de ellas por el eje de la dimensión 2 y en torno a la categoría 2 de respuestas (tipo "inferior"), se encuentran las situaciones t_4 y t_8 que, junto a la t_{12}, que aparece bastante alejada de ellas en la zona correspondiente a las situaciones relativas, constituyen el grupo que hemos denominado "Z – +". La situación t_{12}, relativa a la comparación de resultados opuestos en el juego del golf, ha sido considerada por los sujetos como una situación netamente relativa, decisión que a nuestro juicio está perfectamente justificada en base a las consideraciones realizadas al comienzo de la discusión de los resultados.

c) En posiciones separadas de los grupos 1 y 2 por el eje de abcisas y a pequeñas distancias del punto 3, correspondiente a la categoría de respuestas de tipo II, se encuentran el resto de las situaciones clasificadas inicialmente como relativas y que son: t_1, t_3, t_5, t_7, t_9, t_{11}, t_{13} y t_{15}; de ellas, la situación t_7 se encuentra un poco más alejada del grupo en una posición intermedia entre el punto 1 y el punto 3 y opuesta al punto 2. Se trata, por tanto, de una situación que, a pesar de haber sido tratada globalmente como relativa, ha recibido un mayor número de respuestas en la zona I.a o "superior" que el resto de las situaciones de su grupo.

Con todo ello los agrupamientos se presentan de forma muy clara con arreglo a los planteamientos teóricos, existiendo bastante similitud entre esta distribución y la que se obtuvo para el cuestionario a.2 y que aparece en la figura 11.21.

11.5. **Otras conclusiones**

Además de las conclusiones parciales que se han ido exponiendo a propósito del análisis de los resultados de cada uno de los cuestionarios, se pueden añadir las siguientes consideraciones generales, algunas de las cuales constituyen un resumen de observaciones ya realizadas:

a) Si examinamos las zonas de respuestas esperadas a los cuatro cuestionarios se comprueba que los resultados confirman, en un alto grado, la bondad de los planteamientos teóricos.

b) Los diferentes tópicos o contextos concretos que se han utilizado para la construcción de los cuestionarios no son dominados y conocidos en la misma medida por los individuos encuestados. Así, coexisten situaciones familiares muy claras, desde el punto de vista de su tratamiento, con situaciones en las que se aprecian confusiones y disparidades en las respuestas. Es evidente, como así se ha comprobado, que este desconocimiento y estas confusiones se dan en mayor medida en los sujetos de menor nivel de estudios y de menor edad.

c) Creemos que se puede afirmar que los individuos de la muestra valoran, en general, de manera diferente las situaciones enteras y las situaciones relativas. Las palabras y frases que utilizan para las situaciones enteras son términos característicos de una estructura de orden total, mientras que las elegidas para las situaciones relativas son términos que hacen referencia a una estructura dicotómica con una conexión imprecisa o indeterminada entre las partes, o bien frases cuyo significado elimina toda posibilidad de existencia de conexión fija entre las partes. Términos y frases que son adecuados para el tratamiento de situaciones opuestas en las que las medidas se ajustan a una estructura de orden parcial, isomorfa a la establecida teóricamente para los números naturales relativos.

d) De esta manera, y a pesar de la instrucción matemática recibida por los sujetos bajo el supuesto de que la estructura aditiva y ordinal del conjunto de los números enteros es el ámbito único e idóneo para el tratamiento de todas las situaciones planteadas en los cuestionarios sin excepción alguna, se pone de manifiesto que existe una diferenciación cognitiva clara entre ambos tipos de situaciones, por la que los sujetos distinguen entre una estructura de orden total y una estructura de orden parcial con inversión del sentido en la "región negativa". Cualquier otra afirmación sobre la población de la que se ha extraído la muestra o que esté basada en una extrapolación de los datos requeriría de un estudio más preciso que el que se ha realizado.

e) Los criterios que se han utilizado para la clasificación de las situaciones, a la vista de los resultados, son los correctos salvo pequeñas modificaciones. Por otra parte, los términos y frases utilizados para el bloque I se encuentran muy ajustados, entre otras cosas porque no existen muchos, mientras que los del bloque II se han elegido de una muestra bastante amplia de términos cotidianos. Al mismo tiempo, mientras que en los cuestionarios a.2, a.3 y a.4 se encuentran equilibrados los términos del bloque I y del bloque II, en el cuestionario a.1 se ofrecen más posibilidades para el bloque II, tanto en número como en amplitud de significados.

Por otra parte no existe equilibrio entre las situaciones relativas y las enteras, debido a las modificaciones que se han tenido que realizar con posterioridad a la aplicación de los cuestionarios. En este sentido, es de destacar la dificultad existente para encontrar situaciones enteras, que contrasta con la enorme facilidad para enunciar situaciones relativas.

f) La prueba resulta demasiado larga, pudiéndose acortar en futuros trabajos mediante la unificación de los cuestionarios a.2 y a.4, los cuales únicamente se diferencian en la aparición de los valores numéricos.

g) Hay que limitar las respuestas posibles a cada situación, en el sentido de elegir la más adecuada o las dos más adecuadas, o proponer una escala de preferencias. Asimismo, sería conveniente prescindir de algunos términos de la variable columna, modificando su número en función del tipo de cuestionario.

h) Sería conveniente realizar un estudio transversal de las respuestas dadas a cada una de las situaciones referidas al mismo contexto en todos los cuestionarios.

i) Además de un estudio experimental de carácter cuantitativo que corrobore los indicios encontrados, vemos la necesidad de efectuar un estudio de tipo cualitativo sobre las diferencias encontradas entre las situaciones de la misma clase así como entre los términos utilizados para valorar o comparar.

j) Se han de rectificar las situaciones problemáticas, matizándolas o efectuando un estudio específico para averiguar los motivos de las disparidades existentes. Las situaciones irregulares, que son minoría, se muestran como tales en todos los cuestionarios, por lo que sería conveniente realizar un estudio específico sobre ellas.

k) El análisis de correspondencias realizado, aunque ha sido muy útil para visualizar la estructura de relaciones con la menor pérdida de información posible, se debe completar con un estudio similar en el que se agrupen también las situaciones de la misma naturaleza en número suficiente. Al mismo tiempo, los tres grupos formados para la variable columna se podrían haber desglosado en cuatro o más partes, para ajustar el estudio a las características óptimas requeridas por este instrumento de análisis.

11.6. **Logros y hallazgos**

En este capítulo se han alcanzado logros que avalan la bondad de la hipótesis VI enunciada en el apartado 2.3.2 del capítulo 2. Dicha hipótesis es la siguiente:

VI. Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[5] dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y los números enteros, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales, cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas.

El análisis de los resultados, cuyas conclusiones se exponen en los apartados dedicados a cada uno de los cuestionarios así como en el apartado 11.5, proporciona indicios razonables acerca de la bondad de esta hipótesis.

De los *objetivos* enumerados en el apartado 2.2.2 del capítulo 2, y como consecuencia de la evidencia empírica que se manifiesta en el estudio realizado, se han cubierto, en este capítulo y en distinto grado, los siguientes:

b) *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio;* objetivo cubierto parcialmente, en sus aspectos teóricos, en los capítulos 7, 8 y 9. En este capítulo se contribuye al logro completo del mismo a través de las dificultades manifestadas por los sujetos, a pesar de su preparación, ante las cuestiones planteadas tanto en el estudio exploratorio inicial como en la aplicación de los cuestionarios definitivos.

c) *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números;* en los capítulos 8 y 9 se dieron argumentos epistemológicos, fenomenológicos y didácticos en favor de la necesidad aludida; en este capítulo se aportan argumentos fenomenológicos y cognitivos que refuerzan la necesidad de tales números. El análisis de los tipos de situaciones, su clasificación en los cuestionarios, la determinación precisa de los elementos diferenciadores, tanto sintácticos como semánticos, pone de manifiesto, aún más si cabe, las diferencias establecidas en el estudio teórico. Por otra parte, las respuestas de los sujetos de la muestra estudiada evidencian un tratamiento cognitivo diferenciado a pesar del proceso instructivo que han seguido.

f) *Proporcionar evidencia empírica a favor del nuevo campo conceptual, la bondad del modelo construido y la idoneidad de las interpretaciones y clasificaciones que de él se derivan*; objetivo que podemos dar por cubierto al

[5] En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8.º de Educación General Básica, correspondiente a la edad de 14 años.

término de este capítulo, si tenemos en cuenta que las respuestas de los encuestados se ajustan, en un porcentaje elevado, a lo que se esperaba de acuerdo con los planteamientos teóricos. Podemos afirmar que los sujetos de la muestra responden a los cuestionarios delimitando, en un alto porcentaje, el campo de los números naturales relativos y el campo de los números enteros. Esto conduce a afirmar que, para los sujetos de la muestra, ambos campos corresponden a funciones cognitivas diferentes.

De los *objetivos complementarios* enumerados en el apartado 2.2.3 podemos realizar las siguientes consideraciones:

Los objetivos: b) experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática y c) poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática, creemos que se han cubierto suficientemente con el estudio teórico y empírico realizado; en particular, a partir del estudio teórico que se ha desarrollado como consecuencia de la aplicación del análisis didáctico, se han construido unos instrumentos de recogida de datos que han resultado eficaces. Por último, la relevancia de los resultados teóricos y la constatación empírica de la bondad de los mismos avalan la idoneidad de los instrumentos de recogida de datos y el acierto en la elección de las técnicas metodológicas y del proceso seguido en la investigación.

QUINTA PARTE

Conclusiones y perspectivas futuras

CAPÍTULO

12

Conclusiones y perspectivas futuras

12.1. Introducción

La investigación que se ha presentado en esta memoria ha consistido en un replanteamiento global con intención integradora sobre una parte de un campo de estudio en Didáctica de la Matemática que denominamos Pensamiento Numérico. Para ello se han tenido que utilizar investigaciones y trabajos de muy diferente naturaleza, cuyas conclusiones afectan a líneas y trabajos de investigación en curso también diferentes; así se ha planteado en las consideraciones que se han expuesto en el capítulo 1 y hay que tenerlo en cuenta, igualmente, en las conclusiones que se incluyen en este capítulo.

Al delimitar el campo sobre el que obtener información, desarrollar un estudio teórico en profundidad, construir los instrumentos pertinentes de recogida de información y preparar el estudio empírico que pusiera de manifiesto la bondad de los planteamientos realizados, detectamos, desde el estudio previo (González, J. L. y otros, 1990), la ausencia de antecedentes específicos adecuados para el propósito de nuestra investigación.

Gran parte del esfuerzo se ha tenido que dedicar a la elaboración de un marco teórico ajustado al problema en estudio; para ello hemos profundizado mediante el análisis y la reflexión sobre la información existente y hemos insistido en la clarificación de los elementos utilizados. Nos hemos servido del análisis epistemológico y la organización global del campo de estudio con la intención de construir un entramado sólido que permitiera, posteriormente, el diseño y la realización del estudio empírico como toma de contacto experimental con el problema de investigación.

El estudio teórico, aunque importante y necesario, constituye sólo una parte del estudio completo de los fenómenos en consideración; es evidente que, puesto que estamos tratando con la Educación del pensamiento matemático de los individuos, se impone la necesidad de un estudio complementario y en profundidad, en el ámbito de la enseñanza y el currículum, que constate la pertinencia de las consideraciones teóricas que figuran en esta memoria así como cierta viabilidad práctica de las conclusiones que en ella se establecen.

Este capítulo está dedicado a:

* situar convenientemente los elementos fundamentales de la investigación, como son: el objetivo general, los objetivos específicos, las hipótesis, la metodología utilizada y las conclusiones, dentro de un marco global;

* exponer las conclusiones más relevantes que se han obtenido en las diferentes partes del trabajo;

* exponer una revisión sobre la verificación de las hipótesis enunciadas en el apartado 2.3.2 del capítulo 2 y su incidencia sobre la consecución de los objetivos marcados en la investigación y que figuran en el apartado 2.2 del mismo capítulo;

* analizar las consecuencias del trabajo sobre diferentes aspectos relacionados con la Educación Matemática;

* abordar los principales temas que han quedado abiertos, algunas consideraciones sobre las perspectivas futuras y algunos propósitos sobre la continuación de la investigación presentada.

12.2. Elementos básicos de la investigación

A) El *objetivo general,* a cuya consecución se ha dedicado la investigación, es el siguiente (apto. 2.2.1, cap. 2):

Clarificar, describir y organizar, a partir de consideraciones epistemológicas, cognitivas, fenomenológicas y didácticas, el campo conceptual de los números naturales relativos.

B) Para la consecución de este propósito central, se han marcado los siguientes *objetivos específicos* (apdo. 2.2.2, cap. 2):

a) Identificar, en el campo conceptual aditivo, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas;

b) Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de la totalidad de las situaciones y problemas del dominio;

c) Establecer, con base en argumentos epistemológicos, cognitivos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir carencias detectadas y definir tales números;

d) Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes entre los tres tipos de números (naturales, naturales relativos y enteros);

e) Construir un modelo teórico (campo conceptual de los naturales relativos) que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones; ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema;

f) Proporcionar evidencia empírica a favor del nuevo campo conceptual, la bondad del modelo construido y la idoneidad de las interpretaciones y clasificaciones que de él se derivan; y se han señalado de manera adicional los siguientes *propósitos complementarios* (apdo. 2.2.2, cap. 2):

— Iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática.

— Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática.

— Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática.

C) Para la consecución de los objetivos anteriores se han sometido a prueba las siguientes *hipótesis* (apdo. 2.3.2, cap. 2):

I.—En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos *medidas naturales relativas*, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

II.—Existe un conjunto de números a los que llamaremos *números naturales relativos* que, con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de *medidas naturales relativas.*

III.—El conjunto de los números naturales relativos con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

IV.—Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio y regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

V.—El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio que amplía y precisa otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.

VI.—Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria [1] dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.

D) Para contrastar las hipótesis anteriores se han utilizado las siguientes técnicas *metodológicas* (apdo. 2.5, cap. 2):

— para el estudio teórico: *análisis didáctico*;

— para el estudio empírico: *análisis exploratorio de datos; métodos descriptivos de la investigación experimental.*

E) La articulación de las hipótesis y técnicas metodológicas en el proceso de investigación se ha producido según los esquemas de las figuras 12.1 y 12.2, en las que se resume el proceso seguido relacionando entre sí las hipótesis de investigación, los métodos empleados, los resultados obtenidos así como las conjeturas y conclusiones parciales en cada una de las etapas del trabajo. La figura 12.1 corresponde a la parte fundamental de la investigación, mientras que la figura 12.2 refleja el proceso seguido tanto en lo que se refiere a las consecuencias teóricas de la primera parte como al estudio empírico realizado.

F) El desarrollo de la investigación ha permitido:

F.1. Contrastar las hipótesis y alcanzar los objetivos marcados; en particular:

— constatar la existencia, caracterizar y definir las medidas y números naturales relativos;

— poner en evidencia las diferencias estructurales entre los elementos en juego;

— construir un modelo para el campo aditivo que integra los elementos anteriores;

— modificar la situación general del dominio, tal y como se refleja en la figura 12.3, y configurar un nuevo campo conceptual (números naturales relativos);

— establecer una nueva clasificación de las situaciones y problemas aditivos;

— sentar las bases para la línea de investigación "Pensamiento numérico relativo".

[1] En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8.º de Educación General Básica correspondiente a la edad de 14 años.

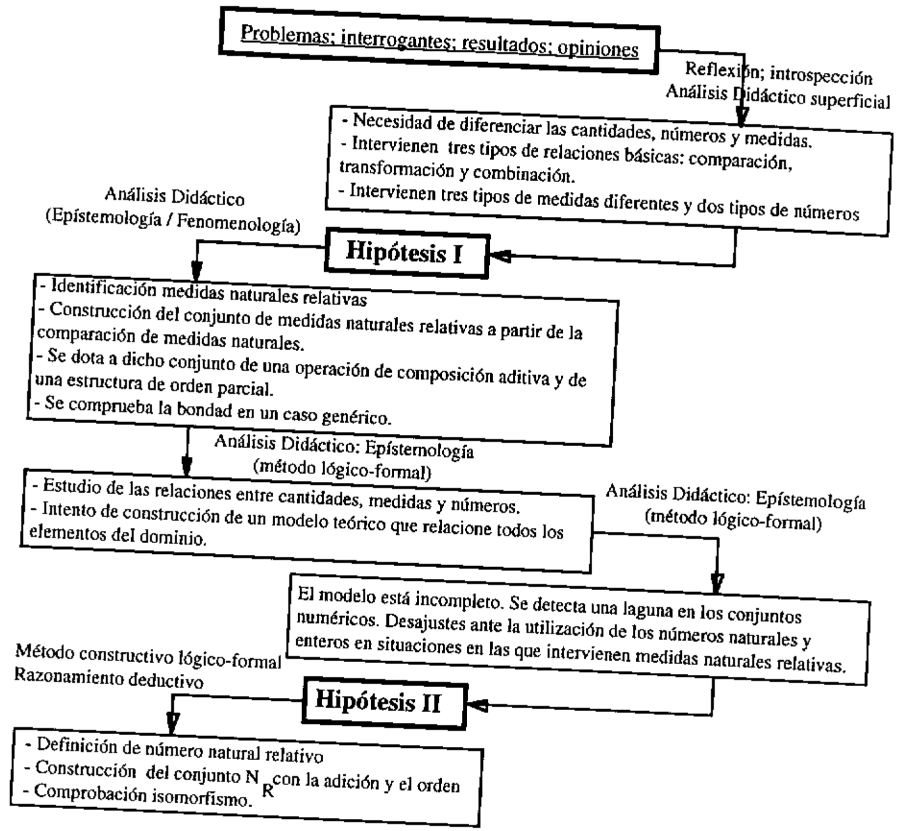


Figura 12.1.—Proceso seguido y técnicas utilizadas en la parte fundamental del trabajo

F.2. Comprobar la eficacia del análisis didáctico como técnica metodológica.

F.3. Aportar datos relevantes en favor del marco teórico elegido y de los principios epistemológicos que han fundamentado el trabajo.

F.4. Abrir nuevas perspectivas en torno a las relaciones entre el conocimiento matemático y la Educación Matemática.

G) Para ello se ha seguido el *proceso* cuyas fases se describen en la figura 12.4, para cuya interpretación nos remitimos al capítulo 2 y a los apartados 7.5 y 7.6 del capítulo 7.

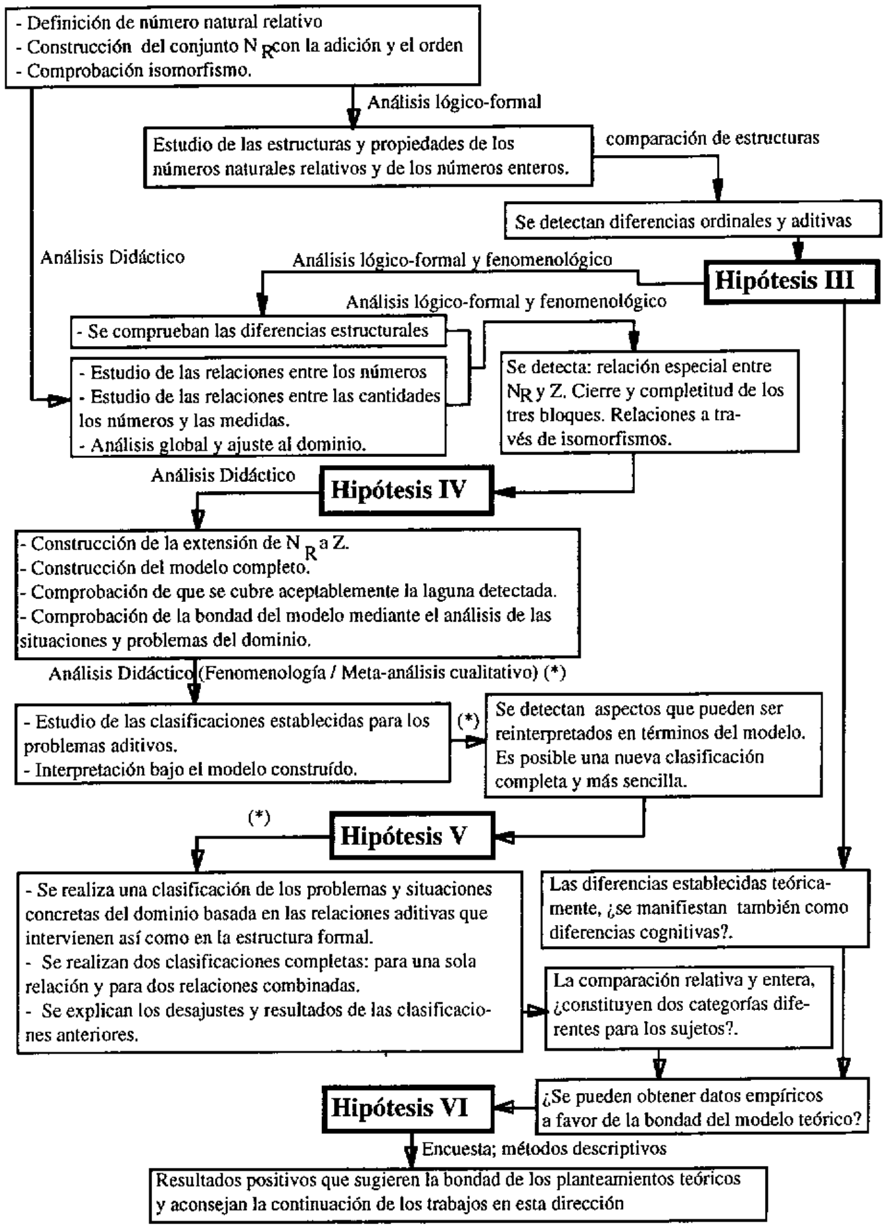
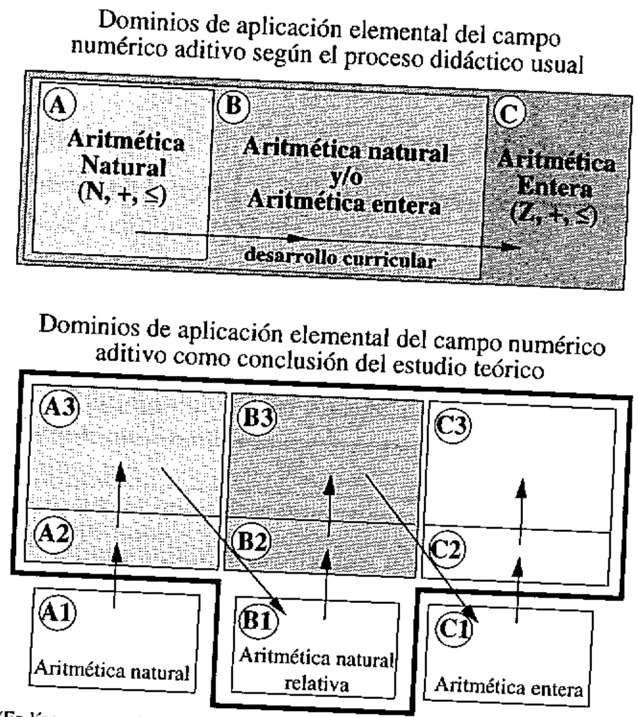


Figura 12.2.—Proceso seguido y técnicas utilizadas en las consecuencias teóricas y en la fase empírica.



(En línea gruesa: dominios en los que intervienen los números naturales relativos)
(Las flechas indican un posible proceso a seguir en el desarrollo curricular).

Figura 12.3.—Modificación de la distribución del campo aditivo.

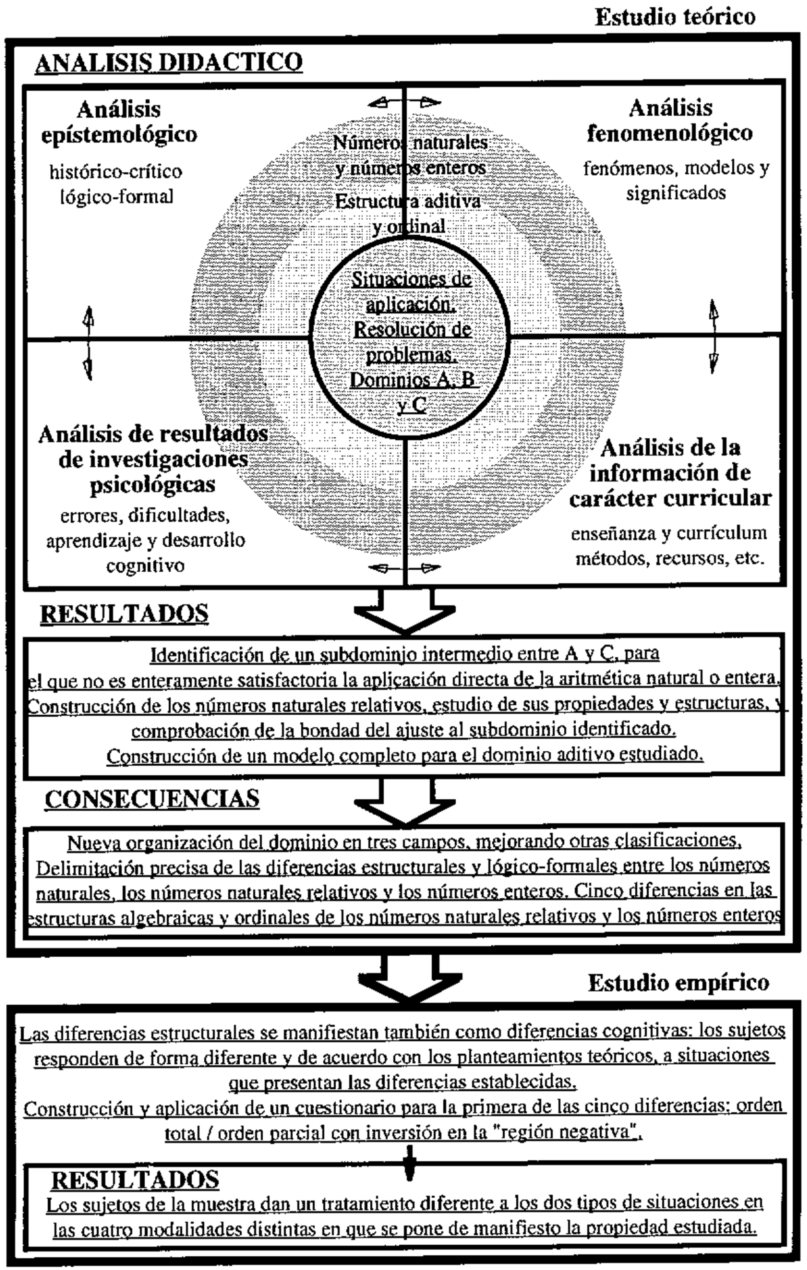


Figura 12.4.—Esquema del proceso de investigación.

12.3. Conclusiones relevantes

La confirmación de las hipótesis para alcanzar los objetivos propuestos ha requerido de un largo proceso, que ha tenido lugar en varias etapas y que se ha materializado en las consideraciones que se exponen en los capítulos 7, 8, 9, 10 y 11. Las principales conclusiones que se han obtenido en cada una de dichas etapas se exponen a continuación.

12.3.1. *Medidas y números naturales relativos*

Las conclusiones más relevantes sobre este aspecto y que se recogen en su mayor parte en el capítulo 7 son las siguientes:

* Los conceptos comparativos albergan por construcción los elementos básicos de una estructura cualitativa relativa (doble sentido y doble signo), caracterizada por la relación de precedencia y el orden inducido por ella.

* Los conceptos *métricos* se generan en una síntesis entre los conceptos *comparativos* y los *numéricos*. Las medidas integran los aspectos cualitativos y cuantitativos de la realidad. Los primeros son consustanciales a los segundos, previos y necesarios para la existencia de estos e independientes de ellos.

* El análisis epistemológico revela una diferenciación clara entre los conceptos de *cantidad* como estado de una magnitud o cualidad medible, *número* como constructo matemático y *medida* como síntesis entre cantidad y número. Esta diferenciación, que atiende a la naturaleza de los conocimientos, se ha manifestado fructífera y necesaria para delimitar el campo de los números naturales relativos.

* La separación entre las cantidades (dominio de las experiencias físicas), las medidas elementales y los números (dominio de las matemáticas), aunque formal, conceptual y analíticamente correcta, y de utilidad manifiesta en las reflexiones epistemológicas, no puede plantearse como tal en los inicios de la educación del pensamiento numérico. Por el contrario debe promoverse la simultaneidad en la construcción individual de los conceptos correspondientes.

* Se puede distinguir entre metrizaciones *«absolutas»* y *«relativas»*, según que el concepto comparativo o dominio de cantidades tenga o no primer elemento para series infinitas, o bien que el origen de cantidades se encuentre en un extremo o en un lugar intermedio de la serie (serie dualizada). Tratándose de cantidades discretas o discretizadas, las primeras serán funciones con imágenes en el conjunto de los números naturales, mientras que las metrizaciones relativas requieren de conjuntos numéricos con una «simetría central», como es el caso del conjunto de los números enteros y, especialmente, de los números naturales relativos.

* En el dominio investigado se distinguen *tres tipos de cantidades, medidas y números:* naturales, enteros y naturales relativos, *tres leyes de composición interna aditiva* diferentes en cada uno de los tres campos: adición de números naturales, adición de números enteros y adición de números naturales relativos (combinación entre adición natural y anulación-compensación) y *tres tipos de relaciones básicas* definidas por tres tipos de correspondencias y con distinto grado de implicación de las estructuras ordinales y algebraicas:

Comparaciones: aplicaciones inducidas por relaciones de equivalencia; estructura ordinal.

Transformaciones: leyes de composición externa; estructura ordinal y algebraica.

Combinaciones: leyes de composición interna; estructura algebraica.

* Las comparaciones, transformaciones y combinaciones naturales relativas presentan esquemas lógicos similares, si bien las leyes de composición tienen características diferentes.

* A partir de la comparación de medidas naturales se obtiene un tercer conjunto de números (junto a los naturales y los enteros), isomorfo al conjunto de medidas naturales relativas, al que llamamos *«números naturales relativos»;* estos números completan la estructura numérica del dominio, en el marco de un modelo completo, y cubren una laguna salvada formalmente mediante la aplicación natural y la propia definición de suma de números enteros.

* El conjunto de los números naturales relativos tiene una *estructura de semigrupo parcialmente ordenado no conmutativo y sin elemento neutro* que regula satisfactoriamente el funcionamiento de las medidas naturales relativas; hasta ahora dichas medidas habían sido incluidas en el dominio de la aritmética natural o de la aritmética entera, con los consiguientes desajustes y problemas didácticos mencionados en el capítulo 1.

* En el modelo lógico-formal del campo conceptual de los números naturales relativos es posible acceder a las medidas naturales relativas a través de la comparación de las medidas tanto naturales como enteras. Del mismo modo, es posible que la *comparación de medidas naturales relativas* dé lugar, formalmente, a los *números y medidas enteras,* sustituyendo, a efectos prácticos e intuitivos, el proceso de unificación del orden y de los dos ceros, que es más complejo.

* Las relaciones entre los números naturales relativos, los números naturales y los números enteros ponen de manifiesto una serie de *diferencias estructurales* dignas de tenerse en cuenta. De entre ellas hemos de hacer mención especial a las dos diferencias fundamentales: el tipo de orden y el tipo de estructura algebraica que presentan.

* Se establece una *nueva distribución de los dominios de aplicación de la aritmética aditiva ;* en lugar de dos tipos de aritmética (aritmética natural y entera) se contemplan tres partes diferenciadas y relacionadas entre sí, con lo que se pueden eliminar satisfactoriamente los problemas didácticos mediante un proceso secuenciado que organice el desarrollo curricular y el trabajo en el aula.

* Establecemos el concepto de *campo conceptual de los números naturales relativos* como la parte del campo conceptual aditivo constituida por el conjunto de conceptos, procedimientos y relaciones que constituyen la estructura lógico-formal de los números naturales relativos, el conjunto de actividades y funciones cognitivas que caracterizan los modos de uso de los conceptos, procedimientos y relaciones del sistema simbólico de los números naturales relativos y el campo de actuación, formado por el conjunto de cantidades y medidas naturales relativas que dan lugar a situaciones y problemas que admiten ser analizados mediante la estructura de los números naturales relativos.

* Establecemos que *pensamiento numérico natural relativo* es una línea de investigación en Educación Matemática interesada en el campo conceptual de los números naturales relativos y en los fenómenos de enseñanza y aspectos curriculares en torno al mismo.

12.3.2. ***Diferencias estructurales entre los números naturales relativos y los números enteros***

Las principales conclusiones, que figuran en su mayoría en el capítulo 8, son:

* Se detectan *cinco diferencias lógico-formales* entre los números naturales relativos y los números enteros.

* Las diferencias lógico-formales analizadas afectan a la estructura fenomenológica de los campos conceptuales de los números naturales relativos y de los números enteros. Las diferencias lógico-formales se traducen en *diferencias fenomenológicas* que se deducen de las siguientes consideraciones:

— los números naturales relativos organizan, dan respuesta, adquieren significado concreto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas en los que interviene la *comparación* o la *transformación* aditiva, tanto natural como entera, o en las que existe una estructura dual de medidas discretas formada por dos series independientes y opuestas.

— Los números enteros organizan, dan respuesta, adquieren significado concreto o se ponen en "funcionamiento" en situaciones y problemas de *escalas sin principio ni fin con una referencia central,* o en las que se efectúa un cambio de referencia u origen en series de valores discretos representables inicialmente mediante números naturales (fenomenología concreta), o bien en situaciones ...

blemas susceptibles de una manipulación algebraica (Álgebra, Geometría, etc.) o relacionados con actividades matemáticas derivadas (fenomenología matemática).

* La estructura de los fenómenos se encuentra también relacionada con la *estructura de actividades cognitivas* que se ponen en juego ante dichos fenómenos. En nuestro caso intervienen, entre otros, los siguientes esquemas cognitivos: comparación, transformación y combinación de medidas y de números; intercambio de símbolos; medida entre elementos opuestos en un contexto entero; anulación-compensación.

* Las características estructurales de los números naturales relativos se ponen de manifiesto a través de representaciones semánticas y sintácticas «naturales» e intuitivas y de amplia utilización cotidiana; si estos conceptos numéricos no reciben un tratamiento curricular adecuado se puede dificultar la comprensión y el dominio de un concepto más abstracto como es el de número entero, afectando, como es lógico, a la enseñanza y el aprendizaje de todo el conocimiento matemático que utilice dichos conceptos y propiedades o que esté fundamentado en él.

* La primera diferencia ordinal se manifiesta en cuatro tipos de tareas-esquemas diferentes: atribución de significados, signos y adjetivos duales a las regiones; comparación-valoración global de regiones; comparación de medidas con valores numéricos "negativos"; comparación de medidas con valores numéricos de diferente signo o región. Las principales características diferenciadoras son las siguientes:

— en los fenómenos de aplicación práctica de los números naturales relativos, a diferencia de lo que ocurre con los números enteros, no existe, en ningún caso, una asignación fija y universal de significados, signos y adjetivos duales a las dos regiones opuestas.

— Una comparación global de regiones es justa y determinada para números enteros y arbitraria e indeterminada para números naturales relativos.

— El orden entre los elementos de la "región negativa" es el usual entre números enteros negativos (es menor el de mayor valor absoluto), y el inverso al entero entre los números naturales relativos que se consideren como "negativos" (orden natural).

— Existe conexión y homogeneidad entre regiones para los números enteros, lo que se traduce en la utilización de términos precisos y objetivos para expresar las comparaciones, y desconexión entre regiones para números naturales relativos, lo que se traduce en la indeterminación, la independencia o la ausencia de términos que den sentido a dichas comparaciones.

* La segunda diferencia, que se refiere a la existencia de primer elemento, se pone de manifiesto en los significados concretos y en la naturaleza de los elementos, en la representación simbólica y en las transformaciones permitidas en cada una de las estructuras.

* La tercera diferencia, que se refiere a las consecuencias métricas que se deducen de la "conexión-desconexión" entre las regiones, está relacionada con la posibilidad de comparación de valores de diferente signo. En el caso de los números naturales relativos, la "ruptura" entre regiones de signos opuestos no permite efectuar medidas entre ellas.

* La diferencia existente entre un único cero (estructura entera), que es además elemento neutro, y dos ceros que no son permutables bajo la ley aditiva (estructura natural relativa), presenta una complejidad lógica que requiere de una atención en futuras investigaciones.

* Se constatan y se analizan dos tipos de leyes de composición interna: suma de números enteros, con las propiedades usuales, y suma de números naturales relativos, formada por la combinación de la adición natural y la operación denominada "anulación-compensación".

12.3.3. Situaciones y problemas del campo conceptual de los números naturales relativos

Del estudio presentado en el capítulo 9 se deducen las siguientes conclusiones:

* El concepto de *situación relativa discreta con estructura aditiva,* definido como *un problema aritmético concreto en el que intervienen cantidades/medidas discretas elementales, que operan entre sí bajo uno o varios de los tres tipos básicos de relaciones aditivas (combinación, comparación y transformación) y, de las cuales, al menos una de ellas es una cantidad/medida natural relativa,* delimita la estructura de los fenómenos, situaciones y problemas del campo conceptual de los números naturales relativos.

* Se detectan los siguientes tipos de situaciones relativas discretas:

— *Comparación y transformación naturales,* donde se excluye la combinación natural en la que no intervienen cantidades/medidas relativas sino, únicamente, la adición natural.

— *Comparación y transformación enteras,* donde se excluye la combinación entera por el mismo motivo del párrafo anterior (sólo interviene la adición entera).

— *Comparación, transformación y combinación relativas,* con particularidades motivadas por el doble cero, el paso de medidas de un signo al otro, etc.

* Se han obtenido 7 tipos de situaciones relativas simples que, junto a las dos situaciones de combinación natural y entera, dan lugar a 9 tipos de situaciones/problemas aditivos simples. Igualmente, de la composición de los tipos simples entre sí, se obtienen 32 tipos de situaciones relativas compuestas por dos si-

tuaciones simples, que, junto a las composiciones de dos combinaciones naturales y de dos combinaciones enteras (que quedan fuera del campo conceptual de los números naturales relativos), dan un total de 34 tipos de situaciones/problemas aditivos compuestos por dos situaciones simples.

* Si restringimos la clasificación a las medidas naturales y naturales relativas se obtienen:

1). *5 tipos de situaciones relativas simples* que, unidos a la combinación natural, dan un total de 6 tipos de situaciones/problemas aditivos simples, que contrasta con los cuatro tipos que se proponen en Carpenter, T. P., Moser, J. M. (1982, págs. 10 y sgtes.) y con la clasificación que propone Vergnaud, G. (1983, pág. 107). Además de la no consideración de los números y medidas naturales relativas como elementos con entidad propia y características específicas diferenciadas de las que poseen los números naturales, hemos detectado los siguientes *defectos en dichas clasificaciones:*

— la consideración de los problemas de "igualación" como un tipo simple, que en nuestra clasificación se sitúan entre los tipos que hemos denominado compuestos,

— la consideración, bajo una misma estructura numérica (la natural), de entes semántica y lógicamente diferentes,

— la consideración como "composición de transformaciones" de los problemas propios del tipo que hemos denominado combinación natural relativa,

— la consideración como tipo simple o, al menos, al mismo nivel que el resto de las categorías, de los problemas de composición de transformaciones,

— la atribución de dos papeles o significados diferentes a las medidas naturales relativas: estados relativos y transformaciones,

— la utilización de los números enteros (denominados en este caso "números relativos") para operar aditivamente en el caso de las medidas naturales relativas,

— la separación expresa entre cálculo numérico y cálculo relacional, obligada por la complejidad de un campo aún sin organizar.

2). *17 tipos de situaciones relativas compuestas* por dos simples que, unidos a la composición de dos combinaciones naturales simples, dan lugar a los 18 tipos de situaciones compuestas por dos simples que hemos encontrado para el campo aditivo.

12.3.4. Diferencias cognitivas entre los números naturales relativos y los números enteros

Las principales conclusiones del estudio experimental, que se expone en los capítulos 10 y 11 de esta memoria, son las siguientes:

* El cuestionario definitivo presentado en el capítulo 10 constituye un instrumento novedoso, idóneo y aceptable para reflejar el tratamiento cognitivo diferenciado de los sujetos a los dos tipos de situaciones que se proponen.

* Los diferentes tópicos o contextos concretos que se han utilizado para la construcción de los cuestionarios no son dominados y conocidos en la misma medida por los individuos encuestados. Así, coexisten situaciones familiares, en las que se da una gran coincidencia en las respuestas, junto a situaciones en las que se aprecian confusiones y disparidades notables.

* Los criterios que se han utilizado para la clasificación de las situaciones, a la vista de los resultados, son los correctos, salvo pequeñas modificaciones que deben ser corregidas en investigaciones posteriores.

* Los términos y argumentos que utilizan los sujetos encuestados para las situaciones enteras son característicos de una estructura de orden total, mientras que los elegidos para las situaciones relativas hacen referencia a una estructura dicotómica con una conexión imprecisa o indeterminada entre las partes, o son frases cuyo significado elimina toda posibilidad de existencia de conexión fija entre ellas; términos y argumentos que son adecuados para el tratamiento de situaciones opuestas, en las que las medidas se ajustan a una estructura de orden parcial isomorfa a la establecida teóricamente para los números naturales relativos.

* A pesar de la instrucción matemática recibida por los sujetos, sustentada en el supuesto de que la estructura aditiva y ordinal del conjunto de los números enteros es el ámbito único e idóneo para el tratamiento de todas las situaciones planteadas en los cuestionarios, se pone de manifiesto que *existe una diferenciación cognitiva clara entre ambos tipos de situaciones,* por la que, sujetos con preparación suficiente, distinguen entre una estructura de orden total y una estructura de orden parcial con inversión del sentido en la "región negativa".

* Si examinamos las zonas de respuestas esperadas a los cuatro cuestionarios se comprueba que los resultados obtenidos confirman la bondad de los planteamientos teóricos. Esto significa que las *diferencias estructurales* entre el campo conceptual de los números naturales relativos y el de los números enteros no sólo son lógico-formales (capítulo 8) y fenomenológicas (capítulo 9), sino que también son *cognitivas;* es decir, las estructuras de ambos campos conceptuales tienen status diferenciado como herramientas intelectuales.

12.4. Logros y hallazgos

En esta investigación se han conseguido logros y aportado argumentos en favor de la bondad de las seis hipótesis sometidas a prueba, de lo que se deduce la consecución de los objetivos planteados. Una revisión del proceso seguido arroja las siguientes conclusiones:

Con respecto a las hipótesis:

Hipótesis I.—En el dominio de aplicación concreta usual de la estructura aditiva y ordinal de los números naturales y los números enteros, existe un subdominio caracterizado por la intervención de un tipo de medidas discretas, relacionadas con la comparación de medidas naturales y a las que llamaremos medidas naturales relativas, entre las que se puede establecer una estructura de orden parcial y una ley de composición interna aditiva específica.

Los resultados que se exponen en el capítulo 7 ponen de manifiesto, de forma satisfactoria, la veracidad de esta hipótesis. Asimismo, los resultados que se exponen en los capítulos 8 y 9 aportan argumentos fenomenológicos y cognitivos sobre la existencia de tales medidas y sobre las características lógico-formales de las mismas. Igualmente podemos decir que los resultados del estudio experimental concuerdan también en dichos puntos.

Hipótesis II.—Existe un conjunto de números, a los que llamaremos números naturales relativos, que, con la adición y el orden convenientes, es isomorfo al conjunto de medidas naturales relativas.

A partir del conjunto de medidas naturales relativas, con la adición y el orden que se definen en el capítulo 7, y en virtud del isomorfismo que caracteriza todo proceso de metrización, se puede asegurar la existencia del conjunto de números naturales relativos con las estructuras algebraica y ordinal convenientes para que se cumplan las condiciones formales requeridas. Al mismo tiempo las consideraciones realizadas en los capítulos 8, 9 y 11 corroboran la pertinencia de tales números desde la óptica fenomenológica, cognitiva y didáctica.

Hipótesis III.—El conjunto de los números naturales relativos, con la adición y el orden definidos, presenta cinco diferencias estructurales básicas con respecto al grupo aditivo y ordenado de los números enteros. Estas diferencias son: 1) Orden total / orden parcial con inversión en la "región negativa"; 2) Sin primer elemento / con primer elemento; 3) Conexión / desconexión entre las regiones "positiva" y "negativa"; 4) Cero único / cero doble; 5) Adición entera / anulación-compensación aditiva (adición natural relativa).

La identificación y el análisis ejemplificado de las cinco diferencias, que se expone en el capítulo 8, junto a argumentos que se sustentan en las características de las estructuras algebraicas y ordinales de los dos conjuntos numéricos, presentadas en el capítulo 7, avalan la credibilidad de esta hipótesis que consideramos corroborada en su totalidad.

Hipótesis IV.—Los números naturales relativos abren una nueva vía de extensión aditiva y ordinal de los números naturales a los números enteros, integrándose junto a ellos en un modelo teórico que relaciona entre sí a todos los elementos del dominio y regulando las estructuras aritméticas aditivas correspondientes.

Las relaciones teóricas que se establecen en el capítulo 7 entre los tres conjuntos numéricos y entre las cantidades, los números y las medidas, en un esquema de conjunto, unido a la nueva distribución del dominio, tratada en el capítulo 9 y que se deduce de la introducción de estos nuevos conceptos numéricos, avalan suficientemente la credibilidad de esta hipótesis.

Hipótesis V.—El modelo mencionado permite establecer una clasificación lógico-semántica de los problemas y situaciones del dominio que amplía y precisa otras ya realizadas sobre los problemas aditivos de enunciado verbal.

Creemos que esta hipótesis ha quedado suficientemente corroborada en el capítulo 9.

Hipótesis VI.—Individuos con estudios superiores a los de Enseñanza Obligatoria[2] *dan un tratamiento semántico diferenciado a los números naturales relativos y a los números enteros cuando se presentan en situaciones elementales de comparación de medidas discretas, sobre la base de la primera de sus diferencias ordinales.*

El análisis de los resultados que se expone en el capítulo 11 proporciona indicios razonables acerca de la bondad de esta hipótesis.

Con respecto a los objetivos

La comprobación de las hipótesis ha permitido alcanzar los objetivos propuestos:

a) *Identificar, en el dominio de aplicaciones considerado, los diferentes tipos de cantidades, números y medidas discretas y las relaciones que se establecen entre ellas.*

Objetivo que damos por cubierto en su totalidad y de forma satisfactoria como consecuencia de las hipótesis I, II, IV y V.

b) *Poner de manifiesto la insuficiencia de los conceptos numéricos usuales para el tratamiento aditivo y ordinal de las situaciones y problemas del dominio.* Objetivo cubierto en su totalidad entre los capítulos 7, 8, 9 y 11 en base a las siguientes consideraciones:

— en el capítulo 7 se detecta la existencia de una laguna que se cubre teóricamente;

[2] En el momento de realización de la tesis, la Enseñanza Obligatoria abarca hasta el curso 8.º de Educación General Básica correspondiente a la edad de 14 años.

— en el capítulo 8 se observa que una parte de las situaciones y problemas del dominio presenta características que no son compatibles con los conceptos numéricos usuales;

— en el capítulo 9 se completan las consideraciones efectuadas en los capítulos anteriores y se aportan argumentos que ponen de manifiesto la insuficiencia de los números naturales y de los números enteros para un tratamiento satisfactorio del dominio estudiado;

— en el capítulo 11 se contribuye al logro completo del objetivo a través de las dificultades manifestadas por los sujetos, a pesar de su preparación, ante las cuestiones planteadas en el estudio exploratorio inicial y en la aplicación de los cuestionarios definitivos.

c) *Establecer, con base en argumentos epistemológicos, didácticos y fenomenológicos, la necesidad de un tercer tipo de números que venga a cubrir las carencias detectadas y definir tales números.*

Objetivo que damos por cubierto con las consideraciones que se exponen en los capítulos 7, 8, 9 y 11 y que resumimos a continuación.

— En el capítulo 7 se aportan argumentos epistemológicos;

— en el capítulo 8 se ponen de manifiesto y se analizan las cinco diferencias que se detectan entre los números enteros y los números naturales relativos, cuya necesidad lógica quedó establecida en el capítulo 7;

— en el capítulo 9 se aportan argumentos fenomenológicos que, unidos a la nueva organización del campo, refuerzan la necesidad de tales números;

— en el capítulo 11 se aportan datos empíricos de los que se deducen argumentos fenomenológicos y cognitivos que inciden en la necesidad de tales números y contribuyen al logro completo de este objetivo. El análisis de los tipos de situaciones, su clasificación en los cuestionarios, la determinación precisa de los elementos diferenciadores, tanto sintácticos como semánticos, y las respuestas de los sujetos ponen de manifiesto, aún más si cabe, las diferencias establecidas en el estudio teórico.

Se trata, por tanto, de un objetivo que damos por cubierto plenamente.

d) *Identificar y formular las diferencias estructurales y lógico-formales existentes entre los tres tipos de números.*

Objetivo cubierto plenamente en el capítulo 8 como consecuencia de la verificación de la hipótesis III, a cuya consecución se ha dedicado la totalidad del capítulo.

e) *Construir un modelo teórico que cumpla las siguientes funciones: integrar los elementos y relaciones en juego; ajustarse al dominio establecido; permitir una nueva clasificación de las situaciones y problemas considerados; explicar de forma plausible resultados de otras investigaciones y ser punto de partida para futuras investigaciones sobre el tema.*

Objetivo alcanzado parcialmente en el capítulo 7, en sus aspectos fundamentales, y completado en el capítulo 9 con una nueva clasificación de las situaciones que aporta explicaciones razonables a los resultados obtenidos en otras investigaciones. Este objetivo se ha cubierto, por tanto, con la verificación de las hipótesis II, III, IV y V.

f) *Proporcionar evidencia empírica a favor del nuevo campo conceptual, la bondad del modelo construido y la idoneidad de las interpretaciones y clasificaciones que de él se derivan.*

Objetivo que podemos dar por cubierto al término del estudio experimental que se expone en el capítulo 11, teniendo en cuenta que las respuestas de los encuestados se ajustan, en un porcentaje elevado, a lo que se esperaba. La comprobación de la hipótesis VI permite afirmar que los sujetos de la muestra responden a los cuestionarios delimitando, en un alto porcentaje y con respecto a la primera de las cinco diferencias establecidas, el campo de los números naturales relativos y el campo de los números enteros, lo que conduce a afirmar que, para los sujetos de la muestra, ambos campos corresponden a funciones cognitivas diferentes.

Con respecto a los objetivos complementarios:

En relación con el primero de ellos: *iniciar una línea de investigación sobre Pensamiento Numérico Relativo y sus implicaciones en Educación Matemática*, se han establecido en el capítulo 7 los aspectos básicos que delimitan un nuevo campo de estudio: el campo conceptual de los números naturales relativos. Los capítulos 8, 9 y 11 aportan argumentos que contribuyen a una visión más completa del mencionado campo.

En relación con los otros dos objetivos, a saber:

— *Experimentar y contrastar procedimientos y métodos de investigación adecuados al campo de estudio e indagar sobre los aspectos metodológicos específicos de la investigación en Educación Matemática;*

— *Poner de manifiesto la importancia del análisis epistemológico como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática;*

creemos que se han cubierto suficientemente al finalizar el capítulo 7, a tenor de la relevancia de los resultados obtenidos mediante la metodología que se ha puesto en práctica. No obstante, el contenido del capítulo 9 contribuye también a poner de manifiesto la importancia de los análisis epistemológicos y fenomenológicos como reflexión teórica fundamental para la realización de algunas investigaciones en Educación Matemática. Asimismo, a partir del estudio teórico realizado, se han construido, en el capítulo 11, unos instrumentos de recogida de datos originales que se han mostrado eficaces y que avalan el acierto en la elección de las técnicas metodológicas y del proceso seguido en la investigación.

12.5. **Algunas consecuencias y perspectivas futuras**

Desde el punto de vista epistemológico convendría completar la construcción semiformalizada del conjunto de los números naturales relativos y realizar un estudio en profundidad sobre las estructuras algebraicas y ordinales de los conjuntos numéricos con dos leyes de composición interna (aditiva y multiplicativa): necesidad y pertinencia de dichas construcciones; esquemas alternativos; consecuencias de la consideración del carácter externo de algunas de las operaciones aritméticas elementales, etc. Igualmente cabría analizar la incidencia de las propiedades topológicas elementales sobre las consideraciones anteriores.

Desde el punto de vista *didáctico y curricular* una consecuencia de este trabajo sería la necesidad de un tratamiento específico, gradual y diferenciado para ambos tipos de números.

Desde el punto de vista de la *investigación en Didáctica de la Matemática* parece conveniente una revisión de las investigaciones que han tratado de categorizar los errores en el campo numérico y establecer las condiciones de ocurrencia de los mismos.

En lo que se refiere a *pensamiento numérico*, se han sentado las bases para desarrollar una línea de investigación sobre pensamiento numérico relativo y se han reforzado los planteamientos generales sobre los supuestos conceptuales y teóricos de dicha línea de investigación. En particular, convendría continuar el trabajo sobre la resolución de problemas aditivos y la conexión con los trabajos sobre resolución de problemas de comparación multiplicativa; representación; iniciación al Álgebra; estructuras aditivas y multiplicativas; números naturales relativos y números fraccionarios y la relatividad multiplicativa; números enteros y el campo conceptual de los números enteros; la comparación de números y medidas como base de la formación matemática; los números naturales relativos a través de la historia (profundización); psicogénesis de los conceptos numéricos naturales relativos.

Con respecto a la metodología de investigación cabría comprobar en nuevos trabajos si el método que hemos denominado *análisis didáctico* se muestra igualmente eficaz en otros temas más restringidos.

Sobre la continuación inmediata y directa de la investigación que hemos presentado, cabe realizar las siguientes consideraciones sobre el estudio empírico:

— La prueba resulta demasiado larga, pudiéndose acortar en futuros trabajos mediante la unificación de los cuestionarios a.2 y a.4.

— Hay que limitar las respuestas posibles a cada situación, en el sentido de elegir la más adecuada o las dos más adecuadas, o proponer una escala de preferencias. Asimismo sería conveniente modificar los términos de la variable columna, disminuyendo o aumentando su número en función del tipo de cuestionario.

— Sería conveniente realizar un estudio transversal de las respuestas dadas a cada una de las situaciones referidas al mismo contexto en todos los cuestionarios.

— Además de un estudio experimental que corrobore los indicios encontrados, vemos la necesidad de efectuar un estudio de tipo cualitativo sobre las diferencias entre las situaciones de la misma clase así como entre los términos utilizados para valorar o comparar.

— Se han de rectificar las situaciones problemáticas, matizándolas o efectuando un estudio específico para averiguar los motivos de las disparidades existentes con respecto a las demás situaciones. Las situaciones irregulares, que son minoría, se muestran como tales en todos los cuestionarios, por lo que sería conveniente realizar un estudio específico sobre ellas.

— El análisis de correspondencias realizado, aunque ha sido muy útil para visualizar la estructura de relaciones existente en cada uno de los cuestionarios con la menor pérdida de información posible, se debe completar con un estudio similar en el que se agrupen también las situaciones de la misma naturaleza en número suficiente. Al mismo tiempo, los tres grupos formados para la variable columna se podrían haber desglosado en cuatro o más partes, para ajustar el estudio a las características óptimas requeridas por este instrumento de análisis.

En el futuro inmediato, además de realizar un estudio exploratorio sobre los cuatro puntos restantes del esquema general, manteniendo las mismas hipótesis y supuestos teóricos, habría que preparar un diseño experimental en profundidad sobre cada una de las cinco grandes diferencias. Dicho estudio se completaría con un *análisis cualitativo complementario* que abarcaría una aproximación inicial desde el punto de vista de la observación participante, triangulación y reflexión epistemológica sobre el desarrollo normal de clase en algunos grupos seleccionados. Para ello se prepararían una o varias sesiones de repaso, de una hora de duración, cuyo contenido serían las tareas ya realizadas; dichas sesiones se grabarían en vídeo, se tomaría un registro incidental y se llevaría a cabo una confrontación de puntos de vista, con la participación del profesor del grupo, y un análisis de los registros tomados.

Por último, los estudios anteriores se deben completar con una exploración *cualitativa sobre errores con números enteros y números* naturales relativos mediante la entrevista individual estructurada. Con ello se conseguiría profundizar en las condiciones y características de los errores para ampliar los datos y mejorar las conclusiones obtenidas tanto en este estudio como en otros estudios anteriores.

BIBLIOGRAFÍA

Allardice, B. S.; Ginsburg, H. P. Children's Psychological Difficulties in Mathematics [Capítulo 8]. En: Ginsburg, H. P. *The development of mathematical thinking:* Academic Press Inc.; 1983: págs. 319-350.

Apéry, R. y otros. *Penser les Mathématiques.* Editions du seuil. 1982.

Arcaví, A.; Bruckheimer, M. How shall we teach the multiplication of negative numbers? *Mathematics in School,* v. 10 (5), págs. 31-33. 1981.

Artigue, M. Epístemologie et Didactique. *Cahier de Didirem núm. 3.* Université Paris-VII. 1989.

Artigue, M. Obstacles as objects of comparative studies in mathematics and in physics (Paper presented at ICME-6, Budapest, August 1988). *ZDM 90/6,* págs. 200-204. 1990.

Arregui, J. Concepto de magnitud escalar. *Cursillos sobre Didáctica Matemática.* Madrid CSIC, v. III, págs. 25-37. 1970.

Avesar, Ch.; Dickerson, D. J. Children's judgments of Relative Number by one-to-one correspondence: A planning perspective. *Journal of experimental child psychology;* 1987; 44: págs. 236-254.

Aze, I. Negatives. ¿Are they for little one's?. *Micromath,* spring 1989, págs. 15-17.

Bachelard, G. *La formación del espíritu científico.* Buenos Aires: Siglo XXI; XI edición. 1983.

Baroody, A. Children's difficulties in subtraction: some causes and cures. *Arithmetic Teacher,* v. 32. 1984.

Bartolini, P. Addition and subtraction of directed numbers. *Mathematics Teaching,* núm. 98, págs. 34-36. 1976.

Battista, T. M. A complete model for operations on integers. *Arithmetic Teacher,* v. 30, págs. 26-31. 1983.

Bednarz, N.; Garnier, C. (eds.). *Construction des Savoirs. Obstacles et conflicts.* Otawa. Canadá: Agence d'ARC, inc. 398 pp.; 1989; ISBN: 2-89022-152-0.

Behr, M.; Harel, G. Student's errors, misconceptions and cognitive conflict in application of procedures. *Focus on learning problems in Mathematics;* 1990; 12 (3-4): págs. 75-84.

Bell, A. W. Developmental studies in the additive composition of numbers. *Recherches en Didactique des Mathematiques:* págs. 113-141.

Bell, A. Directed numbers and the bottom up currículum. *Mathematics Teaching;* 1982; (102): págs. 28-32.

Bell, A. Enseñanza por diagnóstico. Algunos problemas sobre números enteros. *Enseñanza de las Ciencias;* 1986; 4 (3): págs. 199-208.

Bell, A. Looking at children and directed numbers. *Mathematics Teaching;* 1982; (100): págs. 66-72.

Bell, E. T. *Mathematics: Queen and Servant of Science.* Mathematical Association of America. 1987.

Bell, E. T. Historia de las Matemáticas. Fondo de cultura económica.

Benzécri, J. P. et cols. *L'Analyse des données.* Pars: Dunod, 1976.

Bernard, J. E. Constructing magic square number games. *Arithmetic Teacher,* v. 26 (2), págs. 36-38. 1978.

Bisquerra, R. *Métodos de investigación educativa.* CEAC. 1989.

Blando, J.; Kelly, A.; Schneider, B.; Sleeman, D. Analyzing and modeling arithmetic errors. *Journal for Research in Mathematics Education;* 1989; 20 (3): págs. 301-308.

Booth, L. R. *Algebra: Children's strategies and errors in Secondary Mathematics Project.* London: Nfer-Nelson Publishing Company Ltd.; 1984.

Bouvier, A. directeur. *Didactique des Mathématique. Le dire et le faire.* Paris: Cedic-Nathan; 1986.

Brousseau, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques;* 1986; 7 (2): págs. 33-115.

Brousseau, G. Les obstacles epistémologiques et les problemes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques;* 1983; 4 (2): 165-198.

Brousseau, G. *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques.* Bordeaux: Thèse d'Etat; 1986.

Brousseau, G. ¿Que pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Parte primera). *Enseñanza de las Ciencias;* 1990; 8 (3): págs. 259-267.

Brousseau, G. ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas? (Segunda parte). *Enseñanza de las Ciencias;* 1991; 9 (1).

Brown, J. S. & Burton, R. R. Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive Science;* 1978; 2: págs. 155-192.

Brown, J. S. & VanLehn, K. Repair Theory: A generative theory of bugs in procedural skills. *Cognitive Science;* 1980; 4: págs. 379-426.

Brown, J. S.; Van Lehn, K. Towards a generative theory of «bugs» [Cap. 9]. En: Carpenter, Moser, Romberg. *Addition and Subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers; 1982: pp. 117-135.

Brown, S. I. Signed numbers: A product of misconceptions. The Mathematics Teacher; 1969; 62 (3): págs. 183-195.

Brun, J. La resolution de problémes arithmétiques: bilan et perspectives. *Journées sur les activités numériques et leur développement à l'école élémentaire.* CRDP de Dijon et LEAD de l'université de Dijon. 1989.

Brunschvicg, L. *Las etapas de la Filosofía Matemática.* Lautaro. Buenos Aires, 1945.

Bruter, C. P. *De l'intuition a la controverse.* págs. 82-83. Paris: Bibliothèque Scientifique Albert Blanchard; 1987.

Bunge, M. *La investigación científica.* Ariel. 1983.

Bunge, M. *Epistemología.* Ariel. Barcelona, 1980.

Burt, L. N. H. ; Bedient, J. D. *The historical roots of elementary Mathematics.* Kirkcaldy, Dover: Kirkcaldy College of Technology; 1988.

Cable, John. The ground from which directed numbers grow. *Mathematics in School;* 1971; 1 (1): págs. 10-12.

Carpenter, T.; Moser, J.; Romberg, T. edit. *Addition and subtraction: A cognitive perspective.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 1982.

Carpenter, T. P. Learning to add and subtract: An exercise in problem solving. En Silver, E. (ed.).—*Teaching and Learning Mathematical Problem Solving: Multiple Research Perspectives.* Erlbaum, Hillsdale, N. J. 1983.

Carpenter, T. P.; Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts. En Lesh, R.; Landau, M. (eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes.* Academic Press, New York. 1983.

Carpenter, T. P.; Moser, J. M. The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 15, págs. 179-202. 1984.

Carpenter, T. P.; Moser, J. M.; Bebout, H. C. Representation of addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 19, págs. 345-357. 1988.

Castro, E. *Estudio sobre resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. 1991.

Castro, E. *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de Secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Universidad de Granada. 1994.

Castro, E.; Rico, L.; Castro, E. *Números y operaciones.* Síntesis. Madrid, 1988.

Castro, E.; Rico, L.; Gil, F. Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias,* 10 (3), págs. 243-253. 1992.

Centeno, J. *Números decimales.* Síntesis. 1988.

Cid, E. *Estudio de las dificultades de los alumnos en el cálculo de expresiones numéricas.* Universidad de Zaragoza: Trabajo no publicado; 1988.

Cofman, J. Operations with negative numbers. *Mathematics Teaching,* 94, págs. 18-20. 1981.

Colectivo Periódica Pura. *Didáctica de los números enteros:* Nuestra Cultura; 1982.

Coltharp, F. L. Introducing the integers as ordered pairs. *School Science and Mathematics,* v. 66 (581), págs. 277-282. 1966.

Condamine, M. *Algébre.* Colección P. Vissio. 1971.

Conne, F. Calculs numeriques el calculs relationnels dans la resolution de problémes d'arithmetique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 5 (3), págs. 269-332. 1985.

Coquin-Viennot, D. Complexité Mathematique et ordre d'acquisition: Une hierarchie de conceptions a propos des relatifs. *Recherches en Didactiques des Mathématiques;* 1985; 6 (2-3): págs. 133-192.

Cornejo, J. M. *Técnicas de investigación social: el análisis de correspondencias.* PPU. Barcelona, 1988.

Cotter, S. Charged particles: a model for teaching operations with directed numbers. *The Arithmetic Teacher,* v. 16 (5), págs. 349-353. 1969.

Courant, Robbins. *¿Qué es la Matemática?* Madrid: Aguilar; 1979.

Cox, L. S. Systematic errors in the vertical algorithms in normal and handicapped populations. *Journal for research in Mathematics Education;* 1975; 6: págs. 202-220.

Crowley, M. L.; Dunn, K. A. On multiplying negative numbers. *The Mathematics Teacher,* v. 78 (4), págs. 252-256. 1985.

Chamorro, C. y otros. *El problema de la medida.* Síntesis. Madrid. 1988.

Chang, L. Múltiple methods of teaching the addition and subtraction of integers. *Arithmetic Teacher,* v. 33 (4), págs. 14-19. 1985.

Chevallard, I. *Sur les difficultés «protomathématiques»:* IREM d'Aix-Marseille; 1979.

Chevallard, I. *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné.* La Pensée Sauvage, Grenoble. 1985.

Chevallard, I. Le passage de l'arithmetique a l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au college. *Petit x* núm. 19, págs. 43-72. 1989.

Chilvers, P. Sam the sentry. A consistent model for operations on directed numbers. *The Australian Mathematics Teacher,* v. 40 (4), págs. 2-4. 1984.

Chilvers, P. A consistent model for operations on directed numbers. *Mathematics in School,* v. 14 (1), págs. 26-28. 1985.

Christiansen, B.; Howson, A. G.; Otte, M. (eds.). *Perspectives on Mathematics Education.* Dordrecht. Holland: Reidel; 1986.

Daife, Ahmed. *Entiers relatifs: modèles et erreurs.* Université du Québec à Montréal: Québec; 1983. U.M.I. (Dissertations abstract) : Information Publications international ltd. White Swan House, Godstone, Surrey RH9 8LW, England. Telex : 95212 IPI G.

Davis, P.; Hersh, R. *Experiencia Matemática.* Labor. 1987.

Davis, R. B. The diversity of errors in Mathematics. *Journal of Mathematical Behavior;* 1982; 3 (2): págs. 73-78.

Davis, R. B. *Learning Mathematics.* London: Routledge; 1989.

De Corte, E.; Verschaffel, L. The effect of semantic structure on first grader's strategies for solving addition and subtraction word problems. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 18, núm. 5, págs. 363-381. 1987.

De Prada, M. D. *Matemáticas. ¿Un nuevo modo de pensar?* Apuntes IEPS. Narcea, S. A. 1979.

Dexter, J. *The development of a product for the concrete manipulation of negative numbers.* Teacher College: Columbia University; 1975. 155 p. U.M.I. (Dissertations abstract): Information Publications international Ltd. White Swan House, Godstone, Surrey RH9 8LW, England. Telex: 95212 IPI G.

Dickson, L. y otros. *El aprendizaje de las matemáticas.* Labor-MEC, 1991.

Dienes, Z. P. *Estados y operadores. Vol. 1: operadores aditivos.* Teide. 1972.

Dieudonné, J. *Pour l'honneur de l'sprit humain.* Hachette, Paris. 1987.

Dodd, C. A.; Jones, G. A.; Lamb, C. E. Diagnosis and Remediation of pupil's error: Exploratory study. *School Science and Mathematics;* 1975: págs. 270-276.

Donaldson, M.; Balfour, G. Less is more: A study of language comprehension in children. *British Journal of Psychology;* 1968; 59: págs. 461-471.

Dou, A. *Fundamentos de la matemática.* Labor S. A. Barcelona, 1974.

Douady, R. *Jeux de cadres et dialectique outil-objet dans l'enseignement des mathématiques* [Thèse d'Etat]. Paris: Université Paris VII; 1984.

Dubinsky, E.; Elterman, F.; Gong, C. The student's construction of quantification. *For the Learning of Mathematics;* 1988; 8(2): págs. 44-51.

Dubisch, R. A proof that (-) x (-) = (+). *The Mathematics Teacher,* v. 64(8), pág. 750. 1971.

Eastwood, M. More models for directed numbers. *Mathematics in School,* v. 17 (3), págs. 34-35. 1983.

Engelhardt, J. M. Analysis of children's computational errors: A qualitative approach. *British Journal of Educational Psychology;* 1977; 47: págs. 149-154.

Erlwanger, S. H. Case studies of children's conceptions of mathematics- Part I. *Journal of Children's Mathematical Behavior;* 1975; 1 (3): págs. 157-283.

Ernest, Paul. The number line as a teaching aid. *Educational studies in Mathematics;* 1985; 16 (4).

Ernest, Paul. *The Philosophy of Mathematics Education.* The Falmer Press. 1991.

Ernest, Paul. The Nature of Mathematics: Towards a Social Constructivist Account. *Science & Education* 1, págs. 89-100. 1992.

Etayo, J. J. Notas sobre las ideas de cualidad y relación en Matemáticas. *Cursillos sobre Didáctica Matemática;* 1970, Madrid CSIC; v. III: págs. 38-53.

Ettline, J. F. y Smith, L. M. Flipping over numbers. *Mathematics Teacher,* v. 76 (4), págs. 54-55. 1978.

Fernández Cano, A. *Métodos para evaluar la investigación en Psicopedagogía.* Síntesis. Madrid, 1995.

Filloy, E.; Rojano, T. Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics;* 1989; 9 (2): págs. 19-25.

Fischbein, E. Introduction. En: Nesher, P.; Kilpatrick, J. (edit.). *Mathematics and Cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press; 1989: págs. 1-13.

Fischbein, E. *Intuition in Science and Mathematics.* An educational approach. Holland: Mathematics Education Library. D. Reidel Publishing Company; 1987.

Fischbein, E. *Books reviews:* Nadine Bednarz and Catherine Garnier (eds.). Construction des savoirs. Obstacles et conflicts. Otawa, Agence d'Arc, inc. 1989. 398 págs.; *Educational Studies in Mathematics* 21, pp. 479-486, 1990.

Fletcher, T. J. Talking of directed numbers. *Mathematical Education for Teaching,* v. 2 (3), págs. 3-13. 1976.

Frank, Charlotte Play Shuffleboard with negative numbers. *The Arithmetic Teacher,* v. 16 (5), págs. 395-397. 1969.

Freudenthal, H. *Mathematics as an Educational Task.* Dordrecht. Holland: D. Reidel Publishing Company; 1973.

Freudenthal, H. *Didactical phenomenology of Mathematical structures.* Dordrecht. Holland: D. Reidel Publishing Company; 1983; ISBN: 90-277-1535-1.

Friedlander, A. The Steeplechase. *Mathematics Teaching,* 80, págs. 37-39. 1977.

Fuson, K. *Children's counting and concepts of number.* New York: Springer-Verlag; 1988.

Fuson, K. Capítulo 12: *Handbook of research on Mathematics teaching and learning.* NCTM. 1992.

Galbraith, M. J. Negative numbers. *Int. Journal of Mathematics Education Sci. and Technol;* 1974; 5: págs. 83-90.

Gallardo A. y otros. Los números negativos en el contexto de la resolución de ecuaciones. Recherches en Didactique des Mathématiques. En prensa. Pág. 3.

García-Baró, M. *Categorías, intencionalidad y números.* Tecnos, 1993

Gelman, R.; Gallistel, C. R. *The child's understanding of number.* Harvard: Harvard University Press; 1986.

Gimeno, J.; Pérez, A. *La enseñanza: su teoría y su práctica.* Akal Universitaria. Madrid, 1983.

Ginsburg, H. P. *Children's arithmetic: PRO-ED, Inc.;* 1989, 2 edition.

Ginsburg, H. P.; Kossan, N. E.; Schwartz, R.; Swanson, D. Protocol methods in research on Mathematical thinking [Capítulo 1]. En: Ginsburg, H. P. *The development of Mathematical Thinking:* Academic Press, Inc.; 1983.

Ginther, J. L. Some manipulative activities for Arithmetic Drill. *School Science and Mathematics*, págs. 152-156. 1976.

Giordan, A. Interés didáctico de los errores de los alumnos. *Enseñanza de las Ciencias;* 1985: págs. 11-17.

Glaeser, G. Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques;* 1986; 2 (3): págs. 303-346.

Glaeser, G. A propos des obstacles épistémologiques. Reponse a Guy Brousseau. *Recherches en Didactique des Mathématiques;* 1984; 5 (2): págs. 229-234.

González, J.; Jiménez, M. Aproximación a los números enteros a partir de una escalera. *Suma;* 1989; 2: págs. 29-33.

González, J.L.; Iriarte, M. D.; Vargas-Machuca, I.; Jimeno, M.; Ortiz, A.; Ortiz Comas, A.; Sanz, E. *Los números enteros.* Madrid: Síntesis; 1990.

Grayson H. Wheatley. Constructivist Perspectives on Science and Mathematics Learning. *Science & Education;* 1991; 75(1): págs. 9-21.

Greer, B.; Mulhern, G. edit. *New directions in Mathematics Education.* London: Routledge; 1989.

Hart, K. M.; Brown, M. L.; Küchemann, D. E. y otros. *Children's understanding of Mathematics: 11-16:* John Murray; 1981: Cap. 6: Positive and negative numbers.

Havenhill, W. P. Though this be madness. *Arithmetic Teacher,* v. 16(8), págs. 606-608. 1969.

Hiebert, J. edit. *Conceptual and procedural knowledge: The case of Mathematics.* London: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.; 1986.

Hiebert, J. edit. *Number concepts and operations in the Middle Grades:* LEA; 1988.

Hollis, L. Y. Multiplication of integers. *The Arithmetic Teacher,* v. 14 (7), págs. 555-556. 1967.

Husserl, E. *Philosophie de l'arithmétique.* Paris: Presses Universitaires de France, 1992.

Iriarte, M. D. y otros. Test: Los enteros dentro de un contexto. *Actas Congreso Enseñanza de las Ciencias.* Santiago de Compostela; 1989: págs. 291-292.

Janvier, C., edit. *Problems of representation in the teaching and learning Mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers; 1987.

Janvier, C. Comparison of models aimed at teaching signed integers. En: *9 Conference of the international group for the Psychology of Mathematics;* Jul. 1985; 1/22-6: págs. 135-140.

Jencks, S. M.; Peck, D. M. Hot and cold cubes. *Arithmetic Teacher,* v. 24(1), págs. 70-71. 1977.

Johnson, D. R. Making - x meaningful. *The Mathematics Teacher,* v. 79(7), págs. 507-510. 1986.

Kieran, C.; Filloy, E. El aprendizaje del álgebra escolar desde una perspectiva psicológica. *Enseñanza de las Ciencias;* 1989; 7(3): págs. 229-240.

Kilpatrick, J. Variables and methodologies in research on problem solving. En Hatfield, L. L. y Bradbard, D. A. (eds.). *Mathematical problem solving: papers from a research workshop.* Columbus: Ohio, 1978.

Klein, F. *Matemática elemental desde un punto de vista superior.* Cap. II. Madrid; 1927.

Kline, M. *Matemáticas. La pérdida de la certidumbre.* Siglo XXI de España Editores, S. A. Madrid, 1985.

Kulm, G. The classification of problem solving research variables. En Goldin, G. A. y McClintock, C. E. (eds.). *Task variables in mathematical problem solving.* Philadelphia, Pensilvania: The Franklin Institute Press, 1984.

Lakatos, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología.* Alianza Editorial S. A. Madrid, 1981.

Lakatos, I. *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático.* Madrid: Alianza Universidad; 1986.

Laursen, K. W. Errors in first-year Algebra. *Mathematics Teacher;* 1978; 71: págs. 194-195.

Le Lionnais F. y colaboradores *Las grandes corrientes del pensamiento matemático.* Editorial Universitaria de Buenos Aires. 3.ª ed. 1976.

Lean, G. A.; Clements, M. A.; Del Campo, G. Linguistic and pedagogical factors affecting children's understanding of arithmetic word problems: a comparative study. *Educational Studies in Mathematics;* 1990; 21: págs. 165-191.

Lebart, L. et al. *Techniques de la description statistique.* Paris: Dunod, 1977.

Lebart, L. et al. *Traitement des données statistiques.* Paris: Dunod, 1982.

Lecourt, D. *Para una crítica de la Epistemología:* Siglo XXI; 1973.

Leddy, T. Mis-directed numbers. *Mathematics Teaching,* 78, págs. 26-28. 1977.

Ledermann, W. Children Choice. *Mathematics in School,* v. 1 (7), pág. 11.1972.

Lewis, A. B.; Mayer, R. E. Student's miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology;* 1987; 79 (4): págs. 363-371.

Lizcano, E. *Imaginario colectivo y creación matemática. La construcción social del número, el espacio y lo imposible en China y en Grecia.* Gedisa-MEC. 1993.

Lombardo Radice, L. *La Matemática de Pitágoras a Newton.* Barcelona: Laia; 1983.

Luth, L. M. A model for arithmetic of signed numbers. *The Arithmetic Teacher,* págs. 220-222. 1967.

Maddy, P. *Realism in Mathematics.* Oxford University Press. 1990.

Malpas, A. J. Subtraction of negative numbers in the second year: anatomy of a failure. *Mathematics in School,* v. 4 (4), págs. 3-5. 1975.

Maurer, S. B. New knowledge about errors and new views about learners: what they mean to educators and more educators would like to know. Schoenfeld, A. *Cognitive Science and Mathematics Education.* Hillsdale, New Jersey.: Lawrence Erlbaum Associates Publishers; 1987: Cap. 7, págs. 165-187.

Milne, E. Disguised practice for multiplication and addition of directed numbers. *Arithmetic Teacher,* v. 16 (5), págs. 397-398. 1969.

Molinoski, M. Black Jack. *Arithmetic Teacher,* v. 25 (5), pág. 52. 1978.

Monod, Jean-Daniel. A propos de l'erreur en mathématiques. Notion de cartes mentales. *Math Ecole;* 1991; (146): págs. 10-13.

Mosterín, J. *Conceptos y teorías en las Ciencias.* Madrid: Alianza Universidad; 1984.

Movshovitz-Hadar, M.; Inbar, S.; Zaslavsky, O. Sometimes students' errors are our fault. *Mathematics Teacher;* 1987; 80: págs. 191-194.

Movshovitz-Hadar, N.; Inbar, S.; Zaslavsky, O. Students' distortions of theorems. *Focus on Learning Problems in Mathematics;* 1986; 8 (1): págs. 49-57.

Movshovitz-Hadar, N.; Zaslavsky, O.; Inbar, S. An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education;* 1987; 18 (1): págs. 3-14.

Murray, P.; Mayer, R. Preschool children's judgments of Number Magnitude. *Journal of Educational Psychology,* v. 80, núm. 2, págs. 206-209. 1988.

Nesher, P. Levels of Description in the Analysis of Addition and Subtraction Word Problems. En Carpenter, T. P.;

Moser, J. M.; Romberg, T. A. (eds.). *Addition and Subtraction: A Cognitive Perspective.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers. Hillsdale, New Jersey. 1982.

Ogawa, R. T.; Malen, B. Towards Rigor in Reviews of Multivocal Literatures: Aplying the Exploratory Case Study Method. *Review of Educational Research,* v. 61 (3), págs. 265-286. 1991.

Orman, G. V. Two aspects concerning "General Theory of Directed Numbers" by Franco Spisani and an application. *International Logic Review,* v. 32, págs. 67-71. 1985.

Palermo, D.S. More about «less»: A study of language comprehension of «less». *Developmental Psychology;* 1973; 10: págs. 827-829.

Peterson, J. C. Fourteen different strategies for multiplication of integers or why (-1) x (- 1) = (+ 1). *The Arithmetic Teacher,* v. 19(5), págs. 396-403. 1972.

Phillips, E. R. Negative number x negative number gives positive number: an understandable proof for High School students. *School Science and Mathematics,* v. 71 (9), págs. 797-800. 1971.

Piaget, J.; Inhelder, B.; Szeminska, A. *The child's conception of geometry.* London: Routledge and Kegan, P. 1960.

Piaget, J. *Introducción a la Epístemología Genética. El pensamiento matemático.* Buenos Aires: Paidos; 1978.

Piaget, J. *Investigaciones sobre la contradicción.* Madrid: Siglo XXI; 1978.

Piaget, J. *Tratado de lógica y conocimiento científico.* Buenos Aires: Paidós; 1979.

Piaget, J.; Beth, E. W. *Epístemología Matemática y Psicología.* Barcelona: Crítica; 1980.

Piaget, J.; Choquet, G.; Dieudonné, J.; Thom, R. y otros. *La enseñanza de las matemáticas modernas.* Alianza Editorial S. A. Madrid 3.ª edic., 1983.

Pinchback, C. L. Computational errors of seventh and eighth grade students. En: Laboratoire I.M.A.G. (ed.). *Proceedings of the fifth conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education;* Grenoble. France; 1981: págs. 210-215.

Pinchback, C. L. Types of errors exhibited in a remedial mathematics course. *Focus on Learning Problems in Mathematics;* 1991; 13 (2): págs. 53-62.

Polya, G. *Como plantear y resolver problemas.* Trillas. México, 1965.

Polya, G. *Matemáticas y razonamiento plausible.* Tecnos. Madrid, 1966

Popper, K. R. *El desarrollo del conocimiento científico.* Buenos Aires: Paidós; 1979.

Puig, L.; Cerdán, F. *Problemas aritméticos escolares.* Síntesis. Madrid, 1988.

Pycior, H. M. George Peacock and the British origins of Symbolical Algebra. *Historia Mathematica;* 1981; 8: págs. 23-45.

Radatz, H. Error analysis in Mathematics Education. *Journal for research in Mathematics Education;* 1979; 10: págs. 163-172.

Radatz, H. Students' errors in the Mathematical Learning Process: a Survey. *For the Learning of Mathematics;* 1980; 1 (1): págs. 16-20.

Resnick, L.; Ford, W. *La enseñanza de las Matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Paidós. MEC. Barcelona, 1990.

Rico, L. y Gutiérrez, J. (edit.). *Formación científico-didáctica del Profesor de Matemáticas de Secundaria.* ICE Universidad de Granada. 1994.

Richardson, M. *Fundamentos de la Matemática.* CECSA. 1976.

Riley, M. S.; Greeno, J. G.; Heller, J. I. Development of children's problem-solving ability in arithmetic. En Ginsburg, H. P. (ed.). *The Development of Mathematical Thinking.* Academic Press, New York. 1983.

Ringel, P. J. Sliding into negative integers. *Grade Teacher;* 1970; 87 (6): págs. 41, 176-177.

Rosnick, P.; Clement, J. Learning without understanding: The effect of tutoring strategies on algebra misconceptions. *The journal of Mathematical Behavior;* 1980; 3: págs. 3-27.

Rossini, R. A propos des nombres relatifs. *Math. Ecole,* 25 (121), págs. 18 - 23. 1986.

Rousset-Bert, S. Stratégies de prise en compte de l'erreur par des enseignants de maths en liaison avec certaines de leurs représentations. *Petit X;* 1990; (25): págs. 25-58.

Russell, B. *Ciencia y Filosofía.* Madrid: Aguilar; 1973.

Russell, B. *Introducción a la Filosofía Matemática.* Barcelona: Paidós; 1988.

Salin, M. H. *Le rôle de l'erreur dans l'apprentissage des mathématiques à l'école primaire* [DEA de Didactique des Mathématiques]. Université de Bordeaux; 1976.

Schaeffer, B.; Eggleston, V. H.; Scott, J. L. Number development in young children. *Cognitive Psychology,* núm. 6, págs. 357-379. 1974.

Schoenfeld, A. *Mathematical problem solving.* Academic Press. 1985.

Schoenfeld, A. *Cognitive Science and Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum Associates Publishers. 1987. Hillsdale, New Jersey.

Schoenfeld, A. Explorations of student's mathematical beliefs and behavior. *Journal for Research in Mathematics Education;* 1989; 20 (4): págs. 338-355.

Schübring, G. Ruptures dans le statut mathematique des nombres negatifs. *Petit X;* 1986; (núm. 12): págs. 5-32.

Schultz, J. E. Why I don't have any examples of negative numbers. *The Arithmetic Teacher,* v. 20 (5), pág. 365. 1973.

Scriven, M. Philosophical inquiry methods in Education. En: Jaeger, R. M. (ed.). *Complementary Methods for Research in Education.* Washington: AERA, 1988.

Segovia, I. y otros. *Estimación en cálculo y en medida.* Síntesis. Madrid, 1989.

Semadeni, Z. A principle of concretization permanence for the formation of arithmetical concepts. *Educational Studies in Mathematics;* 1984; 15: págs. 379-395.

Shiu, C. M.; Bell, A. W. *Directed numbers 1, 2, 3.* Shell Centre for Mathematical Education. University of Nottingham: unpublished papers; 1981.

Sicklick, F. P. Patterns in integers. *The Mathematics Teacher;* 1975; 68 (4): págs. 290-292.

Siegel, S. *Estadística no paramétrica.* Trillas. México, 1970.

Siegler, R. S.; Robinson, M. The development of numerical understanding. En Reese, H. W.; Lipsott, L. P. (eds.). *Advances in child development and behaviour,* volume 16, págs. 241-312. New York: Academic Press. 1982.

Sierpinska, A. Obstacles épistémologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 6 (1), págs. 5-67. 1985.

Sierpinska, A. On the concept of epístemological obstacle in research on teaching and learning mathematics. En: Steiner, H.; Hejny, M. *Proceeding of the international symposium on research and development in Mathematics Education;* August 3-7, 1988; Bratislava: In press: págs. 21-36.

Skemp, R. *Psicología del aprendizaje de las Matemáticas.* Morata. 1980.

Sleeman, D. An attempt to understand

student's understanding of basic algebra. *Cognitive Science;* 1984; 8: págs. 387-412.

Sleeman, D. & Brown, J. S. (Eds.). *Intelligent tutoring systems.* London: Academic Press; 1982.

Sleeman, D. *Mis-generalization: An explanation of observed mal-rules.* Stanford, CA: Stanford University; 1984; Technical Report: Heuristic Programming Project.

Snell, K. S. Integers. Introduction of directed numbers. *The Mathematical Gazette,* v. 54, págs. 105-109. 1970.

Spagnolo, F. L'intervento della nozione di operatore negli ampliamenti numerici. L'educazione Matemática, vol. I, núm. 2, págs. 169-185. 1986.

Spisani, F. General theory of directed numbers. *International Logic Review,* v. 32, págs. 33-66. 1985.

Steffe, L. P. Inconsistencies and cognitive conflict: A constructivist's view. *Focus on learning problems in Mathematics;* 1990; 12 (3-4): págs. 99-109.

Stegmüller, W. *Teoría y experiencia:* Ariel; 1979.

Steinberg, R. M. Instructions on derived facts strategies in addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education,* v. 16, núm. 5, págs. 337-355. 1985.

Steiner, H. G. y otros (eds.). *Theory of Mathematics Education. ICME 5.* Institut für Didaktik der Mathematik. Universität Bielefeld. 1984.

Thompson, P.; Dreyfus, T. Integers as transformation. *Journal for research in Mathematics Education;* 1988; 19 (2): págs. 115-133.

Tieszen, R. L. *Mathematical Intuition. Phenomenology and Mathematical Knowledge.* Kluwer Academic Publishers. 1989.

Tirosh, D. Inconsistencies in student's Mathematical constructs. *Focus on learning problems in Mathematics;* 1990; 12 (3-4): págs. 111-129.

Tymoczko, T. *New directions in the Philosophy of Mathematics.* Boston: Birkhäuser; 1986.

Van den Brink, J. Realistisch rekenonderwijs aan jonge kinderen. *Didaktief,* maart 1990, págs. 20-22.

Van Hiele, P. M. *Structure and Insight. A theory of Mathematics Education.* Academic Press Inc. 1986.

Van Lehn, K. Arithmetic Procedures are induced from examples [Capítulo 6]. En: Hiebert, J. *Conceptual and procedural knowledge: the case of Mathematics.* Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Inc., Publishers; 1986: Cap. 6, págs. 133-179.

Van Lehn, K. Bugs are not enough: Empirical studies of bugs, impasses and repairs in procedural skills. *The journal of Mathematical Behavior;* 1982; 3(2): págs. 3-71.

Van Lehn, K. On the representation of procedures in Repair Theory [Capítulo 5]. En: Ginsburg, H. (edit.). *The development of mathematical thinking.* London: Academic Press, Inc.; 1983: Cap. 5, págs. 197-252.

Vergnaud, G.; Durand, C. Structures additives et complexité psychogénetique. *Revue Francaise de Pédagogie;* 1976; 36: págs. 28-43.

Vergnaud, G. *L'enfant, la Mathématique et la réalité:* Peter Lang; 1981.

Vergnaud, G. Difficultés conceptuelles, erreurs didactiques et vrais obstacles épistémologiques dans l'apprentissage des mathématiques. En: Bednarz, N.; Garnier, C. (Dir.). *Construction des savoirs. Obstacles & conflicts.* CIRADE. Agence d'ARC inc. Otawa. 1989, págs. 33-40.

Vergnaud, G. Epístemología y Psicología de la Educación Matemática [Capítulo 1].

En: Nesher, P.; Kilpatrick, J. *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Cambridge: Cambridge University Press; 1990: págs. 14-30.

Vergnaud, G. La teoría de los campos conceptuales. En: Sánchez, E.; Zubieta, G. (eds.). *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas. Escuela Francesa.* Cinvestav - IPN. México D. F., págs. 88-117. 1993.

Vinner, S. Inconsistencies: their causes and function in learning Mathematics. *Focus on learning problems in Mathematics;* 1990; 12 (3-4): págs. 85-98.

Weiner, S. L. On the development of more and less. *Journal of Experimental Child Psychology;* 1978; 26: págs. 271-287.

Whiffing, P.; Aze, I. A directed number starter. *Micromath,* spring 1989, págs. 14-15. 1989.

Wilson, P. S. Inconsistent ideas related to definitions and examples. *Focus on learning problems in Mathematics;* 1990; 12 (3-4): págs. 31-47.

Wollman, W. Determining the sources of errors in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education;* 1983; 14: págs. 169-181.

Young, R. & O'Shea, T. Errors in children subtraction. *Cognitive Science;* 1981; 5: págs. 153-177.

Zacharías, J. R. The importance of quantitative thinking: A matter of Math. *National Elementary Principal,* 56, págs. 20-27. 1976.

ÍNDICE

PRIMERA PARTE
EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN. CONCEPTOS Y MÉTODOS

CAPÍTULO 1
ORIGEN, EVOLUCIÓN Y DESCRIPCIÓN GENERAL DEL PROBLEMA

CAPÍTULO 2
MARCO METODOLÓGICO Y PLAN DE TRABAJO

SEGUNDA PARTE
ANÁLISIS DIDÁCTICO: REVISIÓN DE LOS CONOCIMIENTOS Y PRIMERAS CONCLUSIONES

CAPÍTULO 3
HISTORIA Y EPISTEMOLOGÍA

CAPÍTULO 4
APRENDIZAJE Y DESARROLLO COGNITIVO

CAPÍTULO 5
FENOMENOLOGÍA, ENSEÑANZA Y CURRÍCULUM

CAPÍTULO 6
SEGUNDA FASE DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

TERCERA PARTE
ESTUDIO TEÓRICO

CAPÍTULO 7
MEDIDAS Y NÚMEROS NATURALES RELATIVOS

CAPÍTULO 8
DIFERENCIAS ESTRUCTURALES ENTRE LOS NÚMEROS NATURALES RELATIVOS Y LOS NÚMEROS ENTEROS

CAPÍTULO 9
ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO DE LAS SITUACIONES RELATIVAS DISCRETAS CON ESTRUCTURA ADITIVA

CUARTA PARTE
ESTUDIO EMPÍRICO

CAPÍTULO 10
DISEÑO DEL ESTUDIO EXPERIMENTAL. VARIABLES E INSTRUMENTOS DE RECOGIDA Y ANÁLISIS DE DATOS

CAPÍTULO 11
APLICACIÓN DE LOS CUESTIONARIOS. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

QUINTA PARTE
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS

CAPÍTULO 12
CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS FUTURAS