UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CARACTERIZACION DE SUJETOS CON TALENTO EN RESOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

TESIS DOCTORAL

MARYORIE BENAVIDES SIMON

GRANADA, 2008

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: Maryorie Jocelyn Benavides Simon
D.L.: Gr. 323-2008
ISBN: 978-84-691-2505-2

UNIVERSIDAD DE GRANADA

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

CARACTERIZACION DE SUJETOS CON TALENTO EN RESOLUCION DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Memoria que presenta la profesora Maryorie Benavides Simon para optar al grado de Doctor

Fdo: Maryorie Benavides Simon

Realizada bajo la dirección de los Profesores
Dr. Enrique Castro Martínez y Dr. Isidoro Segovia Alex

Fdo.: Prof. Dr. Enrique Castro **Fdo.: Prof. Dr. Isidoro Segovia**

GRANADA, 2008

Esta Tesis ha sido realizada en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada en el grupo de investigación Pensamiento Numérico.

Ha sido realizada dentro del proyecto SEJ2006-09056 "Representaciones, nuevas tecnologías y construcción de significados en educación matemática" financiado por el Ministerio de Educación y Ciencia y cofinanciado con fondos FEDER.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi gratitud:

A los directores de esta Tesis Doctoral, los Doctores Enrique Castro Martínez e Isidoro Segovia Alex:

Al Dr. Enrique Castro, le agradezco sus sugerencias, conocimientos y aportaciones que me han guiado hasta la culminación de este trabajo, junto al tiempo dedicado, sin los cuales no podría haberse realizado esta investigación. A él se deben la mayor parte de las ideas que se escriben en esta memoria.

Al Dr. Isidoro Segovia, por brindar sugerencias y aportaciones para el trabajo de investigación.

A la Dra. Encarnación Castro, por sus consejos en mi formación académica y su disposición para orientarme cuando lo he necesitado.

En general, a todos los profesores del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, por la oportunidad que me brindaron de aprender de cada una de sus asignaturas.

A los miembros del Grupo de Investigación Pensamiento Numérico y Algebraico por su disposición cuando solicitaba su colaboración.

A Alexander Maz y Miguel Villarraga quienes me brindaron su amistad, colaboración y apoyo en mis estudios de doctorado.

A MI PADRE,

LUIS BENAVIDES CHARLIN.

INDICE

ANEXOS

FIGURAS

TABLAS

Introducción

Este trabajo de tesis surge por la necesidad actual de atención diversificada que requieren los alumnos con talento. Antes del siglo XX la atención de los niños y jóvenes con talento no era motivo de preocupación, ya que se consideraba que no requerían ayudas y recursos especiales para su educación. Actualmente, existe una mayor conciencia respecto a que estos alumnos sí necesitan ayudas y apoyos especiales para lograr el máximo desarrollo de sus capacidades, y existe también un mayor conocimiento sobre los procesos de identificación y las estrategias más adecuadas para dar respuesta a sus necesidades educativas. Sin embargo, a pesar de este mayor reconocimiento, las necesidades educativas de estos alumnos no son suficientemente atendidas por los sistemas educativos más preocupados por aquellos que tienen discapacidad o problemas de aprendizaje. Al respecto, es preciso no olvidar que si los niños superdotados o con talento no reciben de forma oportuna una atención educativa a sus capacidades y necesidades específicas también pueden presentar dificultades de aprendizaje o alteraciones en la personalidad y del comportamiento, incluso en algunos aspectos pueden llegar a mostrarse incompetentes. Por ello, es impostergable que los sistemas educativos y las escuelas desarrollen acciones orientadas a proporcionar una respuesta educativa que promueva el pleno desarrollo, aprendizaje y participación de estos alumnos y alumnas.

Las alumnas y alumnos con talento no son un grupo homogéneo, sino que por el contrario son tan diferentes entre sí como el resto de los niños. Sus necesidades educativas son distintas, ya que éstas pueden variar en función de factores internos del alumno y de los contextos en los que se desarrolla y aprende. Las necesidades también varían según la edad; en ciertas edades las de tipo afectivo y social son más importantes que las de tipo intelectual. Esto no es óbice para que posean aspectos comunes. Según

Freeman (1988), hay dos características que comparten y que les diferencian del resto de los alumnos:

1. Aprenden más rápidamente.
2. Tienen mayor profundidad y extensión en el aprendizaje.

Las dos características señaladas han de tenerse muy presentes a la hora de definir tanto la respuesta educativa como la intervención psicopedagógica que puedan requerir estos alumnos de forma temporal o permanente a lo largo de su escolaridad. Es importante además considerar los siguientes aspectos señalados por Genovard y González (1993):

- Mejorar los procesos de identificación. Muchos alumnos superdotados o con talentos específicos pasan desapercibidos porque no tienen oportunidades de demostrar sus habilidades, debido a que en la escuela se plantean unas mismas exigencias para todos y las propuestas educativas y el tipo de actividades suelen estar pensadas para el supuesto “alumno promedio”. Por ello, es fundamental identificar a estos alumnos, no con el fin de “ponerles una etiqueta” sino para hacerlos visibles y asegurar que reciban una educación adecuada. De esta forma será posible asegurar la igualdad de oportunidades para este colectivo.

- Realizar una evaluación del alumno o alumna en el contexto educativo en el que se desarrolla y aprende que permita identificar sus necesidades educativas específicas y que sirva para la toma de decisiones sobre las adaptaciones del currículo y sobre los recursos y ayudas que hay que proporcionar a cada uno para optimizar el desarrollo de sus capacidades.

- Los alumnos que estén cursando enseñanza secundaria son en términos generales, los más susceptibles de ser atendidos a través de la aceleración y el enriquecimiento curricular. Asimismo, en el caso de aquellos que tienen un talento específico de tipo musical o matemático, se les debe aconsejar que los atiendan instituciones que estén especializadas en la enseñanza y formación de estas materias.

Las investigaciones de los sujetos con talento se han centrado en tres grandes temas: la clarificación del concepto talento, en la determinación de formas de identificar a los sujetos con talento y en la formas de intervención con estos alumnos. El trabajo que presentamos está centrado en la fase de identificación, pero realizamos también un análisis conceptual del término talento.

Conviene reiterar el carácter temporal, de proceso, de la evaluación e identificación del talento. Esto implica un aspecto importante: cuándo identificar, es decir, si debe de hacerse una identificación precoz del talento o es conveniente esperar a edades más tardías. Sobre este punto existen diversas posiciones al respecto, que abarcan desde una identificación lo más temprana posible, incluso desde los primeros meses de vida hasta los partidarios de una identificación a partir de la finalización de la maduración neurológica, en torno a la adolescencia. Los defensores de una identificación precoz aducen que así se puede favorecer la evolución de las altas habilidades del niño, aún conociendo el riesgo de que el diagnóstico sea prematuro y realmente se esté en presencia de un niño precoz, en el que su desarrollo temprano terminará por igualarse con la media en edades posteriores. Esta posibilidad de establecer un diagnóstico erróneo precocidad-talento es enfatizada por los partidarios de un diagnóstico más tardío.

Sin embargo todo este proceso sería estéril si no tuviese como horizonte b planteado por Treffinger y Feldhusen (1996) sobre que la identificación debe ser vista como un proceso continuo, no como un proceso único que dice de una vez y para siempre si un niño es dotado o no. Los talentos emergen y crecen evolutivamente, y algunos no llegan a emerger porque no se produce una adecuada estimulación. Es importante que todos los que trabajan con niños y jóvenes vean los talentos y potencialidades como algo educable y emergente, no como fijo e inmutable.

Destacar que la evaluación inicial para identificar a los alumnos con talento es tan sólo el inicio del proceso. Esta debe ser complementada con una evaluación del alumno en el contexto educativo en el que se desarrolla y aprende, con el fin de identificar qué ayudas y recursos hay que proporcionarle, y qué modificaciones hay que realizar en dicho contexto y en la respuesta educativa que se le ofrece para dar respuesta a sus necesidades educativas y optimizar el desarrollo de sus capacidades. Lo anterior conlleva dar mayor importancia a la evaluación de aspectos educativos y pedagógicos, porque la evaluación de estos aspectos es la que nos va a proporcionar mayor información para adaptar el currículo, definir las estrategias de enseñanza, y la organización y clima del aula, ya que los aspectos afectivos y relacionales son de gran importancia en el caso de estos alumnos.

En los últimos años se han realizado investigaciones de sujetos con talento, relacionadas con la resolución de problemas, en ellas se destacan las características de los procesos que utilizan en la resolución de problemas, pero falta más especificidad en cuanto a las estrategias y errores que cometen en vía de una futura intervención educativa que tenga en consideración tanto lo correcto como los errores cometidos en la actividad matemática de estos niños.

En el trabajo de tesis que presentamos pretendemos evaluar desde una perspectiva diagnóstica orientada a la intervención a un conjunto de alumnos con talento para detectar sus formas de pensamiento en la resolución de problemas aritméticos que se pueden catalogar como problemas de estructura multiplicativa, en el sentido que Vergnaud (1983, 1988) le da al término. La tesis se enmarca en el grupo de investigación Pensamiento Numérico del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y de alguna manera trata de indagar sobre el "sentido numérico" (Bruno, 2000; Castro, 2001) que poseen los estudiantes con talento y los procesos de pensamiento asociados al mismo.

El trabajo ha requerido la construcción y validación de un cuestionario de problemas y la realización de entrevistas individuales. Todo ello lo hemos organizado en los siguientes capítulos.

El capítulo 1 contiene el planteamiento del problema, en él se justifica la importancia y actualidad del tema, se hace especial énfasis en la contextualización y enunciado de las preguntas de investigación y su transformación en los objetivos de investigación que nos proponemos.

En el capítulo 2 se realiza una revisión del concepto de talento y su diferenciación del término superdotado, con el que se confunde muy a menudo en la literatura. Se exponen los otros dos grandes bloques, además del análisis conceptual, en los que se refiere a los estudios sobre la superdotación y el talento: identificación e intervención. Un apartado importante del capítulo lo constituye la revisión de investigaciones sobre el talento matemático.

El capítulo 3 trata la metodología que se ha seguido en la investigación. Contiene una descripción detallada de las variables que intervienen en el estudio, de los sujetos y de las características del bloque de problemas utilizados, cómo se seleccionaron los problemas para constituir el instrumento de recogida de datos y cómo se aplicó en el estudio. Así mismo, se describe el diseño de la entrevista individual que realizamos a un grupo de seis sujetos.

El análisis del rendimiento de los sujetos con talento y su comparación con un grupo de sujetos que no superaron el umbral para ser seleccionados como tales constituye el capítulo 4. Además, se analiza en él la validez del cuestionario de problemas construido como test de aptitud específico.

En el capítulo 5 se realiza un análisis de los problemas que se han utilizado como test de aptitud en esta investigación. Se analiza en primer lugar los tipos de problemas y en la segunda parte se realiza un análisis de ítems.

Las representaciones, los procedimientos y las estrategias que los sujetos con talento han empleado en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, conforman el contenido del capítulo 6. Después de describir su frecuencia por tipos de problemas, realizamos una síntesis de las estrategias especiales que consideramos son representativas del talento matemático que estos niños han puesto en juego.

Una de las características metodológicas de esta tesis es su complementariedad metodológica, en la que utilizamos entrevistas individuales para determinar la fiabilidad, de los resultados obtenidos mediante cuestionarios escritos individuales aplicados en grupo. También se utilizan las entrevistas para profundizar en los tipos de errores sistemáticos determinados en el capítulo 7. Ello nos sirve para ejemplificar el modelo de análisis diagnóstico de unos pocos sujetos.

Las conclusiones obtenidas en esta investigación se exponen en el capítulo 9, organizadas de acuerdo a las preguntas que nos planteamos en el capítulo 1 y desglosadas según los objetivos de la investigación. Así mismo, enumeramos posibles implicaciones para la educación de los niños con talento, limitaciones de la investigación y perspectivas de futuro.

Capítulo 1

Planteamiento del problema

1.1. Introducción

La temática en la que se inserta el problema de investigación considerado en este trabajo de tesis doctoral está relacionada con dos campos de estudio: los sujetos con talento y la resolución de problemas en un campo específico de conocimiento. Cada uno de ellos funciona independientemente y se han realizado abundantes aportes que han permitido conocer algo más sobre sus respectivas temáticas. Sin embargo, no hay investigaciones que clarifiquen la relación entre ellos, que pongan de manifiesto cómo se desenvuelven desde el punto de vista cognitivo los sujetos con talento de una determinada edad en resolución de problemas de un campo específico de conocimiento, concretamente en el de la estructura multiplicativa.

Este capítulo sitúa el problema de investigación, tratando de mostrar su actualidad, importancia y pertinencia del estudio, dando razones que justifican la necesidad de abordar investigaciones dentro del área de la educación de niños con talento, en un campo de conocimiento específico dentro de la matemática. Finalmente se plantean una serie de preguntas y objetivos de la investigación, con los cuales se trata de dotar al problema planteado de un mayor detalle para su operatividad.

1.2. La atención a la diversidad

El término *diversidad* hace referencia a la "*cualidad de una población, o de una muestra, conjunto o agregado, cuando sus elementos o unidades no son todos iguales. Si se constituyen clases o grupos de acuerdo con las variaciones observadas de un cierto carácter, la diversidad aumenta con el número de grupos constituidos y con la aproximación al reparto uniforme de los individuos entre los grupos*" (RAE, 1992, p.229).

En el sistema educativo la diversidad se manifiesta de diversos modos: diversidad de centros, diversidad del profesorado, diversidad del alumnado (Gutiérrez y Maz, 2004). Cuando nos referimos a los estudiantes, la diversidad se hace ostensible en sus diferentes capacidades, facultades físicas y psíquicas, intereses, motivaciones, ambiente sociocultural, factores étnicos o religiosos y, a ella, se debe dar respuesta educativa promoviendo el respeto a las mínorías y atención a las diferencias individuales. '*Toda persona tiene derecho a recibir una educación que desarrolle al máximo sus capacidades*" (Machado, 2004, p. 9), sin embargo, esto no ha sido siempre así, y a pesar de que estas diferencias se han encontrado presentes no han sido tenidas en cuenta por los sistemas educativos, ni por los profesores, que han ofrecido respuestas educativas uniformes a realidades muy diversas (Gutiérrez y Maz, 2004).

La UNESCO ha sido sensible al tema de la diversidad y, en numerosos documentos auspiciados por este organismo internacional (veáse Machado 2004), se ha incidido en la necesidad de atender las diferencias individuales en educación:

> *Cada niño tiene características, intereses, capacidades y necesidades que le son propias; si el derecho a la educación significa algo, se deben diseñar los sistemas educativos y desarrollar los programas de modo que tengan en cuenta toda la gama de esas diferentes características y necesidades*
>
> (UNESCO, Marco de Acción de la Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad, Salamanca, 1994)

Continuando en esta línea, Ruiz y Márquez (2006) señalan que "*la diversidad implica reconocer y responder mediante acciones educativas concretas a las diferencias de los niños derivadas de sus características específicas*" (p. 217) en la que la diversidad considere que hay niños potencialmente sobresalientes. También destacan estos autores que la escuela regular no ofrece una respuesta educativa diversificada, sino excluyente, en la que los niños son tratados de manera homogénea sin considerar sus diferencias y necesidades vinculadas a sus características.

Una de las consecuencias de la falta de atención a las diferencias individuales es que muchas personas no desarrollen plenamente sus talentos y capacidades. "*Un buen porcentaje de alumnos con talento puede ver limitado el desarrollo de sus potencialidades, o bien presentar dificultades de aprendizaje y de participación, al no considerar sus necesidades educativas específicas*" (Machado, 2004, p. 9).

Los sistemas educativos de muchos países han sido cada vez más permeables a las ideas de atención a la diversidad. Concretamente refiriéndose al sistema educativo español Sánchez (2003) dice que "*la atención a la diversidad es uno de los requisitos básicos del sistema educativo español. En las últimas décadas se ha ido perfilando un modelo educativo de integración escolar y apoyo psicopedagógico para alumnos que manifiestan necesidades educativas especiales.*" (p. 7).

Concretamente, la respuesta que da la LOGSE (1990) a esta diversidad se plasma en una estrategia de *diversificación curricular* que se centra en tres puntos:

- En el concepto de adaptabilidad del currículo, en el sentido de un currículo abierto y flexible,
- Las adaptaciones curriculares no significativas, las que realiza el profesor en un momento determinado,
- Las adaptaciones curriculares individualizadas.

La diversificación curricular como estrategia general de respuesta a la diversidad en el aula Ruiz y Márquez (2006) la resumen en cuatro puntos:

1. Establecer propósitos viables para todos
2. Establecer metas acordes con las posibilidades reales de todos los niños

3. Contemplar en las actividades las características de todos los niños
4. Desarrollar al máximo el potencial de todos los niños.

Estas adaptaciones curriculares cuando se trabajan al nivel de aula requieren una evaluación de los alumnos que permita conocer sus características individuales.

1.3. Respuesta educativa a los niños superdotados o con talento

La diversidad de alumnos en las aulas, presenta múltiples necesidades, una de ellas es la atención a los niños con talento. Pero este colectivo de sujetos ha sido uno de los últimos con necesidades educativas especiales al que los sistemas educativos han empezado a prestar atención. Las razones son varias: actitud de los docentes, falta de formación para atender la diversidad, la homogeneidad de la enseñanza, entre otras. Incluso el supuesto de que este colectivo constituido por los niños superdotados no necesitan una atención especial, puesto que saldrán adelante sin mucha ayuda, ha contribuido durante mucho tiempo a que se les olvide.

Antes del siglo XX la atención a los niños y jóvenes superdotados o de los estudiantes con talento no era motivo de preocupación en los sistemas educativos. En la actualidad se ha cambiado de parecer y "*existe una mayor conciencia de que estos alumnos sí requieren ayudas y apoyos especiales para lograr el máximo desarrollo de sus capacidades*" (Blanco, Ríos y Benavides, 2004, p. 49). Estos mismos autores señalan que a pesar de este reconocimiento "*las demandas educativas de estos alumnos no son suficientemente atendidas por los sistemas educativos, más preocupados por aquellos que tienen discapacidad o problemas de aprendizaje*" (p. 49) y, recomiendan que los sistemas educativos y las escuelas desarrollen acciones encaminadas a dar una respuesta educativa que promuevan el pleno desarrollo y aprendizaje de los escolares con talento excepcional. Esta constatación ha sido denunciada y, al respecto, Sánchez (2003) dice: "*Los niños superdotados necesitan de una ayuda escolar especial, pues los programas ordinarios no responden a sus capacidades y a sus intereses*" (p.7).

Los niños superdotados y con talento tienen cualidades generales comunes. Freeman (1988) señala dos de ellas: a) aprenden más rápidamente, y b) tienen mayor profundidad y extensión en el aprendizaje. Sin embargo, Blanco, Ríos y Benavides (2004) señalan que no constituyen un grupo homogéneo y que difieren en muchos aspectos que deben ser tenidos en cuenta a la hora de planificar una intervención. Una de las recomendaciones que propugnan es que se realice:

> *una evaluación del alumno o alumna en el contexto educativo en el que se desarrolla y aprende que permita conocer sus necesidades educativas específicas y que sirva para la toma de decisiones sobre las adaptaciones del currículo y sobre los recursos y ayudas que hay que proporcionar a cada uno para optimizar el desarrollo de sus capacidades* (p. 50).

La atención de los niños con talento matemático

De forma paralela a la atención de niños con talento en general, la educación de los niños con talento matemático está empezando a recibir atención en los sistemas educativos de los distintos países, pero en el pasado ha sido una minoría olvidada. Así lo reconoce el National Council of Teachers of Mathematics en el documento An Agenda for Action (1980): *"Los estudiantes más olvidados, en términos de alcanzar su potencial, son los estudiantes superdotados de matemáticas"* (p. 18).

El National Council Teacher Mathematics, pone de manifiesto que todos los niños pueden aprender matemáticas y no sólo unos pocos. Esta idea de "matemáticas para todos", se explicita en:

a) Los Standards (1989) hablan de objetivos para todos los estudiantes
b) Los Professional Standards (1991) exponen que "*todos los estudiantes pueden aprender a pensar matemáticamente*" (p.21)
c) Los Principles and Standards for School Mathematics (2000) subrayan el aprendizaje matemático para todos en su principio de equidad (The Equity Principle). Entre los grupos de estudiantes a los que afecta este principio mencionan a los estudiantes que muestran interés especial por las matemáticas y a los que poseen un talento excepcional en matemáticas. Estos estudiantes

podrían necesitar programas especiales o recursos adicionales para alcanzar su desarrollo potencial. Destaca este documento que el interés o el talento de estos estudiantes debería ser atendido para que puedan alcanzar una formación excelente en matemáticas.

Estas ideas también las subraya Lappan (sin fecha), como miembro activo en varios documentos del National Council of Teachers of Mathematics y presidenta durante un tiempo de dicho Consejo:

Nuestro primer objetivo debería ser potenciar matemáticamente a todos los estudiantes. A menudo hablamos de ofrecer oportunidades a los estudiantes más desfavorecidos. Pero entre los estudiantes que tenemos en nuestros cursos algunos tienen altas capacidades. Nuestros programas deberían incluir también oportunidades para estos estudiantes. En el futuro estos estudiantes serán usuarios de las matemáticas: científicos, matemáticos, estadísticos, ingenieros, técnicos e investigadores. Merecen que se les tenga en cuenta en la programación de igual manera que se tiene en cuenta otro tipo de necesidades especiales.

El sentido del Principio de Equidad propuesto en los Principles and Standards for School Mathematics (2000), también lo describe Van de Walle (2001), identificando la diversidad de sujetos en una sala de clases: los estudiantes con problemas de aprendizaje, los estudiantes con diferencias culturales, las diferencias según el sexo y los estudiantes con talento matemático.

1.4. La investigación de niños superdotados y con talento

A la par que en la actualidad el tema de la atención a los niños superdotados y con talento va adquiriendo relevancia en los currículos escolares, se desarrollan investigaciones al respecto. La experiencia de distintos países de diseñar estrategias de identificación e intervención en la educación de niños superdotados y niños con talento, se ha puesto de manifiesto en documentos internacionales; en este sentido hay que citar los Handbooks: Handbook of Gifted Education (1993) y el International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent (1997), los congresos internacionales organizados por instituciones como el European Council for High Ability o el World Conference of the World Council for Gifted and Talented Children y diversas revistas específicas como Gifted Child Quarterly, Roeper Review, Ideacción, Journal of the Education of Gifted y Gifted Education Internacional. Otras no específicas han dedicado algunos de sus números a esta temática, como es el caso del Educational Studies in Mathematics de 1986, que en su número 3, presenta investigaciones de estudiantes con habilidades matemáticas, y artículos relacionados con el tema de identificación y estrategias de intervención en matemáticas. Tanto los documentos internacionales, los congresos y las revistas, explicitan la necesidad de abordar los siguientes aspectos:

- Operacionalizar el término de talento, superdotación y afines, para estandarizar su significado a escala internacional y dejar de lado la "localidad" de la terminología.
- Establecer mecanismos de identificación.
- Ofrecer alternativas de programas especiales dentro y fuera de la escuela.

Uno de los objetivos de muchas investigaciones ha sido precisar y clarificar el término talento con el objeto de hacerlo operativo para la investigación. Se trata de responder con objetividad a la pregunta, ¿quiénes son los niños con talento? Para responder a esta pregunta los investigadores han tratado de precisar el concepto de talento, que ha sido definido de distintas maneras según el enfoque teórico adoptado. En un principio, el talento ha sido identificado con la superdotación intelectual y, por tanto, desde una perspectiva psicológica con la inteligencia. Bajo el punto de vista psicológico el surgimiento y desarrollo de los conceptos talento y superdotación están ligados al concepto de inteligencia, no sólo porque dentro del estudio de esta última surgen los primeros, sino por el paralelismo evolutivo de ambos. De forma general, estos dos conceptos son considerados como equivalentes, pero hay autores que consideren la superdotación y el talento como conceptos diferenciados (Feldhusen, 1995; Gagné, 1993; Gardner, 1983; Renzulli, 1999; Sternberg, 1986).

Gagné (1993) plantea que la dotación es un constructo complejo, multidimensional que tiene que verse como una capacidad potencial que necesita de unas determinados condiciones para que pueda desarrollarse de modo satisfactorio. En su modelo diferenciado sobre dotación y talento, especifica que la emergencia de un talento particular resulta de la aplicación de una o más aptitudes al dominio o maestría del conocimiento y destrezas en el campo particular, mediado por el apoyo de variables o "catalizadores" intrapersonales y ambientales, como también por el aprendizaje sistemático y la práctica continua. Así mismo, hay que resaltar que uno de los talentos específicos que aparecen diferenciados en estas teorías sobre la superdotación es el talento matemático.

Por otro lado, el talento académico es una consecuencia de la calidad del pensamiento de las personas, así desde el punto de vista cognitivo, Mayer (1986) identifica pensamiento, resolución de problemas e inteligencia y aborda la inteligencia señalando que: "*se refiere a las características cognitivas internas relativas a las diferencias individuales en el rendimiento para la resolución de problemas*" (p. 348). En esta misma línea de destacar la resolución de problemas como factor clave para detectar la inteligencia de los sujetos, en el documento The Task Force on Promising Students (Sheffield, Bennett, Berriozábal, DeArmond y Wertheimer, 1995) se señala que los estudiantes que prometen en matemáticas son los que tienen potencialidades de ser líderes en resolución de problemas de matemáticas en el futuro. Además consideran que el talento matemático es una función de la capacidad, la motivación, las creencias y las experiencias y oportunidades que deben ser desarrolladas a lo largo de su vida.

1.5. Identificación e intervención

Se han propuesto varias estrategias de intervención para ser aplicadas a niños con talento. Unas son de carácter organizativo, y se refieren al modo de ubicar a los sujetos con talento respecto a sus compañeros: integración, agrupamiento, individualización; otras son estrategias relativas a los contenidos del currículo. Entre ellas cabe destacar el enriquecimiento y la aceleración. Ambas fórmulas son válidas y se aplican con fines distintos. El enriquecimiento es la fórmula usual cuando a los alumnos se les dan clases al margen de la enseñanza oficial, con el ánimo de potenciar sus dotes excepcionales. Los problemas y las actividades que se les proponen suelen evitar excesiva dependencia con los conocimientos matemáticos, a veces incluso no tienen conexión con el contenido matemático del currículo escolar. La aceleración es otra de las modalidades que se han adoptado en la intervención de niños con talento, en la que a los niños se les evalúa y se les ubica en un curso más avanzado del que les corresponde por su edad.

Para poder actuar con los niños que tienen talento, primero hay que detectarlos. Desde un punto de vista general, la mayoría de los métodos de identificación de niños con talento consideran medidas formales y otras informales: las primeras se refieren a la utilización de un instrumento o prueba objetiva: pruebas psicométricas, pruebas estandarizadas o inventarios de personalidad, motivación o estilo intelectual; las segundas, las medidas informales, se basan en la observación. También se utilizan modelos mixtos de identificación, que combinan tanto procedimientos objetivos como subjetivos.

Las primeras formas de identificar a los niños superdotados y con talento consistían exclusivamente en obtener una puntuación alta en un test de inteligencia. Uno de los pioneros en el tema fue Terman (1925), que exigía una puntuación alta en un test de inteligencia. Durante muchos años se siguieron los principios establecidos en los trabajos pioneros y el criterio para identificar a niños superdotados y con talento fue bastante exigente y bastante centrado en las puntuaciones de los tests de inteligencia (CI). En una etapa más reciente se ha reducido la importancia de los tests de inteligencia, por un lado rebajando la puntuación a obtener para ser identificado como sujeto con talento y, por otro, incorporando múltiples formas de identificación: producciones de los estudiantes, nominación de profesores, nominación de compañeros y puntuaciones en tests de aptitudes.

Un aspecto importante en relación con la identificación del talento matemático es, ¿qué se mide en los tests y de qué tipo son los ítems que constituyen los tests con los que se trata de identificar el talento y más concretamente el talento matemático? En las primeras etapas se aplicaban tests de rendimiento cuyos ítems eran de cálculo aritmético. De lo que se desprende que se primaba en la identificación del talento matemático la capacidad de cálculo matemático frente a otras formas de pensar matemáticamente. En las pruebas de rendimiento se decidía sobre el talento matemático en función del número de ítems acertados (datos cuantitativos) y se le concedía poca atención a cómo el estudiante razonaba en matemáticas (datos cualitativos). Como consecuencia de la aportación desde el enfoque cognitivo y, sobre todo, en el ámbito de la resolución de problemas, se ha ido produciendo un cambio de mentalidad. Así lo expresa Johnson (1983): "*los que trabajamos con niños de la escuela primaria sabemos la dificultad que conlleva valorar únicamente la cualidad del pensamiento de un niño en función del número de respuestas en las tareas matemáticas que les proponemos*" (p. 26). Para Johnson (1983) lo que diferencia a un niño con talento matemático de otro que no lo es, reside en la calidad del pensamiento del niño, que para él reside en la forma de razonar matemáticamente. Y propone que este criterio se tenga en cuenta en los procesos de identificación de niños con talento matemático.

1.6. Identificación orientada a la intervención

Desde el ámbito educativo, la finalidad que tiene la identificación de los niños superdotados y con talento es someterlos a un proceso de intervención, bien en un ambiente integrado con el resto de su clase, o en cursos especiales enfocados al enriquecimiento del sujeto o a la aceleración de su proceso académico. Sin embargo, la mayoría de las técnicas que se han empleado (y se emplean) para la identificación de estos niños excepcionales no transcienden la fase de identificación, en el sentido de que no se obtiene del proceso de identificación información adicional que pueda guiar el proceso instructivo de los niños superdotados. Sin embargo, pensamos que debe haber una evaluación posterior a la fase de identificación, de carácter diagnóstico, que sirva para planificar parcial o totalmente el programa de intervención. Como señala Johnson (1983):

> *Deberíamos encontrar formas de ampliar nuestros procesos de identificación que incluya información cualitativa e integrar esa información en nuestras decisiones de lo que es un superdotado en matemáticas. Esta información podría utilizarse inmediatamente en la planificación de la programación* (p. 55).

Nuestro trabajo va en esta línea, se refiere a la evaluación de los niños con talento en la fase inicial de identificación o inmediatamente posterior a ella, con el deseo adicional de que obtengamos información para la intervención posterior con estos niños. Nos planteamos un marco teórico en el que dicho proceso esté motivado por la intención y la posibilidad real de ofrecer servicios o programas adecuados a sus necesidades. Así mismo, tanto los procesos de identificación como las características del programa de intervención deben ajustarse al tipo de talento que se vaya a trabajar, al nivel de desarrollo de los alumnos y al campo de conocimiento específico que se trabaje. La atención de estos alumnos en sus aulas desde un enfoque integrador requiere conocer cuales son las necesidades específicas diferenciadas que tienen estos alumnos "especiales" y la mejor forma de desarrollar su talento y concretamente en nuestro caso el talento matemático.

Situando lo anterior en un enfoque cognitivo, vemos la necesidad de que el proceso de identificación sirva para conocer no sólo las altas puntuaciones de los sujetos en un test de inteligencia general, sino también aspectos cualitativos relacionados con la resolución de problemas. Creemos necesario un análisis cualitativo de las producciones de los sujetos obtenidas del proceso de resolución de problemas de matemáticas. Proponemos, además, que el proceso de evaluación diagnóstica que seguiría al proceso de identificación de niños con talento sea lo más cercano posible al proceso de instrucción en una parcela específica de conocimiento ligada al nivel de desarrollo de los conocimientos curriculares del alumno en matemáticas. La identificación de las estrategias que emplean los estudiantes en un campo de conocimiento específico y los errores que comenten, es un punto de partida, y proporciona al profesor una base cognitiva para tomar decisiones e intervenir en el aula para desarrollar el talento matemático de los estudiantes superdotados.

Así pues, abogamos, dentro de una intervención integradora del alumno superdotado en su aula, por instrumentos de identificación que sean útiles no sólo para diferenciar a los sujetos por sus puntuaciones en un test de inteligencia, o por las capacidades de pensamiento generales que permiten evidenciar, sino que somos partidarios de instrumentos que cumpliendo con una función diferenciadora entre sujetos, proporcionen además elementos de juicio para una intervención que esté basada cognitivamente y centrada en un ámbito curricular concreto del área de conocimiento que se esté tratando. Esto no es contradictorio con un programa de enriquecimiento o de aceleración curricular, lo vemos como complementario, es decir, se pueden proponer actividades de enriquecimiento que tengan un carácter general, pero nosotros proponemos además utilizar el conocimiento que hemos adquirido de la prueba de diagnóstico para proponer actividades que potencien las estrategias detectadas en los alumnos y que permitan corregir los errores observados.

1.7. Evaluación diagnóstica-enseñanza prescriptiva

La idea de evaluación diagnóstica como parte de un modelo de identificación e intervención en un colectivo de niños con talento no es nueva, y se enmarca en lo que se denomina en general enseñanza diagnóstica. Dentro del ámbito de los sujetos con talento matemático hay modelos pioneros en este sentido, como el SMPY de Julian Stanley (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005).

Julian Stanley ha desarrollado el modelo: Diagnostic Testing → Prescriptive Instruction, para utilizarlo con estudiantes matemáticamente precoces. El modelo es útil para asegurarse de que los estudiantes con talento no se saltan conceptos importantes o tienen lagunas en su periodo de formación. La noción de evaluación diagnóstica y enseñanza prescriptiva tiene sus raíces en la educación especial, y ha tenido cierta repercusión en educación matemática. Este enfoque aplicado a niños especiales consiste en evaluar a los estudiantes con instrumentos de un nivel diferente al que le correspondería por su edad (out of level). Una de las primeras investigadoras de niños superdotados fue Leta Hollingworth (citada en Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), reconoce que la idea de evaluar con instrumentos que corresponden a un nivel diferente, podría ser útil para los estudiantes superdotados, los cuales podrían ser evaluados con tests diagnósticos diseñados para cursos superiores a los que pertenecen los niños. Julian Stanley extendió las ideas de Hollingworth en los últimos años de la década de 1960 y en los primeros de la de 1970 y desarrolló el modelo Diagnostic Testing → Prescriptive Instruction para identificar en los estudiantes con talento matemático, fortalezas y debilidades y señalar aspectos que necesitan trabajar. En 1971 se inició oficialmente el programa Study Mathematical Prococity Young (SMPY) en la

Universidad de Johns Hopkins y, sus objetivos eran identificar, estudiar y proporcionar educación a niños que inicialmente están en los dos primeros años de la escuela secundaria inferior, es decir, que tienen entre doce y catorce años.

Nuestro trabajo recoge la tradición del modelo de Stanley en su versión más actual (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005), pero con algunas modificaciones que intentan hacerlo más operativo y actual. Veamos en qué:

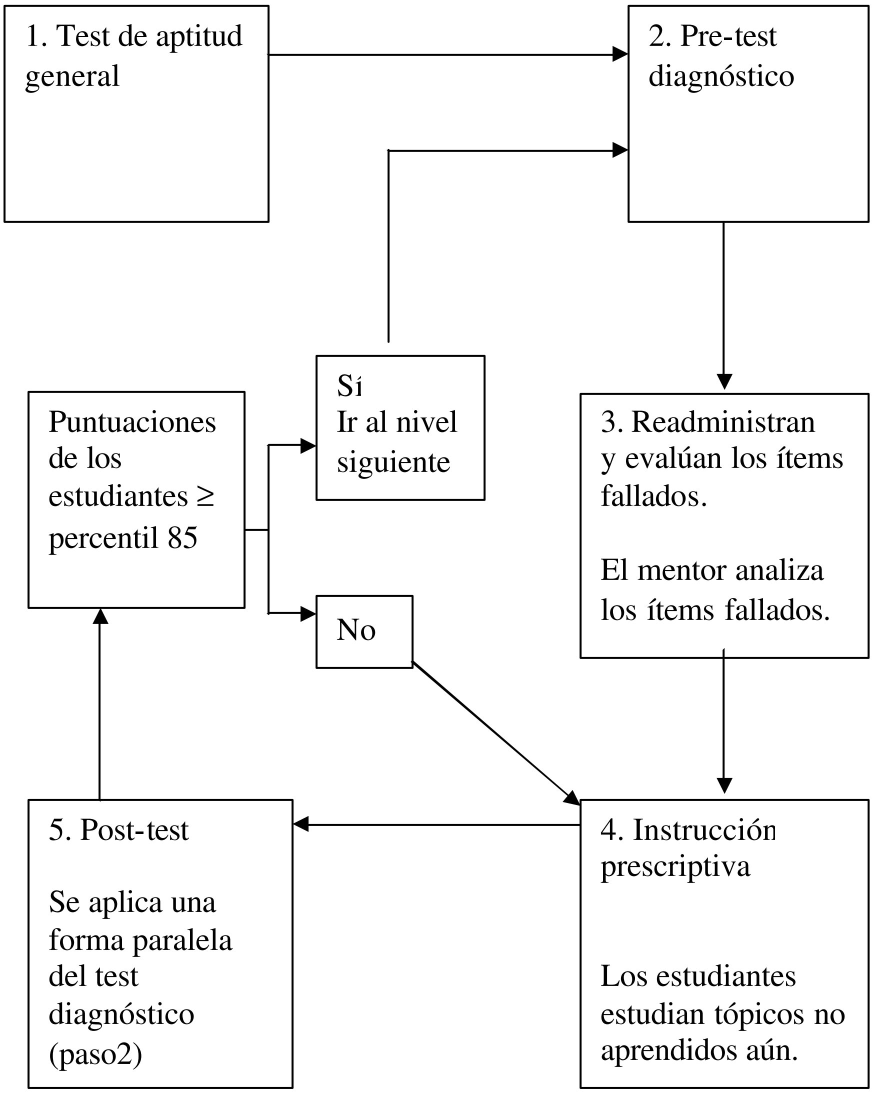


Figura 1.1. El MODELO FD-PI (tomado de Assouline y Lupkowski-Shoplik, 2005)

La primera fase del modelo de Stanley es una fase de identificación de niños con talento aplicando una prueba de aptitud general. Normalmente esta fase requiere aplicar un test de inteligencia o de aptitud general (ej., test de Raven) y precisa de un experto psicólogo para su interpretación. Posteriormente se requiere de otro profesional el profesor especialista, para la fase de intervención.

En la segunda fase de este modelo de Stanley se aplica un test diagnóstico de aptitud específica de un nivel superior al que se encuentran los niños. Aquí es donde nuestra investigación pretende realizar una primera aportación original. Pensamos que una de las opciones alternativas que se pueden dar es que el test diagnóstico esté constituido por ítems que sean problemas pertenecientes o que estén dentro de un campo conceptual de la matemática (Vergnaud, 1990) que permita diagnosticar las lagunas de conocimientos, los errores, las estrategias incipientes que manifiestan los niños y las representaciones que realizan en ese campo conceptual. Una idea complementaria que queremos comprobar es hasta qué punto este test de aptitud específica es válido como test diagnóstico de aptitud.

El problema se centra, inicialmente, en construir un test de aptitud específico, es decir, un test ligado a un campo conceptual de contenido matemático específico que pudiera cumplir función diagnóstica dentro del campo conceptual correspondiente, del cual se pudieran realizar con facilidad réplicas similares que pudiesen aplicarse, una vez realizada la intervención, como postest. Así mismo, pretendemos comprobar su potencial como instrumento de identificación de niños con talento.

1.8. La estructura multiplicativa

Acorde con lo anterior, nuestro trabajo de investigación trata de fijar un campo conceptual en el sentido que le da Vergnaud (1990) a este término, relativo a un conocimiento específico dentro de la matemática escolar y construir un instrumento constituido por una batería de problemas, a modo de test de aptitud específico, relativo a ese campo de conocimiento que sea útil para identificar alumnos con talento, sus estrategias de resolución en ese campo específico y los errores que cometen. El campo de conocimiento específico que hemos delimitado ha sido la estructura multiplicativa (Vergnaud, 1983, 1998) en un nivel de alumnos de primer ciclo de secundaria. El campo conceptual de la estructura multiplicativa ha sido estudiado desde la década de

1980 y se han realizado importantes aportaciones, tanto en su delimitación teórica como en las estrategias, dificultades y errores que cometen los resolutores en tareas ligadas a este campo conceptual (Bell, Greer, Grimison y Mangan, 1989; Castro, 1995; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1983, 1988). Algunas de las tareas que se han utilizado en estas investigaciones son problemas que plantean cierta dificultad a los mejores alumnos de una misma etapa educativa, y pensamos que pueden ser útiles para evaluar de manera diagnóstica el conocimiento matemático de los alumnos con talento en el ámbito de la estructura multiplicativa en un determinado estadio de su desarrollo.

La noción de campo conceptual propuesto por Vergnaud, con el interés de comprender de una mejor manera la adquisición y el desarrollo de conocimientos específicos y de destrezas relacionadas con situaciones y problemas, la define como:

> *Un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados* (Vergnaud, 1983; p.127).

El desarrollo de la comprensión de este campo conceptual abarcaría desde los 7 a los 18 años de edad. Este aspecto aporta otro elemento de pertinencia al presente estudio, que se realiza con sujetos de edades comprendidas entre 11 y 13 años de edad, como se verá más adelante.

Los problemas que requieren de las operaciones de multiplicar y dividir tienen la misma estructura subyacente, a la que se conoce como "estructura multiplicativa". Uno de los temas relevantes en el ámbito de la resolución de problemas de estructura multiplicativa son las diferentes categorizaciones que de ellos se han realizado (Castro, 1995). El análisis que hace Vergnaud (1983, 1988), de los problemas que conllevan operaciones de multiplicación y división muestra que los problemas simples de este tipo se sitúan casi siempre en el marco de tres grandes estructuras: a) el isomorfismo de medidas, b) el producto de medidas y c) la comparación. La otra gran estructura que considera Vergnaud, es la proporción múltiple, que se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son por tanto problemas compuestos.

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades que presentan ciertos problemas de estructura multiplicativa en niños normales. En el caso de los problemas de comparación, además de la dificultad que plantean estos problemas, se sabe que, los ítems con números más pequeños son más fáciles de resolver (Hart, 1981), y que los problemas con referente desconocido y de escalar desconocido se caracterizan porque provocan frecuencias altas de errores (Castro, 1995)

Dados estos resultados que se han encontrado en adolescentes normales de edad comprendida entre 11 y 16, en nuestro estudio nos centramos en niños de entre 11 y 13 años pero ya no niños normales sino con talento, pues cabe pensar que provocaran conflictos cognitivos en algunos de estos niños con talento.

Uno de los tipos de problemas con números decimales fue utilizado por Villarraga (2002) con niños con talento, encontrando una diversidad de estrategias, algunas correctas y otras incorrectas al intentar resolver el problema con números decimales menores que uno, lo que pone de manifiesto que las dificultades que presentan algunos problemas, como es el caso de los que contienen en su enunciado números decimales menores que uno, es tanto para niños normales como para niños con talento.

1.9. Preguntas de investigación

Bajo las premisas expuestas, en nuestra investigación nos plantean las siguientes interrogantes:

- Los niños que son identificados como niños con talento o superdotados mediante un test de aptitud general o inteligencia, ¿manifiestan cualidades que están ligadas al talento matemático?
- ¿Existe relación entre las puntuaciones obtenidos por los niños en un test de aptitud general, como el test de Raven, y el rendimiento en resolución de problemas en un campo de conocimiento específico de la matemática como lo es la estructura multiplicativa?

- ¿Qué validez tiene un test de problemas pertenecientes al campo conceptual de la estructura multiplicativa como test diagnóstico de aptitud en niños con talento?

Pero la propuesta que hacemos va más allá e intenta precisar la siguiente fase en la que el profesor encargado de aplicar el test debe hacer la interpretación de las respuestas de los sujetos. Una vez aplicado el test diagnóstico, hay que programar una intervención de carácter prescriptivo, y esto depende de la forma de valorar las respuestas de los sujetos. Las posibilidades son amplias, desde una valoración cuantitativa exclusivamente, tradicional en la evaluación escolar, hasta una valoración que tenga en cuenta además la calidad de las respuestas de los sujetos.

Uno de los aportes de la psicología cognitiva ha sido poner de manifiesto la importancia de las estrategias en resolución de problemas. El análisis de las estrategias que emplean los estudiantes en resolución de problemas permite ver la calidad de las respuestas de los estudiantes. De lo que no estamos seguros es si en el tipo de problemas seleccionados como ítems de un test de aptitud específico, aparecen indicios de estrategias de calidad que sean síntomas de talento matemático del resolutor.

Planteamos pues otros dos interrogantes:

- ¿Cuáles son las estrategias que utilizan los niños con talento en el test de aptitud construido a partir de problemas de estructura multiplicativa?
- ¿Se pueden identificar indicios de talento matemático en las estrategias de resolución de los estudiantes? ¿Cuáles son estos indicios?

Cuando pensamos en niños superdotados o en niños con talento, damos "por sentado" que suelen hacer bien todas las tareas que se les proponen. Evidentemente, en general, su rendimiento es superior a la media, pero ello no conlleva que durante la fase de aprendizaje escolar no cometan errores en las tareas que se les propone. Conviene saber no sólo si cometen errores, también es conveniente conocer los errores que cometen en tareas de un campo conceptual de contenido específico de la matemática. Esto es un aporte importante de la fase diagnóstica y permitiría al profesor realizar una instrucción adecuada.

Por ello, nos plantemos un tercer bloque de interrogantes de carácter general:

- ¿Cometen los sujetos con talento errores? Y en tal caso,
- ¿Qué tipo de errores cometen los niños con talento al resolver problemas de un campo específico de conocimiento que en este trabajo es la estructura multiplicativa?

Una vez que tengamos el conocimiento que surge de dar respuesta a las cuestiones anteriores tras analizar las respuestas de los sujetos al cuestionario de problemas de estructura multiplicativa desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo, surge la pregunta de si es posible aplicar este conocimiento para hacer una propuesta de intervención prescriptiva:

- ¿Es viable una prescripción instructiva a partir del conocimiento obtenido desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo en las respuestas dadas por los sujetos con talento al cuestionario de problemas construido?

Los interrogantes anteriores lo hemos sintetizado en un objetivo general y operativizado en una serie de objetivos específicos que describimos a continuación.

1.10. Objetivos

El objetivo general de la investigación es:

Identificar características de niños con talento de los últimos cursos de educación básica[1] (entre 11 y 13 años de edad), cuando resuelven problemas matemáticos de estructura multiplicativa.

Para lograr el propósito central mencionado se hace necesario establecer y articular una serie de objetivos parciales que se relacionan con el objetivo central.

[1] La educación básica en Chile corresponde a los primeros 8 años de escolaridad obligatoria, que en otros países se denomina educación primaria.

Los objetivos específicos de la investigación son:

1) Construir un instrumento con problemas de estructura multiplicativa que desempeñe la función de test de aptitud matemática.
2) Contrastar si el cuestionario de problemas es válido como test de identificación de la aptitud matemática de los estudiantes con talento.
3) Comparar el rendimiento obtenido de niños con talento en el test de Raven y el rendimiento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.
4) Realizar un análisis de ítems aplicado a los problemas del cuestionario construido.
5) Describir las producciones de niños con talento de de edades comprendidas entre 11 y 13 años de edad en la resolución de problemas de estructura multiplicativa desde dos puntos de vista:
   a) Describir y categorizar las estrategias utilizadas por los sujetos con talento en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.
   b) Identificar los tipos de errores que cometen los niños con talento, en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.
6) Analizar la fiabilidad de las respuestas mediante entrevistas a los alumnos.
7) Proponer un modelo de prescripción diagnóstica en matemáticas útil para los sujetos con talento.

Capítulo 2

Fundamentación

2.1. Introducción

La revisión de la literatura que incluimos en este capítulo comprende cinco partes claramente diferenciadas: en la primera de ellas se realiza una análisis conceptual del término talento desde diversas perspectivas, deslindándolo de otros conceptos e ideas relativos a los sujetos con talento, se exponen también algunos modelos teóricos; en la segunda y tercera realizamos una aproximación a las formas generales de identificación e intervención en el colectivo de niños con talento, tanto desde el punto de vista general como centrado en el talento matemático; en la cuarta abordamos las investigaciones sobre resolución de problemas de matemáticas en las que han participado este colectivo de sujetos excepcionales y, en la quinta realizamos una exposición de distintas caracterizaciones que se han realizado de los sujetos con talento matemático. Todos estos aspectos, constituyen antecedentes directos y fundamentan nuestra investigación.

Para realizar un trabajo de investigación creemos necesario realizar un análisis conceptual (Rico, 2001) con el objeto de precisar los conceptos que están en la base del estudio y sobre los cuáles se va a reflexionar. Concretamente es imprescindible un análisis conceptual del término talento. En lo referente a los sujetos con talento, en el capítulo abordamos los temas de la conceptualización del término talento, así como el proceso de identificación de este colectivo especial de sujetos.

2.2. Talento: Análisis conceptual

2.2.1. Origen del término talento

El campo de estudio que se centra en las altas capacidades refiere a su población de estudio con dos términos claves: superdotación y talento; pero hay poco consenso dentro de la literatura especializada sobre la definición de estos conceptos básicos. Por ello, consideramos necesario realizar un análisis conceptual (Rico, 2001) de los mismos, especialmente del término *talento* para comprender mejor su complejidad, conocer sus posibles interpretaciones y cuál es el alcance del constructo talento.

Desde el punto de vista etimológico, el Diccionario de la Real Academia Española (fig. 2.1), considera que el término *talento* deriva del latín *talentum,* y éste a su vez del griego ταλαντον (tálanton), plato de balanza, peso. En esta línea de interpretación, la acepción que se le da al término en el Diccionario de la Real Academia Española es la de moneda que empleaban tanto los griegos como los romanos. Esta primitiva acepción viene acompañada por otras más actuales en las que talento se equipara con *inteligencia*, *capacidad intelectual*, *con aptitud, con capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación* (RAE, 1992).

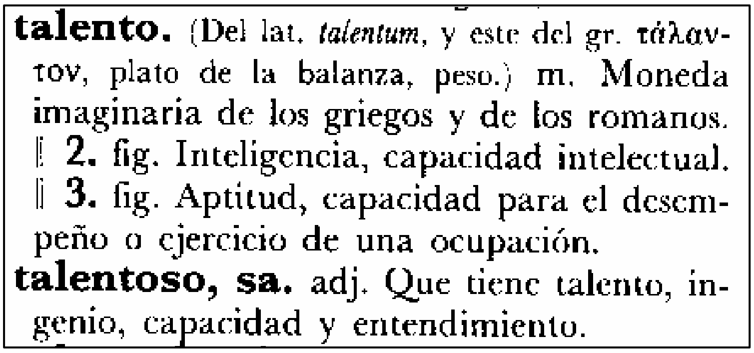

talento. (Del lat. *talentum*, y este del gr. τάλαντον, plato de la balanza, peso.) m. Moneda imaginaria de los griegos y de los romanos. ‖ **2.** fig. Inteligencia, capacidad intelectual. ‖ **3.** fig. Aptitud, capacidad para el desempeño o ejercicio de una ocupación.
talentoso, sa. adj. Que tiene talento, ingenio, capacidad y entendimiento.

Figura 2.1. ACEPCIONES DE TALENTO (RAE, 1992)

A partir de estos datos filológicos nos podemos plantear si hay alguna relación entre la etimología del término, es decir, entre su significado original relacionado con la medida de la magnitud dinero y de la magnitud peso, y el sentido actual del término. Si es así, también es posible cuestionarse cuándo el vocablo viene a significar la idea de una alta capacidad humana.

El sentido de talento como alta capacidad comienza con la creencia que tienen las personas en la antigüedad de que la riqueza, ya sea *tálanton* o *talentum*, no se origina sólo a partir del esfuerzo humano, sino que mucho hay en ella de *don* de los dioses. Tener *talentos*, tener dinero es, en el fondo, ser afortunado, *amado de los dioses.*

Esta acepción desapareció del Diccionario de la Real Academia Española en su versión de 1992, pero aparece en las versiones anteriores. Así, en el Diccionario de la Real Academia Española de Autoridades de 1739 (fig. 2.2) aparece la acepción:

> "Talento: En sentido tropológico se toma por el caudal de dones naturales, o sobrenaturales, con que Dios enriquece a los hombres, para que obren, y los empleen en provecho del próximo, y de su conciencia"

TALENTO. En ſentido tropológico ſe toma por el caudal de dones naturales, ò ſobrenaturales, con que Dios enriquece à los hombres, para que obren, y los empleen en provecho del proximo, y de ſu conciencia. Lat. *Talentum*. Muñ. Fr. L. de Gran. lib. 1. cap.8. Que al cabo de la vida, quando llegue la cuenta de los *talentos*, ſe hallarán mui pocos multiplicados. MES. Poeſ. lib. 2. f. 31. *Pues empleando acá bien el* talento, *Os pagarán deſpues por uno ciento.*	TALENTO. Metaphoricamente ſe toma por los dotes de naturaleza: como ingenio, capacidad, prudencia, &c. que reſplandecen en alguna perſona, y por antonomáſia ſe toma por el entendimiento. Lat. *Ingenium. Animi dotes*, vel *facultas*. SAAV. Republ. pl. 154. Horacio es grave, y remirado; pero no con deſprecio de los demas; ſino con eſtimacion de ſu *talento*. BAREN, Guerr. de Fland. pl. 478. En que ſe empleaſſen los *talentos* de ingenio, induſtria, y capacidad, que en èl ſe deſcubrian.

Figura 2.2. ACEPCIÓN DEL TÉRMINO TALENTO (RAE A, 1739)

Desde el punto de vista filosófico (véase Villarraga, Martínez y Benavides, 2004) también en la antigua Grecia, el término *tálanton* aparece referido a un conjunto de *habilidades*, *influjo*, *posición* que no se debe tanto al que lo posee, sino a la voluntad divina, y esto se encuentra en pasajes que hacen referencia no sólo a *capacidades* en un sentido figurado. Es decir, *tálanton* más allá de la *metáfora*, y se refiere a las capacidades que permiten desenvolverse con soltura en diversos ámbitos, pero cuya posesión no ha dependido de la voluntad humana (Chantraine, 1984). En este sentido de su carácter *innato* antes descrito no destaca tanto el carácter *congénito* como la idea de *dado por dios.*

A través del tiempo este sentido de donación se mantiene aunque la procedencia tiende a cambiar de sujeto: los talentos se derivan de la naturaleza (Villarraga, Martínez y Benavides, 2004). Esta idea es la que prima durante la Modernidad es donde logra hegemonía la idea de que el talento no se refiere tanto a Dios como a este principio configurador que se denomina "Naturaleza". Concretamente en España, esta idea se aprecia en la obra cervantina, donde el término fija el sentido que permanece actualmente, es decir, el de *aptitud para algo*, *capacidad intelectual*, *dotes asignados por la naturaleza*. Se puede decir, además, que la configuración castellana es autóctona y no deriva de otra lengua romance.

Un término relacionado con talento es el de *genio.* En el periodo Romántico fue un tema muy recurrente el tratar de delimitar o establecer las diferencias entre las personas con talento y el *genio*. En la obra *Conversaciones con Goethe* de Eckermann (1848), éste destaca el carácter *innato* del talento (ante todo el musical) diciendo que no necesita ningún gran alimento de fuera ni requiere experiencia de la vida; asimismo Goethe declara que el talento no es hereditario sino que depende de la índole física e intelectual de los padres (Villarraga, Martínez y Benavides, 2004).

Posteriormente, Nietzsche argumenta que la aparición de un talento depende mucho de las generaciones pasadas, que no necesariamente es transmisible y que en ningún caso es segura su manifestación. Comentando las ideas de Goethe, opina que una aparición como la de Mozart es un milagro inexplicable. El genio constituye un ser capaz de coordinar y sintetizar sus diversos talentos. En otras palabras, reúne y no disgrega sus facultades: se compenetra a sí mismo, no se disgrega. En esta concepción, el talento es parte y condición indispensable del genio (Villarraga, Martínez y Benavides, 2004).

Desde la reflexión filosófica se va enfatizando paulatinamente de forma creciente los aspectos psicológicos del talento en el sujeto cognoscente; se va notando un cambio cualitativo que va desde talento como sustantivo a talento como adjetivo; el talento evidenciado en un sujeto resulta difícil de definir sin relacionarlo con la dotación, la superdotación y otros elementos. Así pues, desde una perspectiva psicológica hay autores que utilizan indistintamente el significado de talento y estar dotado intelectualmente. Este sentido psicológico lo tratamos en la siguiente sección.

2.2.2. Talento cómo sinónimo de superdotación

Desde el punto de vista psicológico, el surgimiento y desarrollo de los conceptos talento y superdotación, considerados como equivalentes, están ligados al concepto de inteligencia, no sólo porque dentro del estudio de esta última surgen los primeros, sino por el paralelismo evolutivo de ambos. La inteligencia se ha definido de diversas maneras según el enfoque teórico desde el que se realiza la definición. Desde un punto de vista cognitivo, Mayer (1986) indica que "*la inteligencia se refiere a las características cognitivas internas relativas a las diferencias individuales en el rendimiento para la resolución de problemas*" (p. 348).

El concepto de superdotación nace dentro de una concepción monolítica de la inteligencia y en estudios sobre la "genialidad" realizados por Galton de finales del siglo XIX y las aportaciones sobre la medida de la inteligencia realizados por Binet, Simon y Stern al principio del siglo XX.

El estudio de la superdotación tiene como pioneros a los estudios de Galton como prolongación de sus ensayos sobre la inteligencia y en armonía con sus concepciones genetistas, aunque en términos de genialidad. Como único fundamento metodológico se da a la tarea de investigar las familias de personas destacadas en diversas esferas de la vida social, buscando padres o hijos también "eminentes". Galton utiliza los hallazgos de sus investigaciones para demostrar su tesis sobre la heredabilidad de la inteligencia. En efecto, encontró una alta correlación entre el rendimiento escolar de los sujetos y sus familiares analizados, pero el hecho de no contar con métodos científicos le resta valor a sus resultados. Además, una buena posición social no siempre coincide con un alto grado de capacidad intelectual, siendo este muchas veces el resultado de factores económicos y culturales. Mayer (1986) subraya algunos de los resultados de Galton en sus estudios sobre las diferencias individuales en la capacidad mental: a) encontró amplias diferencias individuales entre las personas, b) las diferencias individuales en muchas capacidades mentales parecen estar regularmente distribuidas en torno a la curva normal, c) el nivel de capacidad de una persona puede describirse en función de cuánto se desvía por encima o por debajo de la media.

Una de las consecuencias que tuvieron los trabajos de Galton para la concepción de la educación pública la expresa el lema "una medida va bien para todos" (Mayer, 1986, p. 350), es decir un único instrumento es válido para evaluar la capacidad intelectual de cualquier persona. Bajo esta concepción diseñó Binet en 1905 un test de rendimiento basado en tareas escolares para aplicarlo en las escuelas con el objetivo de identificar a los deficientes y que pudieran recibir instrucción especial. Posteriormente este test fue adaptado a niños normales[1]. Desde esta perspectiva y observando el test de Binet queda claro que la superdotadación intelectual queda ligada al rendimiento en tareas escolares que dependen mucho del conocimiento específico. Posteriormente hay estudios que han mostrado la importancia que tiene el conocimiento específico en la resolución de problemas (Mayer, 1986).

Se considera a Terman (1925) como uno de los principales representantes de esta perspectiva, con su determinismo biológico y la popularización del cociente intelectual (CI); estandarizó el test de Binet y consideraba que *"la inteligencia revelada por los tests de inteligencia está genéticamente determinada y por consiguiente es estable en el tiempo"*[2]. Los trabajos de Terman (1925) contribuyeron además al concepto de que la superdotación es un rasgo unitario, monolítico y que la persona lo tiene o no lo tiene. A la popularización en educación de esta concepción de la superdotación contribuyó la aplicación del Informe Marland (1972). Aunque en él se distinguieron seis tipos de superdotación, los responsables del programa adaptaron una definición unitaria en la que los niños eran clasificados simplemente como superdotados o no-superdotados.

[1] En este trabajo utilizamos la expresión niño o estudiante normal para referirnos a niños que tienen un desarrollo habitual

[2] Citado por Mönks y Mason, 2000, p. 144.

2.2.3. Talento cómo distinto de superdotación

El concepto de superdotación como un rasgo monolítico y unitario es difícilmente sostenible. Es evidente que la mayoría de los jóvenes poseen valores intelectuales, pero esos valores son diversos. Desde la educación elemental, algunos niños demuestran talento o aptitud para las matemáticas, otros para actividades de comunicación verbal y algunos para otros campos del talento.

En relación a los distintos tipos de talentos que se pueden reconocer, en el Informe Marland se reconoce que:

> *los niños dotados y talentosos son aquellos que en virtud de sus habilidades sobresalientes, son capaces de un alto rendimiento. Los niños capaces de un alto rendimiento incluyen aquellos que han demostrado sus logros y/o habilidades potenciales en cualquiera de las siguientes áreas, sea aisladamente o combinadas; 1) habilidad intelectual general 2) aptitudes académicas específicas 3) pensamiento creativo o productivo 4) habilidad de liderazgo, 5) artes visuales e interpretativas 6) habilidades psicomotoras. Se supone que la utilización de estos criterios de identificación de los niños dotados y talentosos abarcará a un mínimo entre 3 y 5% de la población escolar* (Passow, 1993, p. 30)

Esta definición distingue entre capacidades potenciales y capacidades realizadas, así, por ejemplo, algunos alumnos de bajo rendimiento pueden ser alumnos de alto potencial pero con malos resultados.

Además del Informe Marland (1972), ya citado, en el que se distinguen seis tipos de superdotación, ha habido muchos intentos de diferenciar rasgos distintos en los superdotados. Así, DeHaan y Kough (1956, citado Feldhusen, 1995) describen un sistema para identificar estudiantes superdotados y muy talentosos en el que distinguen: (1) habilidad intelectual, (2) habilidad científica, (3) habilidad de liderazgo, (4) habilidad creativa, (5) talento artístico, (6) talento para escribir, (7) talento para la interpretación, (8) talento musical, (9) destreza mecánica y (10) destrezas físicas. Como se puede observar la terminología empleada: «habilidad», «destrezas» y «talento» así como su referencia a superdotación refleja una incertidumbre considerable sobre el fenómeno de la habilidad humana.

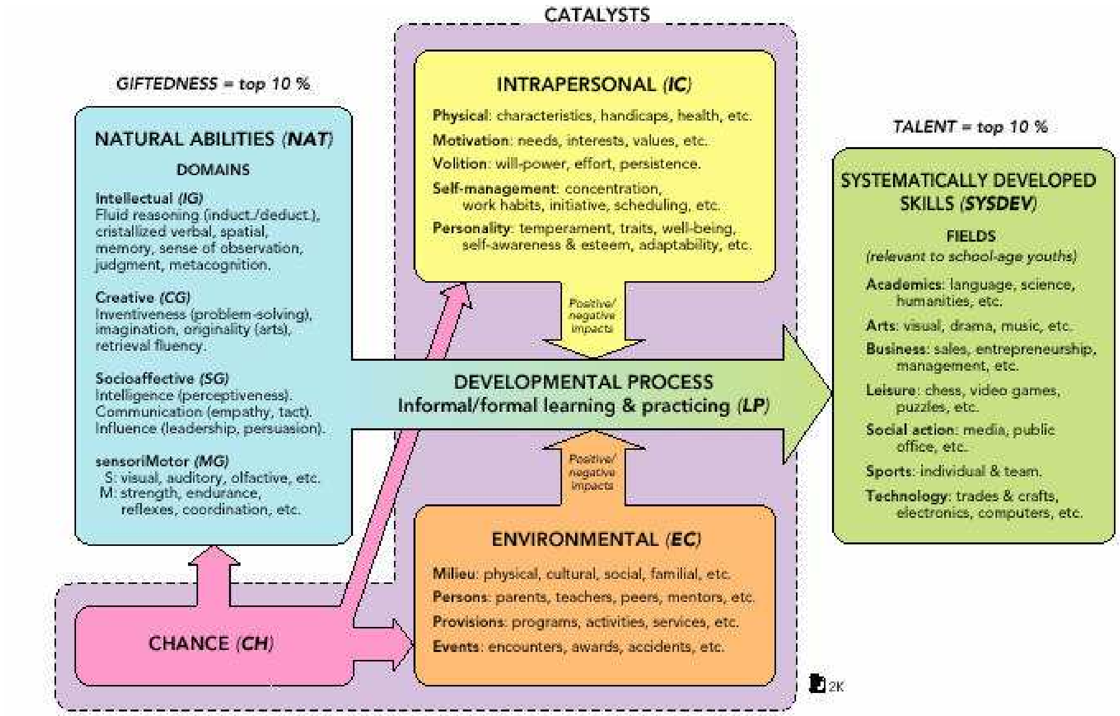
Bloom (1985)[3] en su estudio del desarrollo del talento propuso cuatro tipos distintos de talento: (1) atlético o psicomotor, (2) estético, musical y artístico, (3) cognitivo o intelectual, (4) relaciones interpersonales. Realizó una investigación con personas talentosas sobre los tres primeros tipos en los que distinguió: (1) natación y tenis en el atlético o de dominio psicomotor, (2) conciertos de pianistas y escultores en el dominio estético-músico-artístico y, (3) investigadores matemáticos y neurólogos para el dominio cognitivo-intelectual. En esta investigación Bloom (1985) concluyó que el potencial de talento está presente en muchos niños. Afirma que el crecimiento del talento se puede facilitar claramente con la ayuda de los familiares y profesores, que el reconocimiento y educación temprana son vitales, y que la motivación es un ingrediente crucial.

2.2.4. Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento DMGT

Uno de los mayores esfuerzos para clarificar los conceptos de superdotación y talento ha sido realizado por Gagné (1985, 1993), que ha bosquejado un modelo general para el desarrollo del talento en los jóvenes (véase fig. 2.3).

En su Modelo Diferenciado de Superdotación y Talento DMGT (Differentiated Model of Giftedness and Talent), Gagné propone una distinción clara entre los dos conceptos más básicos en el campo de la educación de superdotados: superdotación y talento. Para él la *superdotación* designa la posesión de habilidades naturales en alto grado, que son espontáneas e innatas (llamadas aptitudes o dotes), y que se presentan en al menos un dominio de habilidad. Y, el *talento* designa la alta posesión de habilidades (o destrezas) y conocimientos desarrollados sistemáticamente en al menos un campo de actividad humana.

[3] Citado en Feldhusen, 1995



Gagné's Differentiated Model of Giftedness and Talent (2004 update)

Figura 2.3. MODELO DIFERENCIADO DEL TALENTO Y LA SUPERDOTACIÓN DE GAGNÉ

Gagné sugirió (ver fig. 2.3) que la superdotación está asociada la mayoría de las veces con la habilidad intelectual general mientras que el talento denota destrezas o aptitudes más específicas. Gagné, tras su revisión y análisis de los conceptos de superdotación y talento, concluye que la superdotación general que se manifiesta en sí misma en cuatro dominios principales (intelectual, creativo, socioemocional, y senso-motor) da forma, al igual que los niños evolucionan a lo largo de los años escolares, a los talentos específicos, mediados por la familia, el colegio, la personalidad, los intereses, las actitudes y la identificación con las experiencias. El talento surge como la habilidad específica que facilitará el aprendizaje o el desarrollo en una ocupación particular o en un dominio de ocupaciones.

La transformación del superdotado en talento se efectúa por la acción positiva o negativa de catalizadores intrapersonales (salud, personalidad, voluntad, motivación, etc.) y ambientales (medio, personas, recursos y sucesos).

Puede ocurrir que haya adultos sobredotados que no hayan desarrollado talentos específicos, pero según el modelo diferenciador de la dotación y el talento de Gagné todos los individuos talentosos son individuos superdotados.

Es común encontrar en la literatura que los sujetos talentosos pueden o no desarrollar sus talentos específicos dependiendo de una multiplicidad de factores como son: sistema educativo, organización curricular, escasa o falta total de atención a la diversidad, la motivación en el aula de clase, contexto familiar y sociocultural en el cual vive, etc. Gagné (1993) dice que:

> *la emergencia de un talento particular resulta de la aplicación de una o más aptitudes al dominio y maestría del conocimiento y destrezas en ese campo particular, mediado por el apoyo de variables o catalizadores, intrapersonales (ej: motivación, confianza en sí mismo) y ambientales (ej: familia, colegio, comunidad) como también por el aprendizaje sistemático y la práctica continua* (p.72)

En resumen, Gagné (1993) desarrolla un modelo que se caracteriza por los siguientes rasgos: 1) reconoce la existencia de capacidades y desempeños de excelencia en una amplia gama de dominios 2) reconoce la intervención crítica de variables personales y ambientales, en el desarrollo del talento 3) distingue conceptualmente los términos "talentoso" y "superdotado" 4) finalmente, propone criterios operacionales coherentes para definir la extensión del concepto, es decir, su prevalencia en la población.

Posteriormente, el modelo de Identificación y Desarrollo del Talento en la Educación (TIDE) propuesto por Feldhusen (1995) ofrece una concepción de superdotación y talento que intenta reemplazar las viejas concepciones de «El Niño Superdotado». Feldhusen (1995) se posiciona claramente a favor de sustituir en la educación de los jóvenes la noción monolítica de superdotación por la concepción más analítica de talento. Da razones para inclinarse por el estudio del talento y su identificación y desarrollo en la educación frente al enfoque centrado en la superdotación. Una de las razones que da a favor es que la concepción de talento tiene una "firmeza filosófica y psicológica" (p.12). Además, considera que el enfoque basado en:

> *la identificación y desarrollo del talento de todos los niños nos exime de los problemas de identificación de sólo a «los pocos que sean superdotados» y de la posible representación insuficiente de la población especial así como de los efectos estigmatizadores de la etiqueta de superdotado* (pp. 12-13)

Feldhusen es partidario de centrarse en la búsqueda del talento y fomentarlo en la juventud, no sólo entre los pocos etiquetados como superdotados. Como apoyo a su enfoque de reconceptualización de la educación de superdotados, cita a Renzulli y Reis (1991):

> *El desarrollo del talento es la tarea principal de nuestro campo, y nunca debemos perder de vista este objetivo, sin hacer caso del sentido que pueda tomar el esfuerzo por la reforma* (p. 26. 1991)

Otra razón que aporta a favor del talento es que:

> *la concepción de superdotación usada más a menudo en los programas para superdotados conceptualiza las habilidades humanas sintetizadas en la habilidad general unitaria denominada «inteligencia» o «superdotación». El proceso de identificación y servicios de programas funcionan bien para la población favorecida. Sin embargo, una concepción alternativa, a saber «talentos», «aptitudes», o «inteligencias especiales» puede servirnos mejor para definir y alimentar las habilidades de alto nivel tanto para la población favorecida como para los desfavorecido* (p. 13).

Según Feldhusen, el concepto de «aptitud», «talento» o «inteligencias especiales» sugiere una visión más analítica y diversa de las habilidades humanas, habilidades que pueden ser educadas, y aptitudes que son susceptibles de ser desarrolladas. «Superdotado» es un concepto estático, es fijo. El talento y el desarrollo del talento son conceptos dinámicos en los que los estudiantes individuales y sus habilidades especiales pueden crecer y desarrollarse con educación.

2.2.5. Talento actual y talento potencial

También cabe distinguir entre lo que se denomina ***talento actual***, es decir, al ya desarrollado y evidenciado por un sujeto talentoso denominado *talento manifiesto*; y lo que por otro lado se llama ***talento potencial***, es decir, al que aún no se ha desarrollado o evidenciado. En este caso el sujeto está en potencia de desarrollar y demostrar su o sus talentos, pero a causa de uno o más factores no lo ha podido evidenciar en sus esquemas de acción.

El talento no sólo tiene carácter relativo, también conlleva un aspecto evolutivo. El talento tiene un carácter evolutivo en el sentido que no solamente el talento actual es relevante sino que el talento potencial es igualmente importante, y es éste último sobre el que se puede hacer una buena intervención educativa en el ámbito curricular y de estrategias de enseñanza, en el marco de la atención a la diversidad en las aulas. De esta manera es posible transformar talentos potenciales en actuales y éstos en actuales de distintos niveles. En estudios transversales que se han realizado con sujetos con talento se ha observado que en los grupos supuestamente "homogéneos" de sujetos con talento es posible identificar tipologías de sujetos en distintos niveles (Villarraga, 2002; Villarraga, Castro y Benavides, 2002, 2007), podemos deducir de ello que un tema de estudio posterior es verificar este aspecto en estudios longitudinales. Los autores que trabajan con orientación al logro, distinguen entre capacidades potenciales y realizadas y consideran pertinente conocer las capacidades potenciales de una persona, en particular los de bajo rendimiento, para hacer intervención y aumentar las capacidades realizadas por tales sujetos.

En la literatura se hace énfasis en que el talento y la superdotación no solamente son innatos, se puede nacer con ellos, sino que también el talento actual de un sujeto puede desarrollarse de acuerdo a las potencialidades del sujeto, y esto último depende de múltiples factores: contextuales, familiares, institucionales. Por lo tanto, el concepto de superdotación o *talento*, es relativo porque depende de cada sujeto, su potencial de desarrollo y sus circunstancias personales de todo orden. En la educación de los sujetos con talento se deberían tener en cuenta estas consideraciones de orden teórico y pragmático. En lo que se refiere a las consideraciones pragmáticas ligadas al sistema educativo resaltamos que:

> *las prioridades que tienen en cuenta el tipo o tipos de capacidades que el sistema está interesado en desarrollar; y, los fondos que están disponibles para la educación de esos niños superdotados* (Pereira citada por Alonso y Benito 1996, p. 35).

2.2.6. Talento como logro o rendimiento

Villarraga, Martínez y Benavides (2004) diferencian cinco grandes avances teóricos acerca del concepto de talento durante los últimos años: definiciones orientadas a lo innato o genético, orientadas a la interacción entre lo innato y el medio ambiente, a modelos cognitivos, al logro y a modelos sistémicos. Nosotros en lo que sigue nos referimos a sólo a dos de ellos: los orientados al logro y los modelos cognitivos.

En los modelos orientados al logro o rendimiento, los autores proponen la existencia de un determinado nivel de capacidad o talento como condición necesaria para el alto rendimiento y consideran el rendimiento de un alumno como el resultado observable y medible de su talento. En la literatura se encuentran tres factores relacionados con la dotación orientada al rendimiento:

> *(1) habilidad por encima del promedio, (2) compromiso con la tarea, y (3) creatividad* (Mönks y Mason, 2000, p. 146).

Dentro de este enfoque, la teoría más conocida es la de los tres anillos de Renzulli (1977) quien concibe que el talento:

> *consiste en una interacción entre tres grupos básicos de rasgos humanos, consistentes en capacidades por encima de la media, fuertes niveles de compromiso con la tarea, y fuertes niveles de creatividad. Los niños que*

manifiestan o son capaces de desarrollar una interacción entre estos tres anillos requieren una gran variedad de oportunidades y servicios educativos, que habitualmente no proporcionan los programas regulares de enseñanza (p. 182).

Desde la teoría de Renzulli, se pueden identificar al menos dos formas de inteligencia superior; la académica y la creativo-productiva. Señala que la superdotación tiene que ser vista como una manifestación del potencial humano que puede desarrollarse en ciertas personas, en ciertos momentos, y bajo ciertas circunstancias.

2.2.7. Modelos de procesamiento de la información

Los modelos teóricos cognitivos tratan de explicar las actuaciones de los sujetos mediante estados, procesos y disposiciones de naturaleza mental. Dentro de los modelos cognitivos destacamos el modelo de procesamiento de la información con sus componentes de obtención, almacenamiento, recuperación y tratamiento de la información. El procesamiento de la información considera que unas pocas operaciones simbólicas, relativamente básicas, tales como codificar, almacenar, recuperar, operar con datos, o gestionar la información, pueden, en último extremo, dar cuenta de la inteligencia humana.

Los modelos de procesamiento de la información se basan en las aportaciones de la psicología cognitiva y centran sus estudios en los procesos cognitivos a través de los cuales se alcanzan realizaciones excepcionales. Lo que diferencia al alumno con talento de un alumno de capacidad intelectual media y con el que se halla por debajo de la media tiene que ver con el funcionamiento mental de estos alumnos. Una consecuencia de este enfoque para la educación es que si conocemos el funcionamiento mental de los alumnos, tanto a nivel cuantitativo como cualitativo, es más fácil detectar cuáles son sus necesidades educativas y qué se puede hacer para mejorar el funcionamiento cognitivo de éstos.

A este grupo pertenecen las definiciones de superdotación que hacen referencia a procesos de pensamiento, memoria y otras habilidades, como los estudiados por Sternberg (1986, 1997) y Sternberg y Davidson (1986) que en su teoría de la inteligencia destaca la importancia de los procesos cognitivos en dar respuesta a lo nuevo en la actuación o solución de una tarea, así como en tareas de tomas de decisiones. Se considera que tanto la actuación de insight demostrado, como las habilidades en la solución de problemas y los componentes de adquisición de conocimientos son indicadores de superdotación.

En el modelo triádico de la inteligencia (Sternberg, 1986, 1997; Sternberg y Davidson, 1986), ésta depende de las habilidades y estrategias de procesamiento de la información. Incluye tres subteorías:

a) la subteoría componencial: aborda cuáles son los mecanismos de procesamiento de la información que se utilizan al realizar conductas inteligentes en tareas de resolución de problemas y toma de decisiones. Distingue tres tipos de componentes: metacomponentes, componentes de desempeño y componentes de adquisición del conocimiento. La competencia intelectual del alumno con alta capacidad se explica por la eficacia, rapidez e idoneidad con la que estos estudiantes usan los componentes de su inteligencia individual (metacomponentes, componentes de ejecución y de adquisición).

b) la subteoría contextual: describe qué tipos de conductas o situaciones pueden considerarse inteligentes en relación al ambiente en el que se desenvuelve el sujeto. Distingue tres aspectos: adaptación al ambiente, modificación del ambiente y selección del ambiente. La capacidad para tratar con ambientes nuevos viene dada por el insight. Los alumnos con altas capacidades se diferencian de los alumnos que poseen inteligencia media a través de los *insight skills* en sus tres formas: codificación, combinación y comparación. La codificación selectiva ayuda a discriminar la información más relevante; la combinación selectiva reduce informaciones incompletas pero útiles para la solución de problemas y la comparación establece las semejanzas o diferencias entre la información nueva con los conocimientos anteriores.

c) la subteoría experiencial: indica el modo en el que los componentes citados operan en la práctica, depende o es relativa a la experiencia de cada sujeto o al nivel de conocimiento previo que tiene el sujeto de la situación.

Sternberg (1986, 1997) distingue tres tipos de niños superdotados según las habilidades que predominan en el sistema de procesamiento de la información:

1. *Analíticos*, se caracterizan por su capacidad de descomponer un problema y comprender sus partes; tienen gran capacidad de planificación y obtienen altas puntuaciones en los test y buenas calificaciones académicas.
2. *Creativos*, son intuitivos, muy dotados para la generación de nuevas ideas y planteamientos nuevos en la solución de problemas. Estos talentos están altamente capacitados para sintetizar de forma integrada la información.
3. *Prácticos*, que destacan por su gran habilidad para aplicar ya sea las habilidades analíticas o las sintéticas en situaciones pragmáticas en el mundo social.

Desde este enfoque se sostiene que los niños superdotados no lo son por demostrar altos niveles en una o más habilidades, "*sino en virtud de la forma en que estas habilidades interactúan como sistema*" (Sternberg, 1997, p. 202). Los niños superdotados demuestran un funcionamiento cognitivo cualitativamente diferente al de otros niños, en uno o más de los componentes de la inteligencia (metacognitivos, de desempeño y/o de adquisición de información); asimismo se comportan como expertos en su aplicación a situaciones nuevas frente a situaciones familiares. Por último, las personas con un alto nivel de habilidades prácticas, suelen destacar en una o más de las tres funciones u objetivos de la inteligencia (adaptación, selección y modificación del ambiente).

Como conclusión, queremos destacar que según esta orientación lo que caracterizaría a los niños con talento es que presentan diferencias en la calidad del procesamiento de la información. La calidad de sus procesos de pensamiento es superior a la de los niños de desarrollo habitual y se manifiesta en aspectos tales como: la capacidad metacognitiva comienza a una edad más temprana, tienen alta capacidad de insight para resolver problemas por procedimientos distintos a los que suelen utilizar los sujetos de su edad, son capaces de un mayor autogobierno mental y gestionan mejor sus recursos intelectuales y personales.

Queremos destacar, por último, que en los modelos cognitivos se ha puesto de manifiesto la importancia del conocimiento específico para resolver problemas en campos académicos, y se han propuesto definiciones de talento ligados a ellos, como la siguiente:

> *… el talento es la capacidad de un rendimiento superior en cualquier área de la conducta humana socialmente valiosa, pero limitadas esas áreas, al mismo tiempo, a 'campos académicos', tales como lengua, ciencias sociales, ciencias naturales y matemáticas; a 'campos artísticos', como la música, artes gráficas, y plásticas, artes representativas y mecánicas; y al ámbito de las relaciones humanas* (Passow citado por Alonso y Benito, 1996, p. 42).

2.3. Identificación

Uno de los grandes temas en torno al cual giran gran cantidad de investigaciones realizadas con niños superdotados o con talento es la identificación de los mismos. La identificación de características asociadas al talento debe entenderse como un proceso muy ligado a la concepción que tenga del talento. La idea de identificar a niños con talento no tiene sentido por sí mismo y debe orientarse a la finalidad de poder hacer una adecuada intervención educativa y no en el sentido de "etiquetar" a un niño. Rodríguez-Cao (2004) señala al respecto que:

> *la nueva orientación hacia los talentos implica necesariamente una diversificación en los modelos de identificación que no persiguen únicamente la categorización de un sujeto como talento, sino saber en qué forma y en qué grado lo es, a fin de establecer medidas de actuación que permitan su desarrollo (p. 37).*

En este apartado describimos en principio las técnicas y las formas generales de identificación del niño superdotado o con talento, para posteriormente hacer una reflexión más específica para el caso de la identificación de características del talento matemático.

2.3.1. Técnicas de identificación

No existe una única técnica universal para la identificación de los sujetos con talento o superdotados. Se utilizan una variedad de técnicas, cuantitativas y cualitativas. Con las técnicas cualitativas se recogen observaciones y opiniones, tanto del propio alumno como de aquellas personas que pueden proporcionar información pertinente referente a su desarrollo, intereses, expectativas, aficiones, resultados académicos, etc., que se utilizan como informaciones complementarias de las obtenidas mediante pruebas objetivas. Las técnicas cualitativas más comunes son las siguientes:

a) *Informes de los profesores*: Suelen estar muy influidos por criterios de rendimiento escolar y no siempre tienen en cuenta aspectos relevantes del talento. Suelen tener una alta coincidencia con los instrumentos formales que evalúan aptitudes académicas. Podemos citar las Escalas de Renzulli (SCRBSS) para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes superiores que ha sido adaptada para España e Iberoamérica (Alonso, Benito, Guerra y Pardo, 2001).
b) *Informes de los padres*: suponen una fuente de información esencial para los aspectos evolutivos en las edades tempranas. Pueden citarse algunos instrumentos que facilitan este tipo de información como el cuestionario para padres de Beltrán y Pérez (1993) que incluye ítems sobre el aprendizaje temprano de la lectura, el gusto por la compañía de los adultos o si tiene un buen sentido del humor.
c) *Nominaciones de los compañeros*: es una buena fuente de información respecto a las capacidades, intereses, rendimiento académico, socialización y liderazgo. Una forma usual de obtener esta información es mediante sociogramas o cuestionarios. El cuestionario para la nominación de iguales de Beltrán y Pérez (1993) incluye entre otras cuestiones, como señalar al compañero que haría mejor un presupuesto, el mejor inventor o el más divertido.

d) *Autoinformes*: su utilización es adecuada con alumnos mayores. Para Genovard y Castelló (1990) son poco significativas pues no suelen generar diferencias entre alumnos con talento y alumnos medios. Una formulación típica son las autobiografías.

En relación con las técnicas cuantitativas de identificación, y dada la enorme cantidad de instrumentos existentes en el mercado, no es posible hacer un listado exhaustivo, basta acceder a los catálogos de las editoriales especializadas para darse cuenta de ello. Por esta razón, la lista que se ofrece a continuación debe ser entendida únicamente como fuente de referencia parcial.

a) *Test de inteligencia general y de aptitud general.* Los tests de inteligencia general son un instrumento clásico empleado para identificar niños con talento. Han sido muy criticados y se han puesto de manifiesto muchas limitaciones pero, a pesar de ello, continúan siendo muy utilizados para medir capacidades intelectuales y habilidades sobresalientes. La mayoría de estos instrumentos tienen niveles de fiabilidad altos. Entre los más difundidos se encuentra el Stanford-Binet Test of Intelligence, utilizado como test de inteligencia individual; las Escalas de inteligencia de Wechsler y el test de Matrices Progresivas de Raven.

b) *Test de aptitudes específicas.* Los alumnos con talento matemático suelen tener puntuaciones más altas que otros estudiantes en aspectos tales como razonamiento verbal, razonamiento numérico, razonamiento lógico, visualización espacial, entre otros. Estas habilidades se miden a través de test de aptitud específica. Los tests de aptitud específica se distinguen de los tests de inteligencia general sobre todo porque su contenido va orientado a un campo de conocimiento específico. Están diseñados para medir habilidades, que se han desarrollado a través de un programa de intervención a lo largo del tiempo. Permiten conocer de manera mucho más concreta el talento del alumno en áreas de conocimiento específicas. Cuando se aplican a alumnos con talento se le suele poner test de aptitud diseñados para alumnos de grados más avanzados. Un buen ejemplo de este tipo de pruebas es la Batería de Aptitudes Diferenciales y Generales (BADyG) de Yuste (1995) o las más clásicas Aptitudes Mentales Primarias (PMA) de Thurstone (2005).

c) *Pruebas de rendimiento o basadas en el currículo.* Los tests de rendimiento difieren de los de inteligencia y de los de aptitud en que miden lo que un estudiante ha aprendido. Existen algunas baterías de prueba para evaluar el nivel de competencia o de desempeño del alumno en las distintas áreas curriculares. Entre las más utilizadas están las que evalúan la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas. Mientras que los tests de inteligencia y los de aptitud son muy especializados y requieren de un psicólogo o experto para su elaboración, aplicación e interpretación, en el caso de los tests de rendimiento los docentes pueden hacer una contribución importante al respecto, dado el conocimiento que tienen del alumno. Pueden elaborar pruebas basadas en el currículo, hacer observaciones del alumno en el aula y analizar las producciones de éstos. Ejemplos de test de rendimiento es el Stanford Diagnostic Mathematics Test.

d) *Creatividad.* Según Genovard y Castelló (1990) hay dos formas básicas de medir la creatividad: a) a través de medidas relacionadas con el *pensamiento divergente*, y b) por medio de *inventarios conductuales y actitudinales*. En el primer tipo destaca el test de Torrance Test of Creative Thinking (TTCT) (Torrance, 1974) que incluye tanto la creatividad verbal como la figurativa. Consta de siete subpruebas para la parte verbal y tres para la figurativa. La creatividad la analiza a través de medidas de fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración de las respuestas. Incluye cuestiones como imaginar las consecuencias que implica una situación dada o completar un dibujo a partir de unos trazos básicos. En el segundo tipo, es decir, en los *inventarios conductuales y actitudinales*, se trata de situar al sujeto sobre una escala dada en una serie de ítems que evalúan su creatividad. Las Escalas de Renzulli (Renzulli, Smith, White, Callahan y Hartman, 2001) contienen una subescala de este tipo.

e) *Test de Personalidad.* La personalidad engloba una serie de características psicológicas entre los que se encuentran los rasgos como agresividad, sumisión, sociabilidad, sensibilidad; conjunto de rasgos como introversión o extroversión; y otros aspectos de las personas como sus deseos, motivaciones, emociones, sentimientos. Dabrowski (1976) incursiona en el estudio de la personalidad como característica discriminativa de excepcionalidad. En su teoría de la *desintegración positiva*, considera la personalidad como el "resultado de la interacción y funcionamiento de diferentes formas de sobreexcitabilidad del individuo". Dabrowski relaciona el término *desintegración positiva* con el desarraigo escolar y social de los superdotados. Ejemplos de cuestionarios de personalidad son el Cuestionario de personalidad EPQ-J de Eysenck y Eysenck, o los cuestionarios ESPQ, CPQ y HSPQ, de Cattell y Coan.

En cuanto a las ventajas e inconvenientes de los instrumentos de diagnóstico del talento, se ha enfatizado en la necesidad de establecer un buen diagnóstico del talento como medida previa a la adopción de las respuestas educativas más adecuadas a cada caso. También sobre la necesidad de conocer sus limitaciones y especialmente las razones que justifican su aplicación a la hora de elaborar los programas educativos más adecuados. Desde esta perspectiva, los test de inteligencia, aplicados de forma individual ofrecen una buena fiabilidad para diferenciar las características del talento, pero tienen un alto costo en tiempo y especialización de quien lo aplica y, en ocasiones, adolecen de fuerte carga cultural. Los tests de aptitudes son imprescindibles para la determinación de los talentos específicos y adolecen de limitaciones similares a los de inteligencia general. El test de rendimiento debe usarse en combinación con los anteriores y permiten una buena identificación de los talentos académicos, pero pueden encubrir a alumnos brillantes en otros tipos de talento (por ejemplo, alumnos creativos). Los test de personalidad e intereses son muy relevantes en el caso de talentos con inadaptación escolar pero requieren una alta especialización en su aplicación. Las pruebas de creatividad son útiles para evaluar el pensamiento divergente, la originalidad y flexibilidad del pensamiento, y constituyen una medida imprescindible para el diagnóstico del talento.

Las medidas de evaluación más subjetivas como las mencionadas, las opiniones de los profesores, padres, compañeros o los autoinformes, aportan datos complementarios muy relevantes pero irregulares. Las informaciones proporcionadas por los padres son más oportunas si están referidas a las edades tempranas; las proporcionadas por los profesores son especialmente útiles cuando se refieren a aspectos académicos, las nominaciones de los compañeros constituyen buenos índices de adaptación social y liderazgo, las autonominaciones ofrecen buena información sobre los intereses y expectativas del sujeto.

Una propuesta aceptable de identificación debería incluir criterios múltiples y propiciar medidas de atención educativa adecuadas. Una de las más aceptadas hoy en día es la realizada por Renzulli y Reis (1991) que utilizan los resultados de las pruebas objetivas (test de CI y test de aptitudes) y las nominaciones de los profesores en una proporción bastante pareja, e incluso se incluyen los informes de los padres, las nominaciones de iguales y las autonominaciones para ser evaluadas por el comité de expertos del centro.

2.3.2. Formas generales de identificación

Tras más de dos décadas, el modelo de Renzulli (1986) supone uno de los planteamientos más sugestivos desde el punto de vista educativo. Parte de una selección poco restrictiva de los alumnos, entre el 15% al 20% de la población escolar, que conforman el denominado “grupo de talentos”. Estos alumnos reciben una formación específica mediante un programa de enriquecimiento curricular. Dos son los criterios fundamentales para conformar el grupo de talentos: los resultados del test de CI y de aptitudes, así como las nominaciones de los profesores. Así, son seleccionados en una proporción similar, tanto los alumnos que obtienen una puntuación alta en los test de inteligencia como los propuestos por los profesores aunque no hayan demostrado un alto grado de ejecución en los test psicométricos. De hecho, la selección realizada mediante la aplicación de un test es conocida previamente por los profesores para que puedan añadir alumnos no incluidos. Consiguientemente, las medidas estandarizadas de capacidad cognitiva constituyen uno de los procedimientos de selección, pero no el único.

Renzulli propone procedimientos muy flexibles (además de los informes de los profesores) como son los informes de los padres, las nominaciones de iguales o, incluso, las autonominaciones que, evaluadas por el comité de expertos del centro, proporcionan la oportunidad a un grupo relativamente elevado de alumnos de participar en el Modelo de Enriquecimiento Escolar a través de la realización de diversas actividades de enriquecimiento (Tipo I, II y III). Estas actividades se realizan en los denominados Grupos de Enriquecimiento; esto es, agrupamientos de alumnos que con independencia de su curso escolar comparten intereses comunes y se reúnen (normalmente un vez a la semana durante un semestre) para trabajar con un experto adulto. Para la constitución del grupo se proporciona un "inventario de intereses" desarrollado a ese fin y es coordinado por el "equipo de enriquecimiento" del centro.

Todo el proceso de diagnóstico y selección queda reflejado en la "carpeta del talento" de cada alumno, que es un registro acumulativo el cual recoge el perfil del alumno en tres dimensiones fundamentales: capacidades, intereses y estilo de aprendizaje. Esta información permite recoger los puntos fuertes del alumno y facilita la toma de decisiones sobre la oportunidad de ofrecer experiencias de enriquecimiento en el aula ordinaria o en el continuo de servicios que se ofrecen.

La evaluación del modelo de las inteligencias múltiples de Gardner se realiza dentro de las actividades diarias de clase mediante estrategias que permiten medir habilidades de pensamiento evaluadas según ciertos criterios. Por esta razón, Gardner las denomina "tests auténticos" y las aplica fundamentalmente en alumnos de educación infantil y educación primaria. Así, el "Proyecto Spectrum" desarrollado para niños de educación infantil, examina 7 campos cognitivos distintos: lenguaje, música, movimiento, numeración, ciencia, ciencias sociales, arte y relaciones sociales además de los estilos de aprendizaje (Por ejemplo, el niño muestra confianza/indeciso; centrado/disperso; comunicativo/callado; muestra orgullo en el logro de una tarea; usa materiales de forma sorprendente, etc.).

El proceso diagnóstico puesto en juego por Gardner le permite obtener evidencia empírica de su teoría de las inteligencias múltiples mediante instrumentos constituidos básicamente por listas de observación y una serie de actividades y juegos cuya realización como actividad normal de clase, permite explorar el tipo de inteligencia destacado de cada alumno.

A partir de la teoría triárquica de la superdotación, Sternberg elabora el STAT (Sternberg Triarchic Abilities Tests), consistente en una amplia serie de test que abarcan desde la educación infantil a la educación media destinados a evaluar sus tres subteorías cognitivas: componencial, experiencial y contextual. Para ello utiliza un cuestionario constituido por un conjunto de cuestiones y problemas mediante los que trata de detectar la capacidad del alumno para aprender, no tanto el conocimiento que ya posee. Así, se evalúan los procesos de insight, el uso de metacomponentes y los procesos de codificación, combinación y comparación selectiva de la información y la inteligencia práctica. En total consta de 9 escalas constituidas por diez elementos de elección múltiple. Los ítems responden a la presentación clásica de elementos verbales, numéricos y figurativos y se aplican sin tiempo límite. Una última escala pretende evaluar la capacidad de automatización de la información. El diagnóstico incluye además cuestionarios de estilos de aprendizaje.

Lo esencial en este modelo de evaluación es su orientación al análisis de las estrategias cognitivas y metacognitivas teniendo en cuenta el contexto, la experiencia y la cultura de la población a la que se aplica.

2.3.3. El modelo de búsqueda de talentos (search talent)

Este modelo es ampliamente utilizado en los Estados Unidos para la identificación y el desarrollo del talento académico, y consta de la aplicación de un proceso de dos etapas. La primera etapa consiste en la identificación de estudiantes que han demostrado un alto nivel de rendimiento académico en tests estandarizados correspondientes a su nivel escolar, tales como: *Iowa Tests of Basic Skills, California Achievement Test, Stanford Achievement Test, o Texas Assessment of Academic Skills*. El punto de corte que generalmente se establece permite la selección de aquellos alumnos que rinden sobre el percentil 95 ó 97 (dependiendo del programa específico).

A los alumnos que alcanzan este alto rendimiento se les invita a realizar un segundo test, lo que correspondería a la segunda etapa del proceso. El test que se aplica en esta oportunidad corresponde a un nivel de dificultad sobre el nivel escolar de los alumnos seleccionados, lo que en inglés se denomina "above-level / off-level test". Un test es considerado "fuera de nivel" o "fuera de rango" si es por lo menos dos años superior al nivel escolar del estudiante que lo rinde. Lo que se busca es desafiar las capacidades y conocer el potencial académico del estudiante, para identificar a aquéllos que se podrían realmente beneficiar con un programa para alumnos con talentos académicos sobresalientes.

El Modelo de Búsqueda de Talentos se basa en la noción de que los estudiantes difieren en sus habilidades académicas, y que estas diferencias pueden ser identificadas a través del uso de tests estandarizados. Un test estandarizado bien diseñado producirá resultados conducentes a la obtención de una curva normal de rendimiento, y una manera eficiente de obtener más información sobre aquellos alumnos que rinden en el extremo superior de esta curva, es administrarles tests correspondientes a un nivel escolar superior. Estos tests proveen una evaluación más precisa acerca de sus habilidades académicas y su potencial para enfrentar desafíos adicionales en el área evaluada, anulando el "efecto de techo" de los tests correspondientes a la edad o escolaridad real del niño (Assouline y Lupkowski-Shoplik, 1997).

Según estos autores, hace varios años que se aplica este modelo con estudiantes del primer ciclo de educación media, y más recientemente, con alumnos de nivel básico. Los tests fuera de rango que ellos indican como los más frecuentemente utilizados en el primer ciclo de educación media son:

- *Scholastic Aptitude Test* (SAT), en base a los estudios de J. Stanley (1977)
- *American College Testing Program* (ACT), en base a los estudios de Sawyer y Brounstein (1988).

2.4. Intervención

2.4.1. Formas de intervenir generales

Existen diversas estrategias para lograr que los alumnos con talento desarrollen al máximo sus capacidades, aprendan y participen plenamente en las actividades escolares. Las principales estrategias señaladas por diversos autores, Genovard y Castelló, 1990; Schiever et al., 1997; Southern et al., 1993, Renzulli et al., 1997) son: la aceleración, el agrupamiento y el enriquecimiento curricular. La utilización integrada de éstas posibilita atender las necesidades de los alumnos superdotados en la mayoría de las situaciones, ya que cada uno de ellos precisa una orientación diversa e individualizada. Estas estrategias se pueden complementar con otras, como por ejemplo las tutorías y los mentores.

La aceleración es una de las estrategias más utilizadas y consiste en acelerar el proceso de aprendizaje para adecuar la enseñanza a su ritmo y capacidades. Su principal finalidad es ubicar al alumno superdotado en un contexto curricular de dificultad suficiente para sus capacidades (Genovard y Castelló, 1990). Esta situación supone un mayor estímulo y satisfacción para el alumno, evitando así el aburrimiento que suele conducir a la falta de motivación o problemas de disciplina.

Otra forma de organizar la enseñanza de los niños superdotados o con talentos específicos es siguiendo un patrón similar a la de los niños con discapacidad. Así, las diferentes opciones que coexisten en muchos países son: escuelas especiales para estos alumnos, grupos especiales en la escuela común a tiempo total o parcial, y la atención individualizada dentro del aula común.

Y, finalmente el enriquecimiento curricular es una adaptación curricular que consiste en añadir nuevos contenidos o temas que no están cubiertos por el currículo oficial o trabajar en un nivel de mayor profundidad determinados contenidos de éste. El enriquecimiento amplía la estructura de los temas y contenidos abordándolos con un nivel mayor de abstracción y de complejidad. No se trata solamente de ampliar la información sobre un tema concreto, sino de promover el uso de la investigación o del procesamiento creativo en un determinado ámbito (cómo se genera el nuevo conocimiento) y de explorar la lógica interna de éste y sus relaciones con otras áreas de conocimiento. Dentro del enriquecimiento curricular el modelo más utilizado es el triádrico de Renzulli, que tiene como objetivo estimular la productividad creativa de niños y jóvenes exponiéndoles a variados temas, áreas de interés y campos de estudio. En este modelo se incluyen tres tipos de enriquecimiento que se aplican dentro de la escuela como una propuesta que se integra al currículum escolar. Los tipos I y II son ofrecidos a todos los niños de la escuela y consiste en la elaboración de proyectos, individuales o en grupo, que no implican mucho tiempo y que proporcionan a los alumnos las habilidades específicas que necesitan para lograr los aprendizajes. Los tipo III son usualmente más apropiados para aquellos alumnos con nivel elevado de habilidades, intereses y capacidad de trabajo, e implican un mayor grado de independencia dentro y fuera de la escuela (Renzulli y Reis, 1997).

El enriquecimiento también puede ser extracurricular desarrollando programas, como por ejemplo de desarrollo cognitivo, que se pueden trabajar dentro o fuera de la institución educativa.

2.4.2. Programas de intervención

Al igual que ocurre de manera general cuando se trata de intervenir con alumnos superdotados, el tratamiento de alumnos con talento matemático se realiza empleando técnicas de aceleración o de enriquecimiento, bien desde un enfoque segregador en cursos al margen de sus programas escolares o bien mediante un sistema integrador en el aula base del sistema educativo oficial. No obstante, han surgido algunas propuestas adicionales como la de Sheffield (1999 a y b), quien añade la idea de profundización matemática a las dos anteriores proponiendo, por tanto, un enfoque tridimensional en el que la aceleración, el enriquecimiento y la complejidad matemática se aúnan en una misma metodología de intervención. También queremos destacar que, al igual que ocurre en la identificación, las tareas de resolución de problemas juegan un papel importante en los métodos que tratan de desarrollar los talentos matemáticos. Un ejemplo de metodología basada en resolución de problemas es el enfoque de problemas abiertos que se ha experimentado en Japón y que está recogida en Becker y Shimada (1997).

Pero la atención al alumno con talento requiere la preparación del profesorado al respecto. En Castro (2004) se señala la necesidad de formación que tiene el profesorado dedicado a la atención de los niños superdotados:

> *Las competencias didácticas no deben circunscribirse a la superdotación en forma general, pues también deben adquirirse destrezas y competencias en relación con los talentos específicos. Los profesores deben conocer las peculiaridades de la superdotación y el talento, así como las posibles dificultades de aprendizaje que pueda tener este colectivo en las áreas de conocimiento específicas, tales como matemáticas* (p. 180).

En la actualidad son muchos los programas de intervención que se están llevando a cabo. Sería imposible dar una lista exhaustiva de todos ellos, por lo que a continuación presentamos cuatro de estos programas de intervención educativa. [4]

El modelo CTY de Stanley, desarrollado en los años setenta en Estados Unidos, basado en las ideas y principios del *Study of Mathematically Precocious Youth*, focaliza su atención en los alumnos que son precoses en las áreas verbal y matemáticas. Este modelo tiene dos etapas: en la primera de ellas, que vendría a coincidir con el *screening*, se selecciona a aquellos alumnos que han obtenidos resultados por encima del percentil 95 ó 97 en un test de rendimiento estandarizado como el *Iowa Test of Basic Skills,* el *California Achievement Test*, u otros similares. En la segunda etapa, los estudiantes seleccionados, son sometidos a un proceso de diagnóstico con un test de aptitud académica como el *Scholastic Assessement Test* (SAT) o el *American College Testing Program* (ACT), pero de un nivel más alto al que correspondería con la edad del alumno ("*out of level*") (Stanley y Benbow, 1983).

El programa *Education Program for Gifted Youth* (EPGY) es un programa de enriquecimiento curricular dirigido por la Universidad de Stanford, que oferta cursos por ordenador en distintas áreas del conocimiento: matemáticas, física, inglés y programación computacional, principalmente. Los cursos se pueden tomar a distancia, modalidad que se está haciendo cada día más aceptada y demandada en el ámbito educativo, en la que los alumnos pueden avanzar de niveles en sus cursos. Estos cursos comenzaron a impartirse en la década de los sesenta.

Continuando con la línea de intervención desarrollada en Estados Unidos mediante el programa EPGY, desde el año 1993 hasta el 2000, se realizó en Santiago de Chile un programa de intervención educativa para niños superdotados, bajo la responsabilidad de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. Fue una experiencia para identificar y desarrollar el talento matemático en niños a partir de los 10 años de edad, con el objetivo de brindarles una formación complementaria durante su escolaridad (hasta los 18 años de edad). En este programa se identificaron 32 niños de un total de 5000 mediante una prueba escrita que consideraba

[4] Citamos estos cuatro porque tienen algo que ver, bien como antecedentes de este trabajo o como programas en los que ha participado la doctorando o sus directores.

tanto la capacidad para resolver problemas reales que involucraban números y operaciones muy básicas como la capacidad de abstracción. Los niños asistieron a cursos de matemáticas: álgebra, teoría de números, geometría y combinatoria, algunos de los cuales fueron complementados con el uso de la tecnología, específicamente con el *software* matemático Maple (Benavides, 2001, 2003).

En España, a partir del año 1998, se está realizando en la Comunidad de Madrid, un proyecto denominado Estímulo Talento Matemático (ESTALMAT), que está promovido por la Real Academia de Ciencias, cuyo objetivo es detectar y estimular el talento matemático de los estudiantes de los primeros cursos de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (De Guzmán, 2002, sin fecha; De Guzmán *et al.,* 1999). Posteriormente se ha extendido a otras comunidades autónomas del estado español (Andalucía, Canarias, Cataluña, Castilla y León, Comunidad Valenciana y Galicia). Los niños son identificados mediante la aplicación de una prueba específica de resolución de problemas construida expresamente para cada convocatoria y una entrevista personal a los niños y a los padres. En Andalucía, el total de niños seleccionados por convocatoria es 25. Los sábados por la mañana se realizan actividades de enriquecimiento matemático durante 3 horas, procurando que no interfieran en los programas de matemáticas de sus respectivos colegios. Para ello, se trabajan temas no habituales en el currículo de matemáticas o con un enfoque distinto. En cada sesión participan dos profesores que les introducen en temas diversos de resolución de problemas, teoría de números, geometría, grafos, juegos, etc.

2.5. Investigaciones y caracterizaciones previas del talento matemático

2.5.1. Investigaciones en resolución de problemas

En resolución de problemas hay dos tipos de investigación, una más general ligada a la orientación que Polya (1965) le da a la resolución de problemas (Noda 2000; Puig, 1996; Schoenfeld, 1985, 1987, 1992) y otra centrada en campos de conocimientos específicos (Carpenter, Hiebert y Moser, 1981; Castro, 1995; Fernández, 1997; Nesher, Greeno y Riley, 1982; Vergnaud, 1983). Nuestra investigación se localiza en la segunda línea de investigación y muy próxima a la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1983, 1988).

Diversas investigaciones han puesto de manifiesto las dificultades que presentan ciertos tipos de problemas de estructura multiplicativa en niños normales, situación que nos hace reflexionar acerca de si dichos problemas también se presentan en niños con talento y consideramos importante dar respuesta a esa inquietud de cara a conocer mejor a este colectivo de sujetos. Se sabe por investigaciones previas que, los ítems con números más pequeños son más fáciles de resolver (Hart, 1981), los problemas de multiplicar son claramente más difíciles cuando el operador es un número decimal (Fischbein et al., 1985) y los problemas de referente desconocido y de escalar desconocido se caracterizan porque provocan frecuencias altas de errores (Castro, 1995).

Dado que uno de los propósitos de esta investigación se refiere al análisis de las estrategias empleadas por determinados estudiantes en la resolución de problemas de estructura multiplicativa, consideramos como marco teórico adecuado el que Vergnaud desarrolla en diversas obras desde comienzos de los años 80 (Vergnaud, 1983, 1988, 1994) dentro del marco más amplio de los 'campos conceptuales'.

La noción de campo conceptual propuesto por Vergnaud, con el interés de comprender de una mejor manera la adquisición y el desarrollo de conocimientos específicos y de destrezas relacionadas con situaciones y problemas, la define como:

> *Un conjunto de problemas y situaciones para cuyo tratamiento resulta necesario utilizar conceptos, procedimientos y representaciones de diferentes tipos estrechamente interconectados* (Vergnaud, 1983; p.127).

El desarrollo de la comprensión de este campo conceptual abarcaría desde los 7 a los 18 años de edad. Este aspecto aporta otro elemento de pertinencia al presente estudio, que se realiza con sujetos de entre 11 y 13 años de edad, como se describe en el capítulo 3 en el apartado del diseño de la investigación.

2.5.2. Investigaciones en Talento Matemático

El interés por el tema de la inteligencia, la superdotación y el talento no es una novedad; estos constructos han sido estudiados sistemáticamente a partir de comienzos del siglo veinte. Pero no así los aspectos relacionados específicamente con el talento matemático, éstos tienen un desarrollo más reciente. Buen número de los estudios sobre el talento matemático proporcionan un listado de características de los sujetos que lo poseen.

Uno de los talentos específicos que aparecen diferenciados en las teorías más recientes sobre la superdotación es el talento matemático (Feldhusen, 1995; Gagné, 1993, 2004; Gardner, 1983; Renzulli, 1999; Sternberg, 1986, 2003). Si bien ha habido matemáticos profesionales que han reflexionado sobre el talento matemático (Hadamard, 1945; Poincaré, 1963), los estudios sistemáticos de niños superdotados en matemáticas no son muy numerosos y, como señalan Marjoram y Nelson (1988), tienen un desarrollo relativamente reciente y la mayoría de ellas se centran en tareas de resolución de problemas. Entre las investigaciones relacionadas con la resolución de problemas y niños con talento que han sido llevadas a cabo citamos las de Krutetskii (1969, 1976), Ellerton (1986), Benito (1996), Span y Overtoom-Corsmit (1986), Niederer e Irwin (2001), Wilson y Briggs (2002), Villarraga (2002) y Heinze (2005).

Las investigaciones acerca del talento matemático comienzan hacia mediados del siglo veinte: Krutetskii en Rusia, entre los años 1955 y 1966, estudió a 192 estudiantes entre 6 y 16 años, de los cuales 34 se consideraron como matemáticamente superdotados. Observó los procesos cognitivos de los niños mientras trabajaban con una serie de problemas especialmente preparados. Krutetskii detectó la tendencia de los superdotados a preferir formas de pensamiento visuales-espaciales o una forma lógica-analítica. Encontró tres fases en el desarrollo del pensamiento abreviado: generalización, razonamiento abreviado y estructuras generalizadas abreviadas. Descubrió que los alumnos con talento parecen pensar sobre las matemáticas de forma cualitativamente diferente y ya poseen algunas destrezas de resolución de problemas de los matemáticos adultos.

Krutetskii (1969, 1976) enumeró algunas características que suelen darse en los niños más dotados para las matemáticas, las cuales están relacionadas con la capacidad para:

1. Percibir y emplear información matemática.
2. Captar la estructura interna de los problemas.
3. Pensar con claridad y economía al resolver un problema.
4. Emplear símbolos con facilidad y flexibilidad.
5. Invertir fácilmente su proceso de pensamiento matemático.
6. Recordar información matemática general, métodos de resolución de problemas y principios de planteamiento.

Si bien es cierto que fueron pocos los alumnos que en su estudio mostraron un talento de tal magnitud, la lista indica la dirección en que suele desarrollarse el alto rendimiento en la materia.

Ellerton (1986) dentro de un estudio a gran escala, propuso a estudiantes de 11 a 13 años de edad, que inventaran problemas que fuesen difíciles de resolver por un compañero. Les pidió además que resolvieran los problemas que ellos mismos habían planteado. Comparó las características de los problemas matemáticos planteados por ocho niños más capaces con los planteados por otros ocho niños menos capaces. Obtuvo como resultados que los niños más capaces plantean problemas de mayor complejidad de cálculo, con sistemas de números más complejos y con mayor número de operaciones que sus compañeros menos capaces. Concluye que tanto en el planteamiento como en la solución de problemas los alumnos menos capaces tienen más dificultades que los alumnos con mayor capacidad. Afirma que el planteamiento de problemas es una herramienta útil para estudiar el talento matemático.

Benito (1996) investiga características metacognitivas y estrategias en la solución de problemas matemáticos y problemas de transformación. Señala como resultado importante la capacidad de los niños superdotados para inferir estrategias ejecutivas y elaborar el espacio de problemas complejos. Los niños superdotados no sólo conocen el tipo de procedimiento que utilizan para resolver un problema, sino que son capaces de verbalizar las estrategias que utilizan, lo que implica capacidad de análisis y de deducción; son conscientes de que ciertas operaciones las saben y las utilizan de forma automática y saben qué estrategias frecuentemente utilizan en la resolución de problemas.

Span y Overtoom-Corsmit (1986), dentro de la teoría del procesamiento de la información, estudian las diferencias que puede haber entre alumnos de educación secundaria con talento y alumnos promedio. Identifican a los niños con talento mediante tres test estandarizados: Un test de información general, el test de Matrices Progresivas de Raven y un test de creatividad. También tienen en cuenta las apreciaciones de sus profesores. Obtienen que, en la resolución de problemas matemáticos, los niños con talento procesan la información de forma diferente que los niños promedio y que los resuelven mejor, más rápido y necesitan menos ayuda que los niños normales; el grupo experimental se comporta como experto y el grupo control como novatos. Intentan responder a cuál sería la instrucción que más se ajusta a los niños con talento, dando como sugerencia el aprendizaje cooperativo entre niños con talento y niños normales.

Niederer e Irwin (2001) mencionan seis formas de identificar el talento matemático: test, nominación de los profesores, nominación de los padres, la propia nominación por parte del alumno, la nominación de los pares y propone una sexta categoría, la habilidad de los estudiantes para resolver problemas. Basándose en los problemas utilizados por Span y Overtoom-Corsmit en sus investigaciones, ponen de manifiesto nueva información en relación a características particulares de estudiantes con talento matemático que resuelven problemas, proponen una batería de seis problemas a sus alumnos y concluyen que con respecto a la identificación de niños con talento matemático los *"problemas similares a este estudio pueden ser apropiados para evaluarlos"* (p. 438). Niederer e Irwin (2001) obtienen en su investigación que la resolución de problemas es una forma más útil para identificar el talento matemático que otras técnicas tradicionales de identificación. En concreto, compara la resolución de problemas con un test estandarizado de elección múltiple de matemáticas, el Progressive Achievement Test (PAT), con la nominación de profesores, la autonominación, la nominación de los compañeros y la nominación de los padres. Concluye aconsejando el uso de la resolución de problemas como instrumento de identificación del talento matemático y desaconsejando el empleo del test de matemáticas de elección múltiple.

Continuando con la línea de trabajo de Niederer e Irwin, Wilson y Briggs (2002) utilizan la resolución de problemas como vía para caracterizar a los estudiantes con talento. Esta investigación la realizan con niños de 11 y 12 años de edad empleando una metodología basada en la entrevista clínica. Concluyen que aparentemente la tendencia de los niños con talento es planificar estrategias, resolver el problema de una manera eficiente y elegante, justificando sus soluciones.

Las investigaciones sobre el talento matemático en niños identificados como superdotados se han realizado con la finalidad de conocer las características innatas o genéticas de este tipo de niños. Pero hay escasa investigación que ponga de manifiesto las dificultades y los obstáculos que tienen cuando resuelven problemas de matemáticas. En este sentido cabe citar el trabajo de Villarraga (2002) que ha descrito características asociadas a los niños con talento en el campo específico de conocimiento de la estructura multiplicativa y diseña un instrumento con ocho problemas que pueden ser representados en términos de relaciones multiplicativas, y lo aplicó a 16 sujetos de entre 14 y 15 años que habían sido seleccionados mediante la nominación de sus profesores y el Test de Matrices Progresivas de Raven. Observa que hay una diversidad de esquemas de conocimiento presentes en la muestra de superdotados, a pesar de las características homogéneas del grupo de estudio, y describe los conocimientos de elaboración y ejecución presentes en los esquemas de los niños.

Heinze (2005) compara las estrategias que emplean los estudiantes superdotados en la resolución de un problema[5] con las que emplearon estudiantes normales en un estudio realizado por Hoffmann en el 2003 (Heinze, 2005). Concluye que los estudiantes superdotados emplean macroestrategias con mayor frecuencia que los estudiantes normales; es decir, que reconocen con mayor rapidez las estructuras y trabajan de manera más sistemática y estructurada los problemas. Además destaca en los niños superdotados las explicaciones que dan de sus soluciones. Los niños superdotados pueden explicar y verificar sus procedimientos sistemáticos de solución

[5] *Problema*. Las diferentes casas coloreadas
Las casas de una ciudad constan de un sótano, una fachada y un tejado que deben ser pintados con colores diferentes. Para el sótano disponemos de cuatro colores rojo (r), verde (g), amarillo (y) y azul (b), pero para la fachada y el tejado sólo tenemos dos colores rojo (r), y verde (g). Halla todas las posibilidades de pintar la casa de diferentes colores.

más a menudo que los estudiantes normales. Heinze (2005) concluye que en comparación con los estudiantes normales, los alumnos con talento matemático necesitan, de manera significativa, menos tiempo en solucionar puzzles y sumas de series de números naturales. Encuentra que los superdotados tienen una gran habilidad para verbalizar y explicar sus soluciones a los problemas y habilidad para utilizar su intuición de la estructura matemática del problema con el fin de obtener la solución.

Ellerton (1986) comparó los problemas matemáticos planteados por ocho niños y dedujo que los niños más inteligentes plantearon problemas más complejos que aquellos planteados por los chicos menos inteligentes, pero los criterios para determinar la complejidad de los problemas no fueron suficientemente específicos.

En nuestra investigación seguiremos la línea de trabajo de Span y Overtoom-Corsmit (1986), seguida por Niederer e Irwin (2001) y Wilson y Briggs (2002), que utilizan problemas para caracterizar a sujetos con talentos.

2.6. Cómo identificar niños con talento matemático

La descripción general de los alumnos con talento ha evolucionado a lo largo del tiempo y, en consecuencia, también las técnicas de identificación. En la identificación de alumnos con talento se suelen emplear varias técnicas. La mayoría de ellas consideran medidas formales y otras informales: las primeras se refieren a la utilización de un instrumento o prueba objetiva como pruebas psicométricas, pruebas estandarizadas o inventarios de personalidad, motivación o estilo intelectual; las segundas, las medidas informales, se basan en la observación cualitativa. También se utilizan los modelos mixtos, que combinan tanto procedimientos objetivos como subjetivos, algunos de estos procedimientos emplean conjuntamente tests de inteligencia estandarizados, la nominación de los compañeros, la nominación de los profesores y la nominación de los padres. Una vez que se han aplicado estas técnicas se suele seleccionar o distinguir a un grupo como sujetos con talento, pero con estos procedimientos no se puede conocer en profundidad cuáles son las características de su pensamiento matemático. Los instrumentos usuales de identificación de niños con talento suelen ser de tipo general y, por tanto, pueden no ser adecuadas para identificar a los niños dotados con talento matemático. Hay investigaciones que han puesto de relieve que una alta puntuación en un test de rendimiento no conlleva necesariamente a poseer talento matemático (Span y Overtoom-Corsmit, 1986). Los investigadores y educadores están interesados en caracterizar el talento matemático y, muchos de ellos están convencidos de que estas características se pueden detectar cuando el alumno superdotado se encuentra resolviendo problemas de matemáticas. Investigadores como Krutetskii (1969, 1976) han dado una descripción de posibles características de alumnos con talento matemático en función de su actuación en resolución de problemas no usuales. Esta idea ha calado en otros investigadores como Niederer e Irwin (2001) y Span y Overtoom-Corsmit (1986) que describen el talento matemático a partir de la actuación de los sujetos en resolución de problemas de matemáticas.

Insistimos en esta idea, pues nos parece importante. Como hemos indicado, en la literatura especializada hay descritos diversos métodos de identificación del talento matemático, los hay tanto con enfoque cualitativo como de corte cuantitativo. Los métodos que se han utilizado con más asiduidad para identificar a los niños con talento han sido los tests estandarizados, pero se corre con ellos el peligro de rechazar a niños que deberían ser identificados como talentos matemáticos. Así lo ponen de manifiesto Niederer, Irwin, Irwin y Reilly (2003) y, además, obtienen en su investigación que la resolución de problemas es una forma más útil para identificar el talento matemático que otras técnicas tradicionales de identificación. En concreto, comparan la resolución de problemas con un test estandarizado de elección múltiple de matemáticas, el Progressive Achievement Test (PAT), con la nominación de profesores, la autonominación, la nominación de los compañeros y la nominación de los padres. Concluyen aconsejando el uso de la resolución de problemas como instrumento de identificación del talento matemático y desaconsejando el empleo del test de matemáticas de elección múltiple.

Existen algunas baterías de prueba para evaluar el nivel de competencia o de desempeño del alumno en las distintas áreas curriculares. Entre las más utilizadas están las que evalúan la capacidad de lectura y escritura y el nivel de aprendizaje en matemáticas, pero como hemos visto este tipo de pruebas no es indicado para detectar el talento matemático Los docentes pueden hacer una contribución importante en la detección del alumno con talento, dado el conocimiento que tienen de él y del currículo escolar. Pueden elaborar pruebas de resolución de problemas basadas en el currículum escolar, hacer observaciones del alumno en el aula y analizar las producciones de éstos. Para ello necesitan tener indicadores adecuados al respecto. Veamos en lo que sigue algunas de las propuestas que se han realizado.

El proceso de identificación a temprana edad de niños con talento en matemáticas es una tarea complicada; ha habido propuestas como las de Straker (citado por Freeman, 1988) en relación a los niños de los primeros años de escolarización. Straker da una lista de características para estos niños:

- *gusto por los números, incluyendo su uso en cuentas y rimas;*
- *habilidad para argumentar, preguntar y razonar, utilizando conectivos lógicos: si entonces, así, porque, uno u otro, o, ... ;*
- *construcción de modelos o esquemas que revelan el equilibrio o simetría;*
- *precisión en la colocación de juguetes; por ejemplo, coches ordenados dispuestos en filas, muñecas ordenadas según el tamaño;*
- *uso de criterios sofisticados para separar y clasificar;*
- *disfrutan con los rompecabezas y otros juguetes en construcción* (p. 220)

Algunos autores destacan las actitudes que los niños desarrollan sobre aspectos matemáticos no formales

> *disposición en el gusto por los números y los juegos de números. Les gusta tanto contar que puede que lo hagan casi obsesivamente. […] desde muy pequeños estos niños pueden mostrar una fascinación por formas, rompecabezas, puzzles espaciales, dibujos y diseños, buscando siempre ideas aritméticas, adquiriendo un concepto precoz de la cardinalidad de los números y un gusto por el pensamiento riguroso* (Marjoram y Nelson, 1988, 220-221).

Otros autores señalan que en la identificación del talento matemático es importante y destaca la habilidad y destreza en la resolución de problemas matemáticos por parte del niño, este aspecto es común entre las listas de control de los distintos test orientados hacia esta característica. Entre los autores que han propuesto una lista de características tenemos a Greenes (1981).

Greenes (1981) hace una recopilación de características especiales que tienen los niños con talento cuando resuelven problemas en matemáticas y señala que podrían servir de lista de control para docentes en matemáticas durante su labor de identificación de estos estudiantes en las aulas:

- *Formulación espontánea de problemas*. Cuando a un alumno con talento se le presenta una situación, genera preguntas sobre ella que dan lugar a nuevos problemas que habrá que resolver.

- *Flexibilidad en el manejo de datos.* Los niños con talento tienden a emplear una gran variedad de enfoques y estrategias no usuales para resolver problemas. En la resolución de los problemas que se proponen para la aplicación de un determinado tipo de algoritmo previamente aprendido, los niños con talento a menudo ven una estrategia más simple o una estrategia alternativa para resolver el problema.

- *Habilidad para la organización de datos*. Cuando a un estudiante con talento se le proponen problemas que contienen conjuntos de datos, tienden a organizarlos en listas o tablas, con el fin de descubrir pautas y relaciones o estar seguros de agotar todas las posibilidades.

- *Agilidad mental o riqueza de ideas.* Los niños con talento pueden pensar de forma divergente y hacer asociaciones únicas. Esto puede manifestarse en clase por un retraso en la respuesta que no estará causado por la imposibilidad de resolver el problema sino porque el alumno ha detectado ambigüedades en el problema o ve que sus soluciones son múltiples, o quizás, está considerando estrategias alternativas para resolverlo.

- *Originalidad de interpretación*. Los estudiantes con talento tienen la habilidad de salirse del camino establecido, escaparse de lo obvio, y visualizar cosas desde una perspectiva diferente.

- *Habilidad para transferir ideas.* Los estudiantes con talento son capaces de aplicar información aprendida en un contexto a un problema en un contexto diferente.

- *Habilidad para generalizar.* Los estudiantes con talento examinan las cosas a conciencia, observan relaciones entre ellas y tienen habilidad para generalizar estas relaciones.

También señala que la naturaleza especial del pensamiento de los estudiantes con talento se manifiesta en otros aspectos, con en el hecho de prefieren los problemas complejos a los simples. Si consideran un problema difícil (aquel cuya solución no se obtiene por la mera aplicación de un algoritmo computacional previamente aprendido), les gustará resolverlo. La dificultad que les plantea un problema difícil les estimula para obtener la solución. Les gusta además enfrentarse con los problemas que permiten el empleo de diferentes procesos de solución. Muy especialmente les intriga los problemas de lógica recreativa, que incorporan múltiples condiciones y requieren el empleo de la lógica deductiva.

El estudio de Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez-Cao (2004) pone de manifiesto que hay una baja relación entre los tests utilizados para evaluar la aptitud matemática y las características fundamentales del talento matemático destacadas por Greenes (1981).

En esta misma línea, Miller (1990) hace un listado de características que pueden ser claves en la identificación del talento matemático:

- Conocimiento y curiosidad sobre la información numérica
- Rapidez en aprender, entender y aplicar ideas matemáticas
- Alta capacidad de pensar y de trabajar de manera abstracta
- Capacidad de ver patrones y relaciones matemáticas

- Capacidad de pensar y de trabajar abstractamente de manera flexible y creativa
- Capacidad de transferir lo aprendido a las nuevas situaciones

Diezmann y Watters (2002) ante la pregunta: *¿cuáles son las características de los alumnos superdotados en matemáticas?* concluyen que, de manera general, los alumnos superdotados matemáticamente tienen una gran capacidad de razonar bien analítica o espacialmente. Los estudiantes superdotados analíticamente son generalmente trabajadores exactos y rápidos, son hábiles para articular cadenas de razonamientos. Por el contrario, los estudiantes superdotados espacialmente, pueden tener un rendimiento bajo en clase debido al énfasis que se suele poner en las tareas analíticas. Los estudiantes superdotados espacialmente realizan mejor las tareas de carácter visual –espacial.

Banfield (2005) recoge de varias fuentes (House, 1987; NCTM, 2000; Wieczerkowski y Prado, 1993) un conjunto de características específicas de los niños con talento matemático en las que aglutina características cognitivas y afectivas:

- Tienen una percepción formal de las matemáticas
- Son capaces de resolver problemas complejos
- Realizan un razonamiento lógico sobre relaciones cuantitativas y espaciales
- Piensan con símbolos matemáticos y su pensamiento es flexible
- Generalizan las relaciones y operaciones rápida y extensamente
- Simplifican el razonamiento matemático
- Pueden realizar una construcción rápida de procesos mentales y reversibilidad en el razonamiento matemático
- Tienen memoria matemática para las relaciones, argumentaciones, demostraciones, y aspectos de resolución de problemas.
- Tienen energía, persistencia y concentración
- Organizan datos para observar patrones o relaciones
- Analizan problemas, consideran alternativas
- Aprenden conceptos y procesos matemáticos más rápidamente que otros estudiantes

- Son hábiles o capaces de verbalizar conceptos, procesos y soluciones matemáticas
- Les gustan los problemas difíciles, los puzzles y los problemas de lógica
- Desarrollan asociaciones únicas, emplean métodos originales para las soluciones
- A veces resuelven problemas intuitivamente, y pueden no ser capaces de explicar por qué la solución es correcta.

También cabe mencionar el modelo centrado en la superdotación como "intersección" de varios factores desarrollado por Renzulli (1977). Por medio de este modelo, Ridge y Renzulli (1981) definen la superdotación como interacción entre tres racimos básicos de rasgos humanos: capacidad general sobre la media, alto nivel de compromiso con la tarea, y alto nivel de creatividad. Según esta definición, los niños dotados y con talento son los que poseen o son capaces de desarrollar este sistema compuesto de rasgos y de aplicarlos a cualquier potencialmente área valiosa de actuación humana.

En esta línea, Mingus y Grassl (1999) centran su estudio en estudiantes que manifiestan una combinación de características: *disposición para esforzarse en el trabajo, capacidad matemática natural y/o creatividad.* Utilizan una modificación del diagrama desarrollado por House (1987) (fig. 2.4) para visualizar esta combinación de características. Consideran, pues, tanto capacidades matemáticas naturales como capacidades no matemáticas en la definición de estudiantes con excepcionales capacidades matemáticas. Para ellos, los sujetos que poseen un alto grado de *capacidad matemática natural* exhiben alguna o todas las características matemáticas destacadas por Krutetskii (1976). Las capacidades no matemáticas consideradas por Mingus y Grassl (1999) son dos: *predisposición a esforzarse* en el trabajo (que abarca una variedad de características tales como ser centrado, confiado, enérgico, persistente, y capaz de soportar la tensión) y *alta creatividad* (i.e. capacidad de pensamiento divergente y de combinar la experiencia y las habilidades en dominios aparentemente dispares para sintetizar productos nuevos o ideas). Los autores llaman *verdaderamente superdotados* a los estudiantes que poseen un alto grado de capacidad matemática, creatividad y predisposición para esforzarse en el trabajo.

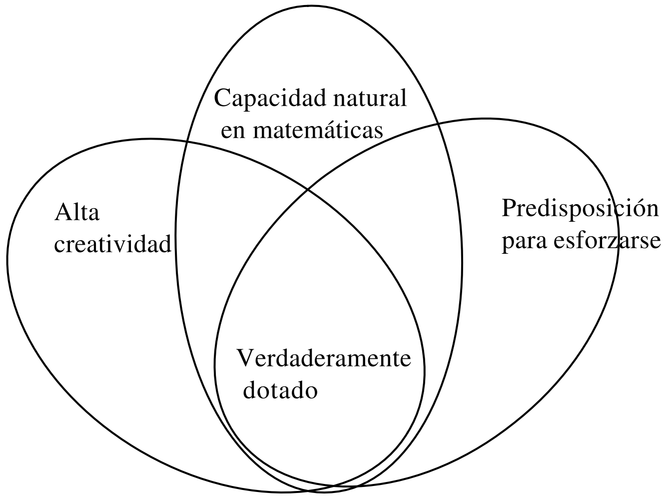


Figura 2.4. ESTUDIANTES CON EXCEPCIONAL CAPACIDAD MATEMÁTICA (Mingus y Grassl, 1999)

Tomando en consideración las diversas propuestas, es claro que la resolución de problemas está en el centro de los diversos métodos que se proponen para identificar el talento matemático. Por regla general hay acuerdo en combinar la resolución de problemas con otros métodos para identificar a los alumnos con talento: test estandarizados de problemas, nominación de profesores, nominación de compañeros y nominación de padres.

Por otro lado, la identificación es un proceso que debería concluir con el diseño de alguna medida de intervención que posibilite atender adecuadamente las necesidades educativas, emocionales y sociales de los sujetos. Debe por tanto, propiciar la existencia de programas y actuaciones concretas, pensadas para el desarrollo de los talentos y las capacidades. Por ello, la identificación ha de ser igualmente específica, porque por ejemplo ¿cómo se puede identificar un alumno especialmente dotado para las artes plásticas, el liderazgo social o la música, mediante la aplicación de técnicas psicométricas basadas exclusivamente en la aptitud verbal, matemática o figurativa? Sería un contrasentido.

Capítulo 3

Metodología

3.1. Introducción

Para dar respuesta a las cuestiones y objetivos que nos hemos propuesto en esta investigación hemos empleado una concreción de la metodología ya utilizada en otros trabajos de investigación llevados a cabo por el grupo de Investigación de Pensamiento Numérico de la Universidad de Granada (Castro, 1995; Fernández, 1997; Segovia, 1997) adaptándola al problema concreto de investigación que abordaremos.

La metodología a la que nos referimos contempla una primera fase de obtención de datos a partir de un cuestionario de problemas matemáticos, y una segunda fase en la que se realizan entrevistas. Con base en unos y otros resultados se propone un modelo de caracterización de los sujetos con vistas a una posterior intervención.

Previo al desarrollo pormenorizado de las dos fases del diseño del estudio principal, describimos el estudio piloto de la investigación que permitió perfilar el estudio principal. A continuación desarrollamos el diseño de la primera fase de la investigación, haciendo la descripción general del diseño, de las variables, los sujetos, los instrumentos de recogida de información, la presentación y administración del cuestionario y el tipo de datos obtenidos mediante el cuestionario. En el diseño de la segunda fase de la investigación, describimos la forma en que se desarrollarán las entrevistas, la estructura y problemas empleados en la entrevista y la selección de los sujetos entrevistados.

3.2. Estudio Piloto

El estudio piloto se realizó para indagar la idoneidad de la muestra de sujetos y de los problemas que podrían componer el instrumento de resolución de problemas. En él participaron sujetos que asistían a un programa de enriquecimiento curricular de 14 y 15 años de edad en la universidad, que habían sido seleccionados como sujetos con talento. A estos sujetos les aplicamos un cuestionario compuesto por 8 problemas de enunciado verbal de estructura multiplicativa (Ver Villarraga, 2002).

Los resultados de este estudio (Villarraga, 2002; Villarraga, Castro y Benavides, 2002; Villarraga, Castro y Benavides, 2007), mostraron una diversidad de esquemas conceptuales en los niños con talento con respecto a la resolución de problemas de estructura multiplicativa, y también puso de manifiesto que había problemas en los que se producía un efecto techo debido a la cantidad de aciertos en cada uno de estos problemas. Como consecuencia de estos resultados, las implicaciones que tuvo el estudio piloto en el diseño del estudio definitivo fueron de dos tipos: a) modificación de la elección de la edad de los sujetos, y b) remodelación del cuestionario de problemas. Con respecto a la edad, tomamos la decisión de realizar el estudio definitivo con sujetos de edades menores a los que participaron en el estudio piloto, y se eligió el intervalo de edad comprendidas entre los 11 y 13 años de edad. La segunda consecuencia del estudio piloto fue la modificación del instrumento, decidiendo qué ítems se mantenían y qué ítems se eliminarían. Se rechazaron los dos primeros problemas: el primero consistía en completar una progresión geométrica de razón dos que resultó excesivamente fácil. Así mismo, se rechazó el problema segundo en el que se proponía un razonamiento analógico a partir de figuras geométricas. Se consideró que pese a la similitud del razonamiento analógico con el razonamiento proporcional, no podíamos aceptar enteramente que este problema fuese de estructura multiplicativa. Había, así mismo, una razón adicional, y es que este tipo de ítems suelen aparecer en los tests de aptitud general, y dado que pretendemos construir un test de aptitud específico, se produce un solapamiento.

Por lo demás, se decidió mantener para incluirlos en el instrumento definitivo los seis restantes problemas que corresponden a problemas de comparación multiplicativa, problemas de proporcionalidad simple de escala y problemas de proporcionalidad simple de razón o tasa (según la terminología de Bell y otros, 1989) con números decimales.

3.3. Diseño de la primera fase de la investigación

3.3.1. Descripción general del diseño

Según Kerlinger y Lee (2002), "el diseño de investigación constituye el plan y la estructura de la investigación, y se concibe de determinada manera para obtener respuesta a las preguntas de investigación." (p. 403). Por otra parte, los diseños de investigación pueden ser de cualitativos, cuantitativos y mixtos (Creswell, 1994, 2003). En lo que se refiere a la estructura del diseño empleado podemos distinguir dos grandes partes en nuestro diseño de investigación: la primera está referida a la construcción y validación de un cuestionario de problemas como test de aptitud específica y, la segunda, se refiere a la descripción de los procesos que los sujetos emplean en la resolución de los problemas del cuestionario. El diseño del estudio que presentamos es pues un diseño mixto en el que combinamos aspectos de diseños simples cuantitativos y cualitativos. En la primera parte se utiliza un diseño de corte cuantitativo para la elaboración de un test, mientras que en la segunda parte se ponen en juego técnicas propias del diseño cualitativo.

El estudio que presentamos es de tipo descriptivo, sin pretender establecer relaciones causales; en su lugar se intenta avanzar en el conocimiento del proceso de identificación de ese colectivo especial que son los sujetos con talento, a partir del análisis del proceso de resolución de problemas matemáticos. Con este fin en la primera parte del estudio hemos diseñado un cuestionario de problemas de matemáticas (posteriormente llamado PEM), lo que nos ha conducido a tener que demostrar su utilidad y validez para detectar características matemáticas propias de los sujetos con talento. El primer paso dado para alcanzar esta meta es la comparación del desempeño en el cuestionario construido de un grupo de sujetos con inteligencia general sobre la media (específicamente el percentil 75 y que llamamos niños con talento) con el de otro grupo que no alcanza la puntuación límite exigida en el test de Raven (los que obtienen una puntuación por debajo del percentil 75) al que denominamos grupo de comparación o contraste. Desde este punto de vista el diseño de la investigación es un diseño de dos grupos independientes (el grupo de sujetos con talento y un grupo de sujetos de contraste que no superaron el test de Raven), en el que adoptamos el enfoque de contrastar varias hipótesis estadísticas con la finalidad de mostrar la significatividad de las comparaciones que hacemos entre las variables que son representativas de los datos recogidos. Obviamente una descripción se puede hacer con menos "aparataje" estadístico, pero el aporte de la significatividad de las comparaciones que hacemos le da mayor peso y credibilidad a los resultados que se obtienen. Un segundo paso en la construcción del test de problemas ha sido un análisis de ítems que aporta información sobre los problemas que constituyen el cuestionario.

El diseño utilizado en este estudio participa también de alguna manera del carácter de un diseño *ex post facto* puesto que los sujetos empleados están ya seleccionados mediante el test de Raven y la nominación de sus profesores mediante pautas diseñadas especialmente para dicha situación. Específicamente, al respecto Bisquerra (1989) afirma que: “una característica esencial de la investigación *ex post facto* es que no se tiene control sobre la variable independiente, puesto que sus manifestaciones ya han ocurrido. Es decir, ha ocurrido un hecho (variable independiente) y se observan posteriormente los efectos en las variables dependientes” (p. 218).

Como ya hemos señalado, esta investigación es un estudio descriptivo, en el que se emplean técnicas cuantitativas y cualitativas de recogida de datos. Es una investigación descriptiva porque se interesa en “describir lo que son las relaciones presentes entre variables en una situación dada” (Cohen y Manion, 1990, p. 102). La parte cuantitativa contempla el análisis estadístico de los datos recogidos mediante el cuestionario y, la parte cualitativa, trata de ofrecer una descripción de las estrategias que emplean y los errores que cometen los sujetos con talento en sus producciones. Además, en esta segunda parte, se realizan entrevistas individuales que tratan de completar y dar validez y fiabilidad a la información obtenida previamente.

En lo que respecta al plan seguido, para caracterizar a los sujetos con talento, hemos seguido un proceso, en que hemos entremezclado los aspectos cualitativos y cuantitativos de la metodología empleada, que consta de las siguientes fases:

1. Realizar un estudio piloto para seleccionar sujetos e ítems de un cuestionario de problemas.
2. Seleccionar un grupo de niños con talento de entre 11 y 13 años de edad que han sido identificados mediante un test de inteligencia general (test de Raven).
3. Localizar a un conjunto de niños de entre 11 y 13 años de edad de los que se conozca su puntuación en el test de Raven y sea inferior al percentil 75.
4. Identificar un conjunto de problemas de estructura multiplicativa que hayan provocado dificultades en sujetos escolares.
5. Elaborar un instrumento de lápiz y papel con los problemas identificados en la primera fase.
6. Aplicar el instrumento construido (Cuestionario de problemas) al grupo de niños con talento y al grupo de niños de referencia o de contraste que no han sido seleccionados como tales.
7. Validar el Cuestionario de problemas como instrumento de evaluación.
8. Comparar el rendimiento de los dos grupos de sujetos con respecto al cuestionario de problemas.
9. Realizar un análisis de ítems a los problemas del Cuestionario construido.
10. Analizar las representaciones, los procedimientos y las estrategias en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa del Cuestionario.
11. Identificar y clasificar los errores cometidos en el proceso de resolución de problemas de estructura multiplicativa del Cuestionario
12. Realizar una prescripción de sujetos con la finalidad de orientar la intervención educativa

3.3.2. Variables

En este trabajo hemos centrado nuestra atención en una serie de características que pueden ser interpretadas como variables de investigación. Entre las clasificaciones de variables más conocidas en estudios sobre resolución de problemas y que han demostrado mayor utilidad se encuentran las de Kilpatrick (1978), que han sido referenciadas y utilizadas por otros autores (véase Castro, 1991).

Kilpatrick (1978) clasifica las variables en independientes y dependientes; las variables independientes a su vez se clasifican en variables del sujeto, de tarea y de la situación, de las que en nuestra investigación sólo utilizamos las dos primeras; por otra parte clasifican las variables dependientes en variables de producto, de proceso, concomitantes y de evaluación, de las cuales en nuestro trabajo utilizamos las dos primeras categorías.

Variables independientes

Las variables independientes que hemos utilizado son aquellas en función de las que tratamos de explicar las variaciones producidas en las producciones de los sujetos en resolución de problemas de estructura multiplicativa. Concretamente las variables independientes utilizadas se pueden catalogar como variables de sujeto y variables de tarea.

Variables independientes de sujeto, que son aquellas que describen atributos específicos del sujeto, en este caso del resolutor. Hemos utilizado en este trabajo: el curso al que pertenecen, el colegio al que asisten a clases y el grupo de pertenencia.

- Variable CURSO, corresponde al nivel educativo escolar al cual asiste el sujeto. Tiene dos niveles:

  6- Sexto: niños que cursan sexto año de educación básica

  8- Octavo: niños que cursan octavo año de educación básica

- Variable COLEGIO, con ella identificamos el tipo de establecimiento educacional al que asiste el sujeto según el organismo del que depende económicamente. En Chile presenta tres posibilidades:

  1: Colegio municipal

  2: Colegio particular subvencionado

  3: Colegio particular pagado

- Variable GRUPO de sujetos, que corresponde a la pertenencia o no del niño al grupo de niños con o sin talento, según el resultado de un test de inteligencia general, y tiene dos opciones:

  Grupo 1: niños seleccionados como niños con talento mediante el test de Raven. Su puntuación fue igual o superior al percentil 75.

  Grupo 2: niños que se presentaron a la prueba pero que no fueron seleccionados como sujetos con talento mediante el test de Raven. Su puntuación en el test de Raven fue inferior al percentil 75.

Variables independientes de tarea: son las que están asociadas con la naturaleza del problema. Hemos utilizado dos: el problema y el tipo de problema.

- Variable PROBLEMA, identificamos con ella a cada uno de los problemas empleados en este estudio. Toma 12 valores, correspondiente a los 12 problemas de enunciado verbal de estructura multiplicativa que se les propuso a los sujetos.

- Variable TIPO DE PROBLEMA, tiene 5 categorías, correspondiente a los tipos en que clasificamos los 12 problemas aplicados.

  TIPO 1: problemas de comparación

  TIPO 2: problemas de combinatoria

  TIPO 3: problemas de escala

  TIPO 4: problemas complejos

  TIPO 5: problemas de proporcionalidad simple con números decimales

Variables dependientes

Las variables dependientes son la segunda gran categoría de variables en investigación sobre resolución de problemas y, en líneas generales, se utilizan para expresar lo que ha de ser predicho. Las que hemos utilizado son de los siguientes tipos:

Variables dependientes de proceso, se basan en el camino que sigue el sujeto para obtener la solución, en nuestro caso se derivan de los informes verbales (producciones) que los propios sujetos hacen de lo que están pensando durante la resolución del problema. Hemos utilizado cinco variables de proceso en nuestra investigación:

- Variable REPRESENTACIÓN, se refiere a las representaciones externas que utilizan los sujetos para la resolución de los problemas. Consta de tres niveles de definición diferentes, en función del tipo de representación externa empleada en la resolución del problema: representación verbal, representación pictórica y representación aritmética.

- Variable PROCEDIMIENTO, contempla los elementos constitutivos que han dado lugar a la solución, y que para su descripción hemos agrupado en tres grandes categorías según sea el tipo de representación: verbal, pictórica o aritmética.

- Variable ESTRATEGIA, la hemos definido como el conjunto de procedimientos que emplean los sujetos para obtener la solución.

- Variable TIPO DE ERROR, corresponde a las categorías de error identificadas en las producciones de los sujetos. Es una variable categórica que ha tomado en este estudio 7 valores: conmutar los datos, cambio de estructura, inversión de la operación, omitir una operación, error en un concepto, cambio de significado de una relación, emplear una estimación y no responde.

Variables dependientes de producto, se basan en las características personales que el sujeto imprime a la solución de un problema

- Variable TPERCEN, corresponde al rendimiento de cada niño en el cuestionario escrito de problemas matemáticos de estructura multiplicativa, medido en porcentaje. El rendimiento se obtiene asignando 1 ò 0 a cada problema en función de si el proceso utilizado por el sujeto es correcto o no y posteriormente sumando la puntuación asignada a cada uno de los doce problemas.
- Variable RAVENP, es el rendimiento de cada sujeto en el test de Raven, medido en porcentaje.
- Variable MATEMAP, es el rendimiento de los sujetos en la asignatura de matemáticas medido en porcentajes. En este caso se recogió la nota de los alumnos y se expresó a porcentajes.
- Variable TOTALC, es el rendimiento medio de cada tipo de problema expresado en porcentaje.

El control de efectos extraños y sesgos provocados por variables que pudiesen influir significativamente en el problema a estudiar han sido especialmente consideradas. En este caso se ha procurado neutralizar estos efectos tomando una serie de precauciones que sistematizamos de la manera siguiente:

- Controlando las condiciones de aplicación de los instrumentos, siendo todas realizadas por la investigadora.
- Utilizando un formato común para la resolución de las tareas propuestas. Se han planteado problemas utilizando exclusivamente el formato verbal y el contenido matemático de los problemas ha sido controlado a nivel global y a nivel local. A nivel global puesto que la investigación se ciñe a un aspecto matemático muy concreto: problemas de estructura multiplicativa. A nivel local, es decir, a nivel de los contenidos matemáticos parciales que conforman los problemas se han

controlado los siguientes aspectos: tipos de números, tipos de magnitudes y tamaño de los números.

- Las variables de contexto se han controlado eligiendo contextos familiares para el alumno y haciendo adaptación de los problemas originales.
- Controlando posibles efectos complementarios como pueden ser la maduración, aprendizaje, motivación o fatiga ante las tareas a resolver. El número de problemas a resolver ha sido 6 por sesión (en dos sesiones), evitándose así posibles efectos de fatiga. El tiempo dedicado a la resolución de la tarea (de cada sesión) osciló entre 30 a 60 minutos. Sin establecer un tiempo límite para su realización.

3.3.3. Sujetos

Los alumnos con talento representan un porcentaje relativamente pequeño de la población total de alumnos escolarizados. Pasarín, Feijoo, Díaz y Rodríguez (2004), dan como dato que sólo el 2,7% del total de los sujetos cumplen las condiciones para considerarlos como sujetos con talento matemático, por lo que el número total de sujetos que pueden intervenir en un estudio es limitado, y la metodología que se emplee debe contar con esta limitación.

En esta investigación han intervenido dos grupos de sujetos de 30 alumnos cada uno. Los 60 sujetos que han participado en la investigación, y a los que se les ha aplicado el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa, poseen unas características comunes: son niños de ambos sexos seleccionados de dos comunas de Santiago de Chile: Puente Alto y La Florida; tienen una edad comprendida entre 11 y 13 años y están cursando sexto u octavo año de Educación Básica (equivalente a lo que fue la EGB de España en el plan de estudios correspondiente al periodo 1971-1991). Además, fueron nominados (seleccionados) por sus profesores para que se les aplicara el Test de Matrices Progresivas de Raven con la finalidad de participar en un programa de talentos. Si bien los dos grupos de alumnos comparten los anteriores aspectos la conformación de los dos grupos se produjo en base a una serie de criterios que explicitamos a continuación.

El primer grupo de sujetos, al que denominamos sujetos con talento, consta de 30 sujetos de entre 11 y 13 años que participan en un programa de talentos académicos, son alumnos chilenos de sexto y octavo año de educación básica, que participan semanalmente en un programa para niños con talento en la Pontificia Universidad Católica de Chile (PENTA-UC)[1], y provienen de establecimientos educacionales de una zona de nivel socioeconómico medio. Estos niños fueron nominados por sus profesores en los colegios para que realizaran el test de Raven en la universidad y determinar cuantitativamente su inteligencia general. Fueron seleccionados por obtener una puntuació n igual o superior al percentil 75 en el test de Raven. Además, estos 30 niños tienen una característica adicional: de entre todos los alumnos que superaron al percentil 75 en el test de Raven, ellos decidieron entre una variedad de cursos (Matemáticas, Astronomía, Física, Química, Biología, Ajedrez, entre otros), realizar el curso de matemáticas.

El segundo grupo de sujetos, al que utilizamos como grupo de contraste, está formado por 30 sujetos de entre 11 y 13 años, que se presentaron al proceso de selección para el programa de talentos, pero que no fueron seleccionados porque no superaron el test de Raven: obtuvieron una puntuación menor que 47 puntos sobre 60 en la prueba de selección.

Para seleccionar a los estudiantes del grupo de constraste se hizo un listado de los establecimiento educacionales a los que pertenecían los niños con talento, y se seleccionó desde la base de datos del PENTA-UC, a los niños que habían sido nominados de cada establecimiento, para localizar a 30 sujetos de los que conociera el puntaje obtenido en el test de Raven. También se procuró que entre los niños seleccionados, fueran de diferentes colegios según la dependencia y tuvieran la edad entre 11 y 13 años en el momento de

[1] El PENTA-UC, es un programa de enriquecimiento. Los niños son seleccionados mediante la nominación de sus profesores y por las puntuaciones obtenidas en el test de Raven. La elección de niños de entre 11-13 años se fundamenta en que "existen estudios como los del doctor Patrick Suppes, que indican que la influencia del hogar en el desarrollo de las habilidades matemáticas es relativamente poca y que a la edad de 10 años podríamos descubrir talento matemático excepcional en niños de cualquier nivel socioeconómico y sexo" (Marshall, 2000, p. 293).

aplicación del cuestionario. La recogida de datos se realizó en tres tipos de establecimientos según la dependencia: municipalizado, particular pagado, y particular subvencionado.

Tanto el número de sujetos como su distribución por tipo de colegio se muestran en la tabla 3.1, junto a otros datos descriptivos de interés.

Tabla 3.1. NÚMERO DE NIÑOS SEGÚN GRUPO Y DEPENDENCIA DEL ESTABLECIMIENTO AL QUE PERTENECEN, PROMEDIO DE EDAD, NOTA FINAL, NOTA MATEMÁTICA Y PUNTAJE RAVEN

DEPENDENCIA DEL ESTABLECIMIENTO	PROMEDIO	GRUPO		
		GRUPO 2 (N=30)	GRUPO 1 (N=30)	TOTAL (N=60)
Municipalizado (N=39)	Edad	13,0	12,5	12,7
	Nota Final	6,3	6,5	6,4
	Promedio Matemática	6,1	6,5	6,3
	Puntaje Raven	40,5	49,8	45,0
Particular Pagado (N=8)	Edad	11,8	12,1	12,0
	Nota Final	6,8	6,7	6,7
	Promedio Matemática	6,5	6,9	6,7
	Puntaje Raven	44,0	49,5	46,8
Particular Subvencionado (N=13)	Edad	12,1	12,2	12,2
	Nota Final	6,6	6,7	6,6
	Promedio Matemática	6,4	6,6	6,5
	Puntaje Raven	43,8	51,3	47,8
Edad		12,6	12,4	12,5
Nota Final		6,4	6,6	6,3
Puntaje Matemática		6,2	6,6	6,4
Puntaje Raven		41,6	50,1	45,9

3.3.4. Instrumentos de recogida de la información

En este trabajo de investigación hemos utilizado datos recogidos con dos instrumentos: un test estandarizado de inteligencia o aptitud general, el test de Raven y un cuestionario de problemas de estructura multiplicativa, que hemos construido *ad hoc* y que hemos denominado cuestionario PEM.

Test de Raven

El test de matrices progresivas de Raven es un test de inteligencia, que se utiliza para identificar a alumnos con talento académico sobresaliente, es un test no verbal que cubre el rango de edades desde los 5 años hasta la edad adulta. Consta de 60 matrices, graduadas en nivel de dificultad, a cada matriz le falta "una parte", y el objetivo de la tarea es seleccionar entre las alternativas, el diseño apropiado que completa el patrón de la matriz. Es especialmente efectivo para evaluar estudiantes pertenecientes a grupos minoritarios y culturalmente diversos, que están limitados por habilidades de lenguaje (Raven, Court y Raven, 1986).

Cuestionario PEM

El cuestionario de problemas de matemáticas aplicado en este estudio está constituido por doce problemas de estructura multiplicativa al que hemos denominado cuestionario PEM (véase anexo A.1) La estructura multiplicativa implicada en el cuestionario PEM es una de las más ricas de la matemática por la variedad de contextos y situaciones a los que puede referirse, por las diferentes posibilidades en cuanto al tipo de cantidades implicadas y por la variedad de categorías semánticas (Bell y otros 1989; Greer, 1992; Nesher, 1988; Vergnaud, 1988). La estructura multiplicativa se desarrolla durante un amplio intervalo de tiempo, es por tanto, una estructura implicada en todas las etapas de desarrollo y aprendizaje; determinadas situaciones pueden ser adquiridas y resueltas en los primeros niveles de la Educación Primaria y otras tienen dificultad en su resolución en las últimas etapas de la Educación Secundaria Obligatoria. Las características anteriores hacen muy pertinente su presencia en una prueba en la etapa de desarrollo en la que se encuentran los sujetos de la investigación.

Cuando se construye un instrumento de recogida de la información es conveniente analizar la validez del mismo. Las prevenciones que se tomen durante el proceso de construcción del instrumento son determinantes en la validez del instrumento de recogida de la información. En la construcción del cuestionario de problemas de estructura multiplicativa hemos tenido en cuenta dos tipos de validez: la validez de contenido: "para evaluar la validez de contenido el investigador deber verificar por sí mismo y con la ayuda de otros colegas en qué medida los ítems del test constituyen una muestra representativa del universo del contenido que aquél se propone medir"; validez de constructo que considera "en qué medida el test es congruente con una teoría dada o con las hipótesis que se desea verificar; es decir, en qué medida la prueba toma en cuenta los aspectos que se hallan implícitos en la definición teórica" (Van Dalen y Meyer, 1983, pp. 341-343). En los apartados que siguen intentamos justificar ambos tipos de validez del instrumento haciendo referencia a las investigaciones a nivel internacional que han tratado el tema.

Con respecto al contenido de los ítems incluidos en el cuestionario PEM, además de las variantes de problemas simples que se dan dentro de la estructura multiplicativa se le han impuesto otras características adicionales a los problemas, como el tipo de número que aparece como dato o el contenido matemático implícito, que nos permite clasificar los 12 problemas del cuestionario PEM en cinco grupos. La tabla 3.2 recoge los 12 problemas que conforman el cuestionario PEM agrupados según los cinco tipos que han sido considerados.

Tabla 3.2. TIPOS DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

TIPO DE PROBLEMAS	PROBLEMAS	CARACTERÍSTICA
1	1 – 4 – 8 – 12	Problemas de comparación
2	3 – 9	Problemas de combinatoria
3	6 – 10	Problemas de escala
4	5 – 7	Problemas complejos
5	2 – 11	Problemas de proporcionalidad simple con números decimales

El primer grupo de problemas son del tipo comparación multiplicativa, formado por los problemas 1, 4, 8 y 12, los cuáles han sido items criterios utilizados por Castro (1995) para identificar los niveles de comprensión de problemas de comparación. De estos problemas se ha recogido en la literatura que si los ordenamos de más fácil a más difícil quedarían ordenados de la forma: 12, 8, 4 y 1. Estos problemas tienen sólo números naturales y se sabe que los principales tipos de errores que cometen los niños al resolverlo son: cambio de estructura y multiplicación sobre las resta. Para resolver estos problemas se requieren conocimientos relacionados con los conceptos de multiplicación y de división de números enteros, se conocen dos de los datos de la proporción y un tercer dato implícito. Este grupo de problemas está tomado del instrumento de Castro (1995, p.81); en cada problema se han cambiado los nombres de los personajes. Para resolver en forma correcta estos problemas se requiere un dominio básico de la multiplicación y de la división, interpretar y representar adecuadamente la relación de proporcionalidad entre dos cantidades y establecer una secuencia de cálculo que involucra la división o la multiplicación en un orden adecuado. Los problemas 1 y 4 han sido utilizados en el estudio piloto (Villarraga, 2002) tal que en el problema 1 el 36,3 % de los alumnos lo tuvieron correcto y el problema 4 el 100% de los alumnos lo tuvieron correcto. Se han puesto 4 de las 5 categorías de Castro (1995) con el objetivo de constatar la presencia de dichas categorías en sujetos con talento dado que su estudio fue realizado con sujetos normales. Son problemas en los que los sujetos deben conocer y comprender los diferentes tipos de comparación multiplicativa, de aumento y de disminución, expresados mediante los comparativos correspondientes 'veces más que' y 'veces menos que' y asociar a estas expresiones la operación de multiplicar o de dividir que los resuelve. Dado que en un problema de comparación intervienen tres cantidades: el referente, el comparado y el escalar que cuantifica la comparación, escoger la operación adecuada se complica según cuál es la cantidad desconocida en el problema. De las investigaciones previas (véase Castro, 1995) se sabe que los principales tipos de errores que cometen los niños al resolverlo son: cambio de estructura e inversión de la operación.

El segundo grupo de problemas está constituido por dos problemas de combinatoria; en este tipo de problemas los sujetos deben utilizar estrategias más o menos sofisticadas, según el problema, para determinar el número de combinaciones que pueden realizarse con un grupo de objetos; son problemas de gran dificultad y en donde requiere ponerse en juego, para su resolución, heurísticos como la representación gráfica, el dibujo, la modelización, el empleo de esquemas, tablas y fórmulas. El problema 3 del cuestionario, es un problema simple, en el sentido de que contiene una sola relación ternaria entre los datos; el otro, el problema 9 del cuestionario, es un problema complejo que contiene más de una relación entre los datos, y ha sido ya utilizado por Span y Overtoom-Corsmit (1986), English (1991), Niederer (2001), Niederer e Irwin, (2001) y Niederer, Irwin, Irwin & Reilly (2003). El problema 9 ha sido utilizado por Niederer y colaboradores con estudiantes de Nueva Zelanda, para identificar a niños con talento matemático en la educación primaria. El problema 3 fue utilizado por Castro (1995) con sujetos de entre 10 y 13 años para estudiar su comprensión de las relaciones multiplicativas simples.

El tercer grupo de problemas son los problemas de escala, que se encuadran de acuerdo con Vergnaud (1988) dentro de la estructura multiplicativa; también pueden considerarse dentro de los problemas de razonamiento proporcional con la representación a escala de un mapa que requiere ser interpretado. En uno de ellos se conocen dos de los cuatro datos de una proporción y un tercero hay que determinarlo experimentalmente para posteriormente calcular el cuarto dato de la proporción, que es la cantidad que soluciona el problema. El otro problema, inverso al anterior, presenta un único dato de la proporción, el segundo debe determinarlo midiendo y los dos restantes calculando; elementos añadidos a este problema es el empleo de unidades de medida de longitud, necesidad de realizar medidas de manera práctica y el concepto de escala. La resolución correcta de este problema requiere de un dominio de la multiplicación y de la división, interpretar y representar adecuadamente la relación de proporcionalidad entre dos cantidades y establecer una secuencia de cálculo que involucra la división o a la multiplicación en un orden adecuado. El problema 6 ha sido utilizado por Villarraga (2002) con sujetos de entre 14 y 15 años de edad, donde el 86,6% de los sujetos lo responde correctamente por lo que resulta muy fácil a sujetos con talento de entre 14 y 15 años.

El cuarto grupo de problemas, los problemas complejos, está caracterizado porque los problemas tienen una componente adicional a su carácter multiplicativo. Uno de los problemas requiere de conocimiento aritmético de las operaciones, pero su aplicación mecánica conduce a error. Es necesario un control de la respuesta basada en las condiciones contextuales del problema. El otro problema conlleva simultáneamente los conceptos de perímetro y área, los que permite analizar la confusión que entre estos conceptos se da en los alumnos. Este último problema se incluyó, además, con el objetivo de introducir una variante nueva en el esquema multiplicativo: el contexto geométrico. Otros elementos añadidos a estos problemas lo constituyen el empleo de unidades de medida de longitud y superficie.

El problema 5, del "caracol" es de una aparente simplicidad, ya que no se requieren mayores conocimientos matemáticos que multiplicar o sumar y restar las mismas cantidades un cierto número de veces. Sin embargo, se vislumbran dos posibles dificultades:

- confusión con la palabra "día", que en este caso puede tener dos significados: período de 24 horas o, período durante el que hay luz solar.
- se puede realizar una inferencia inductiva incorrecta, al notar que para los primeros días 8 completos) el resultado es siempre el mismo: al final de un día (al terminar la noche) el caracol sube 1 metro, de manera que para subir 10 metros se requieren 10 días, olvidándose así, de que al final se deben considerar por separado los dos movimientos del caracol: el primero en el día (sube 2m) y después el de la noche (baja 1m). Este problema es utilizado por García (2000), donde 21 de 96 de los niños de entre 13 y 15 años españoles lo respondieron correctamente y 16 de 90 estudiantes mexicanos de entre 13 y 15 años lo respondieron correctamente. Los errores identificados, se deben principalmente a dificultades para interpretar el enunciado (elaborar una representación interna del problema) ya que, además de contener una palabra con dos significados (día)- y ambos se emplean en el mismo problema- sugiere un proceso de inducción numérica en estudiantes poco expertos en este tipo de situaciones.

La resolución correcta del problema 7 requiere de:

- un domino básico del concepto geométrico del cuadrado (recordar definiciones y fórmulas de cálculo)
- interpretar y representar adecuadamente la relación (aditiva) de "disminución" entre dos cantidades
- establecer una secuencia de cálculo que involucra a casi todas las operaciones aritméticas y en un orden adecuado.

El problema 7 ha sido utilizado por Castro, Morcillo y Castro (1999) y por García (2000, p. 51) con sujetos mexicanos y españoles de entre 13 y 15 años de edad, donde se obtiene que 51 de 97 estudiantes españoles de entre 13 y 15 años lo resuelven correctamente y 30 de 73 estudiantes mexicanos de entre 13 y 15 años lo resuelven correctamente. En cuanto a los tipos de error que se presentaron en la resolución del problema, la mayor parte de ellos (57,6% en la muestra española y 40,5% en la muestra mexicana) tienen que ver con dificultades para representar adecuadamente el problema (errores en la traducción de una parte del enunciado, traducción incompleta, sólo considera parte de la información y se tienen todos los elementos o parte de ellos pero no se establecen las relaciones adecuadamente para llegar a la solución). También se presentan dificultades debido a las confusiones que se observan entre sus diferentes elementos (lado, perímetro, área).

El quinto grupo de problemas, los problemas de proporcionalidad simple con números decimales, se ha incluido porque uno de los aspectos que ha recibido más atención en las investigaciones sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa ha sido la influencia de los tipos de número (entero o decimal menor que uno) en la elección de estrategias para la resolución de problemas. Greer (1992), Castro (1995, pp.63-68) hace una revisión de estas investigaciones en la que expone los resultados encontrados en los trabajos de Af Ekenstam y Greger (1983), Bell, Fischbein y Greer (1984), Bell, Greer, Grimison y Mangan (1989), Bell, Swan y Taylor (1981), Fishbein, Deri, Nello y Marino (1985), Greer (1987), Nescher (1988), De Corte, Verschaffel y Van Coillie (1988), entre otros. Salvo el estudio de Bell y otros (1989), en el que, además de estudiantes, participaron maestros en formación, todas las demás investigaciones se realizaron con estudiantes de edades comprendidas entre 11 y 16 años. De estas investigaciones se concluye que los estudiantes tienen dificultades para elegir la operación adecuada en problemas verbales de estructura multiplicativa que contienen números decimales; estas dificultades se deben a que tienen ideas equivocadas sobre el efecto de multiplicar y dividir por números decimales menores que uno, pues muchos de ellos piensan que "la multiplicación siempre aumenta", "la división disminuye" y que "siempre debemos dividir un número grande por otro más pequeño"; estas ideas son válidas con cierto tipo de números como los naturales, pero dejan de serlo cuando se extrapolan a números decimales menores que uno. Las ideas equivocadas sobre la multiplicación y la división están originadas por el predominio en la enseñanza del modelo de adición repetida para la multiplicación y el modelo de reparto para la división.

Un problema similar al problema 2 fue utilizado por Villarraga (2002) con sujetos con talento encontrando una diversidad de estrategias en sus producciones, unas correctas y otras incorrectas: lo que pone de manifiesto que las dificultades que presentan algunos problemas, como es el caso de los que tienen números decimales menores que uno, es general, tanto para estudiantes de un aula habitual como para sujetos con talento.

Como conclusión, vemos que en diversas investigaciones se han puesto de manifiesto las dificultades que presentan ciertos problemas de estructura multiplicativa a los estudiantes en general, situación que nos hace reflexionar acerca de si dichas dificultades también se presentan en sujetos con talento.

3.3.5. Presentación y administración del cuestionario

Presentación del cuestionario

Resolver los doce problemas en una única sesión es una tarea demasiado ardua que puede acarrear efectos indeseados a la investigación. Por ello, el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa se dividió en dos partes que se aplicaron a los dos grupos de niños en dos sesiones separadas, distantes una semana, para evitar el efecto del cansancio en los sujetos. En cada sesión cada niño tuvo que resolver seis problemas de los contenidos en el cuestionario PEM. En la primera sesión respondieron a seis problemas y en la segunda se les propuso los otros seis (véase tabla 3.3.). Los niños respondían de manera individual, en silencio y por escrito en el espacio asignado para tal efecto en las hojas entregadas.

Tabla 3.3. COMPOSICIÓN DE LAS DOS PRUEBAS

PRUEBA 1	PRUEBA 2	TIPOS DE PROBLEMAS
1	8	Problemas de comparación
2	11	De proporcionalidad simple con números decimales
3	9	Problemas de combinatoria
4	12	Problemas de comparación
5	7	Problemas complejos
6	10	Problemas de escala

Cada prueba consta de una primera parte informativa en donde se explica al niño en qué consiste, qué se pretende que conteste y cómo debe hacerlo (véase anexo A.1). A cada niño se le entrega cuatro hojas con las preguntas. La prueba será la misma para todos los niños y el orden de los problemas también es el mismo.

Administración de cuestionario

El cuestionario se aplicó al grupo de estudiantes del programa de talentos y al grupo de contraste, en dos instancias separadas por una semana, la primera aplicación constó con 6 problemas y la segunda con los siguientes 6 problemas aparte. La razón para hacerlo en dos sesiones separadas fue debido a que en el cuestionario había problemas "parecidos" y se quería que no influyera en las respuestas.

A los estudiantes del programa de talentos se les administró el cuestionario en su sala de clases mientras asistían a cursos en la universidad. La realización de la prueba duró en cada instancia aproximadamente una hora.

La aplicación del cuestionario al grupo de estudiantes que no participan del programa de talentos se realizó en sus respectivos colegios, previa coordinación con la profesora jefe de la unidad técnico pedagógica o encargada del programa PENTA-UC de cada establecimiento educacional. La aplicación del cuestionario se realizó en algunas ocasiones en la sala de clases de los niños aplicando el instrumento a todo su curso, por solicitud del colegio, y en otras ocasiones en la biblioteca del establecimiento educacional.

La aplicación del cuestionario se realizó durante los meses de marzo y abril del 2003, visitando un total de 6 colegios de las comunas de la Florida y Puente Alto en la ciudad de Santiago de Chile.

El tiempo máximo disponible para la contestación de los cuestionarios fue de dos horas aunque todos los sujetos lo terminaron antes de dicho plazo. Al niño se le dieron unas instrucciones previas (tabla 3.4). Las instrucciones las leía la investigadora en voz alta antes de comenzar a responder los cuestionarios. Se insistió en la necesidad de que escribieran todas las operaciones necesarias para resolver los problemas.

Tabla 3.4. INSTRUCCIONES PARA LOS NIÑOS EN LA PRUEBA ESCRITA

Instrucciones

1. Completar todos los datos que se piden en la parte superior de cada hoja
2. Escribir todas las operaciones necesarias para resolver cada problema
3. Escribir la solución en el espacio en blanco que hay a continuación del problema
4. No des como solución sólo un número. Escribe la solución dando el número y lo que ese número significa, por ejemplo en el siguiente problema

Diego tenía 500 pesos
Pablo le da 300 pesos
¿Cuántos pesos tiene ahora Diego?

La solución se pondría en la forma

$$\begin{array}{r} 500 \\ +300 \\ \hline 800 \end{array}$$

Solución: Diego tiene 800 pesos

3.3.6. Procedimiento de codificación del cuestionario

Para analizar estadísticamente las producciones de los sujetos hemos codificado con el 1 las respuestas que hemos considerado correctas en el sentido que son aquellas respuestas que denotan un proceso de solución conducente a la solución correcta. Y con 0 a las respuestas de los sujetos que son incorrectas, entendiendo por incorrectas a aquellas que están en blanco o hay un proceso erróneo que no conduce al resultado correcto.

Concretamente, hemos considerado respuesta correcta el que el alumno siga un proceso que conduzca a la solución, independientemente de la operación empleada y de los posibles errores de cálculo. En particular:

- Si escoge una operación adecuada, resuelve correctamente la operación escogida y responde la pregunta que se le formula escribiendo la solución
- Realiza una representación pictórica de la solución del problema y responde a la pregunta que se le formula escribiendo la solución
- Escoge la operación adecuada y luego hace mal el cálculo aritmético.

Y como respuestas incorrectas hemos considerado aquellas que:

- No responde, deja en blanco el cuadro para solucionar el problema
- Escoge la operación adecuada, hace el cálculo aritmético correctamente y no responde correctamente la pregunta
- Escribe un número como respuesta, siendo ésta incorrecta
- Escoge correctamente sólo algunas de las operaciones aritméticas que se necesitan para resolver el problema
- No escoge la operación adecuada para resolver el problema

3.4. Diseño de la segunda parte de la investigación: Entrevistas

Hemos diseñados una entrevista con la finalidad de indagar acerca de los errores cometidos, para constatar si éstos se deben a la casualidad o porque realmente ese tipo de problemas les plantean dificultad y cometen errores persistentes.

En este trabajo, la finalidad de la entrevista es profundizar en la información obtenida de las producciones escritas de los sujetos en respuesta la Cuestionario PEM, sobre todo en la persistencia y la causa de los errores así como establecer algún grado de fiabilidad con respecto a las respuestas de los sujetos.

3.4.1. Los sujetos

Para seleccionar a los sujetos que iban a ser entrevistados se hizo una primera categorización de los 30 estudiantes con talento a los que se les había pasado el cuestionario PEM, con la finalidad de que los sujetos que escogiésemos tuviesen características distintas.

Las categorías de sujetos fueron definidas en función de las respuestas dadas y de los tipos de error que cometen en ellos. Es importante recordar que el decir fácil o difícil son términos relativos, en este contexto se considera que un problema es fácil si el índice de dificultad es menor que el índice de dificultad de un problema de su mismo grupo y difícil si el índice de dificultad es mayor al obtenido en un problema del mismo grupo. Por lo anterior se han obtenido 4 categorías:

a) Categoría 1: sujetos que sólo resuelven problemas fáciles de los grupos de problemas, sin llegar a resolver ningún grupo completo
b) Categoría 2: sujetos que responden un grupo de problemas completo y de los otros grupos sólo responden los problemas fáciles
c) Categoría 3: sujetos que responden o no grupos de problemas completos y de los otros grupos responden los ítems más difíciles

d) Categoría 4: sujetos que responden correctamente más de un grupo de problemas completo y de los demás grupos responden los ítems fáciles.

La selección de la muestra para las entrevistas se realizó al azar, escogiendo 1 ó 2 sujetos de cada grupo. De la categoría 1 se escogió 1 sujeto, de la categoría 2 se escogieron 2 sujetos, de la categoría 3 se escogió un sujeto y de la categoría 4 se escogieron dos sujetos. Escoger uno o dos sujetos dependió de la factibilidad de sacar a los niños de su sala de clases en el programa de talentos.

Para realizar la entrevista se le ha planteado a cada niño en una hoja aquellos problemas que no respondieron correctamente, con la finalidad de indagar si la aparición del error ha sido o no por azar. Posteriormente, se la han planteado problemas de la misma tipología de estructura multiplicativa para observar la influencia de posibles variables sobre la aparición de dicho error.

3.4.2. Procedimiento de aplicación de la entrevista

Las entrevistas se realizaron en una sala de clases de la Pontificia Universidad Católica de Chile, en donde se disponía de silencio externo para grabar en audio la entrevista y un computador con webcam para grabar en audio y vídeo. Las entrevistas se realizaron de manera individual. El niño estaba sentado al lado del entrevistador de tal manera que ambos aparecieran en la videograbación realizada. El entrevistador explica al niño que está realizando una investigación para saber cómo resuelven los niños problemas de matemáticas, y que tanto la cámara como la grabadora, son para recordar sus respuestas. Todos los niños tuvieron mucho interés por ser escogidos para la entrevista. Las entrevistas se realizaron en junio del 2003, entre 5 y 6 meses después de la aplicación del cuestionario con la finalidad de que el niño no recordara la respuesta que había escrito en dicha instancia. Cada entrevista fue grabada en cassette de audio y en archivo avi de imagen con una webcam. Posteriormente han sido transcritas y analizadas.

Materiales utilizados en la entrevista

En la entrevista se ha utilizado una batería de problemas similares a los tipos incluidos en el Cuestionario PEM y una pauta de observación o registro para anotar la coincidencia o no de las respuestas de los sujetos en la entrevista con las que habían dado en el cuestionario PEM.

Problemas para la entrevista

Para la entrevista se ha escogido un problema de cada tipo de problemas, de los planteados en el Cuestionario PEM:

a) Se ha escogido del tipo 1 de problemas, que son problemas de comparación, el problema más difícil de los cuatro propuestos; es un problema de escalar desconocido, en él se han observado errores y tiene el mayor índice de dificultad de su categoría en el Cuestionario PEM.
b) Se ha escogido del tipo 2 de problemas, de combinatoria, el problema más fácil, el número 3, porque el 9 ha resultado muy difícil para la muestra de sujetos, prácticamente ningún niño lo resolvió correctamente
c) Se ha escogido del tipo 3 de problemas, de los problemas de escala, el que tenían un índice de dificultad mayor.
d) Se ha escogido del tipo 4 de problemas, los problemas complejos, el de área y perímetro, para profundizar esta componente adicional de dichos conceptos geométricos.
e) Se ha escogido del tipo 5 de problemas, los de proporcionalidad simple con números decimales, el problema 11 que era el más difícil de su categoría (dado su índice de dificultad).

Por lo anterior, los problemas que se utilizaron de las entrevistas quedan conformados de la siguiente manera:

1. Si 1 manzana pesa 0,234 kilogramo y el kilo cuesta 1,12 euros. ¿Cuánto cuesta cada manzana?
2. Si una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 euros. ¿Cuánto cuesta la bolsa de mermelada?
3. En Santiago hacen 10 grados de temperatura. En Granada hacen 30 grados de temperatura. ¿Cuántas veces menos temperatura hay en Santiago que en Granada?
4. El lado del cuadrado mide 8 centímetros. Si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado. ¿En cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?
5. Pablo tiene 60 centímetros de estatura. Tatiana tiene 180 centímetros de estatura. ¿Cuántas veces menos estatura tiene Pablo que Tatiana?
6. Tengo 6 camisetas y 2 pantalones. ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?
7. El mapa tiene una escala de 8:4000000, esto significa que 8 centímetros del dibujo representan 4000000 de centímetros reales. Determina la distancia de Quillota a Limache

Conducción de la entrevista

Las instrucciones por parte del entrevistador a los alumnos para la entrevista se ha limitado a la lectura de un guión. No se han propuesto todos los problemas a todos los alumnos; a cada alumno se le plantean los problemas que el entrevistador considera adecuados.

Cada vez que el niño termina una tarea la entrevistadora anota en su hoja de registro (tabla 3.5) si se cumplen o no las expectativas. Se podían dar dos situaciones:

a) que el sujeto cumpla las expectativas, es decir que el sujeto siga sin poder responder adecuadamente los problemas de algún (o algunos) grupo de problemas o los de mayor índice de dificultad
b) que el sujeto no cumpla las expectativas.

Tabla 3.5. PAUTA DE OBSERVACIÓN O REGISTRO

Nombre alumno:

Problema	Resultado	Expectativa	¿Se cumplen las expectativas?
			___si ___no
			___si ___no
			___si ___no
			___si ___no
			___si ___no
			___si ___no
			___si ___no

Si el sujeto no cumple las expectativas, esto puede deberse a alguna de las siguientes razones:

1. El sujeto responda adecuadamente un problema que no haya respondido en la aplicación del cuestionario, por lo que el entrevistador deberá indagar al motivo a qué se debe.
2. Que se encuentre en otra categoría a la inicialmente propuesta.
3. Que haya aumentado de nivel parcialmente, es decir sólo en algunos problemas de algún determinado grupo de problemas

Capítulo 4

Estudio del rendimiento.

Validación del Cuestionario PEM

4.1. Introducción

Una de las preguntas que nos hemos planteado en esta investigación es si los niños que han sido identificados como niños con talento mediante un test de inteligencia general (Test de Raven) manifiestan o no cualidades ligadas al talento matemático. El primer acercamiento a este problema consiste en comparar el rendimiento en un cuestionario cuyos ítems son problemas enunciados en torno a un contenido específico de matemáticas: la estructura multiplicativa, con la puntuación obtenida en el test de inteligencia general. Para ello, hemos construido un cuestionario, al que denominamos Cuestionario PEM, que está conformado por doce problemas relacionados con la estructura multiplicativa y, en este capítulo, analizamos además si es válido para tal fin.

En el capítulo sobre el diseño de la investigación explicamos los criterios seguidos para seleccionar los problemas y la construcción del cuestionario PEM. Como indica Nunnally (1987), el paso siguiente es mostrar su utilidad.

> *Luego de haber seleccionado un modelo para elaborar un instrumento de medición y después de haberlo construido, el siguiente paso es demostrar su utilidad. A menudo se dice que este paso del proceso es el que determina la validez del instrumento* (Nunnally, 1987, p. 99).

Al mostrar su utilidad estamos mostrando que es válido, porque aunque actualmente el término validez tiene muchas interpretaciones, Nunnally (1987) nos recuerda que "*un instrumento de medición es válido si cumple satisfactoriamente el propósito con el que se diseñó*" (p.99). Nuestro cuestionario PEM se ha construido con el propósito de ser utilizado en procesos de identificación de características matemáticas de niños con talento de un determinado nivel. Por tanto, debemos analizar si es útil para alcanzar este fin y, de este análisis debe resultar si el cuestionario PEM es válido o no.

La cuestión siguiente es ¿cómo hacerlo? Para Nunnally (1987) la respuesta es clara: "*La validación siempre es empírica, y la naturaleza de la evidencia requerida depende del tipo de validez*" (p. 99), deja claro que hay que probar la utilidad del cuestionario PEM aplicándolo en la práctica, a la vez que nos plantea el problema de elegir el tipo de validez a utilizar, puesto que de ella va a depender la evidencia que debemos aportar.

Para Nunnally (1987) el tipo de validez a utilizar depende del propósito de las medidas que se obtienen con el test o prueba. Subraya tres propósitos, el primero de los cuales es "Establecer una relación funcional con una variable particular" (p. 100) que está relacionada con la *validez de criterio*. Kerlinger y Lee (2002) lo expresan del siguiente modo: "La validez relacionada con el criterio se estudia al comparar las puntuaciones de una prueba o escala con una o más variables externas, o criterios, que se saben o se considera que miden el atributo que se estudia" (p. 606). La validez de criterio se establece cuando se realiza la validación de un instrumento comparándolo con algún criterio externo que pretende medir lo mismo.

Actualmente la validez relacionada con el criterio o validez criterial tiene dos variantes: la *validez predictiva* y la *validez concurrente* (Cohen, Manion y Morrison, 2000; Kerlinger y Lee, 2002) que difieren en la dimensión del tiempo. Estos últimos autores subrayan que la validez concurrente se aplica cuando se realizan las medidas casi al mismo tiempo, por lo que es pertinente aplicarla en nuestro caso, ya que hemos aplicado a los sujetos el cuestionario PEM casi al mismo tiempo que el test de Raven. Así mismo, ponen de manifiesto que "la validez concurrente con frecuencia se utiliza para validar una prueba nueva." (Kerlinger y Lee, 2002, p. 606). La manera de hacerlo según estos autores es tomar al menos dos medidas de cada sujeto, una de ellas sería la obtenida mediante la prueba nueva construida y la otra sería una prueba o medida ya existente. “La validez concurrente se calcularía al correlacionar los dos conjuntos de puntuaciones.” (p. 606)

En nuestro proceso de estudio de la validez de la prueba construida hemos utilizado como variable criterio las puntuaciones en el test de Raven, que son las que sirvieron para seleccionar a los sujetos con talento. Pero no nos quedaremos sólo en establecer correlaciones entre las puntuaciones obtenidas por los sujetos en el cuestionario de problemas de estructura multiplicativa (PEM) y las puntuaciones en el test de Raven, hemos indagado con detenimiento el potencial diferenciador del cuestionario PEM como instrumento de medida del rendimiento en problemas aritméticos de estructura multiplicativa, viendo si establece diferencias entre dos grupos de sujetos: los seleccionados por su puntaje en el test de Raven y los que no superaron el puntaje en el test de Raven. Al mismo tiempo, se analiza si estas diferencias se ven afectadas por el colegio y el curso en el que están los alumnos.

Complementamos el estudio analizando la relación existente entre las notas de matemáticas de los sujetos participantes en la investigación, las puntuaciones en el Cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven. Esta nueva variable la hemos introducido (notas de matemáticas) porque cabría pensar: ¿Cuál es la necesidad de construir un nuevo instrumento de medida en matemáticas si ya se conocen las notas de matemáticas de los alumnos? Con este último análisis pretendemos tener información complementaria sobre el potencial de las calificaciones académicas como variable diferenciadora de sujetos con talento, ya que se suele utilizar con bastante frecuencia en la práctica como información complementaria.

En la primera parte del capítulo, los grupos de sujetos que forman parte de la investigación, Grupo 1 y Grupo 2, se comparan con relación a su rendimiento en el cuestionario PEM, para detectar si en el rendimiento de dicho cuestionario hay diferencias significativas entre los sujetos que han sido seleccionados con talento con los que no lo fueron. En esta comparación se analiza la influencia que puedan tener las variables, COLEGIO al que pertenecen los niños y CURSO en donde están ubicados (sexto u octavo). Con base en estas diferencias el estudio posterior se podrá centrar en caracterizar a los niños con talento y que corresponden a los del Grupo 1 con relación al cuestionario PEM. En cuanto a las variables CURSO y COLEGIO, las incluimos porque es importante conocer si éstas sesgan o no los resultados globales y, por tanto, si las conclusiones que se obtengan serán válidas o no para los niños independientemente del curso y colegio en que estén.

En la segunda parte se inicia el estudio de la validez concurrente de las puntuaciones en el cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven. Se compara el rendimiento en el cuestionario PEM con los resultados de los niños en el test de Raven con la finalidad de mostrar de manera global cuál de los dos instrumentos de medida tiene mayor sensibilidad. Le sigue una comparación del rendimiento en el cuestionario con las notas de matemáticas obtenidas por los alumnos el curso anterior.

La tercera parte del capítulo contiene los índices de validez concurrente por parejas que cuantifican numéricamente las comparaciones que hemos hecho entre las variables puntuación en el test de Raven, rendimiento en matemáticas con las notas de matemáticas del curso anterior. Estos índices resumen la comparación del rendimiento de los sujetos en el cuestionario PEM, con los puntajes de los niños en el test de Raven y con sus calificaciones en la asignatura de Matemáticas, y ponen de manifiesto el grado de similitud entre las tres pruebas con respecto a su potencial discriminador entre los niños de los grupos 1 y 2.

Acaba el capítulo con un resumen de los resultados obtenidos en cada uno de los apartados.

En todos los análisis estadísticos se utilizan el paquete SPSS con los programas correspondientes; los gráficos se han realizado con la Hoja de Cálculo EXCEL.

4.2 Análisis del rendimiento

En este apartado se describe y analiza el rendimiento obtenido por los 60 sujetos de la muestra, 30 del Grupo 1 y 30 del Grupo 2; se considera 'rendimiento' al número de aciertos obtenidos por cada niño en la realización del cuestionario escrito de problemas matemáticos de estructura multiplicativa (cuestionario PEM); ya que dicho cuestionario consta de 12 problemas este rendimiento tendrá un valor comprendido entre 0 y 12; cada respuesta es valorada con 1, si el niño resuelve el problema correctamente, y 0 en caso contrario. Para el análisis estadístico se emplean: la variable dependiente TPERCEN que corresponde al rendimiento de cada niño en la realización del cuestionario PEM expresado en porcentaje y las variables independientes, de las cuales se miden sus efectos y sus interacciones en la dependiente, GRUPO (con dos valores Grupo 1 y Grupo 2), COLEGIO (con tres valores, Colegio 1, Colegio 2 y Colegio 3) y CURSO (con dos valores, Curso 6 y Curso 8); el análisis se completa con la comparación entre los rendimientos de los sujetos en el cuestionario PEM (variable TPERCEN) con el rendimiento de los sujetos en el test de Raven medido en porcentaje (variable RAVENP) y el rendimiento de los sujetos en la asignatura de matemáticas medido también en porcentaje (variable MATEMAP).

Así, el análisis y valoración del rendimiento se presenta dividido en cuatro partes:

1. Estudio del rendimiento según colegio y grupo
2. Estudio del rendimiento según curso y grupo
3. Comparación del rendimiento y las puntuaciones en el test de Raven
4. Comparación del rendimiento y la calificación obtenida en la asignatura de matemáticas.

En la primera parte se describen los resultados obtenidos por los sujetos respecto de su rendimiento en el cuestionario PEM y su dependencia o no con el COLEGIO y GRUPO. La finalidad que se persigue con este análisis es:

a) Conocer si distintos colegios a los que asisten los niños, tienen el mismo nivel de rendimiento en el cuestionario PEM, es decir medir la influencia de la variable COLEGIO en la variable TPERCEN;
b) Comparar el rendimiento de los grupos al resolver el cuestionario PEM, o sea, medir la influencia de la variable GRUPO en la variable TPERCEN;
c) Poner de manifiesto las posibles interacciones entre las variables GRUPO y COLEGIO en su influencia en el rendimiento (TPERCEN).

En la segunda parte se describen los resultados obtenidos por los sujetos respecto de su rendimiento y su dependencia o no con el CURSO. La finalidad de este análisis es:

a) Determinar si el rendimiento está influenciado por el curso al que asiste el niño, o sea, medir la influencia de la variable CURSO en la variable TPERCEN;
b) Poner de manifiesto las posibles interacciones entre la variable CURSO y GRUPO en relación con el rendimiento (TPERCEN).

En la tercera parte, se describe y compara el rendimiento de los niños en el cuestionario PEM y el puntaje obtenido en el test de Raven, con el objetivo de:

a) Comparar de manera global la identificación de niños con inteligencia general sobre la media que realiza el test de Raven (RAVENP) con el rendimiento obtenido en el cuestionario PEM (TPERCEN);
b) Comparar de manera particular ambos rendimientos, TPERCEN y RAVENP, según la variable GRUPO.

En la cuarta parte se describe y compara el rendimiento de los niños con la nota media de la asignatura de matemáticas en el momento de rendir el test de Raven, con el rendimiento en el cuestionario PEM, con el objetivo de:

a) Comparar de manera global el rendimiento (TPERCEN) y las notas (MATEMAP) que tienen los niños en la asignatura de matemáticas;
b) Comparar de manera particular el rendimiento (TPERCEN) y las notas (MATEMAP) que tienen los niños en la asignatura de matemáticas según el grupo al que pertenecen (GRUPO).

4.2.1. Análisis de rendimiento según grupo y colegio

Como se ha referido en capítulos anteriores, en la investigación participan niños de diferentes colegios de la comuna de La Florida y Puente Alto en Santiago de Chile en los que, como es natural, hay diferencias en los procesos de enseñanza y aprendizaje empleados; por ello es pertinente hacer un análisis que constate si hay o no diferencia en los resultados obtenidos en el rendimiento según el tipo de colegio y grupo.

Así, en este apartado se realiza un análisis de la influencia del colegio y del grupo sobre el rendimiento en el cuestionario PEM. Las variables utilizadas en este análisis son: la variable dependiente TPERCEN, y las variables independientes GRUPO y COLEGIO.

Los estadísticos descriptivos asociados a las variables mencionadas, se recogen en la tabla 4.1.

Como se observa en la última fila de la tabla 4.1, hay diferencia entre el rendimiento de cada uno de los grupos; en el Grupo 1 el porcentaje medio de aciertos es de 59,72%, en cambio en el Grupo 2 dicho porcentaje es de 30,28%, es decir que los niños del grupo 1 tienen rendimiento superior, pudiendo observarse dicha diferencia en la figura 4.1.

Tabla 4.1. MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DEL RENDIMIENTO SEGÚN COLEGIO Y GRUPO

Descriptive Statistics

Dependent Variable: TPERCEN

COLEGIO	GRUPO	Mean	Std. Deviation	N
1	1	60,0895	13,2107	19
	2	26,2550	10,5608	20
	Total	42,7385	20,7838	39
2	1	63,1000	12,5894	7
	2	37,5000	11,4916	6
	Total	51,2846	17,6271	13
3	1	52,0750	20,8300	4
	2	39,5750	14,2238	4
	Total	45,8250	17,8130	8
Total	1	59,7233	14,0325	30
	2	30,2800	12,2737	30
	Total	45,0017	19,7796	60

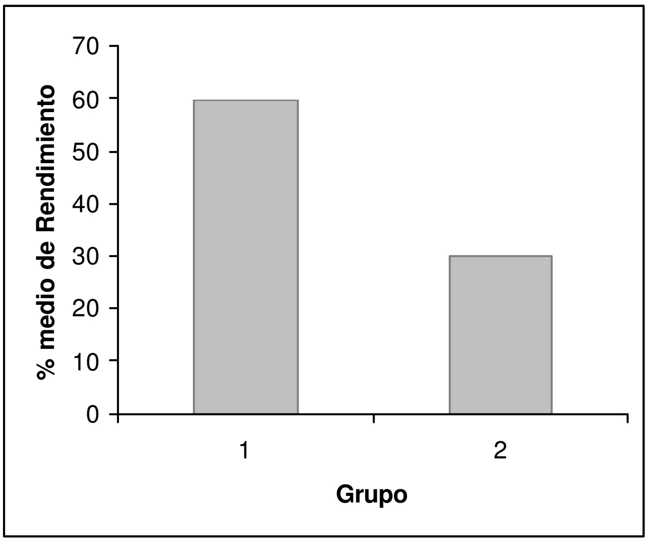


Figura 4.1. MEDIA DE RENDIMIENTO EN CADA GRUPO

En la tabla 4.1 también se observan diferencias, aunque menos acusadas, entre los distintos colegios: 42,73% para el tipo de colegio 1; 51,28% para el tipo de colegio 2 y 45,82% para el tipo de colegio 3.

Se hace necesario medir la significatividad de las diferencias puestas de manifiesto mediante los estadísticos descriptivos; así, el resumen del análisis de varianza recogido en la tabla 4.2 y cuyos resultados totales se encuentran en el anexo B.1, se realiza con el objetivo de contrastar los efectos de las variables GRUPO y COLEGIO sobre la variable dependiente TPERCEN bajo un enfoque de diseño factorial, contrastando las siguientes hipótesis nulas:

H_{01}: *No hay diferencias significativas en el rendimiento en el cuestionario PEM debidas al factor GRUPO*

H_{02}: *No hay diferencias significativas en el rendimiento debidas al factor COLEGIO*

H_{03}: *No hay interacción entre los factores GRUPO y COLEGIO en su relación con el rendimiento.*

Tabla 4.2. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE VARIANZA DEL RENDIMIENTO POR LOS FACTORES GRUPO Y COLEGIO

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: TPERCEN

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	14302,367[a]	5	2860,473	17,592	,000
Intercept	85089,538	1	85089,538	523,309	,000
COLEGIO	498,408	2	249,204	1,533	,225
GRUPO	5672,902	1	5672,902	34,889	,000
COLEGIO * GRUPO	808,926	2	404,463	2,487	,093
Error	8780,342	54	162,599		
Total	144591,710	60			
Corrected Total	23082,710	59			

a. R Squared = ,620 (Adjusted R Squared = ,584)

Los resultados del análisis de la varianza de la tabla 4.2 muestran que:

a) El efecto debido a la variable GRUPO en el rendimiento (TPERCEN) es significativo (F=34,889 p=0,000).

b) El efecto debido a la variable COLEGIO en el rendimiento (TPERCEN) no es significativo (F=1,533, p= 0,225).

c) El efecto debido a la interacción de las variables GRUPO y COLEGIO no es significativo (F=2,487, p=0,093).

Así, con los resultados obtenidos, en primer lugar, se rechaza la hipótesis nula H_{01}; en consecuencia, las diferencias entre las medias que existen entre los grupos 1 y 2 (visualizadas en la figura 4.1) en relación al rendimiento, son significativas. Éste es un resultado importante en la investigación en la medida que uno de los propósitos es el de validar el cuestionario PEM como instrumento de identificación de características matemáticas de niños con talento; los resultados ponen de manifiesto que las diferencias que han dado lugar a la conformación de los grupos 1 y 2 (nominación de profesor, calificación en la asignatura de matemáticas y resultados en el test de Raven) son confirmadas por el cuestionario PEM lo que puede permitir emplear dicho cuestionario como un instrumento de identificación de niños con talento.

En segundo lugar, se acepta la hipótesis nula H_{02}; se pone de manifiesto que no hay diferencias significativas entre colegios con relación al rendimiento en el cuestionario PEM; así, el rendimiento en el cuestionario PEM es independiente del tipo de colegio lo que se podría traducir en independencia con relación a determinados aspectos diferenciadores de los procesos de enseñanza aprendizaje establecidos por cada centro de enseñanza; es un matiz que refuerza el papel del cuestionario PEM para la finalidad con la que ha sido construido.

Por último, se acepta la hipótesis nula H_{03}; se pone de manifiesto que no hay interacción significativa entre grupo y colegio, o sea que, la diferencia por grupo se mantiene de manera significativa en todos los colegios del estudio.

Estos dos últimos resultados ponen de manifiesto, además de lo expresado, el papel irrelevante, en cuanto a su influencia en el rendimiento, que tiene la variable COLEGIO, lo que permitirá en lo sucesivo no tenerla en cuenta.

4.2.2. Análisis del rendimiento según curso y grupo

En este apartado se analiza la influencia de la variable CURSO en el rendimiento de los sujetos y la posible interacción de ésta con la variable GRUPO en cuanto al rendimiento.

No se harán consideraciones independientes de la variable GRUPO porque ya se realizaron en el apartado anterior.

En el análisis se emplean por tanto la variable dependiente TPERCEN y las variables independientes GRUPO y CURSO que tiene dos niveles llamados 6 y 8, correspondiente a sexto y octavo básico respectivamente[1].

[1] Se utilizan los números 6 y 8, que representan los cursos de sexto y octavo básico, porque en Chile (origen de los niños de la investigación) la educación está dividida en dos ciclos: ciclo básico que comprende de primero a octavo y ciclo medio que comprende otros cuatro años.

Los estadísticos descriptivos asociados a las variables anteriormente mencionadas, se recogen en la tabla 4.3, donde las medias están expresadas en porcentaje.

Tabla 4.3. MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DEL RENDIMIENTO DEL GRUPO Y DEL CURSO

Descriptive Statistics

Dependent Variable: TPERCEN

GRUPO	CURSO	Mean	Std. Deviation	N
1	6	59,2105	16,4145	19
	8	60,6091	9,2029	11
	Total	59,7233	14,0325	30
2	6	37,8727	11,4042	11
	8	25,8842	10,7156	19
	Total	30,2800	12,2737	30
Total	6	51,3867	17,9293	30
	8	38,6167	19,7522	30
	Total	45,0017	19,7796	60

En la tabla anterior, última fila, se observa que hay diferencia entre el rendimiento de los niños de sexto y octavo, considerados de forma conjunta; sorprende el hecho de que el rendimiento de los niños de sexto curso con una media de 51,38% sea bastante superior al rendimiento de los niños de octavo con una media de 38,61%; esto es debido, como puede observarse en la tabla 4.3, al efecto que produce en las medias de cada curso el Grupo 2 en donde las diferencias entre sexto y octavo son sustanciales; los niños de octavo del Grupo 2, tienen un rendimiento de tan sólo un 25,88% frente al 37,87% de sexto; debido al efecto de las medias la media global de sexto es 51,38% y la de octavo de 38,61%, más de 10 puntos por debajo.

Con la idea de valorar la significatividad de estas diferencias se realiza un análisis de la varianza (ANOVA), cuyo resumen de resultados está recogido en la tabla 4.4; así, se pretende contrastar los efectos de las variables CURSO y GRUPO sobre la variable dependiente TPERCEN bajo un enfoque de diseño factorial. En consecuencia, se contrastan las siguientes hipótesis nulas, para los niños del estudio:

H_{04}: *No hay diferencias significativas en el rendimiento debidas al factor CURSO;*

H_{05}: *No hay interacción de dos vías entre los factores CURSO y GRUPO en su relación con el rendimiento.*

La tabla 4.4 resume los resultados del análisis de la varianza indicado, realizado con el paquete estadístico SPSS. La salida que ha proporcionado el programa y los resultados totales se encuentran en el anexo B.2.

Tabla 4.4. ANÁLISIS DE VARIANZA DEL RENDIMIENTO Y LAS VARIABLES CURSO Y GRUPO

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: TPERCEN

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	14018,556[a]	3	4672,852	28,870	,000
Intercept	117389,558	1	117389,558	725,254	,000
GRUPO	10948,200	1	10948,200	67,640	,000
CURSO	390,646	1	390,646	2,413	,126
GRUPO * CURSO	624,262	1	624,262	3,857	,055
Error	9064,154	56	161,860		
Total	144591,710	60			
Corrected Total	23082,710	59			

a. R Squared = ,607 (Adjusted R Squared = ,586)

Los resultados del ANOVA (tabla 4.4), muestran que:

a) La influencia de la variable CURSO en el rendimiento no es significativa (F=2,413, p=0,126).
b) La interacción de las variables CURSO y GRUPO en su relación con el rendimiento si es significativa (F=3,857, p=0,055)

Así pues, se acepta la hipótesis H_{04}, es decir, no hay diferencias significativas en el rendimiento medio de los distintos cursos en el cuestionario PEM. Estos resultados de nuevo inciden en la independencia del rendimiento en el cuestionario PEM respecto a la formación de los sujetos que puede establecer la diferencia de curso y que era puesta de manifiesto en el apartado anterior en relación a la variable CURSO; así, se refuerza la validez del cuestionario PEM al ser independiente del curso a que pertenecen los sujetos, a la vez que permite, en base a la irrelevancia de esta variable en relación al rendimiento, prescindir de ella de igual manera a como se hizo con la variable COLEGIO.

También el análisis de varianza muestra que hay una interacción significativa entre CURSO y GRUPO (F=3,857, p=0,055) en su relación con el rendimiento. La construcción de la figura 4.2 permite presentar y explicar esa interacción; en la figura obtenida a partir de los datos de la tabla 4.3 se muestran las medias del rendimiento de cada grupo y curso.

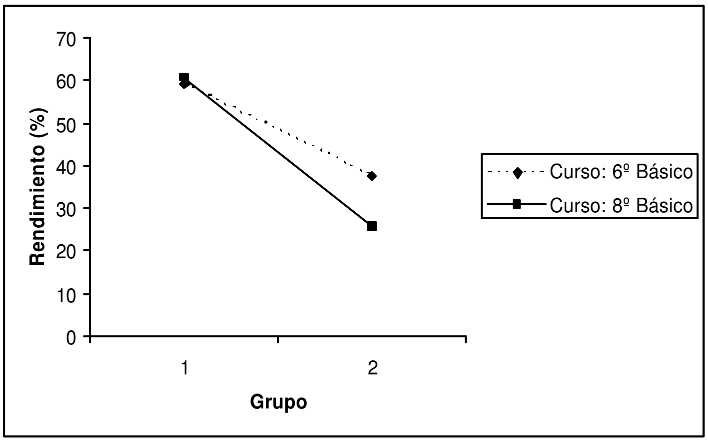


Figura 4.2. INTERACCIÓN ENTRE LOS FACTORES CURSO Y GRUPO

Como se puede observar en la figura 4.2 en el Grupo 1 no hay diferencia de rendimiento según los cursos mientras que en el Grupo 2 sí hay diferencia de rendimiento entre sexto y octavo. Esto significa que los alumnos de sexto y octavo que constituyen el Grupo 1 forman un grupo homogéneo, mientras que en el Grupo 2, los resultados del cuestionario PEM muestran que hay diferencia entre el rendimiento en los cursos, siendo un grupo más heterogéneo. Como se indicaba al principio, observando los estadísticos descriptivos, que en parte se ven confirmados, sorprende el hecho de que el rendimiento del curso sexto sea superior y significativo al del curso octavo; sólo es, en el caso del Grupo 2 y por tanto no va en contra de las conclusiones extraídas anteriormente con relación al cuestionario PEM como instrumento de identificación. No se va a entrar en las razones por las que se produce este hecho aparentemente sorprendente; un análisis cualitativo de los resultados del Grupo 2 podría dar orientaciones sobre las causas pero este aspecto no forma parte de esta investigación.

4.3. Validez concurrente

En nuestro caso la idea principal que recoge la validez concurrente es si el cuestionario PEM mide *lo mismo* que el test de Raven., es decir, si tienen la misma funcionalidad a la hora de distinguir grupos de sujetos con talento. Por ello, empezamos comparando los resultados que se obtuvieron con ambos instrumentos.

4.3.1. Comparación entre el cuestionario PEM y el test de Raven

En este apartado se realiza una comparación entre el rendimiento en el cuestionario PEM y la puntuación obtenida en el test de Raven por los niños que participan en la presente investigación. También se comparan los dos grupos de sujetos con relación al rendimiento en el cuestionario PEM y al puntaje en el test de Raven consideradas ambas pruebas de manera conjunta.

En el análisis que se realiza, se continúa utilizando la variable TPERCEN y se introduce la variable RAVENP, que corresponde al puntaje obtenido por cada niño en el test de Raven expresado en porcentaje.

En la tabla 4.5 se recogen los resultados en el test de Raven, expresados en porcentaje, media y desviación típica, de los grupos 1 y 2. Se acompañan, para su comparación, los resultados en el cuestionario PEM.

Tabla 4.5. MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE CADA GRUPO Y TOTAL, DE LA PUNTUACIÓN OBTENIDA EN EL CUESTIONARIO PEM Y EN EL TEST DE RAVEN

	CUESTIONARIO PEM		**TEST DE RAVEN**	
	MEDIA	DT	MEDIA	DT
Grupo 1	59,72	14,03	83,50	4,22
Grupo 2	30,28	12,27	69,27	7,04
Total	45,00	19,77	76,38	9,19

En la tabla se observa, en relación al test de Raven, que la media del Grupo 1 es mayor que la del Grupo 2; recuérdese que el puntaje en el test de Raven era el criterio final para constituir el Grupo 1; son lógicas pues las diferencias entre ambos grupos; además se puede observar que el Grupo 1 es más homogéneo, según el resultado de la desviación típica.

Para la comparación entre los resultados del test de Raven y los del cuestionario PEM se utiliza la técnica estadística MANOVA que va a permitir comparar los dos grupos con relación a las variables TPERCEN y RAVENP. Se pretenden contrastar las siguientes hipótesis nulas:

H_{06}: *No hay diferencia significativa entre el rendimiento en el cuestionario PEM y el puntaje en el test de Raven de manera global.*

H_{07}: *No hay diferencia entre grupos con respecto al rendimiento en el cuestionario PEM y el puntaje en el test de Raven, considerados los resultados de las dos pruebas de manera conjunta.*

La tabla 4.6 presenta un resumen de los resultados del análisis MANOVA obtenidos mediante el paquete estadístico SPSS. Los resultados totales obtenidos se encuentran en el anexo B.3.

Tabla 4.6. RESULTADOS DEL ANÁLISIS MANOVA PARA LA COMPARACIÓN DE LOS GRUPOS DE ACUERDO A LAS VARIABLES TPERCEN Y RAVENP

	SS	DF	MS	F	Sig of F
Within+residual	5200,96	58	89,67		
A	29554,94	1	29554,94	329,59	0,000
Grupo by A	1737,52	1	1737,52	19,38	0,000

La letra A de la tabla es una variable auxiliar que define el programa estadístico y que representa, de manera conjunta, las variables TPERCEN y RAVENP.

Los resultados presentados en la tabla ponen de manifiesto que:

a) El efecto de la variable A es significativo (F=329,59, p=0,000)

b) El efecto de la variable GRUPO en la variable A es significativo (F=19,38, p=0,000).

Así pues, se rechaza la hipótesis H_{06}, es decir, que hay diferencia significativa entre las puntuaciones de los sujetos obtenidas en el cuestionario PEM y el puntaje obtenido en el test de Raven.

Por otra parte, se rechaza la hipótesis H_{07}, lo que confirma que sí hay diferencia significativa por GRUPO con relación a las variables RAVENP y TPERCEN agrupadas en la variable A. Esta diferencia se puede observar en la Figura 4.3.

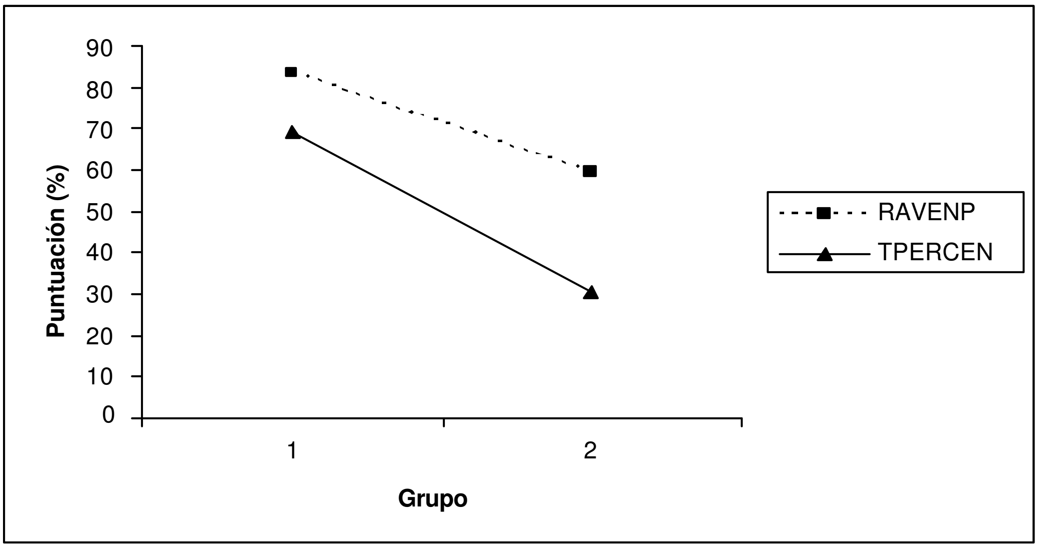


Figura 4.3. RENDIMIENTO EN EL CUESTIONARIO PEM Y EN EL TEST DE RAVEN SEGÚN EL GRUPO

En la figura 4.3 se observa que se mantiene la diferencia entre el puntaje del test de Raven y el cuestionario PEM en los dos grupos. Como se observa el cuestionario PEM es significativamente más difícil para ambos grupos de la investigación y parece establecer una diferencia ligeramente mayor entre los dos grupos que el test de Raven.

A pesar de haber interacción, ésta es ordinal es decir que la diferencia entre los resultados de las dos variables TPERCEN y RAVENP se mantiene en cada uno de los grupos de manera similar.

En la línea de lo que se ha dicho anteriormente se refuerza el papel del cuestionario PEM como instrumento de identificación o diferenciación entre grupos. Como se indicó anteriormente la constitución del Grupo 1 se hace en función de tres criterios entre los que se encuentra el puntaje en el test de Raven como criterio final; observamos que el cuestionario PEM actúa de manera similar a como lo hace el test de Raven; incluso las diferencias entre el Grupo 1 y Grupo 2 se acentúan más en el caso del cuestionario PEM.

4.3.2. Comparación del cuestionario PEM y las notas de matemáticas

Este apartado tiene la finalidad de comparar el rendimiento del cuestionario PEM y las calificaciones en matemáticas obtenidas por los niños que participan en este estudio, para determinar si la diferencia que establece entre los niños el rendimiento en el cuestionario PEM es o no similar a la que se obtiene con base en las calificaciones en matemáticas.

En este análisis se continúa utilizando la variable TPERCEN y se define la variable MATEMAP, que corresponde a la nota media en la asignatura de matemáticas expresada en porcentaje.

Los estadísticos descriptivos asociados a la variable MATEMAP que se ha incluido en este apartado, se recogen en la tabla 4.7. Se incluyen además, para su comparación, los resultados del cuestionario PEM.

Tabla 4.7. MEDIA Y DESVIACIÓN TÍPICA DE LOS RESULTADOS DEL CUESTIONARIO PEM Y DE LAS NOTAS DE MATEMÁTICAS

	CUESTIONARIO PEM		**NOTAS (%) DE MATEMÁTICAS**	
	MEDIA	D. TÍPICA	MEDIA	D. TÍPICA
Grupo 1	59,72	14,03	93,06	7,95
Grupo 2	30,28	12,27	86,94	8,46
Total	45,00	19,77	90,00	8,70

En la tabla anterior se observa que la media en las calificaciones de matemáticas en ambos grupos es bastante similar, siendo ligeramente superior en el Grupo 1.

Como en el apartado anterior, se utiliza la técnica estadística MANOVA para comparar los dos grupos con relación a las variables TPERCEN y MATEMAP. Para poder realizarlo el programa estadístico emplea una variable auxiliar B. Con ello se pretenden contrastar las siguientes hipótesis nulas:

H_{08}: *No hay diferencia significativa entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las notas de matemáticas.*

H_{09}: *No hay diferencia significativa entre el rendimiento en el cuestionario PEM y la nota de matemáticas en cada uno de los grupos.*

A continuación se presenta en la tabla 4.8. un resumen de los resultados del programa estadístico SPSS del análisis Manova. La totalidad del resultado y programa se encuentran en el apéndice B.4.

Tabla 4.8. ANÁLISIS MANOVA DEL RENDIMIENTO EXPRESADO EN PORCENTAJE (TPERCEN) Y LAS VARIABLES MATEMAP Y GRUPO

	SS	DF	MS	F	Sig of F
Within+residual	5556,98	58	95,81		
B	60741,00	1	60741,00	633,97	0,000
Grupo by B	4081,00	1	4081,00	42,59	0,000

De los resultados recogidos en la tabla se deduce que:

a) El efecto debido a la variable B es significativo (F=633,97, p=0,000);

b) El efecto debido a la interacción de la variable GRUPO y B es significativo (F=42,59, p=0,000).

Esto nos lleva a rechazar la hipótesis nula H_{08} por lo que, sí hay diferencia significativa entre las medias de la puntuación obtenida por los niños en el cuestionario PEM y la media de las notas en la asignatura de matemáticas.

También se rechaza la hipótesis nula H_{09}, lo que confirma que si hay diferencia significativa por grupo con relación a las variables MATEMAP y TPERCEN agrupadas en la variable B. Esta diferencia se puede observar en la figura 4.4.

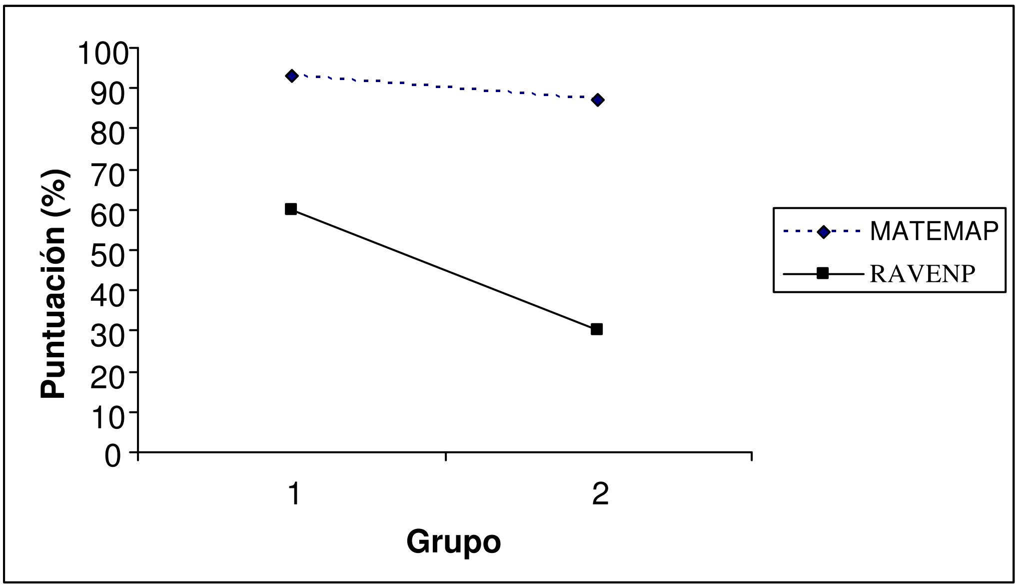


Figura 4.4 MEDIAS DE RENDIMIENTO EN EL CUESTIONARIO PEM Y NOTAS DE MATEMÁTICAS SEGÚN GRUPO

De la figura 4.4 se observa que se mantiene la diferencia entre el puntaje en las notas de matemáticas y el rendimiento en el cuestionario PEM, aunque los resultados de TPERCEN diferencian más a los Grupos 1 y 2 que los resultados de MATEMAP en donde los grupos están más equilibrados. A pesar de haber interacción, ésta es ordinal o sea que en los dos grupos se mantienen los niveles y se mantiene el resultado general obtenido de las puntuaciones expresadas en porcentaje.

En este caso se pone de manifiesto que las calificaciones en matemáticas no constituyen un criterio de selección de características similares al cuestionario PEM o al test de Raven; podría esperarse un mayor parecido en el comportamiento entre grupos en las variables TPERCEN y MATEMAP al ser ambos criterios basados en el conocimiento matemático y menos entre TPERCEN y RAVENP ya que este último tiene características generales y ocurre todo lo contrario; en la línea de lo que se venía diciendo, el cuestionario PEM se constituye como un buen criterio diferenciador de grupos de niños con talento a pesar de estar centrado en unas características específicas del conocimiento matemático.

4.4. Índices de validez concurrente

La figura 4.5 recoge las puntuaciones medias de las tres variables: rendimiento en el cuestionario PEM, puntuaciones en el test de Raven y las calificaciones en matemáticas de los grupos de sujetos, tanto del Grupo 1 como del Grupo 2 de sujetos. Las pendientes de las rectas muestran el poder diferenciador entre los dos grupos de cada una de estas variables.

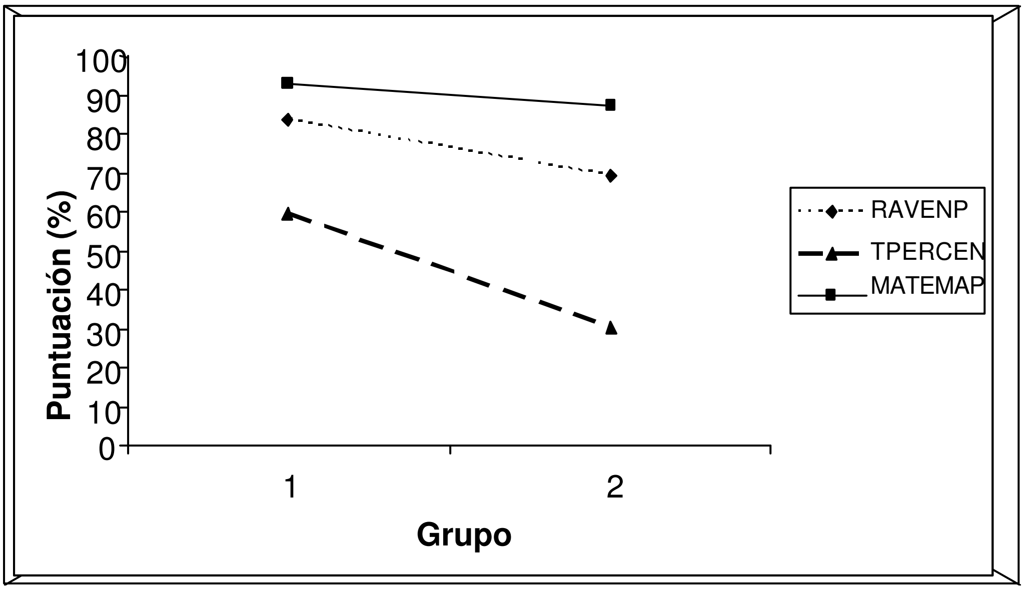


Figura 4.5 MEDIAS DE LOS GRUPOS 1 Y 2 EN TPERCEN, RAVENP Y MATEMAP EXPRESADAS EN PORCENTAJE

En la figura 4.5 se puede observar que la nota en matemáticas casi no establece diferencia entre los grupos, en cambio el porcentaje de aciertos en el cuestionario PEM proporciona la mayor diferencia entre los grupos 1 y 2. La puntuación en el test de Raven ocupa un lugar intermedio entre las dos variables anteriores. Puesto que la diferenciación entre los sujetos para constituir los grupos 1 y 2 se había realizado según las puntuaciones en el test de Raven, nos lleva a pensar que debe existir mayor validez concurrente entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven. Esto nos lleva a medir la validez concurrente de las tres variables por parejas.

Para establecer esta validez concurrente entre parejas de las tres variables hemos calculado las correlaciones entre las tres variables empleando los 60 sujetos, obteniendo los resultados mostrados en la tabla 4.9.

Tabla 4.9. CORRELACIONES ENTRE LAS VARIABLES TPERCEN, RAVENP Y MATEMAP

Correlaciones

		TPERCEN	RAVENP	MATEMAP
TPERCEN	Correlación de Pearson	1	,684(**)	,380(**)
	Sig. (bilateral)		,000	,003
	N	60	60	60
RAVENP	Correlación de Pearson	,684(**)	1	,106
	Sig. (bilateral)	,000		,421
	N	60	60	60
MATEMAP	Correlación de Pearson	,380(**)	,106	1
	Sig. (bilateral)	,003	,421	
	N	60	60	60

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Las correlaciones obtenidas por parejas entre las tres variables son muy dispares. La correlación entre la variable notas en matemáticas (MATEMAP) y puntuación en el test de Raven (RAVENP) es baja (0,106). La correlación entre las notas de matemáticas y el rendimiento en el cuestionario PEM (TPERCEN) es más elevada (0,38). En cambio hay mayor correlación entre las variables RAVENP y TPERCEN lo que se puede interpretar en el sentido que el cuestionario PEM mide características similares al test de Raven con una correlación del 0,684. Por lo tanto, el cuestionario PEM tiene una validez concurrente con el test de Raven, podemos decir que miden una característica similar en los sujetos, lo que no ocurre con la nota de matemáticas. La nota de matemáticas se revela como una variable muy pobre para diferenciar entre grupos de niños con y sin talento.

4.5. Resumen de las conclusiones de los análisis de las puntuaciones

De los análisis realizados en este capítulo hemos llegado a los siguientes resultados:

a) En relación a los resultados del cuestionario PEM y el grupo

- Las diferencias entre las medias que existen entre los grupos 1 y 2 de sujetos con relación al rendimiento en el cuestionario PEM son significativas; es un indicador de la validez del cuestionario PEM como instrumento de identificación de características matemáticas de niños con talento.

b) En relación a los resultados del cuestionario PEM y el colegio

- No hay diferencias significativas entre colegios con relación al rendimiento en el cuestionario PEM; así, el rendimiento en el cuestionario PEM es independiente del tipo de colegio lo que se podría traducir en independencia con relación a determinados aspectos diferenciadores de los procesos de enseñanza aprendizaje establecidos por cada centro de enseñanza; es un matiz que refuerza el papel del cuestionario PEM como instrumento de identificación.

c) En relación a los resultados del grupo y colegio

- No hay interacción significativa entre grupo y colegio, o sea que, la diferencia por grupo se mantiene de manera significativa en todos los colegios del estudio. Es pues irrelevante, en cuanto a su influencia en el rendimiento, la variable Colegio, lo que permitirá en lo sucesivo no tenerla en cuenta.

d) En relación a los resultados del cuestionario PEM con respecto al curso

- Hay independencia del rendimiento en el cuestionario PEM con respecto al curso en que están los niños. No hay diferencias significativas en el rendimiento medio de los distintos cursos, sexto y octavo, en el cuestionario PEM.

e) En relación a los resultados del rendimiento en el cuestionario PEM según curso y grupo

- El análisis estadístico muestra que hay una interacción significativa entre CURSO y GRUPO en su relación con el rendimiento en el cuestionario PEM. El análisis de la interacción obtenida, muestra que no hay diferencias entre los cursos en el grupo 1 lo que no altera las conclusiones extraídas con relación al cuestionario PEM como instrumento de identificación.

f) En relación a las puntuaciones en el cuestionario PEM y el test de Raven, hemos obtenido:

- Hay diferencia significativa entre el rendimiento en el cuestionario PEM y el test de Raven.
- El cuestionario PEM resulta significativamente más difícil que el test de Raven.

g) En relación a los resultados de la comparación de las puntuaciones del cuestionario PEM y la nota de matemáticas

- Hay diferencia significativa entre el rendimiento en el cuestionario PEM y la nota de matemáticas en cada uno de los grupos.
- Si hay diferencia en el grupo 1 entre el cuestionario PEM y el test de Raven.
- Si hay diferencia entre el grupo 2 entre el cuestionario PEM y el test de Raven.

h) Al comparar el rendimiento en el cuestionario PEM, la puntuación en el test de Raven y las notas de matemáticas hemos obtenido que:

- El cuestionario PEM produce más diferencias entre el Grupo 1 y el Grupo 2 que los resultados en el test de Raven y las calificaciones en matemáticas; así, el cuestionario PEM es un instrumento de mayor discriminación entre ambos grupos que los otros dos resultados considerados de manera independiente.
- La correlación entre la variable notas en matemáticas (MATEMAP) y puntuación en el test de Raven RAVENP es baja (0,106). La correlación entre las notas de matemáticas y el rendimiento en el cuestionario PEM

es más elevada (0,38). En cambio hay mayor correlación entre las variables RAVENP y TPERCEN (0,684).

- Hay mayor validez concurrente entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven que entre las notas de matemáticas y las puntuaciones en el test de Raven.
- También hay mayor validez concurrente entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven que entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las notas de matemáticas.

Capítulo 5

Análisis de los problemas

5.1. Introducción

Cuando se construye una prueba, un cuestionario o un test, además de garantizar características globales de la misma, como su validez, puesta a prueba en el capítulo anterior, es importante también analizar las características de sus componentes: los ítems. Los ítems del cuestionario que hemos construido y utilizado en la investigación son problemas aritméticos cuyo contenido matemático predominante es la estructura multiplicativa. Por ello, la finalidad de este capítulo es analizar los problemas que componen el cuestionario PEM, y lo hacemos de dos formas. Primero, realizamos un análisis por tipos de problemas utilizados en el diseño del mismo y, a continuación, realizamos un análisis de ítems con los problemas del cuestionario.

El objetivo del primer análisis es detectar la dificultad y la homogeneidad de los tipos de problemas incluidos en el cuestionario. Contrastaremos si hay diferencias significativas de dificultad entre los tipos de problemas, la homogeneidad entre los tipos de problemas y si hay diferencias significativas entre los dos grupos de sujetos en cada uno de los tipos de problemas.

En la segunda parte realizamos un análisis de ítems del cuestionario PEM, que comprende tres aspectos. Dos de ellos son indicadores clásicos: estudio del índice de dificultad y del coeficiente de discriminación de cada problema. El tercero es un estudio de asociación entre cada problema y los dos grupos de sujetos, empleando para ello la frecuencia de éxitos en cada uno de los problemas.

5.2. Análisis de los tipos de problemas

Como se indicó anteriormente, los problemas del cuestionario PEM son de estructura multiplicativa pertenecientes a cinco tipologías distintas. Para cada una de las cuales se han elegido problemas representativos que han sido utilizados ya en otras investigaciones y que se han descrito en el capítulo 3. Los tipos de problemas y la identificación de los problemas del cuestionario asociados a cada tipo, aparecen en la tabla 5.1. En este apartado se estudian los distintos tipos de problemas, cinco en total, de acuerdo al porcentaje medio de aciertos según el tipo de problema y según el grupo de sujetos.

Tabla 5.1. TIPOS DE PROBLEMAS DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

TIPO DE PROBLEMAS	CARACTERÍSTICA	PROBLEMAS. IDENTIFICACIÓN NUMÉRICA
TIPO 1	Problemas de comparación	1, 4, 8, 12
TIPO 2	Problemas de combinatoria	3, 9
TIPO 3	Problemas de escala	6, 10
TIPO 4	Problemas complejos	5, 7
TIPO 5	Problemas de proporcionalidad simple con números decimales	2, 11

En el estudio intervienen, por tanto, la variable independiente TIPO, representando los distintos tipos de problemas, que toma cinco valores; la variable independiente GRUPO con dos valores, 1 y 2, y la variable dependiente TOTALC que hemos definido como el porcentaje medio de aciertos en el conjunto de problemas que forman cada tipo.

5.2.1. Porcentaje medio de aciertos

Para analizar los tipos de problemas se ha determinado el porcentaje de aciertos para cada tipo de problemas, el valor medio de dichos porcentajes se ha calculado en cada uno de los grupos de sujetos. Estos resultados se observan en la tabla 5.2.

Tabla 5.2. PORCENTAJE MEDIO DE ACIERTOS PARA CADA TIPO DE PROBLEMAS Y GRUPO DE SUJETOS

TIPO DE PROBLEMAS	PROBLEMAS	GRUPO 1 (% MEDIO DE ACIERTOS)	GRUPO 2 (% MEDIO DE ACIERTOS)
1	1, 4, 8, 12	90,8	64,16
2	3, 9	51,66	25,0
3	6, 10	63,33	10,0
4	5, 7	30,00	8,33
5	2, 11	31,66	10,0

De la tabla 5.2 se observa que los problemas del tipo 1, los problemas de comparación, son los más fáciles para los niños del Grupo 1 (90,8% de aciertos) y para los niños del Grupo 2 (64,16%). Los más difíciles son los problemas del tipo 4, los problemas complejos, teniendo un acierto del 30% en el Grupo 1 y del 8,33% en el Grupo 2. Comparando ambos grupos se observa que, en todos los tipos de problemas el porcentaje medio de aciertos es mayor en el Grupo 1 habiendo más diferencia (53,33%) en el tipo de problemas 3 (problemas de escala). En bs otros tipos de problemas la diferencia oscila entre 21,66% y 26,64% a favor del Grupo 1. Estas comparaciones pueden visualizarse en la figura 5.1.

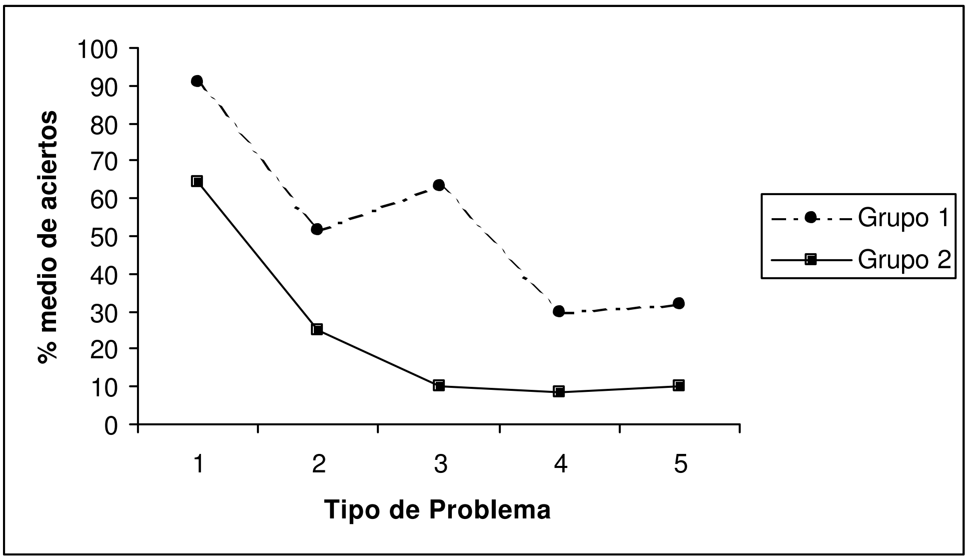


Figura 5.1. PORCENTAJE MEDIO DE ACIERTOS EN CADA TIPO DE PROBLEMA SEGÚN EL GRUPO DE SUJETOS

5.2.2. Análisis de la varianza y comparaciones múltiples a posteriori

Para conocer si las diferencias entre tipos de problemas evidenciadas en la figura 5.1, son significativas, hemos realizado un análisis de la varianza (véase anexo B.5); se trata de valorar los efectos de las variables TIPO y GRUPO sobre la variable dependiente rendimiento medio de cada tipo de problema expresado en porcentaje (TOTALC). Así pues, se contrastan las siguientes hipótesis nulas:

$\mathbf{H_0}_{10}$: *No hay diferencias significativas en el rendimiento debidas al factor TIPO*

$\mathbf{H_0}_{11}$: *No hay interacción entre los factores GRUPO y TIPO en su relación con el rendimiento*

Para contrastar estas hipótesis hemos realizado un análisis de la varianza de la variable TOTALC como dependiente con respecto a las variables independientes GRUPO y TIPO, con el programa estadístico SPSS cuyo resultado se recoge en la tabla 5.3.

Tabla 5.3. ANÁLISIS DE VARIANZA DEL PORCENTAJE MEDIO DE ACIERTOS EN CADA TIPO DE PROBLEMA EXPRESADO SEGÚN LAS VARIABLES GRUPO Y TIPO

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: PERCENT

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	210700,000[a]	9	23411,111	30,738	,000
Intercept	444675,000	1	444675,000	583,840	,000
TIPO	132616,667	4	33154,167	43,530	,000
GRUPO	67500,000	1	67500,000	88,625	,000
TIPO * GRUPO	10583,333	4	2645,833	3,474	,009
Error	220875,000	290	761,638		
Total	876250,000	300			
Corrected Total	431575,000	299			

a. R Squared = ,488 (Adjusted R Squared = ,472)

Los resultados del ANOVA (tabla 5.3), muestran que el efecto principal debido a la variable TIPO es significativo (F = 43,53, p = 0,000). Esto lleva a rechazar, para la variable dependiente TOTALC la hipótesis nula H_{010}, estableciendo que, sí hay diferencia significativa en las medias de la puntuación obtenidas por los niños en los distintos tipos de problemas del cuestionario PEM.

Así mismo se puede observar en la tabla 5.3 que hay efectos significativos de interacción entre las variables TIPO y GRUPO (F=3,474, p=0,009), por tanto, rechazamos la hipótesis H_{011} y afirmamos que hay interacción significativa entre las dos variables GRUPO y TIPO.

De la figura 5.1. se puede observar que el tipo de interacción existente es de tipo ordinal manteniéndose siempre el porcentaje medio de aciertos del Grupo 1 por encima del porcentaje medio de aciertos del Grupo 2 en todos los tipos de problemas.

Puesto que hay efecto significativo de la variable TIPO en el rendimiento, se ha procedido a estudiar entre qué pares de tipos de problemas existen diferencias significativas de dificultad. Para ello se han realizado 'comparaciones múltiples a posteriori' entre las medias de los distintos tipos de problemas (véase anexo B.5), utilizando el método de Scheffé al nivel de significación del 95%; por este método se detectan las posibles parejas de tipos de problemas entre las que no hay diferencias significativas de dificultad.

Producto del análisis de las comparaciones múltiples que hemos realizado han surgido grupos de problemas homogéneos en el sentido de solaparse sus respectivos intervalos de confianza. En total se han obtenido tres subconjuntos de problemas homogéneos (véase tabla 5.4).

Tabla 5.4. SUBCONJUNTOS DE PROBLEMAS HOMOGÉNEOS

TOTAL C

Scheffe[a,b]

TIPO	N	Subset 1	Subset 2	Subset 3
4	60	19,1667		
5	60	20,8333		
3	60		36,6667	
2	60		38,3333	
1	60			77,5000
Sig.		,999	,999	1,000

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
Based on Type III Sum of Squares
The error term is Mean Square(Error) = 761,638.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 60,000.

b. Alpha = ,05.

Los valores de la tabla se han obtenido con los 60 sujetos del Grupo 1 y Grupo 2, así mismo hay que decir que los tipos de problemas están constituidos por dos tipos de problemas salvo el tipo 1, que tiene 4 problemas. Para equiparar las puntuaciones en los distintos tipos de problemas hemos dividido entre 2 las puntuaciones del tipo1.

Los tipos de problemas entre los que no hay diferencia significativa se agrupan en 3 subconjuntos homogéneos según muestra en la tabla 5.5.

Tabla 5.5. SUBCONJUNTOS HOMOGÉNEOS

Subconjunto 1:	Tipo 4 y 5
Subconjunto 2:	Tipo 3 y 2
Subconjunto 3:	Tipo 1

Se pone de manifiesto que los problemas Tipo 1 son diferentes a los demás tipos, como se ha indicado antes.

Hemos obtenido efecto de interacción significativa entre la variable GRUPO de sujetos y la variable TIPO de problema. También hemos destacado que esta interacción no altera las diferencias entre el Grupo 1 y el Grupo 2, que se mantienen en todos los problemas.

Para completar la interpretación del efecto de interacción nos fijamos en la figura 5.2, en donde se observa el porcentaje medio de aciertos de cada grupo de sujetos en cada tipo de problema.

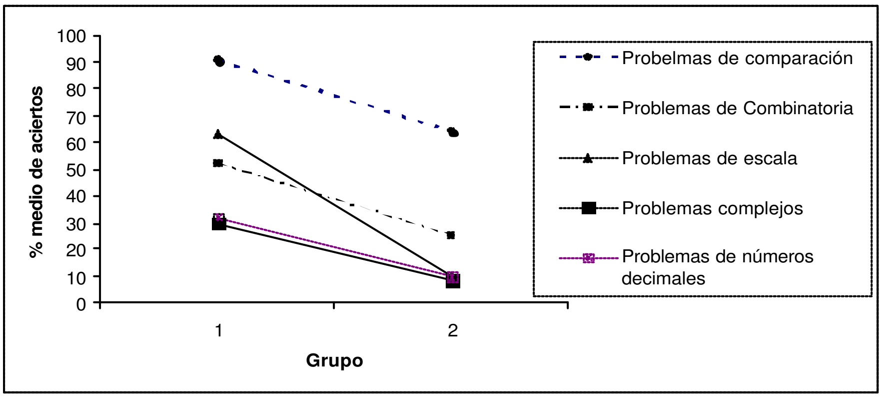


Figura 5.2. INTERACCIÓN DE TIPO DE PROBLEMAS SEGÚN GRUPO DE SUJETOS

En esta figura vemos que la interacción es ordinal (las rectas son paralelas) salvo en el tipo 3 en el que las diferencias entre el Grupo 1 y el Grupo 2 son mayores. En los problemas del tipo 3 los sujetos con talento tienen un aumento sustancial de rendimiento con respecto al Grupo 2. Recordemos que el tipo 3 corresponde a los problemas 6 y 10 que son los ítems de escala. Por lo anterior se concluye que el tipo de problemas que más diferencia entre los grupos son los problemas de escala.

En la tabla 5.1 se observó que la interacción es ordinal con respecto a la variable GRUPO. En la figura 5.2 se observa que los problemas del tipo 3 sufren un cambio muy fuerte y se cruzan con los de combinatoria con lo cual alteran la organización de subconjuntos homogéneos de tipos de problemas estableciendo de manera global si la consideramos para cada grupo. Habría que establecer subconjuntos homogéneos para cada grupo: el Grupo 1 y el Grupo 2. La clasificación de subconjuntos homogéneos se altera en el Grupo 2: (3,4 y 5) (2) (1) y en el Grupo 1 se conservan los subgrupos.

De manera general puede decirse que, los problemas correspondientes a los tipos 1, 2, 3, 4 y 5 son útiles para diferenciar entre los niños con inteligencia general sobre la media, como es el caso de los niños con talento que han intervenido en la investigación.

De éstos tipos de problemas los que más diferencia establecen en el rendimiento de los alumnos son los problemas de escala. El resto de los tipos de problemas establecen diferencias similares.

5.3. Análisis de ítems

Con el objetivo de complementar la información de la incidencia de cada uno de los problemas en el comportamiento de los sujetos, en este apartado se realiza un análisis de cada uno de los ítems que conforman el cuestionario PEM, mediante el estudio del índice de dificultad, el coeficiente de discriminación y un test de asociación Chi Cuadrado entre la variable acierto-error de cada problema y la variable GRUPO al que pertenece el niño; este análisis permitirá conocer las diferentes características de los ítems.

El análisis de ítems se estudia bajo la perspectiva de la Teoría Clásica de los Test, con indicadores que han de tenerse en cuenta para evaluar su calidad: dificultad y discriminación (Muñiz, Fidalgo, García-Cueto, Martínez y Moreno, 2005).

5.3.1. Índice de dificultad de cada problema

Un ítem será fácil o difícil en función del número de personas que lo acierten o lo fallen, así, los ítems fáciles serán acertados por más personas que los ítems difíciles.

El índice de dificultad de cada problema simbolizado con la letra **p**, obtenido mediante el cociente entre el número de respuestas correctas del ítem y el número total de respuestas, por grupo de sujetos y de manera global, viene dado por la proporción de personas que acierten el ítem entre todas las que intenten responderlo.

Tabla 5.6. ÍNDICE DE DIFICULTAD DE CADA PROBLEMA PARA CADA GRUPO Y TOTAL

PROBLEMA Nº	GRUPO 1	GRUPO 2	TOTAL(*)	DESVIACION ESTANDAR DEL TOTAL
1	0,77	0,33	0,55	0,50
2	0,40	0,20	0,30	0,46
3	0,90	0,50	0,70	0,46
4	0,93	0,50	0,72	0,45
5	0,33	0,10	0,22	0,41
6	0,70	0,13	0,42	0,49
7	0,27	0,07	0,17	0,37
8	0,93	0,77	0,85	0,36
9	0,07	0,00	0,03	0,18
10	0,70	0,07	0,38	0,49
11	0,37	0,00	0,18	0,39
12	1,00	0,97	0,98	0,12

(*) Ambos grupos

En cuanto a la posibilidad de aplicación del índice de dificultad Muñiz (2005) dice que "*El índice de dificultad en sentido estricto de indicador de lo difícil que puede ser acertar o fallar un ítem, sólo tiene sentido calcularlo en los tests donde existan respuestas correctas o incorrectas, no en los tests de personalidad o escalas de actitudes*" (p.58), lo que justifica su utilización en el cuestionario PEM.

La tabla 5.6 recoge los índices de dificultad de los 12 problemas del Cuestionario PEM para la totalidad de alumnos y para cada uno de los dos grupos.

Haciendo una comparación de los índices de dificultad de los 12 ítems del cuestionario PEM calculado para el total de sujetos, última columna de la tabla, podemos observar que la dificultad, para los 60 niños, oscila entre 0,03 del problema 9 y 0,98 del problema 12.

Siguiendo a Pérez-Juste (1989) y García, Pérez-Juste y del Río (1992), hemos clasificado de manera aproximada los problemas de acuerdo a los valores del índice de dificultad en 5 categorías:

Tabla 5.7. CRITERIOS DE ÍNDICES DE DIFICULTAD

	ÍNDICE DE DIFICULTAD (p)
Muy difíciles	p<0,25
Difíciles	0,25<p<0,44
Normales	0,45<p<0,54
Fáciles	0,55<p<0,74
Muy fáciles	p>0,75

Aplicando estos criterios, hemos agrupado los problemas en categorías que hemos recogido en la tabla 5.8 según su índice de dificultad para la totalidad de los alumnos y por grupo de alumnos.

Tabla 5.8. CLASIFICACIÓN DE PROBLEMAS SEGÚN ÍNDICE DE DIFICULTAD

ÍNDICE DE DIFICULTAD (p)	**GRUPO 1 n= 30**	**GRUPO2 n=30**	**TOTAL n=60**	**DESCRIPCIÓN**
p<0,25	9	2, 5, 6, 7, 9, 10 y 11	5, 7, 9 y 11	Muy difíciles
0,25<p<0,44	2, 5, 7 y 11	1	2, 6 y 10	Difíciles
0,45<p<0,54	---	3 y 4	----	Normales
0,55<p<0,74	6 y 10	----	1, 3 y 4	Fáciles
p>0,75	1, 3, 4, 8 y 12	8 y 12	8 y 12	Muy fáciles

Así, los resultados arrojan que:

a) En el Grupo 1 el ítem 9, problema de combinatoria, es muy difícil, los ítems 2, 5, 7 y 11 son difíciles (recordemos que los ítems 2 y 11 son de números decimales y los 5 y 7 son complejos), los ítems 6 y 10 que son los problemas de escala son fáciles y los ítems 1, 3, 4, 8 y 12 son muy fáciles siendo ellos los 4 problemas de comparación (1, 4 , 8 y 12) y el ítem 3 de combinatoria.

b) En el Grupo 2, la dificultad de los ítems varía en comparación del Grupo 1; más de la mitad de los ítems del cuestionario PEM son muy difíciles: los problemas de números decimales (2 y 11), los problemas de escala (6 y 10), los problemas complejos (5 y 7) y el problema 9 de combinatoria. El problema 1 de comparación es difícil, los problemas 3 y 4 son normales, el primero de ellos es de combinatoria y el segundo de comparación, y finalmente los problemas de comparación 8 y 12 son muy fáciles.

c) En ambos grupos coincide que los ítems 8 y 12, de comparación, son muy fáciles y que el ítem 9 de combinatoria es muy difícil.

La figura 5.3 muestra los índices de dificultad de cada ítem según grupo. Se observa que los índices de dificultad son mayores para todos los problemas en el Grupo 1 que en el Grupo 2, lo que significa que los ítems presentan menos dificultad para el grupo de sujetos con talento que para el grupo de sujetos normales.

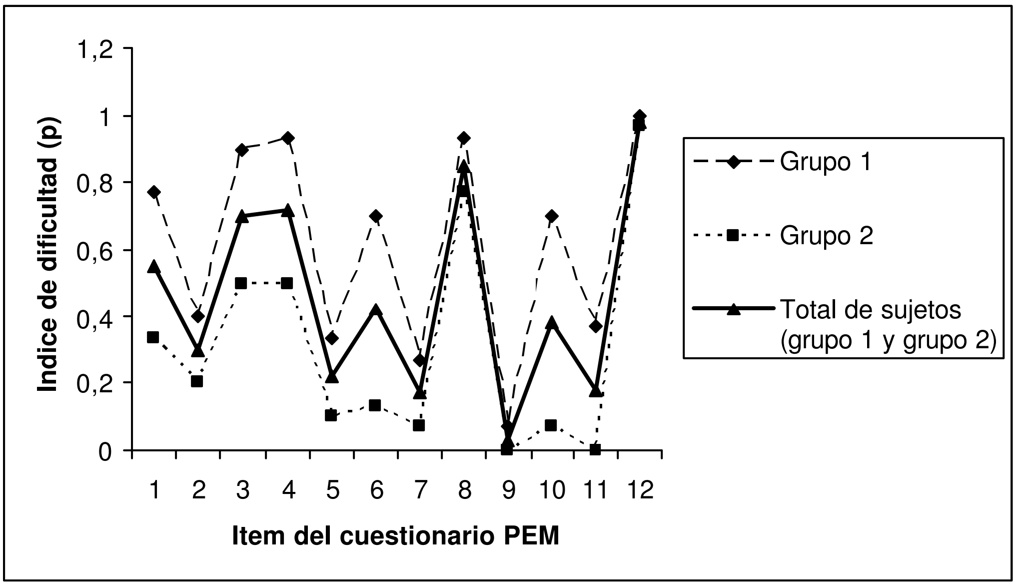


Figura 5.3. ÍNDICES DE DIFICULTAD DE CADA ÍTEM SEGÚN GRUPO

5.3.2. Coeficiente de discriminación

La finalidad de un test o una prueba es discriminar entre las personas a las que se aplica, puesto que el test está compuesto de ítems, la capacidad discriminatoria del test depende en cierta medida de la capacidad discriminatoria de cada ítem. De manera general un problema tiene poder discriminatorio si diferencia entre buenos y malos resolutores. En nuestro caso, teniendo en cuenta que son sujetos con altas capacidades, se supone que son buenos resolutores, pero aún así se encuentran diferencias de realización entre los sujetos que conforman este colectivo especial de sujetos con altas capacidades. Lo que pretendemos, por tanto es ver el poder discriminatorio de los problemas dentro de un colectivo de estudiantes con altas capacidades.

Para determinar el grado de discriminación de un ítem se suelen emplear o bien el índice de discriminación basado en grupos extremos o bien coeficientes basados en la correlación (Muñiz, 2005). La única condición que se le pone al índice de discriminación basado en grupos extremos es que los ítems sean superiores a 30 (Muñiz, 2005, p.63), puesto que nuestro cuestionario PEM tiene sólo 12 ítems, hemos utilizado el coeficiente de correlación.

Para conocer la validez discriminatoria de cada ítem del cuestionario PEM, en cuanto a su capacidad de diferenciar entre resolutores de problemas matemáticos de estructura multiplicativa, hemos calculado los coeficientes de discriminación de los ítems; como coeficiente de discriminación se ha tomado el coeficiente de correlación biserial-puntual (Santisteban, 1990), entre cada ítem en cuestión y la puntuación total obtenida en el cuestionario PEM, de la que el ítem forma parte. Este índice describe la relación entre las respuestas correctas o incorrectas de cada ítem y el rendimiento del cuestionario de todos los niños, siendo un indicador de un cierto tipo de coherencia interna entre ese ítem y el resto de los ítems que componen la totalidad de la prueba, es decir es un indicador de la efectividad de un reactivo.

El índice de validez se expresa mediante una correlación entre las puntuaciones de cada uno de los ítems por separado y las puntuaciones del criterio. Cuanta más alta sea esta relación, mayor será el índice de validez. Para seleccionar el coeficiente de correlación más adecuado habrá que tener en cuenta las condiciones de los datos. Tanto las referidas al elemento como al criterio. Generalmente, se consideran como satisfactorios los valores del índice de validez iguales o superiores a 0,20. (García et al., 1992).

En nuestro caso hemos aplicado el coeficiente de correlación biserial puntual, puesto que una variable es continua y medida a nivel de intervalo la variable criterio (criterio) y los datos del ítem son dicotómicos, siendo la fórmula aplicada:

$$r_{bp} = \frac{m_p - m_x}{S_x}\sqrt{\frac{p_i}{q_i}}$$

En donde:

m_p media del test de las personas que aciertan el ítem

m_x media total del test

s_x desviación típica del test

p_i proporción de personas que aciertan el item

q_i proporción de personas que no aciertan el item

Así pues, hemos calculado la correlación (r1) de cada item con respecto a la puntuación total en el Cuestionario PEM, con los 60 sujetos que conforman los dos grupos. Dado que también tenemos la puntuación del test de Raven, hemos calculado también la correlación (r2) de cada ítem con respecto a esta variable criterio (puntaje en el test de Raven). La tabla 5.9 recoge los coeficientes de discriminación para cada ítem del Cuestionario PEM empleando los 60 sujetos (30 del Grupo 1 y 30 del Grupo 2).

Tabla 5.9. COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN DE CADA PROBLEMA DEL CUESTIONARIO

Problema Nº	Coeficiente de discriminación (r1)	Coeficiente de discriminación (r2)
1	0,6023	0,38
2	-0,0850	0,336
3	0,5586	0,455
4	0,6767	0,353
5	0,5085	0,298
6	0,4991	0,452

7	0,3365	0,318
8	0,3706	0,156
9	0,4146	0,069
10	0,4573	0,425
11	0,3421	0,401
12	0,1993	-0,04

Para interpretar el coeficiente de discriminación, utilizamos el criterio de Ebel y Fisbie (1986, citado en Muñiz, 2005) para determinar la calidad de los ítems en términos del índice de discriminación, en el que los autores proponen la siguiente escala:

Tabla 5.10. CRITERIOS DE ÍNDICE DE DISCRIMINACIÓN

	ÍNDICE DE DISCRIMINACIÓN (r)
Excelente	r> 0,39
Buena	0,30 <r<0,39
Regular	0,20<r<0,29
Pobre	0<r<0,20
Pésima	r<0,01

5.3.3. Análisis de coeficiente de discriminación con criterio el Cuestionario PEM

Los coeficientes de discriminación de los 12 ítems del cuestionario PEM, oscilan entre –0,0850 en el problema 2 y 0,6767 en el problema 4. No hay pues homogeneidad en los coeficientes de discriminación de los ítems del cuestionario PEM, midiendo muy bien un rasgo común, salvo en el caso de los ítems 2 y 12. El ítem 12 tiene un pobre poder discriminatorio con un valor de 0,1993; coincide con el que tiene menor dificultad y corresponde al ítem más fácil de los problemas de comparación; el ítem 2 tiene un coeficiente de discriminación negativo; se puede decir que ese ítem, que corresponde a un problema de comparación multiplicativa de aumento con comparado desconocido, está muy poco relacionado con el resto de los ítems que componen el cuestionario PEM.

Los ítems que mejor discriminan son el 4 y el 1; ambos son problemas de comparación; el 4 lo es con referente desconocido y el 1 con escalar desconocido; teniendo en cuenta los índices de dificultad de estos ítems en cada uno de los grupos, estos ítems están en mayor consonancia con la discriminación que diferencia ambos grupos establecida por el test de Raven.

Tabla 5.11. CLASIFICACIÓN DE LOS ITEMS SEGÚN SU COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN

COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN (r)	PODER DISCRIMINATORIO	ÍTEMS DEL CUESTIONARIO
r>0,39	Excelente	1, 3, 4, 5, 6, 9 y 10
0,30<r<0,39	Buena	7, 8 y 11
0,20<r<0,29	Regular	----
0<r<0,20	Pobre	12
r<0,01	Pésima	2

El estudio anterior tiene un carácter global; los coeficientes de discriminación están referidos a los ítems considerando todos los sujetos tanto del grupo con talento (Grupo 1) como los sujetos del grupo de contraste (Grupo 2); es pertinente hacer un análisis particular en el Grupo 1 en que los niños tienen una inteligencia general sobre la media según el test de Raven para analizar el comportamiento en relación con estos ítems. La tabla 5.12 presenta los coeficientes de discriminación de los ítems del Grupo 1.

5.3.4. Análisis del coeficiente de discriminación con criterio el test de Raven

Los coeficientes de discriminación calculados utilizando como criterio el test de Raven, generan valores comprendidos entre -0,04 y 0,455. Como se observa en la tabla 5.12 podemos observar que 9 de los 12 ítems discriminan al menos en forma regular, y de ellos 5 ítems tienen un poder discriminatorio excelente, por otra parte el ítem 12 no discrimina, tiene una discriminación pésima según el criterio de Ebel y Fisbie.

Tabla 5.12. CLASIFICACIÓN DE LOS ITEMS SEGÚN SU COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN

COEFICIENTE DE DISCRIMINACIÓN (r2)	PODER DISCRIMINATORIO	ÍTEMS DEL CUESTIONARIO
r2>0,39	Excelente	1,3,6,10,11
0,30<r2<0,39	Buena	2,4,7
0,20<r2<0,29	Regular	5
0<r2<0,20	Pobre	8,9
r2<0,01	Pésima	12

De los valores obtenidos en las tablas 5.11 y 5.12, se puede observar que los ítems 12, 2, 9 y 8 se muestran discrepancias y se busca explicarlas porqué en unos casos sí y en otros no.

En el caso del ítem 2 es un problema de números decimales, si se calcula el coeficiente de discriminación con la variable criterio el Cuestionario PEM se obtiene el valor de -0,0850 (poder de discriminación pésimo) y si se utiliza como variable criterio el test de Raven se obtiene un poder discriminatorio bueno. Esto podría deberse a que es un ítem difícil en relación al Cuestionario PEM, y es un ítem que discrimina entre ambos grupos de sujetos, tal como están conformados los grupos 1 y 2 según la puntuación obtenida en el test de Raven.

En el ítem 12, un problema de comparación, podemos observar que realmente no sirve para nada, se podría considerar que es un ítem que ha tenido el llamado efecto suelo, porque es muy fácil para ambos grupos de sujetos, y al tener un alto porcentaje de aciertos no nos aporta información relevante para nuestra investigación.

En el caso del ítem 9, que es un problema de combinatoria de alta dificultad, sí discrimina si utilizamos como variable criterio la puntuación total en el cuestionario PEM, pero no si utilizamos como variable criterio la puntuación en el test de Raven.

Por último, el ítem 8, que es un problema de comparación, tiene mayor coeficiente de discriminación al utilizar como criterio la puntuación total en el Cuestionario PEM, que la puntuación en el test de Raven.

5.3.5. Asociación entre GRUPO y rendimiento por problema

Para completar el análisis de ítems se realiza un estudio de asociación de cada uno de los ítems con el grupo de pertenencia del niño (véase anexo B.6); con este análisis se pretende observar la asociación o no del acierto en el ítem y la pertenencia al Grupo 1 o al Grupo 2, que están constituidos por alumnos seleccionados como con talento o no respectivamente; para este análisis se emplea el test de asociación Chi-Cuadrado que permite ver si hay diferencia significativa entre el éxito y el fracaso en cada problema y en la pertenencia al grupo de alumnos con inteligencia general sobre la media según el test de Raven o no pertenencia a este grupo. Los resultados del test de asociación están recogidos en la tabla 5.13

Tabla 5.13. VALORES DEL TEST DE ASOCIACIÓN, CHI CUADRADO, ENTRE EL GRUPO Y EL ACIERTO-FRACASO EN CADA UNO DE LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO PEM

Problema Nº	Chi- Cuadrado	Valor –p
1	11,38	0,001
2	0,8	0,371
3	11,42	0,001
4	13,87	0,000
5	4,81	0,028
6	15,86	<0,000
7	4,32	0,038
8	3,26	0,071
9	4,28	0,038
10	21,17	0,000
11	12	0,001
12	1,017	0,313

Observando los resultados del test de asociación chi-cuadrado entre los aciertos – fracasos en cada uno de los doce problemas y el grupo al cual pertenece el niño, resulta que son significativas al nivel de significación del 5%, las asociaciones correspondientes a los problemas 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 y 11, lo que quiere decir que hay asociación entre estos problemas y el grupo; en los problemas 2, 8 y 12 no hay asociación significativa.

5.4. Resumen de resultados

Una forma de conocer la calidad de los ítems del cuestionario es poniéndolos a prueba y analizando su comportamiento empíricamente; dos indicadores fundamentales para realizar este análisis han sido el índice de dificultad y el coeficiente de discriminación, complementados con un test de asociación.

Conclusiones en relación a los tipos de problemas

- Hay diferencia significativa en las medias de la puntuación obtenida por los niños en los distintos tipos de problemas.
- Los tipos de problemas entre los que no hay diferencias significativas se agrupan en tres subconjuntos homogéneos, el primer subconjunto formado por los problemas complejos y de números decimales, el segundo subconjunto homogéneo formado por los problemas combinatoria y de escala y el tercer subconjunto formado por los problemas de comparación.
- Hay interacción entre las variables grupo y tipo. Si nos fijamos en el rendimiento de los tipos de problemas vemos que el Grupo 1 tiene un rendimiento superior al Grupo 2 en todos los casos. La interacción es ordinal y se alterada salvo en los problemas de tipo 3, los problemas de escala, en donde los sujetos con talento, Grupo 1, tienen un aumento sustancial con respecto al Grupo 2.
- Los problemas que más diferencias establecen entre el Grupo 1 y el 2 son los de tipo 3, es decir, los problemas de escala.

- De manera general se concluye que, los cinco tipos de problemas del cuestionario PEM, son útiles para diferenciar entre los niños con inteligencia general sobre la media, de éstos los que más diferencian son los problemas de escala y los que menos los problemas complejos y los de números decimales.

Conclusiones en relación al análisis de ítems

En relación al índice de dificultad:

- El índice de dificultad de los 12 ítems del cuestionario PEM con relación al total de sujetos oscila entre 0,03 en el problema 9 (problema de combinatoria) y 0,98 en el problema 12, que es un problema de combinatoria.
- Para el Grupo 1, los sujetos con talento, hay un ítem de combinatoria muy difícil (ítem 9) y otro del mismo tipo muy fácil (ítem 3). Los ítems de problemas complejos (problemas 5 y 7) y los de números decimales (problemas 2 y 11) son difíciles. Los problemas de escala son fáciles, y los problemas de comparación y uno de combinatoria (ítem 3) les han resultado muy fáciles.
- Para el Grupo 2, los sujetos del grupo de contraste, tienen 7 ítems que les han resultado muy difíciles: los problemas complejos, los de números decimales, los de escala y uno de combinatoria (el ítem 9), de los ítems de comparación les han resultado difícil el ítem 1, normal el ítem 4 y muy fáciles los ítems 8 y 12, y el problema de combinatoria (ítem 3) les ha resultado normal.
- En forma conjunta, para ambos grupos de sujetos, hay 4 ítems que les han resultado muy difíciles (ítems 5, 7, 9 y 11) y 3 difíciles (2, 6 y 10), 3 ítems fáciles (los problemas 1, 3 y 4) y 2 muy fáciles (8 y 12).
- En ambos grupos coincide que los ítems 8 y 12 de comparación son muy fáciles y que el ítem 9 de combinatoria es muy difícil.

En relación al coeficiente de discriminación:

- No hay homogeneidad en los coeficientes de discriminación de los ítems del cuestionario PEM, midiendo muy bien un rasgo común, salvo en el caso de los ítems 2 y 12. El ítem 2 al tener un valor negativo significa que está muy poco relacionado con el resto de los ítems que componen el cuestionario PEM, y el ítem 12 tiene un pobre poder discriminatorio, lo que coincide con el hecho de que tiene menor dificultad.
- Para los sujetos del Grupo 1, hay 4 ítems con poder de discriminación pobre (3 ítems de comparación y uno de números decimales), un problema con poder de discriminación regular (el problema complejo), 3 problemas con poder discriminatorio bueno (un ítem de combinatoria, uno de comparación y uno de

escala) y 4 ítems con poder discriminatorio excelente (un problema complejo, uno de combinatoria, uno de escala y uno de números decimales).

Conclusiones en relación al estudio de asociación

- Son significativas las asociaciones correspondientes a los problemas 1, 3, 4, 6 7, 9, 10 y 11, lo que quiere decir que hay asociación entre estos problemas y el grupo al cual pertenecen.
- En los problemas 2, 5, 8 y 12 no hay asociación significativa con respecto al grupo de pertenencia.

Capítulo 6

Análisis de Estrategias

6.1. Introducción

Este capítulo tiene por objetivo la descripción de las estrategias utilizadas por los niños con talento en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa del cuestionario PEM. La identificación de las estrategias empleadas por los niños es el primer paso para caracterizar el pensamiento de los niños con talento en la resolución de este tipo de problemas. En primer lugar explicamos el proceso de análisis que se ha seguido y, a continuación, presentamos y caracterizamos los procedimientos y estrategias que han empleado los niños con talento. Se analizan cada tipo de problemas por separado a la vez que se acompaña de ejemplos de resolución que son interesantes y creativos. Concluimos el capítulo exponiendo un conjunto de estrategias especiales que destacan por hacer uso en ellas de características llamativas que son propias de alumnos destacados.

6.2. Proceso de Análisis

La identificación de los procedimientos y las estrategias que han empleado los sujetos y que presentamos en este capítulo constituyen el producto final de un proceso de análisis, discusión y reflexión que hemos realizado y que resumimos a continuación.

Un primer paso en el proceso lo constituyó el análisis de las producciones de los sujetos de acuerdo con los resultados encontrados en otras investigaciones en las que se habían utilizado estos problemas; de este modo fue analizado cada grupo de problemas de manera independiente del resto; se definieron y caracterizaron las procedimientos de resolución empleados por los sujetos muy condicionados a la tipología de problemas.

En segundo lugar, teniendo en cuenta que los problemas son de estructura multiplicativa, se observó la reiteración en modos de actuar de los sujetos incluso en problemas de distinto tipo.

En tercer lugar, estos resultados llevaron a considerar las estrategias de resolución desde una perspectiva general; así, las estrategias se redefinieron de manera independiente de la tipología de problemas cuando esto era posible; en esta parte del proceso se consideró conveniente describir las estrategias en función de elementos más simples que denominamos procedimientos.

Seguidamente se revisan las producciones de los sujetos en base a una parrilla de procedimientos, y se hicieron los análisis y reflexiones pertinentes.

Por último, se describen estrategias especiales que creemos son propias de alumnos con talento.

6.3. Procedimientos identificados

Dado que el término estrategia se utiliza en investigación con diversas acepciones, comenzamos dando el significado con el que lo hemos utilizado en esta investigación. Para ello partimos del hecho de que en la resolución de los problemas de matemáticas, en general, y de estructura multiplicativa en particular, los resolutores emplean diferentes sistemas de representación que permiten observar los elementos constitutivos del camino hacia la solución, a los que llamamos *procedimientos;* al conjunto de procedimientos que emplean los sujetos para obtener la solución de un problema le llamamos *estrategia.* Con este planteamiento, los procedimientos quedan definidos como los elementos constitutivos de la estructura de las estrategias.

Los procedimientos empleados por los sujetos en la resolución de los problemas los hemos agrupado en tres grandes categorías según sea el tipo de representación:

verbal, pictórica o aritmética. También hemos considerado la opción de ausencia de representación externa; en este caso, se dan soluciones que se han obtenido sin hacer representaciones externas, y sujetos que han dejado el problema en blanco.

Puesto que los procedimientos los describimos en este trabajo enmarcados en cada una de las representaciones damos a continuación una definición de los tipos de representación que utilizamos.

6.3.1. Representación verbal

Un sujeto emplea un procedimiento de representación verbal cuando describe de manera verbal todo o parte del proceso de la resolución del problema; no consideraremos como verbales aquellos enunciados que reiteren lo expresado previamente mediante otro sistema de representación. Dentro de estos procedimientos de representación verbal se han presentado las siguientes variantes:

a) **Descripción de una analogía**

Consiste en que el resolutor incluye en su argumentación conocimiento relativo a la resolución de problemas anteriores. Por ejemplo, el sujeto 1 en el problema 4 indica, "… *Tatiana debe medir 60 centímetros porque es la misma pregunta Nº 1 solo que está al revés.*"

b) **Descripción aritmética**

En este caso los sujetos emplean una argumentación verbal de carácter aritmético. Por ejemplo, el sujeto 15 en el problema 5 argumenta, "*Empleará 9 días ya que por cada día sube un metro en total, pero el 8º día sube 2 metros y llega al final de la pared y no tiene que bajar*".

6.3.2. Representación pictórica

Un sujeto emplea un procedimiento de representación pictórica si elabora un gráfico, dibujo o esquema que constituye parte del proceso de solución, apoyo o aclaración de otras partes de la resolución. Dentro de estos procedimientos de representación se han presentado las siguientes variantes:

a) Dibujo

El proceso de resolución incluye un dibujo alusivo a elementos o conceptos que forman parte del problema. Por ejemplo, el sujeto 1 en el problema 3 realiza un dibujo de dos pantalones distintos combinados con dos camisetas distintas.

b) Gráfico

Se da esta circunstancia cuando el sujeto realiza un gráfico que representa una relación implícita en el problema. Por ejemplo el sujeto 4 dibuja un segmento vertical que representa la pared y distintos segmentos de bajadas y subidas que realiza el caracol.

c) Esquema o diagrama

Aparece en las respuestas de los sujetos que representan las relaciones estructurales entre las cantidades que aparecen como datos en el problema; dentro de esta variante están los diagramas en árbol. Por ejemplo, el sujeto 5 en el problema 3, elabora un diagrama en árbol simbolizando las camisetas mediante las letras a, b, c, d, e, f y los pantalones con los números 1 y 2.

6.3.3. Representación Aritmética

Los procedimientos de representación aritmética utilizan de manera explícita operaciones aritméticas o algún algoritmo aritmético en el proceso de resolución del problema o en parte de él. Dentro de este tipo de representación se han presentado las siguientes variantes:

a) Suma de datos

La respuesta contiene una suma de datos explícitos o tácitos del problema. Este es el caso del sujeto 2 que en el problema 3 da la suma 6 y 2 que son los datos del problema.

b) Resta de datos

La respuesta contiene una resta de datos explícitos o tácitos del problema. Ejemplo de esto es el sujeto 7 en el problema 2 que resta los datos del problema: 923 -

650 que previamente ha modificado quitando la coma decimal de los datos del problema, que son 0,923 y 6,50 respectivamente.

c) Multiplicación de datos

El resolutor multiplica datos explícitos o tácitos del problema; consideramos de manera distinta esta multiplicación de datos a aquella que se realiza cuando se aplica el procedimiento denominado Regla del Producto.

Ejemplo, el sujeto 2 en el problema 12 multiplica 60 por 3 que son los datos que aparecen en el problema.

d) División partitiva

Se utiliza la división de datos explícitos o tácitos correspondientes a cantidades de magnitudes diferentes en el problema.

Ejemplo, en el problema 8, la división partitiva consiste en dividir la estatura de una persona por la cantidad de veces que "cabe" la otra persona, de la siguiente manera (*180:3 =60).*

e) División cuotitiva

Frente a la división partitiva, consiste en dividir datos explícitos o tácitos correspondientes a cantidades de la misma magnitud en el problema.

Ejemplo, en el problema 1, consiste en dividir la estatura de una persona por la de la segunda, para así determinar "cuántas veces" cabe (*180:60= 3).*

f) Compensación aditiva

Este procedimiento es propio de problemas de proporcionalidad como es el caso de los problemas 2 y 11. Hemos considerado que un sujeto utiliza una compensación aditiva cuando emplea la suma o la resta como forma de compensar en una de las magnitudes, la variación que experimenta una de las cantidades de otra magnitud para determinar la solución. Ambas magnitudes corresponden a los datos del problema.

En este procedimiento hemos distinguido dos variantes:

a) Compensación aditiva tipo 1, que aún teniendo un carácter aditivo en una segunda fase, en realidad es un procedimiento de proporcionalidad que se centra en determinar el valor de la diferencia para añadir o restar.

b) Compensación aditiva tipo 2, son aditivos en un sentido erróneo; suman o restan la diferencia que hay entre las cantidades de una de las magnitudes a la cantidad conocida de la otra magnitud para determinar la desconocida; este caso está ampliamente documentado en la literatura (Hart, 1981); los sujetos interpretan la relación de proporcionalidad en términos aditivos; en sentido literal 'a más, más y a menos, menos', es decir si un término de la proporción aumenta o disminuye, el otro aumenta o disminuye la misma cantidad de forma aditiva.

Ejemplos de la compensación aditiva tipo 1

El sujeto 15 en el problema 2 determina lo que valen 77 gramos, sabiendo que 100 gramos cuestan 0,65 dólares, haciendo cuartos determina que 77 gramos cuestan 0,495 dólares que resta de los 6,5.

El sujeto 19, en el problema 11, emplea el esquema de la proporcionalidad para estimar que lo que le falta al kilogramo de queso que es 0,077 cuesta 1 dólar ya que 0,923 kilogramos cuestan 6; el resultado se lo suma a 6.

Ejemplos de la compensación aditiva tipo 2

En el problema 2 el sujeto 3 indica que "*si el kilo de queso vale 6,50 dólares primero veo cuanto le falta para llegar al kilo y luego lo que le falta se lo resto al precio del kilo*" para realizar,

$$\begin{array}{r} 6,50 \\ \underline{-\ 77} \\ 5,73 \end{array}$$

y dar como resultado 5,73 dólares.

Para el problema 11, este mismo sujeto, con la misma argumentación suma a los seis dólares del precio de los 0,923 kg los 0,077 kg de diferencia con relación al kilogramo, dando como resultado 6,077 dólares.

g) Aproximaciones sucesivas

Consideramos que un sujeto emplea este procedimiento cuando aproxima de manera sucesiva la cantidad por la que se le pregunta hasta llegar al resultado. Sirvan como ejemplos los siguientes.

En el problema 2, el sujeto 17 determina lo que vale una décima parte del kilo que resta a los 6,50 dólares que vale el kilogramo; así obtiene lo que cuestan 900 gramos; para determinar lo que cuestan los 23 gramos restantes divide lo que cuestan 100 gramos entre 4; finalmente suma los resultados obteniendo de manera aproximada el precio de los 923 gramos de queso.

En el problema 11 el sujeto 15 estima que 100 gramos valen 0,6 dólares; de ahí 50 valen 0,3, 25 valen 0,15, 75 valen 0,45 y 77 valen 0,46; este último resultado lo suma a los 6 dólares que cuestan los 923 gramos para completar el kilogramo.

h) Proporcionalidad: Regla de tres simple directa

Este procedimiento se ha identificado en las respuestas de los sujetos cuando aparece en ellas el esquema típico de proporcionalidad, la regla de tres, o alguno similar y luego hace los cálculos para obtener la respuesta; o bien emplean el porcentaje como forma de determinar la solución. Es decir, siendo a y b cantidades de una misma magnitud M_1 y f(a) y f(b) de M_2, ambas relacionadas proporcionalmente por f, entonces,

$$a \rightarrow f(a)$$
$$b \rightarrow f(b)$$

de donde $a/b = f(a)/f(b)$

$$a \cdot f(b) = b \cdot f(a)$$

de donde, $f(b)=a \cdot f(a)/b$

Ejemplos:

El sujeto 20, en el caso del problema 2, escribe,

$$0{,}923/1 \;=\; x / 6{,}50 \Rightarrow x = 6{,}5 \cdot 0{,}923$$

Establece una proporción con la notación adecuada 0,923 es a 1 como x es a 6,50, y para calcular el valor de la incógnita multiplica 6,50 y 0,923.

El sujeto 22 escribe, en el caso del problema 2:

1 kg = \$6,50

0,923 g = \$?

y multiplica 0,923 y 6,50 para obtener el resultado.

Estas dos variantes del empleo del esquema de la proporcionalidad fueron ya identificadas por Vergnaud (1998), como *funcional* en el caso del sujeto 20 y *escalar* en el caso del sujeto 22.

i) Reducción a la unidad

Otra forma de resolver problemas en los que intervienen dos magnitudes directamente proporcionales es la reducción a la unidad. En las mismas condiciones del procedimiento anterior para determinar f(b) se divide f(a) entre a, considerando a como un escalar, para obtener cuál es la imagen de la unidad en esta proporcionalidad y multiplicar lo que resulta por b.

Ejemplo:

En el problema 6, el sujeto 5 determina la equivalencia de un centímetro del dibujo con la distancia real que representa para luego multiplicar esta distancia por la cantidad de centímetros, medidos en el papel, que hay entre las dos ciudades.

j) Resta reiterada del divisor

Un sujeto emplea este procedimiento cuando determina el cociente de una división mediante restas reiteradas del divisor; el número de veces que resta el divisor hasta agotar el dividendo es el resultado de la división.

Ejemplo:

El sujeto 19 en el caso del problema 1 establece la serie 180, 130, 60 y 0 restando 60 de manera reiterada y hasta 3 veces de 180 y da como resultado 3 veces.

k) Series

Consideramos que los sujetos emplean esta estrategia cuando elaboran un listado o serie en dos columnas, o de cualquier otra forma, de cantidades de una magnitud y sus correspondientes en una relación de proporcionalidad hasta llegar a la medida necesaria más pequeña que le permita reconstruir, el valor por el que se le pregunta.

Ejemplo:

En el caso del problema 6, el sujeto 17 establece la serie siguiente:

8:4000000

4:2000000

2:1000000

1:500000

0,5:250000

Y añade*:* *Como medía 2,5 sumo 1000000+250000=1250000*

En el problema 10, el sujeto 19 elabora una serie como la del sujeto anterior que acaba en 1:500000 y explica "fui sacando las mitades de los números y los transformé en millones hasta 1".

k) Factor desconocido

Un sujeto emplea este procedimiento cuando determina, mediante comprobación, uno de los factores de un producto conocidos el otro factor y el resultado.

Ejemplo:

En el problema 4 el sujeto 11 determina que la estatura de Tatiana es 60 pues 60x3 es 180.

l) Divisor desconocido

Un sujeto emplea este procedimiento cuando determina mediante comprobación el divisor de una división de la que se conoce el dividendo y el cociente.

Ejemplo:

El sujeto 14 en el problema 1 determina que la solución es 3 pues 108:3=60.

m) Recuento simple de casos (Pares ordenados)

Este procedimiento está asociado fundamentalmente a los problemas de combinatoria 3 y 9. Un sujeto emplea este procedimiento cuando enumera una a una las posibles combinaciones y estableciendo así el número total de ellas.

Ejemplo:

El sujeto 4 en el problema 3 denomina C1, C2, C3, C4, C5 y C6 a las camisetas y P1 y P2 a los pantalones representado las posibles combinaciones: C1-P1, C1-P2, etc.

n) Combinaciones

Este procedimiento está asociado fundamentalmente, como en los precedentes, a problemas de combinatoria como son los problemas 3 y 9.

Un sujeto emplea este procedimiento cuando enumera de manera sistemática y agrupada las distintas posibilidades y después las suma.

Ejemplo:

En el caso del problema 9 establece que para una luz hay 4 posibilidades, 3 para dos luces, 2 para tres, 1 para 4 y 0 para 5 y por tanto el número total es 4+3+2+1+0=10.

o) Regla del producto

Este procedimiento está asociado fundamentalmente a los problemas en donde se plantea que 'una cosa puede hacerse de *a* formas distintas y otra cosa de *b* formas, entonces hay *a· b* formas de hacer ambas cosas'; generalizando, distintas cosas que pueden hacerse de *a, b, c, … h* formas distintas, entonces, todas ellas juntas se pueden hacer de *a·b·c· …·h* formas distintas.

Ejemplos:

En el caso del problema 4, el sujeto 6, multiplica el número de camisetas por el número de pantalones para determinar las distintas formas de vestirse.

En el caso del problema 9 el sujeto 6 determina que el número de combinaciones posibles de luces es de 2·2·2·2·2·2.

p) Otro procedimiento

Incluimos en esta tipología aquellos procedimientos de Representación Aritmética que no pueden ser incluidos en ninguno de los casos anteriores.

Ejemplo:

El sujeto 7 en el problema 10 da como respuesta '95 ancho 62 alto' y describe el procedimiento mediante una serie de números 1, 95, 65, 160.

6.3.4. Respuesta inmediata

En esta tipología incluimos aquellos problemas que son resueltos por los sujetos dando una respuesta sin que figure en la hoja de la prueba ninguna forma de obtención o justificación del resultado. Se da una respuesta pero no se representan exteriormente los procedimientos utilizados para llegar a ella.

6.3.5. No responde

Bajo este epígrafe recogemos las situaciones en las que el sujeto deja en blanco el espacio correspondiente al problema, es decir no responde a la pregunta que se le formula en el problema, ni realiza representación exterior alguna.

La tabla 6.1 recoge los tipos de representación y procedimientos que hemos identificado en las producciones escritas de los sujetos en los doce problemas del cuestionario PEM. Los procedimientos están clasificados por sistemas de representación a los que les hemos añadido una codificación para facilitar su empleo.

Tabla 6.1. TIPO DE REPRESENTACIÓN Y PROCEDIMIENTOS IDENTIFICADOS DE LAS PRODUCCIONES DE LOS SUJETOS

Tipo de representación	Procedimiento
Representación Verbal	Analogía (VAN)
	Aritmética (VA)
Representación pictórica	Dibujo (PD)
	Gráfico (PG)
	Esquema (PE)
Representación aritmética	Suma (AS)
	Resta (AR)
	Multiplicación (AM)
	División partitiva (ADP)
	División cuotitiva (ADC)
	Compensación aditiva (ACA1 y ACA2)
	Aproximaciones sucesivas (AAS)
	Proporcionalidad (regla de tres) (AP)
	Reducción a la unidad (ARU)
	Resta reiterada (ARR)
	Series (AS)
	Factor desconocido (AFD)
	Divisor desconocido (ADD)
	Pares ordenados (APO)
	Combinaciones (AC)
	Regla del producto (ARP)
	Otro procedimiento (AOP)
Respuesta inmediata.	RI
No responde	NR

En la tabla 6.2 se presentan las frecuencias asociadas de cada uno de los procedimientos, a cada uno de los tipos de representación y por cada uno de los problemas.

Tabla 6.2. FRECUENCIA DE PROCEDIMIENTOS Y SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EMPLEADOS SEGÚN CADA PROBLEMA SIMPLE DE ESTRUCTURA MULTIPLICATIVA

Representación	Procedimiento	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	Totales	
Representación Verbal	Analogía	0	1	0	1	0	0	0	1	0	3	1	2	9	**75**
	Aritmética	5	5	8	3	17	8	1	1	9	4	2	1	66	
Representación Pictórica	Dibujo	2	1	7	3	7	1	17	2	4	0	0	1	45	
	Gráfico	2	0	4	2	9	3	0	2	6	3	0	2	34	**92**
	Esquema	0	0	11	0	1	0	0	0	1	0	0	0	13	
	Suma	0	0	2	0	0	0	3	0	0	1	0	0	4	
	Resta	7	3	0	0	8	0	15	1	0	0	0	0	34	
	Multipli	0	0	0	2	6	0	14	1	0	2	0	26	53	
	Div. parti	2	4	0	21	0	1	8	23	0	0	10	0	69	
	Div. cuoti.	11	1	0	0	0	2	1	0	0	0	3	0	18	
Representación Aritmética	Comp. aditi.	1	6	0	0	0	0	0	0	0	0	8	0	15	
	Aprx. suce.	0	2	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	3	
	Proporc.	1	3	0	0	0	1	1	0	0	1	2	0	9	
	Redu. unid.	0	1	0	0	0	16	0	0	0	14	3	0	34	**321**
	Resta reite.	5	0	1	1	4	1	0	1	0	0	0	1	14	
	Series	0	0	0	0	1	5	0	0	0	4	0	0	10	
	Fac. des.	5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	6	
	Divi. desco.	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5	
	Pares ord.	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	
	Combin.	0	0	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	6	
	Regla prod.	0	0	16	0	0	0	0	1	15	0	0	0	32	
	Otro proc.	0	1	0	0	0	1	0	0	3	1	0	0	6	
Resp. inmediata		0	4	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	6	**6**
No responde		0	2	0	0	0	1	5	0	0	3	2	0	13	**13**

Se pone de manifiesto que la representación aritmética es el conjunto de procedimientos más numeroso; en total, los sujetos emplean 321 procedimientos aritméticos que representan el 63% de los procedimientos totales empleados. El contexto escolar en general y el aula de matemáticas en particular hace un énfasis especial en esta forma de representación y, por tanto, este resultado está dentro de lo esperado.

Es de destacar el uso también importante de los otros dos sistemas de representación: la representación verbal 75 procedimientos (14,7%), con énfasis en la modalidad aritmética (66 procedimientos), lo que pone de manifiesto la integración, en estos casos, de lo aprendido en el aula de matemáticas, con la forma de expresión a través del lenguaje natural; de la representación pictórica hay 92 procedimientos (18%), con especial énfasis, en el empleo del dibujo. En estos últimos casos los sujetos muestran su capacidad de apoyarse en una representación pictórica para resolver los problemas.

6.4. Estrategias por tipos de problemas

Los procedimientos presentados se combinan en las producciones de los sujetos para formar las estrategias de resolución de los problemas; así, una estrategia puede estar formada por uno o más procedimientos. Por ejemplo, el sujeto 1 en el problema 2 emplea una estrategia que incluye un solo proceso que hemos denominado Verbal Aritmético. Este mismo sujeto, en el problema 3 combina un proceso Pictórico con Dibujo con un proceso Verbal Aritmético.

Analizando las estrategias según la combinación de los tipos de representación tenemos las estrategias posibles siguientes:

a) Representación Verbal con Representación Pictórica
b) Representación Verbal con Representación Aritmética
c) Representación Pictórica con Representación Aritmética
d) Representación Verbal con Representación Pictórica y con Representación Aritmética
e) Representación Verbal como único procedimiento
f) Representación Pictórica como único procedimiento
g) Representación Aritmética como único procedimiento

La tabla 6.3 recoge las frecuencias de estas estrategias definidas como combinaciones de tipos de representaciones.

Tabla 6.3. FRECUENCIAS DE LAS ESTRATEGIAS EMPLEADAS DESCRITAS A PARTIR DE LAS REPRESENTACIONES QUE INTERVIENEN EN ELLA.

Estrategia	Verbal	Pictórica	Aritmética	V-P	V-A	P-A	V-P-A

	(V)	(P)	(A)				
Frecuencia	20	21	232	13	33	49	7
Porcentaje	5%	6%	62%	3%	8%	13%	2%

Como en el caso de los procedimientos, en las estrategias hay un predominio de aquellas que cuentan como único procedimiento la representación aritmética; aunque con mucha menor frecuencia, también hay estrategias que utilizan como únicos procedimientos la representación verbal y la representación aritmética. En cuanto a combinaciones de dos representaciones diferentes la más abundante es la combinación pictórica con la aritmética con 49 estrategias. Se dan siete casos en donde los sujetos combinan los tres tipos de procedimientos.

La tabla 6.4 presenta el listado de todas las estrategias encontradas al resolver los doce problemas de estructura multiplicativa del Cuestionario PEM, en el que se recoge la combinación de procedimientos por cada una de las estrategias.

Tabla 6.4. ESTRATEGIAS ENCONTRADAS EN LAS PRODUCCIONES DE LOS SUJETOS EN LOS DOCE PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO PEM Y PROCEDIMIENTOS EMPLEADOS.

Tipo de representación	**Estrategias**	**Tipo de representación**	**Estrategias**
No responde	0 NR	Uso de dos representaciones	44 AFD-VA
Respuesta Inmediata	1 RI		45 ADP-PD
Representación pictórica	2 Dibujo (PD)		46 ADP-PG
	3 Gráfico (PG)		47ADP-AR
	4 Esquema (PE)		48 ADP-AM
Representación Verbal	5 Analogía (VAN)		49 ADC-PD
	6 Aritmética (VA)		50ADC-VA
Representación Aritmética	7 Otro procedimiento (AOP)		51 ADD-AR
	8 Suma (AS)		52 ADD-ADP
	9 Resta (AR)		53 ACA1-VA
	10 Resta reiterada (ARR)		54 ACA2-PD
	11 Multiplicación (AM)		55 ACA2-VA
	12 Factor desconocido (AFD)		56 AAS-VA
	13 División partitiva (ADP)		57 AP-PD
	14 División cuotitiva (ADC)		58 AP-PG
	15 Divisor desconocido (ADD)		59 AP-VA
	16 Compensación aditiva (ACA1)		60 AP-ADC
	17 Compensación aditiva (ACA2)		61 ARU-PG
	18 Aproximaciones sucesivas (AAS)		62 ARU-VA
	19 Proporcionalidad (regla de tres) (AP)		63 ASS-PG
	20 Reducción a la unidad (ARU)		64 ASS-VA
	21 Series (ASS)		65 APO-PD
	22 Pares ordenados (APO)		66 AC-PD

	23 Combinaciones (AC)		67 ARP-PD
	24 Regla del producto (ARP)		68 ARP-PG
Uso de dos representaciones	25 VAN-PD		69 ARP-PE
	26 VA-PD		70 ARP-VA
	27 VA-PG		71 ARP-APO
	28 AOP-PG	Uso de tres representaciones	72 AR-VA-PD
	29 AOP-VA		73 AR-AS-PD
	30 AS-PE		74 AR-AM-PG
	31 AS-VA		75 AR-AM-VA
	32 AR-PD		76 ADP-VA-PD
	33 AR-PG		77 ADP-AS-PD
	34 AR-VA		78 ADP-AM-AR
	35 ARR-PD		79 ADC-AR-PD
	36 ARR-VA		80 ARP-VA-PD
	37 ARR-AM		81 ARP-VA-PG
	38 ARR-ADC	Uso de combinaciones de cuatro representaciones	82 ADP-AM-AS-PD
	39 AM-PD		83 ADP-AM-AR-PD
	40 AM-PG		84 ADP-AFD-ARR-VA
	41 AM-PE		85 ARP-APO-PE-PD
	42AM-VA		
	43 AM-AR		

Como podemos observar hay una gran cantidad de estrategias diferentes (85), que han aparecido en las producciones de los sujetos con talento. Entre ellas podemos encontrar las que no utilizan ninguna representación externa (la respuesta en blanco), hasta las que muestran el empleo de un, dos, tres o cuatro procedimientos. Éstas últimas son bastante elaboradas y constituyen una característica de las producciones de niños con talento que no se ha localizado en las producciones de niños normales.

La tabla 6.5 presenta el tipo de combinación de procedimientos que ha aparecido en las estrategias utilizadas por cada sujeto en cada problema.

Tabla 6.5. ESTRATEGIAS UTILIZADAS POR SUJETO EN CADA PROBLEMA

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12
S1	49	6	26	25	26	0	79	5	65	0	5	5
S2	50	13	8	11	6	14	43	13	6	21	16	11
S3	44	26	80	80	3	20	74	13	66	20	54	39
S4	15	16	4	13	10	20	77	13	24	7	13	11
S5	14	5	4	13	6	20	2	13	70	21	13	11
S6	14	13	67	13	75	20	39	13	67	21	13	11
S7	9	9	68	13	35	13	2	13	68	7	13	11
S8	38	19	2	26	2	58	82	2	6	6	17	45
S9	37	9	69	13	36	61	39	13	24	28	13	37
S10	11	1	24	13	75	20	0	13	24	21	16	43
S11	84	0	81	44	27	6	2	13	81	31	0	11

S12	12	17	71	13	34	20	11	13	24	21	14	11
S13	12	17	4	13	41	20	0	9	24	21	14	11
S14	15	1	70	13	6	1	9	13	7	0	13	11
S15	60	16	69	13	34	20	74	13	23	20	17	11
S16	52	13	65	13	34	29	0	13	66	11	14	11
S17	36	18	24	13	26	21	43	13	6	21	18	11
S18	14	14	4	13	74	62	74	13	68	61	13	11
S19	10	53	4	10	63	21	39	10	24	21	17	11
S20	51	19	80	13	26	62	83	13	69	62	19	11
S21	51	0	30	13	27	29	73	13	68	0	0	11
S22	47	26	26	13	6	21	78	13	21	21	7	11
S23	14	1	68	13	26	20	78	13	81	11	14	11
S24	33	17	69	3	2	21	0	46	23	21	16	40
S25	12	7	4	11	6	20	32	13	68	21	13	11
S26	49	13	85	45	3	14	78	45	67	21	17	11
S27	14	1	68	13	43	20	0	13	29	5	13	11
S28	3	17	4	2	3	63	2	3	7	61	13	3
S29	14	19	24	13	35	59	48	13	24	21	20	11
S30	9	56	26	13	74	62	72	43	6	59	7	11

La tabla 6.5, de las estrategias utilizadas por los sujetos en cada problema, muestra la tendencia de los sujetos con talento a utilizar algunas de ellas en cierto tipo de problemas, por ejemplo la 13 (división partitiva) es propia del problema 4 y la 11 (multiplicación) es propia del problema 12.

Recordemos que el cuestionario PEM, tiene incluidos diversos tipos de problemas de estructura multiplicativa, es por ello que a continuación analizaremos las estrategias de los sujetos por grupos de problemas según las categorías previamente establecidas.

6.4.1. Problemas de números decimales

Los problemas identificados como P2 y P11 son los problemas multiplicativos con números decimales. Recordemos que el problema 2 tiene un índice de dificultad de 0,10 (valor límite entre lo altamente difícil y lo medianamente difícil); el problema 11 tiene un índice de dificultad de 0,07 (altamente difícil) y resulta ser el problema más difícil de todos los del cuestionario PEM.

La tabla extraída de la tabla general muestra el comportamiento de los sujetos con relación a los procedimientos empleados para su resolución.

Tabla 6.6. REPRESENTACIONES Y PROCEDIMIENTOS EN LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS DECIMALES

Representaciones	Procedimientos	Frecuencia de procedimientos por problema		Total por procedimiento	Total por tipo de representación
		P2	P11		
Representación Verbal	Analogía	1	1	2	9
	Aritmética	5	2	7	
Representación Pictórica	Dibujo	1	0	1	1
Representación aritmética	Resta	3	0	3	48
	Div.parti	4	10	14	
	Div.cuoti.	1	3	4	
	Comp.aditi.	6	8	14	
	Aprx.suce.	2	1	3	
	Proporc.	3	2	5	
	Redu. unid.	1	3	4	
	Otro proc.	1	0	1	
Resp. inmedi.		4	0	4	4
No responde		2	2	4	4

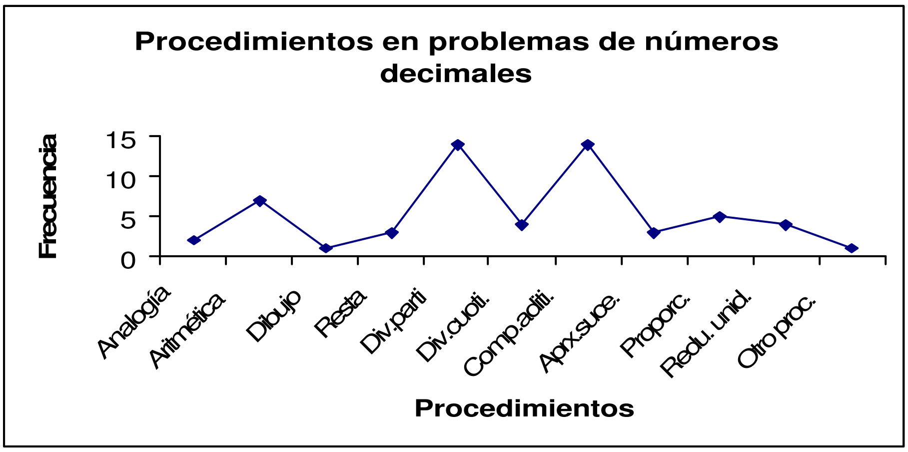


Figura 6.1. FRECUENCIA DE LOS PROCEDIMIENTOS EN LOS PROBLEMAS CON NÚMEROS DECIMALES

Como se observa en la tabla 6.6 y en la figura 6.1, hay un predominio de los procedimientos aritméticos, casi una ausencia total de procedimientos pictóricos y sólo 4 ausencias de respuesta, dos para cada problema, que es poco a pesar de la dificultad de ambos problemas. Los procedimientos aritméticos más empleados son la División Partitiva, 4 para el problema 2 y 10 para el problema 11 y la Compensación Aditiva, 6 para el problema número 2 y 8 para el problema número 11.

Sólo en seis casos, 5 sujetos emplean estrategias que combinan dos procedimientos; las estrategias de dos procedimientos son VA-ACA (3 veces), VA-AR (una vez), PD-AP (una vez) y VA-AAS (una vez).

Desde el punto de la efectividad, ya hemos indicado la dificultad de ambos problemas, los procedimientos más prácticos que resuelven el problema son la multiplicación (AM) para el problema 2 y la división (ADP) para el problema 11. La primera no ha sido empleada por los sujetos en ningún caso en el problema 2 y la segunda ha sido empleada nueve veces en el problema 11, 4 veces de manera correcta y 6 de manera incorrecta. En el caso del problema 2 han constituido procedimientos adecuados ACA en 3 ocasiones, AP en dos y VA, AAS, ARV y RI cada una en sólo un caso. En el caso del problema 11, además de las 4 veces que emplean RADP de manera correcta, emplea para resolver el problema de forma correcta VAN (una vez), ACA (dos veces), ARU (dos veces) y ADC (una vez).

En total los sujetos emplean 13 procedimientos diferentes para resolver los dos problemas de números decimales, 13 diferentes para el problema 2 y 9 para el 11; la gran dificultad que tienen ambos problemas o la no disposición de un procedimiento seguro de resolución promueve recursos variados en los sujetos en algunos casos de manera sorprendentemente acertada. Comentaremos casos distintos a los ya descritos anteriormente.

Problema 2

El sujeto 4 emplea el procedimiento ACA en el problema 2; para ello considera que 0,923 kilogramos de queso deben ser $ 6 y después trata de demostrar que su estimación es correcta dividiendo 0,923 por 6 con lo que determina que son 0,153 kg cuestan y 0,153 es el doble, aproximadamente de 0,077 y por tanto el precio es $ 5,99.

Problema 11

El sujeto 5 emplea el procedimiento ADP (división partitiva); en primer lugar divide 0,923 entre 6 para determinar el peso de queso por cada dólar; después comprueba que 6,5 es el resultado multiplicado 6,5 por 0,153.

El sujeto 6 emplea también ADP pero en este caso divide 6 entre 0,923. Lo interesante del procedimiento de resolución está en las transformaciones aritméticas que realiza para hacer la división.

El sujeto 13 emplea el procedimiento ADC (división cuotitiva); en este caso lo interesante del procedimiento está en el cambio de moneda que realiza; pasa dólares a pesos chilenos donde lógicamente se siente más cómo y evita el empleo de los decimales en las operaciones.

El sujeto 20 estable una relación de proporcionalidad con los datos del problema.

El sujeto 23 emplea el procedimiento ADC y puede considerarse imaginativo. Para ello divide 0,923 entre 6 con lo que determina la relación peso por cada dólar que es 0,153; como la mitad de este peso es precisamente lo que le falta a 0,923 para ser el kilogramo, será medio dólar lo que tiene que añadir.

6.4.2. Problemas de combinatoria

Los problemas identificados como P3 y P9 son los denominados problemas de combinatoria. En el primer paso del proceso de análisis se detectaron los siguientes procedimientos de resolución: adición/resta repetida, enumeración de pares ordenados, diagrama de árbol, representación pictórica, regla del producto, combinaciones, otras estrategias y respuesta directa.

En la tabla 6.7 extraída de la tabla general se muestran los procedimientos empleados por los sujetos en estos dos problemas.

Tabla 6.7. REPRESENTACIÓN Y PROCEDIMIENTOS EN PROBLEMAS DE COMBINATORIA

Representación	Procedimiento	Problemas P3	Problemas P9	Total problemas	Total Representación
	Aritmética	8	9	17	
Represen. Pictórica	Dibujo	7	4	11	**33**
	Gráfico	4	6	10	
	Esquema	11	1	12	
Represen. Aritmética	Suma	2	0	2	**45**
	Resta reite.	1	0	1	
	Pares ord.	3	0	3	
	Combin.	0	6	6	
	Regla prod.	16	15	31	
	Otro proc.	0	3	3	
Resp. inmedi.		0	1	1	1

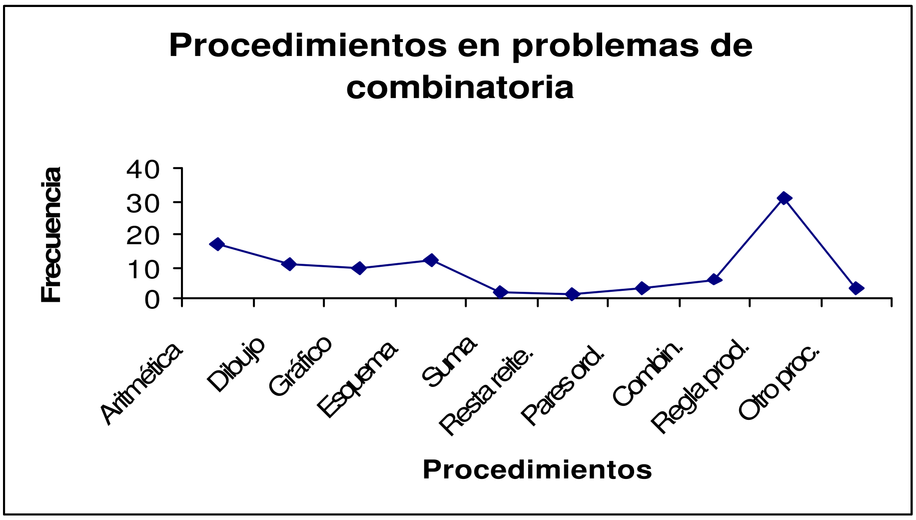


Figura 6.2. FRECUENCIA DE LOS PROCEDIMIENTOS EN PROBLEMAS DE COMBINATORIA

Aún siendo los problemas 3 y 9 notablemente diferentes en cuanto a su nivel de dificultad hay mucha similitud en los procedimientos para resolverlos como puede observarse en la tabla 6.7.

En este tipo de problemas, la representación aritmética con 45 procedimientos es el sistema de representación más empleado; tienen también un peso importante los otros dos tipos de representaciones, la verbal con 17 procedimientos y la pictórica con 33. En el primer caso es el procedimiento ARP (regla del producto) el más empleado; este procedimiento junto a los procedimientos AP (enumeración de pares ordenados) y AC (Combinatoria) surgen en su mayoría de la resolución de estos problemas. Para el sistema de representación verbal, el denominado VA es el único utilizado; los procedimientos pictóricos cubren todas las variantes en ambos problemas de manera equilibrada y constituyen el 36 % de los procedimientos pictóricos empleados en la resolución de todos los problemas, lo que pone de manifiesto un énfasis especial en este sistema de representación en la resolución de este tipo de problemas; hay que indicar la coincidencia con el tratamiento que suelen tener en la enseñanza los problemas de combinatoria donde los planteamientos para la resolución se fundamentan también en gráficos y esquemas como los diagramas cartesiano y de árbol; no obstante las resoluciones elaboradas por los sujetos no están asociadas a este tratamiento en cuanto que la enseñanza no incluye este tipo de problemas dentro de los niveles superados por los alumnos; más bien hay que atribuirlo a la capacidad que tienen los sujetos de movilizar este tipo de recursos. Hay que hacer notar el empleo de esquemas como procedimiento de resolución en cuanto muestra una mayor capacidad de abstracción que las otras dos formas de representación pictórica.

Hay diferencias notables también entre los dos problemas, es de destacar las diferencias en la representación pictórica por esquema (PE) que es empleada en 11 ocasiones en el problema 3 y sólo 1 en el problema 9; por el contrario el procedimiento AC es empleado en 6 ocasiones en el problema 9 y no es empleado en ninguna ocasión en el problema 3.

Desde la perspectiva de las estrategias, en el problema 3:

- emplean un único procedimiento para resolver el problema en 11 ocasiones 7 de las cuales son pictóricas y 4 aritméticas;

- emplean dos procedimientos para resolver el problema 14 sujetos, 9 de los cuales combinan pictóricas con aritméticas, 3 sujetos combinan verbales con pictóricas, 1 verbal con aritmética y 1 aritmética con aritmética;
- emplean 3 procedimientos para resolver el problema 3 sujetos que combinan los tres tipos de representaciones: verbal, pictórica y aritmética.
- emplea cuatro procedimientos un sólo sujeto.

Para el problema 9:

- emplean un único procedimiento 17 sujetos 13 de los cuales son aritméticos y 4 verbales.
- emplean dos procedimientos combinados 11 sujetos de los cuales 9 combinan pictóricos con aritméticos y 2 verbales y aritméticos.
- emplean tres tipos de procedimientos 2 sujetos.

La tabla 6.8 resume los datos anteriores

Tabla 6.8. FRECUENCIA DEL USO DE DISTINTAS REPRESENTACIONES

Estrategia	Verbal (V)	Pictórica (P)	Aritmética (A)	V-P	V-A	P-A	V-P-A
Frecuencia	4	7	18	3	3	9	5

Desde la perspectiva de la eficacia de procedimientos y estrategias, para el problema 3 se muestran eficaces la mayoría de los procedimientos; por el contrario, en el problema 9, sólo resuelven el problema correctamente 4 sujetos: tres de ellos emplea dos procedimientos combinados, pictóricos y aritméticos y el otro niño emplea un procedimiento aritmético.

6.4.3. Problemas de comparación

Los problemas de comparación multiplicativa incluidos en el cuestionario PEM son los identificados como P1, P4, P8 y P12; como se comentó anteriormente tienen un bajo nivel de dificultad y la gran mayoría de los sujetos los han resuelto correctamente.

La tabla 6.9 extraída de la tabla general muestra las frecuencias de uso de los distintos procedimientos en este tipo de problemas.

Tabla 6.9. FRECUENCIA DE LAS REPRESENTACIONES Y PROCEDIMIENTOS PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

Representación	Procedim.	P1	P4	P8	P12	Totales	
Represen. Verbal	Analogía	0	1	1	2	4	**22**
	Aritmética	5	3	1	1	10	
Represen. Pictórica	Dibujo	2	3	2	1	8	
	Gráfico	2	2	2	2	8	**16**
	Resta	7	0	1	0	8	
	Multipli	0	2	1	26	29	
	Div.parti	2	21	23	0	46	
	Div.cuoti.	11	0	0	0	11	
Representación Aritmética	Comp.aditi	1	0	0	0	1	
	Proporc.	1	0	0	0	1	**116**
	Resta reite.	5	1	1	1	8	
	Fac. des.	5	1	0	0	6	
	Divi.desco.	5	0	0	0	5	
	Regla prod.	0	0	1	0	1	

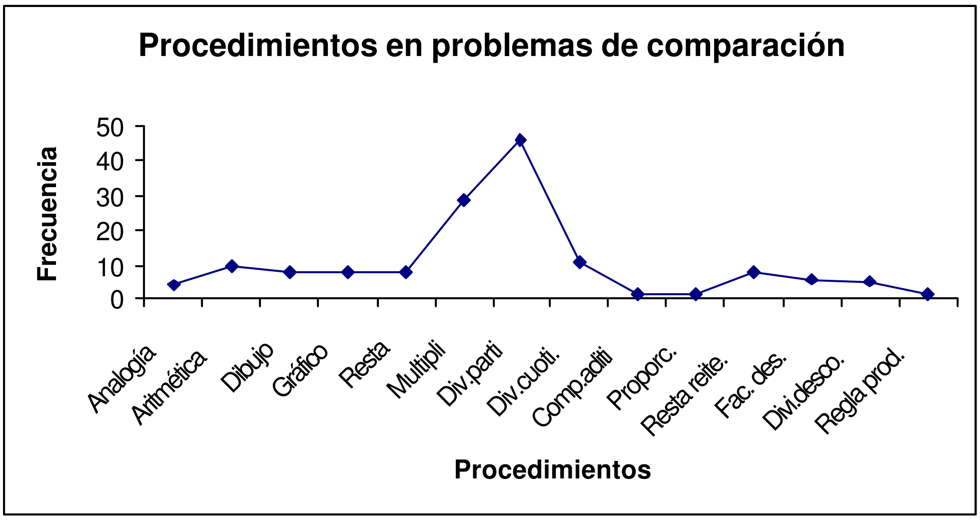


Figura 6.3. FRECUENCIA DE LOS PROCEDIMIENTOS EN PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

En la tabla 6.9 se muestra que los tres tipos de procedimientos según representación están presentes; los más frecuentes son los de Representación Aritmética con 116 casos; se da también cierto nivel de uso de procedimientos de Representación Verbal con 22 casos y menos los de carácter Pictórico con sólo 16 casos; el hecho de que este tipo de problemas sean fáciles para los sujetos les lleva al empleo directo de las operaciones aritméticas por la seguridad que parecen tener los sujetos en su resolución. Dentro de la Representación Aritmética los procedimientos son los propios de estos problemas que son AM, ADP y ADC aunque pueda haber algunos que suponen cierta originalidad en la resolución y que describimos más adelante. Diferenciando problemas, el problema uno (P1), presenta mayor variabilidad de procedimientos; los problemas P4, P8 y P12 tienen resoluciones centradas fundamentalmente en un procedimiento.

Desde la perspectiva de las estrategias restringiéndonos a las combinaciones básicas el recuento es el que aparece en la tabla 6.10.

Tabla 6.10. FRECUENCIA DEL USO DE DISTINTAS REPRESENTACIONES

Estrategia	Verbal (V)	Pictórica (P)	Aritmética (A)	V-P	V-A	P-A	V-P-A
Frecuencia	2	7	93	2	7	8	1

Como en el caso de los procedimientos, el problema P1 es el que presenta mayor variabilidad y uso de procedimientos combinados para su resolución; el resto de los problemas presentan resoluciones centradas fundamentalmente en un único procedimiento.

Por lo que respecta a la eficacia de los procedimientos y estrategias ya hemos referido que en su gran mayoría los problemas están bien resueltos y, por tanto, las estrategias son eficaces; en el problema P1 es donde puede indicarse que el rendimiento en los procedimientos y estrategias empleados por los sujetos es menor que el de los otros tres problemas.

6.4.4. Problemas de escala

Los problemas de escala del cuestionario PEM son los identificados como P6 y P10. En un primer proceso de análisis se detectaron, como procedimientos propios de resolución, los siguientes: Reducción a la unidad, uso de la proporcionalidad, empleo de series, división cuotitiva, multiplicación y otras estrategias.

En la tabla 6.11 se recogen la frecuencia de los procedimientos empleados por los sujetos en la resolución de ambos problemas resultantes del análisis final.

Tabla 6.11. FRECUENCIAS DE REPRESENTACIONES Y PROCEDIMIENTOS PROBLEMAS DE ESCALA

Representación	Procedimiento	Problemas		Total	Total
		P6	P10		
Represen. Verbal	Analogía	0	3	3	15
	Aritmética	8	4	12	
Represen. Pictórica	Dibujo	1	0	1	7
	Gráfico	3	3	6	
	Esquema	0	0	0	
Represen. Aritmética	Suma	0	1	1	50
	Resta	0	0	0	
	Multipli	0	2	2	
	Div.parti	1	0	1	
	Div.cuoti.	2	0	2	
	Comp.aditi	0	0	0	
	Aprx.suce.	0	0	0	
	Proporc.	1	1	2	
	Redu. unid.	16	14	30	
	Resta reite.	1	0	1	
	Series	5	4	9	
	Fac. des.	0	0	0	
	Divi.desco.	0	0	0	
	Pares ord.	0	0	0	
	Combin.	0	0	0	
	Regla proa.	0	0	0	
	Otro proc.	1	1	2	
Resp. inmedi.		1	0	1	1
No responde		1	5	6	6

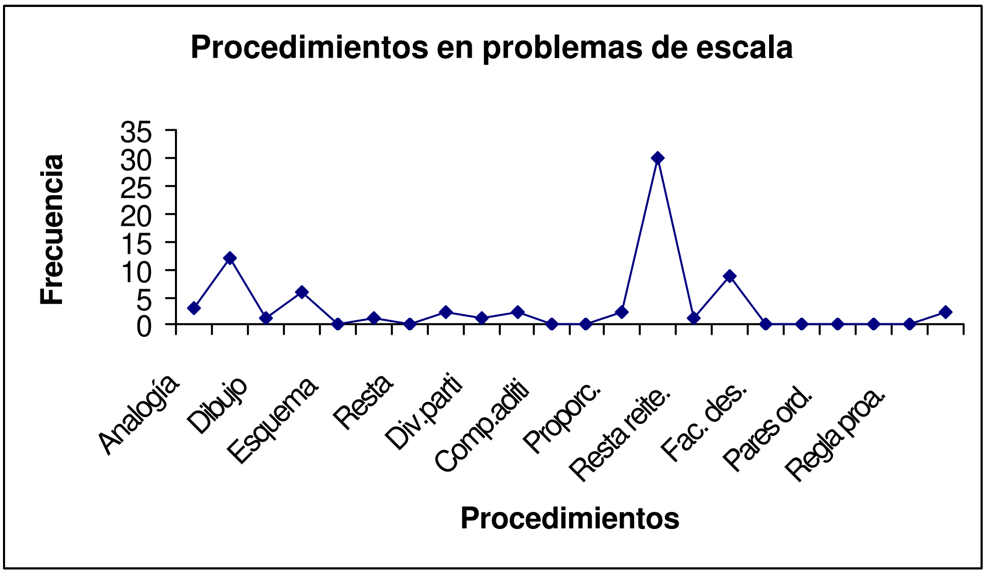


Figura 6.4. FRECUENCIA DE LOS PROCEDIMIENTOS EN PROBLEMAS DE ESCALA

En la tabla 6.11 se aprecia que la mayoría de los procedimientos, 50, pertenecen a la categoría de Representación Aritmética; 15 a la Verbal y sólo 7 a la Pictórica, seguramente porque ambos problemas incluyen un mapa en el enunciado; destacan 6 NR, ausencias de respuesta (casi el 50% del total de NR), 5 en el problema 10 lo que indica que hay un número importante de sujetos (17 %) que no han sido capaces de abordar el problema. Dentro de los procedimientos aritméticos, el más empleado en ambos problemas es el de reducción a la unidad (ARU); también es empleado con frecuencia relativamente alta AS (series).

En cuanto a estrategias en las que se combinan los procedimientos en la tabla siguiente presentamos las empleadas por los sujetos con las frecuencias de uso.

Tabla 6.12. FRECUENCIA DEL USO DE DISTINTAS REPRESENTACIONES

Estrategia	Verbal (V)	Pictórica (P)	Aritmética (A)	V-P	V-A	P-A	V-P-A
Frecuencia	3	0	34	0	9	7	0

En la tabla se aprecia que las estrategias en general constan de un sólo procedimiento que es aritmético; llegan a combinarse procedimientos en 9 ocasiones para V-A y 7 para P-A.

Se muestra más eficaz el procedimiento ARU que en algunas ocasiones se combina de manera acertada con otros procedimientos no aritméticos.

6.4.5. Problemas complejos de estructura multiplicativa

El cuestionario PEM contiene dos problemas con características especiales, a los que hemos denominado "problemas complejos"; son el problema identificado como P5 (problema del caracol) y P7 (problema de área y perímetro); ambos problemas tampoco tienen unas características comunes que permitan un tratamiento conjunto por lo que los consideramos en algunos aspectos de manera diferenciada.

La tabla siguiente es un extracto de la tabla general limitado a los dos problemas complejos.

Tabla 6.13. FRECUENCIAS DE REPRESENTACIONES Y PROCEDIMIENTOS PROBLEMAS COMPLEJOS

Representación	Procedim.	Problemas		Total problemas	Total representación
		P5	P7		
	Aritmética	17	1	18	
Representación Pictórica	Dibujo	7	17	24	34
	Comp.adit	0	0	9	
	Aprx.suce.	0	0	1	
Representación Aritmética	Suma	0	3	3	61
	Resta	8	15	23	
	Multipli	6	14	20	
	Div.parti	0	8	8	
	Div.cuoti.	0	1	1	
	Proporc.	0	1	1	
	Resta.reite	4	0	4	
	Series	1	0	1	
No responde		0	5	**5**	5

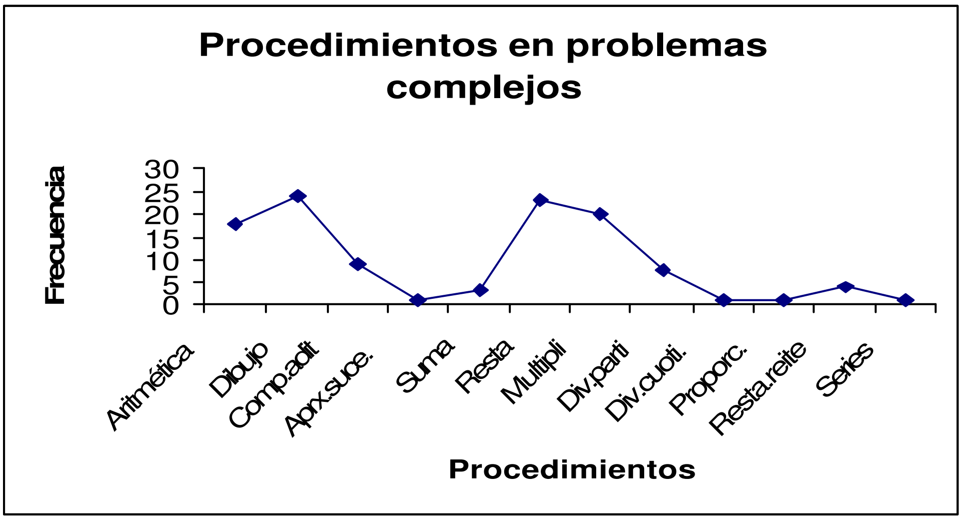


Figura 6.5. FRECUENCIA DE LOS PROCEDIMIENTOS EN LOS PROBLEMAS COMPLEJOS

Como se observa en la tabla 6.13, los procedimientos mayoritarios en la resolución de estos problemas son de representación aritmética, aunque también se emplean los otros dos sistemas de representación de forma destacada; emplean el Verbal 18 veces pues los sujetos requieren, en estos casos, argumentar sus resoluciones y el Pictórico 34 veces pues, en estos, precisan del empleo de gráficos o dibujos. En el caso de la Representación Aritmética, la resta (AR) es la operación más empleada seguida de la multiplicación (AM); en la caso de la Representación Verbal, es la aritmética (VA) la única empleada y en el caso de la Pictórica, el dibujo (PD) es el más empleado con 24 procedimientos seguido del gráfico (PG) con 9; el uso del esquema (PE) es testimonial.

Desde la perspectiva de las estrategias en la tabla siguiente presentamos un recuento de las mismas.

Tabla 6.14. FRECUENCIA DEL USO DE DISTINTAS REPRESENTACIONES

Estrategia	Verbal (V)	Pictórica (P)	Aritmética (A)	V-P	V-A	P-A	V-P-A
Frecuencia	5	9	10	6	6	18	1

Como se observa un gran número de sujetos emplean un sólo procedimiento para resolver los problemas, prioritariamente aritmético o pictórico; estos dos procedimientos también los combinan los sujetos de manera prioritaria para resolver los problemas.

6.5. Estrategias especiales

Independientemente de los procedimientos matemáticos que dan lugar a las estrategias que emplean los sujetos en las resoluciones que han sido definidas y caracterizadas anteriormente, encontramos en algunas estrategias de solución de los sujetos con talento indicios o elementos que son poco habituales, originales e ingeniosos que hacen que las consideremos como especiales, y que en cierta medida son debidas a las características distintivas de los sujetos con talento. Algunos de estos indicios ya han sido identificados en investigaciones previas y recogidas en la literatura como es el caso de la *perseverancia en la resolución* (Renzulli, 1999) que también muestran los sujetos de nuestra investigación que dejan sin intentar resolver sólo el 3,6 % de los problemas.

Los que hemos encontrado en esta investigación son los siguientes:

1. **Comprobación del resultado**

   Procedimiento mediante el cual los sujetos comprueban la validez del resultado obtenido mediante otro procedimiento de resolución. En algunos de los problemas, en donde los sujetos se sienten cómodos porque les resultan más sencillos, en la resolución establecen algún procedimiento de verificación. En general son procedimientos de resolución aritméticos cuyo resultado es también comprobado con procedimientos aritméticos; la división mediante la multiplicación y la multiplicación mediante la división. La *inversión de procesos matemáticos* con facilidad, detectada por Krutetskii (1969), tiene relación con este procedimiento.

   Por ejemplo, el sujeto 12 en el problema 4 después de resolver (180:3 = 60cm) añade un apartado incluso recuadrado y con el título de Verificación en el que comprueba la validez de su resultado ya que 60x3 = 180cm.

2. Varios procedimientos independientes de resolución

Como en el caso anterior, ante determinados problemas que son los que les resultan más sencillos, los sujetos, articulan dos o más procedimientos diferentes e independientes para la resolución del problema. En unos casos los diferentes procedimientos pertenecen al mismo sistema de representación y en otros los resuelven con dos sistemas de representación diferentes.

Por ejemplo, el sujeto 11 resuelve el problema 1 mediante tres procedimientos, en este caso aritméticos: 60x3=180; 180:3=60; y, 60+60+60=180.

En el caso del sujeto 9 resuelve de tres formas aritméticas (2x6=12; 6+6=12; y; 2+2+2+2+2=12 y uno pictórico, un gráfico.

3. Multiplicidad de pasos bien organizados en la resolución

En la resolución de los problemas, en algunos casos, los sujetos elaboran estrategias que constan de gran cantidad de procedimientos y pasos bien articulados y argumentados en donde se combinan los diferentes sistemas de representación, verbal, aritmético y pictórico. Suelen emplearlas ante problemas donde la falta de dominio de la estructura usual de resolución les lleva a procedimientos variados pero válidos y bien organizados que articulan una buena estrategia de resolución. Estas formas de resolución tienen relación con algunas de las características de los sujetos con talento recopiladas por Greenes (1981) entre las cuales se encuentran la *flexibilidad en el manejo de datos y la habilidad para su organización*.

Por ejemplo, el sujeto 17 en el problema 2 resuelve con los siguientes pasos:

a) 6,5:10 = 0,65; b) 6,5-0,65 = 5,85; c) 0,65:4 = 0,1625;

d) 5,85+0,1625= 5,6925.

4. Formas originales de razonamiento proporcional

En algunos problemas hay sujetos que, al no disponer de la estructura matemática más usual que les permite resolver el problema, han empleado procedimientos poco habituales e ingeniosos de razonamiento proporcional. Suelen ser procedimientos aritméticos, como el empleo de porcentajes, fracciones, reducción a la unidad, cambios de moneda aunque algunos son también pictóricos. Estas formas originales de proceder tienen relación con algunas de las características que Greenes (1981) otorga a los sujetos con talento matemático, como la *agilidad mental, riqueza de ideas y originalidad de interpretación*.

Vemos algunos ejemplos:

Aritméticos

Paso a porcentajes

El sujeto 30 en el problema 2:

el peso de 0,923 kg es como el 90% más el 2% del kg y estos porcentajes del precio le proporcionan el resultado.

Paso a fracciones

El sujeto 11 en el problema 6:

para evitar el empleo de decimales en las operaciones y para determinar la distancia real de 2,5cm en el plano hace mitades de manera sucesiva: 8:4000000; 4:2000000; 2:1000000; 1:500000; 0.5:250000; luego 2.5 serán 1000000+250000 = 1250000cm

Cambio de moneda

El sujeto 13 en el problema 2 realiza un cambio de dólares a pesos chilenos donde se encuentra más cómodo para la resolución.

Reducción a la unidad

Por ejemplo, el sujeto 15 en el problema 1 establece la relación, 60cm = 1m entonces 180cm = 3m y por tanto 3m : 1m = 3 veces.

Otros casos aritméticos

Otros sujetos emplean estrategias de razonamiento proporcional aritméticas sofisticadas que no encuadramos en las tipologías anteriores. Por ejemplo, el sujeto 11 en el problema 6, para determinar la distancia de Quillota a Limache que en el dibujo son 3 cm razona de la manera siguiente:

“Como dice que 8 cm. En el dibujo son 4000000 de cm reales, me di cuenta que la mitad de 8 es 4 igual como el primer número de 4000000, entonces como me salio 3 la mitad es 1.5 y como lo tenía que hacer en millones es 1500000 cm”.

Pictóricos

Escala gráfica

Por ejemplo, el sujeto 9 en el problema 6 elabora una escala gráfica que le permite visualizar el resultado.

5. Formas de expresión escrita elaborada en sus justificaciones

Algunos sujetos hacen un uso del sistema de representación verbal de una forma muy bien estructurada para resolver, explicar o justificar sus estrategias haciéndolo de una manera eficiente y elegante; esta característica es también identificada por Benito (1996, 2000); Wilson y Brigss (2002) también las identifican refiriendo que estos niños son capaces de verbalizar las estrategias que utilizan.

Por ejemplo, el sujeto 1 en el problema 3 explica: "*Con seis camisetas y 2 pantalones puedo vestirme de 14 forma diferentes porque puedo ponerme 1 pantalón y 1 de las camisetas, cambiarme cada día pero con el mismo pantalón y después ponerme las mismas camisetas pero con el otro pantalón*"

6. Formas de estructuración matemática avanzada en sus resoluciones

En el caso de algunos sujetos, la resolución tiene una estructuración matemática bien organizada que manifiesta un gran dominio de los conceptos y de las estrategias de resolución. El sistema de representación suele parecerse al que emplean los matemáticos, es conciso y riguroso, en este caso suele ser el aritmético aunque en algunas ocasiones aparecen atisbos de lenguaje algebraico. Esta característica puede relacionarse con *resolver el problema de una manera eficiente y elegante* ya referida y la detectada por Span y Overtoom-Corsmit (1986) que indica que los sujetos con talento *resuelven mejor y más rápido* que los niños promedio.

Así, el sujeto 24 en le problema 11 establece 5 pasos para la resolución que además enumera.

Paso 1: 1 dólar = 0,153 kilos de queso

Paso 2: 153:2=76

Paso 3: 0,923 = 6 dólares

Paso 4: 76=1/2 dólar

Paso 5: 923+76= 0,999 aproximando, 1,000 kilos = 6 dólares ½.

Otro ejemplo relacionado con el empleo del lenguaje algebraico, el sujeto 6 en el problema 8 indica: *Tatiana =180; Pablo =X; X=180:3 = 60.*

7. Resolución basada en resultados anteriores

Como algunos de los problemas del cuestionario pertenecen al mismo tipo e incluso tienen los datos invertidos, a pesar de que los problemas se dividen en dos partes y se realizan en sesiones distanciadas en el tiempo, algunos sujetos manifiestan un aprendizaje de la situación y del problema que recuerdan y que aplican a los otros problemas del mismo tipo. Krutetskii (1969) refiere también esta característica.

Por ejemplo, el sujeto 17 en el problema 10 argumenta *esto es el inverso al problema 6 que ya lo habíamos hecho*.

8. Resolución usual ante problema difícil

Algunos problemas del cuestionario son bastante difíciles para los sujetos de la muestra, como ya indicamos anteriormente, y no cabe esperar una resolución que podríamos considerar usual en estos sujetos por el nivel matemático de su edad y curso; no obstante hay algunos sujetos de la muestran que emplean formas usuales de resolución; en estos casos predomina el sistema de representación aritmético.

Por ejemplo, el sujeto 24 en el problema 10 explica:

"1º Medí de Quillota a Limache = 2,5 cm.

2º Dividí 1500000 cm y 2,5 cm

3º Me dio 600000 cm

4º Luego transformé 2,5 cm en 1 cm

5º Y me dio 600000 = 1cm"

9. Empleo con facilidad de diferentes sistemas de representación

Los sujetos muestran gran habilidad en el manejo o combinación de los diferentes sistemas de representación que se han referido con anterioridad (pictórico, verbal y aritmético) y que han permitido caracterizar las estrategias.

Por ejemplo, el sujeto 26 en el problema 5 representa en un sistema de ejes coordenados la ascensión del caracol (en el de abscisas los días y en el de ordenadas los metros) saliendo una gráfica que le permite visualizar la solución.

En síntesis, las estrategias especiales contienen alguna de los siguientes indicios o características, detectadas en las producciones de los niños con talento en respuesta a los problemas incluidos en el cuestionario PEM.

1) Comprobación del resultado
2) Varios procedimientos independientes de resolución
3) Multiplicidad de pasos bien organizados en la resolución
4) Formas originales de razonamiento proporcional
5) Formas de expresión escrita elaborada en sus justificaciones
6) Formas de estructuración matemática avanzada en sus resoluciones
7) Resolución basada en resultados anteriores
8) Resolución usual ante problema difícil
9) Empleo con facilidad de diferentes sistemas de representación.

6.6. Estrategias especiales y problemas

Analizamos a continuación la asociación entre los distintos tipos de problemas y las estrategias especiales empleadas. En la tabla 6.15 se presenta la frecuencia con la que han aparecido las estrategias especiales en cada problema.

Tabla 6.15. FRECUENCIA DE APARICIÓN DE LAS ESTRATEGIAS ESPECIALES POR CADA PROBLEMA

	Problema												
Estrategia especial	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	Total
1	1	-	-	6	-	-	-	2	-	-	-	1	10
2	3	1	1	1	1	-	-	1	-	-	-	2	10
3	-	3	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	4
4	1	6	-	1	-	10	-	-	-	2	6	-	26
5	1	1	4	2	5	5	1	1	1	2	-	-	23
6	1	2	-	-	1	1	3	1	1	1	2	1	14
7	-	-	-	1	-	-	-	-	-	6	1	1	9
8	-	1	1	-	-	2	1	-	3	2	1	-	11
9	3	1	19	5	11	1	1	4	2	-	-	3	50

La estrategia especial que más ha aparecido es la 9, que ha aparecido en 10 de los 12 problemas. Así pues, los sujetos con talento emplean con facilidad diferentes sistemas de representación.

Le siguen las estrategias especiales 4 y 5 en las que se ponen de manifiesto el empleo de estrategias originales de razonamiento proporcional y justificaciones de sus respuestas en formal verbal.

6.6.1. Problemas de comparación

En los problemas de Comparación Multiplicativa, P1, P4, P8 y P12, los sujetos emplean la mayor parte de las estrategias que hemos denominado especiales. La tabla 6.16 recoge la frecuencia de aparición de las estrategias especiales en los problemas de comparación multiplicativa.

Tabla 6.16. ESTRATEGIAS ESPECIALES EN PROBLEMAS DE COMPARACIÓN

	P1	P4	P8	P12	Total
1	1	6	2	1	10
2	3	1	1	2	7
3	-	-	-	-	-
4	1	1	-	-	2
5	1	2	1	-	4
6	1	-	1	1	3
7	-	1	-	1	2
8	-	-	-	-	
9	3	5	4	3	15
Total	10	16	9	8	43

Destacan como más frecuentes la 1, la 2 y la 9 ya que la facilidad que representan para estos sujetos los problemas de comparación hace que los sujetos se permitan comprobar el resultado, resolver de varias formas diferentes el mismo problema y emplear con soltura diferentes tipos de representación. Le siguen en frecuencia de aparición las estrategias 5 y 6 respectivamente; es también la facilidad de este tipo de problemas la que permite a los sujetos justificar de forma bien elaborada sus resoluciones o resolver el problema con formas matemáticas avanzadas.

6.6.2. Problemas con decimales

La tabla 6.17 recoge las frecuencias de uso de las estrategias especiales en los problemas de números decimales.

Tabla 6.17. ESTRATEGIAS ESPECIALES EN PROBLEMAS DE DECIMALES

	P2	P11	Total
1	-	-	-
2	1	-	1
3	3	1	4
4	6	6	12
5	1	-	1
6	2	2	4
7	-	1	1
8	1	1	2
9	1	-	1
Total	15	11	26

En este caso los sujetos también emplean casi la totalidad de los procedimientos especiales aunque el más repetido es el 4 referida al empleo de 'formas originales de razonamiento proporcional"; estos problemas han resultado ser en conjunto los más difíciles para los sujetos, que comprenden la estructura matemática y no acertando con la resolución más económica (multiplicar o dividir), elaboran estrategias de proporcionalidad como es el empleo de porcentajes, fracciones y la representación gráfica, más complejas que las usuales. En este mismo sentido pueden justificarse el empleo de los procedimientos 3 (multiplicidad de pasos bien organizados) y el 6 (formas de estructuración matemática avanzada) ambos con frecuencia 4.

6.6.3. Problemas de combinatoria

La tabla 6.18 recoge la frecuencia con la que aparecen las estrategias especiales en los problemas de combinatoria.

Tabla 6.18. ESTRATEGIAS ESPECIALES EN PROBLEMAS DE COMBINATORIA

	P3	P9	Total
1	-	-	-
2	1	-	1
3	-	-	-
4	-	-	-
5	4	1	5
6	-	1	1

7	-	-	-
8	1	3	4
9	19	2	21
Total	25	7	32

En el caso de los problemas de combinatoria la estrategia especial más utilizada es la 10, 'empleo con facilidad de diferentes sistemas de representación'; especialmente en el problema 3 que es el que ha resultado más fácil para los sujetos. Emplean todos los recursos matemáticos disponibles que, combinados de forma adecuada, les permiten llegar a la solución; la representación pictórica combinada con la verbal y aritmética es lo más usual en la resolución.

También, especialmente para el problema 3, presentan unas justificaciones bien elaboradas de su resolución y, para el problema 9, de una gran dificultad. Sorprende la resolución usual del problema por tres de los sujetos.

6.6.4. Problemas de escala

La tabla 6.19 recoge la frecuencia de las estrategias especiales utilizadas por los sujetos con talento en la resolución de los problemas de escala.

Tabla 6.19. ESTRATEGIAS ESPECIALES EN PROBLEMAS DE ESCALA

	P6	P10	Total
1	-	-	-
2	-	-	-
3	-	-	-
4	10	2	12
5	5	2	7
6	1	1	2
7	-	6	6
8	2	2	4
9	1	-	1
Total	19	13	32

En los problemas de escala, la estrategia especial más utilizada es la 4, es decir, los sujetos emplean 'formas originales de razonamiento proporcional' en unos casos aritméticas y en otras gráficas, especialmente en el problema 6. También emplean con frecuencia 7 el procedimiento 5, es decir justifican de manera bien elaborada sus resoluciones; en el problema 10, por ser el segundo en la realización, emplean con cierta frecuencia la resolución basada en lo aprendido en el problema 6.

6.6.5. Problemas complejos

La tabla 6.20 recoge la frecuencia de las estrategias especiales utilizadas por los sujetos con talento en la resolución de los problemas de escala.

Tabla 6.20. ESTRATEGIAS ESPECIALES EN PROBLEMAS COMPLEJOS

	P5	P7	Total
1	-	-	-
2	1	-	1
3	-	-	-
4	-	-	-
5	5	1	6
6	1	3	4
7	-	-	-
8	-	1	1
9	11	1	12
Total	18	6	24

Destacamos en la tabla de frecuencias que en el problema 5 se emplea el procedimiento 10; los sujetos combinan con facilidad diferentes sistemas de representación para resolver el problema; también en este problema especialmente justifican de manera bien elaborada sus resoluciones.

6.7. Estrategias especiales por sujeto

Considerando las estrategias especiales de forma conjunta sin distinguir problemas, presentamos una tabla con la frecuencia de uso de estas estrategias por sujetos en la que se incluyen el total de estrategias especiales distintas empleadas por cada sujeto (Total 1) y el total de estrategias especiales empleadas (Total 2); se añade también el número de aciertos de cada sujeto.

Tabla 6.21. FRECUENCIA DE CADA ESTRATEGIA ESPECIAL POR SUJETO

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	Total1	Total2	Aciertos	Raven
S1					6		3		3	3	12	7	52
S2						1				1	1	3	48
S3	1	1			2		1		2	5	7	8	48
S4		1	1						2	3	4	8	52
S5				2					1	2	3	8	53
S6					2	4		1	1	4	8	9	49
S7										0	0	4	50
S8		2		2					5	3	9	7	54
S9		3		2					1	3	6	6	47
S10										0	0	7	49
S11		1		1	3	2		1	1	6	9	5	49
S12	1				1	1			1	4	4	7	47
S13				2					1	2	3	6	47
S14	2									1	2	5	50
S15	3		1	3	2				1	5	10	9	57
S16									2	1	2	6	49
S17				3	1		1		1	4	6	7	47
S18					1			3	1	3	5	10	52
S19				1			1		2	3	4	8	50
S20					3	1	1	2	1	5	8	9	49
S21	1			1		1			2	4	5	7	49
S22	1			2		1	1		1	6	7	6	52
S23										0	0	8	55
S24		1	1	2	1	1		1	6	6	12	7	50
S25								1	1	2	2	8	53
S26		1			1			1	6	4	9	8	49
S27						1	1			2	2	8	49
S28						1			6	2	7	7	47
S29				2						1	2	7	49
S30			1	3		2			1	4	7	7	51

La tabla anterior nos permite identificar distintos tipos de sujetos:

Tipo 1: sujetos que tienen gran cantidad de aciertos y también gran cantidad de estrategias especiales.
Tipo 2: sujetos que tienen gran cantidad de aciertos y poca cantidad de estrategias especiales empleadas.
Tipo 3: sujetos con pocos aciertos y muchas estrategias especiales.
Tipo 4: sujetos con pocos aciertos y pocas estrategias especiales.

Los cuatro cuadrantes de la tabla 6.22 representan la relación entre el número de aciertos de los sujetos y el número de estrategias especiales; en el eje de las abscisas representamos el número de aciertos en la resolución de los problemas y en el de las ordenadas el número de estrategias especiales empleadas.

Tabla 6.22. NÚMERO DE ESTRATEGIAS ESPECIALES EMPLEADAS EN FUNCIÓN DEL NÚMERO DE ACIERTOS EN LOS PROBLEMAS DEL CUESTIONARIO PEM

13							S24					
12					S1							
11												
10									S15			
9					S11			S26				
8									S6 S20			
7							S8 S28 S30	S3				
6						S9 S22	S17					
5							S21			S18		
4							S12	S4 S19				
3						S13		S5				
2					S14	S16	S29	S25 S27				
1			S2									
0				S7			S10	S23				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**

Los sujetos del Tipo 1 se corresponden con el cuadrante superior derecha; el más destacado sería el sujeto 15; estos sujetos emplean todo su potencial matemático en resolver los problemas y con ello obtiene buen rendimiento.

Los sujetos de Tipo 2 pertenecientes al cuadrante inferior derecho como el caso del sujeto 23 emplean modos de resolución usuales para su nivel; obtienen un rendimiento aceptable sin necesidad del empleo de procedimientos especiales de resolución.

Los sujetos de Tipo 3 pertenecen al cuadrante superior izquierda como es el caso del sujeto 1; realizan un gran esfuerzo en la resolución empleando distintos tipos de estrategias y obtienen un bajo rendimiento; debe tenerse en cuenta además que el sujeto 1 sólo emplea tres procedimientos especiales distintos.

Por último, los sujetos de Tipo 4, pertenecen a la parte inferior izquierda disponen de menos recursos de resolución y también tienen menores rendimientos; en este caso se encuentra los sujetos 2 y 7.

Otra perspectiva de análisis nos la da la columna de sujetos con rendimientos iguales; en el caso de los sujetos que tienen 7 aciertos, valor que más se repite, se presentan una variedad de sujetos respecto a la cantidad de procedimientos especiales utilizados; el sujeto 10 no emplea ningún procedimiento especial y el sujeto 24 utiliza 13; el resto de los sujetos con este rendimiento se concentran en torno a 6 ó 7 procedimientos especiales empleados; esta columna y también la 5, 6 y 8 manifiestan distribuciones que muestran variedad de comportamientos en cuanto al empleo de procedimientos especiales teniendo un mismo rendimiento lo que subrayaría la característica detectada por Villarraga (2002) que indica que estos sujetos presentan 'diversidad de esquemas de conocimiento' y por tanto diversidad de formas de resolución.

Capítulo 7

Análisis de Errores

7.1. Introducción

En el capítulo anterior se han recogido las estrategias utilizadas por los sujetos con talento en la resolución de los problemas empleados en el estudio. Las estrategias proporcionan información sobre la forma en la que los sujetos han procedido para resolver el problema, es decir, sobre sus procesos de pensamiento. Para completar la información sobre el pensamiento de los sujetos con talento en resolución de problemas, en este capítulo incluimos un análisis de los errores que han cometido. Se describe en primer lugar los criterios utilizados para definir los tipos de errores y, a continuación, se analiza si estos tipos de errores se han presentado en las producciones de cada uno de los problemas utilizados en este estudio, con el objetivo de establecer un vínculo entre la tarea a realizar y el error que se comete. Es decir, tratamos de ver en qué medida un tipo de error que se ha presentado en la resolución de los problemas viene asociado con un tipo de problema.

7.2. Criterios para definir los errores

El proceso de resolución de problemas comprende dos fases: comprensión y solución (Mayer, 1986). Por tanto, los errores se pueden producir en una de estas fases o bien en las dos. Después de un análisis exhaustivo de las producciones de los sujetos con talento, hemos observado que en la fase de ejecución no hay errores que resulten significativos ni por su naturaleza ni por su frecuencia, pero que sí los hay en la fase de comprensión. Por lo tanto, en lo que sigue analizamos sólo los errores producidos en la fase de comprensión.

Para el establecimiento de las categorías de errores producidos en la fase de comprensión partimos de la diferenciación entre la que son los errores que *cometen los resolutores y las causas que provocan la aparición de esos errores*. Esto ha tenido repercusión tanto en lo que hemos considerado como error como en su interpretación. En este trabajo hemos considerado como error algo observable en la producción de un sujeto, no es una explicación del por qué se ha producido el error, sino que es la equivocación misma plasmada en la producción de los sujetos. Esta forma de analizar los errores se puede interpretar en términos de la noción de representación interna y externa. El análisis de errores que hemos hecho pretende poner de manifiesto los errores de representación interna que tienen los sujetos cuando resuelven los problemas que les hemos planteado, basándonos en sus representaciones externas.

De acuerdo con lo anterior, la categorización de errores que hemos realizado surge y se ajusta a las distintas representaciones externas de tipo matemático producidas por los sujetos. Los errores encontrados los hemos catalogado en siete categorías, más una complementaria, que hemos denominado de la siguiente manera:

- Conmutar los datos
- Cambio de estructura
- Inversión de la operación
- Omitir una operación
- Error en un concepto
- Cambio de significado de una relación
- Emplear una estimación

Además, hemos considerado una categoría de "No responde", que se refiere al caso que no se ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. A continuación describimos cómo hemos entendido o definido en este trabajo cada uno de estos errores.

1. Conmutar los datos. Este error consiste en que un dato de un problema aparece utilizado en una operación, que es pertinente para resolver el problema, pero el dato no está ubicado en la operación de manera correcta, por lo cual no desempeña la función que debiera según el problema. Esto queda muy claro en los problemas de división, cuando colocamos el divisor en el lugar del dividendo y cuando se cambia el valor de la base en una potencia.

2. Cambio de estructura. El nombre de este error lo hemos tomado de la literatura existente sobre resolución de problemas matemáticos. Entre otros ha sido utilizado en Castro, Rico y Castro (1992); Castro (1995). Abarca aquellas soluciones en las que los sujetos han realizado una regresión hacia estructuras más sencillas, fundamentalmente de carácter aditivo. El sujeto, al resolver el problema, en vez de emplear las operaciones de multiplicar o dividir, pertenecientes a la estructura multiplicativa, y que son los pertinentes en estos problemas, emplea la suma o la resta, que son conceptos en cierta medida paralelos, pero pertenecientes a la estructura aditiva y, por tanto, no le conduce a la solución correcta del problema. Es decir, el resolutor da la solución a un problema de estructura multiplicativa como si éste fuese de estructura aditiva.

3. Inversión de la operación. Este nombre lo hemos tomado de la literatura sobre resolución de problemas de estructura multiplicativa (Castro, Rico y Castro, 1992; Castro, 1995). Consiste en utilizar la operación inversa de la que se debe emplear en la resolución del problema. En un principio, puede asimilarse al error ya citado de conmutar los datos, pero queremos resaltar la diferencia, pues no es lo mismo intercambiar el dividendo por el divisor, que cambiar la división por la multiplicación. Este error se produce cuando el sujeto escoge la operación aritmética inversa a la requerida para solucionar el problema. Si la operación necesaria para resolver el problema es la multiplicación escoge incorrectamente la división y viceversa y lo mismo puede ocurrir con la adición y sustracción en un modelo aditivo.

4. Omitir una operación. Este error se produce cuando en la representación aritmética del problema el resolutor no tiene en cuenta una condición que se haya en el enunciado del problema bien de manera implícita o de manera explícita, lo que produce que no puede dar con la respuesta al problema.

5. Error en un concepto. Entendemos que hay un error en un concepto cuando en la producción de un sujeto se puede observar que se ha plasmado un concepto de manera equivocada. El error conceptual puede tener su origen en la carencia por parte del resolutor de algún conocimiento específico matemático que le impide resolver el problema correctamente, y que en algunos casos le hace producir respuestas inventadas erróneas, pero no se descartan otras razones.

6. Cambio de significado de una relación. En un problema intervienen conceptos y relaciones y, en ocasiones, las producciones de los sujetos reflejan que una relación se está utilizando con un significado que no es el adecuado desde el punto de vista matemático. En este sentido, hablamos de cambio de significado de una relación porque los sujetos que cometen este error utilizan toda la información presente en el problema, pero hacen una interpretación alternativa equivocada de alguna de las relaciones presentes del problema.

7. Emplear una estimación. Utilizar una estimación numérica es una estrategia que se emplea para resolver problemas, o para detectar la razonabilidad de una respuesta. Si el contexto lo requiere el realizar una estimación para resolver un problema puede ser adecuado, pero entendemos que no es el caso de los problemas que hemos planteado en este estudio y, por lo tanto, si el sujeto ha empleado una estrategia de estimación consideramos que ha incurrido en un error al que hemos dado este nombre.

8. No responde. Esta categoría incluye los casos en que el resolutor no ha producido un proceso escrito para alcanzar la solución. En general, no responden a un único criterio, aunque la mayoría de los casos se refieren a las respuestas de los sujetos que *no responden,* esto ocurre en algunos problemas en los que no hay respuesta, es decir, aparecen en blanco; en menor medida, también hemos incluido respuestas en las que el *resolutor hace algo*, como es el caso del sujeto 5 problema 7, que construye la figura de un cuadrado, le añade las medidas de sus lados y se para.

7.3. Análisis de los errores

Para valorar adecuadamente la importancia relativa de cada tipo de error resulta necesario observar su distribución general, en donde del total de respuestas (360), hay 221 correctas (61%) y 139 incorrectas (39%), que presentamos en el figura 7.1.

Figura 7.1. PORCENTAJE DE RESPUESTAS CORRECTAS E INCORRECTAS

En las 139 respuestas incorrectas, se han detectado los 8 tipos de errores que ya se han descrito en el apartado anterior. Estos errores se han distribuido como muestra la tabla 7.1.

Tabla 7.1. FRECUENCIA DE CADA TIPO DE ERROR EN LOS DOCE PROBLEMAS

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	Total
Conmutar los datos									9+		8+		17
Cambio de estructura	3+?	7+	3+			1			5		1		20
Inversión de la Operación		2		2+		4+					2		10
Omitir una operación					17+		4+?		4				25
Error en un concepto						1	10+		5	5+			21
Cambio de significado de una relación	4+	1			3	1	1	2	5	1			18
Emplear una estimación		6+									6+		12
No responde		2				2	7+			3+?	2		16
Total	7	18	3	2	20	9	22	2	28+	9	19		

Nota: El signo + indica que son valores significativos
+? Indica casi significatividad

A la vista de los datos que aparecen en la tabla 7.1, si nos fijamos en la columna de totales, se deduce que se han presentado los ocho tipos de errores en los problemas planteados con una frecuencia que podemos catalogar, en general, como alta para el tipo especial de resolutores que constituyen los sujetos con talento. Cada categoría de error se ha presentado al menos en dos problemas, como ha ocurrido con los errores "Conmutar los datos" y "Emplear una estimación", llegando algunos tipos de error a presentarse en ocho problemas, como el caso del "Cambio de significado de una relación".

La tabla 7.1 es una tabla de contingencia en la que cada celda contiene la frecuencia de aparición de un tipo de error en un problema de los incluidos en el estudio. Directamente se puede observar en la tabla que hay que hay errores que no han aparecido en determinados problemas, y que, en los problemas en los que se han presentado, la frecuencia de aparición de los errores es variada. Para interpretar las frecuencias de errores que aparecen en esta tabla y establecer si hay asociación significativa entre un problema y un tipo de error, hemos realizado un análisis log-lineal, que es apropiado para tablas de contingencia con variables categóricas (Bishop, Fienberg y Holland, 1975; Visauta, 1998). El análisis estadístico se ha realizado mediante el paquete estadístico SPSS para windows, con el que hemos obtenido (véase anexo B.7) el mejor modelo que se ajusta a los datos partiendo del modelo saturado y mediante el procedimiento de eliminación hacia atrás. El ajuste del modelo se ha realizado mediante la razón de verosimilitud. El modelo resultante que se ha ajustado a los datos ha sido un modelo saturado ERROR*PROBLEMA en el que intervienen las dos variables (Likelihood ratio chi square = 0,00000, DF = 0, P = 1,000).

En el test de asociaciones parciales (véase tabla 7.2) se observa que no hay diferencias significativas en las frecuencias con las que se han presentado los errores, pero si hay diferencias significativas en la frecuencia con la que se han presentado los errores en los problemas.

Tabla 7.2. TESTS OF PARTIAL ASSOCIATIONS

Effect Name	DF	Partial Chisq	Prob	Iter
ERROR	7	9,739	,2039	2
PROBLEMA	11	95,881	,0000	2

La interpretación más detallada de estas diferencias encontradas entre los problemas la hemos realizado a partir de los parámetros estimados. En ellos se observa que el problema 9 destaca de manera significativa sobre los demás en el número de errores, siendo el único que se diferencia significativamente del resto. En el otro extremo se encuentra el problema 12 que es en el que menos errores cometen los sujetos de este estudio.

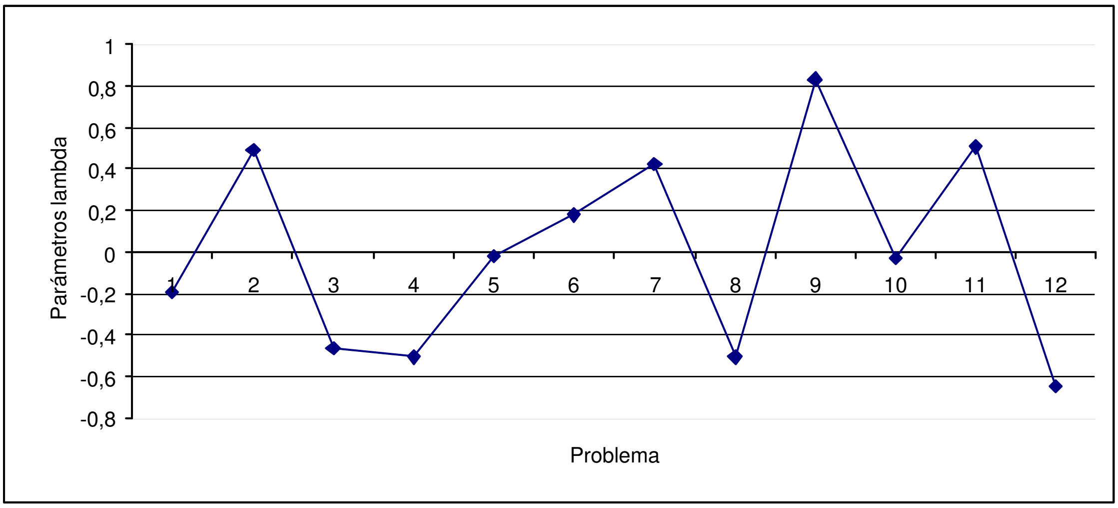


Figura 7.2. PARÁMETROS ESTIMADOS CORRESPONDIENTES A LAS FRECUENCIAS DE ERRORES SEGÚN PROBLEMA

7.4. Relación entre errores y problemas

Una vez puesto de manifiesto que los errores descritos están asociados a determinados problemas procedemos a explicitar con detalle la naturaleza del error tal como se presenta en el problema del cuestionario PEM al que está asociado. La finalidad es conocer con más detalle la naturaleza de las dificultades que han encontrado los sujetos.

7.4.1 Conmutar los datos

Este error se ha presentado de manera significativa en el problema 9 (λ=1,629; z=3,106) que es un problema complejo de combinatoria y en el problema 11 de números decimales (λ=1,846; z=3,403).

En el problema 9 se le asigna a uno de los datos del problema, el número 5, que es el número de luces, el papel del número 2, que son las dos posibilidades de apagado -encendido, utilizando la operación de 5 elevado a 5 para resolver el problema.

En el problema 11, los sujetos que cometen este error escogen correctamente la operación aritmética, la división, pero intercambian la función o el papel que desempeñan los dos datos, en una operación que no es conmutativa, por lo que la traducción a operación aritmética que hace el resolutor del problema no es correcta y, por tanto, el resultado no es el adecuado. Como muestra de esta forma de proceder, el sujeto 7, representa el problema matemáticamente de la siguiente manera:

923:6 =153 El kilo cuesta 0,153 dólares

32

23

7.4.2. Cambio de estructura

El error de cambio de estructura se ha presentado en las producciones de los niños con talento en los problemas de comparación (problema 1), de números decimales (problemas 2 y 11), problemas de combinatoria (problemas 3 y 9) y el problema 6 de escala, y lo ha hecho de dos formas con distinto nivel de complejidad, a las que referimos como forma simple y forma compleja. La frecuencia de aparición de este error ha resultado significativa en el problema 2 de números decimales (λ=1,285; z=2,459) y en el problema 3 (λ=1,478; z=2,196) que es un problema de combinatoria simple, denominado por algunos autores como problemas de producto cartesiano. En los problemas 1 y 9 este error ha aparecido con una frecuencia relativamente alta pero no es el error que más peso tiene en el problema correspondiente, no obstante se aproxima a la significatividad el problema 1 (λ=1,203; z=1,835), mientras que el problema 9 está bastante lejos de ser significativa (0,63; 1,17). Por ello, comentaremos el error de cambio de estructura relacionado sólo con los problemas 1, 2 y 3.

El error de cambio de estructura, en su forma más simple ha aparecido en el problema 1, que es un problema de comparación multiplicativa. Un tipo de representación errónea de este problema suele venir dada por la resta de los datos

$$\begin{array}{r} 180 \\ \underline{-\ 60} \\ 120 \end{array}$$

es decir, se sustituye la división por la resta.

Como hemos indicado, este error de cambio de estructura, se manifiesta cuando los sujetos escogen la operación de sustracción que es inadecuada para resolver el problema. Decimos que cambia de estructura porque para resolver el problema el resolutor escoge una operación que corresponde a una estructura más simple, la estructura aditiva, dentro de esta estructura ha escogido la resta de datos cuando la representación correcta se realiza utilizando la operación de división. Pensamos que esto se debe a que interpretan la expresión *veces menos estatura* como si fuese *¿cuánta menos estatura?* Esta idea se puede apreciar en la respuesta del sujeto 10 que da como solución “120 cm menos de estatura”.

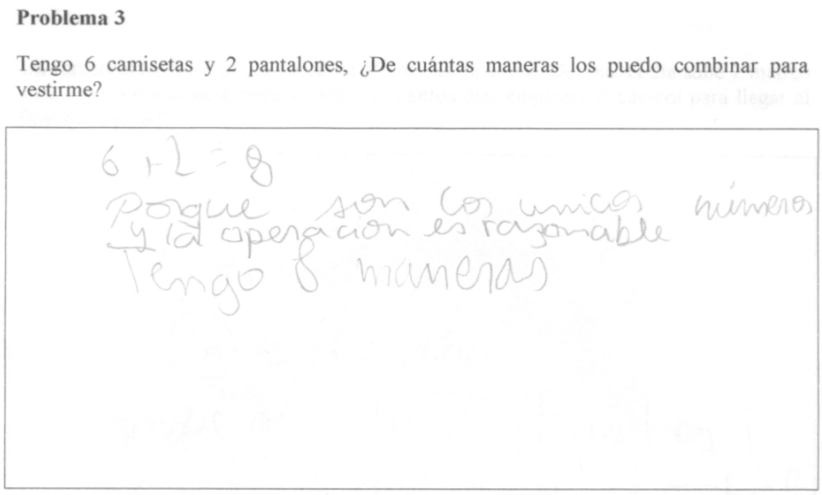
Una versión más compleja del error de cambio de estructura se ha dado en los problemas de números decimales. En los problemas de números decimales el error se ha manifestado de dos formas:

a) los que restan los dos datos: restan las dos cantidades que corresponden a magnitudes de naturaleza distinta. En este caso calculan la diferencia entre el peso y el precio, que son magnitudes diferentes.

b) compensación entre magnitudes diferentes (restan compensando). En este caso la resta además de ser entre magnitudes diferentes, intenta obtener el valor tal que se acerque a la unidad del peso y del precio.

En el problema 3, de combinatoria, se da el error de cambio de estructura de tres formas diferentes, el sujeto 2, que suma 6+2, en vez de multiplicar 2×6, el sujeto 11 que multiplica 2·2·2·2·2·2 en vez de sumar 2+2+2+2+2+2, y el sujeto 24, que multiplica 6·6, en vez de sumar 6+6.

El sujeto 2 argumenta que la solución es “6+2=8 por que son los únicos números y la operación es razonable. Tengo 8 maneras”.

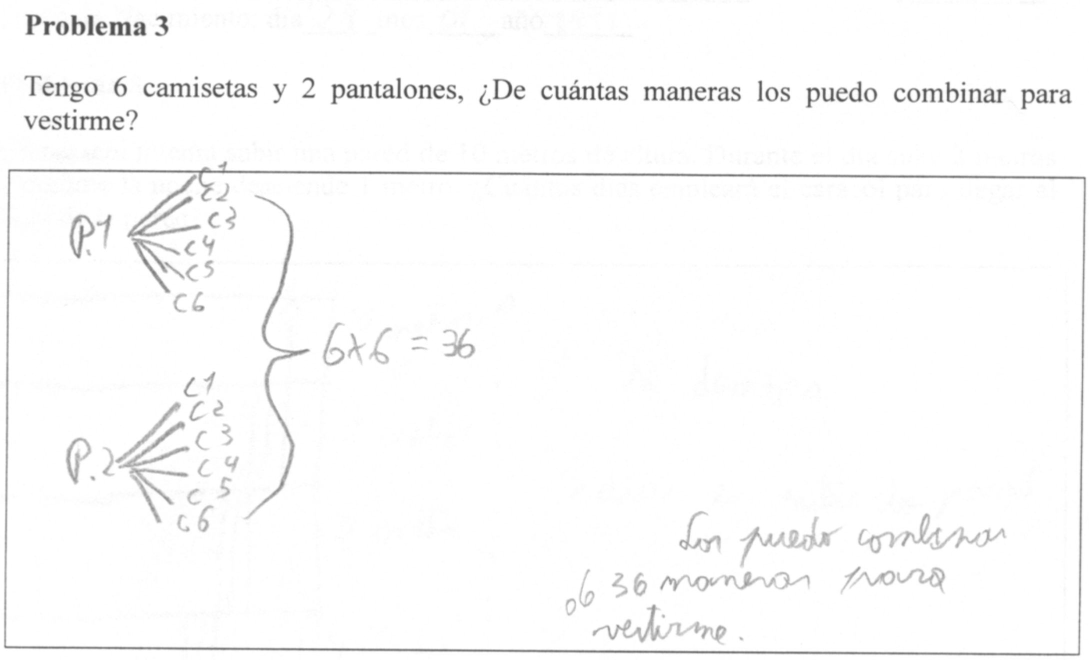


Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

6 + 2 = 8
Porque son los unicos números
y la operación es razonable
Tengo 8 maneras

La solución del sujeto 24 al problema 3

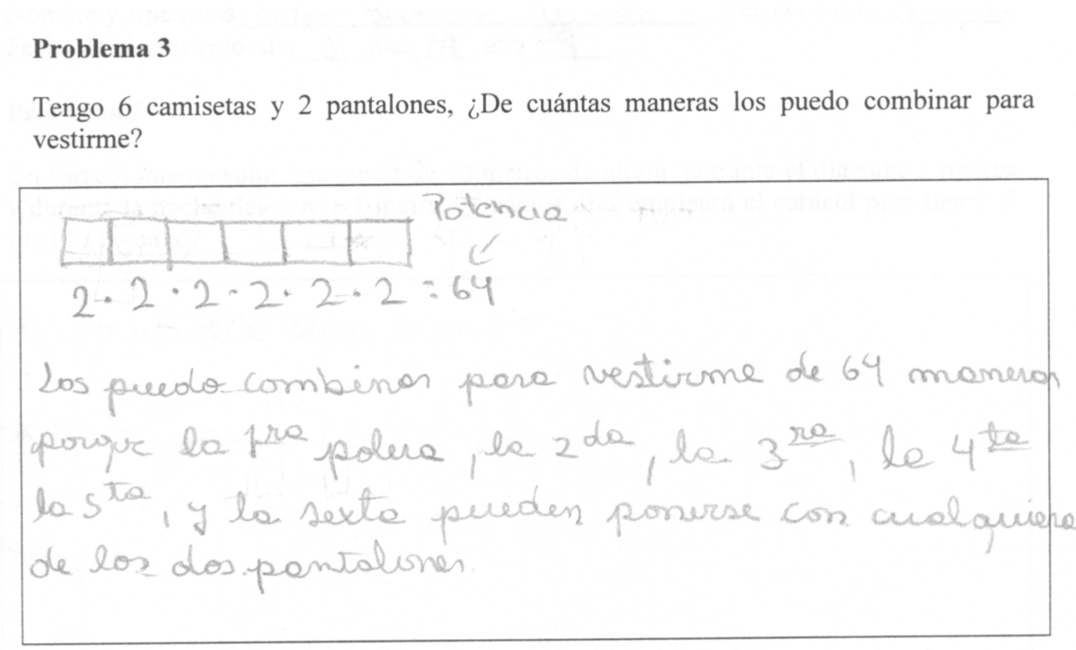


Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

consiste en multiplicar 6 por 6 y da como respuesta 36 y además, para obtener la solución emplea un bosquejo de diagrama de árbol, parte de dos puntos que representan los dos pantalones y de cada uno de ellos saca seis ramas correspondientes a las seis camisetas, pero en vez de sumar las seis ramas de cada pantalón, lo que daría 6+6 que daría el resultado correcto, las multiplica 6·6=36, dando como resultado 36: "Los puedo combinar de 36 maneras para vestirme". ¿De dónde proviene aquí el error? ¿De falta de conocimiento de la situación descrita en el enunciado del problema? Creo que no, pues es una situación familiar a cualquier sujeto. En este caso se entiende que se debe combinar camisa con pantalón como se desprende de los niveles representados en el diagrama de árbol, pero es la propia funcionalidad del diagrama de árbol, al utilizarlo sin referencia a la situación real, el que provoca que se cometa el error. El resolutor ha traducido el problema a un diagrama de árbol y a partir de ahí es el diagrama de árbol el que ha impuesto la solución. Y ello en la manera de cómo entiende el resolutor el diagrama de árbol

La solución del sujeto 11 es la siguiente:



Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

Potencia

2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 2 = 64

Los puedo combinar para vestirme de 64 maneras porque la 1ra polera, la 2da, la 3ra, la 4ta la 5ta, y la sexta pueden ponerse con cualquiera de los dos pantalones.

2*2*2*2*2=64, en ella se puede observar que el resolutor ha traducido el enunciado en un esquema lineal que le sirve para elegir las operaciones que tiene que realizar. En este caso el diagrama elegido no es adecuado para representar el problema.

7.4.3. Inversión de la operación

Este error ha ocurrido en cuatro de los 12 problemas empleados en el estudio, en los problemas de números decimales (2 y 11), un problema de comparación (4) y un problema de escala (6). La presencia del error es significativa en los casos del problema 4 que es de comparación (λ=1,531; z=2,078) y el problema 6 de escala (λ= 1,432; z=2,399) los otros dos casos no han salido significativos por separado, pero al tratarse de dos problemas del mismo, es decir de números decimales, si los consideramos conjuntamente si tendrían entidad las frecuencias conjuntas como para que le dediquemos una reflexión. Por ello, exponemos este error en relación con los cuatro problemas.

El error se ha presentado en la forma siguiente:

En los problemas de números decimales, este error de manifiesta de la siguiente forma: En el problema 2 el error de inversión se pone de manifiesto cuando los sujetos en vez de multiplicar 0,923·6,5 realizan la operación de dividir 0,923 : 6,5 entre esos mismos datos. Y, en el problema 11, que es el problema inverso del 2, el error se manifiesta cuando los sujetos en vez de realizar la operación de dividir 6 : 0,923 lo que hacen es multiplicar los datos 0,923·6, esta solución está acompañada de operaciones de cambio de unidad, como dividir 6 entre 1000.

En el problema 4, de comparación, este error se produce cuando el sujeto utiliza la operación multiplicación 180·3 =540 en vez de la operación división 180:3 dando como solución 540.

En el problema 8, se da cuando interpreta de manera equivocada la expresión "veces menos", realizando la operación 180·3 para resolver el problema.

En el problema 6, que es uno de los problemas de escala, el sujeto divide la distancia real de la escala en la distancia del papel entre las dos ciudades, cuando lo que debería hacer es multiplicarlas. Así ocurre por ejemplo en el sujeto 4 que realiza la división de 4000000 : 3.

7.4.4. Omitir una operación

Este error se produce cuando en la representación aritmética del problema el resolutor no tiene en cuenta una condición que está contenida en el enunciado del problema bien de manera implícita, como es el caso del problema 5 del caracol, o en el problema 9 de luces parpadeantes, o de manera explícita, como es el caso del problema 7 sobre áreas y perímetros.

A pesar de no haber diferencias significativas entre las frecuencias con las que se han presentado los tipos distintos tipos de errores, hay que poner de manifiesto que ha sido este error el que ha aparecido con más frecuencia, y se ha presentado en sólo tres problemas: en el problema 5, en el 7 y en el 9.

En el caso del problema 5 del caracol, los sujetos no han tomado en cuenta la condición implícita que supone la situación del último día. El resolutor generaliza lo que ocurre en los primeros días y lo aplica también al último día. Este error lo comete el 56,6% de los sujetos que participaron en el estudio, lo que conlleva que sea altamente significativa (λ=2,914; z=5,255) la asociación entre este problema y el error de omitir operaciones.

El error se ha presentado con frecuencias altas en los problemas 7 (área y perímetros) y 9 (de combinatoria), en el caso del problema 7 se acerca a la significatividad (λ=1,112; z=1,832), pero no así el problema 9. La razón estriba en la presencia en estos problemas de otros errores con mayor frecuencia que difuminan la importancia de las frecuencias de estos errores, es decir, no han dado significatividad por la presencia en esos problemas de otros errores con mayor peso. No obstante, nos parece interesante comentar los errores en relación con estos problemas.

En el caso del problema 7 del área y perímetro, los sujetos 11 y 22 dan como respuesta al problema un resultado intermedio: el área del cuadrado disminuido. Es decir, en la fase de comprensión del problema omiten una relación, la final, que corresponde a la diferencia de áreas del cuadrado inicial y del cuadrado disminuido. Es pues un error de integración global de las relaciones del problema. Más precisamente, en vez de responder a la diferencia de áreas entre el cuadrado inicial y el cuadrado final disminuido, entienden que se les pregunta por el área del cuadrado disminuido, y dan como respuesta el área de este último. No cometen errores de cálculo.

Por ejemplo, el sujeto 11 procede de la siguiente manera:

$P_1 = 8 \cdot 4 = 32,$

$A_1 = 8 \cdot 8 = 64,$

$P_2 = 32 - 8 = 24$

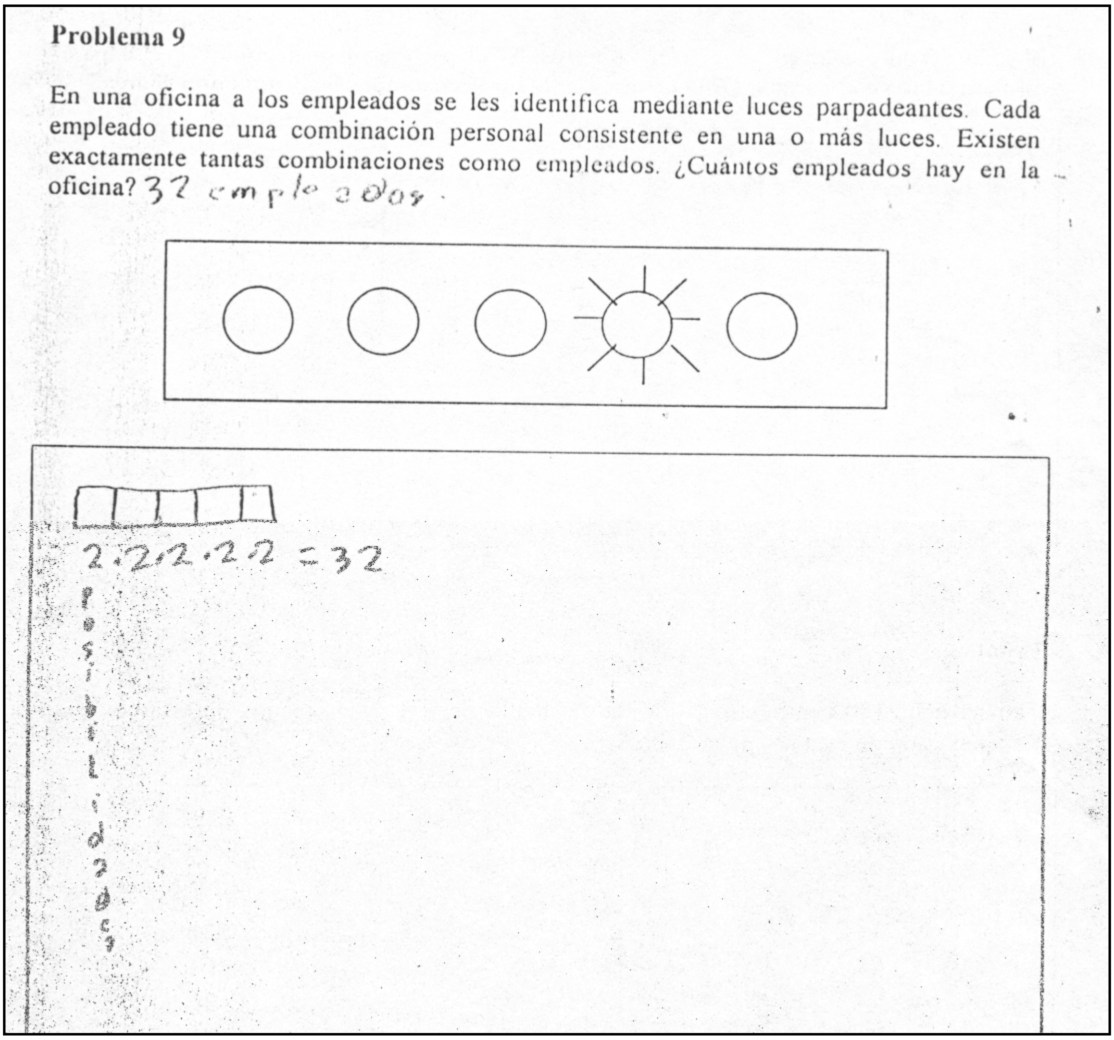
$P_2 : 4 = 6 = l_2,$

$A_2 = l_2 \cdot l_2 = 36$

Dando como respuesta 36 que es el área del cuadrado disminuido A_2.

El sujeto 22 ni siquiera ve necesario calcular el área del primer cuadrado A_1.

El problema 9 es un problema de combinatoria, que incorpora una condición implícita: “La combinación de luces apagadas no hay que tenerla en cuenta”. Esta condición implícita se deriva de una información explícita presente en el enunciado del problema, la que dice que “cada empleado tiene una combinación personal consistente en una o más luces”. Ningún sujeto incluido en el estudio de los que emplearon la estrategia de la regla del producto para obtener su solución tuvo en cuenta esta condición. Se limitan a hacer el producto 2·2·2·2·2 y dar como solución el resultado de estos cálculos.


Problema 9

En una oficina a los empleados se les identifica mediante luces parpadeantes. Cada empleado tiene una combinación personal consistente en una o más luces. Existen exactamente tantas combinaciones como empleados. ¿Cuántos empleados hay en la oficina? 32 empleados.

2·2·2·2·2 = 32

posibilidades

7.4.5. Error en un concepto

Este error se ha presentado con mayor frecuencia en el problema 7 de área y perímetro, siendo significativa la asociación entre el problema y el error (λ=1,877; z= 3,534). También se ha presentado de manera significativa en el problema 9, que es un problema complejo de combinatoria (λ=1,681; z=2,792). Ha aparecido también este error en los dos problemas de escala (6 y 10), aunque con mayor frecuencia en el problema 10; puesto que ha aparecido en los dos problemas de una misma categoría de problemas y la suma de frecuencias es alta, comentaremos en qué consiste el error en estos problemas.

En el problema 7, que incluye los conceptos de área y del perímetro, este error se manifiesta de forma que lleva a pensar que los sujetos no tienen bien diferenciados los conceptos de área y perímetro, por lo que en algún momento del proceso de resolución sustituyen un concepto por el otro. En las producciones que hemos obtenido de los sujetos incluidos en nuestro estudio, este error se ha manifestado en un proceso de trabajo con los lados y los perímetros y dan el resultado como si fuese un área. Se percibe así una confusión entre las unidades de medida de longitud y superficie, que lo cometen 9 de los 30 sujetos incluidos en el estudio (30% de los sujetos). Dentro del conjunto de producciones de los sujetos que se equivocan en este sentido hemos distinguido cinco tipos:

Tipo 1: (Sujeto 12) Calcula el perímetro del cuadrado inicial y dan 32 como respuesta.
Tipo 2: (Sujetos 2, 3, 6) Trabajan sólo con perímetros y dan como diferencia de áreas la diferencia de perímetros, que es 8.
Tipo 3: (Sujetos 20 y 28) Trabajan sólo con perímetros y dan como respuesta la diferencia entre lados que es 2.
Tipo 4: (Sujeto 17) Trabaja con perímetros y da como respuesta el perímetro del segundo cuadrado.
Tipo 5: (Sujeto 14) Trabaja sólo con perímetros. Calcula el perímetro del cuadrado inicial 48=32, le resta lo que se disminuye 32-8 = 24 y dividen 24:4=6. Da como respuesta 6.
Tipo 6: (Sujeto 8) Calcula el área y el perímetro del primer cuadrado, le resta al área 64 lo que disminuye el perímetro, le da 56 y esta cantidad la divide entre 4 obteniendo 14.

En el problema 9, de combinatoria, los sujetos consideran que para resolver el problema deben conocer cuántas combinaciones pueden hacerse con una o más luces, pero fallan en el concepto de combinatoria, pues no son capaces de contar cuántas combinaciones de luces pueden realizarse en cada uno de los casos. Por ejemplo, el sujeto 24 escribe:

1=5

2=25

3=125

4=625

5=3125

y luego suma los valores que están a la derecha de las igualdades obteniendo 3905.

En esta producción del sujeto 24, se observa que falla al calcular la cantidad de combinaciones con cada grupo de luces, habiendo sido capaz de reconocer que debe hacer grupos de 1, 2, 3, 4 y 5 luces.

En los problemas de escala, el error conceptual se manifiesta en los dos problemas incluidos como pertenecientes a esta categoría: el problema 6 y el problema 10.

a) En el caso del problema 6, se observa que hay sujetos que no manejan correctamente el concepto de escala, en el sentido de que no utilizan de ninguna manera los elementos asociados a la proporción entre los centímetros del mapa y los centímetros de la realidad.

b) En el problema 10, éste error se manifiesta en el sentido de que los sujetos hacen bien las operaciones aritméticas que le conducirían al resultado del problema, pero no responden lo que se le está preguntando, es decir, cuál es la escala del mapa.

Hay sujetos que tienen un error conceptual asociado al concepto de escala que les impide resolver el problema, pues trabajan con el ancho y largo del mapa, lo que no tiene nada que ver con el concepto de escala.

7.4.6. Cambio de significado de una relación

El error de cambio de significado de una relación ha aparecido muy repartido en distintos problemas: se ha dado en problemas de comparación (1 y 8), en los problemas de números decimales (2), problemas de escala (6 y 10), problemas de combinatoria (9), en el problema 7 de área y perímetro y en el problema 5 del caracol. Sólo la frecuencia con la que ha aparecido en el problema 2 es significativa (λ=1,343; z=2,185).

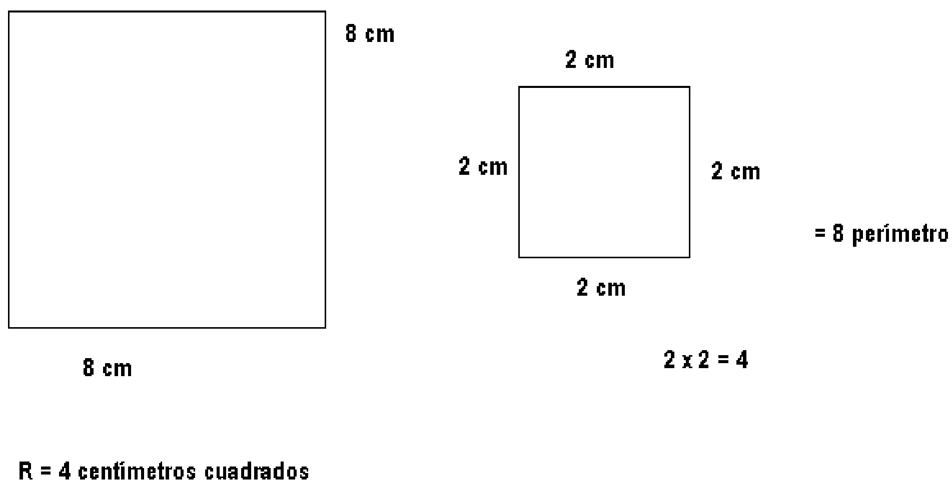
En el problema de comparación 1, los sujetos hacen una traducción de la relación comparativa que denota que no han utilizado su significado matemático correcto, interpretan la expresión comparativa "veces menos" como una expresión compuesta. Para obtener cuántas veces menos es 60 que 180, empiezan restando 180-60=120 y dividiendo 120:60 y dan como solución 2 veces menos. Y, en el problema 8, se da cuando después de hacer correctamente la división de 180 entre 3 dan como resultado: "No mide, mide 0 cm". Es decir, han cambiado el significado de la pregunta.

En el problema 2, de números decimales, el sujeto 25 realiza la operación de dividir $1000 \div 923$.

En los problemas de escala, se dan dos casos en el problema 6 y dos en el problema 10. En el problema 10, el sujeto 2, escribe 8 cm =4000000 y luego 4 cm =2000000, y en el problema 6, el sujeto 25, divide 1000 en 923.

En los problemas de combinatoria, en el problema 9, hay cinco sujetos que cometen este error al resolver el problema. Entiende que se le pregunta por el número de sujetos que están representados por la configuración que se da como ejemplo en el problema. Dice: "Yo creo que hay un sólo empleado y lo que está arriba es la progresión de luces parpadeantes del empleado que lo identifica". Después de esta afirmación el sujeto da tres ejemplos de otras tres configuraciones de luces que identificarían a otros tantos empleados.

En el problema 7 de área y perímetro, interpretan de manera equivocada una de las relaciones del problema. Este error lo cometen los sujetos que interpretan la expresión "se disminuye en 8" como si fuese la expresión "se disminuye a 8". Lo ha cometido sólo un sujeto (Sujeto 19). Dan como respuesta el área de un cuadrado de lado 2 cm.



7.4.7. Emplear una estimación

Este error sólo se ha dado de manera significativa en los problemas con números decimales, en el problema 2 (λ=1,647; z=2,923) y en el problema 11 (λ=1,6317; z= 2,896).

Ha aparecido de las siguientes maneras:

a) Interpretan el "trozo" de queso como la mitad
b) Establecen una equivalencia inadecuada entre los dólares y los gramos, por ejemplo, 1,5 dólares =75 gramos

7.4.8. No responde

La categoría de no responde se refiere a las respuestas que han quedado en blanco. En este caso ha dado significativa la asociación de este error para el problema 7, que es el problema que incorpora áreas y perímetros (λ= 1,496; z=2,739) y se ha acercado a la significatividad la presencia de este error en el problema 10 (λ=1,184; z=1,828) en el que se pide obtener una escala. Así pues, en estos dos problemas hay bastantes sujetos que han dejado en blanco el espacio y no han dado respuesta.

7.5. Reducción de las componentes del modelo

La tabla 7.1 de frecuencias de los errores definidos muestra que hay muchas casillas vacías y otras que tienen frecuencias muy bajas y, por tanto, no han aportado mucho al modelo de asociación obtenido. Ello nos lleva a pensar que puede obtenerse un modelo interpretativo más simplificado de la relación entre los tipos de errores y los problemas.

Para obtener una reducción de las relaciones entre tipos de errores y los problemas empleados, hemos aplicado la técnica estadística de escalamiento multidimensional, que hemos realizada mediante el SPSS (véase anexo B.8).

El espacio bidimensional obtenido en el escalamiento bidimensional de los problemas empleando distancias euclídeas se muestra en la tabla 7.3 y en la figura 7.3.

Tabla 7.3. COORDENADAS DE LA CONFIGURACIÓN OBTENIDA EN 2 DIMENSIONES PARA LOS PROBLEMAS

Número del Estímulo	Nombre del Estímulo	Dimensiones 1	Dimensiones 2
1	P1	-,5102	,1632
2	P10	-,1460	,8893
3	P11	-,7841	-1,5037
4	P12	-,4652	,4930
5	P2	-1,0895	-,8875
6	P3	-,5632	,2221
7	P4	-,5053	,4602
8	P5	3,0094	-,4570
9	P6	-,4625	,4809
10	P7	1,1267	1,4235
11	P8	-,3577	,4161
12	P9	,7476	-1,7002

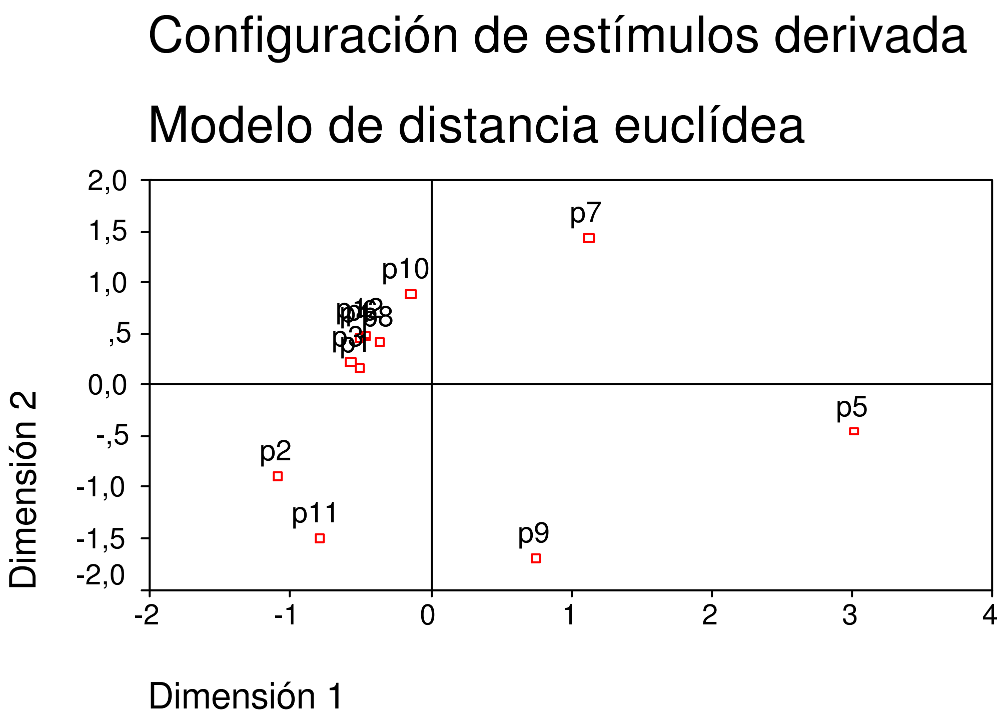


Figura 7.3. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONFIGURACIÓN OBTENIDA EN 2 DIMENSIONES PARA LOS PROBLEMAS

La situación de los problemas en el espacio dimensional muestra un gran grupo formado por los problemas P1, P3, P4, P6, P8, P10, P12, que son los problemas simples de estructura multiplicativa, constituidos por los cuatro problemas de comparación y por el problema de producto cartesiano, y por los dos problemas de escalas. Este grupo de problemas no presenta frecuencias de errores altas. Un segundo grupo está constituido por los dos problemas de números decimales, P2 y P11. El resto de los problemas: el P5, P7, y P9 aparecen aislados.

La configuración espacial que se observa en el gráfico bidimensional pone de manifiesto que los problemas P2, P5, P7 y P9 se sitúan en la posición de los cuatro extremos de unos ejes cartesianos, es decir, adoptan posiciones complementarias en el plano para poder definir un sistema de referencia. Así pues, pueden constituir el germen de unos ejes de coordenadas: Uno de los ejes pasando por P7 y P9; el otro eje pasando por P2 y P5.

La posición del eje pasando por p9 está relacionada con el error de conmutar los datos, la parte opuesta de ese eje está definida por P7 y representa error en un concepto o no responde.

El otro eje estaría constituido en un sentido por los problemas de números decimales, que están asociados con el empleo de una estimación y con el cambio de estructura. En el otro sentido estaría el problema 5 que representa la omisión de operaciones.

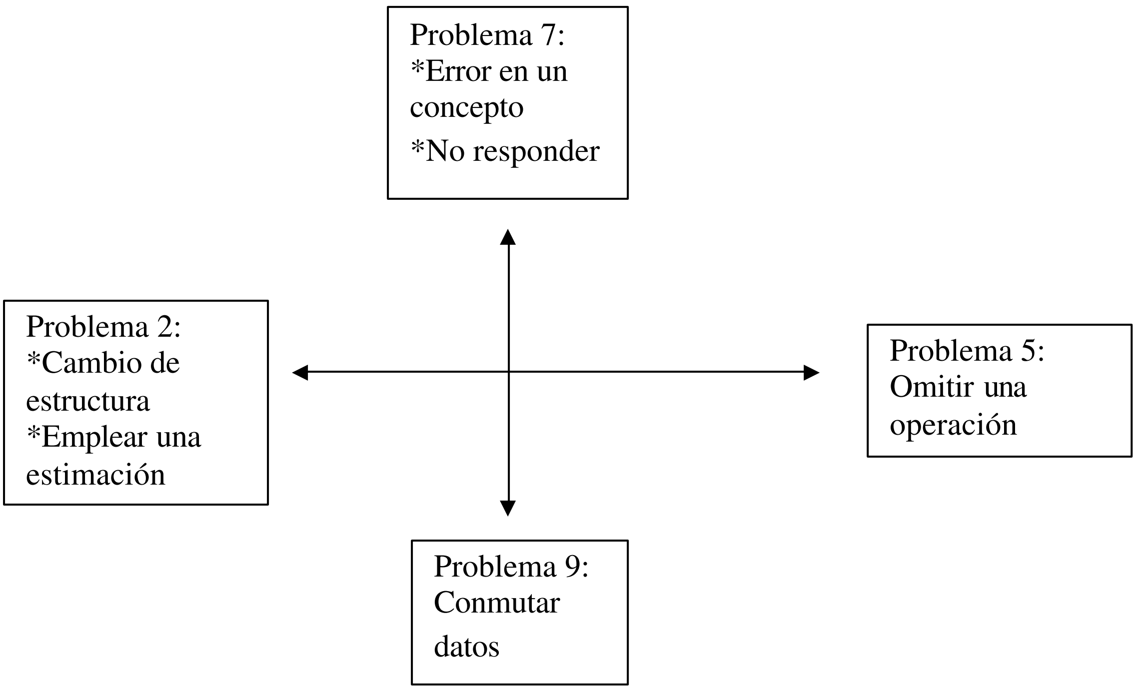


Figura 7.4. DIMENSIONES DEL ESPACIO DE ERRORES

En el modelo reducido obtenido no han entrado errores como el de "cambio de significado en una relación" y el "error de inversión", que habían dado significatividad en el modelo loglineal. Esto está relacionado con su poca presencia en las producciones de los sujetos en comparación con los que si se han considerado.

Este modelo reducido se confirma con el escalamiento multidimensional de los errores tomados como casos (véase anexo B.9). En la configuración de estímulos resultante se observa que los errores 2 y 7 están muy próximos, y también lo están el error 5 y el error 8.

Tabla 7.4. COORDENADAS DE LA CONFIGURACIÓN OBTENIDA EN DOS DIMENSIONES PARA LOS ERRORES

		Dimensiones	
Número del Estímulo	Nombre del Estímulo	1	2
1	ERROR-1	,4546	-1,4004
2	ERROR-2	,7861	-,6626
3	ERROR-3	,7815	,3358
4	ERROR-4	-2,6587	-,2913
5	ERROR-5	-,1019	1,4650
6	ERROR-6	-,4866	,0226
7	ERROR-7	,9671	-,5596
8	ERROR-8	,2578	1,0905

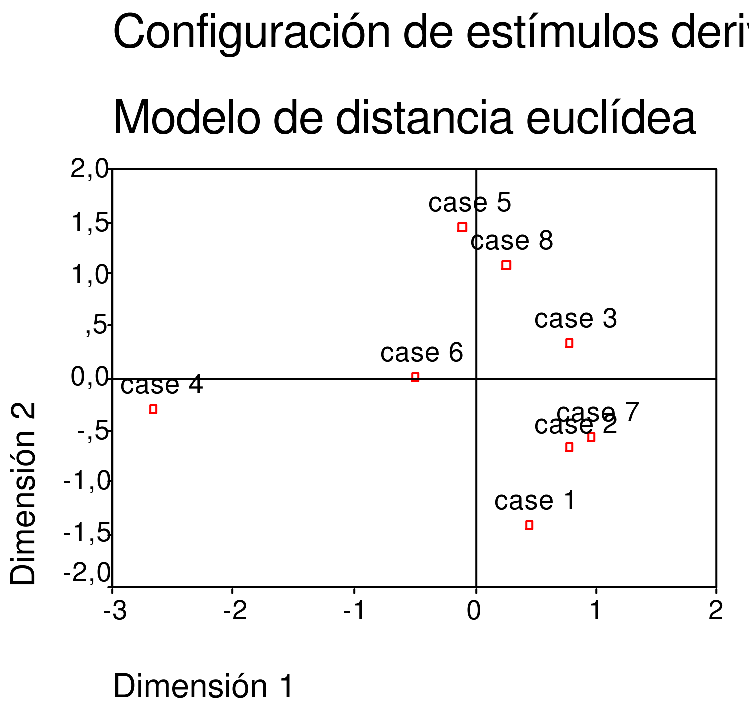


Figura 7.5. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA CONFIGURACIÓN OBTENIDA EN 2 DIMENSIONES PARA LOS ERRORES

7.6. Resumen del análisis de errores

1. Hemos encontrado que los sujetos con talento cometen errores, que en cierta medida son sistemáticos, en los problemas incluidos en el cuestionario PEM.
2. Hemos detectado ocho tipos de errores en las respuestas incorrectas:
   2.1. Conmutar los datos
   2.2. Cambio de estructura
   2.3. Inversión de la operación
   2.4. Omitir una operación
   2.5. Error en un concepto
   2.6. Cambio de significado de una relación
   2.7. Emplear una estimación
   2.8. No responde

3. Las tipologías de error enunciadas han constituido una clasificación exhaustiva de todos los errores observados.

4. No hay diferencias significativas entre las frecuencias con la que se han presentado los errores.

5. Si hay diferencias significativas entre los problemas tomando como variable dependiente la frecuencia de respuestas erróneas.

6. Los errores detectados en las producciones de los sujetos están asociados con los problemas empleados, es decir, cada error se produce en determinados problemas de manera significativa. La interpretación de la asociación entre las variables problema y error, la hemos realizado mediante los parámetros estimados. A partir de ellos, se han obtenido las siguientes asociaciones significativas:

    1. El error 1 está asociado significativamente con los problemas 9 y 11
    2. El error 2 está asociado significativamente con los problemas 2 y 3
    3. El error 3 está asociado significativamente con los problemas 4 y 6

4. El error 4 está asociado significativamente con el problema 5
5. El error 5 está asociado significativamente con los problemas 7 y 10
6. El error 6 está asociado significativamente con el problema 1
7. El error 7 está asociado significativamente con los problemas 2 y 11
8. El error 8 está asociado significativamente con el problema 7

7. Agrupando los errores según el tipo de problemas, tenemos que:
   7.1. En los problemas de comparación (Problemas 1, 4, 8 y 12) se han presentado de manera significativa: a) el error 3, de inversión de una operación en el problema 4, y el error 6, cambio de significado de una relación en el problema 1.
   7.2. En los problemas de números decimales (Problemas 2 y 11) los errores asociados son: a) el error 7 "emplear una estimación" que se presenta en los dos de manera significativa. Además este error se presenta sólo en estos dos problemas; b) el error 1 "conmutar los datos que se ha presentado en el problema 11, y c) el error 2 "cambio de estructura" que se ha presentado en el problema 2. Hemos de destacar que el problema 2 está también muy cerca de la asociación significativa con el error de "inversión de la operación".
   7.3. En los problemas de escala (Problemas 6 y 10) se ha presentado el error 3 "inversión de la operación" asociado significativamente al problema 6 y el error 5 "error en un concepto" asociado al problema 10. Así pues, no hay un error conjunto de este grupo de problemas.
   7.4. En los problemas de combinatoria (Problemas 3 y 9) tampoco hay un error conjunto, pero sí los hay de manera individual: a) El problema 9 está asociado con el error 1 "conmutar los datos", y b) el problema 3 está asociado con el error 2 "cambio de estructura".
   7.5. Los dos problemas restantes, el problema 5 está asociado con el error 4 "omitir una operación" y el problema 7 tiene dos errores asociados, el error 5 "error en un concepto" y el error 8 "no responde".

8. Mediante escalamiento multidimensional hemos agrupado los problemas del cuestionario PEM en cinco clases atendiendo a las frecuencias de los tipos de errores:

8.1. Clase 1 formada por siete problemas: los problemas de estructura multiplicativa simple de comparación, el problema de producto cartesiano y por los dos problemas de escala.
8.2. Clase 2 formada por los dos problemas de números decimales
8.3. Clase 3 formada por el problema 5, el problema del caracol
8.4. Clase 4 formada por el problema 9, el problema de las luces
8.5. Clase 6 formada por el problema 7, el problema de área y perímetro.

9. La clase 1 de problemas no tiene apenas peso en la aparición de errores. Las otras cuatro clases si tienen un peso importante en la aparición de errores.

10. Los problemas 2, 5, 7 y 9 constituyen los cuatro "puntos cardinales" de un espacio bidimensional de distribución de los errores, es decir constituyen la base que definen unos ejes cartesianos.

Capítulo 8

Análisis prescriptivo de sujetos

8.1. Introducción

Una vez que se ha detectado el espacio de errores a partir de las producciones escritas de los sujetos con talento en el Cuestionario PEM, el siguiente paso en un modelo de enseñanza-prescriptiva, es analizar los ítems en los que cada sujeto comete errores y proponer los temas en los que necesita profundizar. Pretendemos mostrar un modelo a seguir. Lo vamos a hacer a partir de las respuestas escritas al cuestionario PEM, complementadas con entrevistas individuales.

Utilizamos para ello extractos de entrevistas realizadas a una muestra de niños seleccionada entre los 30 sujetos que participaron en la resolución del cuestionario PEM, tal como se describió en el capítulo 3. Las entrevistas tienen un doble objetivo: a) corroborar si las producciones escritas de los sujetos en el cuestionario PEM son fiables en el sentido de estabilidad temporal de las mismas, y b) refinar la comprensión de las dimensiones del espacio de errores obtenido en el análisis de errores realizado en el capítulo 7. Es decir, con las entrevistas comprobamos tanto si los aciertos o los errores de los niños son persistentes, como si la clasificación de los tipos de errores que se han observado puede ser mejorada o refinada. Puesto que se trata sólo de una corroboración y una mejor comprensión del espacio de errores, no hemos aplicado todos los problemas en la entrevista, nos hemos limitado a aplicar uno de los problemas de cada uno de los cuatro grupos de problemas definidos. Además, hemos incluido en la entrevista un problema con números naturales que es una variante de uno de los problemas de números decimales, para corroborar la firmeza en la respuesta dada por el sujeto y, al mismo tiempo, poder observar que no se modificaba dada a esta problema ante la presencia de una respuesta distinta cuando el problema era el mismo pero con números decimales.

Uno de los objetivos de las entrevistas es profundizar en el conocimiento del espacio de errores. En el capítulo 7 sobre análisis de errores, en una de las dimensiones encontradas en el espacio de errores, el problema 7 ha marcado uno de los sentidos, pero este problema está asociado significativamente con dos errores: “error en un concepto” y “no responde”. El posterior escalamiento multidimensional muestra los dos errores agrupados. Obviamente esta agrupación entre el error de “no responde” y el “error en un concepto” debe de tener una explicación y, por ello, requiere que se profundice en la entrevista en las respuestas al problema de área y perímetro.

Otros dos errores que han aparecido agrupados han sido el “error de estimación” y el “error de cambio de estructura” ambos están asociados significativamente con el problema 2 de números decimales. Para profundizar en el conocimiento de este agrupamiento, hemos incluido este problema en la entrevista.

Por otra parte nos ha sorprendido el escaso número de errores en los problemas de comparación, de escala y de producto cartesiano. Con la entrevista queremos corroborar si los sujetos con talento de la muestra, tienen tanta facilidad para resolver estos problemas.

8.2. Entrevistas y análisis prescriptivos

8.2.1. Entrevista 1: David

El sujeto 27, David, ha resuelto 6 problemas de los planteados en el cuestionario escrito: los cuatro problemas de comparación, el problema 2 del cuestionario PEM, que es el más fácil de números decimales, y el problema 6 de escala que tiene menos dificultad. En la entrevista se le han planteado algunos problemas para confirmar los errores cometidos y confirmar algunas de las respuestas correctas.

Extracto de la entrevista

El primer problema que le planteamos a David es un problema análogo al problema 2 del cuestionario, en el que hemos variado las cantidades pero manteniendo la naturaleza de los números decimales (entre cero y uno, mayor que uno). Una de las razones por la que le proponemos este problema es que dio una respuesta directa en la prueba escrita y pensamos que nos ayudaría a entender algunas de las respuestas directas.

En el cuestionario escrito da una respuesta directa, que es la solución, pero sin escribir la operación necesaria. Sin embargo, en el problema análogo, que es el primer problema que le planteamos a David (sujeto 27 en el cuestionario) en la entrevista, se pone de manifiesto que no es capaz de comprender la relación entre las cantidades del problema con números decimales. Al resolver el problema comete el error de invertir la operación, es decir, selecciona la operación división que es la inversa de la operación adecuada: la multiplicación.

E: *David, te voy a plantear algunos problemas relacionados con el cuestionario que habíamos hecho hace algunos meses, ¿te acuerdas del cuestionario?*

D: *Sí*

E: *Bien, la primera pregunta es la siguiente: Si una manzana pesa 0,234 kilos y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta cada manzana?*

E: *¿Cómo resolverías este problema?*

D: *Con división, dividiendo el peso de cada manzana con el kilo.*

E: *¿Qué has escrito en la hoja?*

D: *La pregunta y parte del ejercicio (el niño escribe en una hoja los cálculos: divide 0,234 entre 1,12)*

E: *Ya, ¿y cómo lo has empezado a resolver? Has puesto dos números y una operación en la hoja, ¿por qué los has puesto en ese orden?*

D: *Es la forma que yo pienso que se puede resolver el ejercicio*

E: *Si tú colocas ahí 0,234 : 1,12 ¿qué estás calculando al hacer esa división?, ¿el peso de algo o el valor de algo?*

D: *El valor de la manzana*

y además, no es capaz de resolver dicha operación aritmética con números decimales. Durante la entrevista se detecta que David condiciona la solución del problema a los tipos de números que hay implicados en él.

E: *¿Y estás seguro que esa es la operación?*

D: *Si (piensa antes de responder) el divisor no puede tener decimales.*

E: *¿Y cómo solucionas eso?*

D: *Se multiplica por una base de 10 si es que no me equivoco por 10, en este caso como 1,12 tiene dos dígitos después de la coma es 100 y no es 10 y el divisor quedaría como 112 por 23,4 y de ahí empiezo a calcular.*

E: *¿Y ahí que puedes calcular?*

D: *No me acuerdo en este momento como se hace (no está muy convencido)*

Este resultado es explicable en función de la teoría "A competing-claims theory" propuesta por Bell y otros (1989), en el que las creencias de los sujetos sobre los números condiciona la elección de la operación a realizar.

Al plantearle el segundo problema de proporcionalidad simple con números decimales, que tiene una estructura análoga al anterior y que se resuelve con la misma operación aritmética que el problema anterior pero con números naturales, el sujeto lo resuelve sin ninguna dificultad, de forma directa.

E: *Bien, David, cambiemos el problema. Mira te voy a plantear el siguiente Si una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 dólares, ¿cuánto cuesta la bolsa de mermelada?"*

D: *(piensa) El kilo cuesta 12 dólares*

E: *Explícame como lo resolviste*

D: *Multiplico la bolsa de mermelada por lo que cuesta cada kilo que son 6 dólares,* 6·2 *son* 12 *y esa sería la respuesta de la pregunta.*

Esto pone de manifiesto la influencia que tienen los tipos de números en la elección apropiada de la operación aritmética, esta elección se dificulta cuando los números involucrados son números decimales.

A David se le ha planteado el tercer problema, que es de comparación con la expresión "veces menos", y que incluye un contexto diferente al planteado en el cuestionario PEM. Con ello, se pretende que los niños no empleen en la resolución lo que podrían recordar de la respuesta que habían dado en le problema correspondiente del cuestionario PEM.

E: *Muy bien. El tercer problema dice así: En Santiago hacen 10 grados de temperatura y en Granada hacen 30 grados de temperatura, ¿cuántas veces menos temperatura hace en Santiago que en Granada?*

D: *(piensa) Primero divido el valor 30 de Granada por 10 de Santiago, 30 dividido en 10. El 10 en el 30 cabe 3 veces y el resto es cero.*

E: *Entonces, ¿cuánta temperatura menos hay en Santiago que en Granada?*

D: *Tres veces.*

Este problema fue resuelto correctamente por David tanto en el cuestionario escrito como en la entrevista, la respuesta la ha dado sin dificultad.

El problema complejo (aparece en el cuestionario PEM con el nº 7) que tiene involucrado los conceptos de área y perímetro, no fue respondido por David en el cuestionario escrito; lo dejó "en blanco". Se lo proponemos para indagar sobre las posibles dificultades que pueda tener.

E: *Muy bien, el siguiente problema dice: El lado de un cuadrado mide 8 cm, si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado. ¿En cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?*

D: *Primero dibujo un cuadrado de lado 8 cm; en el caso del perímetro es la suma de sus cuatro lados o sea 32 cm que es el perímetro del cuadrado. Entonces me preguntan aquí si el perímetro se disminuye en 8 cm para formar un nuevo cuadrado. O sea, tengo que sacar los cm equivalentes en cada lado, o sea, son 2 cm. Quedaría un total de 24 cm el perímetro y se puede formar un nuevo cuadrado de perímetro 24 cm, teniendo 6 cm por lado, entonces el área vendría siendo 36 centímetros cuadrados*

E: *Entonces, cuál sería la respuesta del problema ¿en cuántos centímetros ha disminuido el área?*

D: *Ya, teniendo estos resultados, lo que me complica es la unidad de medida porque me confunde la idea (no responde a la pregunta que se le ha realizado).*

En la entrevista, el niño pone de manifiesto su dificultad en relacionar el área del cuadrado inicial con el área del cuadrado final disminuido. Ha realizado un razonamiento impecable sobre el perímetro y con los datos obtenidos ha calculado el área del cuadrado disminuido, pero es incapaz de comprender que lo que se le pide es la diferencia de dos áreas. En este caso, la "no respuesta" del sujeto en la prueba escrita habría que achacarla a una falta de compresión de la expresión relacional *¿en cuántos centímetros ha disminuido el área?*

El problema de combinatoria del tipo producto cartesiano, ha sido resuelto por el niño en el cuestionario PEM, al igual que en la entrevista.

E: *Muy bien, el quinto problema dice: Tengo 6 camisetas y dos pantalones, ¿de cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

D: *Se multiplica 6·2*

E: *Entonces, ¿de cuántas maneras los puedes combinar para vestirte?*

D: *De 12 maneras*

Tabla 8.1. RESUMEN DE RESULTADOS DE DAVID

Problema	Resultado en el Cuestionario PEM	Resultado en la entrevista	¿Hay coincidencia?
Problema de proporcionalidad simple números decimales	Respuesta directa	Inversión de la operación	No
Problema de proporcionalidad simple con números enteros	No se pregunta en el cuestionario PEM	Acierto	
Problema de	Acierto	Acierto	Si

comparación con la expresión "veces menos"			
Problema complejo de área y perímetro	No responde: En blanco	Error de concepto	Si
Problema de combinatoria	Acierto	Acierto	Si

Prescripción diagnóstica de David:

David no tiene dificultades de comprensión en ninguno de los cuatro problemas de comparación, ni en los dos de escala, ni en el problema que conlleva un producto cartesiano. En el resto de los problemas no se desenvuelve bien, tiene dificultades de comprensión y comete errores.

En los problemas de proporcionalidad simple con números decimales 2 y 11 tiene dificultades de compresión debido a la presencia de números decimales, lo que acarrea el error de elegir la operación inversa a la adecuada y en falta de concordancia o adecuación entre la cantidad por la que se pregunta y la cantidad que elige como dividendo de la división, que deberían ser la misma.

David pone de manifiesto falta de compresión en el problema 7, se le pide una diferencia de las áreas de dos cuadrados que debe obtenerse a través de la manipulación de los perímetros, pero su capacidad operativa sólo le lleva a calcular el área del segundo cuadrado. Se muestra confundido con el empleo simultáneo de unidades de longitud y superficie.

En el problema 9, que es un problema complejo de combinaciones, lo interpreta erróneamente como un problema de permutaciones.

Por último, la respuesta que da al problema 5 del caracol, denota también una compresión superficial del mismo. Con base en una representación aritmética de las subidas y bajadas, se deja llevar por la regularidad y da como respuesta 10, sin advertir que la regularidad no se da en el último día.

8.2.2. Entrevista 2: Felipe

Felipe, ha resuelto seis problemas en el cuestionario PEM, los cuatro problemas de comparación, el problema más fácil de números decimales y el problema de escala que se ha considerado más fácil. En el test de Raven tuvo correcto un 88% de la prueba.

Extracto de la entrevista

El primer problema que le planteamos a Felipe es un problema análogo al problema 2 del cuestionario, en el que hemos variado las cantidades pero manteniendo la naturaleza de los números decimales (entre cero y uno, y mayor que uno). La razón por la que le planteamos este problema es que en el cuestionario escrito, dio una respuesta que no estaba basada en la comprensión del problema. En el cuestionario escrito da la solución, pero sin escribir la operación necesaria, justificando su respuesta en que recuerda el dato "6 dólares" presente en el problema 11. En la entrevista se pone de manifiesto que tiene dificultades en la comprensión del problema con los números decimales menores que uno. Al resolver el problema comete el error de invertir la operación, es decir, selecciona la operación división que es la inversa de la operación adecuada: la multiplicación.

E: *Felipe, te voy a hacer una entrevista relacionada con los problemas del cuestionario. El primer problema dice: Si una manzana pesa 0,234 kilo y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta cada manzana?*

F: *(piensa) Estoy tratando que el peso de una manzana llegue al kilo que cuesta 1,12 dólares.*

E: *¿Y cómo lo podrías calcular?*

F: *Dividiendo*

E: *¿Dividiendo qué números?*

F: *1,12 y 0,234, se amplifica por 1000 y queda 1120 : 234 porque el segundo número no tiene que tener coma*

E: *Sigamos resolviendo, ¿ahora puedes realizar la operación?*

F: *(piensa)*

E: *¿En el colegio te han enseñado a dividir con números decimales?*

F: *Sí pero con 0,23 con 2 números después de la coma*

Durante la entrevista, un problema similar a este, pero con datos que son números naturales no le supone dificultad para resolverlo, identifica de inmediato la operación aritmética de multiplicación entre los datos y resuelve el problema; lo que pone de manifiesto que en el problema anterior, la presencia de números decimales dificulta al niño la elección de la operación adecuada para resolver el problema.

E: *Sigamos con otro problema: Si una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 dólares. ¿Cuánto cuesta la bolsa de mermelada?*

F: *(piensa) 12 dólares porque ahí está especificando que una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 dólares entonces se multiplica*

En el problema de comparación con la expresión "veces menos" que se ha planteado en la entrevista tiene un contexto diferente al del cuestionario PEM, pero se requiere de la misma operación aritmética para resolverlo. Este problema es resuelto correctamente por el niño tanto en el cuestionario como en la entrevista.

E: *El tercer problema dice: En Santiago hacen 10 grados de temperatura y en Granada 30 grados de temperatura, ¿cuántas veces menos temperatura hay en Santiago que en Granada?*

F: *Hay 20 porque se le resta 10 a 30 para obtener la variedad*

E: *Entonces, ¿cuántas veces menos de temperatura hay en Santiago que en Granada?*

F: *Hay tres veces menos*

E: *¿Y cómo lo calculas?*

F: *Dividiendo el 30 por 10.*

Con respecto al problema de área y perímetro (problema 7), el niño sólo hace un intento incipiente para resolverlo en el cuestionario PEM. Realiza sólo una representación pictórica de un cuadrado acompañada de las medidas de los lados. Eso es claramente una "no respuesta", y vemos que en la entrevista el sujeto dice que no entiende el problema, aunque en el colegio ya han tratado el área y el perímetro. Hay que recordar que está cursando octavo año básico y según los planes y programas de matemáticas en Chile dichos conceptos se trabajan en séptimo básico. De nuevo se observa que un error de no respuesta no es debido a que el alumno no haya intentado resolver el problema, sino por que tiene una verdadera falta de compresión de las relaciones entre área y perímetro.

E: *El cuarto ejercicio dice: El lado de un cuadrado mide 8 cm, si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado. ¿En cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?*

F: *(piensa y va haciendo el dibujo)*

E: *¿En el colegio te han enseñado el perímetro y el área?*

F: *Más o menos no más, pero no entiendo este problema*

En el problema de producto cartesiano, el niño no tuvo dificultad para resolverlo ni en el cuestionario PEM ni en la entrevista; escoge adecuadamente la operación aritmética y da la respuesta. En el cuestionario emplea un esquema de árbol y en la entrevista lo resuelve del mismo modo, como se desprende de sus mismas palabras.

E: *El otro problema dice: Tengo 6 camisetas y dos pantalones, ¿de cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

F: *Aquí se dibujan 6 camisetas y en cada camiseta le pongo dos pantalones, entonces los dos pantalones se multiplican por las 6 camisetas y dan 12.*

Tabla 8.2. RESUMEN DE RESULTADOS DE FELIPE

Problema	Resultado en el Cuestionario PEM	Resultado en la entrevista	¿Hay coincidencias?
Problema de proporcionalidad simple con números decimales	Recuerda el dato de un problema anterior	Invierte la operación	No
Problema de proporcionalidad simple con números enteros	No se pregunta en el cuestionario PEM	Acierto	
Problema de	Acierto	Acierto	Si

comparación con la expresión “veces menos”			
Problema complejo de área y perímetro	No responde: Estrategia incipiente pictórica numérica	No responde	No
Problema de combinatoria	Acierto	Acierto	Si

Prescripción diagnóstica de Felipe:

Felipe tiene dificultades de comprensión de los problemas de proporcionalidad simple con números decimales menores que uno, en los que elige la operación inversa a la adecuada. De nuevo la presencia de los números decimales menores que uno dificulta que el sujeto de una solución correcta.

Resuelve con cierta facilidad los problemas de comparación y de producto cartesiano. En el problema de área y perímetro adopta la opción de no respuesta que refleja su falta de comprensión de las relaciones área-perímetro.

En el problema del caracol da la respuesta resultante de una compresión superficial.

La respuesta que da al problema de las luces (problema 9) denota también falta de comprensión matemática de las combinaciones. Utiliza la regla del producto pero confunde el número de luces con el número de posibilidades de encendida-apagada que tiene cada luz.

8.2.3. Entrevista 3: Orianne

Orianne (sujeto 3) ha sido seleccionada con un 80% del test de Raven correcto; en el momento de aplicarle el cuestionario está en sexto año básico. Ha respondido 8 problemas correctos del cuestionario PEM: los cuatro problemas de comparación, los dos problemas de escala, el problema de combinatoria de producto cartesiano y el problema del caracol.

Extracto de la entrevista

En el cuestionario PEM, Orianne ha tenido incorrectos los dos problemas de proporcionalidad simple con números decimales (problemas 2 y 11), en ambos ha cometido el error de cambio de estructura. En la entrevista realizada se pone de manifiesto que sigue cometiendo el mismo error: interpreta el problema en forma de compensación aditiva entre las dos magnitudes. Este error es una forma aditiva de entender la proporcionalidad entre magnitudes. Esto puede ser debido a que está en sexto año básico, curso en el cual no se ha trabajado todavía el tema de la proporcionalidad.

E: *Te voy a hacer una entrevista relacionada con los problemas del cuestionario. El primer problema dice: Si una manzana pesa 0,234 kilo y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta cada manzana?*

O: *Si el kilo de manzana vale 1,12 dólares, primero veo cuánto le falta para llegar al kilo y luego lo que le falta se lo resto al precio del kilo completo y ahí me sale, yo creo el precio de cada manzana. Entonces, 1,000-0,234= 0,766 y después 1,12-0,766 (esto lo escribe en una hoja)*

E: *¿Crees que está correcta tu respuesta?*

O: *Si porque el precio del kilo entero es mayor al precio que me dio por cada manzana.*

Todos los problemas de comparación fueron resueltos correctamente por Orianne en el cuestionario PEM. En la entrevista se confirma que no presenta dificultad, para ella, resolver los problemas este tipo de problemas. Ahora bien, de la entrevista se desprende el papel que ella le asigna a las relaciones numéricas en la búsqueda de la solución del problema. Emplea relaciones numéricas aprendidas para buscar una solución razonable.

E: *El siguiente problema dice: Pablo tiene 60 cm de estatura y Tatiana tiene 180 cm de estatura, ¿cuántas veces menos estatura tiene Pablo que Tatiana?*

O: *Este ejercicio lo resolví porque el número que siempre tengo en mente cuando pienso en números mayores es el 120*

E: *¿Por qué?*

O: *Es un número que me quedó grabado desde que aprendí a multiplicar. Como dice que Pablo tiene 60 centímetros de estatura y Tatiana tiene 180 centímetros de estatura, primero saqué el doble de 60 y me salió 120, que era lo que yo tenía en mente. Pero el número 180 es mayor que 120, o sea tenía que sacar el triple*. Y al sacar el triple me salió la estatura que tenía que tener Tatiana.

El problema de producto cartesiano fue resuelto correctamente por Orianne, tanto en el cuestionario PEM como en la entrevista.

E: *El siguiente problema dice: Tengo 6 camisetas y 2 pantalones. ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

O: *Ya que son 6 camisetas y 2 pantalones, los pantalones tienen 6 oportunidades de combinarse, yo lo hice así. Las camisetas las multipliqué por los pantalones ya que el pantalón sólo lo puedo multiplicar por 6 y uso la multiplicación y me da 12.*

Orianne responde también correctamente a los problemas de escala, tanto en el cuestionario PEM como en la entrevista y se confirma que este tipo de problemas no le supone dificultad para resolverlos.

E: *El siguiente problema dice: El mapa tiene una escala de 8:4000000; esto significa que 8 centímetros del dibujo representan 4000000 de centímetros reales. Determina la distancia de Quillota a Limache (se le entrega a la chica una hoja con el mapa, un lápiz y una regla graduada para resolver el problema)*

O: *Aquí dice que el mapa tiene una escala de 8 cm; el dibujo que representa 4 millones de centímetros reales; lo que hice yo fue dividir los 4 millones por los 8 centímetros*

E: *¿Por qué?*

O: *Porque decía que los 8 centímetros eran en realidad 4 millones de centímetros reales, entonces al dividir eso me iba a salir un resultado que yo iba a multiplicar por los 3 centímetros, que era la distancia entre*

Limache y Quillota, entonces al multiplicar el 3, la distancia me saldría el resultado.

Tabla 8.3. RESUMEN DE RESULTADOS DE ORIANNE

Problema	Resultado en el Cuestionario PEM	Resultado de la entrevista	¿Hay coincidencia?
Problema de proporcionalidad simple con números decimales	Cambio de estructura	Cambio de estructura	Sí
Problema de proporcionalidad simple con números enteros	No se presenta	Acierto	
Problema de comparación con la expresión “veces menos”	Acierto	Acierto	Si
Problema de combinatoria	Acierto	Acierto	Sí
Problema de escala	Acierto	Acierto	Si

Prescripción diagnóstica de Orianne:

Orianne tiene dificultades de comprensión de los problemas de proporcionalidad simple con números decimales menores que uno (problemas 2 y 11), en los que aplica el proceso de compensar aditivamente en una magnitud lo que le falta a la otra para llegar a la unidad. De nuevo la presencia de los números decimales menores que uno dificulta que el sujeto de una solución correcta, pero no comete el error de invertir la operación. Lo que hace es interpretar la proporcionalidad de forma aditiva, por ello Orianne está en una fase idónea en el que el profesor debería introducir la proporcionalidad con el fin de que supere la concepción aditiva que tiene de la misma.

Resuelve con cierta facilidad los problemas de comparación y de producto cartesiano.

En el problema de área y perímetro se comprueba su falta de comprensión de las relaciones entre área y perímetro, que necesitan ser practicadas.

En el problema del caracol da la respuesta correcta lo que denota cierta profundidad en la captación de sutilezas en los problemas.

La respuesta que da al problema de las luces (problema 9) denota una comprensión muy incipiente de la idea de combinación.

8.2.4 Entrevista 4: Sarina

Sarina (sujeto 20) tiene un 82% del test de Raven correcto, y en el cuestionario PEM ha resuelto 8 problemas en forma correcta. Está en octavo año básico al momento de resolver el cuestionario PEM; ha resuelto tres problemas de comparación, los problemas de números decimales, el problema de combinatoria de producto cartesiano, el problema del caracol y un problema de escala.

Extracto de la entrevista

E: *Sarina te voy a preguntar algunos problemas de matemáticas, el primero dice: Pablo tiene 60 cm de estatura y Tatiana tiene 180 cm de estatura. ¿Cuántas veces menos estatura tiene Pablo que Tatiana?*

S: *Para resolver ese problema tuve que, de los 180 centímetros de estatura resté los 60 centímetros de estatura de Pablo y el resultado lo dividí por dos que sería por el número que divido la estatura de Pablo; entonces en este caso me dio 60.*

E: *El segundo problema dice: Si una manzana pesa 0,234 kilo y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta el kilo?*

S: *Yo primero me guié por las proporciones y como que la primera idea que se me vino a la mente fue la de las proporciones pensé 0,234 es a 1 y x es a 1,12. Entonces x es igual a 0,234 por 1,12 y el resultado lo divido por 1*

E: *¿Cuál es el resultado?*

S: *0,234 por 1,12 (da la respuesta)*

E: *El siguiente problema dice: Tengo 6 camisetas y 2 pantalones. ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

S: *Si tengo 6 camisetas y 2 pantalones, tengo 2 opciones para combinar las 6 camisetas; entonces 6·2 es igual a 12 y hay 12 maneras diferentes de vestirse*

E: *El siguiente problema dice: El mapa tiene una escala de 8:4000000, esto significa que 8 centímetros del dibujo representan 4000000 de centímetros reales. Determina la distancia de Quillota a Limache (se le entrega a la chica una hoja con el mapa, un lápiz y una regla graduada para resolver el problema)*

S: *Primero medí el mapa con la ayuda de la regla pero no me sirvió de mucho*

E: *¿Y qué otras mediciones hiciste?*

S: *Medí de Quillota a Limache*

E: *¿Cuánto te dio?*

S: *3 centímetros. Después dividí los 4 millones por 8 y el resultado me salió 500000 y luego eso lo multipliqué por 3, que se debe a los 3 centímetros de distancia y así llegué hasta el resultado o sea 1500000. La distancia entre Limache y Quillota son 1500000 centímetros.*

Tabla 8.4. RESUMEN DE RESULTADOS DE SARINA

Problema	Resultado en el Cuestionario PEM	Expectativa en la entrevista	¿Hay coincidencia?
Problema de comparación con la expresión “veces menos”	Cambia el significado de la relación	Cambia el significado de la relación	Si
Problema de proporcionalidad simple con números decimales	Correcto	Correcto	Si
Problema de combinatoria	Acierto	Acierto	Sí

Problema de escala	Acierto	Acierto	Si

Prescripción diagnóstica de Sarina:

Las respuestas de Sarina durante la entrevista han coincidido plenamente con sus respuestas en el cuestionario PEM. Sarina ha resuelto tres de los cuatro problemas de comparación, en la entrevista se le puso un problema de comparación con la expresión "veces menos", el mismo que tuvo incorrecto en el cuestionario PEM, en donde cambia el significado de la relación comparativa. En el problema de comparación 1, hace una traducción de la expresión comparativa "veces menos" como una expresión compuesta. Para obtener cuántas veces menos es 60 que 180, empieza restando 180-60=120 y dividiendo 120:60 y dan como solución 2 veces menos. En la entrevista sigue cometiendo el mismo error que realizó en el cuestionario escrito.

En el cuestionario PEM, Sarina ha resuelto bien los dos problemas de números decimales, en la entrevista se confirma que no tiene dificultad en hacer los problemas de proporcionalidad simple con números decimales.

El problema de combinatoria de producto cartesiano ha sido resuelto correctamente tanto en el cuestionario PEM como en la entrevista.

De los problemas de escala, Sarina resolvió uno de ellos; para confirmar su estrategia se le ha planteado nuevamente y también lo resolvió correctamente. Necesita profundizar en el tema.

La respuesta escrita en el cuestionario PEM al problema 7 refleja la confusión típica entre área y perímetro.

En el problema 9, el de las luces, refleja una interpretación personal del concepto de combinación que necesita ser reorientada.

8.2.5 Entrevista 5: Iván

Iván (sujeto 17) , está en sexto año de enseñanza básica, ha tenido el 87% de test de Raven correcto y en el cuestionario PEM. Ha resuelto correctamente tres de los cuatro problemas de comparación, el problema de combinatoria de producto cartesiano y el problema del caracol.

Extracto de la entrevista

E: *Iván, te voy a hacer una entrevista relacionada con los problemas del cuestionario. El primer problema dice: Si una manzana pesa 0,234 kilo y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta cada manzana?*

I: *Voy a aproximar lo que pesa 0,230 para que se haga más fácil el problema... voy a dividir por 4 que es aproximadamente lo que pesa cada manzana, es decir es ¼ de kilo.*

E: *¿Qué resultado obtienes?*

I: *Me da 0,28, entonces lo que no sé todavía es cómo devolver eso*

E: *¿A qué te refieres con devolver?*

I: *Que yo aproximé, y lo que pregunta de lo que cuesta es exacto. Entonces estoy viendo cómo puedo hacerlo de otra manera porque tengo una aproximación, pero no sé como seguir.*

E: *El siguiente problema dice: Si una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 dólares, ¿cuánto cuesta la bolsa de mermelada?*

I: *Si la bolsa pesa 2 kilos y el kilo vale 6 dólares, la bolsa pesaría 12 dólares.*

E: *¿Y qué resultado obtienes?*

I: *12 dólares*

E: *El siguiente problema dice: Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿de cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

I: *Para resolver este problema multiplico 6 por 2*

E: *El siguiente problema dice: El lado de un cuadrado mide 8 cm, si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado, ¿en cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?*

I: *Se le saca 8 porque el perímetro del cuadrado disminuye en 8, entonces los otros lados tendrían que repartirse y lo que me saldría sería 6. Entonces ahora el área del cuadrado es 36, si antes era 64 ahora voy a restar (hace los cálculos en un papel). Y el cuadrado disminuyó en 28 centímetros cuadrados su área.*

Tabla 8.5. RESUMEN DE RESULTADOS DE IVÁN

Problema	Resultado en el Cuestionario PEM	Resultado en la entrevista	¿Hay coincidencias?
Problema de proporcionalidad simple con números decimales	Error de cambio de estructura y aproximación	Aproximación	Si
Problema de proporcionalidad simple con números enteros		Correcto	
Problema de combinatoria	Correcto	Correcto	Si
Problema de área perímetro	Incompleto	Correcto	No

Prescripción diagnóstica de Iván:

En los problemas de proporcionalidad simple con números decimales Iván no resuelve el problema con una operación directa de multiplicación o división. Elige procesos complicados de compensación para estimar el resultado, que en ocasiones le aproxima a la solución.

En los problemas de comparación de disminución (problema 1 del cuestionario PEM), Iván comete el error de cambiar el significado de la relación. Interpreta a relación comparativa como doble: primero restar y después dividir. Necesita corregir esta interpretación de la relación "veces menos".

La respuesta al problema 7 de áreas y perímetros en el cuestionario PEM está incompleta, pero vista la respuesta correcta que da en la entrevista, deducimos que no tiene ninguna dificultad con este problema.

En el problema 9 realiza una interpretación muy alejada de la idea de combinaciones.

8.2.6 Entrevista 8: Alejandro

Alejandro está en octavo año básico, obtuvo un 78% en el test de Raven y ha resuelto correctamente 6 problemas en el cuestionario PEM, los problemas de comparación, uno de escala y el problema de producto cartesiano de combinatoria.

Extracto de la entrevista

E: *Si una manzana pesa 0,234 kilos y el kilo cuesta 1,12 dólares, ¿cuánto cuesta casa manzana?*

E: *¿Cómo resolverías este problema?*

A: *Hay que dividir el kilo que cuesta 1,12 euro por lo que pesa la manzana 1,12 : 0,34 y esto se simplifica y queda 1120: 234*

E: *¿Qué haces?*

A: *Divido, pero tampoco me acuerdo porque me han enseñado de pasada la división de decimales*

E: *¿Y la multiplicación de decimales?*

A: *Esa sí, esa me la han enseñado más detallada*

E: *Te voy a plantear otro problema: Si una bolsa de mermelada pesa 2 kilos y el kilo cuesta 6 dólares ¿cuánto cuesta la bolsa de mermelada?*

A: *12 dólares (respuesta inmediata)*

E: *El tercer problema dice: En Santiago hacen 10 grados de temperatura y en Granada 30 grados de temperatura, ¿cuántas veces menos temperatura hay en Santiago que en Granada?*

A: *3 (respuesta inmediata)*

E: *¿Y cómo obtienes el resultado?*

A: *Dividiendo 30 por 10*

E: *El cuarto problema dice: El lado de un cuadrado mide 8 cm, si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado, ¿en cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?*

A: *El lado hay que multiplicarlo por 4, restarle 8 por 4 y nos da 32, y después a eso restarle 8 y quedan 24.*

E: *¿Y esa es tu respuesta o falta por hacer algún cálculo?*

A: *(piensa)*

E: *¿Cuál sería la respuesta entonces?*

A: *24 centímetros*

E: *¿En el colegio te han enseñado área y perímetro?*

A: *Poco*

E: *El siguiente problema dice: Tengo 6 camisetas y dos pantalones, ¿de cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?*

A: *Habrá que multiplicar los números y da 12*

Tabla 8.6. RESUMEN DE RESULTADOS DE ALEJANDRO

	Respuesta en el cuestionario PEM	Respuesta en la entrevista	¿Hay coincidencia?
Problema de proporcionalidad simple con números decimales	Error de inversión	Error de inversión	Sí
Problema de proporcionalidad simple con números enteros	No hay	Correcto	
Problema de comparación con la expresión “veces menos”	Correcto	Correcto	Si
Problema de área perímetro	En blanco	Error de concepto	No
Problema de combinatoria	Correcto	Correcto	Sí

Prescripción diagnóstica de Alejandro:

En el problema de números decimales Alejandro comete el error de inversión tanto en el cuestionario PEM como en la entrevista. Sin embargo, el mismo problema con números naturales es resuelto correctamente. Tiene pues dificultad de comprender las relaciones multiplicativas cuando intervienen números decimales.

Con los problemas de comparación y con el problema de producto cartesiano no tiene ningún tipo de dificultad para resolverlos.

Lo más destacado de la entrevista con Alejandro lo hemos observado en el problema 7 de área y perímetro. En el cuestionario escrito no dio respuesta, dejando en blanco este problema. Sin embargo, durante la entrevista realiza algunos cálculos y se observa que comete el error que hemos denominado “error de concepto”. Esto nos hace pensar que el error de “no responde” en el problema 7, viene provocado por una falta de comprensión de los conceptos de área y perímetro.

En el problema 9 de las luces se equivoca al contar el número de luces en algunas combinaciones, pero acierta en la estrategia.

Alejandro tiene dificultad para determinar la escala en un mapa, no así aplicar una escala en la determinación de una distancia entre dos puntos. Necesita pues profundizar el tema de las escalas.

En el problema 5 del caracol sólo representa la situación diaria pero no extrapola, da una respuesta que sugiere una comprensión superficial del problema.

8.3. Fiabilidad

Las entrevistas las hemos utilizado también para estudiar la fiabilidad de las respuestas dadas por los sujetos. Hemos utilizado como criterio de fiabilidad el porcentaje de acuerdos entre las respuestas dadas al cuestionario PEM y las respuestas dadas en la entrevista a problemas similares.

De las tablas de coincidencias anteriores hemos obtenido un porcentaje global de acuerdos del 75%. Este índice nos indica que no ha habido coincidencias en la cuarta parte de las respuestas que los niños han dado en la entrevista con respecto a las que dieron en el cuestionario PEM.

Tabla 8.7. PORCENTAJES DE ACUERDO

Problema	**% de acuerdo**
Números decimales	66 %
Problema de comparación	100%
Problema simple de producto cartesiano	100%
Problema complejo de áreas y perímetro	50%
Problemas de escala	100%

Pero también hemos observado que las discrepancias se han dado con mayor grado en unos tipos de problemas que en otros (véase tabla 8.7). Concretamente, en los problemas de comparación, de escala y de producto cartesiano la fiabilidad ha sido del 100%, en los problemas que incorporan números decimales el acuerdo baja al 66% y donde menos acuerdo se ha producido ha sido en el problema complejo de área y perímetro con un 50% de acuerdo.

Capítulo 9

Conclusiones

9.1. Introducción

Con esta investigación hemos pretendido identificar características de los sujetos con talento cuando resuelven problemas de estructura multiplicativa. El conocimiento adquirido con esa caracterización permite realizar una prescripción diagnóstica de los alumnos con talento, que puede ser útil en un contexto de integración escolar que contemple la diversificación de la enseñanza como opción para atender las diferencias individuales. El primer reto que se nos ha planteado ha sido determinar los tipos de problemas que debían constituir la base sobre la que identificar estas características. La apuesta que hemos realizado ha sido seleccionar tipos de problemas utilizados ya, por separado, en investigaciones previas en las que se había puesto de manifiesto que estos problemas ocasionaban dificultades a los sujetos que cometían en ellos errores sistemáticos. Con estos problemas hemos elaborado y aplicado un cuestionario, el cuestionario PEM, cuyos ítems son problemas enunciados en torno a un contenido específico de matemáticas: la estructura multiplicativa. Y esto porque nos parece importante controlar el campo conceptual al que pertenecen las tareas que se les proponen a los sujetos. La función del cuestionario PEM es la de un test de aptitud diagnóstico aplicable a niños con talento que ya han sido seleccionados como tales mediante un test de inteligencia general, el test de Raven; aunque, en función de los resultados obtenidos en esta investigación, podría ser aplicado directamente como test diagnóstico sin una previa aplicación de un test de inteligencia general en los primeros cursos de la enseñanza secundaria. El primer grupo de preguntas que nos hacíamos y los primeros objetivos de la investigación están orientados a este fin: la construcción de un test de aptitud específica.

Una vez construido el cuestionario PEM y puesta de manifiesto su validez, hemos abordado la respuesta a una segunda tanda de preguntas y objetivos, que se refieren al análisis de los procesos de los alumnos en resolución de problemas de estructura multiplicativa, que nos permita caracterizar a los sujetos con talento desde un enfoque de procesos, en términos de representaciones, procedimientos, estrategias y errores. La información global obtenida va encaminada a permitirnos realizar una propuesta prescriptiva de enseñanza para los alumnos con talento, y todo ello en línea con ideas de autores como Renzulli (1998), quien sugiere que el enfoque más efectivo para educar estudiantes de altas capacidades es que los profesores escojan los contenidos, la enseñanza y las oportunidades de acuerdo con las necesidades de aprendizaje de los estudiantes. De todo ello exponemos las conclusiones obtenidas organizándolas de acuerdo a las preguntas y los objetivos que nos habíamos propuesto.

9.2. Construcción de cuestionario - Bloque de preguntas 1

Dentro del esquema de investigación planteada, la primera reflexión que nos hicimos fue ¿a qué estudiantes va dirigido nuestro trabajo? Estamos interesados en el talento matemático y, en muchas ocasiones, lo que se hace es aplicar un test de aptitud general para determinar niños con talento. Pero el que un niño tenga un alto puntaje en un test de inteligencia no garantiza el tener talento matemático. Por ello, la primera pregunta que nos hicimos en el capítulo 1, dentro del primer bloque de preguntas fue:

- Los niños que son identificados como niños con talento o superdotados mediante un test de aptitud general o inteligencia, ¿manifiestan cualidades que están ligadas al talento matemático?

Puesto que la pregunta es muy general, la hemos desarrollado en un ámbito más limitado, ceñida al campo conceptual de la estructura multiplicativa. Hemos encontrado bastantes indicios de que los sujetos seleccionados en su mayoría tienen talento matemático. El primer dato obtenido al respecto ha sido al responder a una pregunta más concreta al respecto:

- ¿Existe relación entre las puntuaciones obtenidos por los niños en un test de aptitud general, como el test de Raven, y el rendimiento en resolución de problemas en un campo de conocimiento específico de la matemática como lo es la estructura multiplicativa?

Así pues, a la primera pregunta no se le ha dado un tratamiento puntual, sino que se ha ido desgranando a lo largo de todos los capítulos de resultados. La hemos explorado desde dos puntos de vista: a) comparando el rendimiento en un cuestionario de resolución de problemas y las puntuaciones de estos niños en un test de inteligencia (el test de Raven) y b) analizando las estrategias y errores de los niños seleccionados en una prueba de resolución de problemas.

Dado que no había un test de aptitud que se adecuara plenamente a nuestra investigación nos propusimos como primera meta construir un cuestionario constituido exclusivamente de problemas de estructura multiplicativa y validarlo como tal. En consecuencia con ello la segunda pregunta planteada fue:

- ¿Qué validez tiene un test de problemas pertenecientes al campo conceptual de la estructura multiplicativa como test diagnóstico de aptitud en niños con talento?

De estos interrogantes previos surgió el primer objetivo de la investigación:

Objetivo 1 *Construir un instrumento con problemas de estructura multiplicativa que desempeñe la función de test de aptitud matemática.*

Los criterios y los pasos seguidos para seleccionar los problemas que debían constituir el test de aptitud matemática están descritos en el capítulo 3 dedicado a la metodología de este trabajo. Queremos destacar algunos de los criterios:

a) son problemas que se han utilizado en investigaciones previas

b) corresponden a cinco tipos de problemas
c) son problemas en los que ya se ha puesto de manifiesto que los niños de edad similar a los de la muestra tienen dificultades en su resolución y cometen errores específicos.

Con estos criterios, hemos pretendido dar utilidad práctica al conocimiento de base obtenido durante muchos años de estudio de la estructura multiplicativa y ponerla al servicio de la identificación/evaluación diagnóstica de los sujetos con talento.

Una vez construido el cuestionario PEM, fue aplicado a dos grupos de alumnos: un grupo estaba constituido por sujetos que habían sido seleccionados como sujetos con talento mediante el test de Raven, el segundo grupo estaba constituido por niños que se habían presentado a la prueba de selección de niños con talento y no habían sido seleccionados. La información que obtuvimos de comparar los datos obtenidos en ambos grupos de sujetos esta recogida en el capítulo 4 y afecta a los siguientes objetivos 2 y 3 de la investigación:

Objetivo 2
Contrastar si el cuestionario de problemas es válido como test de identificación de la aptitud matemática de los estudiantes con talento.

Objetivo 3
Comparar el rendimiento obtenido de niños con talento en el test de Raven y el rendimiento en resolución de problemas de estructura multiplicativa.

Ambos objetivos han sido tratados en el capítulo 4. Los resultados obtenidos nos llevan a establecer las siguientes conclusiones con respecto a los objetivos 2 y 3.

El cuestionario PEM ha reflejado ser buen instrumento diferenciador entre el grupo de estudiantes con talento y el grupo de sujetos que no había sido admitido como tal. Incluso las puntuaciones del cuestionario PEM establecen una diferencia mayor entre los dos grupos que la puntuación que tuvieron en el test de Raven, por lo cuál su potencial para diferenciar entre los dos grupos de sujetos ha resultado ser mayor que el del test de Raven.

Dado que, no hay diferencia significativa en el rendimiento medio obtenido en el cuestionario PEM por los distintos colegios y cursos a los que pertenecen los sujetos, y a que no hay influencia significativa del colegio sobre los rendimientos obtenidos según los cursos, nos lleva a concluir que el potencial que tiene el cuestionario PEM para identificar grupos de sujetos con talento es independiente del colegio y de curso al que pertenecen. Con ello se refuerza la validez externa del cuestionario como instrumento aplicable a identificar características matemáticas de sujetos con talento.

La validación de un cuestionario puede hacerse tomando otro test como criterio de comparación y poniendo de manifiesto si hay concurrencia entre lo que miden ambos instrumentos (Cohen, Manion y Morrison, 2000; Kerlinger y Lee, 2002). En nuestro trabajo hemos encontrado que hay "en cierta medida" validez concurrente entre el rendimiento en el cuestionario PEM y las puntuaciones en el test de Raven, es decir, el cuestionario PEM mide características similares al test de Raven. Como medida de la validez concurrente entre ambos instrumentos hemos calculado el coeficiente de correlación que ha dado un valor de 0,684. Este coeficiente de correlación es superior al encontrado al calcular la correlación entre las notas de matemáticas y el Cuestionario PEM, que es de 0,38, y bastante mayor que el coeficiente de correlación entre el test de Raven y la notas de matemáticas. Por lo tanto, el cuestionario PEM tiene una validez concurrente con el test de Raven que por su índice, podemos decir que es aceptable y que miden una característica bastante similar en los sujetos, lo que no ocurre si tomamos como variable la nota de matemáticas. La nota de matemáticas se revela como una variable muy pobre para diferenciar entre grupos de sujetos con talento de aquellos que no fueron aceptados como tales.

Según lo anterior, el proceso de selección de niños con talento matemático tomando como criterios conjuntamente la calificación en matemáticas, la nominación del profesor y el rendimiento en el test de Raven, tiene efectos similares al proceso de selección que podría establecer el rendimiento en el cuestionario PEM; el cuestionario PEM enfatiza una discriminación que no producen los resultados de la calificación en la asignatura de matemática, a la vez que, el mayor rendimiento en PEM del Grupo1 (grupo talento) sugiere capacidades matemáticas desarrolladas en la resolución de problemas, que no tienen los sujetos del Grupo 2 (grupo de contraste).

Se han puesto de manifiesto otras cuestiones, tales como que la calificación o nota final en matemáticas, no constituye un criterio de selección de características similares al cuestionario PEM o al test de Raven; en los resultados cabría esperar un mayor parecido en el rendimiento entre grupos en las variables TPERCEN y MATEMAP al estar ambos criterios basados en el conocimiento matemático, y menos entre TPERCEN y RAVENP ya que esta última variable es de carácter más general. Esto no ha sido así y los rendimientos en el cuestionario PEM y en el test de Raven producen rendimientos más similares. De los resultados anteriores se puede afirmar, en general, que el cuestionario PEM se constituye como un buen criterio diferenciador de grupos de niños con talento matemático.

9.3. Análisis de los problemas

Nuestra pretensión no ha sido sólo evaluar de manera global a los sujetos con talento con respecto a su desempeño en resolución de problemas de estructura multiplicativa, lo que hemos realizado tomando la puntuación el cuestionario PEM. A la información global hemos creído necesario añadir información más precisa respecto a aspectos puntuales de conocimiento matemático asociados a distintas categorías semánticas de problemas de estructura multiplicativa. Pensamos que una evaluación centrada en el diagnóstico debe explorar las diversas componentes de un campo semántico para detectar conocimientos ya adquiridos y dificultades y errores que hay que superar y corregir. Por ello, una vez construido el cuestionario PEM y estudiadas en el capítulo 4 de manea global las posibilidades de este cuestionario como un test de aptitud específica y la validez del mismo, en el capítulo 5 hemos realizado un análisis según los tipos de problemas y un análisis de ítems aplicado a los problemas de manera individualizada. Esto va encaminado a dar respuesta al objetivo 4 de la investigación.

Objetivo 4

Realizar un análisis de ítems aplicado a los problemas del cuestionario construido.

9.3.1. Análisis de los tipos de problemas

En lo referente a los tipos de problemas una de las primeras sorpresas ha sido la poca dificultad que han tenido los problemas de comparación con respecto a los otros tipos de problemas. En trabajos previos (Castro, 1995; Lewis y Mayer, 1987; Stern, 1993) se había puesto de manifiesto la especial dificultad que acarreaba este tipo de problemas para los estudiantes de los últimos cursos de primaria y los cursos iniciales de la secundaria. Sin embargo, los problemas del tipo 1 incluidos en el cuestionario PEM, los problemas de comparación en conjunto, han resultado fáciles para los sujetos con talento. Han resultado ser el tipo de problemas más fáciles de los incluidos en el cuestionario PEM, tanto para los niños del Grupo 1 (niños del grupo talento) como para los niños del Grupo 2 (grupo de comparación).

Los cinco tipos de problemas no han tenido el mismo índice de dificultad. Tomados en conjunto, los tipos de problemas más difíciles son los problemas del tipo 4, los problemas complejos, aunque han resultado bastante más difíciles para el grupo de comparación (Grupo 2) que para el grupo de sujetos del grupo talento (Grupo 1). Las razones de esta dificultad no son comunes en los dos problemas que conforman ambos grupos, por lo que retomaremos esta idea cuando realicemos el análisis individual de cada problema.

Si bien es cierto lo anterior, también hemos encontrado que los cinco tipos de problemas no difieren todos entre sí en dificultad, pues entre algunos de ellos no hay diferencias de dificultad significativas. Entre los que no hay diferencias significativas se han agrupado en tres subconjuntos homogéneos, el primer subconjunto formado por los problemas complejos y de números decimales, el segundo subconjunto homogéneo formado por los problemas de combinatoria y de escala y el tercer subconjunto formado por los problemas de comparación.

Los cinco tipos de problemas han tenido un índice de dificultad significativamente menor para los sujetos con talento que para el grupo de contraste. A pesar de que hay interacción significativa entre las variables GRUPO de alumnos (1 y 2) y TIPO de problemas, en todos los casos el índice de dificultad es menor en el Grupo 1 que en el Grupo 2. Esta interacción es ordinal y no se altera el orden de dificultad de los tipos de problemas en relación con el grupo. La única alteración que se observa en los problemas de tipo 3, los problemas de escala, en donde se observa una mayor distancia entre los índices de dificultad de los dos grupos de sujetos. Los problemas que más diferencias establecen entre el Grupo 1 (con talento) y el 2 (contraste) son los de tipo 3, es decir, los problemas de escala.

De manera general, comparando ambos grupos se observa que, en todos los tipos de problemas el porcentaje de aciertos es mayor en el Grupo 1, grupo talento, que en el Grupo 2, grupo de contraste, por tanto, concluimos que, los cinco tipos de problemas del cuestionario PEM, son útiles para diferenciar entre los niños con inteligencia general sobre la media de los que están por debajo. De éstos los que más diferencian son los problemas de escala y los que menos los problemas complejos y los de números decimales.

9.3.2. Análisis de ítems

El primer aspecto que hemos analizado de los ítems es su índice de dificultad. El índice de dificultad de los 12 ítems (problemas) del cuestionario PEM con relación al total de 60 sujetos (Grupo 1 y Grupo 2) oscila entre 0,03 en el problema 9, problema de combinatoria que ha resultado el más difícil de los doce problemas, y 0,98 en el problema 12, que es un problema de comparación. De forma conjunta, para ambos grupos de sujetos, hay cuatro ítems que les han resultado muy difíciles (ítems 5, 7, 9 y 11), tres ítems difíciles (2, 6 y 10), tres ítems fáciles (los problemas 1, 3 y 4) y dos muy fáciles (8 y 12). En ambos grupos hay coincidencia en que los ítems 8 y 12 de comparación son muy fáciles y que el ítem 9 de combinatoria es muy difícil. Dentro de los problemas de comparación, estos dos problemas son de "comparado desconocido", y está contrastado que son los de menor dificultad (Castro, 1995) dentro de este tipo de problemas.

Pero el índice de dificultad de los doce problemas difiere, en la mayoría de los casos, del Grupo 1 al Grupo 2. Para el Grupo 1, los sujetos con talento, hay un ítem de combinatoria muy difícil (problema 9) y otro del mismo tipo muy fácil (problema 3). Así pues, en cuanto a dificultad, los problemas de combinatoria se han situado en los extremos. El problema 3 al ser muy fácil produce un efecto techo, por el contrario, el problema 9 produce un efecto suelo; por ello, no son demasiado útiles para identificar niños con talento en función de su índice de dificultad. Sí son útiles para detectar cualidades matemáticas de estos niños si nos centramos en el análisis de sus procesos de solución. Pese a que en el problema 3 hay un alto logro, este se produce por estrategias propias no usuales; no se debe tanto al conocimiento del significado de la multiplicación como producto cartesiano. En el problema 9 se observa una falta de conocimiento de las nociones combinatorias y bastante confusión entre ellas, pues dan un abanico bastante amplio de soluciones erróneas. Para el Grupo 2, grupos de contraste, el problema 9 sigue siendo un problema muy difícil, mientras que el problema 3 se sitúa con un índice de dificultad normal, es decir, intermedio.

Los ítems de problemas complejos (problemas 5 y 7) y los que contienen números decimales (problemas 2 y 11) son difíciles para el Grupo 1, y muy difíciles para el Grupo 2. Los problemas de escala (problemas 6, 10) son fáciles para los sujetos con talento y muy difíciles para el Grupo 2 de contraste. En estos problemas de escala es donde más diferencia se ha observado entre el grupo de sujetos con talento y el grupo de sujetos que no fueron seleccionados como tales. Estos grupos de problemas se han comportado de manera homogénea al respecto. Por último, todos los problemas de comparación (problemas 1, 4, 8 y 12) han resultado muy fáciles para los sujetos con talento, mientras que esta homogeneidad se rompe en el Grupo 2, ya que los problemas 1 y 4 han pasado de muy fáciles a fáciles.

Pese al dispar índice de dificultad encontrado entre los doce problemas, sólo hay dos que no presenten homogeneidad en sus índices de discriminación. Referido al Grupo 1, los problemas del cuestionario PEM, discriminan bien un rasgo común, salvo en el caso de los ítems 2 y 12. El ítem 2 tiene un valor negativo, lo que significa que está muy poco relacionado con el resto de los ítems que componen el cuestionario PEM. Sin embargo, en el Grupo 2 se ha obtenido un índice bueno de discriminación. El ítem 12 tiene un pobre poder discriminatorio en el Grupo 1, lo que coincide con el hecho de que tiene muy poca dificultad y en él se ha producido un efecto techo y un pésimo poder discriminatorio en el Grupo 2.

Para los sujetos del Grupo 1, hay cuatro ítems con poder de discriminación pobre (3 ítems de comparación y uno de números decimales), un problema con poder de discriminación regular (el problema complejo), 3 problemas con poder discriminatorio bueno (un ítem de combinatoria, uno de comparación y uno de escala) y 4 ítems con poder discriminatorio excelente (un problema complejo, uno de combinatoria, uno de escala y uno de números decimales).

En cuanto a la asociación entre grupos de sujetos y problemas hemos obtenido que son significativas las asociaciones correspondientes a los problemas 1, 3, 4, 6 7, 9, 10 y 11, lo que quiere decir que hay asociación entre estos problemas y el grupo al cual pertenecen. Mientras que en los problemas 2, 5, 8 y 12 no hay asociación significativa con respecto al grupo de pertenencia.

9.3. Estrategias - Bloque de preguntas 2

El bloque de preguntas dos está referido a la descripción de los procesos que los sujetos con talento emplean en la resolución de los problemas de estructura multiplicativa. Con respecto a esta pregunta nos propusimos dentro del objetivo 5 una primera parte destinada a tal fin.

Objetivo 5

Describir las producciones de niños con talento de 11 y 13 años de edad en la resolución de problemas de estructura multiplicativa desde dos puntos de vista:

a) *Describir y categorizar las estrategias utilizadas por los sujetos con talento en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.*
b) *(Se trata en el punto 9.4)*

La descripción de la estructura de las estrategias la hemos realizado a partir de los procedimientos que han utilizado los sujetos enmarcados según el tipo de representación utilizada: verbal, pictórica y aritmética.

Hemos identificado una diversidad de procedimientos a partir de las producciones de los sujetos con talento, siendo la mayoría procedimientos ligados a representaciones aritméticas; en total, los sujetos han empleado 321 procedimientos aritméticos que representan el 63% de los procedimientos totales empleados. El contexto escolar en general y el aula de matemáticas en particular hace un énfasis especial en esta forma de representación y, por tanto, este resultado está dentro de lo esperado en niños con talento.

Le siguen los otros dos sistemas de representación: la representación verbal 75 procedimientos (14,7%), con énfasis en la modalidad aritmética (66 procedimientos), lo que pone de manifiesto la integración, en estos casos, de lo aprendido en el aula de matemáticas, con la forma de expresión a través del lenguaje natural; de la representación pictórica hay 92 procedimientos (18%), con especial énfasis, en el empleo del dibujo. En estos últimos casos los sujetos muestran su capacidad de apoyarse en una representación pictórica para resolver los problemas.

En las producciones de los sujetos hay un predominio de aquellas estrategias que cuentan con un único procedimiento, siendo ésta de representación aritmética (62%). En cuanto a combinaciones de dos representaciones diferentes, la más abundante es la combinación pictórica con la aritmética con 49 estrategias (13%), y sólo hay 7 casos en donde los sujetos combinan los tres tipos de procedimientos (2%).

Hemos encontrado una gran cantidad de estrategias diferentes (85), que han aparecido en las producciones de los sujetos con talento al resolver los problemas de estructura multiplicativa. Entre ellas las hay que no utilizan representación externa (la respuesta en blanco), y las que emplean uno, dos tres o cuatro procedimientos. Estas últimas son bastante elaboradas y constituyen una característica de las producciones de niños con talento que no se ha localizado en las producciones de niños normales.

También hemos observado la tendencia de los sujetos con talento a utilizar algunas de estas estrategias en cierto tipo de problemas. Por ello hemos realizado una descripción de las mismas por tipo de problemas en función de los procedimientos que las conforman.

En los problemas de números de números decimales, se ha obtenido que:

- Hay un predominio de los procedimientos aritméticos, casi una ausencia total de procedimientos pictóricos y sólo cuatro ausencias de respuesta. Los procedimientos aritméticos más empleados son la división partitiva y la compensación aditiva.

- En total los sujetos emplean 13 procedimientos diferentes para tratar de resolver los dos problemas de números decimales, 13 diferentes para el problema 2 y 9 para el problema 11; la gran dificultad que tienen ambos problemas o la no disposición de un procedimiento seguro de resolución, promueve recursos variados en los sujetos, en algunos casos de manera sorprendentemente acertada.

En los problemas de combinatoria, se ha obtenido que:

- Los procedimientos de resolución utilizados por los sujetos son: adición/resta repetida, enumeración de pares ordenados, diagrama de árbol, representación pictórica, regla del producto, combinaciones, otras estrategias y respuesta directa.
- El sistema de representación más empleado, con 45 procedimientos, es la representación aritmética, también tienen un peso importante los otros dos tipos de representación, la verbal con 17 procedimientos y la pictórica con 33.

En los problemas de comparación se ha obtenido que:

- Los tres tipos de representaciones están presentes en las producciones de los sujetos, el más frecuente es la representación aritmética con 116 casos, 22 casos de representaciones verbales y 16 casos de representaciones pictóricas

En los problemas de escala se ha obtenido que:

- Los procedimientos más empleados en la resolución de los problemas de escala son: reducción a la unidad, uso de proporcionalidad, empleo de series, división cuotitiva y multiplicación.
- La mayoría de los procedimientos, 50, pertenecen a la categoría de representación aritmética, le siguen 15 de la representación verbal y sólo 7 de la representación pictórica

En los problemas complejos de estructura multiplicativa se ha obtenido que:

- Los procedimientos que mayoritariamente se han utilizado son los de representación aritmética.

Desde nuestro punto de vista, las estrategias no sólo están caracterizadas por su estructura de procedimientos, la forma en que estos procedimientos se utilizan para obtener la solución es también importante. Observando matices en esta forma de utilización de los procedimientos hemos encontrado estrategias que son propias de niños con talento, a las que hemos denominado estrategias especiales. Las estrategias especiales que nos han parecido más significativas son:

- *comprobación del resultado*

  Hemos observado que los niños con talento tienen la disposición de verificar la validez del resultado obtenido en la resolución de un problema y para ello emplean procedimientos distintos a los que utilizaron en un principio. Se ha dado en los problemas de menor dificultad, en los que posiblemente los sujetos se sienten seguros de la solución dada y tratan de mostrar una mayor suficiencia que la que puede indicar una solución escueta. La comprobación o verificación del resultado forma parte de la etapa final del método de resolución de problemas propuesto por Polya (1965). Al llevar a cabo esta verificación en algunos de los problemas, los sujetos con talento han puesto de manifiesto una característica que guarda relación con atributos que otros autores les han asignado a los niños con talento. Concretamente, la característica de que los niños con talento *invierten con facilidad los procesos matemáticos* expresada por Krutetskii (1969) ha intervenido en este proceso de verificación.

  La verificación es un aspecto de las técnicas metacognitivas de control que para algunos autores son esenciales para resolver problemas con éxito (Lester, 1985; Schoenfeld, 1985, 1987, y Silver, 1985), entendiendo por metacognición el conocimiento concerniente de nuestros propios procesos cognitivos y de sus productos, o algo relacionado con ellos (Flavell, 1979).

- *utilizar varios procedimientos independientes en la resolución*

  Como hemos mencionado en el punto anterior, cuando un alumno con talento se enfrenta a un problema sencillo, pone en juego estrategias metacognitivas de control del resultado, pero a diferencia del caso anterior queremos resaltar en este punto el énfasis que ponen, sobreenfatizando el proceso de comprobación con dos o más procedimientos diferentes e independientes para la resolución del problema. Los procedimientos empleados pertenecen en unos casos al mismo sistema de representación y en otros a más de uno. Esto en cierta manera tiene que ver con el *gusto por el empleo de los números y sus operaciones*, expresado por Straker (Freeman, 1988), ya que una vez que han resuelto el problema siguen "jugando" con los números y sus operaciones. Tanto esta característica como la anterior pueden verse como una *predisposición para esforzarse*, que es uno de los tres pilares dentro del esquema más general de Mingus y Grassl (1999) sobre alumnos con excepcional capacidad matemática. Esta característica suele aplicarse al hecho de que ante un problema difícil el alumno persevera para encontrar la solución; en nuestro caso hemos encontrado que ante problemas aritméticos que les resultan fáciles, el alumno manifiesta esta perseverancia disfrutando del problema y recreándose en buscar distintas alternativas o comprobando la solución. Dentro del modelo triádico de Renzulli (1977) viene a significar *un alto compromiso con la tarea*, que se manifiesta tanto en problemas complejos como en tareas fáciles para ellos.

- *multiplicidad de pasos bien organizados en la resolución*

Una de las características de los sujetos superdotados expresada por Web (1993) (citado en Castro, 2004), es que "disfrutan organizando cosas y a las personas dentro de una estructura y un orden, buscan sistematizar" (p.176). Esta idea se refleja en las producciones de los sujetos con talento en que, en la resolución de los problemas, en algunos casos, elaboran estrategias que constan de gran cantidad de procedimientos y pasos bien articulados y argumentados en donde se combinan los diferentes sistemas de representación, verbal, aritmético y pictórico. Suelen emplearlas ante problemas donde la falta de dominio de la estructura usual de resolución les lleva a procedimientos variados pero válidos y bien organizados que articulan una buena estrategia de resolución. Estas formas de resolución tienen relación con alguna de las características de los sujetos con talento recopiladas por Greenes (1981) entre las cuales se encuentran la *flexibilidad en el manejo de datos y la habilidad para su organización*.

- *formas originales de razonamiento*

La creatividad es uno de los rasgos más asociados con el talento. El alto nivel de creatividad es uno de los tres componentes del modelo de Renzulli (1977) para la superdotación y también forma parte del modelo de Minguss y Gras (1999) para los estudiantes con capacidad matemática excepcional. En los sujetos de la muestra hemos observado dosis altas de originalidad en algunos problemas, en los que, al no disponer de la estructura matemática más usual que les permite resolver directamente el problema, han empleado procedimientos poco habituales e ingeniosos de razonamiento proporcional. Suelen ser procedimientos aritméticos, como el empleo de porcentajes, fracciones, reducción a la unidad, cambios de moneda, aunque algunos son también pictóricos. Estas formas originales de proceder tienen relación con algunas de las características que Greenes (1981) otorga a los sujetos con talento matemático, como la *agilidad mental, riqueza de ideas y originalidad de interpretación*.

- *formas de expresión escrita elaborada en sus justificaciones*

La capacidad de explicar verbalmente la solución de un problema no es una capacidad generalizada en los estudiantes de la enseñanza obligatoria. Hemos encontrado en algunos sujetos con talento que emplean el sistema de representación verbal de una forma muy bien estructurada para resolver, explicar o justificar sus estrategias, haciéndolo de una manera eficiente y elegante. Esta característica ha sido también identificada en sujetos superdotados por Benito (1996, 2000). Brigss y Wilson (2002) también la identifican refiriendo que estos niños son capaces de verbalizar las estrategias que utilizan. Coincide esta apreciación con la realizada por Heinze (2005), quien encontró en los estudiantes con talento mayor habilidad para verbalizar y explicar sus soluciones a los problemas que en los sujetos del grupo de comparación (que no eran considerados como tales).

- *formas de estructuración matemática avanzada en sus resoluciones*

Heinze (2005) afirma que los niños con talento intuyen con facilidad la estructura matemática del problema. Esa comprensión de la estructura del problema les permite elegir una estrategia de solución; si no disponen de una estrategia inmediata hay sujetos que pueden idear una estrategia matemáticamente "complicada" para su nivel, que lleva implícita una estructuración matemática bien organizada y que manifiesta un gran dominio de los conceptos y de los procedimientos de resolución. En estas estrategias el sistema de representación suele parecerse al que emplean los matemáticos, es conciso y riguroso; en este caso suele ser el aritmético, aunque en algunas ocasiones aparecen atisbos de lenguaje algebraico. Esta característica puede relacionarse con *resolver el problema de una manera eficiente y elegante* ya referida y la detectada por Overtoom-Corsmit y Span (1986) que indica que los sujetos con talento *resuelven mejor* y más rápido que los niños promedio.

- *resolución basada en el recuerdo de resoluciones anteriores*

Recordar información matemática (Krutetskii, 1969) es una de las características que se han destacado en las investigaciones sobre los superdotados; aplicar macroestrategias es otra característica que destaca Heinze (2005) en estudiantes superdotados. Ambos aspectos se han observado en las producciones de sujetos, que han recordado no sólo los datos de problemas anteriores similares sino también su estructura y han sido capaces de establecer una analogía entre problemas aplicados en sesiones distantes en el tiempo.

- *resolución usual ante problema difícil*

Algunos problemas del cuestionario han resultado bastante difíciles para el grupo de sujetos con talento de la muestra. No cabía esperar, por tanto, una resolución que podríamos catalogar como usual en estos sujetos por el nivel matemático de su edad y curso; no obstante, se ha encontrado en las producciones de estos sujetos las formas usuales de resolución, en las que se pone de manifiesto que los alumnos con talento piensan con claridad y economía al resolver problemas (Krutetskii, 1969).

- *empleo con facilidad de diferentes sistemas de representación*

Por último, señalar que los estudiantes con talento han empleado con habilidad diferentes sistemas de representación (pictórico, verbal y aritmético) tanto de manera individual como combinados y que han permitido caracterizar las estrategias.

Hemos comparado el rendimiento de los sujetos con talento en el Cuestionario PEM con las estrategias especiales que utilizan y hemos encontrado que sujetos con igual rendimiento muestran variedad de comportamientos en cuanto al empleo de procedimientos especiales, lo que subrayaría la característica detectada por Villarraga (2002) que indica que estos sujetos presentan 'diversidad de esquemas de conocimiento' y por tanto diversidad de formas de resolución.

9.4. Análisis de errores - Bloque de preguntas 3

En investigaciones precedentes se había puesto de manifiesto que los problemas que se han utilizado en la investigación provocan que se cometan errores en sujetos de edad similares a los que han conformado el grupo de estudiantes con talento de nuestra investigación. Por ello, el tercer bloque de preguntas incluidas en este trabajo se refiere a la posibilidad de que los niños con talento cometan errores en tareas matemáticas y caso de que así ocurra cuáles son estos errores. Para una prescripción diagnóstica es fundamental conocer los errores que los alumnos cometen en un momento dado de su evolución escolar, para poder plantear una enseñanza acorde con ello que intente remediar lagunas de conocimiento o concepciones equivocadas.

Esta idea está recogida dentro del objetivo 5, cuya segunda parte está enfocada a este fin.

> Objetivo 5: Describir las producciones de niños con talento de 12 y 13 años de edad en la resolución de problemas de estructura multiplicativa desde dos puntos de vista:
>
> *a) (Tratado en el punto 9.3)*
>
> *b) Identificar los tipos de errores que cometen los niños con talento, en la resolución de problemas de estructura multiplicativa.*

En nuestro trabajo de investigación hemos encontrado que los sujetos con talento cometen una variedad de errores, que en cierta medida son sistemáticos, en los distintos problemas de estructura multiplicativa incluidos en el cuestionario PEM. Algunos de estos errores ya estaban recogidos en la literatura sobre el tema, pero otros son nuevos y difícil de ubicar en clasificaciones de errores precedentes. Concretamente hemos detectado siete tipos de errores en las respuestas incorrectas a los que hemos añadido una categoría correspondiente a las respuestas en blanco:

1. Conmutar los datos
2. Cambio de estructura
3. Inversión de la operación
4. Omitir una operación
5. Error en un concepto
6. Cambio de significado de una relación
7. Emplear una estimación
8. No responde

Estas tipologías de errores enunciadas constituyen una clasificación exhaustiva de todos los errores observados, que se han presentado con una frecuencia similar, de manera que no hemos encontrado diferencias significativas entre las frecuencias con la que se han presentado los errores.

Los errores detectados en las producciones de los sujetos están asociados con algunos de los problemas empleados, es decir, cada error se produce en determinados problemas de manera significativa. A partir de ellos, se han obtenido las asociaciones significativas mostradas en la tabla 9.1. En donde se puede ver que:

1. El error 1-conmutar datos, está asociado significativamente con los problemas 9 y 11
2. El error 2-cambio de estructura, está asociado significativamente con los problemas 2 y 3
3. El error 3-inversión de la operación está asociado significativamente con los problemas 4 y 6
4. El error 4-omitir una operación, está asociado significativamente con el problema 5
5. El error 5-error en un concepto, está asociado significativamente con los problemas 7 y 10
6. El error 6-cambio de significado de una relación, está asociado significativamente con el problema 1

7. El error 7-emplear una estimación, está asociado significativamente con los problemas 2 y 11
8. El error 8-no responde, está asociado significativamente con el problema 7

Tabla 9.1. ASOCIACIONES SIGNIFICATIVAS ENTRE TIPO DE ERROR Y PROBLEMAS

	Error-1	Error-2	Error-3	Error-4	Error-5	Error-6	Error-7	Error-8
P1						X		
P2		X					X	
P3		X						
P4			X					
P5				X				
P6			X					
P7					X			X
P8								
P9	X							
P10					X			
P11	X						X	
P12								

Interpretando los errores según el tipo de problemas, tenemos que:

1. Donde menor número de errores, en términos absolutos, ha aparecido es en los problemas de comparación multiplicativa. Esto, en cierto modo, nos ha sorprendido pues los problemas de comparación suelen ser propensos a que los estudiantes cometen errores en su resolución (Stern, 1993). De acuerdo con los resultados obtenidos, en los problemas de comparación (problemas 1, 4, 8 y 12) debemos distinguir dos grupos: uno formado por los problemas en los que el dato que se desconoce es el comparado (problemas 8 y 12), que plantean poca dificultad de comprensión a los sujetos con talento. Concretamente, el problema 12, que es de comparación de aumento, no produce errores en los sujetos, por lo que debe

descartarse en una hipotética intervención educativa con estos estudiantes. En el problema 8, de comparación de disminución, los sujetos han cometido el error de interpretar la expresión "veces menos" con el doble significado de multiplicar y restar. Esto es consistente con los datos obtenidos en investigaciones previas (Castro, 1995; Castro, Rico y Castro, 1992) con estudiantes de edad similar a los que han intervenido en esta investigación.

Un segundo grupo de problemas está formado por los problemas 1 y 4. El problema 4 es un problema de comparación de aumento cuyo dato desconocido es el referente. Un buen número de investigaciones (Castro, 1995; Castro, Rico y Castro, 1992; Hegarty, Mayer y Green, 1992; Hegarty, Mayer y Monk, 1995; Lewis y Mayer, 1987; Verschaffel, 1994; Verschaffel, De Corte y Pauwels, 1992) han detectado que los sujetos cometen el error de inversión (reversal error) en este tipo de problemas y que es difícil de explicar cuál es la causa que lo produce. Realmente aunque es significativa esta asociación no han sido muchos los estudiantes que han cometido este error. El problema 1 es un problema de comparación de disminución con el comparado desconocido y en él se han dado el mayor número de errores dentro de los problemas de comparación. Se ha presentado de manera significativa los errores de cambio de estructura y de cambio de significado de la relación comparativa. Estos errores ya se habían observado en Castro (1995).

2. El tipo 2 se refiere a los problemas de combinatoria (problemas 3 y 9). Nos encontramos con dos problemas que han presentado distinto nivel de dificultad a los alumnos y también presentan una frecuencia de errores muy dispar. Mientras que el problema 3, que es un problema simple de estructura multiplicativa correspondiente a la categoría semántica de producto cartesiano, no ha tenido gran dificultad para los sujetos y en él han cometido pocos errores, en el problema 9 que es un problema más difícil se han detectado cinco de los siete tipos de errores. El error que se ha observado en el problema 3 ha consistido en considerarlo como de estructura aditiva, algo poco previsible en sujetos con talento, ya que supone un desconocimiento en ellos de estructuras matemáticas simples, como lo es la idea de producto cartesiano. Los errores en el problema 9 están más justificados: Son un indicador de la gran capacidad que tienen los sujetos con talento para proponer soluciones ante problemas que para ellos son difíciles. Estos errores pueden ser un

buen comienzo para iniciar el aprendizaje del concepto matemático de combinación.

3. En los problemas de escala (problemas 6 y 10) se ha presentado el error 3 “inversión de la operación” asociado significativamente al problema 6 y el error 5 “error en un concepto” asociado al problema 10. Así pues, no hay un error conjunto de este grupo de problemas. Al ser los problemas de escala un caso de los problemas de proporcionalidad esperábamos que se presentasen algunos de los errores detectados en investigaciones previas, como es el caso de la estrategia aditiva (Hart, 1981, 1984, 1988). Sin embargo, uno de los errores más importantes que han aparecido tienen que ver con el concepto de escala a partir de su obtención en un caso práctico. Esto es lo que ocurre en el problema 10 en el que se pide deducir la escala de un mapa para lo cual tienen que medir la distancia entre dos puntos para obtenerla. Reseñar que en el problema 6 se daba la escala para calcular una distancia en el mapa y aquí no se ha presentado este error con tanta frecuencia, pero ha aparecido otro error: la inversión de la operación, que es un error típico de otros tipos de problemas de estructura multiplicativa.

4. Los dos problemas que hemos considerado como problemas complejos no responden a la misma categoría semántica y, por tanto, deben tratarse individualmente. En el problema 7 están implicados los conceptos de área y perímetro, y hay que poner en juego ambos conceptos para obtener la solución. Se ha observado una grana cantidad de respuestas en blanco y errores que posiblemente se deban a la falta de capacidad para poner en práctica los conceptos de área y perímetro al mismo tiempo, relacionando sus significados. Una posible explicación es la dada por Woodward (1982) quien comenta que estudiantes excelentes en matemáticas pueden no distinguir entre los conceptos de área y perímetro. También incide en esta idea Hirstein (1981) en referencia a los errores cometidos por niños cuya edad oscila entre 13 y 17 años.

Por otro lado, el problema 5, es un problema que parece sencillo, pero que requiere cierta agudeza para percibir la ruptura de la regularidad en el último día. Por ello, ha habido muchos errores asociados a esta falta de apreciación, sobre todo en soluciones obtenidas mediante operaciones aritméticas. El empleo de esquemas o figuras para representar el proceso hace que muchos sujetos obtengan la solución correcta mediante esta forma de representación. Estos resultados son consistentes con los obtenidos en otras investigaciones con estudiantes de edad similar (Castro, Morcillo y Castro, 1999; García, 2000), aunque hay que señalar, que los sujetos del grupo con talento han empleado, en menor medida, representaciones gráficas de lo que lo hicieron los sujetos de las investigaciones citadas y, así mismo, emplearon con más frecuencia, representaciones aritméticas.

5. En los problemas de proporcionalidad simple con números decimales (problemas 2 y 11) han aparecido dos errores compartidos: la inversión de la operación y emplear una estimación. Uno de los primeros trabajos en los que se utilizaron este tipo de problemas fue el de Af Ekenstam y Greger (1983), quienes incluyeron una versión del problema 2 en su investigación, lo aplicaron a estudiantes de edad similar a los de nuestra investigación y compararon con un problema equivalente cuyos datos eran números enteros. En el estudio de Af Ekenstam y Greger (1983) se detectó el error de inversión y se comprobó que no aparecía en el problema equivalente con números naturales. Sin embargo, en nuestra investigación no ha sido el error más frecuente, sino que ha sido el de "emplear una estimación", que se ha presentado en los dos problemas de manera significativa. Este error aparece sólo en estos dos problemas. La interpretación más usual que se le da al error de inversión está ligada al impacto del tipo de número (sobre todo números decimales menores que uno) sobre la elección correcta de la operación. Ha sido ampliamente tratado en la literatura (véase Greer, 1992) y una de las interpretaciones que se hace es que, este error está provocado por la concepción equivocada de que la multiplicación siempre aumenta y la división siempre disminuye, de lo que se deduce que los niños con talento también incurren en esta concepción.

   Además de estos dos errores comunes, en el problema 2 ha aparecido un error de interpretar el problema de forma aditiva, tanto en su versión más simple como en la más compleja de compensación aditiva. En el problema 11 ha aparecido también un error propio que no se ha dado en el problema 2: el error "conmutar los datos". Vemos pues que en este tipo de problemas los estudiantes con talento han incurrido en los mismos errores detectados en investigaciones previas y han cometido errores nuevos no detectados previamente.

Obviamente todos los errores no tienen el mismo peso en cuanto a su frecuencia de aparición. Mediante escalamiento multidimensional hemos agrupado los problemas del cuestionario PEM en cinco clases atendiendo a las frecuencias de los tipos de errores:

Clase 1: formada por siete problemas: los problemas de estructura multiplicativa simple de comparación, el problema de producto cartesiano y por los dos problemas de escala.

Clase 2: formada por los dos problemas de números decimales

Clase 3: formada por el problema 5, que es uno de los problemas complejos

Clase 4: formada por el problema 9, que es un problema de combinatoria

Clase 6: formada por el problema 7, que es el problema complejo que incorpora los conceptos de área y perímetro.

La clase 1 de problemas no tiene apenas peso en la aparición de errores. Las otras cuatro clases si tienen un peso importante en la aparición de errores.

Hemos representado los problemas, y los consiguientes errores que conllevan en un espacio bidimensional, en el que los problemas 2, 5, 7 y 9 constituyen los cuatro "puntos cardinales" de un espacio bidimensional, o dicho de otra manera los extremos de los ejes de distribución de los errores en ese espacio bidimensional, es decir, constituyen la base de unos ejes cartesianos para la distribución de errores. A los errores asociados a estos problemas habría que prestarle especial atención cuando se programen las actividades de aprendizaje para estos alumnos.

9.5. Fiabilidad

Dado que los sujetos con talento representan un porcentaje muy bajo de la población escolar, se plantea en la investigación el problema de la fiabilidad de las afirmaciones que se hacen. Por ello hemos planteado un objetivo explícito encaminado a afrontar este tema, el objetivo 6.

Objetivo 6: Analizar la fiabilidad de las respuestas mediante entrevistas a los alumnos.

Para superar la limitación del escaso número de sujetos que participan en la investigación, la información que hemos obtenido a partir de las producciones escritas en el Cuestionario PEM la hemos cotejado y complementado con entrevistas a sujetos con talento elegidos entre los que realizaron el cuestionario PEM. Esta técnica de complementariedad entre técnicas de recogida de datos se utiliza con frecuencia en el proceso de identificación del talento, como hemos visto en el capítulo 2. Las entrevistas nos han permitido observar, por ejemplo, que alumnos que habían dejado en blanco el problema, o lo habían dejado a medias, en la entrevista lo hacen completamente bien.

No obstante, los resultados de las entrevistas han mostrado una coincidencia alta en las respuestas de los sujetos con talento con las que habían producido en el cuestionario PEM. El porcentaje de acuerdo obtenido para los seis sujetos entrevistados es del 75%. Los problemas complejos con un porcentaje de acuerdo del 50% y los de números decimales con un porcentaje de acuerdo del 66% son los que más han influido en que el porcentaje de acuerdo global no sea más alto, ya que en los otros problemas el porcentaje de acuerdo ha sido del 100%.

Por otro lado, durante las entrevistas no han aparecido errores nuevos de los ya detectados en el capítulo anterior sobre errores, por lo que el espacio de errores parece bastante fiable y consistente.

9.6. Bloque de preguntas 4: Prescripción

A partir de la información obtenida de las producciones de los sujetos con talento nos planteamos una última pregunta que se refiere a la posibilidad de aplicar este conocimiento para hacer una propuesta de intervención basa en esta prescripción. Recordemos la pregunta:

- ¿Es viable una prescripción instructiva a partir del conocimiento obtenido desde el punto de vista cuantitativo y cualitativo en las respuestas dadas por los sujetos con talento al cuestionario de problemas construido?

Para lo cual nos propusimos como objetivo 7

> *Objetivo 7: Proponer un modelo de prescripción instructiva en matemáticas útil para los sujetos con talento.*

Nuestra intención última en este trabajo, es elaborar un modelo de prescripción orientado a la enseñanza para los alumnos con talento que está asociada al campo conceptual de la estructura multiplicativa y, todo ello a partir de los datos obtenidos mediante el cuestionario PEM y las entrevistas.

En ese modelo tenemos en cuenta varias componentes: la puntuación en el cuestionario PEM, las representaciones, los procedimientos, las estrategias utilizadas y los errores cometidos en grupos de problemas representativos de la estructura multiplicativa. Esta información recogida mediante el cuestionario escrito, es refrendada o ampliada por la entrevista individual en los problemas o grupos de problemas. De este conjunto de información debe surgir una propuesta válida para el profesor sobre qué aspectos sería aconsejable trabajar en los alumnos concretos de que dispone.

Para la primera componente, la puntuación en el cuestionario PEM, destacar que dar como buena o no la solución apartada a un problema la hacemos examinando bs procesos utilizados en la solución y su adecuación para llegar a la solución. Tomar la decisión de que un proceso es correcto o no para obtener la solución a un problema se complica bastante en las producciones de niños con talento. Cuando no conocen la solución directa, estos niños tienen una gran capacidad para generar estrategias originales muy elaboradas que son adecuadas en la solución del problema, pero que no son fáciles de percibir como correctas. El profesor necesita estar entrenado en esta detección pues de otro modo se le pasarían y las daría como no adecuadas. Además debería sacar partido de la creatividad de estos niños para reconducirles el aprendizaje.

La segunda componente del modelo son las representaciones utilizadas por los sujetos. En nuestro estudio hemos obtenido que los sujetos con talento emplean mayoritariamente la representación aritmética, no obstante en algún problema han aparecido representaciones gráficas muy complejas a partir de las que han obtenido la solución. También hemos observado que la representación verbal es una característica destacada de algunos de estos alumnos. Son capaces de razonar de forma verbal, de obtener soluciones a problemas y de comunicar a otros las soluciones obtenidas.

Las estrategias constituyen la tercera componente; en este caso hay que tener en cuenta que los alumnos con talento producen mayor diversidad de estrategias que los alumnos de una clase normal y, puesto que algunas de estas estrategias tienen un alto nivel de sofisticación, pueden pasar desapercibidas para el profesor. Puesto que en las estrategias podemos distinguir su estructura de procedimientos y la forma en que estos se encadenan, hay que prestar atención a ambos aspectos. La estructura de procedimientos puede ser compleja pero puede ser que la forma en la que se combinan no sea muy original. Por ello, es necesario tener en cuenta aspectos de las estrategias que pongan de manifiesto la peculiaridad de los sujetos con talento. A esto le hemos llamado estrategias especiales.

La cuarta componente se refiere a las dificultades y los errores de los niños con talento en el campo de problemas en estudio. Para aplicar esta componente es necesario tener una clasificación de los errores sistemáticos que los alumnos cometen en respuesta a distintos problemas del campo conceptual. En nuestro modelo, esta información surge de los resultados de investigaciones previas que han estudiado la estructura multiplicativa. Le damos gran peso a esta componente en nuestro modelo, pues es la que puede orientar hacia las tareas futuras que los alumnos deberían de trabajar.

En cuanto a la prescripción diagnóstica que surge del análisis de errores de los niños en nuestro estudio, señalar que, de manera global, las dificultades con los números decimales menores que uno están presentes en gran número de estos niños con talento. No dominan con claridad las relaciones área-perímetro. En los problemas de combinatoria, a pesar de que realizan con facilidad el problema de combinar pantalones y chaquetas, al intentar resolver el problema de las luces, realizan numerosas interpretaciones ingenuas de la idea de combinación. Si bien son capaces de aplicar una escala, la idea inversa de obtener el factor de escala a partir de los datos de un problema concreto, les plantea cierta dificultad. Todo esto constituye información útil para una actuación futura con estos niños.

Sin embargo, todo este proceso sería estéril si no tuviese como horizonte lo planteado por Treffinger y Feldhusen (1996), de que todo proceso de evaluación para identificar aspectos relacionados con los sujetos con talento, debe ser visto como continuo, no como un proceso único que determina de una vez y para siempre la competencia matemática de un niño. Las competencias matemáticas de los niños con talento emergen y crecen evolutivamente, y algunas no llegan a emerger porque no se produce una adecuada estimulación. Para estos autores, es importante que todos los que trabajan con niños y jóvenes vean los talentos y potencialidades como algo educable y emergente, no como fijo e inmutable.

9.7. Aportaciones de la investigación

De este trabajo de investigación se derivan una serie de aportaciones que hemos clasificado en función de los tres grandes temas de investigación que hay en la literatura de investigación de niños con talento: el concepto de superdotación y talento, la identificación del talento y la intervención centrada en niños con talento.

9.7.1. Implicaciones para el concepto

Una de las consecuencias que podemos extraer del trabajo realizado es que, en el ámbito escolar no podemos hablar del talento como un concepto monolítico desde el punto de vista de la resolución de problemas de matemáticas; hemos encontrado que los sujetos con talento no constituyen un grupo homogéneo y que por el contrario, se manifiestan de diversas maneras ante tareas de resolución de problemas; que si bien emplean estrategias especiales, no todos emplean todas, son intrínsecas al sujeto y a las tareas que se les proponen; que las tareas matemáticas pueden conllevar dificultades para unos sujetos con talento y no para otros. En definitiva que hay diferentes maneras de tener talento matemático y que no podemos hablar de una lista acabada de características asociadas al talento en general y al talento matemático en particular (Stepanek, 1999). Siendo conscientes de ello hemos detectado dos rasgos generales en los sujetos con talento: alta creatividad en la formulación de las soluciones de los problemas y compromiso con la tarea, sobre todo en problemas difíciles para su nivel. Estas son dos de las tres características de los modelos teóricos de Renzulli (1977) y de Mingus y Grasl (1999). Otra de las características que hemos detectado ha sido un alto nivel de control de la solución de los problemas, que es una componente metacognitiva.

9.7.2. Implicaciones para la identificación

Las definiciones de superdotación y de talento en general, así como la de talento matemático en particular, han evolucionado a lo largo del tiempo. Las dos primeras surgen y han ido evolucionado parejas al concepto de inteligencia, por lo que en la identificación de sujetos superdotados o con talento, se incluye en la mayoría de las veces un test de inteligencia, en solitario o acompañado de otras técnicas: nominación de profesores, autonominaciones, nominaciones de compañeros, informes de los padres. La identificación de un niño superdotado o con talento realizado con estas técnicas no tiene necesariamente por qué revelar talento matemático. En el pasado uno de los criterios más utilizados para identificar a los niños con talento matemático ha sido el rendimiento en matemáticas, medido fundamentalmente con tests de rendimiento. Esta práctica ha sido cuestionada por investigadores (por ejemplo, Span and Overtoom-Corsmit, 1986) quienes afirman que un rendimiento alto en matemáticas obtenido mediante tests de rendimiento no es suficiente para ser un talento en matemáticas. A lo largo del tiempo, los investigadores han ido dando una serie de características que pueden utilizarse como indicadores de talento matemático (Greenes, 1981; House, 1987; Marjoram y Nelson, 1988).

Desde la década de los sesenta del siglo XX, se ha producido un incremento de la importancia de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática y paralelamente ha habido investigaciones que han tratado de describir las características de los niños superdotados como resolutotes de problemas, uno de cuyos precursores fue Krutetskii (1976). Al mismo tiempo se ha resaltado las posibilidades que tiene la resolución de problemas para valorar la capacidad matemática.

En nuestro trabajo hemos constatado que el rendimiento en un test de resolución de problemas centrado en un campo específico de conocimiento matemático marca más diferencia entre los sujetos que habían sido previamente seleccionados mediante la puntuación en el test de Raven de aquellos que no lo superaron. El rendimiento en el test se midió por la capacidad de los sujetos de generar un proceso que lleve a la solución del problema y no sólo en el resultado final; la observación detallada de este proceso nos ha permitido detectar en los resolutores algunas de las características citadas en la literatura para los alumnos excepcionales en matemáticas. Este instrumento puede aplicarse de forma complementaria para identificar el talento matemático de los niños junto a otras formas de identificación. Así mismo, nos ha permitido detectar errores sistemáticos en sus producciones que deberían ser objeto de atención en el aula.

9.7.3. Implicaciones para la intervención

La atención a los niños con talento puede hacerse en grupos segregados fuera del horario escolar o en una enseñanza inclusiva que atienda en el aula la diversidad del alumnado, entre los que se encuentran los alumnos con talento matemático. En la investigación que hemos realizado hemos utilizado un grupo de alumnos que seguían el primer modelo, pero nuestra intención es obtener información para una atención inclusiva en el aula habitual del alumno en el que desarrolla sus estudios obligatorios. La razón para ello, es que los alumnos con talento matemático supone entre un 3% y un 5% del alumnado (Castro, 2004, p. 12) y no siempre tienen la oportunidad de ser seleccionados para alguno de los programas de enriquecimiento en grupo que se celebran como actividades extraescolares, entre otras cosas, porque estos programas suelen ser muy escasos y eligen a un número restrictivo de alumnos. No queremos entrar en la polémica que conlleva una u otra elección en la atención a la diversidad, hay razones a favor y en contra de ambos modelos de organización de la enseñanza y en alguna medida pueden ser modelos complementarios para la formación de los alumnos superdotados.

Nuestro trabajo ha puesto de manifiesto que los alumnos con talento no es un grupo homogéneo, que son más diversos de lo que pudiera parecer (Matthews & Keating, 1995) y la diversificación del currículo para atender a alumnos con altas capacidades es una realidad no asumida, aunque sí hay experiencias al respecto (Kalchman y Case, 1999; Kennard, 1998).

También hemos obtenido información que puede ser útil de cara a la organización de la intervención educativa:

- hay alumnos con talento que cometen errores persistentes, ya detectados en la literatura, y en la intervención habría que tenerlos en cuenta para superarlos en la fase de intervención

- se han detectado e identificado estrategias creativas en las producciones de los sujetos que son estrategias incipientes en base a las cuales habría que desarrollar una enseñanza que les permitiera alcanzar modos de solución elaborados
- dado el poco uso que hacen de la representación gráfica habría que fomentar en la intervención el apoyo de la representación gráfica como un heurístico de resolución de problemas
- sería pertinente proponerles actividades o problemas que admitan el uso de distintas estrategias y sistemas de representaciones
- los contenidos matemáticos que se han mostrado complicados: números decimales, concepto de escala, combinatoria y relación área perímetro, deberían tener una atención especial en la educación de estos niños.

9.8. Limitaciones del estudio

Las limitaciones del estudio tienen que ver con los sujetos, el contenido de los problemas utilizados y el currículum escolar de los sujetos. Los sujetos con talento son un número pequeño dentro de la población escolar, por tanto no se deben generalizar los resultados obtenidos a todo el colectivo de alumnos.

Así mismo, el hecho de que haya sido realizado con un grupo de sujetos con talento que siguen el currículo chileno, nos lleva a pensar que para generalizar a otros colectivos habría que replicar la experiencia.

Los problemas del estudio son problemas de un campo conceptual muy concreto: la estructura multiplicativa, de la que recogen determinados aspectos. Son sólo a estos aspectos a los que se debe aplicar lo obtenido en este estudio.

9.9. Sugerencias para futuras investigaciones

Una vez cerrada esta investigación quedan abiertos algunos aspectos relacionados con el tema que son de interés para el campo de investigación de los sujetos con talento en el ámbito de la Didáctica de la Matemática.

Dentro de un esquema de evaluación-diagnóstica enseñanza-prescriptiva, la continuación natural es poner en práctica el modelo y elaborar actividades adecuadas para las necesidades educativas de los alumnos observados en el proceso, especialmente tareas que ayuden a superar las dificultades detectadas y los errores cometidos.

El modelo desarrollado en la tesis puede ser aplicado a otros campos conceptuales de la matemática, lo que conlleva repetir el proceso con sujetos con talento previamente seleccionados mediante un test de inteligencia.

También convendría ensayar el trabajo con alumnos de otros países para ver la dependencia de los resultados del sistema educativo y de los currículos escolares.

Otro aspecto que nos llama la atención es indagar en la caracterización de sujetos con talento de otras edades.

Por último, subrayar la pregunta que nos hacemos de cómo se puede conjugar el enfoque que hemos adoptado en esta investigación con enfoques que se centran en el enriquecimiento de los sujetos con talento en grupos segregados, a semejanza del proyecto Estalmat. Creemos que nos son incompatibles, que se pueden tratar por separado, pero ¿de qué manera pueden ser complementarios?

Referencias

Ablard, K., & Tissot, S. (1998). Young students' readiness for advanced math: Precocious abstract reasoning. *Journal for the Education of the Gifted, 21*(2), 244-258.

Af Ekenstam, A., & Greger, K. (1983). Some aspects of children's ability to solve mathematical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 369-384.

Alonso, J. A. y Benito, Y. (1996). *Superdotados: adaptación escolar y social en Secundaria*. Madrid: Narcea.

Alonso, J., Benito, Y., Guerra, S. y Pardo, C. (2001). *Escalas de Renzulli SCRBSS. Adaptación para España e Iberoamérica*. Salamanca: Amarú Ediciones.

Armstrong, N. (1999). Gifted students and cooperative learning: A study of grouping strategies. *Roeper Review, 21*(4), 315.

Assouline, S. G., & Lupkowski-Shoplik, A. (1997). Talent searches: A model for the discovery and development of academic talent. En N. Colangelo & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (2nd ed.) (pp. 170-179). Needham Heights, MA: Allyn & Bacon.

Assouline, S. G., & Lupkowski-Shoplik, A. (2005). *Developing math talent: A guide for educating gifted and advanced learners in math.* Waco, TX: Prufrock Press.

Banfield, T. (2005). Ability grouping for mathematically gifted adolescent boys. *International Education Journal, 6*(2), 141-149.

Becker, J. P., & Shimada, S. (Eds.) (1997). *The open-ended approach: A new proposal for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Bell, A.W., Fischbein, E., & Greer, B. (1984). Choice of operation in verbal arithmetic problems: The effects of number size, problem structure and context. *Educational Studies in Mathematics, 15*(2), 129-147.

Bell, A., Greer, B., Grimison, L., & Mangan, C. (1989). Children's performance on multiplicative word problems. Elements of a descriptive theory. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(5), 434-449.

Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 399-420.

Beltrán, J. A. y Pérez, L. (1993). Identificación. En L. Pérez (Ed.), *10 palabras clave en superdotados*. Estella (Navarra): Verbo Divino.

Benavides, M. (2001). The use of technology in a program for mathematically gifted children. En *Proceeding 14th Biennal Conference of the World Council for Gifted and Talented Children*. Barcelona.

Benavides, M. (2003). La educación de niños con talentos académicos en Chile. *Ideacción. Revista en español sobre superdotación, 19,* 19-20.

Benavides, M., Lara, M. y Mendoza, A. (2000). *Matemática 1º Año Medio*. Santiago: McGrawHill.

Benavides, M., Maz, A., Castro, E. y Blanco, E. (Eds.) (2004). *La Educación de niños con talento en Iberoamérica*. Santiago, Chile: Oreal-Unesco. Disponible en: http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/educacion_ninos_talento_iberoamerica.pdf

Benito, Y. (1996). Capacidad metacognitiva y estrategias cognitivas de resolución de problemas matemáticos y de transformación y de inducción de estructuras en superdotados. *Ideacción, 7*, 25-33.

Benito, Y. (2000). Metacognitive ability and cognitive strategies to solve maths and transformation problems. *Gifted Education International, 14*, 151-159.

Bermejo, R. (1995). *El insight en la solución de problemas: como funciona en los superdotados.* Tesis Doctoral. Universidad de Murcia.

Bishop, Y. M., Fienberg, S. E., & Holland, P.W. (1975). *Discrete multivariate analysis: Theory and practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bisquerra, A. R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona: CEAC.

Blanco, M. (2001). *Guía para la identificación y seguimiento de alumnos superdotados.* Valencia: Cisspraxis.

Blanco, R., Ríos, C. G. y Benavides, M. (2004). Respuesta educativa para los niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.), *La Educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 49-60). Santiago: Oreal-Unesco.

Bloom, B. S. (1985). Generalizations about talent development. En B. S. Bloom (Ed.), *Developing talent in young people* (pp. 507-549). New York: Ballantine Books.

Boulton-Lewis, G. (1998). Children's strategy use and interpretations of mathematical representations. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 219-237.

Bralic, S. y Romagnoli, C. (Eds.) (2000). *Niños y jóvenes con talentos: una educación de calidad para todos*. Santiago de Chile: Dolmen.

Bruno, A. (2000). Sentido numérico. En A. Martinón (Ed.), *Las matemáticas del siglo XX. Una mirada en 101 artículos.* Madrid: Nívola.

Cajide, J. (2000). Evaluación de programas para la educación de sobredotados. *Revista de Investigación Educativa, 18* (2), 539-552.

Callahan, C. (2000). Intelligence and giftedness. En R. Sternberg (Ed.), *Handbook of Intelligence*. U.S.A.: Cambridge University Press.

Carpenter, T. P., Hiebert, J., & Moser, J. M. (1981). Problem structure and first-grade children's initial solution processes for simple addition and subtraction problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 12*(1), 27-39.

Castro, E. (1991). *Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa.* Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa.* Granada: Comares.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Castro, E. (2004). Perspectivas futuras de la educación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. (pp. 171-185). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Castro, E., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Cuestionario para caracterizar a niños con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades, 11*(13), 4-22.

Castro, E y Castro, E. (1992). Concepciones sobre área y perímetro; volumen y capacidad detectadas en profesores en formación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada, 6*, 191-206.

Castro, E., Castro, E. y Gil, F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos. *Enseñanza de las Ciencias, 10* (3), 243-253.

Castro, E., Maz, A., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Talento matemático: Diagnóstico e intervención. En M. D. Valadez, J. Betancourt y M. A. Zavala (Eds.), *Alumnos superdotados y talentosos. Identificación, evaluación e intervención. Una perspectiva para docentes* (pp. 453-473). México. Editorial: Manual Moderno.

Castro, E., Morcillo, N. y Castro, E. (1999). Representations produced by secondary education pupils in mathematical problem solving. En F. Hitt, & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. PME-NA, Vol. 2 (pp. 547-558). Columbus, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin & K. Grahan, *Proceedings of the sixteenth PME Conference*. Vol. 1, (pp. 113-120). Durham, NH (USA): University of New Hampshire.

Castro, E. y Villarraga, M. (2001). Resolución de problemas matemáticos y detección de la diversidad en una unidad conceptual. En J. Cardeñoso, A. Moreno, J. Navas y F. Ruiz (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Atención a la diversidad* (pp. 125-133). Granada: Universidad de Granada.

Chantraine, P. (1984). *Dictionnaire étymologique de la langue greque: histoire des mots.* París: Klincksieck.

Clements, M. (1984). Terence Tao. *Educational Studies Mathematics, 15*(3), 213-238.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2000). *Research Methods in Education.* London: Routledge.

Colangelo, N., & Davis, G. (Eds.) (1997). *Handbook of Gifted Education* (Segunda Edición). Boston: Allyn and Bacon.

Consuegra, G. (1982). Identifying the gifted in science and mathematics. *School Science and Mathematics, 71*(3), 183-188.

Cosgrave, J. (1999). An introduction to number theory with talented youth. *School Science and Mathematics, 99*(6), 348-353.

Creswell, J. W. (1994). *Research design. Qualitative & quantitative approaches*. Thousand Oaks: Sage.

Creswell, J. W. (2003). *Research design. Qualitative, quantitativeand mixed methods approaches*. Thousand Oaks: Sage.

Cuoco, A., & Curcio, F. (2001). *The roles of representation in school mathematics. 2001 Yearbook.* Reston, VA: NCTM.

Dabrowski, K. (1964). *Positive disintegration*. Boston: Little, Brown & Co.

Dabrowski, K. (1976). On the philosophy of development through positive disintegration and secondary integration. *Dialectics and Humanism, 3-4,* 131-144.

De Corte, E., Verschaffel, L., & Van Coillie, V. (1988). Influence of number size, problem structure and response mode on children's solutions of multiplication word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*(3), 197-216.

De Guzmán, M. (2002). Una descripción del proyecto "Detección y estímulo del talento matemático precoz en la Comunidad de Madrid". *Bordón: Revista de orientación pedagógica, 54*(2-3), 255-268.

De Guzmán, M. (sin fecha). El tratamiento educativo del talento especial en matemáticas. Disponible en: http://thales.cica.es/estalmat/sites/thales.cica.es.estalmat/files/MGUZMAN_TRATAMIENTO_EDUCATIVO.pdf (22-11-2007)

De Guzmán, M., Castrillón, M., García, J., Gaspar, M., Hernández, J., Sánchez, M. y Soler, J. (1999). Detección y estímulo de talento precoz en matemáticas en la comunidad de Madrid. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 21*, 73-78.

De Haan, R. F. y Kough. J. (1956). *Identifying students with special needs.* Chicago, IL: Science Research Associates.

Diezmann, C. M., & Watters, J. J. (2002) Summing up the education of mathematically gifted students. En *Proceedings 25th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 219-226). Sidney: MERGA.

Eckermann, J. P. (1848). *Gespräche mit Goethe,* vol. III, Magdeburg. [Traducción al castellano de Francisco Ayala (1949), *Conversaciones con Goethe*. Buenos Aires: Jackson].

Ellerton, N. (1986). Children's made-up mathematics problems - A new perspective on talented mathematicians. *Educational Studies in Mathematics*, *17*(3)*,* 261-271.

English, L. D. (1991). Young children´s combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics, 22*(5), 451-474.

English, L. D. (1993). Children´s strategies for solving two-and-three-dimensional combinatorial problems. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24 (3): 255-273.

Feldhusen, J. (1995). Identificación y desarrollo del talento en la educación (TIDE). *Ideacción, 4,* 12-19.

Feldhusen, J. F. (1997). Secondary Services, Opportunities, and Activities for Talented Youth. En N. Colangelo y G. A. Davis (Eds.), *Handbook of Gifted Education* (pp. 189-197). Boston: Allyn and Bacon.

Fernández, F. (1997). *Evaluación de Competencias en Álgebra Elemental a través de Problemas Verbales*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S., & Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive-development inquiry. *American Psychologist, 34*, 906-911.

Follis, H. (1982). Selecting activities in science and mathematics for gifted young children. *School Science and Mathematics, 71*, 57-64.

Freeman, J. (Dir.) (1988). *Los niños superdotados. Aspectos psicológicos y pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: A Challenging Situations Approach. *The Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 1-75.

Gagné, F. (1985). Giftedness and talent: Reexamining a reexamination of the definition. *Gifted Child Quarterly, 29*(3), 103-112.

Gagné, F. (1991). Toward a differentiated model of giftedness and talent. En N. Colangelo and G. A. Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 65-80). Boston: Allyn and Bacon.

Gagné, F. (1993). Constructs and models pertaining to exceptional human abilities. En K. A. Heller, F. J. Monks, & A. H. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 63-85). Oxford: Pergamon Press.

Gagné, F. (1997). A Differentiated Model of Giftedness and Talent. *Gifted* (*July), 15-16.*

Gagné, F. (2004). Transforming gifts into talents: the DMGT as a developmental theory. *High Ability Studies, 15(2),* 119-147.

García, J. (2000). *Representaciones en resolución de problemas. Un estudio comparativo con estudiantes españoles y mexicanos*. Memoria de Tercer Ciclo. Granada: Universidad de Granada.

García, J. L., Pérez-Juste, R. y del Río, D. (1992). Problemas y diseños de investigación resueltos. Madrid: Dykinson.

Gardner, H. (1983). Inteligencias múltiples. Barcelona: Paidós.

Genovard, C. y Castelló, A. (1990). *El límite superior. Aspectos psicopedagógicos de la excepcionalidad intelectual*. Madrid: Pirámide.

Genovard, C. y González, J. (1993). Intervención. En L. Pérez Sánchez (Ed.), *10 palabras clave en superdotados.* Estella (Navarra): Verbo Divino.

Glaser, R. (1984). Education and thinking. the role of knowledge. *American Psychologist, 39{2),* 93-104.

Goldin, G. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

González, C. y González, J. (1998). La integración del alumno superdotado en el ámbito escolar. Ámbito escolar: área de intervención educativa. *Educar*, *22-23*, 325-330.

González, M. (1993). *Creatividad en niños superdotados.* Tesis Doctoral. Madrid: Universidad Complutense.

Gutiérrez, M. P. y Maz, A. (2004). Educación y diversidad. En M. Benavides, A. Maz,, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica*. (pp. 15-24). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Greenes, C. (1981). Identifying the gifted student in mathematics. *Aritmetic Teacher, 28*(8), 14-17.

Greenes, C. (1997). Honing the abilities of the mathematically promising. *Mathematics Teacher*, *90*(7), 582-586.

Greer, B. (1987). Nonconservation of multiplication and division involving decimals. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*, 37-45.

Greer, B. (1992). Multiplication and division as models of situations. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Hadamard, J. (1945). *An essay on the psychologye of invention in the mathematical field.* New Jersey: Princeton University Press.

Hadar, N. y Hadass, R. (1981). The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. *Educational Studies in Mathematics,* 12: 435-443.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1994). The impact of the number type on the solution of multiplication and division problems: Further investigations. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the Learning of Mathematics* (pp. 363-384). NY: The State University of New York Press.

Hart, K. (Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. Londres: John Murray.

Hart, K. (1984). *Ratio: Children's strategies and errors.* Windsor, England: NFER-Nelson.

Hart, K. (1985). *Chelsea diagnostic mathematics tests: Ratio.* Windsor, England: NFER-Nelson.

Hart, K. (1988). Ratio and proportion. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Concepts and operations in the Middle Grades* (vol. 2, pp. 198-219). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Hart, K. M. (1989). Measurement. En J. Murray (Ed.), *Childrens Understanding of Mathematic*s (vols. 11–16, pp. 9–22). London: John Murria.

Hegarty, M., Mayer, R. E., & Green, C. E. (1992). Comprehension of arithmetic word problems: Evidence from students` eye fixations. *Journal of Educational Psychology, 84*, 76–84.

Hegarty, M., Mayer, R., Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*, 18–32.

Heid, K. (1983). Characteristics and special needs of the gifted student in mathematics. *Mathematics Teacher, 76*(4), 221-226.

Heinze, A. (2005). Differences in problem solving strategies of mathematically gifted and non-gifted elementary students. *International Education Journal, 6*(2), 175-183.

Heller, K., Mönks, F., & Passow, A. (Eds.). (1993). *International handbook of research and development of giftedness and talent.* Oxford: Pergamon Press.

Heller, K., & Ziegler, A. (1996). Gender differences in mathematics and the sciences: can attributional retraining improvide the performance of gifted females? *Gifted Child Quarterly, 40*(4), 200-210.

Heward, W. (2000). *Niños excepcionales. Una introducción a la educación especial*. Madrid: Prentice Hall.

Hiebert, J., & Carpenter, T. (1992). Learning and teaching with understanding. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan.

Hirstein, J. J. (1981). The Second National Assessment In Mathematics: Area and Volume. *Mathematics Teacher, 74* (9), 704 - 708.

Hirstein, J., Lamb, C., & Osborne, A. (1978). Student misconceptions about area measure. *Arithmetic Teacher, 25*, 10-16.

Hoeflinger, M. (1998). Mathematics and Science in Gifted Education. *Roeper Review*, *20*(4), 244-258.

House, P. (1983). Alternative educational programs for gifted students in mathematics. *Mathematics Teacher, 76* (4), 229-233.

House, P. (Ed.) (1987). *Providing Opportunities for the Mathematically Gifted, K-12*. Reston, VA: NCTM.

Irwin, K. (2003). Multiplicative strategies of New Zealand secondary school students. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Vol. 3 (pp. 111–116). Honolulu.

Jiménez, C. (2000). Evaluación de programas para alumnos superdotados. *Revista de Educación Matemática, 18*(2), 553-563.

Jiménez, C. (1997). Educación de los alumnos más dotados. *Revista de Investigación Educativa*, *15*(2), 217-234.

Johnson, M. L. (1983). Identifying and teaching mathematically gifted elementary school students. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 25-26, 55-56.

Kalchman, M., & Case, R. (1999). Diversifying the curriculum in a mathematics classroom streamed for high-ability learners: A necessity unassumed. *School Science and Mathematics*, *99*(6), 320-329.

Karsenty, R., & Vinner, S. (1996). To have or not to have mathematical ability and what is the question. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), *Proceedings of the 20th International Conference, Psychology of Mathematics Education,* Vol. 3, (pp. 177–184). Valencia: University of Valencia.

Kennard, R. (1998). Providing for mathematically able children in ordinary classrooms. *Gifted Education International, 13* (1), 28-33.

Kerlinger, F. N. y Lee, H. B. (2002). *Investigación del comportamiento.* México, DF: McGrawHill.

KilpatricK, J. (1978). Variables and methodologies in research on problem solving. En L. L. Hatfield y D. A. Bradbard (Eds.), *Mathematical problemsolving: papers from a research workshop.* Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

Kissane, B. (1986). Selection of mathematically talented students. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 221-241.

Koetke, W. (1983). Computers and the mathematically gifted. *Mathematics Teacher, 76*(4), 270-272.

Kouba,V. L. (1989). Children´s solution strategies for equivalent set multiplication and division word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, 147-158.

Krutetskii, V. A. (1969). An analysis of the individual structure of mathematical abilities in schoolchildren. En J. Kilpatrick, & I. Wirszup (Eds.), *Soviet Studies in the Psychology of Learning and Teaching Mathematics,* Vol. II (pp. 59-104). The Structure of Mathematical Abilities. Chicago: University of Chicago Press.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago: University of Chicago Press.

Lappan, G. (Sin fecha). 'Mathematics for all' must include high-ability and highly motivated students**.** Disponible en: http://www.nctm.org/about/content.aspx?id=1010 (06/08/2007)

Larsson, Y. (1986). Governmental policies on the education of gifted and talented children: A world view. *Educational Studies Mathematics, 17*(3), 213-219.

Lawson, A. y Wollman, W. (1980). Developmental level and learning to solve problems of proportionality in the classroom. *School Science and Mathematics, 80*(1), 69-75.

Lesh, R. (1997). Matematización: la necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 377-391.

Lester, F. K. (1985). Methodological considerations in research on mathematical problem-solving instruction. En E. A. Silver (Ed.). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives* (pp. 41-69). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lester, F. (1994). Musing about mathematical problem-solving research: 1970-1994. *Journal for research in mathematics education, 25* (6), 660-675.

Lewis, A. B. y Mayer, R. E. (1987). Students` miscomprehension of relational statements in arithmetic word problems. *Journal of Educational Psychology, 79*, 363–371.

LOGSE (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo (BOE 04/10/1990).

López, B., Betrán, M., López, B. y Chicharro, D. (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades*. Madrid: CIDE.

López, M. (1994). Los equipos de orientación educativa y la atención a las necesidades educativas especiales. Situación en Andalucía. *Revista de Educación Especial*, 16, 47-59.

Luke, C. (1988). The repeated addition model of multiplication and children's performance on mathematical word problems. *Journal of Mathematical Behavior*, *7*, 217-226.

Lupkowski, A., Assouline, S. y Vestal, J. (1996). Mentores en matemáticas. *Ideacción, 8*, 7-16.

Machado, A. L. (2004). Presentación. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 9-13). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Maker, J., Rogers, J., Nielson, A. y Bauerle, P. (1996). Multiple intelligences, problem solving, and diversity in the general classroom. *Journal for the Education of the Gifted, 19*(4), 437-461.

Marjoram, D. y Nelson, R. (1988). Talentos matemáticos. En J. Freeman (Ed.), *Los niños superdotados. Aspectos Psicológicos y Pedagógicos*. Bilbao: Santillana.

Marland, S. (1972). *Education of the gifled and talenled.* Report of the Congress of the United States by the U.S. Commission of Education.

Marshall, S. P. (1995). *Schemas in problem solving*. New York: Cambridge University Press.

Marshall, V. (2000). Una experiencia piloto en la identificación y el desarrollo de talentos matemáticos. En S. Bralic y C. Romagnoli, *Niños y jóvenes con talento. Una educación de calidad para todos*. Santiago de Chile: Dolmen.

Mashiach Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2003a). Students' verification strategies for combinatorial problems. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(1), 15–36.

Mashiach Eizenberg, M., & Zaslavsky, O. (2003b). Cooperative problem solving in combinatorics: the inter-relations between control processes and successful solutions. *Journal of Mathematical Behavior, 22*(4), 389–403.

Mason, M. (1997). The van Hiele model of geometric understanding and mathematically talented students. *Journal for the Education of the Gifted*, *21*(1), 38-53.

Matthews, D. J., & Keating, D. P. (1995). Domain specificity and habits of mind: An investigation of patterns of high-level development. *Journal of Early Adolescence, 15,* 319-343.

Mayer, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición*. Barcelona: Paidós.

Miller, R. (1990). Discovering mathematical talent. *ERIC Digest* #E482.

Mills, C., Ablard, K., & Gustin, W. (1994). Academically talented students' achievement in a flexibly paced mathematics program. *Journal for Research in Mathematics Education, 25*(5), 495-511.

MINEDUC (1998). Decreto Nº 220. Santiago de Chile: Diario Oficial de la República de Chile.

MINEDUC (1996). Decreto N°40. Santiago de Chile. Diario Oficial de la República de Chile.

Mingus, T., & Grassl, R. (1999). What constitutes a nurturing environment for growth of mathematically gifted students? *School Science and Mathematics*, *99*(6), 286-292.

Ministerio de Educación y Cultura (2000). *Alumnos precoces, superdotados y de altas capacidades.* Madrid: Secretaría General Técnica del Ministerio de Educación y Cultura.

Mönks, F., & Mason, E. (2000). Developmental Psychology and giftedness: Theories and research. En K. A. Heller, F. J. Monks, R. J. Stemberg, & R. F. Subotnik (Eds.), *International handbook of giftedness and talent.* New York: Pergamon.

Morgan, H. (1996). An analysis of Gardner's Theory of Multiple Intelligence. *Roeper Review*, *18(*4), 263-269.

Mulligan, J.T., & Mitchelmore, M. (1997). Young Children´s Intuitive models of multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *28*(3), 309-330.

Mulligan, J. T., & Wright, R. (2000). Interview-based assessment of early multiplication and division. En Nakahara, T., y Koyama, M. (Eds.), *Proceedings of the 24th Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Hiroshima, Japan: The Nishiki Print Co.

Mumford, M., Connelly, M., Baughman, W., & Marks, M. (1994). Creativity and problem solving: Cognition, adaptability, and wisdom. *Roeper Review*, *16*(4), 241-246.

Muñiz, J., Fidalgo, A. M., García-Cueto, E., Martínez, R. y Moreno, R. (2005). *Análisis de los items.* Madrid: La Muralla.

NCTM (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s.* Reston, VA: El autor.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.

NCTM (1991). *Professional Standards.* Reston, VA: El autor.

NCTM (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: El autor.

Nesher, P. (1988). Multiplicative School Word Problems: Theoretical Approaches and Empirical Findings. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and opera-*

tions in the middle grades (pp.19-41). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Nesher, P. Greeno, J. G., & Riley, M. S. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics, 13*(4), 373-394.

Niederer, K. (2001). *Problem solving in the identification of mathematically gifted children*. MEd Thesis, The University of Auckland, New Zealand.

Niederer, K., & Irwin, K. (2001). Using problem solving to identify mathematically gifted students. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Utrecht, Vol. 3, 431-438. Utrecht: The Netherlands.

Niederer, K., Irwin, R. C., Irwin, K.C., & Reilly, I. L. (2003). Identification of mathematically gifted children in New Zealand. *High Ability Studies, 14*(1), 71 - 84.

Noda, M. (2000). *Aspectos epistemológicos y cognitivos de la resolución de problemas de Matemáticas, bien y mal definidos. Un estudio con alumnos del Primer Ciclo de la ESO y Maestros en formación*. Tesis Doctoral. Universidad de la Laguna.

Nunnally, J. C. (1987). *Teoría psicométrica.* México: Trillas.

Osborne, A. (1981). Needed research mathematics for the talented. *Aritmetic Teacher*, *28*(8), 24-25.

Paek, P., Holland, P., & Suppes, P. (1999). Development and Analysis of a Mathematics aptitude test for gifted elementary school students. *School Science and Mathematics*, *99*(6), 338-347.

Pape, S. J. (2003). Compare word problems: Consistency hypothesis revisited. *Contemporary Educational Psychology 28,* 396–421

Pasarín, Mª. J., Feijoo, M., Díaz, O. y Rodríguez-Cao, L. (2004). Evaluación del talento matemático en educación secundaria. *FAISCA. Revista de Altas Capacidades*, *11*, 88-103.

Passow, A. (1993). National/State Policies Regarding Education of the Gifted. En K. Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 29-46). Oxford: Pergamon Press.

Pativisan, S. (2006). *Mathematical Problem Solving Processes of Thai Gifted Students.* Doctoral Dissertation: Oregon State University. Disponible en: http://ir.library.oregonstate.edu/dspace/bitstream/1957/1877/1/Supattra%27+s+dissertation_.pdf (12/12/2007).

Pérez, L., Domínguez, P. y Díaz, O. (1998). *El desarrollo de los más capaces: guía para educadores*. Salamanca: MEC.

Pérez-Juste, R. (1989). *Pedagogía experimental: la medida en educación.* Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

Person, C., & Minor, L. (1990). Cognitive profiles of verbally and mathematically precocious students: implications for identification of the gifted. *Gifted Child Quarterly*, *34*(1), 21-26.

Poincaré, H. (1963). *Ciencia y método*. Madrid: Espasa Calpe.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Porto, A. (1991). *Efectos de un programa en el área de matemáticas con alumnos muy capacitados.* Tesis Doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

Pratscher, S., Jones, K., & Lamb, C. (1982). Differentiating instruction in mathematics for talented and gifted youngsters. *School Science and Mathematics*, *82(5)*, 365-372.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 297-311.

Prieto, M. (1997). *Identificación, evaluación y atención a la diversidad del superdotado*. Granada: Aljibe.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

RAE A (1739*). Diccionario de la lengua castellana.* Madrid: El autor.

RAE (1992). *Diccionario de la Real Academia Española.* Madrid: El autor.

Ravaglia, R., de Barros, J., & Suppes, P. (1995). Computer-based instruction brings advanced-placement physics to gifted students. *Computers in Physics Education*, *9*(4), 380-386

Ravaglia, R., Suppes, P., Stillinger, C., & Alper, T. (1995). Computer-Based Mathematics and Physics for Gifted Students. *Gifted Child Quarterly, 39*(1), 7-13.

Raven, J. C., Court, J. H., & Raven, J. (1986). *Test de matrices progresivas. Escalas coloreada, general y avanzada*. Buenos Aires: Paidós.

Real Decreto sobre Educación Especial. (1995). *Ideacción, 4*, 31-33.

Reid, C., Udall, A., Romanoff, B., & Algozzine, B. (1999). Comparison of Traditional and Problem Solving Assessment Criteria. *Gifted Child Quarterly*, *43*(4), 252-264.

Renzulli, J. S. (1977). *The enrichment triad model. A guide for developing defensible programs for the gifted and talentes*. Mansfield Center, CT: Creative Learning Press.

Renzulli, J. (1986). The three-ring conception of giftedness: a developmental model for creative productivity. En R. J. Sternberg y J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness*. New York: Cambridge University Press, pp.417-435.

Renzulli, J.S. (1998). The three-ring conception of giftedness. En S. M. Baum, S. M. Reis & L. R. Maxfield (Eds.), *Nurturing the gifts and talents of primary grade students.* Mansfield Center, CT: Creative Learning Press. Disponible en: http://www.gifted.uconn.edu/sem/semart13.html (12/12/2007)

Renzulli, J. (1999). Examen de las aptitudes, intereses y estilos de aprendizaje de los estudiantes superdotados y talentosos. *Ideacción*, *15*, 31-35.

Renzulli, J. S., & Reis, S. M. (1991). The reform movement and the quiet crisis in gifted education. *Gifted Child Quarterly, 35*(1), 26-35.

Renzulli, J. S., & Reis, S. M. (1997). *The Schoolwide Enrichment Model*. Mansfield, CT. Creative Learning Press.

Renzulli, J. S., Smith, L. H., White, A. J., Callahan, C. M., & Hartman, R. K. (2001). *Escalas de Renzulli (SCRBSS). Escalas para la valoración de las características de comportamiento de los estudiantes superiores.* Salamanca: Amaru.

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M. Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual bases of arithmetic errors; the case of decimal fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8–27.

Resnick, L., & Ford, W. (1991). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos.* Barcelona: Paidós.

Rico, L. (1997). Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales", 38,* 185-198

Rico, L. (Coord.) (1997). *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de matemática. En P. Gómez, y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Universidad de Granada.

Ridge, H., & Renzulli, J. (1981). Teaching mathematics to the talented and gifted. En Glennon, V. (Ed.), *The Mathematical Education of Exceptional Children and Youth. An Interdisciplinary Approach*. Reston, VA: NCTM.

Robinson N., Abbott, R., Berninger, V., Busse J., & Mukhopadhyay S. (1997). Developmental changes in mathematically precocious young children: Longitudinal and gender effects. *Gifted Child Quarterly, 41*(4), 145-158.

Rodríguez-Cao, L. (2004). Identificación y evaluación de niños con talento. En M. Benavides, A. Maz,, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 37-47). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Rotigel, J., & Lupkowski, A. (1999). Using talent searches to identify and meet the educational needs of mathematically talented youngsters. *School Science and Mathematics, 99*(6), 330-337.

Ruiz, L. y Márquez, M. (2006). Estrategias de identificación e intervención para niños potencialmente sobresalientes. En M. D. Valadez, M. A. Zavala y J. Betancourt (Eds.), *Alumnos Superdotados y Talentosos. Identificación, Evaluación e Intervención. Una Perspectiva para Docentes* (pp. 213-245). México, D.F.: Editorial El Manual Moderno.

Sánchez, E. (2003). *Los niños superdotados: una aproximación a su realidad*. Edita: Defensor del Menor en la Comunidad de Madrid. Disponible en: http://www.dmenor-mad.es/pdf/publicaciones/los_ninos_superdotados.pdf (21-12-2006).

Santisteban, C. (1990). *Psicometría. Teoría y práctica de la construcción de tests.* Madrid: Ediciones Norma.

Sawyer, R., & Brounstein, P. (1988, April). *The relationship between ACT and SAT score among talented seventh grade students.* Paper presented at the Annual Meeting of the National Council on Measurement in Education. New Orleans, Louisiana.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Nueva York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1987). *Cognitive Science and Mathematics education*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Schommer, M., & Dunnell, P. (1997). Epistemological Beliefs of Gifted high School Students. *Roeper Review, 19*(3), 153-156.

Schiever, S. y Maker, C. (1997). Enrichment and aceleration: An overview and new directions. En N. Colangelo y G.A.Davis (Eds.), *Handbook of gifted education* (pp. 113-125). Boston: Allyn and Bacon (segunda edición).

Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.

Segovia, I., Gónzalez-López, Mª. J. y Rico, L. (1999). Estrategias de resolución en problemas geométricos. Un estudio con profesores en formación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española, 2*(3), 519-532.

Sharma, J. y Maitra, K. (1999). Superdotación matemática. Explorando el marco conceptual. *Ideacción*, *5*, 5-10.

Shermis, M., Fulkerson, J., & Banta, T. (1996). Computerized Adaptive Math Test for Elementary Talent Development Selection. *Roeper Review*, *19*(2), 91-95.

Sheffield, L. J. (1994). *The development of gifted and talented mathematics students and the National Council of Teachers of Mathematics Standards*. NTC/GT. The University of Conneticut.

Sheffield, L. J. (Ed.). (1999a). *Developing mathematically promising students.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Sheffield, L. J. (1999b). The development of mathematically promising students in the United States. *Mathematics in School, 28*(3), 15-18.

Sheffield, L. J. (2000). Creating and developing promising young mathematicians. *Teaching Children Mathematics, 6*(6), 416-419, 426.

Sheffield, L. J., Bennett, J., Berriozábal, M., DeArmond, M., & Wertheimer, R. (1995). Report of the Task Force on the Mathematically Promising. Reston, VA: NCTM *News Bulletin, Volume 32*. Dsiponible en: http://www.nku.edu/~sheffield/taskforce.html (22-12-2006).

Silver, E. A. (Ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple research perspectives*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Silver, E. A. (1992) Referential mappings and the solution of division story problems involving remainders. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *14*(3), 29-39.

Siñeriz, L. (2000). *La enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media Argentina: estudio de casos*. Tesis Doctoral. Universidad de Valencia.

Southern , W., Jones, E. y Stanley, J. (1993). Aceleration and enrichment: The context and development of program options. En K. Heller, F. Mönks y A. Passow (Eds.), *International handbook of research and development of giftedness and talent* (pp. 387-409). Oxford: Pergamon Press.

Span, P., & Overtoom-Corsmit, R. (1986). Information Processing by Intellectually Gifted Pupils Solving Mathematical Problems. *Educational Studies in Mathematics*, *17*, 273-295.

Stanley, J. C. (1977). Rationale of the Study of Mathematically Precocious Youth (SMPY) during its first five years of promoting educational acceleration. En J. C. Stanley, W. C. George, & C. H. Solano (Eds.), *The gifted and the creative: A fiftyyear perspective* (pp. 75-112). Baltimore: The Johns Hopkins University Press.

Stanley, J.C., & Benbow, C. P. (1983). SMPY´ first decade: ten years of posing problems and solving them, *The Journal of Special Education*, *17* (1), 11-25.

Stanley, J. C., & Benbow, C. P. (1986). Youths who reason exceptionally well mathematically. En R. J. Sternberg & J. E. Davidson (Eds.), *Conceptions of giftedness* (pp. 361-381). Cambridge: Cambridge University Press.

Steinle, V., & Stacey, K. (2003). Grade-related trens in the prevalence and persistence of decimal misconceptions. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 259 – 266). Honolulu: PME.

Stepanek, J. (1999). *The Inclusive Classroom Meeting the Needs of Gifted Students: Differentiating Mathematics and Science Instruction. It's just good teaching.* Portland, OR: Northwest Regional Educational Laboratory.

Stern, E. (1993). What makes certain arithmetic word problems involving the comparison of sets so difficult for children? *Journal of Educational Psychology, 85*, 7–23.

Sternberg, R. (Ed.) (1986). *Las capacidades humanas*. Barcelona: Labor.

Sternberg, R. J. (1997). A triarchic view of giftedness: Theory and practice. En N. Coleangelo, & G. A. Davis (Eds.), *Handbook of Gifted Education* (pp. 43-53). Boston, MA: Allyn and Bacon.

Sternberg, R. J., & Davidson, J. E. (Eds.) (1986). *Conceptions of giftedness*. Cambridge, England: Cambridge University Press.

Suppes, P. (1999). Development and Analysis of a Mathematics aptitude test for gifted elementary school students. *School Science and Mathematics, 99*(6), 338-347.

Suppes, P., & Ager, T. (1995). Computer-based advanced placement calculus for gifted students. *Instructional Science, 22*, 339-362.

Swiatek, A. S. (2007). The talent search model: Past, present, and future. *The Gifted Child Quarterly, 51*(4), 320-330.

Terman, L. M. (1925). *Genetic studies of genius: Vol. 1. Mental and Physical traits of a thousand gifted children.* Stanford. CA: Stanford University Press.

Thurstone, L. L. (2005). PMA. *Aptitudes mentales primarias.* Madrid: TEA.

Tierney, C., Boyd, C., & Davis, G. (1990). Prospective Primary Teachers' Conceptions of Area. En G. Booker, P. Cobb, & T. de Mendecuti (Eds), *Proceedings of the Conference of the International Group of the Psychology of Mathematics Education*, 14th, Mexico, II (pp. 307-315).

Tirosh, D. (1989). Teaching mathematically gifted children. En R. M. Milgram (Ed.), *Teaching gifted and talented learners in regular classrooms* (pp. 205-222). Springfield, IL: Charles C. Thomas.

Torrance, E. P. (1974). *The Torrance tests of creative thinking*. Bensenville, IL: Scholastic Testing Service.

Tourniaire, F., & Pulos, S. (1985). Proportional reasoning a review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, *16*, 181-204.

Treffinger, D. J., & Feldhusen, J. F. (1996). Talent recognition and development: Successor to gifted education. *Journal for the Education of the Gifted, 19* (2), 181-193.

Usiskin, Z. (1983). Enrichment activities for geometry. *Mathematics Teacher, 76* (4), 264-266.

Van Dalen, D. B., & Meyer, W. J. (1983). *Manual de técnica de investigación educacional*. Buenos Aires: Paidós.

Van de Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Addison Wesley Longman.

Vantassel-Baska, J. (1993). Theory and research on curriculum development for the gifted. K. Heller, F. Monks, & A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 365-386). Oxford: Pergamon Press.

Vergnaud, G. (1981). Quelques orientations theoriques et des recherches francaises en didactique des mathematiques. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, *2*(2), 215-232.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative Structure. En Lesh, R. y Landau, M. (Eds.). *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. Florida: Academic Press.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Sructures. En J. Hiebert y Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp. 141-161). Reston, VA: NCTM; Hislldale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, *17*(2), 167-181.

Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? En H. Guershon y J. Confrey (1994). (Eds.) *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, NY: State University of New York Press.

Verschaffel, L. (1994). Using retelling data to study elementary school children's representations and solutions of compare problems. *Journal for Research on Mathematics Education, 25*, 141–165.

Verschaffel, L., De Corte, E., & Pauwels, A. (1992). Solving compare problems: An eye movement test of Lewis and Mayer_s consistency hypothesis. *Journal of Educational Psychology, 84*, 85–94.

Villarraga, M. (2002). *Estudio de los esquemas empleados por alumnos de 14-15 años al resolver problemas de estructura multiplicativa.* Trabajo de Investigación. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Villarraga, M., Castro, E. y Benavides, M. (2002). Esquemas de solución de problemas de proporcionalidad simple directa en niños con talento. En J. M. Cardeñoso, E. Castro, A. J. Moreno y M. Peñas (Ed.), *Investigación en el aula de matemáticas. Resolución de problemas* (pp. 253-261). Granada: Dpto Didáctica de la Matemática. Universidad den Granada-S.A.E.M. "THALES".

Villarraga, M. E., Castro, E. y Benavides, M. (2007). Tipologías de sujetos con talento en resolución de problemas de proporcionalidad simple. En E. Castro y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 259-281). Granada: Editorial de la Universidad de Granada.

Villarraga, M., Martínez, P. y Benavides, M. (2004). Hacia la definición del término talento. En M. Benavides, A. Maz, E. Castro y R. Blanco (Eds.) (2004). *La educación de niños con talento en Iberoamérica* (pp. 25-35). Santiago (Chile): OREALC/Unesco.

Visauta, B. (1998). *Análisis Estadístico con SPSS para Windows. Volumen II. Estadística Multivariante.* Madrid : Mc Graw-Hill.

Vogely, B. (1997). *Special Secondary Schools for the Mathematically and Scientifically Talented an International Panorama*. New York: Columbia University.

Wagner, H., & Zimmermann, B. (1986). Identification and Fostering of Mathematically Gifted Students. *Educational Studies in Mathematics, 17*, 243-259.

Wagner, R., & Sternberg, R. (1984). Alternative Conceptions of Intelligence and Their Implications for Education. *Review of Educational Research*, *54*(2), 179-223.

Walter, M. (1970). A common misconception about area. *Arithmetic Teacher, 17*(4), 286-289.

Whimbey, A. y Lochhead, J. (1993). *Comprender y resolver problemas*. Madrid: Visor.

Wieczerkowski, W., & Prado, T. (1993). Programs and strategies for nurturing talents/gifts in mathematics. En K. Heller, F. Monks y A. Passow (Eds.), *International Handbook of Research and Development of Giftedness and Talent* (pp. 443-451). Oxford: Pergamon Press.

Wilson, K., & Briggs, M. (2002). Able and gifted: a case study of year 6 children. En A.D. Cockburn & E. Nardi (Eds.), *Proceeding of the 26 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (vol. 1, p. 328). UEA Norwich, U.K.

Wolters, M. (1983). The part-whole schema and arithmetical problems. *Educational Studies in Mathematics, 14*, 127-138.

Woodward, E. (1982). Heidi´s misconceptions about area and perimeter. *School science and mathematics, 82*(4), 332-334.

Wood, T. (1996). Events in learning mathematics: insights from research in classrooms. *Educational Studies in Mathematics, 30*, 85-105.

Yuste, C. (1995). *Batería de aptitudes generales y diferenciales.* Madrid: CEPE.

ANEXOS

ANEXO A

Incluye aspectos relativos al diseño de la investigación y recogida de datos, como son: el cuestionario aplicado y los datos obtenidos.

ANEXO A.1. Cuestionario

Este apéndice incluye el cuestionario de problemas matemáticos de estructura multiplicativa en el mismo formato en el que se ha presentado a los niños. También incluye las instrucciones iniciales dadas a los niños verbalmente por la investigadora antes de responder el cuestionario.

El cuestionario consta de doce problemas de estructura multiplicativa: cuatro problemas de comparación, dos problemas de combinatoria, dos problemas de escala, dos problemas con componente geométrica y dos problemas con números decimales.

INSTRUCCIONES

1. Completar todos los datos que se piden en la parte superior de cada hoja
2. Escribir todas las operaciones necesarias para resolver cada problema
3. Escribir la solución en el espacio en blanco que hay a continuación del problema
4. No des como solución sólo un número. Escribe la solución dando el número y lo que ese número significa, por ejemplo en el siguiente problema

Diego tenía 500 pesos

Pablo le da 300 pesos

¿cuántos pesos tiene ahora diego?

La solución se pondría en la forma

$$\begin{array}{r} 500 \\ \underline{+300} \\ 800 \end{array}$$

Solución: Diego tiene 800 pesos

HOJA 1 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 1

Pablo tiene 60 centímetros de estatura. Tatiana tiene 180 centímetros de estatura. ¿Cuántas veces menos estatura tiene Pablo que Tatiana?

Problema 2

Un trozo de queso pesa 0,923 kilogramos. Si un kilo cuesta 6,50 dólares, ¿Cuánto cuesta el trozo de queso?

HOJA 2 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 3

Tengo 6 camisetas y 2 pantalones, ¿De cuántas maneras los puedo combinar para vestirme?

Problema 4

Pablo tiene 180 centímetros de estatura. Pablo tiene 3 veces tanta estatura como Tatiana. ¿Cuál es la estatura de Tatiana?

HOJA 3 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 5

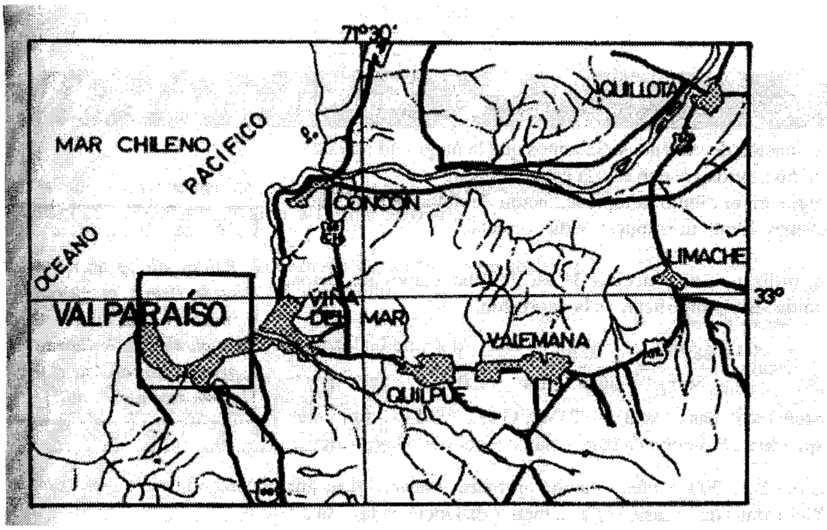
Un caracol intenta subir una pared de 10 metros de altura. Durante el día sube 2 metros y durante la noche desciende 1 metro. ¿Cuántos días empleará el caracol para llegar al final de la pared?

HOJA 4 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 6

El mapa tiene una escala de 8 : 4.000.000, esto significa que 8 centímetros del dibujo representan 4.000.000 de centímetros reales.



Determina la distancia de Quillota a Limache y escribe los cálculos empleados:

Describe el procedimiento que te permitió encontrar la distancia

HOJA 5 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 7

El lado de un cuadrado mide 8 centímetros. Si el perímetro se disminuye en 8 para formar un nuevo cuadrado. ¿En cuántos centímetros cuadrados ha disminuido el área?

Problema 8

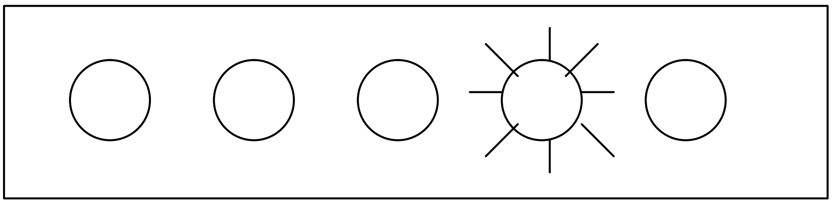
Tatiana tiene 180 centímetros de estatura. Pablo tiene 3 veces menos de estatura que Tatiana. ¿Cuánta estatura tiene Pablo?

HOJA 6 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 9

En una oficina las personas son llamadas por luces parpadeantes. Cada empleado tiene una combinación personal consistente en una o más luces. Existen exactamente tantas combinaciones como empleados. ¿Cuántos empleados hay en la oficina?

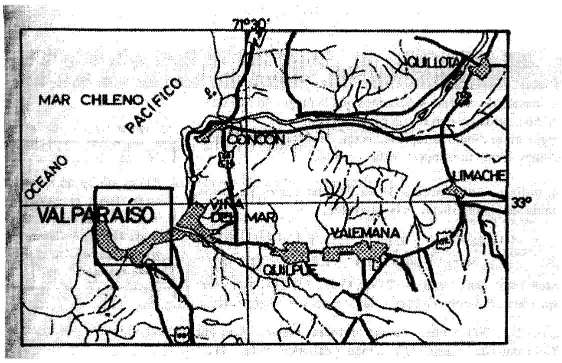


HOJA 7 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 10

Si la distancia de Limache a Quillota es 1500000 centímetros. ¿Cuál es la escala del mapa?



Determina la escala del mapa y escribe los cálculos empleados:

Describe el procedimiento que te permitió encontrar la distancia

HOJA 8 DE PROBLEMAS

Nombre y Apellidos___________________________________Fecha de hoy_________
Fecha de Nacimiento: día_____mes_____año______

Problema 11

Si 0,923 kilogramos cuestan 6 dólares. ¿Cuánto cuesta el kilo de queso?

Problema 12

Tatiana tiene 60 centímetros de estatura. Pablo tiene 3 veces tanta estatura como Tatiana. ¿Qué estatura tiene Pablo?

ANEXO A.2. Matriz de datos

Claves para interpretar las columnas de datos

Columna 1, identifica el sujeto.
Columna 2, identifica el colegio (1: Colegio Municipal, 2: Colegio Particular Subvencionado, 3: ColegioParticular Pagado).
Columna 3, identifica el curso (6: sexto año de educación básica, 8: octavo año de educación básica).
Columna 4, identifica el grupo al que pertenece el alumno según el puntaje obtenido en el test de Raven (1: puntaje igual o superior a 47 puntos, 0: puntaje inferior a 47 puntos).
Columna 5, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el primer problema.
Columna 6, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el segundo problema.
Columna 7, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el tercer problema.
Columna 8, puntuación (0 : incorrecta o 1=correcta) en el cuarto problema.
Columna 9, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el quinto problema.
Columna 10, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el sexto problema.
Columna 11, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el séptimo problema.
Columna 12, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el octavo problema.
Columna 13, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el noveno problema.
Columna 14, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el décimo problema.
Columna 15, puntuación (0: incorrecta o 1=correcta) en el undécimo problema.
Columna 16, puntuación (0 : incorrecta o 1=correcta) en el duodécimo problema.
Columna 17, puntuación expresada en porcentaje obtenida en el cuestionario de problemas matemáticos de estructura multiplicativa.
Columna 18, puntaje en el test de Raven.
Columna 19, puntuación expresada en porcentaje obtenida en el test de Raven.
Columna 20, nota media obtenida en la asignatura de matemática (la escala de notas es de 1,0 a 7,0).
Columna 21, nota media expresada en porcentaje obtenida en la asignatura de matemática.

S	COLEGIO	CURSO	GRUPO	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12		TPERCEN(%)	RAVEN	RAVENP(%)	MATEMA	MATEMAP(%)
1	1	8	1	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	7	58,3	52	86,7	5,8	80,0
2	3	6	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	4	33,3	48	80,0	7	100,0
3	2	6	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	48	80,0	6,8	96,7
4	1	6	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	1	9	75,0	52	86,7	6,9	98,3
5	1	8	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	1	1	8	66,7	53	88,3	6,9	98,3
6	3	6	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	8	66,7	49	81,7	6,7	95,0
7	1	6	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	50	83,3	6,8	96,7
8	2	8	1	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	54	90,0	6,5	91,7
9	1	6	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	6	50,0	47	78,3	6,1	85,0
10	3	6	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	8	66,7	49	81,7	6,8	96,7
11	1	8	1	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	5	41,7	49	81,7	7	100,0
12	1	6	1	1	0	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	7	58,3	47	78,3	6,6	93,3
13	1	6	1	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	7	58,3	47	78,3	6,5	91,7
14	2	6	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	6	50,0	50	83,3	5,8	80,0
15	2	6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	1	10	83,3	57	95,0	6,9	98,3
16	1	8	1	1	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	7	58,3	49	81,7	6	83,3
17	2	6	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	47	78,3	6,8	96,7
18	1	6	1	1	0	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	10	83,3	52	86,7	7	100,0
19	1	6	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	50	83,3	6,7	95,0
20	1	8	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	9	75,0	49	81,7	6,9	98,3
21	1	8	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	7	58,3	49	81,7	6,9	98,3
22	3	6	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	1	0	1	6	50,0	52	86,7	6,9	98,3
23	1	8	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	9	75,0	55	91,7	6,4	90,0
24	2	6	1	0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	7	58,3	50	83,3	6,7	95,0
25	2	6	1	1	0	1	0	0	1	1	1	0	1	0	1	7	58,3	53	88,3	6,8	96,7
26	1	8	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1	8	66,7	49	81,7	5,8	80,0
27	1	8	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	49	81,7	6,8	96,7
28	1	6	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	1	8	66,7	47	78,3	7	100,0
29	1	8	1	1	1	1	1	0	1	0	1	0	1	0	1	8	66,7	49	81,7	5	66,7
30	1	6	1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	6	50,0	51	85,0	6,7	95,0
31	1	8	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5	41,7	45	75,0	6	83,3
32	1	8	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	5	41,7	45	75,0	6,3	88,3
33	1	8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	3	25,0	38	63,3	6,1	85,0
34	1	8	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	43	71,7	6	83,3

35	1	8	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	16,7	41	68,3	5,3	71,7
36	2	6	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	6	50,0	44	73,3	6,3	88,3
37	3	6	0	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	5	41,7	46	76,7	6,4	90,0
38	3	6	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	3	25,0	33	55,0	6,5	91,7
39	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	16,7	45	75,0	5	66,7
40	1	8	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	3	25,0	46	76,7	5	66,7
41	1	8	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	3	25,0	45	75,0	5,5	75,0
42	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	8,3	44	73,3	6	83,3
43	1	8	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	2	16,7	41	68,3	6,5	91,7
44	2	6	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	3	25,0	42	70,0	6,7	95,0
45	2	6	0	1	0	1	1	0	0	1	1	0	0	0	1	6	50,0	40	66,7	6,5	91,7
46	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	16,7	44	73,3	6	83,3
47	1	8	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	4	33,3	46	76,7	6	83,3
48	1	8	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	3	25,0	36	60,0	6,6	93,3
49	2	6	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	43	71,7	6	83,3
50	1	8	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	3	25,0	28	46,7	7	100,0
51	2	6	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	1	5	41,7	35	58,3	6,6	93,3
52	1	6	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	39	65,0	6,7	95,0
53	1	8	0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	6	50,0	43	71,7	6,4	90,0
54	3	6	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	44	73,3	6,7	95,0
55	1	8	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	2	16,7	46	76,7	6,4	90,0
56	3	6	0	1	0	1	1	1	0	0	1	0	1	0	1	7	58,3	42	70,0	6,5	91,7
57	2	6	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	3	25,0	41	68,3	6,4	90,0
58	1	8	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	3	25,0	39	65,0	7	100,0
59	1	8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	2	16,7	41	68,3	5,8	80,0
60	1	8	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	4	33,3	42	70,0	6,3	88,3

ANEXO B. Análisis estadísticos

Programas estadísticos en SPSS/PC+ utilizados para el análisis de los datos en los aspectos de rendimiento considerando el cuestionario y los tipos de problemas. A continuación de cada programa se incluye la salida correspondiente proporcionada por programa SPSS.

ANEXO B.1. Análisis de rendimiento según grupo y colegio

Between-Subjects Factors

		N
COLEGIO	1	39
	2	13
	3	8
GRUPO	1	30
	2	30

Descriptive Statistics

Dependent Variable: TPERCEN

COLEGIO	GRUPO	Mean	Std. Deviation	N
1	1	60,0895	13,2107	19
	2	26,2550	10,5608	20
	Total	42,7385	20,7838	39
2	1	63,1000	12,5894	7
	2	37,5000	11,4916	6
	Total	51,2846	17,6271	13
3	1	52,0750	20,8300	4
	2	39,5750	14,2238	4
	Total	45,8250	17,8130	8
Total	1	59,7233	14,0325	30
	2	30,2800	12,2737	30
	Total	45,0017	19,7796	60

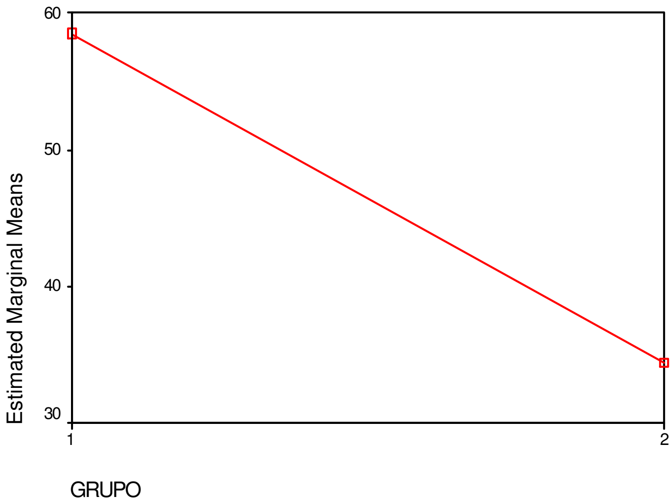
Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: TPERCEN

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	14302,367[a]	5	2860,473	17,592	,000
Intercept	85089,538	1	85089,538	523,309	,000
COLEGIO	498,408	2	249,204	1,533	,225
GRUPO	5672,902	1	5672,902	34,889	,000
COLEGIO * GRUPO	808,926	2	404,463	2,487	,093
Error	8780,342	54	162,599		
Total	144591,710	60			
Corrected Total	23082,710	59			

a. R Squared = ,620 (Adjusted R Squared = ,584)

Estimated Marginal Means of TPERCEN



ANEXO B.2. Análisis de rendimiento según grupo y curso

Between-Subjects Factors

		N
GRUPO	1	30
	2	30
CURSO	6	30
	8	30

Descriptive Statistics

Dependent Variable: TPERCEN

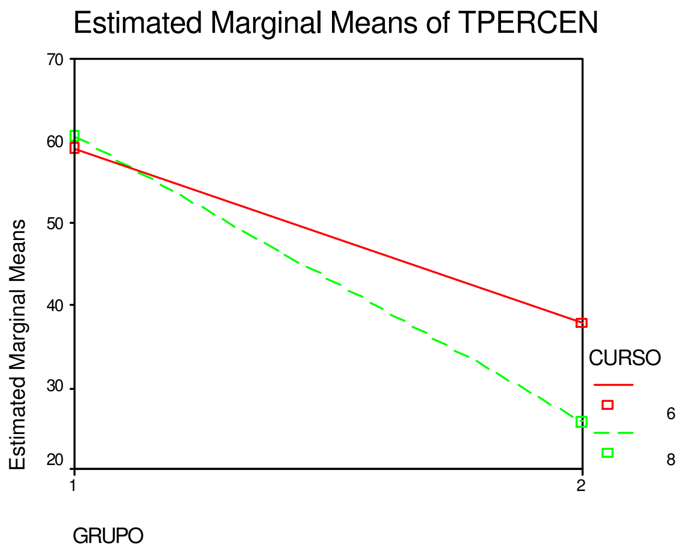
GRUPO	CURSO	Mean	Std. Deviation	N
1	6	59,2105	16,4145	19
	8	60,6091	9,2029	11
	Total	59,7233	14,0325	30
2	6	37,8727	11,4042	11
	8	25,8842	10,7156	19
	Total	30,2800	12,2737	30
Total	6	51,3867	17,9293	30
	8	38,6167	19,7522	30
	Total	45,0017	19,7796	60

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: TPERCEN

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	14018,556[a]	3	4672,852	28,870	,000
Intercept	117389,558	1	117389,558	725,254	,000
GRUPO	10948,200	1	10948,200	67,640	,000
CURSO	390,646	1	390,646	2,413	,126
GRUPO * CURSO	624,262	1	624,262	3,857	,055
Error	9064,154	56	161,860		
Total	144591,710	60			
Corrected Total	23082,710	59			

a. R Squared = ,607 (Adjusted R Squared = ,586)


Estimated Marginal Means of TPERCEN
Estimated Marginal Means
70
60
50
40
30
20
1
2
GRUPO
CURSO
6
8

ANEXO B.3. Comparación entre el cuestionario PEM y el test deRaven

Report

GRUPO	TPERCEN Mean	TPERCEN Std. Deviation	RAVENP Mean	RAVENP Std. Deviation
1	59,7233	14,0325	83,500	4,229
2	30,2800	12,2737	69,278	7,040
Total	45,0017	19,7796	76,389	9,197

Manova

```
Note: there are 2 levels for the A effect.  Average tests are identical
to the univariate tests of significance.

The default error term in MANOVA has been changed from WITHIN CELLS to
WITHIN+RESIDUAL.  Note that these are the same for all full factorial
designs.



* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e * * * * * *


        60 cases accepted.
         0 cases rejected because of out-of-range factor values.
         0 cases rejected because of missing data.
         2 non-empty cells.

         1 design will be processed.

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e -- design   1 * * * * * 
*

Tests of Between-Subjects Effects.

 Tests of Significance for T1 using UNIQUE sums of squares
 Source of Variation          SS      DF        MS         F  Sig of F

 WITHIN+RESIDUAL         6834,09      58    117,83
 GRUPO                  14300,40       1  14300,40    121,37      ,000

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

```
* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e -- design   1 * * * * *
*

Tests involving 'A' Within-Subject Effect.

 Tests of Significance for T2 using UNIQUE sums of squares
 Source of Variation          SS      DF        MS         F  Sig of F

 WITHIN+RESIDUAL         5200,96      58     89,67
 A                      29554,94       1  29554,94    329,59      ,000
 GRUPO BY A              1737,52       1   1737,52     19,38      ,000

 -  - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

ANEXO B.4. Comparación del cuestionario PEM y las notas de matemáticas

Report

GRUPO	TPERCEN		MATEMAP	
	Mean	Std. Deviation	Mean	Std. Deviation
1	59,7233	14,0325	93,06	7,95
2	30,2800	12,2737	86,94	8,46
Total	45,0017	19,7796	90,00	8,70

Manova

```
Note: there are 2 levels for the B effect.  Average tests are identical
to the univariate tests of significance.

The default error term in MANOVA has been changed from WITHIN CELLS to
WITHIN+RESIDUAL.  Note that these are the same for all full factorial
designs.



* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e * * * * * *


        60 cases accepted.
         0 cases rejected because of out-of-range factor values.
         0 cases rejected because of missing data.
         2 non-empty cells.

         1 design will be processed.

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e -- design   1 * * * * * *

Tests of Between-Subjects Effects.

 Tests of Significance for T1 using UNIQUE sums of squares
 Source of Variation          SS      DF        MS         F  Sig of F

 WITHIN+RESIDUAL         8430,03      58    145,35
 GRUPO                   9483,85       1   9483,85     65,25      ,000

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

```
* * * * * * A n a l y s i s   o f   V a r i a n c e -- design   1 * * * * *
*

Tests involving 'B' Within-Subject Effect.

 Tests of Significance for T2 using UNIQUE sums of squares
 Source of Variation          SS      DF        MS         F  Sig of F

 WITHIN+RESIDUAL         5556,98      58     95,81
 B                      60741,00       1  60741,00    633,97      ,000
 GRUPO BY B              4081,00       1   4081,00     42,59      ,000

 - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -
```

ANEXO B.5. Análisis de los problemas

Report

Mean

	PERCENT		
	GRUPO		
TIPO	1	2	Total
1	90,8333	64,1667	77,5000
2	51,6667	25,0000	38,3333
3	63,3333	10,0000	36,6667
4	30,0000	8,3333	19,1667
5	31,6667	10,0000	20,8333
Total	53,5000	23,5000	38,5000

Univariate Analysis of Variance

Between-Subjects Factors

		N
TIPO	1	60
	2	60
	3	60
	4	60
	5	60
GRUPO	1	150
	2	150

Tests of Between-Subjects Effects

Dependent Variable: PERCENT

Source	Type III Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
Corrected Model	210700,000[a]	9	23411,111	30,738	,000
Intercept	444675,000	1	444675,000	583,840	,000
TIPO	132616,667	4	33154,167	43,530	,000
GRUPO	67500,000	1	67500,000	88,625	,000
TIPO * GRUPO	10583,333	4	2645,833	3,474	,009
Error	220875,000	290	761,638		
Total	876250,000	300			
Corrected Total	431575,000	299			

a. R Squared = ,488 (Adjusted R Squared = ,472)

Post Hoc Tests

TIPO

Multiple Comparisons

Dependent Variable: PERCENT
Scheffe

(I) TIPO	(J) TIPO	Mean Difference (I-J)	Std. Error	Sig.	95% Confidence Interval	
					Lower Bound	Upper Bound
1	2	39,1667*	5,0386	,000	23,5460	54,7874
	3	40,8333*	5,0386	,000	25,2126	56,4540
	4	58,3333*	5,0386	,000	42,7126	73,9540
	5	56,6667*	5,0386	,000	41,0460	72,2874
2	1	-39,1667*	5,0386	,000	-54,7874	-23,5460
	3	1,6667	5,0386	,999	-13,9540	17,2874
	4	19,1667*	5,0386	,007	3,5460	34,7874
	5	17,5000*	5,0386	,018	1,8793	33,1207
3	1	-40,8333*	5,0386	,000	-56,4540	-25,2126
	2	-1,6667	5,0386	,999	-17,2874	13,9540
	4	17,5000*	5,0386	,018	1,8793	33,1207
	5	15,8333*	5,0386	,045	,2126	31,4540
4	1	-58,3333*	5,0386	,000	-73,9540	-42,7126
	2	-19,1667*	5,0386	,007	-34,7874	-3,5460
	3	-17,5000*	5,0386	,018	-33,1207	-1,8793
	5	-1,6667	5,0386	,999	-17,2874	13,9540
5	1	-56,6667*	5,0386	,000	-72,2874	-41,0460
	2	-17,5000*	5,0386	,018	-33,1207	-1,8793
	3	-15,8333*	5,0386	,045	-31,4540	-,2126
	4	1,6667	5,0386	,999	-13,9540	17,2874

Based on observed means.

*. The mean difference is significant at the ,05 level.

Homogeneous Subsets

PERCENT

Scheffe[a,b]

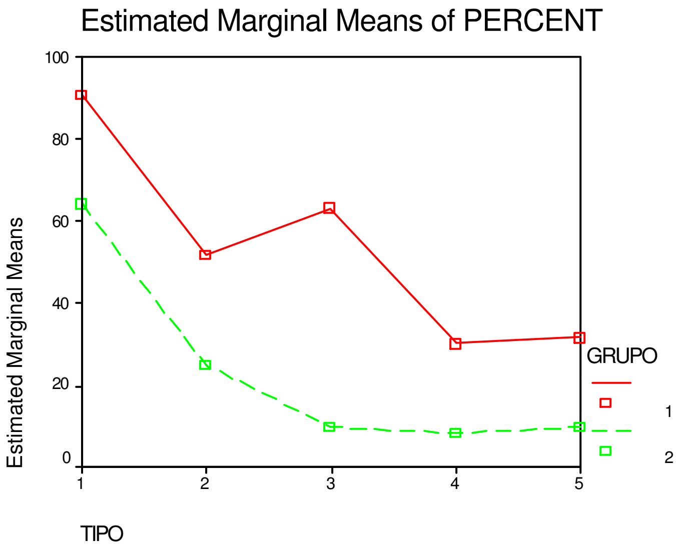
TIPO	N	Subset		
		1	2	3
4	60	19,1667		
5	60	20,8333		
3	60		36,6667	
2	60		38,3333	
1	60			77,5000
Sig.		,999	,999	1,000

Means for groups in homogeneous subsets are displayed.
Based on Type III Sum of Squares
The error term is Mean Square(Error) = 761,638.

a. Uses Harmonic Mean Sample Size = 60,000.

b. Alpha = ,05.

Profile Plots



ANEXO B.6. Test de asociación Chi-Cuadrado

Crosstabs

Case Processing Summary

	Cases					
	Valid		Missing		Total	
	N	Percent	N	Percent	N	Percent
P1 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P2 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P3 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P4 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P5 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P6 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P7 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P8 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P9 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P10 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P11 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%
P12 * GRUPO	60	100,0%	0	,0%	60	100,0%

P1 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P1	0	7	20	27
	1	23	10	33
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	11,380[b]	1	,001		
Continuity Correction[a]	9,697	1	,002		
Likelihood Ratio	11,789	1	,001		
Fisher's Exact Test				,002	,001
Linear-by-Linear Association	11,191	1	,001		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

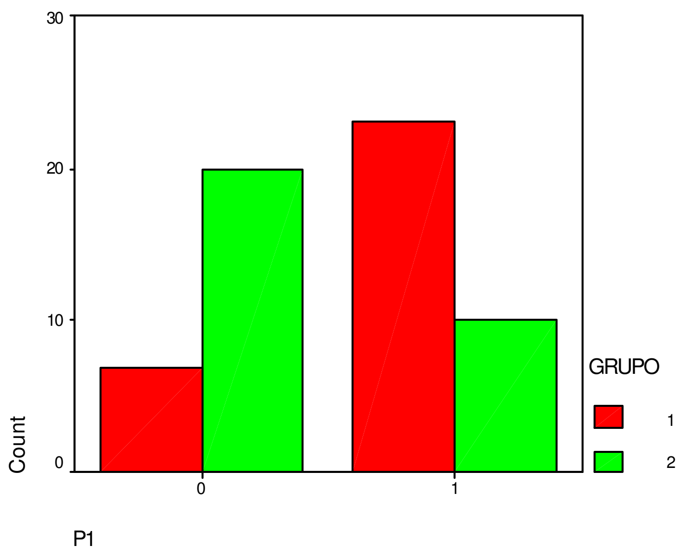
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 13,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,436	,116	-3,748	,000
		P1 Dependent	-,433	,116	-3,748	,000
		GRUPO Dependent	-,438	,116	-3,748	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P2 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO 1	GRUPO 2	Total
P2	0	21	24	45
	1	9	6	15
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	,800[b]	1	,371		
Continuity Correction[a]	,356	1	,551		
Likelihood Ratio	,804	1	,370		
Fisher's Exact Test				,552	,276
Linear-by-Linear Association	,787	1	,375		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

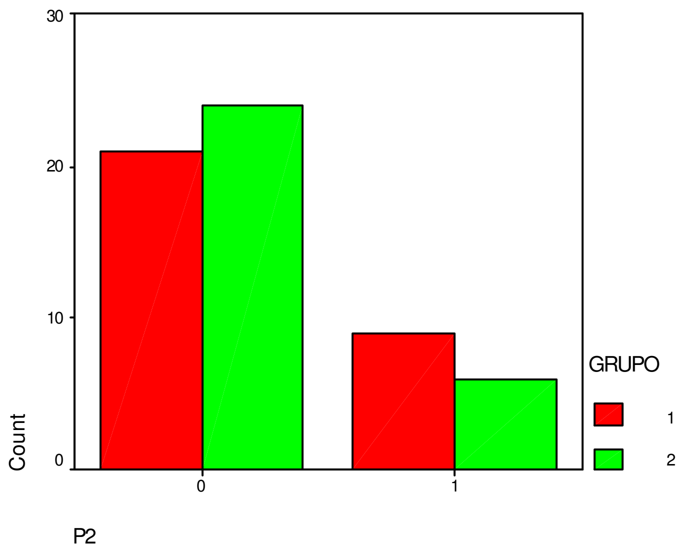
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 7,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,114	,126	-,900	,368
		P2 Dependent	-,100	,111	-,900	,368
		GRUPO Dependent	-,133	,147	-,900	,368

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P3 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P3	0	3	15	18
	1	27	15	42
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	11,429[b]	1	,001		
Continuity Correction[a]	9,603	1	,002		
Likelihood Ratio	12,210	1	,000		
Fisher's Exact Test				,002	,001
Linear-by-Linear Association	11,238	1	,001		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

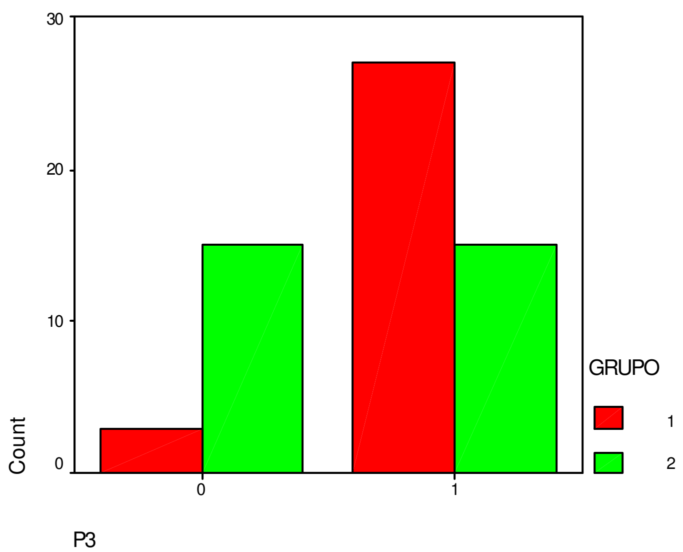
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 9,00.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,435	,108	-3,757	,000
		P3 Dependent	-,400	,106	-3,757	,000
		GRUPO Dependent	-,476	,115	-3,757	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P4 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO 1	GRUPO 2	Total
P4	0	2	15	17
	1	28	15	43
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	13,871[b]	1	,000		
Continuity Correction[a]	11,819	1	,001		
Likelihood Ratio	15,244	1	,000		
Fisher's Exact Test				,000	,000
Linear-by-Linear Association	13,640	1	,000		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

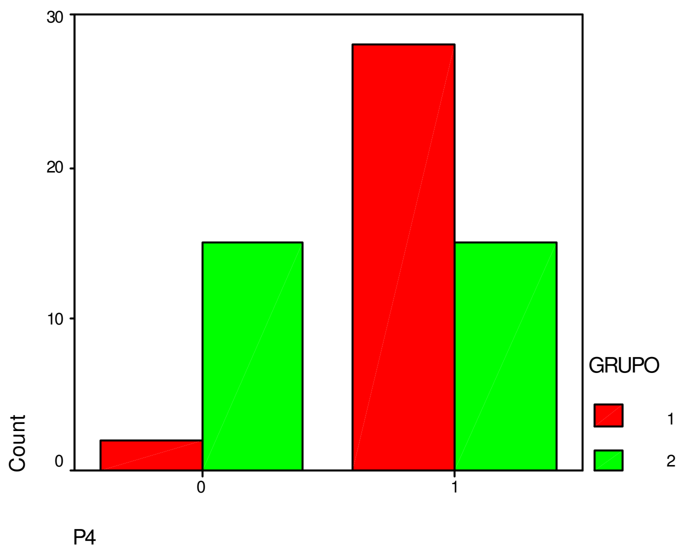
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 8,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,478	,100	-4,248	,000
		P4 Dependent	-,433	,102	-4,248	,000
		GRUPO Dependent	-,534	,107	-4,248	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P5 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P5	0	20	27	47
	1	10	3	13
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	4,812[b]	1	,028		
Continuity Correction[a]	3,535	1	,060		
Likelihood Ratio	5,023	1	,025		
Fisher's Exact Test				,057	,029
Linear-by-Linear Association	4,732	1	,030		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

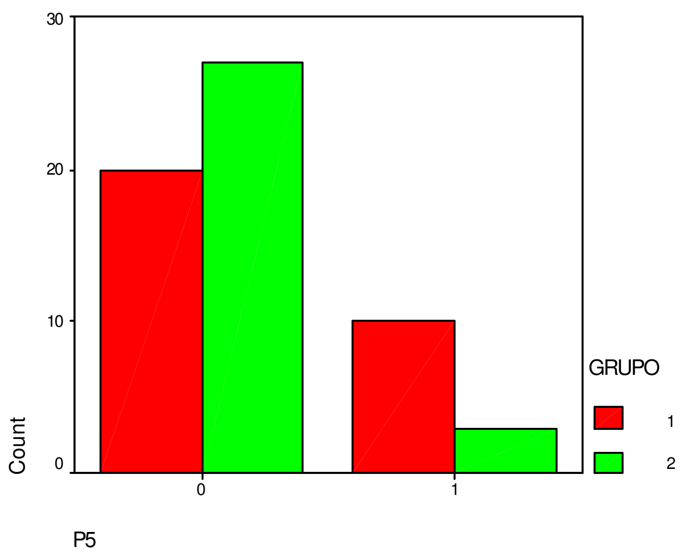
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 6,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,278	,114	-2,287	,022
		P5 Dependent	-,233	,102	-2,287	,022
		GRUPO Dependent	-,344	,137	-2,287	,022

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P6 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO 1	GRUPO 2	Total
P6	0	11	26	37
	1	19	4	23
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	15,864[b]	1	,000		
Continuity Correction[a]	13,819	1	,000		
Likelihood Ratio	16,891	1	,000		
Fisher's Exact Test				,000	,000
Linear-by-Linear Association	15,599	1	,000		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

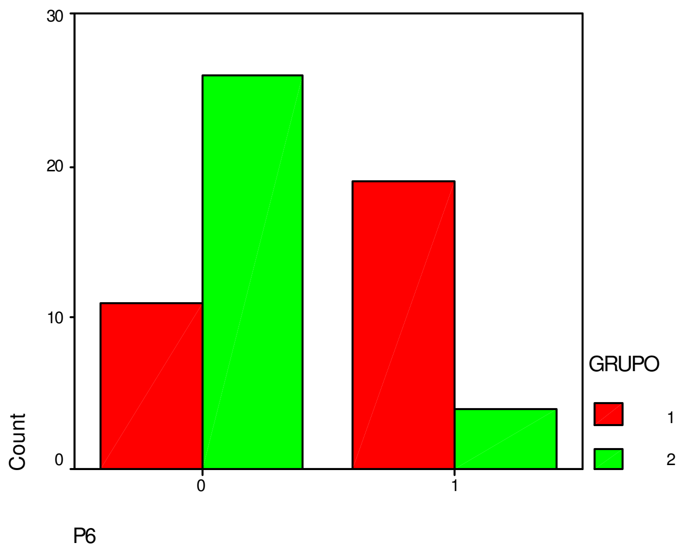
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 11,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,514	,107	-4,644	,000
		P6 Dependent	-,500	,108	-4,644	,000
		GRUPO Dependent	-,529	,109	-4,644	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P7 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P7	0	22	28	50
	1	8	2	10
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	4,320[b]	1	,038		
Continuity Correction[a]	3,000	1	,083		
Likelihood Ratio	4,577	1	,032		
Fisher's Exact Test				,080	,040
Linear-by-Linear Association	4,248	1	,039		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

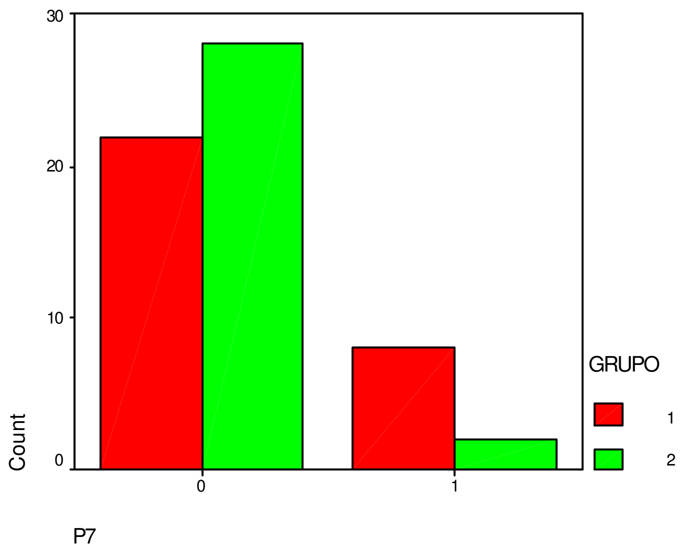
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 5,00.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,257	,108	-2,158	,031
		P7 Dependent	-,200	,093	-2,158	,031
		GRUPO Dependent	-,360	,145	-2,158	,031

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P8 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P8	0	2	7	9
	1	28	23	51
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	3,268[b]	1	,071		
Continuity Correction[a]	2,092	1	,148		
Likelihood Ratio	3,433	1	,064		
Fisher's Exact Test				,145	,073
Linear-by-Linear Association	3,214	1	,073		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

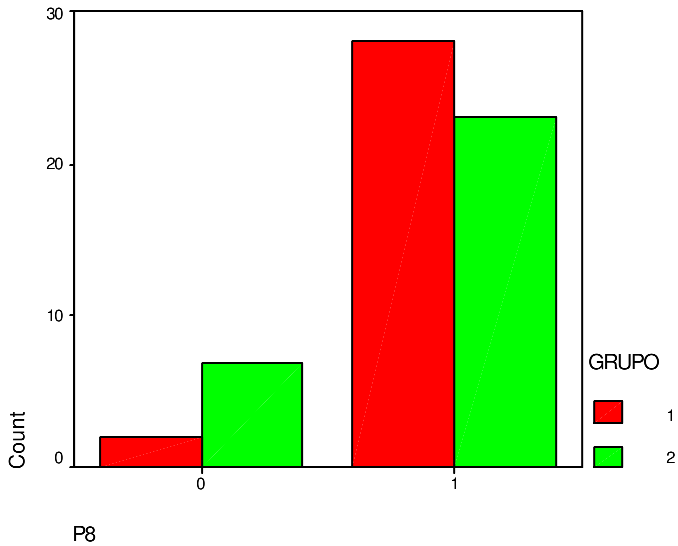
b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 4,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,221	,108	-1,859	,063
		P8 Dependent	-,167	,090	-1,859	,063
		GRUPO Dependent	-,327	,155	-1,859	,063

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P9 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P9	0	26	30	56
	1	4		4
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	4,286[b]	1	,038		
Continuity Correction[a]	2,411	1	,121		
Likelihood Ratio	5,831	1	,016		
Fisher's Exact Test				,112	,056
Linear-by-Linear Association	4,214	1	,040		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

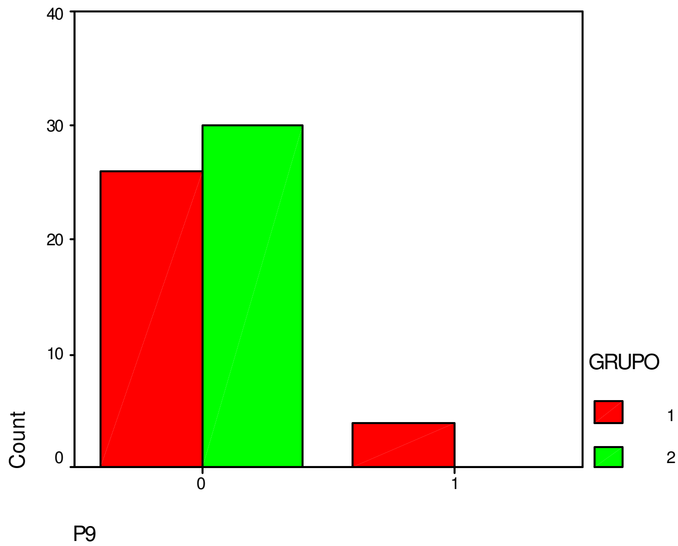
b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 2,00.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,214	,055	-2,148	,032
		P9 Dependent	-,133	,062	-2,148	,032
		GRUPO Dependent	-,536	,067	-2,148	,032

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P10 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO 1	GRUPO 2	Total
P10	0	11	28	39
	1	19	2	21
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	21,172[b]	1	,000		
Continuity Correction[a]	18,755	1	,000		
Likelihood Ratio	23,568	1	,000		
Fisher's Exact Test				,000	,000
Linear-by-Linear Association	20,819	1	,000		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

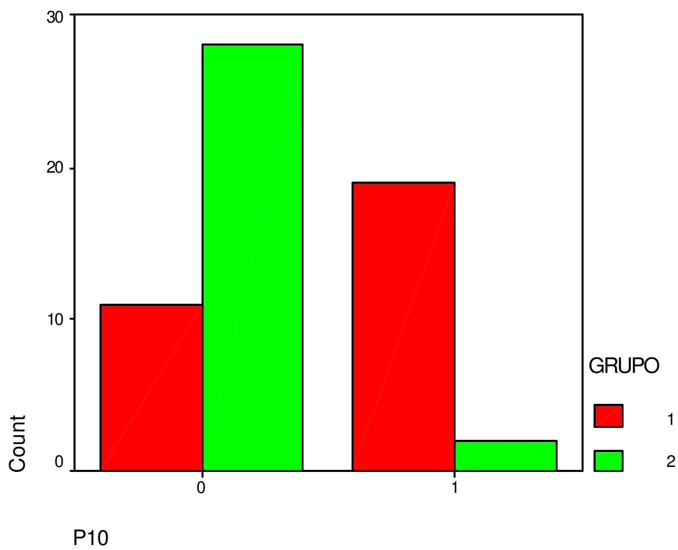
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 10,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,593	,095	-5,720	,000
		P10 Dependent	-,567	,099	-5,720	,000
		GRUPO Dependent	-,623	,096	-5,720	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P11 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO 1	GRUPO 2	Total
P11	0	20	30	50
	1	10		10
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	12,000[b]	1	,001		
Continuity Correction[a]	9,720	1	,002		
Likelihood Ratio	15,876	1	,000		
Fisher's Exact Test				,001	,000
Linear-by-Linear Association	11,800	1	,001		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

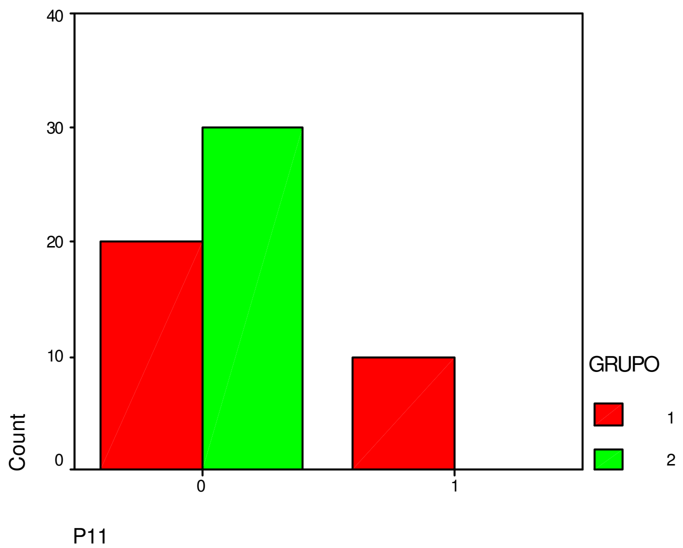
b. 0 cells (,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is 5,00.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,429	,070	-3,873	,000
		P11 Dependent	-,333	,086	-3,873	,000
		GRUPO Dependent	-,600	,069	-3,873	,000

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



P12 * GRUPO

Crosstab

Count

		GRUPO		Total
		1	2	
P12	0		1	1
	1	30	29	59
Total		30	30	60

Chi-Square Tests

	Value	df	Asymp. Sig. (2-sided)	Exact Sig. (2-sided)	Exact Sig. (1-sided)
Pearson Chi-Square	1,017[b]	1	,313		
Continuity Correction[a]	,000	1	1,000		
Likelihood Ratio	1,403	1	,236		
Fisher's Exact Test				1,000	,500
Linear-by-Linear Association	1,000	1	,317		
N of Valid Cases	60				

a. Computed only for a 2x2 table

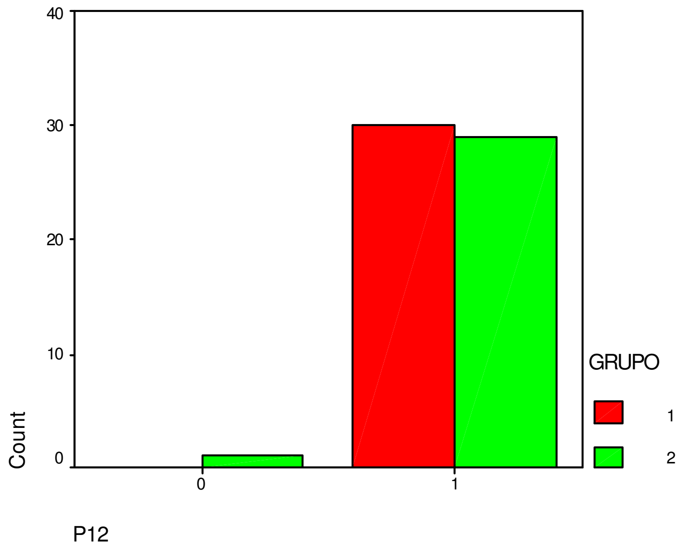
b. 2 cells (50,0%) have expected count less than 5. The minimum expected count is ,50.

Directional Measures

			Value	Asymp. Std. Error[a]	Approx. T[b]	Approx. Sig.
Ordinal by Ordinal	Somers' d	Symmetric	-,063	,032	-1,017	,309
		P12 Dependent	-,033	,033	-1,017	,309
		GRUPO Dependent	-,508	,065	-1,017	,309

a. Not assuming the null hypothesis.

b. Using the asymptotic standard error assuming the null hypothesis.



ANEXO B.7. Análisis loglineal

Resultados del análisis logarítmico lineal aplicado a la frecuencia de errores de la tabla 7.1 del capítulo 7.

```
* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * * * * *

DATA   Information

         96 unweighted cases accepted.
          0 cases rejected because of out-of-range factor values.
          0 cases rejected because of missing data.
        139 weighted cases will be used in the analysis.


FACTOR Information

   Factor  Level  Label
   ERROR       8
   PROBLEMA   12

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * * * * *

DESIGN 1 has generating class

    ERROR*PROBLEMA

 Note: For saturated models   ,500 has been added to all observed cells.
 This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA subcommand.


The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 1.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals is     ,000
and the convergence criterion is     ,250

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -


 Observed, Expected Frequencies and Residuals.

       Factor          Code           OBS count  EXP count  Residual  Std Resid


  ERROR                1
   PROBLEMA             1                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             2                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             3                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             4                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             5                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             6                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             7                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             8                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             9                  9,5        9,5       ,00        ,00
   PROBLEMA            10                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA            11                  8,5        8,5       ,00        ,00
   PROBLEMA            12                   ,5         ,5       ,00        ,00

  ERROR                2
   PROBLEMA             1                  3,5        3,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             2                  7,5        7,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             3                  3,5        3,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             4                   ,5         ,5       ,00        ,00
   PROBLEMA             5                   ,5         ,5       ,00        ,00
```

PROBLEMA	6	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	7	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	5,5	5,5	,00	,00
PROBLEMA	10	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	11	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00
ERROR	3				
PROBLEMA	1	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	2	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	5	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	6	4,5	4,5	,00	,00
PROBLEMA	7	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	10	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	11	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00
ERROR	4				
PROBLEMA	1	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	2	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	5	17,5	17,5	,00	,00
PROBLEMA	6	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	7	4,5	4,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	4,5	4,5	,00	,00
PROBLEMA	10	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	11	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00
ERROR	5				
PROBLEMA	1	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	2	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	5	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	6	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	7	10,5	10,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	5,5	5,5	,00	,00
PROBLEMA	10	5,5	5,5	,00	,00
PROBLEMA	11	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00
ERROR	6				
PROBLEMA	1	4,5	4,5	,00	,00
PROBLEMA	2	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	5	3,5	3,5	,00	,00
PROBLEMA	6	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	7	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	8	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	9	5,5	5,5	,00	,00
PROBLEMA	10	1,5	1,5	,00	,00
PROBLEMA	11	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00
ERROR	7				
PROBLEMA	1	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	2	6,5	6,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	5	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	6	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	7	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	10	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	11	6,5	6,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00

ERROR	8				
PROBLEMA	1	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	2	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	3	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	4	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	5	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	6	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	7	7,5	7,5	,00	,00
PROBLEMA	8	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	9	,5	,5	,00	,00
PROBLEMA	10	3,5	3,5	,00	,00
PROBLEMA	11	2,5	2,5	,00	,00
PROBLEMA	12	,5	,5	,00	,00

- -

Goodness-of-fit test statistics

Likelihood ratio chi square = ,00000 DF = 0 P = 1,000
Pearson chi square = ,00000 DF = 0 P = 1,000

- -

Tests that K-way and higher order effects are zero.

K	DF	L.R. Chisq	Prob	Pearson Chisq	Prob	Iteration
2	77	258,689	,0000	296,184	,0000	2
1	95	364,309	,0000	509,518	,0000	0

- -

Tests that K-way effects are zero.

K	DF	L.R. Chisq	Prob	Pearson Chisq	Prob	Iteration
1	18	105,620	,0000	213,334	,0000	0
2	77	258,689	,0000	296,184	,0000	0

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L L O G L I N E A R * * * * * * * *

Tests of PARTIAL associations.

Effect Name	DF	Partial Chisq	Prob	Iter
ERROR	7	9,739	,2039	2
PROBLEMA	11	95,881	,0000	2

- -

Note: For saturated models ,500 has been added to all observed cells.
This value may be changed by using the CRITERIA = DELTA subcommand.

Estimates for Parameters.

ERROR*PROBLEMA

1

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,2905712704	1,23809	-,23469	-2,71722	2,13608
2	-,9714903886	1,21283	-,80101	-3,34864	1,40566
3	-,0159181982	1,24740	-,01276	-2,46082	2,42899
4	,0261408313	1,24800	,02095	-2,41993	2,47221
5	-,4603367059	1,23722	-,37207	-2,88528	1,96461
6	-,6604918491	1,21748	-,54251	-3,04676	1,72577

	7	-,9037306177	1,22013	-,74069	-3,29518	1,48772
	8	,0261408313	1,24800	,02095	-2,41993	2,47221
	9	1,6298408777	,52467	3,10643	,60149	2,65819
	10	-,4529816434	1,23084	-,36803	-2,86543	1,95947
	11	1,8460775626	,54248	3,40305	,78282	2,90933
	12	,2273205704	1,25632	,18094	-2,23506	2,68970
2						
	1	1,2038940431	,65587	1,83557	-,08161	2,48940
	2	1,2851149770	,52252	2,45947	,26098	2,30925
	3	1,4785471153	,67329	2,19602	,15891	2,79819
	4	-,4253040042	1,23541	-,34426	-2,84670	1,99609
	5	-,9117815414	1,22452	-,74460	-3,31184	1,48827
	6	-,0133243959	,78592	-,01695	-1,55372	1,52707
	7	-1,355175453	1,20725	-1,12253	-3,72138	1,01103
	8	-,4253040042	1,23541	-,34426	-2,84670	1,99609
	9	,6318523358	,54024	1,16958	-,42701	1,69072
	10	-,9044264789	1,21807	-,74250	-3,29185	1,48300
	11	-,3399683283	,77856	-,43666	-1,86594	1,18601
	12	-,2241242651	1,24381	-,18019	-2,66199	2,21374
3						
	1	-,3945617697	1,23218	-,32021	-2,80964	2,02051
	2	,5339570245	,67555	,79040	-,79012	1,85804
	3	-,1199086975	1,24154	-,09658	-2,55333	2,31351
	4	1,5315882445	,73682	2,07864	,08742	2,97576
	5	-,5643272052	1,23131	-,45831	-2,97769	1,84904
	6	1,4327422290	,59713	2,39938	,26237	2,60312
	7	-1,007721117	1,21414	-,82999	-3,38743	1,37198
	8	-,0778496679	1,24214	-,06267	-2,51244	2,35674
	9	-1,418588601	1,20204	-1,18015	-3,77459	,93741
	10	-,5569721427	1,22490	-,45471	-2,95778	1,84384
	11	,5183116317	,67540	,76741	-,80547	1,84210
	12	,1233300711	1,25050	,09862	-2,32764	2,57430
4						
	1	-,4715833448	1,23446	-,38202	-2,89113	1,94796
	2	-1,152502463	1,20913	-,95317	-3,52239	1,21739
	3	-,1969302726	1,24380	-,15833	-2,63478	2,24092
	4	-,1548712431	1,24440	-,12445	-2,59389	2,28415
	5	2,9139992812	,55449	5,25528	1,82720	4,00080
	6	-,8415039235	1,21380	-,69328	-3,22054	1,53753
	7	1,1124818852	,60715	1,83229	-,07754	2,30250
	8	-,1548712431	1,24440	-,12445	-2,59389	2,28415
	9	,7016144015	,58259	1,20430	-,44026	1,84349
	10	-,6339937178	1,22719	-,51662	-3,03930	1,77131
	11	-1,168147856	1,20904	-,96617	-3,53787	1,20158
	12	,0463084960	1,25274	,03697	-2,40907	2,50168
5						
	1	-,5540106828	1,23155	-,44985	-2,96786	1,85984
	2	-1,234929801	1,20616	-1,02385	-3,59901	1,12915
	3	-,2793576106	1,24092	-,22512	-2,71155	2,15284
	4	-,2372985811	1,24152	-,19114	-2,67067	2,19607
	5	-,7237761183	1,23068	-,58811	-3,13591	1,68836
	6	,1746810272	,79549	,21959	-1,38447	1,73383
	7	1,8773524076	,53113	3,53461	,83633	2,91838
	8	-,2372985811	1,24152	-,19114	-2,67067	2,19607
	9	,8198577589	,55407	1,47971	-,26611	1,90583
	10	1,6814742170	,60206	2,79287	,50144	2,86151
	11	-1,250575194	1,20608	-1,03690	-3,61448	1,11333
	12	-,0361188420	1,24988	-,02890	-2,48588	2,41364
6						
	1	1,3427145783	,61453	2,18493	,13823	2,54720
	2	-,4368168285	,77041	-,56699	-1,94681	1,07318
	3	-,5798569268	1,22960	-,47158	-2,98987	1,83015
	4	-,5377978972	1,23020	-,43716	-2,94900	1,87340
	5	,9216347145	,64435	1,43034	-,34129	2,18456
	6	-,1258182890	,77771	-,16178	-1,65013	1,39849
	7	-,3690570576	,78185	-,47203	-1,90147	1,16336
	8	1,0716400152	,71652	1,49562	-,33274	2,47602

9	,5193584427	,52823	,98321	-,51597	1,55469
10	,0816919167	,79846	,10231	-1,48329	1,64668
11	-1,551074510	1,19443	-1,29859	-3,89215	,79000
12	-,3366181582	1,23864	-,27176	-2,76436	2,09112

7

1	-,2365918030	1,23827	-,19107	-2,66359	2,19041
2	1,6474384362	,56352	2,92349	,54294	2,75193
3	,0380612691	1,24758	,03051	-2,40719	2,48331
4	,0801202987	1,24817	,06419	-2,36630	2,52654
5	-,4063572386	1,23740	-,32840	-2,83166	2,01894
6	-,6065123817	1,21766	-,49810	-2,99313	1,78011
7	-,8497511503	1,22031	-,69634	-3,24156	1,54205
8	,0801202987	1,24817	,06419	-2,36630	2,52654
9	-1,260618634	1,20827	-1,04332	-3,62884	1,10760
10	-,3990021761	1,23102	-,32412	-2,81180	2,01380
11	1,6317930433	,56334	2,89666	,52765	2,73593
12	,2813000378	1,25649	,22388	-2,18142	2,74402

8

1	-,5992897508	1,22836	-,48788	-3,00689	1,80831
2	,3292290435	,66856	,49244	-,98116	1,63962
3	-,3246366786	1,23775	-,26228	-2,75063	2,10136
4	-,2825776490	1,23835	-,22819	-2,70975	2,14459
5	-,7690551863	1,22749	-,62653	-3,17494	1,63682
6	,6402275830	,67697	,94573	-,68663	1,96708
7	1,4956011030	,54596	2,73942	,42553	2,56567
8	-,2825776490	1,23835	-,22819	-2,70975	2,14459
9	-1,623316582	1,19813	-1,35488	-3,97165	,72501
10	1,1842100253	,64774	1,82822	-,08536	2,45378
11	,3135836506	,66841	,46915	-,99650	1,62367
12	,6486077190	1,26428	,51302	-1,82939	3,12660

ERROR

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,2273205704	,34640	-,65623	-,90627	,45163
2	,2241242651	,29787	,75241	-,35971	,80796
3	-,1233300711	,32467	-,37987	-,75968	,51302
4	-,0463084960	,33321	-,13898	-,69940	,60679
5	,0361188420	,32228	,11207	-,59555	,66778
6	,3366181582	,27550	1,22186	-,20336	,87659
7	-,2813000378	,34704	-,81057	-,96150	,39890
8	-,6486077190	,37427	-1,73300	-1,38218	,08496

PROBLEMA

Parameter	Coeff.	Std. Err.	Z-Value	Lower 95 CI	Upper 95 CI
1	-,1908997565	,42134	-,45307	-1,01674	,63494
2	,4900193617	,34004	1,44105	-,17646	1,15650
3	-,4655528287	,44797	-1,03924	-1,34358	,41247
4	-,5076118583	,44963	-1,12895	-1,38889	,37366
5	-,0211343210	,41879	-,05047	-,84195	,79969
6	,1790208221	,35628	,50247	-,51929	,87733
7	,4222595908	,36522	1,15618	-,29357	1,13809
8	-,5076118583	,44963	-1,12895	-1,38889	,37366
9	,8331270745	,32274	2,58145	,20056	1,46569
10	-,0284893835	,39955	-,07130	-,81162	,75464
11	,5056647545	,33974	1,48838	-,16023	1,17156
12	-,6486077190	,47266	-1,37224	-1,57503	,27781

\- -

```
* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * * * * *

Backward Elimination (p = ,050) for DESIGN 1 with generating class

  ERROR*PROBLEMA

 Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P = 1,000

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -


If Deleted Simple Effect is                DF   L.R. Chisq Change    Prob  Iter

 ERROR*PROBLEMA                            77             258,689   ,0000     2

Step 1

  The best model has generating class

      ERROR*PROBLEMA

  Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P = 1,000

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -



* * * * * * * *  H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R  * * * * * * * *

The final model has generating class

    ERROR*PROBLEMA

The Iterative Proportional Fit algorithm converged at iteration 0.
The maximum difference between observed and fitted marginal totals is     ,000
and the convergence criterion is     ,250

- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -


 Observed, Expected Frequencies and Residuals.

       Factor          Code            OBS count  EXP count  Residual  Std Resid


  ERROR                 1
   PROBLEMA              1                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              2                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              3                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              4                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              5                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              6                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              7                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              8                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              9                   9,0        9,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             10                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             11                   8,0        8,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             12                    ,0         ,0       ,00        ,00

  ERROR                 2
   PROBLEMA              1                   3,0        3,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              2                   7,0        7,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              3                   3,0        3,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              4                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              5                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              6                   1,0        1,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              7                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              8                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA              9                   5,0        5,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             10                    ,0         ,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             11                   1,0        1,0       ,00        ,00
   PROBLEMA             12                    ,0         ,0       ,00        ,00

  ERROR                 3
   PROBLEMA              1                    ,0         ,0       ,00        ,00
```

PROBLEMA	2	2,0	2,0	,00	,00

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R * * * * * * * *

Observed, Expected Frequencies and Residuals. (Cont.)

Factor	Code	OBS count	EXP count	Residual	Std Resid
PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	4	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	5	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	6	4,0	4,0	,00	,00
PROBLEMA	7	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	8	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	9	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	10	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	11	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00
ERROR	4				
PROBLEMA	1	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	2	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	4	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	5	17,0	17,0	,00	,00
PROBLEMA	6	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	7	4,0	4,0	,00	,00
PROBLEMA	8	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	9	4,0	4,0	,00	,00
PROBLEMA	10	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	11	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00
ERROR	5				
PROBLEMA	1	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	2	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	4	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	5	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	6	1,0	1,0	,00	,00
PROBLEMA	7	10,0	10,0	,00	,00
PROBLEMA	8	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	9	5,0	5,0	,00	,00
PROBLEMA	10	5,0	5,0	,00	,00
PROBLEMA	11	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00
ERROR	6				
PROBLEMA	1	4,0	4,0	,00	,00
PROBLEMA	2	1,0	1,0	,00	,00
PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00

* * * * * * * * H I E R A R C H I C A L   L O G   L I N E A R * * * * * * * *

Observed, Expected Frequencies and Residuals. (Cont.)

Factor	Code	OBS count	EXP count	Residual	Std Resid
PROBLEMA	4	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	5	3,0	3,0	,00	,00
PROBLEMA	6	1,0	1,0	,00	,00
PROBLEMA	7	1,0	1,0	,00	,00
PROBLEMA	8	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	9	5,0	5,0	,00	,00
PROBLEMA	10	1,0	1,0	,00	,00
PROBLEMA	11	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00
ERROR	7				
PROBLEMA	1	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	2	6,0	6,0	,00	,00

PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	4	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	5	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	6	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	7	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	8	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	9	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	10	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	11	6,0	6,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00
ERROR	8				
PROBLEMA	1	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	2	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	3	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	4	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	5	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	6	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	7	7,0	7,0	,00	,00
PROBLEMA	8	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	9	,0	,0	,00	,00
PROBLEMA	10	3,0	3,0	,00	,00
PROBLEMA	11	2,0	2,0	,00	,00
PROBLEMA	12	,0	,0	,00	,00

- -

Goodness-of-fit test statistics

```
Likelihood ratio chi square =      ,00000    DF = 0  P = 1,000
         Pearson chi square =      ,00000    DF = 0  P = 1,000
```

ANEXO B.8. Escalamiento de problemas

Resultados del escalamiento de problemas

Proximidades

Resumen de procesamiento de los casos[a]

Casos					
Valid		Perdidos		Total	
N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
8	100,0%	0	,0%	8	100,0%

a. Distancia euclídea usada

Escalamiento multidimensional

```
Iteration history for the 2 dimensional solution (in squared distances)

                  Young's S-stress formula 1 is used.

                Iteration     S-stress      Improvement

                    1           ,35561
                    2           ,27109         ,08452
                    3           ,25412         ,01697
                    4           ,25221         ,00191
                    5           ,25203         ,00018

                       Iterations stopped because
                 S-stress improvement is less than   ,001000


            Stress and squared correlation (RSQ) in distances

RSQ values are the proportion of variance of the scaled data (disparities)
           in the partition (row, matrix, or entire data) which
            is accounted for by their corresponding distances.
             Stress values are Kruskal's stress formula 1.



                For  matrix
    Stress  =   ,21920      RSQ =  ,92679
```

Configuration derived in 2 dimensions

Stimulus Coordinates

Stimulus Number	Stimulus Name	Dimension 1	Dimension 2
1	P1	-,5102	,1632
2	P10	-,1460	,8893
3	P11	-,7841	-1,5037
4	P12	-,4652	,4930
5	P2	-1,0895	-,8875
6	P3	-,5632	,2221
7	P4	-,5053	,4602
8	P5	3,0094	-,4570
9	P6	-,4625	,4809
10	P7	1,1267	1,4235
11	P8	-,3577	,4161
12	P9	,7476	-1,7002

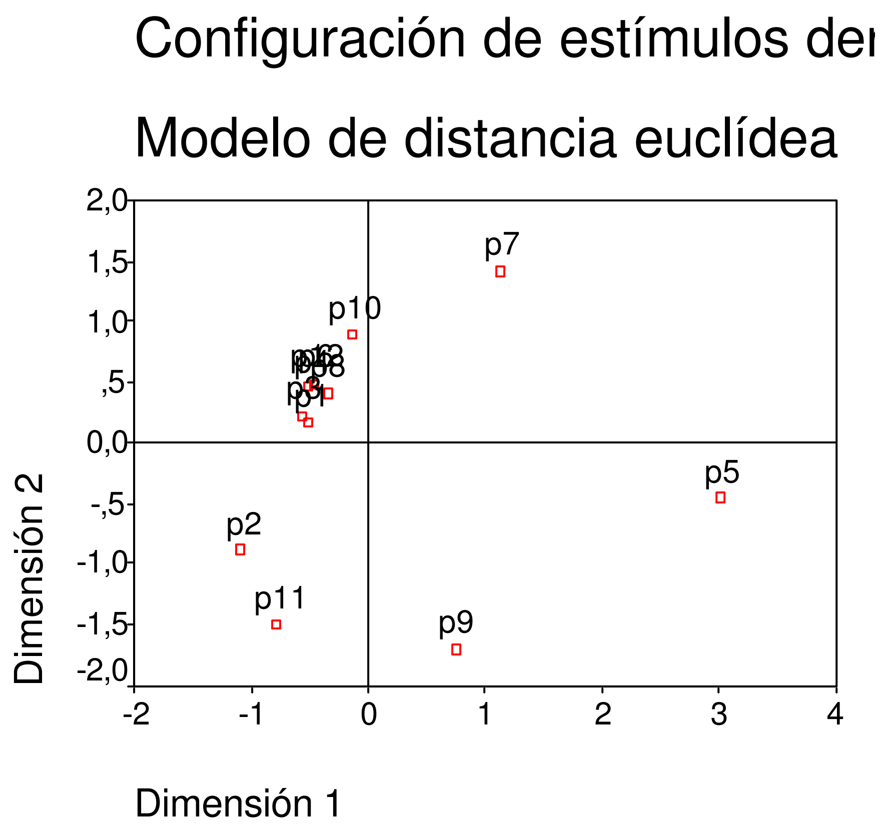
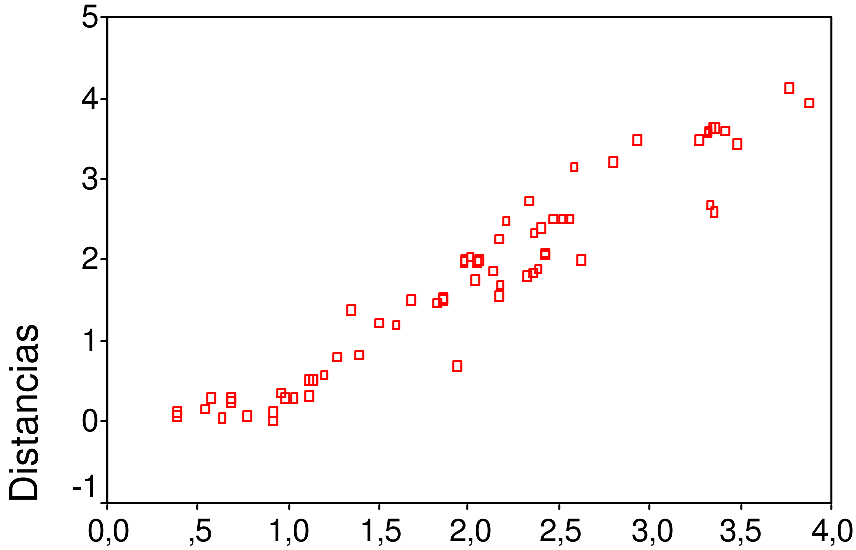


Gráfico de ajuste lineal

Modelo de distancia euclídea



Disparidades

ANEXO B.9. Escalamiento de errores

Resultados del escalamiento de errores. Hay que advertir que en el término error ha sido sustituido por el de case.

Proximidades

Resumen de procesamiento de los casos[a]

Casos					
Valid		Perdidos		Total	
N	Porcentaje	N	Porcentaje	N	Porcentaje
8	100,0%	0	,0%	8	100,0%

a. Distancia euclídea usada

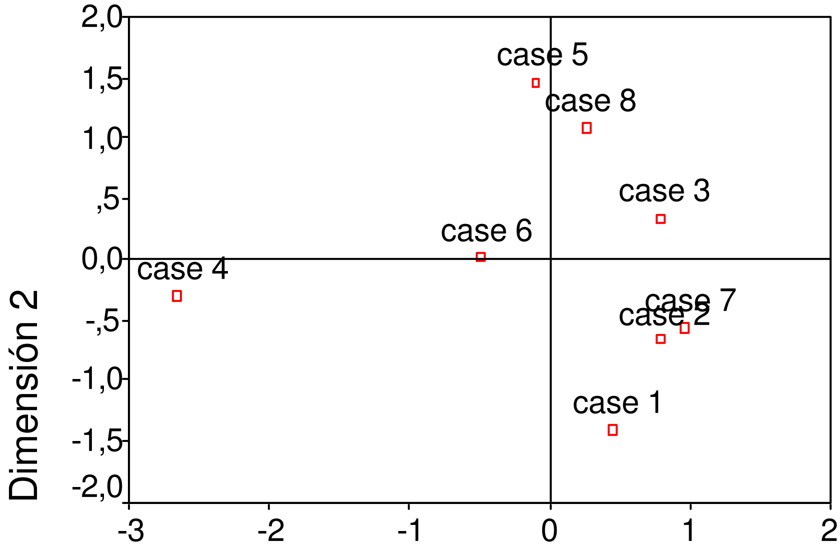
Escalamiento multidimensional

```
Iteration history for the 2 dimensional solution (in squared distances)

                  Young's S-stress formula 1 is used.

                Iteration     S-stress      Improvement

                    1           ,28603
                    2           ,23623         ,04980
                    3           ,23574         ,00048

                         Iterations stopped because
                 S-stress improvement is less than   ,001000


            Stress and squared correlation (RSQ) in distances

RSQ values are the proportion of variance of the scaled data (disparities)
           in the partition (row, matrix, or entire data) which
            is accounted for by their corresponding distances.
             Stress values are Kruskal's stress formula 1.



                For  matrix
    Stress  =   ,21418      RSQ =  ,86020
```

```
Configuration derived in 2 dimensions


                Stimulus Coordinates

                          Dimension

Stimulus   Stimulus      1         2
 Number      Name

    1      VAR1          ,4546   -1,4004
    2      VAR2          ,7861    -,6626
    3      VAR3          ,7815     ,3358
    4      VAR4       -2,6587    -,2913
    5      VAR5        -,1019    1,4650
    6      VAR6        -,4866     ,0226
    7      VAR7          ,9671    -,5596
    8      VAR8          ,2578    1,0905
```

Configuración de estímulos der

Modelo de distancia euclídea



Dimensión 1

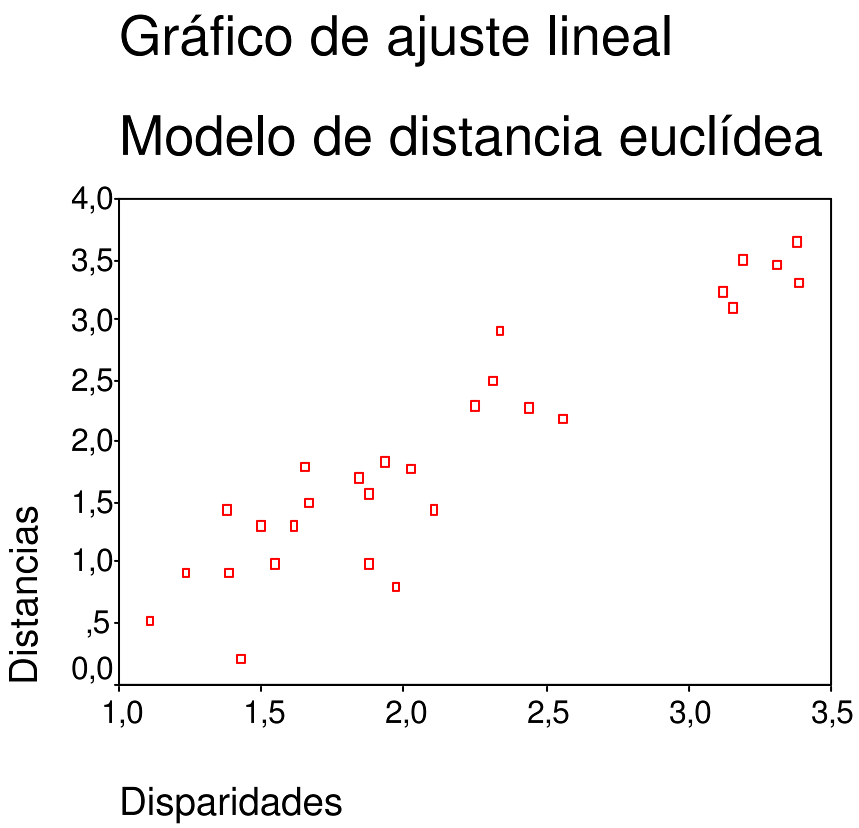


Gráfico de ajuste lineal
Modelo de distancia euclídea
Distancias
4,0
3,5
3,0
2,5
2,0
1,5
1,0
,5
0,0
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
Disparidades