



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

TESIS DOCTORAL

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y
PLANIFICACIÓN CURRICULAR EN UN
PROGRAMA DE FORMACIÓN INICIAL DE
PROFESORES DE MATEMÁTICAS
DE SECUNDARIA

Jose Luis Lupiáñez

Granada, 2009

Editor: Editorial de la Universidad de Granada
Autor: José Luis Lupiáñez Gómez
D.L.: GR. 3909-2009
ISBN: 978-84-692-7856-7



Universidad de Granada
Departamento de Didáctica de la Matemática

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE Y PLANIFICACIÓN
CURRICULAR EN UN PROGRAMA DE FORMACIÓN
INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS
DE SECUNDARIA

Memoria de TESIS DOCTORAL realizada bajo la dirección del Doctor Luis Rico Romero del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta Jose Luis Lupiáñez Gómez para optar al grado de Doctor en Matemáticas con especialidad en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Jose Luis Lupiáñez Gómez

VºBº del Director

Fdo.: Luis Rico Romero

El trabajo que se presenta en esta memoria pretende cumplir con el requisito de la elaboración de una tesis doctoral, para la obtención del grado de doctor dentro del programa de doctorado “Didáctica de la Matemática” impartido en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Este estudio se realizó en el seno del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193). El estudio recibió el apoyo de dos proyectos del plan nacional de I+D+i, financiados por el Ministerio de Ciencia y Tecnología y cofinanciados con fondos FEDER, con referencias SEJ2005-07364/EDUC y EDU2009-10454EDUC, respectivamente.

ÍNDICE

1. UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN SOBRE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA	1
1. Descripción General de la Investigación	2
2. Contexto y Pertinencia de la Investigación	3
2.1 Concreción de la Investigación	3
2.2 Pertinencia de la Investigación	4
3. Antecedentes	6
3.1 Un Problema de Investigación Sobre Formación Inicial de Profesores	6
3.2 Una Línea de Investigación con Tradición en el Grupo FQM193	11
3.3 Un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria	12
3.4 Evaluación del Programa de Formación Inicial	14
4. Delimitación, Preguntas y Objetivos de la Investigación	19
4.1 Preguntas de Investigación	20
4.2 Objetivos Generales y Específicos de la Investigación	21
5. Organización del Documento	23
2. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO: LA PLANIFICACIÓN DEL APRENDIZAJE DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR	25
1. Una Visión Curricular y Funcional de la Enseñanza y el Aprendizaje	26
1.1 Dimensiones y Niveles del Currículo	26
1.2 Un Enfoque Funcional de las Matemáticas Escolares	29
1.3 Enfoque Funcional en el Actual Currículo de Matemáticas	33
2. El Análisis Didáctico	34
3. El Análisis de Contenido	38
3.1 Acerca del Contenido Matemático	38
3.2 Clasificación Cognitiva del Contenido Matemático	39
3.3 Estructura del Análisis de Contenido	41
3.4 Focos de Contenido en el Sistema de los Números Naturales	42

3.5 Sistemas de Representación	45
3.6 Análisis Fenomenológico	48
3.7 Estructura Conceptual	52
3.8 Análisis de Contenido y Conocimiento del Profesor	53
4. El Análisis Cognitivo	55
4.1 Aprendizaje de las Matemáticas Escolares	55
4.2 Finalidad y Estructura del Análisis Cognitivo	57
4.3 Análisis Cognitivo y Conocimiento del Profesor	59
5. El Análisis de Instrucción	59
5.1 Tarea y Actividad	60
5.2 Estructura del Análisis de Instrucción	61
5.3 Procedimiento del Análisis de Instrucción	68
5.4 Análisis de Instrucción y Conocimiento del Profesor	69
6. El Análisis de Actuación	69
7. El Análisis Didáctico en un Programa de Formación de Profesores de Matemáticas de Secundaria	71
3. EXPECTATIVAS, LIMITACIONES Y OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES	73
1. Expectativas de Aprendizaje en Matemáticas	74
1.1 Expectativas de Aprendizaje	75
1.2 Los Objetivos en el Currículo	76
1.3 Objetivos Específicos	78
1.4 Las Competencias como un Nivel de Expectativas de Aprendizaje	81
1.5 La Competencia Matemática	87
1.6 La Competencia Matemática en el Proyecto PISA	90
2. Limitaciones en el Aprendizaje de las Matemáticas	100
2.1 Un Caso Concreto de Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas	101
2.2 El Error en el Aprendizaje de las Matemáticas	103
2.3 El Error Desde un Punto de Vista Epistemológico	103
2.4 Investigación Sobre Errores en Educación Matemática	104
2.5 Análisis de Limitaciones de Aprendizaje en el Análisis Cognitivo	107
3. Oportunidades de Aprendizaje y Tareas en las Matemáticas Escolares	108
3.1 Oportunidades de Aprendizaje: Revisión de Antecedentes	108

3.2 Dimensiones de las Oportunidades de Aprendizaje	111
4. El Procedimiento del Análisis Cognitivo de las Matemáticas Escolares	113
4.1 Expectativas sobre el Aprendizaje de los Números Naturales	113
4.2 Limitaciones de Aprendizaje en el Aprendizaje de los Números Naturales	124
4.3 Oportunidades de Aprendizaje: Tareas sobre los Números Naturales	127
5. Análisis Cognitivo y Conocimiento del Profesor en Formación	131
4. CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE FUNCIONAL PARA LA FORMACIÓN INICIAL	135
1. Competencias del Profesor en Formación	136
1.1 Competencias y Formación Inicial de Profesores en el Contexto del Espacio Europeo de Educación Superior	137
1.2 Tres Aproximaciones a las Competencias Específicas del Profesor	147
2. Competencias del Profesor de Matemáticas. La Importancia de la Planificación	150
2.1 ¿Qué Significa ser un Profesor de Matemáticas Competente?	151
2.2 Conocimiento General Básico y Conocimiento Básico de la Profesión del Profesor de Matemáticas de Secundaria	155
3. Conocimiento Didáctico de los Profesores de Matemáticas en Formación	158
3.1 La Noción de Conocimiento Didáctico	159
3.2 Enfoque Funcional del Conocimiento Didáctico de los Profesores en Formación	160
4. Conocimientos y Capacidades de los Profesores en Formación en la Puesta en Práctica del Análisis Cognitivo	162
4.1 Nivel Teórico	162
4.2 Nivel Técnico (Relativo a un Tema Específico de Matemáticas)	162
4.3 Nivel Práctico	163
5. LA ASIGNATURA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL CURSO 2008-2009	165
1. Diseño de un Programa de Formación	166
2. La Asignatura “Didáctica de la Matemática en Bachillerato”	167
3. La Asignatura “Didáctica de la Matemática” del Plan 2000	171

4. Programa de la Asignatura en el Curso 2008-2009	172
4.1 Finalidad y Objetivos	173
4.2 Contenidos	173
4.3 Metodología	174
4.4 Evaluación	178
5. Desarrollo de la Asignatura	179
5.1 Aspectos Generales	179
5.2 Grupos de Futuros Profesores. Temas de Trabajo	180
5.3 Esquema General de las Sesiones	180
6. Desarrollo del Análisis Cognitivo en la Asignatura	188
6.1 Sesiones Sobre el Análisis de Contenido	188
6.2 Sesiones Sobre Análisis Cognitivo	195
6.3 Sesiones Sobre el Análisis de Instrucción	206
6.4 Sesiones de Presentación de las Unidades Didácticas	207
6.5 Evaluación de la Asignatura	210
6. DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO	213
1. Algunas Concreciones Metodológicas	214
1.1 Contexto e Informantes	214
1.2 Información Obtenida del Desarrollo de la Asignatura	216
2. Producciones de los Grupos de Profesores	217
2.1 Diferentes Niveles de Expectativas en el Currículo	219
2.2 Producciones Sobre los Organizadores del Análisis Cognitivo	220
3. Organización del Análisis de las Producciones	222
7. TRABAJO EMPÍRICO: SESIONES INICIALES	227
1. Desarrollo de las Sesiones Iniciales	228
2. Expectativas de Aprendizaje en Libros de Texto	231
2.1 Objetivos Generales de Área en Libros de Textos (Tarea 1.1)	232
2.2 Objetivos Específicos Sobre Funciones (Tarea 1.2)	233
3. Objetivos Generales del Currículo de Matemáticas	235
4. Expectativas de Aprendizaje en el Tema de los Números Naturales	237
4.1 Pregunta 1: Conceptos y Procedimientos Sobre los Números Naturales	238
4.2 Pregunta 2: Propuesta de Tareas Sobre los Números Naturales	240
4.3 Pregunta 3: Análisis de Tareas Sobre los Números Naturales	242

4.4 Pregunta 4: Objetivos Específicos relativos a los Números Naturales	245
5. Conocimiento genérico Sobre Diferentes Niveles de Expectativas	251
8. APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE OBJETIVOS Y COMPETENCIAS	255
1. Focos de contenido y Prioridades de Aprendizaje	256
1.1 Prioridades del Grupo Ecuaciones	257
1.2 Prioridades del Grupo Fracciones	260
1.3 Prioridades del Grupo Probabilidad	262
1.4 Prioridades del Grupo Razón y Proporción	263
1.5 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Prioridades en el Aprendizaje de los Escolares	266
2. Estudio Global de los Objetivos Específicos	266
2.1 Innovación y Estabilidad en los Objetivos	269
2.2 Estudio de la Variable Completitud (Cm)	280
2.3 Estudio de la Variable Cognición (Cg)	284
3. Estudio Local de los Objetivos Específicos	286
3.1 Estudio de la Variable Capacidad (Ca)	288
3.2 Estudio de la Variable Contenido (Co)	295
3.3 Estudio de la Variable Contexto (Cx)	298
3.4 Estudio de la Variable Especificidad (Ep)	306
3.5 Estudio de la Variable Léxico-semántica (Lx)	308
4. Análisis de las Competencias Seleccionadas	308
4.1 Estudio de las Variables Frecuencia (Fr) y Frecuencia por Prioridad de Aprendizaje (Fp)	309
4.2 Estudio de la Variable Orientación (Or)	320
5. Relación entre Objetivos Específicos y Competencias	322
5.1 Estudio de la Variable Descriptores (De)	324
5.2 Estudio de la Variable Estructura de las Competencias (Es)	333
6. Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores Sobre Objetivos y Competencias	338
6.1 Ejemplificación del Proceso Mediante un Objetivo	339
6.2 Balance de las Producciones de los Grupos	340
6.3 Proceso de Aprendizaje de los Grupos Sobre Objetivos y Competencias	345

9. APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE ERRORES Y DIFICULTADES	351
1. Limitaciones en el Aprendizaje Escolar	352
1.1 Estudio de la Variable Criterio de Organización (Cr)	353
1.2 Criterios de Organización del Grupo Ecuaciones	354
1.3 Criterios de Organización del Grupo Fracciones	356
1.4 Criterios de Organización del Grupo Probabilidad	356
1.5 Criterios de Organización del Grupo Razón y Proporción	358
1.6 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Criterios de Organización	359
2. Innovación y Estabilidad en las Limitaciones del Aprendizaje Escolar	359
2.1 Producciones del Grupo Ecuaciones	360
2.2 Producciones del Grupo Fracciones	364
2.3 Producciones del Grupo Probabilidad	367
2.4 Producciones del Grupo Razón y Proporción	370
2.5 Balance del Trabajo de los Grupos Sobre Innovación y Estabilidad de las Limitaciones	373
3. Estudio Local de las Limitaciones en el Aprendizaje Escolar	375
3.1 Estudio de la Variable Tipo de Limitación (Li)	378
3.2 Estudio de las Variables Tipo de Dificultad (Di) y Tipo de Error (Er)	383
3.3 Estudio de la Variable Especificidad (Ep)	385
3.4 Estudio de la Variable Léxico-Semántica (Lx)	387
3.5 Estudio de la Variable Descriptores (De)	387
4. Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores Sobre Errores y Dificultades	393
4.1 Balance de las Producciones de los Grupos	394
4.2 Proceso de Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores Sobre Errores y Dificultades	396
10. APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES	401
1. Trabajos de los Grupos Sobre Diseño y Selección de Tareas	402
1.1 Estructura de la Unidad Didáctica	403
1.2 Momentos de Análisis sobre Tareas Matemáticas Escolares	404
2. Diseño y Selección de Tareas Vinculadas a Expectativas	405

2.1 Una Aproximación Intuitiva	405
2.2 Tareas Vinculadas a Objetivos Específicos	409
2.3 Vinculación de las Tareas a las Competencias Matemáticas	416
3. Diseño y Selección de Tareas Vinculadas a Limitaciones del Aprendizaje Escolar	420
3.1 Tareas Propuestas por los Grupos	421
3.2 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Tareas Vinculadas a Expectativas y Limitaciones	425
4. Propuesta Final de Tareas	427
4.1 Objetivos Específicos de las Sesiones Programadas por los Grupos	428
4.2 Objetivos Específicos en las Tareas de la Unidad Didáctica	435
4.3 Competencias que Promueven las Tareas de la Unidad Didáctica	444
5. Conocimiento de los Grupos Acerca del Diseño y Selección de Tareas	452
11. CONCLUSIONES	459
1. Análisis Cognitivo y Planificación del Aprendizaje Escolar	461
2. Diseño e Implementación de un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas	466
3. Desarrollo de la Competencia de Planificación en los Grupos de Futuros Profesores	468
3.1 Nivel Teórico del Conocimiento Didáctico	470
3.2 Nivel Técnico (Relativo a un Tema Específico de Matemáticas)	474
3.3 Nivel Práctico del Conocimiento Didáctico	477
3.4 La Competencia de Planificación en los Grupos de Futuros Profesores	480
3.5 Otro Resultado de la Investigación	482
4. Balance Estratégico de un Programa de Formación Inicial de Profesores	483
4.1 Debilidades	483
4.2 Amenazas	484
4.3 Fortalezas	484
4.4 Oportunidades	485
5. Líneas Abiertas de Investigación	486

AGRADECIMIENTOS	487
12. REFERENCIAS	489
ÍNDICE DE ANEXOS	517

ÍNDICE DE TABLAS

1. Tesis doctorales de los integrantes del grupo FQM193 según líneas de investigación	11
2. Dimensiones y niveles de la noción de currículo (Rico, 1997a, p. 409)	27
3. Caracterización de los enfoques de las matemáticas escolares (p. 180)	30
4. Principales conceptos y procedimientos del sistema de los números naturales según focos de contenido	44
5. Indicadores para los niveles de complejidad de las tareas (Lupiáñez, 2005)	63
6. Niveles de objetivos en el currículo (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 69)	77
7. Comparación de ideas clave entre distintas caracterizaciones educativas sobre competencias (a partir de la propuesta de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 139)	83
8. Descriptores de los niveles empíricos en el desarrollo de las competencias matemáticas PISA	98
9. Objetivos específicos relacionados con profundizar en el estudio de las relaciones numéricas	115
10. Objetivos específicos relacionados con dominar el sistema decimal de numeración	115
11. Objetivos específicos relacionados con trabajar con las operaciones y propiedades de los naturales	116
12. Objetivos específicos relacionados con interpretar y resolver situaciones y problemas con los números naturales	116
13. Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al estudio de las relaciones numéricas	118
14. Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al sistema decimal de numeración	119
15. Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a las operaciones y propiedades de los naturales	119
16. Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a interpretar y resolver situaciones y problemas con números naturales	120
17. Dificultades, errores y objetivos relacionados en cada uno de los focos de contenido del tema de los números naturales	124

18. Clasificación de las competencias genéricas Tuning según su carácter básico, de intervención o específico (Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela, 2007, p. 7)	139
19. Competencias más relevantes del Grado de Matemáticas para el perfil profesional de docencia no universitaria (ANECA, 2005c, p. 98)	144
20. Competencias más relevantes del Grado de Magisterio de interés para el profesor de Educación secundaria (ANECA, 2005a, p. 90)	145
21. Contenidos o temas a tratar en las sesiones del curso 2008-2009	181
22. Siglas y significados empleados en la descripción de las sesiones	184
23. Primera aproximación a los focos de contenido y a los objetivos específicos del grupo FRA	199
24. Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al lenguaje algebraico del grupo ECU	201
25. Primera propuesta de limitaciones en el aprendizaje del grupo PRO	204
26. Organización de estudiantes por grupos y temas de trabajo en la asignatura	215
27. Producciones relacionadas con el análisis cognitivo en la asignatura “Didáctica de la Matemática” en el curso 2008-2009	218
28. Producciones sobre los tres organizadores del análisis cognitivo de los grupos de futuros profesores	220
29. Identificación de los momentos de cambio entre las diferentes producciones relacionadas con el análisis cognitivo	221
30. Libros de texto usados en las sesiones iniciales	232
31. Presencia de los objetivos generales del currículo en los libros de texto	233
32. Clasificación de respuestas a la tarea 1.2	235
33. Análisis de los futuros profesores sobre las componentes de los objetivos generales	236
34. Listado y frecuencia de los conceptos y procedimientos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación	239
35. Tareas sobre números naturales propuestas por los profesores en formación	240
36. Actuaciones y situaciones en las tareas sobre números naturales según los futuros profesores	244
37. Listado de objetivos específicos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación	245
38. Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según las capacidades expresadas	248
39. Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según los contenidos de los números naturales considerados	249
40. Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según las situaciones en las que se contextualizan	250

41. Variables para el análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) consideradas para el enunciado de objetivos específicos	257
42. Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de ECU	258
43. Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de FRA	260
44. Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de PRO	262
45. Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de RAZ	264
46. Variables para el análisis del conjunto de objetivos específicos	267
47. Clasificación de los objetivos propuestos por ECU	270
48. Clasificación de los objetivos propuestos por FRA	272
49. Clasificación de los objetivos propuestos por PRO	274
50. Clasificación de los objetivos propuestos por RAZ	277
51. Evolución de los diferentes grupos a través de las etapas detectadas sobre enunciado de objetivos específicos	279
52. Evolución de la variable completitud a lo largo de las producciones	281
53. Preponderancia o equilibrio entre los objetivos relativos a aspectos conceptuales o procedimentales	285
54. Variables para el análisis local de los objetivos específicos	286
55. Número de objetivos no específicos a los temas de trabajo de los grupos	306
56. Variables para el análisis de la asignación de competencias	309
57. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₃ del grupo ECU	310
58. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₅ del grupo ECU	311
59. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₅ del grupo FRA	312
60. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo FRA	313
61. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₃ del grupo PRO	314
62. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo PRO	316
63. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₃ del grupo RAZ	317
64. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P ₅ del grupo RAZ	317
65. Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo RAZ	318
66. Porcentaje de asignación de los grupos a los distintos tipos de competencias	321

67. Variables para el análisis de la asignación de objetivos específicos a las competencias matemáticas PISA	322
68. Descriptores de las competencias matemáticas PISA	323
69. Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo ECU	334
70. Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo FRA	335
71. Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo PRO	335
72. Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo RAZ	336
73. Frecuencias de los valores de la variable estructura de las competencias en las diferentes producciones de los cuatro grupos	337
74. Estados y etapas de aprendizaje de los grupos en relación al enunciado de objetivos y a la precisión y riqueza de esos enunciados	341
75. Porcentaje de Presencia de las diferentes competencias matemáticas en las unidades didácticas	343
76. Porcentaje de asignaciones bien justificadas de las diferentes competencias matemáticas en las unidades didácticas	343
77. Variables para análisis del conjunto de limitaciones del aprendizaje escolar	352
78. Criterios de organización de las limitaciones del aprendizaje enunciadas en las distintas producciones por los grupos	354
79. Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo ECU	360
80. Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo FRA	364
81. Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo PRO	367
82. Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo RAZ	370
83. Frecuencias y etapas relativas al enunciado de limitaciones del aprendizaje de los escolares recorridas por los diferentes grupos	374
84. Variables para el análisis individual de las limitaciones del aprendizaje escolar	376
85. Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo ECU en sus diferentes producciones	378
86. Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo FRA en sus diferentes producciones	380
87. Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo PRO en sus diferentes producciones	381

88. Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo RAZ en sus diferentes producciones	382
89. Clasificación de los diferentes errores enunciados por los grupos de profesores en formación según las categorías de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	384
90. Número de limitaciones no específicas a los temas en las distintas producciones por los grupos	386
91. Estados y etapas de aprendizaje de los grupos en relación al enunciado de limitaciones del aprendizaje	395
92. Objetivos propuestos a los grupos en la sesión 43	406
93. Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo ECU	416
94. Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo FRA	417
95. Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo PRO	418
96. Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo RAZ	419
97. Asignaciones totales y asignaciones justificadas de las tareas a las competencias	420
98. Pasos en las estrategias seguidas por los grupos para relacionar tareas con limitaciones del aprendizaje	426
99. Balance de los vínculos entre tareas y objetivos en las unidades didácticas de los cuatro grupos	442

ÍNDICE DE FIGURAS

1. Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 31)	37
2. Clasificación cognitiva del conocimiento matemático (Rico, 1997b, p. 32)	41
3. Mapa conceptual de la estructura aditiva en el sistema decimal de numeración	45
4. Conversiones entre diferentes sistemas de representación en el caso de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 15)	47
5. Sistemas de representación de los números naturales	47
6. Inicio de la estructura conceptual del sistema de los números naturales	52
7. Estructura conceptual del sistema de los números naturales	53
8. Componentes de los objetivos específicos	80
9. Componentes de la noción de competencia	85
10. El proceso de modelización y la resolución de problemas (Gómez, 2007, p. 88)	96
11. Estructura conceptual del sistema de los números naturales	114
12. Focos de contenido en el de tema Sistema de Números Naturales	114
13. Componentes de la noción de competencia de planificación del profesor de matemáticas	157
14. Ciclo metodológico de los momentos en el tratamiento general de cada uno de los organizadores del currículo	176
15. Base de datos de las sesiones de clase. Ejemplo de la sesión 6	184
16. Distribución de las sesiones según el contenido principal tratado	185
17 (a y b). Distribución de las sesiones según la actividad realizada	187
18. Organización de los sistemas de representación del grupo RAZ	190
19. Mapa de la estructura conceptual del grupo ECU	193
20. Mapa de la estructura conceptual del grupo FRA	193
21. Mapa de la estructura conceptual del grupo PRO	194
22. Mapa de la estructura conceptual del grupo RAZ	194
23. Algunos de los objetivos específicos enunciados por el grupo ECU en su unidad didáctica	208
24. Balance de las competencias seleccionadas por el grupo PRO en su unidad didáctica	208

25. Descripción global de la segunda sesión propuesta por el grupo RAZ en su unidad didáctica	208
26. Ejemplo de tarea propuesta por el grupo PRO en su unidad didáctica	209
27. Tareas de evaluación propuestas por el grupo FRA en su unidad didáctica	209
28. Análisis de las tareas de evaluación propuestas por el grupo FRA en su unidad didáctica	209
29. Producciones y cambios entre producciones relacionadas con el análisis cognitivo	222
30. Tabla 100	243
31. Relación entre enunciados innovadores y estables en las diferentes producciones del grupo ECU	271
32. Relación entre enunciados innovadores y estables en las diferentes producciones del grupo FRA	273
33. Relación entre enunciados innovadores y estables en las diferentes producciones del grupo PRO	275
34. Relación entre enunciados innovadores y estables en las diferentes producciones del grupo RAZ	278
35. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo ECU a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca	288
36. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca	290
37. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca	291
38. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca	293
39. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo ECU a lo largo de sus distintas producciones según la variable Co	296
40. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable Co	296
41. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable Co	297
42. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable Co	297
43. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx	301
44. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx	303
45. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx	304
46. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo ECU	325

47. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo FRA	327
48. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo PRO	328
49. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo RAZ	330
50. Comparativa por grupos del porcentaje de asignaciones justificadas entre objetivos y competencias	331
51. Distribución de errores por focos de contenido del grupo ECU	356
52. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo ECU acerca de limitaciones del aprendizaje	361
53. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo FRA acerca de limitaciones del aprendizaje	366
54. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo PRO acerca de limitaciones del aprendizaje	368
55. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo RAZ acerca de limitaciones del aprendizaje	371
56. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción UD del grupo ECU	388
57. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción UD del grupo FRA	389
58. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción UD del grupo PRO	391
59. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción UD del grupo RAZ	392
60. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo ECU	429
61. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo FRA	431
62. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo PRO	432
63. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo RAZ	433
64. Primera sesión en la que se hace mención expresa a cada uno de los objetivos enunciados por los grupos de futuros profesores	435
65. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo ECU	436
66. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo FRA	438
67. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo PRO	430

68. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo RAZ	441
69. Parrilla de vínculos del grupo ECU entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas	445
70. Competencias destacadas por el grupo ECU en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica	445
71. Parrilla de vínculos del grupo FRA entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas	446
72. Competencias destacadas por el grupo FRA en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica	447
73. Parrilla de vínculos del grupo PRO entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas	448
74. Competencias destacadas por el grupo PRO en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica	449
75. Parrilla de vínculos del grupo RAZ entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas	450
76. Competencias destacadas por el grupo RAZ en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica	450
77. Secuencia de aprendizaje de los futuros profesores	469
78. Componentes de la noción de competencia de planificación del profesor de matemáticas	469

¿Qué soy, entonces? Una cosa que piensa.
Y ¿qué es una cosa que piensa? Es una cosa que duda, que
entiende, que afirma, que niega, que quiere, que no quiere,
que imagina también, y que siente.

(DESCARTES, *Meditaciones Metafísicas*, 1641)

Capítulo 1

UN PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN SOBRE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Esta investigación tiene que ver con la formación de profesores. Nos situamos, por lo tanto, en la línea de algunas de las prioridades de la investigación actual en Educación Matemática (English, 2009). Esta formación, se relaciona con una “intervención orientada por objetivos que persigue promover el aprendizaje de los profesores, y que incluye todas las formas de preparación del profesor y de su desarrollo profesional” (Krainer, 2008, pp. 1-2). Este mismo autor señala que, en el caso de las de matemáticas, la formación puede orientarse “hacia perfeccionar las creencias de los profesores, su conocimiento y su práctica, y aumentar su motivación, su autoconfianza y su identidad como profesores de matemáticas y, lo más importante, contribuir al desarrollo afectivo y cognitivo de sus escolares” (p. 2).

La formación inicial de profesores se ha convertido, además, en foco de investigación en los últimos veinte años (Oliveira y Hannula, 2008). Pero aunque cada vez son más los resultados y avances que se logran acerca de qué finalidades debe perseguir esa formación, cómo puede organizarse, llevarse a la práctica y evaluarse, también está constatado que aún quedan muchos aspectos en los que profundizar y seguir indagando.

Nuestro trabajo busca contribuir a esta línea de interés y con este primer capítulo pretendemos ubicar, delimitar y presentar nuestro estudio. Para ello, en el primer apartado introducimos el problema sobre el que queremos indagar y, a continuación, concretamos el contexto de la investigación y justificamos su pertinencia. En el tercer apartado, revisamos los antecedentes en los que nos apoyamos y que dan cobertura y relevancia a nuestro trabajo.

A partir de esta información, en el cuarto apartado planteamos las preguntas de investigación que queremos abordar y después, partiendo de ellas, enunciarnos los objetivos generales y específicos de nuestra investigación. Finalmente, en el quinto apartado, hacemos una breve síntesis de la estructura y la organización de este documento.

1. DESCRIPCIÓN GENERAL DE LA INVESTIGACIÓN

La investigación que aquí presentamos se centra en la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria. Nos situamos en el contexto de una asignatura que forma parte de un programa de formación inicial y que se imparte en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada.

La principal finalidad de esta asignatura, es que los futuros profesores adquieran y empleen conocimientos y capacidades para diseñar unidades didácticas sobre un tema concreto de las matemáticas escolares.

Parte del proceso de diseño de una unidad didáctica, consiste en establecer qué espera el profesor que aprendan sus escolares acerca del tema de matemáticas que está planificando, qué puede interferir ese proceso de aprendizaje o cómo puede favorecer que sus escolares logren aprender. Es decir, la planificación del aprendizaje escolar, es un proceso complejo y elaborado que forma parte del trabajo del profesor.

En nuestra investigación, abordamos la caracterización de un procedimiento que permita a los futuros profesores, llevar a cabo una descripción detallada de la problemática del aprendizaje de un tema de matemáticas desde un punto de vista curricular. Asimismo, nos interesa el diseño del programa formativo (la asignatura) al que nos hemos referido anteriormente, para que incluya, de manera coherente y fundamentada, ese procedimiento de planificación y análisis del aprendizaje escolar.

Finalmente, también nos preocupa el proceso de aprendizaje que siguen los participantes en ese programa y el conocimiento y las capacidades que finalmente desarrollan durante él. Para abordar este último problema, describimos, analizamos e interpretamos los trabajos realizados por un grupo de futuros profesores, que participaron en la asignatura en el curso académico 2008-2009.

2. CONTEXTO Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

Antes de avanzar en los antecedentes de este trabajo y antes de concretar las preguntas y los objetivos de investigación que aborda, nos interesa contextualizar con mayor precisión nuestro estudio y justificar su pertinencia, en el marco de la investigación actual en Didáctica de la Matemática.

2.1 Concreción de la Investigación

Esta investigación se ha realizado en el seno del grupo FQM193¹ “Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico” del PAIDI de la Junta de Andalucía². Este grupo aborda diferentes líneas de investigación en educación matemática (Lupiáñez y Rico, 2009a y 2009b) y, como veremos más adelante en este capítulo, una de ellas es la formación de profesores. La tradición y experiencia de este grupo en esta línea contextualiza y enmarca nuestra investigación y, recíprocamente, este trabajo da continuidad a esa tradición y abre nuevas perspectivas de actividad investigadora.

El contexto que nos brinda la investigación realizada en el grupo FQM193, se concreta en un modelo teórico de la noción de currículo, en la caracterización de un procedimiento para la programación de unidades didácticas y en el diseño, implementación y evaluación de un programa de formación inicial. Nuestro aporte a esa investigación contribuye, modestamente, en esos tres mismos aspectos.

En su indagación acerca de la noción de currículo, como concepto central en el proceso de planificación del profesor, Rico (1997d) caracteriza un modelo sistémico y organiza una serie de herramientas para, entre otras facetas, planificar las matemáticas escolares. Estas herramientas, denominadas *organizadores del currículo*, se refieren a “aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas” (p. 45)³. Algunos de esos organizadores son los sistemas de representación, la historia de la matemática o la fenomenología. Otros organizadores se centran en el aprendizaje de las matemáticas: expectativas de aprendizaje (por ejemplo, objetivos y

¹ Creado en 1988 y coordinado por Luis Rico. En noviembre de 2009 lo componen 27 investigadores de las universidades de Almería, Córdoba, Granada y Málaga. Es posible consultar su estructura, su composición y sus principales líneas de investigación en la página: http://prensa.ugr.es/prensa/investigacion/grupos/index.php?accion=ver&id_grupo=199/

² A lo largo del documento usaremos sólo el código FQM193 para referirnos a este grupo. PAIDI: Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación. Más información disponible en la página <http://www.juntadeandalucia.es/innovacioncienciayempresa/>

³ En lo que sigue, emplearemos el término “modelo de los organizadores” para referirnos a un programa de formación que se articula en torno a los organizadores del currículo. En el epígrafe tercero de este capítulo describiremos algunas experiencias y trabajos en torno al modelo de los organizadores.

competencias), limitaciones en el aprendizaje (como por ejemplo errores y dificultades) y oportunidades de aprendizaje (como las tareas matemáticas).

Gómez (2007), caracteriza y define un procedimiento denominado *análisis didáctico* que, sobre la base de los organizadores del currículo, permite al profesor diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas. El análisis didáctico, que está conformado a su vez por diferentes procedimientos según las diferentes dimensiones de la noción de currículo (§2.2)⁴. En nuestra investigación abordamos la caracterización y organización de uno de los procedimientos que conforman el análisis didáctico, *el análisis cognitivo*, que constituye el objeto central de nuestro trabajo. Como también veremos en el capítulo 2, estructuramos el análisis cognitivo en torno a tres de los organizadores que hemos citado antes: expectativas, limitaciones y oportunidades en el aprendizaje escolar.

Otros trabajos del grupo FQM193 se han centrado en el diseño, implementación y evaluación del programa de formación inicial, que se lleva a cabo en el contexto de la asignatura *Didáctica de la Matemática*. Esta materia se imparte en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada.

Como veremos más adelante, esos trabajos de los investigadores del grupo se han preocupado en evaluar diferentes aspectos de esta asignatura, como programa de formación. En nuestra investigación abordamos su diseño de tal modo que incorpore, de manera coherente, el análisis cognitivo y su puesta en práctica. Asimismo, evaluamos esa propuesta formativa en términos del aprendizaje desarrollado por un grupo de futuros profesores que cursaron la materia.

2.2 Pertinencia de la Investigación

Esta investigación tiene interés para la Didáctica de la Matemática por diferentes razones, que fundamentalmente atienden a dos consideraciones. En primer lugar a la pertinencia del estudio realizado acerca de las expectativas del profesor sobre el aprendizaje de los escolares, más concretamente sobre competencias matemáticas. En segundo lugar, a la continuidad con una línea de investigación que tiene incidencia directa en la formación inicial del profesorado de matemáticas de la Educación secundaria.

Estos dos argumentos se relacionan estrechamente entre sí ya que, bajo nuestro punto de vista, un cambio en las orientaciones curriculares de un país, necesita de una reorganización adecuada y coherente de la formación del profesorado que llevará a cabo, en última instancia, esas nuevas orientaciones. Simon (2008) señala que un posible obstáculo para las nuevas reformas educativas en muchos países, reside en que los programas de formación de profesores no revisen y actualicen sus fundamentos (p. 17).

⁴ A lo largo del documento emplearemos este sistema para localizar secciones del mismo. Si, por ejemplo, indicamos §3.1.2, nos referimos al segundo epígrafe del primer apartado del tercer capítulo.

Competencias como Expectativas de Aprendizaje

Las diversas normativas legales derivadas de las recientes reformas educativas en España incluyen la noción de competencia como componente del currículo en todos los niveles del sistema educativo. Las competencias expresan un nuevo tipo de expectativas sobre el aprendizaje de los estudiantes, distinto al de los objetivos. La incorporación de las competencias ha implicado cambios importantes en la organización curricular para todo el periodo de la Educación obligatoria (Rico y Lupiáñez, 2008a).

La actividad docente del profesor no es ajena a este hecho, ya que existe una necesidad del profesorado de Educación obligatoria de evaluar, interpretar resultados de pruebas de diagnósticos institucionales, para posteriormente modificar su planificación de aula utilizando un modelo de competencias (Junta de Andalucía, 2006; 2008).

Estas nuevas orientaciones curriculares generan entre los diferentes agentes del sistema educativo, y sobre todo entre el profesorado cuestiones como las siguientes: ¿A qué se refiere el término competencia? ¿Qué es ser competente en matemáticas? ¿Cómo logran los escolares ser competentes en matemáticas? ¿Es posible evaluar la competencia?

Fuera del ámbito español, muchas de las cuestiones anteriores siguen teniendo cabida. Son varios los países que incorporan esta lectura de las expectativas de aprendizaje en forma de competencias en sus proyectos curriculares; gran parte de la responsabilidad de estas reformas, recae en la difusión de los resultados del informe PISA (Recio, 2008):

Los motivos para la irrupción de este polisémico vocablo, “competencia”, en el ámbito educativo son múltiples, pero, entre otros, hay que apuntar al impacto mediático de la difusión de los resultados de las pruebas internacionales conocidas como Informe PISA (...). Dichas pruebas evalúan determinadas componentes del rendimiento de los alumnos, su competencia, según cierto modelo teórico. La publicación, a finales de 2004, del Informe PISA 2003, (...) supuso el punto de partida para una auténtica explosión de pronunciamientos, publicaciones, eventos y, sobre todo, cursos de formación de profesores, relacionados con el papel de las competencias en la enseñanza. (p. 13)

Esta nueva corriente educativa basada en competencias ha traspasado el nivel de la Educación obligatoria, pues también constituye una noción central en los diseños curriculares universitarios del proyecto del *Espacio Europeo de Educación Superior* (EEES) a partir de la Declaración de Bolonia (Beneitone, Esquetini, González, Maletá, Siufi y Wagenaar, 2007).

En esta investigación acotamos el significado de competencia como un nivel de expectativa del aprendizaje escolar, desde un punto de vista curricular y lo relacionamos con otro nivel de expectativas que también tiene un importante peso en el currículo: el de los objetivos. Asimismo, describimos y caracterizamos unas herramientas para relacionar ambos niveles de

expectativas de cara a la planificación de la actividad del docente, y un diseño formativo para la formación inicial de profesores de matemáticas.

El Diseño y la Evaluación de un Programa de Formación Inicial de Profesores

Esta investigación se enmarca y da continuidad a las que se han venido realizando en el grupo FQM193 sobre formación de profesores. Algunas de esas investigaciones, como describiremos más adelante, se han centrado en la evaluación del programa de formación inicial de profesores al que nos hemos referido antes, y se han concretado en las tesis doctorales de Evelio Bedoya (2002), José Ortiz (2002) y Pedro Gómez (2007). En el epígrafe siguiente resumiremos la experiencia del grupo FQM193 sobre formación de profesores, y con más detalle describiremos esas tres investigaciones.

El problema de investigación que abordamos profundiza y avanza en el diseño e implementación del programa de formación, y evalúa sus resultados en términos del aprendizaje que desarrollan los futuros profesores que tomaron parte en él durante el curso 2008-2009.

Ese año, cursaron la asignatura 19 futuros profesores, que trabajaron en grupos de 4 o 5 integrantes. Cada grupo seleccionó un tema de matemáticas y durante el desarrollo de la asignatura fue recabando y analizando información que les llevó finalmente a elaborar una unidad didáctica sobre ese tema.

3. ANTECEDENTES

Como ya hemos señalado, nuestra investigación se enmarca en la formación de profesores, que constituye una línea importante de investigación en Didáctica de la Matemática, y más concretamente, en formación inicial. Por otra parte, damos continuidad a la actividad investigadora que en las últimas décadas se viene realizando en el grupo FQM193. Algunas de esas investigaciones se centran en la formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria. Esos trabajos se refieren al diseño e implementación de un programa de formación inicial, a distintas investigaciones que han evaluado algunos aspectos concretos de ese programa, a proyectos de investigación autonómicos y nacionales que han indagado sus fundamentos e implicaciones junto a otros modelos formativos similares al de Granada o a grandes proyectos internacionales de evaluación de programas formativos de profesores. En esta sección nos referiremos a estos antecedentes que contextualizan nuestra investigación.

3.1 Un Problema de Investigación Sobre Formación Inicial de Profesores

Diversos trabajos han puesto de manifiesto cómo la investigación sobre el profesor de matemáticas ha sufrido un desarrollo importante en las últimas décadas dentro de las investigaciones en Didáctica de la Matemática (Gómez, 2007; Sfard, Hashimoto, Knijnik, Robert y Skovsmose, 2004). Algunas de esas investigaciones centradas en el profesor se han preocupado del conocimiento

que un profesor adquiere y desarrolla en los programas formativos en los que se involucra. Por esta razón, en ocasiones los propios programas de formación son también objeto de investigación.

Gómez (2007), señala cuatro cuestiones que delimitan parcelas de investigación sobre la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria⁵:

1. *¿Qué caracteriza la actuación eficaz y eficiente del profesor en el aula de matemáticas?*
2. *¿Cuáles deben ser los conocimientos, capacidades y actitudes de un profesor que actúa eficaz y eficientemente?*
3. *¿Cómo se deben diseñar e implantar los programas de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria de tal forma que se apoye y fomente el desarrollo de estos conocimientos, capacidades y actitudes?*
4. *¿Qué caracteriza los procesos de aprendizaje de los futuros profesores de matemáticas de secundaria que participan en este tipo de programas de formación inicial?* (pp. 3-4)

En la revisión que le lleva a acotar esas cuestiones, Gómez parte de la noción de conocimiento pedagógico de contenido que Shulman (1986) introdujo para destacar que el éxito de un profesor, no se sustenta únicamente en un conocimiento profundo de la disciplina objeto de enseñanza y en algunas nociones pedagógicas. A partir de esa noción, Gómez destaca los trabajos de Cooney (1994), Simon (2000), Jaworski (2002), Ball (2002), y Kilpatrick (2003), que ponen de manifiesto cuestiones abiertas en la investigación sobre el profesor de matemáticas. Estas cuestiones tienen que ver con

la enseñanza que el profesor realiza en el aula, con el conocimiento y habilidades que pone en juego al hacerlo, con los procesos de aprendizaje en virtud de los cuales él desarrolla esos conocimientos y esas habilidades, y con los contextos de formación en los que se crean las oportunidades de aprendizaje para ello. (Gómez, 2007, p. 3)

La importancia del conocimiento matemático del profesor y de su conocimiento de las matemáticas escolares, también sigue siendo objeto de estudio (Gómez y González, 2008; Kulm, 2008; Hill, Rowan y Ball, 2005).

En la actualidad, la investigación sigue avanzando de cara a profundizar y dar respuesta a esas y otras cuestiones sobre el profesor de matemáticas y su formación. De hecho, en la revisión de la literatura reciente que hemos realizado, constatamos el interés por ese tipo de interrogantes. En estos momentos, podemos establecer cuatro áreas generales de interés.

La primera de ellas tiene que ver con el conocimiento y las creencias del profesor y cómo éstos pueden llevar a configurar un programa de formación de

⁵ Como veremos en este mismo capítulo, son varios los elementos comunes entre la investigación de Gómez (2007) y la que aquí presentamos. Uno de ellos es precisamente ese conjunto de cuestiones, ya que en nuestro trabajo tratamos de explorar, parcialmente, algunas de ellas (§1.4.1).

profesores. La segunda se concreta en cómo pueden llevarse a la práctica esos programas formativos. La tercera aborda el estudio de todos los agentes y participantes que toman parte en la formación de profesores, y la última se concreta en el desarrollo profesional y la actividad del formador de profesores. A continuación, exploramos con algo más de detalle estas áreas prioritarias de la investigación sobre formación de profesores de matemáticas.

Conocimiento y Creencias⁶ del Profesor

Estas investigaciones se centran en el rol del profesor de matemáticas, en las diferentes dimensiones que posee el conocimiento que debe dominar y en las creencias que puede considerar en relación a la enseñanza, además de las implicaciones de estos aspectos en la formación del profesor.

En la mayor parte de esos trabajos se retoman las categorías de Shulman y diversos autores las amplían o complementan con otras dimensiones como el *análisis cultural del contenido* (Boero y Guala, 2008) o con componentes antropológicas de los sujetos y las instituciones y con distintos tipos de discurso (Adler y Huillet, 2008).

Mason (2008), señala que la “esencia de la preparación necesaria y deseable para una enseñanza efectiva de las matemáticas” (p. 301), requiere de una transformación de la noción de conocimiento pedagógico del contenido, ya que usar esa noción como una lista de cualidades y dimensiones “sólo servirá para obscurecer lo que es esencial y central. Eso podría incluso contribuir a que los retos de la formación de profesores sean más difíciles de lo que ya lo son” (p. 305).

En relación con el conocimiento matemático necesario para la enseñanza, Stacey (2008) señala que dicho conocimiento involucra cuatro componentes que deben ser parte de las finalidades de los programas de formación de profesores: (a) conocer matemáticas de un modo que tenga cualidades especiales para la enseñanza; (b) tener experiencias matemáticas en la resolución de problemas y modelizar el mundo real; (c) tener conocimiento acerca de las matemáticas, incluyendo su historia y los desarrollos actuales y (d) saber cómo enseñar matemáticas (p. 87).

Hill, Rowan y Ball (2005) destacan que “la eficacia en la enseñanza radica no sólo en el conocimiento que un profesor ha acumulado, sino también en cómo usa ese conocimiento en el aula” (pp. 375-376). Esta idea es defendida también por Ball, Bass y Hill (2004) quienes sostienen que “la enseñanza implica

⁶ En nuestra investigación no entramos en el campo de las creencias del profesor, y por eso en este apartado no describimos las relativas a ese aspecto. Sin embargo, como señala Lerman (2001), las creencias del profesor han constituido la línea de investigación predominante durante muchos años en los trabajos sobre profesores y sobre formación de profesores (p. 35). Dos trabajos de investigación centrados en creencias y contextualizados en un programa de formación de profesores cercano al que nosotros estudiamos en esta tesis son los que realizaron Pablo Flores en la Universidad de Granada (Flores, 1998), y Francisco Gil en la Universidad de Almería (Gil, 1999). Un estudio que también trata las creencias de futuros profesores de Educación primaria es el de Espinosa (2005).

establecer conexiones entre dominios matemáticos, ayudando a los escolares a construir relaciones en su conocimiento de manera coherente.” (p. 11)

Basándose en una revisión detallada de la literatura de investigación sobre formación de profesores, Leikin (2008) constata cuatro aspectos problemáticos interrelacionados en este ámbito. Uno de ellos tiene que ver con la necesidad de entremezclar⁷ las diferentes componentes del conocimiento del profesor en su formación (p. 66).

Diseño e Implementación de un Programa de Formación de Profesores

Sowder (2007), se preocupa de dar significado a qué significa preparar profesores de matemáticas tanto en formación inicial como permanente. Para organizar su reflexión, caracteriza esa formación en términos del desarrollo profesional del profesor y plantea diez cuestiones, que explora con el soporte de elementos teóricos y de evidencias de la investigación reciente. Algunas de esas preguntas son:

1. *¿Porqué el desarrollo profesional ha llegado a convertirse en una prioridad para la consecución de las finalidades actuales de la educación matemática?*
2. *¿Cuáles son los objetivos del desarrollo profesional?*
3. *¿Qué principios pueden usarse para guiar el diseño del desarrollo profesional?*
4. *¿Cómo aprenden los profesores lo que necesitan conocer para enseñar matemáticas?* (p. 158)

Otras investigaciones se centran en las diferentes herramientas y recursos que se pueden emplear en un programa de formación de profesores, para contribuir al desarrollo, de algunos de los conocimientos y capacidades destacados antes. La finalidad formativa es, por lo general, que esos formadores sean competentes para lograr una enseñanza eficaz de las matemáticas escolares.

Así, por ejemplo, algunas de esas investigaciones constatan que el uso de ejemplos de las respuestas de los escolares a determinadas tareas matemáticas escolares o de situaciones educativas, puede jugar un papel importante en los programas de formación, ya que introducen a los profesores en la variedad de posibles interpretaciones que los escolares pueden desarrollar acerca de las matemáticas escolares (Zazkis, 2008). Otros autores reflexionan sobre la relevancia de introducir, en esos programas formativos, elementos teóricos sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Tsamir, 2008).

La selección de las actividades que pueden realizar los profesores en el marco de esos programas, también es objeto de estudio. Perks y Prestage (2008) y Zaslavsky (2008), destacan la importancia de la selección de esas actividades para responder a las demandas y necesidades formativas de los profesores. Así

⁷ “To intermingle” en el texto original.

por ejemplo, Gómez y González (2009) ejemplifican las implicaciones que tuvieron, para el aprendizaje de algunos profesores en formación inicial, las actividades que llevaron a cabo durante un curso formativo.

Agentes Involucrados en la Formación Profesores

Son investigaciones centradas en los diferentes participantes y agentes que forman parte de la formación de profesores. Además de los propios profesores en formación sobre, los que ya hemos hablado, también son objeto de estudio las agrupaciones de éstos, los profesores en ejercicio, los formadores de profesores, las comunidades o redes formativas, los centros en los que se lleva a cabo esas formaciones o los sistemas educativos y formativos en los que se enmarcan (Krainer y Wood, 2008).

Desde nuestra experiencia, el trabajo en grupo es primordial. Como señalan Bjuland (1999), McDougal y Nason (2005) y como ha constatado el propio Gómez (2007), las reflexiones de los futuros profesores cuando trabajan en pequeños grupos, juegan un papel central en su aprendizaje. Muchas de las nociones y herramientas que se introducen en los programas de formación toman sentido para ellos cuando, en discusiones internas, se enfrentan a analizarlas, ejemplificarlas y usarlas. Es, en cierta medida, un tipo de *aprendizaje colaborativo* en donde los integrantes del grupo, que poseen un conocimiento y unas habilidades en principio heterogéneas, se ayudan entre sí y facilitan entre ellos el aprendizaje y el desarrollo de determinadas competencias (Fernández, 2007; Topping, 2005). Pero más allá del trabajo y del aprendizaje en grupo, la investigación reciente enfatiza el papel de las comunidades de prácticas.

Algunas de las investigaciones sobre la noción de comunidad de prácticas para el caso del aprendizaje de los profesores, destacan cómo emerge el aprendizaje en esas comunidades tanto si se dan a nivel presencial (Lin y da Ponte, 2008), como a nivel virtual (Llinares y Olivero, 2008; Borba y Gadanidis, 2008). Lerman y Zehetmeier (2008) analizan y contrastan ambos niveles, mientras que en Gómez (2007) y Gómez y Rico (2007), se describe con detalle el funcionamiento y la organización de una comunidad de práctica en el caso de grupos de futuros profesores de matemáticas de Educación secundaria, a partir del constructo de comunidad de práctica de Wenger (2008)⁸. Otros investigadores como Krainer (2003) y Leikin (2008), sostienen que, aunque es innegable el interés formativo que poseen las comunidades de práctica en el aprendizaje de futuros profesores, es difícil que un grupo de profesores en formación se constituya en una de estas comunidades dentro de un programa formativo.

⁸ En nuestra investigación no exploraremos el aprendizaje de los profesores desde una posición social o sociocultural, en el sentido que lo hace Gómez (2007). Simplemente, destacamos y constatamos las bondades del trabajo en grupo en el contexto de la formación inicial de profesores.

Sobre los Formadores de Profesores

Son investigaciones centradas en la profesión, en la fundamentación y en la práctica del formador de profesores. También tienen que ver con el desarrollo profesional del formador y sus implicaciones prácticas. Una revisión detallada de varios trabajos en estas áreas puede consultarse en Jaworski (2008).

3.2 Una Línea de Investigación en el Grupo FQM193

Desde su creación en 1988 con 18 investigadores andaluces, el grupo FQM193 ha ido creciendo tanto en integrantes como en prioridades de trabajo. En la actualidad lo conforman 27 investigadores de distintas universidades andaluzas y las principales líneas de investigación son las siguientes:

- Aprendizaje, representación y construcción del conocimiento matemático.
- Calidad y evaluación de planes de formación.
- Competencias escolares en matemáticas.
- Diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas.
- Formación de profesores de matemáticas.
- Historia y educación matemática.
- Investigación e indicadores de calidad en didáctica de la matemática.
- Pensamiento numérico.
- Resolución de problemas.
- Teoría de la educación matemática - didáctica de la matemática.

Cada una de estas líneas ha dado a lugar a diferentes tesis doctorales, a la creación de grupos específicos que han profundizado en algunas de esas líneas o a proyectos formativos y divulgativos sobre Didáctica de la Matemática. En la Tabla 1, organizamos las diferentes tesis doctorales generadas en el seno del grupo FQM193 desde 1994 hasta la actualidad, según algunas de esas líneas de investigación. Obviamente la clasificación no es exhaustiva, ya que cualquier investigación puede abarcar aspectos de diferentes líneas; lo que hemos hecho es destacar los principales énfasis de cada uno de los trabajos.

Tabla 1

Tesis doctorales de los integrantes del grupo FQM193 según líneas de investigación

Aprendizaje, representación y construcción del conocimiento matemático

Cañadas (2007); Castro (1994); Castro (1994); Fernández (1995); Molina (2007); Ortiz (1997); Romero (1995); Ruiz (2000); Scaglia (2000); Segovia (1995)

Calidad y evaluación de planes de formación

Bedoya (2002); Gairín (1998); Gómez (2007); Ortiz (2002); Ruiz (2000)

Tabla 1

Tesis doctorales de los integrantes del grupo FQM193 según líneas de investigación

Diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas

Castro (1994); Gómez (2007); Ortiz (1997); Romero (1995); Scaglia (2000); Segovia (1995)

Formación de profesores de matemáticas

Bedoya (2002); Espinosa (2005); Fernández (1995); Flores (1995); Gairín (1998); Gil (1999); Gómez (2007); Ortiz (2002); Ruiz (2000)

Historia y educación matemática

Maz (2005)

Investigación e indicadores de calidad en didáctica de la matemática

Torralbo (2001)

Pensamiento numérico

Cañadas (2007); Castro (1994); Castro (1994); Benavides (2008); Gairín (1998); González (1995); Molina (2007); Ortiz (1997); Romero (1995); Ruiz (2000); Scaglia (2000); Segovia (1995)

Resolución de problemas

Benavides (2008); Cañadas (2007); Castro (1994); Espinosa (2005); Fernández (1995); González (1995); Ortiz (1997)

El trabajo con el modelo de los organizadores ha dado lugar varios tipos de producciones que han tenido y siguen teniendo un papel importante en la formación inicial y permanente del profesorado: la elaboración de materiales para el profesor. Estas producciones aparecen recogidas en dos colecciones de libros editadas por Editorial Síntesis: “Matemáticas: Cultura y Aprendizaje”, dirigida por Luis Rico, José María Fortuny y Luis Puig, y “Educación Matemática en Secundaria”, dirigida por Miguel de Guzmán y Luis Rico. Estas dos colecciones, junto al libro de Castro (2001a), ofrecen un amplio catálogo de temas de las matemáticas escolares analizados y ejemplificados desde los organizadores del currículo.

3.3 Un Programa de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria

Desde 1987, el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, viene impartiendo, ininterrumpidamente, una asignatura en el seno de la Licenciatura de Matemáticas. La asignatura concreta un programa de formación inicial sobre los conocimientos y capacidades propios de un profesor de matemáticas de Educación secundaria, que se sustenta también en el modelo

de los organizadores del currículo de matemáticas. Se trata de una asignatura⁹, diseñada e implementada por Luis Rico, cuyos fundamentos aparecen en su proyecto docente (Rico, 1992)¹⁰.

Esta asignatura se imparte en la actualidad como materia optativa de segundo ciclo (5º curso), con seis créditos. Esta configuración existe desde que en la Universidad de Granada se instauró el Plan 2000 para la Licenciatura de Matemáticas. Esta asignatura procede de una materia similar del anterior plan de estudios, aprobado en 1975, que se denominaba “Didáctica de la Matemática en el Bachillerato”, y era materia obligatoria de nueve créditos en la especialidad de “Metodología” del segundo ciclo de la Licenciatura de Matemáticas. La descripción detallada de la asignatura y de sus antecedentes la haremos en el capítulo 5.

Las renovaciones organizativas y estructurales de la propia Licenciatura de Matemáticas, las diferentes aportaciones de los distintos formadores que han participado en la asignatura y las continuas actualizaciones y evaluaciones en la propia selección de contenidos y tareas formativas, han hecho que la asignatura haya evolucionado de manera constante a lo largo de estos últimos años.

El análisis de las producciones de los grupos de futuros profesores a lo largo de los años ha tenido implicaciones importantes en el propio diseño de la asignatura. Esta evolución se puede observar en la programación del curso 2008-2009, (§5.5), en comparación con la del curso 2000-2001, que se describe con detalle en Gómez (2007, pp. 199-229).

Desde el curso académico 2004-2005, venimos trabajando sistemáticamente en la organización y estructuración del análisis cognitivo. En ese momento tomó forma la investigación que aquí presentamos. Cada año fuimos modificando e innovando las presentaciones y las tareas que planteábamos a los futuros profesores en relación con esta componente del análisis didáctico y evaluando su incidencia para las correspondientes revisiones en la programación del curso siguiente. Cada año, han sido objeto de detallado análisis y de contraste con las investigaciones recientes, las producciones de los grupos de futuros profesores a lo largo de la asignatura, sus planificaciones de unidades didácticas finales, así como las dudas y dificultades que manifestaron en clase y en tutorías con los formadores.

En términos globales, hemos analizado el trabajo de más de veinte grupos de profesores en formación, en los que estimamos han participado alrededor de cien alumnos, estudiantes de segundo ciclo de Licenciatura de Matemáticas. El material y la experiencia acumulados en estos últimos años se han presentado como informes de investigación y sometido a la crítica y revisión de la

⁹ A lo largo de todos estos años, han existido otras asignaturas en la Licenciatura de Matemáticas que también han contribuido a la formación de futuros profesores desde diferentes puntos de vista.

¹⁰ Como señala Gómez (2007), la Universidad de Almería (Moreno, 1998, pp. 51-62; 2007) y la Universidad de Cantabria (González, 2002, pp. 97-102) también vienen implementando un programa de formación con la misma finalidad y estructura muy similar al de Granada.

comunidad de investigadores en Didáctica de la Matemática en diferentes reuniones, congresos y seminarios. Algunos de estos estudios se han difundido en varias publicaciones (Gómez y Lupiáñez, 2007; Gómez, Lupiáñez, Rico y Marín, 2007; Lupiáñez, 2005; Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín, 2005; Lupiáñez y Rico, 2006, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008a).

La configuración actual de la asignatura y del análisis cognitivo, en particular, han alcanzado un nivel de desarrollo que ha permitido, en el curso 2008-2009, analizar profunda y exhaustivamente el dominio que los grupos de futuros profesores de matemáticas han alcanzado. Esto lo logramos al caracterizar e interpretar los cambios que muestran los profesores en formación en su conocimiento y sus capacidades relativas al aprendizaje escolar durante el proceso que estudiamos. Esto lo hemos constatado también en cursos de formación permanente de profesores.

Nuestra investigación se sustenta también en las evaluaciones que ya se han hecho de la asignatura y algunas de éstas han sido objeto de estudio por medio de otras tesis doctorales y algunos proyectos de investigación. A ellos nos referimos en el epígrafe siguiente.

3.4 Evaluación del Programa de Formación Inicial

Desde que en la última década del pasado siglo Luis Rico iniciara la línea de investigación centrada en la evaluación del modelo de los organizadores del currículo en un plan de formación de profesores de secundaria, se han llevado a cabo tres tesis doctorales en el seno del Grupo FQM193, dirigidas por el propio Luis Rico, que han abordado esa evaluación centrándose en diferentes aspectos del modelo, en contextos particulares y con objetivos específicos distintos. Estos trabajos son los de Bedoya (2002), Ortiz (2002) y Gómez (2007).

Por otro lado, varios investigadores, de diferentes universidades españolas, hemos llevado a cabo proyectos que se han centrado, al menos parcialmente, en la evaluación del programa de formación.

A esas tesis doctorales y a esos proyectos de investigación, dedicamos el resto de este epígrafe.

Cursos y Talleres que Evalúan el Modelo de los Organizadores del Currículo

Los profesores Evelio Bedoya, de la Universidad de Valle (Colombia) y José Ortiz, de la Universidad de Carabobo (Venezuela), llevaron a cabo el trabajo de campo para la realización de sus respectivas tesis doctorales, mediante una aplicación parcial del modelo de los organizadores del currículo, en formato de curso-taller, con grupos de profesores de matemáticas en cursos de formación inicial.

En el primer caso (Bedoya, 2002), el curso se centró en los organizadores: sistemas de representación, estructura conceptual y nuevas tecnologías; el tema objeto de estudio sobre el que se centraron las actividades de los profesores en formación fue la función de segundo grado. En el segundo caso (Ortiz, 2002), el curso-taller se centró en los organizadores: modelización, estructura

conceptual y nuevas tecnologías; el tema objeto de estudio para programación de actividades didácticas por parte de los profesores en formación fue álgebra lineal y sistemas de ecuaciones. Las dos investigaciones utilizaron como recurso central, para estructurar los talleres y organizar las tareas de formación, la calculadora gráfica TI-92 de Texas Instruments. También ambas investigaciones evaluaron los dominios indicados del modelo de los organizadores del currículo y, de modo especial, los aprendizajes técnicos y tecnológicos sobre tales organizadores. Ninguno de ellos se centró, específicamente, en los aspectos teóricos del programa de formación inicial a que nos venimos refiriendo. Ambos estudios tienen en común evaluar el conocimiento didáctico¹¹ que desarrolla el grupo de futuros profesores que asiste al curso y a los talleres específicos, unas experiencias formativas diseñadas al efecto, fuera de la asignatura.

La evaluación final tenía por objeto valorar el desarrollo de tareas de motivación, desempeño y evaluación para el diseño de una unidad didáctica. Los cursos y talleres enfatizaban el papel de los diferentes organizadores en el diseño de tales tareas. Evelio Bedoya se centró en tareas relativas al contenido de la función cuadrática, con énfasis en los diferentes sistemas de representación que pueden usarse para su estudio y en el papel que pueden jugar las calculadoras gráficas. Por otro lado, José Ortiz se ocupó de tareas relativas al álgebra lineal y a los sistemas de ecuaciones, destacando los diferentes procedimientos relacionados con la modelización matemática, y también usó calculadoras gráficas (Ortiz, Rico y Castro, 2008).

En ambos estudios participaron estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada y, precisamente, parte de su análisis se centró en las actitudes de estos estudiantes hacia las calculadoras gráficas, como recurso a disposición del profesor de matemáticas.

Estas dos investigaciones constituyen el comienzo de las evaluaciones del programa de formación inicial de profesores de matemáticas que se imparte en la Universidad de Granada. Dieron pie a otras investigaciones, como la que resumimos a continuación, y también a la nuestra.

La Investigación sobre el Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores

Los trabajos de los profesores Evelio Bedoya y José Ortiz pusieron de manifiesto resultados muy significativos en relación al aprendizaje desarrollado por futuros profesores, en unas actividades formativas concretas. Además, en su investigación, José Ortiz, introdujo una reflexión sobre el significado de evaluar el modelo de los organizadores del currículo. En palabras de Gómez (2007),

(yo) debía trabajar dentro del mismo esquema de estos dos proyectos. Sin embargo, antes de aproximarme a la definición de mi problema de investigación (...) me pareció importante reflexionar sobre dos cuestiones:

¹¹ En el capítulo 4 caracterizaremos el conocimiento didáctico y su relación con las competencias del profesor de matemáticas.

- *¿Qué es el modelo de los organizadores del currículo y qué papel juega dentro de la asignatura?*
- *¿Cómo evaluar este modelo?* (p. 9)

Estas cuestiones marcan la orientación de la investigación de Pedro Gómez que establecen cuatro diferencias con los dos trabajos anteriores. En primer lugar, se caracterizó el modelo de los organizadores del currículo en términos de las prioridades de un programa de formación inicial de profesores, y eso permitió “por un lado, hacer una descripción estructurada del diseño curricular de la asignatura y, por otro, avanzar en el fundamento de ese diseño” (p. 10). Con motivo de ese avance, Pedro Gómez desarrolló la noción de *análisis didáctico*¹² como procedimiento que, de manera ideal, debería realizar un profesor de matemáticas para “diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2002, p. 257), en consonancia y coherencia con la noción de currículo que estructura el modelo de los organizadores. Asimismo, elaboró un significado operativo de la noción de *conocimiento didáctico* como el “conocimiento que el profesor pone en juego y construye cuando realiza el análisis didáctico” (p. 285).

En segundo lugar, Pedro Gómez centró su estudio en el aprendizaje que desarrollan los grupos de futuros profesores que cursan la asignatura, con objeto de explorar la eficacia del programa de formación. Por esta razón, la investigación se llevó a cabo en el contexto de la propia asignatura mientras él era uno de los formadores que la impartían, en el curso académico 2000-2001. Ya que en la mayor parte del tiempo los futuros profesores trabajan en grupos de 4 o 5 personas, se optó por estudiar el aprendizaje de los grupos de profesores. Como esta opción metodológica de la asignatura sigue vigente, en nuestra investigación también nos centramos en la actividad de los grupos de profesores. Algunas de las potencialidades y dificultades del trabajo con grupos de profesores en formación las describe Leikin (2008).

En tercer lugar, el foco de la investigación se puso en el proceso de aprendizaje más que en sus resultados:

yo me interesé en el carácter evolutivo de esos procesos de aprendizaje. (...) pensaba que, de esta manera, sería posible explorar, no solamente las dificultades que los grupos de futuros profesores tenían que afrontar en el tiempo, sino también describir y caracterizar los procesos en virtud de los cuales estas dificultades se consolidaban o se superaban y en qué medida ellos lograban los objetivos de la asignatura (p. 11)

Finalmente, concretó su trabajo en el análisis de contenido, con el objeto de explorar con suficiente detalle el conocimiento y las capacidades que desarrollan los grupos de futuros profesores sobre un aspecto determinado del temario de la asignatura.

¹² En el capítulo 2 abordaremos una descripción más detallada del análisis didáctico y de los cuatro análisis que a su vez implica: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación (Gómez, 2002, pp. 262-271).

Partiendo de estas características, y después de concretar las cuatro preguntas que enumeramos antes sobre formación de profesores de matemáticas (§1.3.1), Gómez (2007) enunció los objetivos generales de su investigación:

1. *avanzar en la conceptualización de las actividades del profesor de matemáticas de secundaria, de su conocimiento didáctico y del diseño de planes de formación inicial, y*
2. *describir y caracterizar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores que participaron en la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato del curso 2000-2001 con respecto a los organizadores del currículo correspondientes al análisis de contenido (p. 13)*

Aunque la investigación realizada por Pedro Gómez incluye otros aspectos que no hemos recogido aquí, lo presentado hasta ahora sirve de referencia para contextualizar nuestro trabajo.

Esta actividad continuada entre varios investigadores se ve refrendada en la consecución y puesta en marcha de diferentes proyectos de investigación, relacionados también con la formación de profesores, que describimos a continuación.

Proyectos para la Evaluación de Programas de Formación

Estos proyectos de investigación corresponden a dos grupos diferentes, tres que provienen de convocatorias ministeriales de I+D+i¹³ y un cuarto proyecto internacional, para evaluar programas formativos de profesores de matemáticas.

En el proyecto *Indicadores de Calidad para la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*¹⁴ (BSO2002-02799) nos propusimos desarrollar procedimientos metodológicos para evaluar la calidad de planes de formación inicial de profesores de matemáticas, teniendo en cuenta las condiciones que, desde la perspectiva de las competencias profesionales del futuro profesor, impone la convergencia hacia el Espacio Europeo de Educación Superior (Gómez, González, Gil et al., 2007; Gómez et al., 2006; González et al., 2006; González et al., 2004; Rico, Gil, et al., 2004; Rico et al., 2003). El trabajo desarrollado en este proyecto, permitió producir indicadores de calidad de programas de formación de profesores y puso de manifiesto lo complejo de la evaluación de programas formativos.

¹³ Investigación, Desarrollo e Innovación.

¹⁴ Dirigido por Luis Rico y conformado por Francisco Gil, María Francisca Moreno e Isabel Romero (Universidad de Almería); María José González (Universidad de Cantabria); Pedro Gómez y Jose Luis Lupiáñez (Universidad de Granada). Proyecto concedido a través de la Convocatoria de ayudas de Proyectos de Investigación de 2002 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

Por otro lado, en el proyecto *Competencias Didácticas y Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria*¹⁵ (SEJ2005-07364/EDUC) estuvimos indagando cómo vincular, en un programa de formación inicial, las competencias profesionales del profesor en formación y las competencias matemáticas de los escolares, mediante el análisis didáctico y el modelo de los organizadores del currículo (Gómez y González, 2008; Gómez et al., 2008; Gómez, González y Lupiáñez, 2007; Gómez y Lupiáñez, 2007; Ortiz, Rico y Castro, 2008; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

En la actualidad, participamos en el proyecto *Competencias Profesionales del Maestro de Primaria en el Área de Matemáticas en Contextos de Formación Inicial*¹⁶ (EDU2009-10454EDUC). En este caso, nos preocupamos de establecer, definir y caracterizar las competencias profesionales que deben desarrollar los futuros profesores de matemáticas de Educación primaria, en el contexto de su formación inicial.

Finalmente, un proyecto importante en el que también participamos, es el TEDS-M (Teacher Education Study in Mathematics) de la IEA (Asociación Internacional para la Evaluación del Rendimiento Educativo), un estudio comparativo internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en Educación Obligatoria (IEA–TEDS, 2006; Tatto, Schwillie, Schmidt, Ingvarson y Beavis, 2006), cuyos resultados serán publicados en 2010.

El grupo FQM193 lleva a cabo la ejecución del proyecto en España¹⁷ y con esta participación, perseguimos analizar y caracterizar: cómo es la formación inicial del profesorado de matemáticas en España, compararla con la de otros países y establecer posibles líneas de acción que contribuyan a mejorar dicha formación inicial. El estudio abre oportunidades para llevar a cabo investigaciones sobre el sistema de formación del profesorado español y, al mismo tiempo, aprender de los enfoques con que ésta se aborda en otros países. (TEDS-M España, 2008).

Nuestro grupo también participará en la continuación del estudio TEDS-M a través del proyecto *The First Five Years of Mathematics Teaching: A Follow-up of the Teacher Education and Development Study in Mathematics* (TEDS-

¹⁵ Dirigido por Luis Rico y conformado por Francisco Gil, María Francisca Moreno e Isabel Romero (Universidad de Almería); María José González (Universidad de Cantabria); Pedro Gómez, Jose Luis Lupiáñez y Antonio Marín (Universidad de Granada). Proyecto concedido a través de la Convocatoria de ayudas de Proyectos de Investigación de 2005 del Ministerio de Ciencia y Tecnología.

¹⁶ Dirigido por Luis Rico y conformado además por María José González (Universidad de Cantabria); Pablo Flores, Pedro Gómez y Jose Luis Lupiáñez (Universidad de Granada). Proyecto concedido a través de la Convocatoria 2009 del Subprograma de Proyectos de Investigación Fundamental no orientada de Ministerio de Ciencia e Innovación.

¹⁷ Gracias a la consecución del Proyecto de Investigación de Excelencia “TEDS-M España” (P07-FQM-03244) en la convocatoria de 2007 que realizó la Dirección General de Investigación, Tecnología y Empresa de la Consejería de Innovación, Ciencia y Empresa de la Junta de Andalucía. La dirección del proyecto corre a cargo de Luis Rico, y se puede encontrar más información en <http://www.ugr.es/~tedsm/>

M), cuyo estudio de factibilidad está siendo evaluado actualmente por la National Science Foundation en Estados Unidos.

Toda esta experiencia acumulada, ha permitido delimitar y abordar un nuevo problema de investigación que, a continuación, pasamos a definir.

4. DELIMITACIÓN, PREGUNTAS Y OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

En los apartados anteriores, hemos constatado algunas prioridades actuales de la investigación sobre formación de profesores. También hemos descrito cómo se ha llevado a la práctica la investigación sobre formación de profesores en el grupo FQM193 y hemos ubicado nuestra investigación en esos dos contextos. A continuación, hemos introducido las principales características del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que venimos implementando en la Universidad de Granada y que ya ha sido objeto de estudio anteriormente desde diferentes puntos de vista. Finalmente, hemos resumido las líneas prioritarias de actuación de diferentes proyectos de investigación de los que hemos formado o formamos parte. Todos estos antecedentes nos permiten ubicar y delimitar nuestra investigación, tal y como hacemos a continuación.

En relación con el panorama actual internacional sobre la investigación en formación de profesores, nuestro trabajo se relaciona, al menos parcialmente, con dos de las principales líneas de interés. Tiene que ver con el conocimiento del profesor, porque nos ocupamos del conocimiento y las capacidades que desarrolla un grupo de profesores cuando lleva a cabo la planificación del aprendizaje de sus escolares en una unidad didáctica. También tiene que ver con el diseño y la implementación de programas de formación de profesores, ya que analizaremos cómo puede diseñarse y llevarse a la práctica un programa de formación inicial, junto con las herramientas conceptuales y metodológicas necesarias, para que los futuros profesores desarrollen ese conocimiento y esas capacidades.

Nuestra investigación da continuidad a los trabajos realizados en seno del grupo FQM193. Seguimos la línea de los trabajos centrados en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria (Bedoya, 2002; Flores, 1998; Gil, 1999; Gómez, 2007; Ortiz, 2002) aunque, más concretamente, nos ubicamos con aquellos que se ocuparon de evaluar programas formativos basados en el modelo de los organizadores curriculares (Bedoya, 2002; Gómez, 2007; Ortiz, 2002). Todos estos trabajos, unidos al resto de producciones del grupo, nos permiten profundizar y avanzar en una de sus líneas prioritarias de investigación.

En relación con el programa formativo que se imparte en la Universidad de Granada, nuestro trabajo estudia uno de los aspectos centrales de dicho programa: el conocimiento de los profesores en formación para la planificación

del aprendizaje de los escolares en matemáticas, mediante el análisis cognitivo como parte del procedimiento establecido por el análisis didáctico y mediante los organizadores del currículo. Como ya se ha indicado y se detallará en el capítulo 5 de esta memoria, nuestra investigación tiene ese programa como objeto de estudio, es decir, la asignatura Didáctica de la Matemática que se imparte en la Licenciatura de Matemáticas de dicha Universidad.

Mediante el análisis didáctico, que se desarrolla en el capítulo 2, cada grupo de futuros profesores recaba y analiza información sobre un tema matemático específico, que les lleva finalmente a elaborar una unidad didáctica sobre ese tema. Uno de los análisis que estructuran y organizan el análisis didáctico, es el *análisis cognitivo*. En el análisis cognitivo, los grupos de futuros profesores abordan la problemática del aprendizaje de los escolares sobre el tema matemático que están analizando.

Nuestra participación en dos de los proyectos de I+D+i mencionados anteriormente han tenido especial incidencia en nuestro trabajo. Las discusiones y evidencias logradas en el primero de ellos, junto al avance de la tesis de Pedro Gómez (Gómez, 2007), enmarcan el contexto de la investigación que aquí presentamos. El segundo proyecto nos permitió delimitar, muy concisamente, las competencias profesionales de los profesores de matemáticas que deberían desarrollarse en un programa de formación, para lograr la alfabetización matemática de los escolares; también profundizamos en el significado de la noción de competencia matemática (Rico, 2007; Lupiáñez, 2005). Estos logros resultaron claves para el fundamento y la planificación de nuestra investigación (Lupiáñez y Rico, 2006, 2008; Rico y Lupiáñez, 2008a). Por otro lado, nuestro trabajo actual en el proyecto del Ministerio de Ciencia e Innovación y nuestra participación en los proyectos de la IEA, proporcionan un espacio de reflexión y un marco de fundamentos conceptuales y metodológicos con los cuales abordar la indagación sistemática del desarrollo de las competencias profesionales de futuros profesores de matemáticas.

Partiendo de estas premisas y de este contexto, podemos delimitar las preguntas que abordamos en nuestra investigación.

4.1 Preguntas de Investigación

La primera pregunta que queremos abordar con nuestra investigación, considera el problema de la planificación del aprendizaje escolar en matemáticas. Más concretamente, es la siguiente:

¿Cómo puede afrontar el profesor el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares acerca de un tema matemático específico?

La anterior pregunta da lugar a una conjetura que sostiene que *el análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, permite al profesor abordar la problemática del aprendizaje escolar de cara al diseño de unidades didácticas.*

La segunda pregunta se centra en el diseño y puesta práctica de un programa de formación inicial:

¿Es posible diseñar e implementar el análisis cognitivo en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria desde una perspectiva funcional?

Sostenemos como hipótesis una respuesta afirmativa a esa cuestión, que considera que *la asignatura Didáctica de la Matemática puede satisfacer esos requerimientos enumerados.*

Finalmente, la tercera pregunta de investigación introduce el estudio empírico de la misma.

¿Cómo desarrollan su competencia de planificación para las matemáticas escolares los grupos de futuros profesores que cursan ese programa formativo?

En este caso, la tercera pregunta nos lleva a una tercera conjetura: *es posible describir y caracterizar el proceso de aprendizaje que siguen los grupos de futuros profesores que cursan la asignatura mediante un desarrollo natural de la misma.*

Veamos a continuación cómo estas preguntas y las conjeturas e hipótesis que enunciarnos, dan lugar a los objetivos generales y específicos de nuestra investigación.

4.2 Objetivos Generales y Específicos de la Investigación

De la primera pregunta anterior y en relación con la conjetura planteada, la caracterización del análisis cognitivo introduce el primero de los objetivos generales que afrontamos en esta investigación:

1. Conceptualizar el análisis cognitivo como procedimiento para la planificación sobre el aprendizaje escolar por parte del profesor de matemáticas en formación, en coherencia con el análisis didáctico.

Nuestra aproximación a la segunda pregunta se concreta en el diseño y la implementación del análisis cognitivo, en coherencia con el resto del análisis didáctico, en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria y desde un enfoque funcional¹⁸. Esta hipótesis se aborda mediante nuestro segundo objetivo general de investigación:

2. Diseñar e implementar un programa de formación inicial que incorpore el análisis cognitivo desde una perspectiva funcional.

Para dar respuesta a la tercera pregunta, desde nuestra perspectiva, interesa evaluar la parte del diseño e implementación del programa de formación inicial a partir del estudio del aprendizaje logrado por los grupos de profesores que cursaron la asignatura en el curso 2008-2009. Esto concreta nuestro tercer objetivo de investigación:

¹⁸ En el capítulo 4 describimos cómo interpretamos un enfoque funcional de un programa de formación de profesores.

3. Identificar, describir y analizar el desarrollo de la competencia de planificación sobre aprendizaje escolar que muestran los participantes en el programa de formación inicial del curso 2008-2009.

En relación con el primero de los objetivos generales, que se centra en la caracterización del análisis cognitivo, consideramos tres objetivos específicos. Los dos primeros tienen que ver con la estructura del análisis cognitivo y su papel con el resto de análisis del análisis didáctico; el último pretende dotar un carácter funcional a esa estructura para los profesores en formación. Estos tres objetivos específicos son los siguientes:

- 1.1 Delimitar por medio de organizadores del currículo una estructura para el análisis cognitivo que permita planificar el aprendizaje de las matemáticas escolares desde una perspectiva funcional.
- 1.2 Enmarcar el análisis cognitivo dentro del análisis didáctico de manera coherente con el análisis de contenido y con el de instrucción.
- 1.3 Proporcionar una serie de conocimientos y capacidades a los profesores en formación basados en el análisis cognitivo y que contribuyan al desarrollo de su competencia de planificación sobre el aprendizaje escolar en matemáticas.

El segundo de los objetivos generales tiene que ver con el diseño y puesta en práctica de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que introduzca el análisis cognitivo. Por lo tanto, surgen de manera natural dos objetivos específicos:

- 2.1 Fundamentar un programa de formación inicial desde una perspectiva funcional que contemple el análisis cognitivo, en coherencia con el análisis didáctico, como procedimiento que contribuya a la competencia de planificación por parte de los futuros profesores.
- 2.2 Implementar ese programa de formación y dar oportunidad a la recogida de información sobre el desarrollo de esa competencia de planificación en los futuros profesores que lo cursen.

Finalmente, en relación con el tercer objetivo general y el desarrollo de la competencia de planificación de los grupos de profesores en formación, introducimos el estudio empírico de la investigación. Concretamos un curso académico y, por lo tanto, un grupo de futuros profesores con los que exploraremos el desarrollo de su competencia de planificación en relación al análisis cognitivo. Los objetivos específicos que perseguimos en este caso son entonces:

- 3.1 Identificar, describir y caracterizar el conocimiento y las capacidades que alcanzan los grupos de los futuros profesores acerca de las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje de los escolares, durante el programa de formación del curso 2008-2009.

- 3.2 Emplear la información anterior para establecer el nivel de desarrollo de la competencia de planificación de esos grupos de futuros profesores, en lo que al aprendizaje de las matemáticas escolares se refiere.

5. ORGANIZACIÓN DEL DOCUMENTO

En este primer capítulo hemos contextualizado y delimitado nuestra investigación para, finalmente, definir las preguntas, los objetivos generales y los objetivos específicos que nos proponemos abordar. El resto del documento, lo organizamos como sigue.

En el capítulo 2 avanzamos en el significado, los fundamentos y la estructura del análisis didáctico. En ese momento caracterizamos el análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, aunque la descripción detallada de los organizadores del currículo que aquél abarca la realizamos en el capítulo 3. Esas reflexiones proporcionan respuesta al primero de los objetivos generales que hemos planteado. También en el capítulo 3, describimos cómo un profesor puede llevar a cabo de manera ideal el análisis cognitivo y lo ejemplificamos en el caso del tema del sistema de los números naturales.

En el capítulo 4, analizamos lo que significa ser un profesor de matemáticas competente y lo relacionaremos con el conocimiento didáctico del profesor y con las capacidades que debe poner en juego un profesor para llevar a cabo el análisis cognitivo. Toda esa reflexión tiene importancia en el conjunto de nuestro trabajo, si bien la destacaremos especialmente en la parte empírica de la investigación.

En el capítulo 5 describimos la asignatura Didáctica de la Matemática en el curso 2008-2009. Antes, la relacionamos con sus antecedentes y revisamos sus principales fundamentos y finalidades. La descripción realizada en este capítulo, nos abre las puertas a la consecución del segundo objetivo general que hemos propuesto.

La consecución del tercer objetivo de nuestra investigación, requiere de un estudio empírico. Los fundamentos metodológicos de ese estudio y su organización, los describimos en el capítulo 6. Los capítulos 7, 8, 9 y 10, abordan diferentes facetas del estudio empírico; en cada uno de ellos, presentamos su finalidad, su estructura, su organización, su desarrollo y, además, un balance final de los principales resultados que aporta.

Las conclusiones finales de la investigación, para los tres objetivos generales propuestos, las exponemos en el capítulo 11. También allí llevamos a cabo un balance estratégico sobre los resultados obtenidos y planteamos algunas posibles líneas de continuidad.

Finalmente, en el capítulo 12, recogemos las referencias que hemos usado a lo largo de todos los capítulos previos. Adicionalmente, añadimos un segundo documento en el que listamos todos los anexos a los que hacemos referencia y que acompañan a esta memoria en CD.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO: LA PLANIFICACIÓN DEL APRENDIZAJE DESDE UNA PERSPECTIVA CURRICULAR

En el primer capítulo hemos introducido el análisis cognitivo como parte de un procedimiento más complejo, denominado análisis didáctico. El análisis didáctico permite al profesor abordar el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje. El análisis cognitivo se ocupa de la problemática del aprendizaje en dicho proceso de diseño. En nuestro caso, el diseño se lleva a cabo sobre lecciones, unidades didácticas y asignaturas de matemáticas de los ciclos escolares de Educación secundaria.

En este capítulo contextualizamos el análisis didáctico en un marco curricular mediante un enfoque funcional de las matemáticas escolares. Eso permite presentar las finalidades que se persiguen y describir, de manera general, cada uno de los cuatro análisis que lo conforman, para después analizar con más detalle los que se ubican en la fase de diseño. Usaremos un tema de las matemáticas escolares para ejemplificar estos análisis y dedicaremos especial atención al análisis cognitivo, que es nuestro objeto de estudio. Esta reflexión permitirá abordar la primera de las preguntas de investigación que planteamos en el primer capítulo: *¿Cómo puede afrontar el profesor el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares acerca de un tema matemático específico?*

El fundamento de este capítulo se sostiene en los trabajos previos de Rico (1992, 1995a, 1997a, 1997d) y Gómez (2002, 2007). Estos trabajos se centraron, fundamentalmente, en el desarrollo teórico y técnico de la noción de currículo, en la organización de sus dimensiones y niveles, en la caracterización de los organizadores del currículo y en la conceptualización del análisis didáctico. Con este capítulo avanzamos y profundizamos en varios de esos aspectos.

En primer lugar, caracterizamos nuestra visión curricular y funcional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y, basándonos en esa visión,

presentamos a continuación la estructura general del análisis didáctico. El resto del capítulo lo dedicamos a cada uno de los cuatro análisis que lo conforman, para, finalmente, reflexionar sobre el papel del análisis didáctico en un programa de formación inicial de profesores.

1. UNA VISIÓN CURRICULAR Y FUNCIONAL DE LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE

El análisis didáctico, como una herramienta para el diseño de unidades didácticas, se articula en torno a los organizadores del currículo. Es evidente, por lo tanto, que nuestra visión de la planificación escolar que realizan los docentes está indisolublemente unida a la noción de currículo, sobre la que hemos hablado en el primer capítulo.

Las recientes directrices educativas en distintos niveles: a nivel autonómico (Junta de Andalucía, 2007, 2008), a nivel nacional (Ministerio de Educación y Ciencia 2006a, 2006b, 2006c, 2007a, 2007b), a nivel internacional en varios países como Bélgica (Denyer et al., 2007), Canadá (Ministerio de Educación de Ontario, 2005; Scallon, 2004), Perú (Ministerio de Educación de Perú, 2001), Portugal (Abrantes, 2001), o Chile (San Martín, 2001), unidas a estudios de evaluación internacionales como PISA¹⁹ (OCDE, 2005a), han hecho que la noción de currículo reciba un nuevo impulso y una nueva orientación que, en el caso de las matemáticas, enfatiza el carácter funcional de esta disciplina escolar.

Nuestra noción de currículo y lo que entendemos por enfoque funcional de las matemáticas escolares son dos elementos claves en la caracterización del análisis cognitivo. Por esta razón, dedicamos este epígrafe a presentar nuestra conceptualización de ambas nociones.

1.1 Dimensiones y Niveles del Currículo

Un currículo es una propuesta de actuación educativa, que en el caso de las matemáticas, puede considerarse como un “plan de formación en matemáticas para los niños, jóvenes y adultos que tiene lugar en el sistema educativo de un país” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 34). Como elemento que relaciona la organización y legislación educativas con la actividad docente del profesor, un currículo, como plan formativo, ha de atender a cuatro cuestiones centrales (Rico, 1997a):

1. ¿Qué formación? ¿Con cuál conocimiento?
2. Esa formación, ¿para qué? ¿Qué aprendizaje persigue?
3. ¿Cómo llevar a cabo la formación?
4. ¿Cuánta fue la formación? ¿Qué resultados se obtuvieron?

¹⁹ Programme for International Student Assessment.

Rico (Op. cit.) detalla esas cuatro cuestiones y justifica cómo delimitan cuatro dimensiones que permiten llevar a cabo una reflexión y organización curricular. Estas dimensiones, interconectadas entre sí, son la dimensión cultural y conceptual, la dimensión cognitiva, la dimensión ética o formativa y la dimensión social. Además, cada una de esas dimensiones, se puede describir desde diferentes niveles dependiendo de las personas o las instituciones involucradas y del grado de concreción. De esta manera, la noción de currículo puede organizarse de acuerdo a dimensiones y niveles (ver Tabla 2).

Tabla 2

Dimensiones y niveles de la noción de currículo (Rico, 1997a, p. 409)

Dimensión cultural y conceptual	Dimensión cognitiva o de desarrollo	Dimensión ética o formativa	Dimensión social
<i>Nivel teleológico o de los fines</i>			
Fines culturales	Fines formativos	Fines políticos	Fines sociales
<i>Nivel de las disciplinas académicas</i>			
Epistemología e Historia de la Matemática	Teorías del aprendizaje	Pedagogía	Sociología
<i>Nivel del sistema educativo</i>			
Conocimiento	Alumno	Profesor	Aula
<i>Nivel de planificación para los profesores</i>			
Contenidos	Objetivos	Metodología	Evaluación
<i>Nivel del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 20)</i>			
Análisis de contenido	Análisis cognitivo	Análisis de instrucción	Análisis de actuación

El concepto de currículo admite una variedad de aproximaciones, que se derivan de las prioridades establecidas en las dimensiones y en los niveles de reflexión. Constituyen dos aspectos importantes para el estudio de la noción de currículo, y brindan un modelo que proporciona un fundamento para trabajar en el currículo de matemáticas (Rico, 1997a).

Entendemos que la perspectiva curricular para la educación matemática consiste en estudiar y trabajar sobre los planes que organizan y desarrollan la educación mediante las matemáticas, a partir del esquema de niveles y dimensiones establecido para el concepto de currículo. (Rico y Lupiáñez, 2008a, pp. 40-41)

Si nos situamos en el nivel de planificación del profesor, las componentes en las que se concreta el currículo en cada una de sus dimensiones son los contenidos,

los objetivos, la metodología y la evaluación. Estas son las cuatro componentes tradiciones del currículo que debe manejar el profesor; el modelo de los organizadores del currículo le suministra una serie de herramientas con las que abordar el estudio de esas cuatro componentes del currículo de cara al diseño de actividades de enseñanza y aprendizaje.

Cuando Gómez (2007) afrontó el estudio y la revisión del modelo de los organizadores del currículo, conceptualizó el procedimiento del análisis didáctico para el diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas sobre temas matemáticos específicos. Mediante ese procedimiento, para cada tema de matemáticas, el profesor puede dar respuesta a cuestiones como: ¿Qué conocimientos? ¿Para qué esos conocimientos? ¿Cómo lograrlo? ¿Qué se logra?

El análisis didáctico introduce un nuevo nivel de reflexión curricular, centrado en la actividad del profesor como responsable del diseño, implementación y evaluación de temas de la matemática escolar y que, en correspondencia con las cuatro dimensiones del currículo, propone cuatro componentes: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación* (ver última fila de la Tabla 2).

El análisis cognitivo se sitúa en la dimensión cognitiva del currículo. Al observar el resto de componentes de esta dimensión en niveles más generales al del análisis didáctico, podemos delimitar algunos descriptores para el análisis cognitivo. Este análisis tiene que ver con los fines formativos, que se preocupan del desarrollo intelectual de los escolares, de su aprendizaje. En el caso de las matemáticas, la propia naturaleza de la disciplina contribuye de manera especial al desarrollo formativo de los escolares con capacidades como las siguientes (Rico, 1990)²⁰:

1. la capacidad para desarrollar el pensamiento del alumno, que se alcanza al determinar hechos, establecer relaciones, deducir consecuencias y, en definitiva, potenciar el razonamiento y la capacidad de acción simbólica;
2. la capacidad para promover la expresión, elaboración y apreciación de patrones y regularidades, así como su combinación para obtener eficacia o belleza; la habilidad para el uso de esquemas y representaciones gráficas, el diseño de formas artísticas y la apreciación y creación de belleza;
3. la capacidad para incentivar y facilitar la participación de cada alumno en la construcción de su propio conocimiento;
4. la capacidad para estimular el trabajo cooperativo, el ejercicio de la crítica, la participación y colaboración, la comunicación, discusión y defensa de las propias ideas, para asumir la toma conjunta de decisiones;
5. la potencialidad para desarrollar el trabajo científico y para la búsqueda, identificación y resolución de problemas.

Algunos investigadores reconocen la importancia de la reflexión sobre las

²⁰ Como veremos más adelante, en estos enunciados se reconocen los principales descriptores de las competencias matemáticas elaboradas en el marco del proyecto PISA (OCDE, 2005a).

finalidades por parte de los profesores. Vinner (2008), sostiene que la formación de profesores debe ir más allá del trabajo específico en matemáticas, para considerar también los valores que promueven las finalidades de la educación.

El aprendizaje en general y el aprendizaje de las matemáticas en particular, vertebran el análisis cognitivo. En el nivel curricular de las disciplinas académicas, las teorías del aprendizaje exploran cuestiones como ¿en qué consiste el aprendizaje? ¿es resultado de una evolución, efecto de la instrucción o de ambas? ¿cómo se produce? Al situarnos en las matemáticas, estas preguntas se pueden resumir en ¿cómo se caracteriza el aprendizaje de las matemáticas? (Rico y Lupiáñez, 2008a).

Las posibles respuestas a estas cuestiones inciden de manera directa en el alumno, en el sujeto que aprende. En el nivel curricular del sistema educativo es el alumno el que ocupa un lugar central en relación con el aprendizaje y con los fines formativos. Es el principal agente en la dimensión cognitiva del currículo y, como veremos más adelante, el análisis cognitivo se articula en torno a su aprendizaje.

Una parte importante en el aprendizaje del alumno se determina cuando el profesor concreta lo que pretende que el alumno aprenda, es decir, cuando organiza y estructura las expectativas de aprendizaje que tiene para sus escolares. Tradicionalmente, en el nivel curricular de la planificación del profesor, estas expectativas se han concretado en objetivos de diferentes niveles de generalidad y amplitud. Pero en la actualidad, la noción de competencia ha irrumpido con fuerza en las directrices curriculares estableciendo un nuevo nivel de expectativas de aprendizaje, con una fuerte relación con los objetivos, pero con marcadas diferencias²¹.

Esta noción de competencia también ha realizado un enfoque funcional de las matemáticas en el currículo escolar; en torno a él centramos nuestra reflexión en los siguientes epígrafes.

1.2 Un Enfoque Funcional de las Matemáticas Escolares

No cabe duda que los resultados mostrados en el proyecto PISA en 2003 (OCDE, 2005a) tuvieron una alta repercusión mediática y social merced, sobre todo, a los aparentemente bajos resultados de los alumnos españoles en las diversas disciplinas y, entre ellas, en matemáticas. Los resultados de la aplicación de 2006 generaron un debate similar desde que comenzaron a hacerse públicos (El País, 2007; Ministerio de Educación y Ciencia, 2007c). Pero esta repercusión ha ido más allá pues, en nuestra opinión, ha incidido en las nuevas orientaciones curriculares a cuyo desarrollo estamos asistiendo actualmente. No sólo por el predominante papel que desempeñan las competencias como caracterizadoras de las expectativas de aprendizaje, sino que, en el caso de las matemáticas escolares, ha llevado a expresar un claro énfasis en el papel funcional del conocimiento matemático (Lupiáñez, 2008).

²¹ Exploraremos la relación entre objetivos y competencias en el capítulo 3.

Este enfoque funcional posee unas características y unas prioridades que lo distinguen de otros posibles. En Rico y Lupiáñez (2008a, pp. 175-183) describimos otros tres enfoques posibles para las matemáticas escolares, que se han visto refrendados con programas educativos y propuestas curriculares en diferentes momentos y países. Estos enfoques son los siguientes:

- *Enfoque instrumental o tecnológico*, centrado en el dominio y uso de hechos, destrezas y conceptos básicos, que se toman como herramientas.
- *Enfoque estructural o técnico*, donde el conocimiento consiste en un sistema estructurado de reglas y conceptos, formalizado y basado en la deducción.
- *Enfoque funcional*, donde el conocimiento permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de cuestiones y problemas en diferentes contextos.
- *Enfoque integrado*, donde el conocimiento es un objeto de actividad intelectual autónoma, creación e interacción en diversidad de situaciones y contextos.

Estos diferentes enfoques conducen a distintos modelos de currículo, que muestran distintas opciones de planes de formación según los conocimientos que destacan, el tipo de pensamiento que en cada caso se promueve, el peso de la argumentación y de las relaciones de comunicación, la complejidad y diversidad de capacidades contempladas en cada caso, entre otros.

Esos modelos curriculares contemplan y proponen respuestas tanto para las necesidades que proceden de los fines formativos, como para las que provienen de los fines sociales. La Tabla 3 sintetiza algunos descriptores para esos enfoques según sus finalidades formativas y sociales. Para describir las finalidades formativas e individuales señalamos el tipo de conocimiento que destacan en cada caso, uso de los sistemas de representación y orientación que se imprime al aprendizaje. Para describir las finalidades sociales y culturales hemos tenido en cuenta prioridad de procedimientos y usos convenidos, relaciones de comunicación, expectativas de aprendizaje y utilidad y ámbito de aplicación de los aprendizajes alcanzados.

Tabla 3

Caracterización de los enfoques de las matemáticas escolares (p. 180)

Finalidades formativas e individuales	Finalidades sociales y culturales
<i>Enfoque instrumental</i>	
Conocimiento dirigido al logro de aprendizaje de hechos concretos y destrezas en técnicas singulares.	Prioridad por el dominio de técnicas y algoritmos útiles.
Conocimiento de las representaciones convencionales.	Interés por la seguridad, precisión y rapidez individuales.
Formación dirigida al conocimiento de conceptos básicos y al dominio de reglas.	Desarrollo de conductas y logro de objetivos específicos.
	Dominio de los usos básicos y convencionales de los conceptos

Tabla 3

Caracterización de los enfoques de las matemáticas escolares (p. 180)

Finalidades formativas e individuales	Finalidades sociales y culturales
<i>Enfoque estructural</i>	
Conocimiento dirigido al dominio de conceptos, estructuras, técnicas y razonamientos formales.	Prioridad por el dominio de relaciones y propiedades.
Sistemas de representación diversos y conexión entre ellos.	Importancia de la precisión y el rigor en la comunicación.
Formación dirigida hacia el dominio formal de razonamientos y técnicas matemáticas	Desarrollo de competencias profesionales específicas. Desarrollo de trabajo experto en la comunidad matemática
<i>Enfoque funcional</i>	
Conocimiento centrado en el desarrollo de estrategias cognitivas propias.	Técnicas de modelización para el planteamiento y resolución de problemas en contexto.
Uso de distintas representaciones para dar respuesta a una cuestión.	Capacidad de hacerse entender; énfasis en la argumentación.
Formación dirigida a mejorar el pensamiento del alumno y dotarle de cierta autonomía	Desarrollo de competencias matemáticas y su aplicación en diversos contextos. Desarrollo del trabajo en equipo y del pensamiento funcional
<i>Enfoque integrado</i>	
Conocimiento y dominio de estrategias metacognitivas.	Uso de heurísticos y resolución de problemas abiertos.
Formación basada en la creatividad y en la valoración de la belleza de las representaciones matemáticas.	Importancia de argumentar y justificar las propias ideas. Diversificación de competencias
Cultivo de la imaginación y la curiosidad por las matemáticas.	Capacidad para interactuar en una diversidad de contextos. Desarrollo del pensamiento crítico y de la autonomía intelectual

Como señala Rico (2007a), cualquier pensamiento científico (que da respuesta al *por qué*), integra tres dimensiones. Una dimensión conceptual, que da respuesta a *qué*; otra operativa que responde a *cómo* y una funcional, que da respuesta a *para qué*.

Según el enfoque funcional de las matemáticas escolares, los conceptos y procedimientos matemáticos tienen un para qué, sirven para algo, pues las nociones matemáticas constituyen herramientas mediante las que actuamos para dar respuesta a cuestiones, problemas e interrogantes. En el resto de enfoques el foco de aplicación es, casi exclusivamente, la propia matemática. Esta perspectiva funcional se concreta más en cómo los escolares pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana, que en controlar qué contenidos del currículo han aprendido. Es obvio que para abordar la resolución de problemas se requieren un conocimiento teórico y un dominio técnico, pero el carácter funcional en las matemáticas propugna que no sean sólo esos los aspectos que se tengan en cuenta en la Educación obligatoria, sino que se persiga, además, que los escolares sean capaces de poner en juego y aplicar ese conocimiento y ese dominio técnico para resolver problemas en una variedad de situaciones.

Esta visión de la matemática retoma discusiones y planteamientos que en diferentes momentos de la historia de la Educación Matemática han ocupado un lugar preponderante. Cuando D'Ambrosio (1979) reflexionó sobre los fines de la educación matemática en el marco del ICME²² III, puso de manifiesto dos puntos de vista que permiten organizar y entender esos fines: *utilitario*, que tiene que ver con la dimensión social del currículo, y *especulativo* que alude a la dimensión conceptual y cultural.

El punto de vista utilitario tiene que ver con la necesidad de formar individuos competentes en matemáticas para llevar a cabo actividades científicas y tecnológicas. El punto de vista especulativo se relaciona, por el contrario, con el desarrollo de conocimientos que permitan resolver problemas y que fomenten el aspecto creativo de las matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008).

El primer punto de vista se sostiene en una visión de las matemáticas como cuerpo utilitario de técnicas y habilidades, pensado y diseñado para satisfacer necesidades laborales y sociales. El segundo, las considera proveedoras de modelos de pensamiento y de lenguaje, necesarios para simular y abordar los fenómenos y problemas a partir de los cuales se generan nuevos conocimientos. Después de la intervención de D'Ambrosio (1979), la tarea primordial de la educación matemática fue el logro simultáneo de esos dos fines (Rico y Lupiáñez, 2008).

Romberg (1991) sostiene que, además de por razones formativas intrínsecas que son importantes y válidas, la educación matemática también posee un carácter funcional que es necesario:

La meta más frecuentemente declarada de la enseñanza de las matemáticas es que tanto para los alumnos como para la sociedad las matemáticas satisfacen una necesidad "funcional de gran alcance". (...) Las escuelas son el mecanismo esencial de transformación entre la vida familiar y la vida adulta en una moderna sociedad industrial urbana» (Feinberg y Soltis, 1985, p. 18). El

²² Internacional Congress on Mathematical Education.

argumento es que las escuelas deben preparar a los alumnos para que puedan ser ciudadanos productivos en la sociedad. Por ejemplo, Paul Trafton (1980) afirma: “Sabemos que la aritmética es necesaria para dirigir nuestros asuntos personales y las exigencias de muchas profesiones que utilizan sólo una modesta cantidad de matemáticas” (p. 11). A continuación declara que “la formación especializada de las matemáticas es un requisito previo esencial para el estudio de una amplia gama de disciplinas... Un estudio cuidadoso de muchas carreras y de sus requisitos matemáticos nos hace ver la importancia que tiene un conocimiento sustancial de las matemáticas para todos los alumnos” (p. 11). Aunque no cabe duda de que muchas ocupaciones dependen de la formación matemática, también es cierto que quienes finalmente aplican unas matemáticas relativamente sofisticadas serán una pequeña minoría entre los que no aplicarán las matemáticas en absoluto. (p. 337)

Este enfoque funcional de las matemáticas ha tenido en los últimos años un fuerte resurgimiento que ha estado influenciado por el proyecto PISA de la OCDE (2005a). Este proyecto se focaliza en el estudio de la *alfabetización matemática* de los escolares al término de su formación obligatoria. Esta noción de alfabetización matemática se concreta, no tanto en términos del currículo escolar, como en el de aquellos conocimientos y destrezas que son necesarios para la vida adulta. La alfabetización matemática, se refiere a las “capacidades individuales de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando enuncian, formulan y resuelven problemas en una variedad de dominios y situaciones” (Rico, 2005, p. 14).

1.3 Enfoque Funcional en el Actual Currículo de Matemáticas

Las recientes orientaciones y directrices curriculares a las que nos hemos referido al inicio de este capítulo, también han retomado la visión funcional de las matemáticas. Se hace explícita la necesidad de formar a nuestros escolares de manera que sean capaces de afrontar la resolución de problemas en diferentes situaciones y contextos y esa necesidad formativa, se expresa en términos de competencias.

El desarrollo de la competencia matemática (...) supone aplicar aquellas destrezas y actitudes que permiten razonar matemáticamente, comprender una argumentación matemática y expresarse y comunicarse en el lenguaje matemático, utilizando las herramientas adecuadas e integrando el conocimiento matemático con otros tipos de conocimiento para obtener conclusiones, reducir la incertidumbre y para enfrentarse a situaciones cotidianas de diferente grado de complejidad. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31689).

Conviene señalar que no todas las formas de enseñar matemáticas contribuyen por igual a la adquisición de la competencia matemática: énfasis en la funcionalidad de los aprendizajes, su utilidad para comprender el mundo que nos rodea o la misma selección de estrategias para la resolución de un problema, determinan la posibilidad real de aplicar las matemáticas a diferentes campos de conocimiento o a distintas situaciones de la vida cotidiana. (pp. 31790-31791).

Competencia matemática: conjunto de conocimientos, destrezas y actitudes necesarios para analizar y comprender las situaciones de la vida real, identificar conceptos y procedimientos matemáticos aplicables, razonar sobre las mismas, generar soluciones y expresar los resultados de manera adecuada. (Junta de Andalucía, 2006, p. 11).

Esta relación entre competencia matemática y matemática funcional se hace visible en otros documentos. Onrubia, Cochera y Barberá (2001) describen que el aprendizaje que se promueva en la escuela debe ser tal que

(...) permita a los estudiantes enfrentarse a las demandas de su entorno social y cultural en sus diferentes esferas: educativa y laboral, privada, social y comunitaria. (...) (que contribuya) a su desarrollo y socialización (...) para actuar como ciudadanos competentes, activos, implicados y críticos: capacidades de pensamiento autónomo e independiente, de exploración e indagación, de pensamiento divergente y creativo, de identificación y resolución de problemas diversos, de modelización de situaciones extra-matemáticas reales, de análisis y valoración de los usos y roles de las matemáticas en el contexto social, y de comprensión de las nuevas tecnologías de la información en relación con las matemáticas. (p. 497)

No vamos a entrar, en este momento, en el análisis del concepto de competencia, pero sí queremos destacar su papel en el currículo de matemáticas y su énfasis en un enfoque funcional de las matemáticas. Como veremos en el capítulo 3, aunque el término competencia admite varios significados e interpretaciones, es posible delimitar una serie de descriptores comunes a muchos de ellos y, además que promueven un marcado carácter funcional de las matemáticas.

Desde el punto de vista de la actividad docente del profesor, este enfoque funcional del currículo requiere de un diseño cuidado y detallado de las matemáticas escolares de cara al aprendizaje de los escolares; sobre todo porque, a diferencia de otros enfoques, no toma como hilo conductor de la planificación la secuencia tradicional o lógica del propio contenido.

A continuación presentamos el análisis didáctico como un procedimiento que, fundamentado en la noción de currículo y promoviendo un enfoque funcional, permite al profesor lograr ese propósito.

2. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

La noción de análisis didáctico es recogida en la investigación en Didáctica de la Matemática con diferentes significados (Gómez, 2007, p. 19)²³. De entre todos los posibles, nosotros lo consideramos como un procedimiento de diseño, desarrollo y evaluación para un tema matemático concreto, fundamentado en la

²³ Pedro Gómez señala que en Septiembre de 2005 aparecían unos 9300 resultados en Google con los términos “análisis didáctico” o “didactical analysis” y que eso indica que es una expresión genérica (Gómez, 2007, p. 19). Pero lejos de disminuir, en Enero de 2009 aparecían más de 12200 resultados, con lo que sigue patente la variedad de acepciones posibles.

noción de currículo, sostenido por los organizadores curriculares y, en nuestro caso, orientado mediante un enfoque funcional de las matemáticas escolares.

El análisis didáctico se sitúa como un nivel de reflexión del currículo (ver Tabla 2) y está directamente relacionado con la actividad del profesor. En el capítulo anterior lo definimos usando los términos de Gómez (2002) como procedimiento que, de manera ideal, debería realizar un profesor de matemáticas para “diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.” (p. 257). Por actividades de enseñanza y aprendizaje entenderemos el conjunto de actuaciones de un profesor en un periodo limitado, pero más o menos amplio, en el que trabaja sobre un tema específico de matemáticas con unos escolares de un nivel determinado. Así por ejemplo, el análisis didáctico puede ponerse en juego para diseñar unas cuantas horas de clase, o toda una unidad didáctica sobre el tema en cuestión.

Aún dentro de esta caracterización, el significado del análisis didáctico que consideramos en nuestra investigación se ha visto sujeto, y lo sigue haciendo, a variaciones y matizaciones que surgen de su implementación en un programa de formación inicial de profesores, de las continuas discusiones con compañeros interesados en este tipo de formación y por la ejecución de proyectos de investigación centrados en la estructura, las expectativas, la ejecución y la evaluación de esos programas formativos.

En el contexto de nuestro trabajo, limitaremos el procedimiento del análisis didáctico al diseño, puesta en práctica y evaluación de unidades didácticas²⁴. Consideraremos una unidad didáctica como una “unidad de programación y actuación docente constituida por un conjunto de actividades que se desarrollan en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos” (Segovia y Rico, 2001, p. 87). Por tanto, en nuestra investigación el análisis didáctico tiene dos particularidades:

- Es específico para cada tema de matemáticas; y
- se realiza para una planificación de un tiempo determinado de enseñanza sobre ese tema.

El análisis didáctico se estructura y articula a su vez en torno a cuatro análisis, mediante los cuales es posible analizar y describir un tema de matemáticas para

²⁴ Este significado es el que manejaremos de aquí en adelante, pues ese nivel de concreción nos parece acertado. Sin embargo, aunque no con una definición tan acotada, diferentes trabajos realizados en el seno del grupo FQM193 anteriores al de Pedro Gómez, adelantaban este significado con una interpretación muy cercana. Por ejemplo, en Rico y Gutiérrez (1994) se recogen las discusiones y debates de un seminario celebrado en Granada en 1993 sobre la formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria. Una parte de las sesiones se centraron en las variables que debería incluir el análisis didáctico para estudiar los contenidos de las matemáticas escolares (Carrillo y Marín, 1994, pp. 43-50). Por otro lado, las colecciones de libros editados por Síntesis, a las que ya nos hemos referido antes (“Matemáticas: cultura y aprendizaje” y “Educación matemática en secundaria”), usan un esquema para el tratamiento de los temas de matemáticas de Educación obligatoria que sigue el esquema de organizadores, en el que sustenta en análisis didáctico tal y como lo manejamos en esta investigación.

constituirlo como objeto de enseñanza. Estos cuatro análisis corresponden a cada una de las dimensiones del currículo (Tabla 2) y, como señalamos antes, son: el *análisis de contenido*, el *análisis cognitivo*, el *análisis de instrucción* y el *análisis de actuación* (Gómez, 2007, p. 29).

Como veremos más adelante, cada uno de estos análisis aborda aspectos diferentes, pero centrales y muy relacionados, del proceso de diseño, puesta en práctica y evaluación de las matemáticas escolares. Más concretamente, los tres primeros análisis se ocupan del diseño, mientras que el análisis de actuación se centra en la puesta en práctica, implementación y la posterior evaluación de los resultados obtenidos. En este sentido, el análisis de contenido, el cognitivo y el de instrucción son análisis *a priori*, mientras que el de actuación es *a posteriori*.

En el análisis de contenido, situado en la dimensión cultural y conceptual del currículo, el profesor identifica, selecciona y organiza los significados de los conceptos y procedimientos de un tema matemático que considera relevantes a efectos de su planificación como contenidos escolares aptos para la instrucción. La revisión y organización de los conceptos y procedimientos que conforman ese tema, el modo en que esos conceptos y procedimientos pueden representarse y la organización de los fenómenos y problemas a los que pueden dar respuesta, delimitan los organizadores del currículo que conforman el análisis de contenido.

El análisis cognitivo, ubicado en la dimensión cognitiva del currículo, aborda la problemática del aprendizaje de ese tema matemático por parte de los escolares. Desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), el profesor, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y sobre su aprendizaje, enuncia y organiza expectativas de aprendizaje sobre ese tema matemático. También analiza aquellas limitaciones que pueden interferir el aprendizaje, y organiza la selección de tareas que les suministrará a los escolares las oportunidades de aprender.

En el análisis de instrucción, el profesor selecciona, diseña y secuencia las tareas que empleará en la instrucción para lograr las expectativas de aprendizaje que ha concretado anteriormente. También analiza los diferentes materiales y recursos que podrá emplear en sus clases y delimita los criterios y los instrumentos de evaluación.

El último de los análisis, el de actuación, se lleva a cabo después de implementar la unidad didáctica y le sirve al profesor para recabar información acerca de: la medida en que se han logrado las expectativas de aprendizaje establecidas, la funcionalidad de las tareas empleadas o la bondad de las herramientas de evaluación puestas en juego. Esta información es útil de cara a la próxima implementación de la unidad diseñada o al inicio de la planificación del tema siguiente.

Esta descripción permite vislumbrar una estructura cíclica en el análisis didáctico, que esquematizamos y representamos gráficamente en la Figura 1.

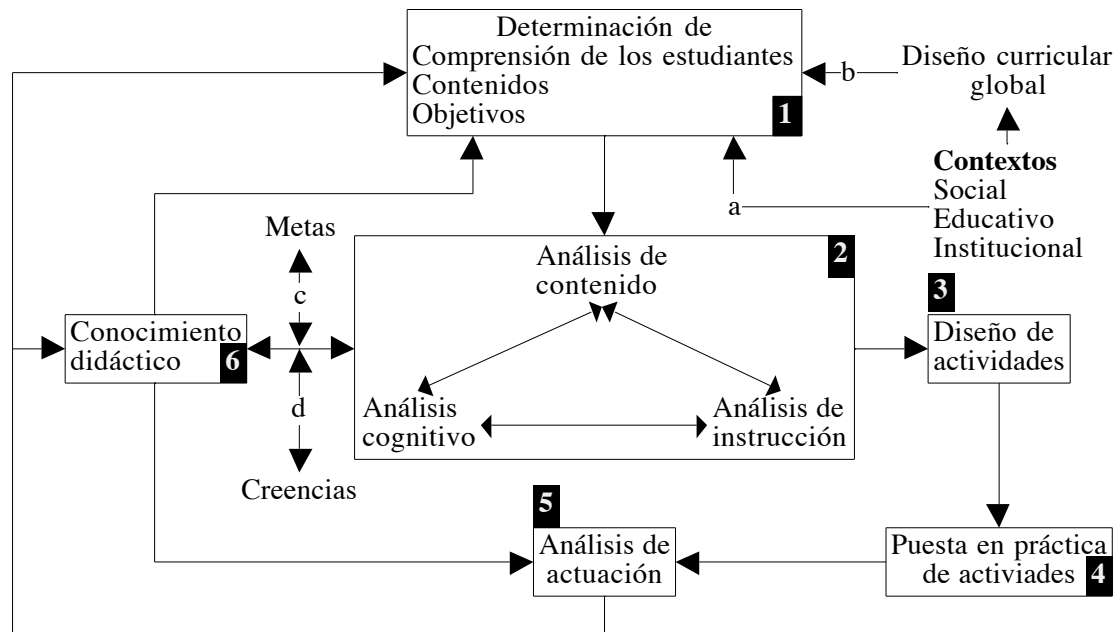


Figura 1. Ciclo del análisis didáctico (Gómez, 2007, p. 31)

La Figura 1 muestra gran número de aspectos que toma en cuenta y relaciona el análisis didáctico. Es posible consultar una descripción detallada de todo el procedimiento en Gómez (2007, §2.4), ya que nosotros nos centraremos sólo en algunos de esos aspectos.

Todo el análisis didáctico se encuentra contextualizado en la realidad social y escolar en que tiene lugar la actividad del profesor. La ubicación e infraestructura del centro, el nivel socio-económico de los escolares o su estatus cultural, son algunos de los elementos que contextualizan esa actividad docente. El inicio del análisis didáctico incluye la selección de un tema de matemáticas y la concreción del nivel educativo en el que se sitúa la planificación. Con esos dos elementos, es posible ubicar y revisar los documentos curriculares que aportan información general sobre la formación previa de los escolares, sobre organización de contenidos, y sobre expectativas generales que perseguir. La revisión de los criterios de evaluación también aporta información relevante a la planificación.

Ese proceso de diseño comienza explícitamente con los tres análisis que recoge el cuadro 2 de la Figura 1. Las flechas expresan que cualquiera de ellos puede suministrar información que modifica o complementa a los otros. Una revisión de los objetivos puede ampliar la lista de contenidos seleccionados, o una tarea que se ha encontrado en un libro de texto moviliza un objetivo que no estaba contemplado originalmente. Como muestra la Figura 1, el conocimiento didáctico del profesor le permite llevar a cabo estos tres análisis y, a su vez, la realización de los análisis contribuye al aprendizaje del profesor suministrándole nueva información que aumenta su conocimiento didáctico.

Después de llevar a cabo los tres análisis, el profesor concreta las actividades de enseñanza que llevará a cabo en la fase de puesta en práctica (cuadro 3 de la Figura 1). Para diseñar estas actividades se basa en la información de los análisis previos y añade aspectos de gestión del aula que organizarán la instrucción.

Después de la implementación de la planificación, el profesor puede realizar el análisis de actuación para valorar los resultados obtenidos y disponer de información para una nueva puesta en práctica del análisis didáctico (cuadro 5 de la Figura 1). Esta última fase también contribuye al desarrollo del conocimiento didáctico del profesor.

A continuación detallaremos más concisamente la estructura y la organización de los cuatro análisis del análisis didáctico, prestando más detalle a los que se centran en la fase de diseño: el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

3. EL ANÁLISIS DE CONTENIDO

El primero de los análisis que describiremos es el análisis de contenido, que se centra en analizar, describir y establecer los diferentes significados que tienen las nociones involucradas en el tema de matemáticas sobre el que el profesor está realizando la planificación de una unidad didáctica. Está, por lo tanto, ubicado en la dimensión conceptual del currículo. En nuestra presentación, primero acotamos un nivel de concreción para la noción de contenido matemático en el que se enmarca el análisis de contenido. Después, estudiamos ese contenido desde un punto de vista cognitivo y, a continuación, describimos los tres organizadores del currículo que estructuran el análisis de contenido. También ejemplificamos cada una de ellos usando el tema del sistema de los números naturales.

3.1 Acerca del Contenido Matemático

El objeto de estudio de este primer análisis es el contenido matemático y, partiendo de la reflexión de Pedro Gómez y Luis Rico (Gómez, 2007; §2.7.1), distinguimos cuatro niveles de concreción del contenido matemático para situar el nivel de reflexión del análisis didáctico:

Contenido matemático escolar

Está constituido por todo el acervo del conocimiento matemático que, a lo largo de la historia de las matemáticas escolares, se ha considerado como objeto de enseñanza en la educación básica. Incluye todas las parcelas del conocimiento matemático que desde diferentes grupos de especialistas en educación matemática y colectivos de profesores han sido consideradas, analizadas y organizadas para que formen parte de las matemáticas que se han enseñado en las aulas. Algunos ejemplos de estos trabajos son las colecciones “Matemáticas: Cultura y Aprendizaje” y “Educación Matemática en Secundaria” a la que nos referimos en el capítulo 1. Los trabajos de Castro (2001a), del NCTM (2003, 2006), son también acercamientos a la selección, al análisis y a la organización del contenido matemático escolar.

Contenido prescrito

Es una selección del contenido matemático escolar que se recoge en las directrices curriculares oficiales. Señala las nociones básicas que han de manejar todos los escolares, se presentan organizados según etapas y niveles; se relacionan con expectativas generales de aprendizaje y con criterios de evaluación. Este contenido prescrito se ve modificado con motivo de cambios en las políticas y legislaciones educativas, llegando en ocasiones a desaparecer algunos temas específicos, como ocurrió con la matemática conjuntista, mientras que en otras se altera el peso y la relevancia de otros, como con la resolución de problemas (Rico, Sánchez y Llinares, 1997).

Contenido propuesto para una asignatura

Una vez que legislativamente se ha acotado el contenido prescrito, diferentes grupos de especialistas en educación matemática y profesores pueden tomar decisiones sobre cómo concretar esas directrices generales para configurar una asignatura de matemáticas para un curso determinado. Esto ocurre cuando, por ejemplo, se elaboran libros de texto. Esos colectivos especifican el listado de conceptos y procedimientos que se desarrollarán en cada tema, organizarán una secuencia para esos temas y diseñarán unas tareas específicas que un profesor podrá usar en su práctica docente. Por eso es frecuente encontrar diferencias significativas entre diferentes editoriales que proponen libros de texto para un mismo curso escolar (American Association for the Advancement of Science, 1999; Kulm y Grier, 1998)²⁵.

Contenido de un tema concreto

Este nivel de concreción de contenidos surge cuando un profesor “debe abordar la planificación de una hora de clase o de una unidad didáctica para un tema o concepto matemático determinado” (Gómez, 2007, p. 39). En ocasiones es necesario planificar la instrucción de un tema específico porque no aparece como tal en el libro de texto que se está siguiendo o porque, aunque aparece, no lo hace con la profundidad o la orientación que el profesor entiende que debiera hacerlo. En este nivel de concreción se sitúa el análisis didáctico y, en el análisis de contenido, es donde el profesor “identifica y organiza los múltiples significados de dicho tema, para efectos de seleccionar aquellos significados que considera relevantes para la instrucción” (p. 39).

3.2 Clasificación Cognitiva del Contenido Matemático

Al hablar del contenido de las matemáticas escolares nos referimos a los contenidos que son objeto de enseñanza y aprendizaje. Esta delimitación generó hace varias décadas un marcado interés por organizar ese contenido matemático desde un punto de vista cognitivo. El objetivo era destacar aquellos rasgos

²⁵ En el XIII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, celebrado en Santander en Septiembre de 2009, uno de los seminarios de investigación giró en torno a diferentes análisis de libros de texto y se debatieron cuestiones de este tipo.

centrales que permiten identificar el logro o dominio de tales contenidos por parte de los escolares (Bell, Costello y Kücherman, 1985; Gagné, 1991).

Unas de las aportaciones más relevantes en este sentido y que resultan claves para el desarrollo del análisis de contenido, fue la clasificación propuesta por Hiebert y Lefevre (1986). Basada en el marco del procesamiento de la información, esta clasificación cognitiva considera el conocimiento matemático organizado en dos grandes campos: el conceptual y el procedimental. A continuación resumimos la caracterización de cada uno de estos dos campos de conocimiento que realizó Rico (1996). Esta distinción, permite analizar con detalle la complejidad del conocimiento matemático y subraya la conexión permanente entre conceptos y procedimientos.

Conocimiento Conceptual

El conocimiento conceptual constituye la sustancia de nuestro conocimiento, es aquello con lo que pensamos. Según su mayor o menor concreción, en el campo conceptual es posible distinguir tres niveles o tipos de conocimientos.

En el nivel más sencillo están los *hechos*, que son unidades de información y sirven como registros de acontecimientos. Se distinguen cuatro tipos de hechos: términos, notaciones, convenios y resultados. A continuación están los *conceptos*, que se consideran como conjuntos de unidades de información (hechos) conectadas entre sí mediante relaciones; cada concepto se constituye tanto por los hechos como por las relaciones entre ellos. Entre los conceptos se pueden establecer, a su vez, una gran diversidad de relaciones que forman auténticas redes de conocimientos. Usualmente todo concepto admite una o varias representaciones de carácter gráfico o simbólico, que forman parte de un sistema.

Finalmente, en un tercer nivel, están las *estructuras conceptuales* que, básicamente, son sistemas interconectados de conceptos juntos con sus relaciones, en las que cada uno de los conceptos que las forman queda caracterizado por esas relaciones que mantiene con el resto. Las estructuras conceptuales constituyen la esencia del conocimiento matemático organizado, ya que hechos y destrezas, conceptos y razonamiento toman sentido y significado dentro de una estructura. Las estructuras matemáticas destacan las conexiones y relaciones mutuas de familias de conceptos y los sistemas de representación que comparten; organizan y constituyen ideas de orden superior y establecen nuevas formas de relación o algún orden entre conceptos no inclusivos.

Conocimiento Procedimental

Los procedimientos engloban todos los procesos y modos de actuación o ejecución de tareas matemáticas. El conocimiento procedimental se manifiesta en la realización ordenada de tareas. Rasgo clave de este tipo de conocimientos es que su aprendizaje se lleva a cabo mediante secuencias de actuaciones, que pueden sistematizarse. De manera análoga al campo conceptual, es posible distinguir tres niveles diferentes de concreción en el campo de los procedimientos.

Las *destrezas* suponen el dominio de los hechos y de los procedimientos usuales que se pueden desarrollar de acuerdo con rutinas secuenciadas. Por lo general, las destrezas se ejecutan procesando hechos y se llevan a cabo por ejecución de una secuencia de reglas y manipulación de símbolos o transformaciones gráficas. Los *razonamientos* suponen un conocimiento de los conceptos y de su extensión, lo cual permite su procesamiento por medio de secuencias razonadas, basadas en relaciones de conexión, inferencia o implicación. Las capacidades de expresión y comunicación de los alumnos se consideran parte de su capacidad de razonamiento.

Finalmente, las *estrategias* son aquellos procedimientos o reglas de acción que permiten obtener una conclusión o responder a una cuestión haciendo uso de las relaciones, conceptos y diversidad de sistemas de representación que se dan en una determinada estructura conceptual. En el entramado de relaciones que constituyen una estructura conceptual hay multitud de vías para abordar y dar respuesta a determinadas cuestiones no triviales, que toman sentido cuando se enuncian en términos de los conceptos que forman parte de esa estructura, para las cuales no hay formato estándar que las convierta en rutinas. Las estrategias guían la elección de qué técnicas emplear o de los conocimientos, razonamientos y destrezas a los que debe recurrirse en cada etapa de la resolución de un problema y suelen procesarse entre diversas estructuras conceptuales.

La relación entre el conocimiento conceptual y procedimental puede representarse gráficamente, tal y como muestra la Figura 2.

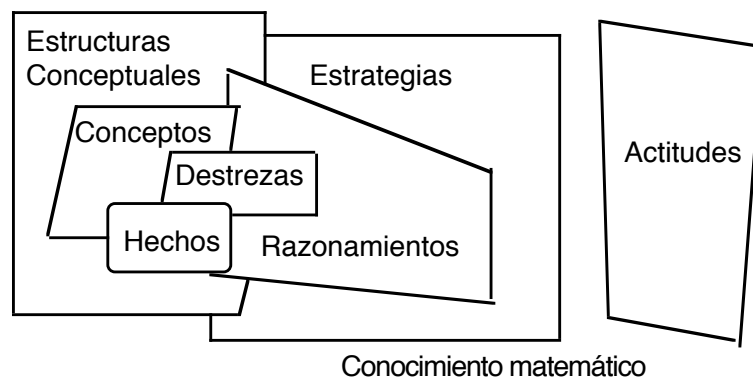


Figura 2. Clasificación cognitiva del conocimiento matemático (Rico, 1997b, p. 32)

3.3 Estructura del Análisis de Contenido

El análisis de contenido es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados del contenido matemático de un tema concreto, es decir, de los conceptos y procedimientos principales que lo delimitan. Este esquema de análisis del significado de las nociones que conforman un tema de las matemáticas escolares, proviene del planteado por Gómez (2007, p. 27), que organiza ese estudio del significado en torno a tres organizadores del currículo:

- Los *sistemas de representación*, donde consideramos las diferentes maneras en las que se puede representar el contenido y sus relaciones con otros

conceptos y procedimientos.

- La estructura conceptual, que considera las relaciones de los conceptos y procedimientos implicados en el contenido estudiado, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que forman parte, como a la que configuran tales conceptos y procedimientos.
- La fenomenología, la cual considera los fenómenos (contextos, situaciones y problemas) que pueden dar sentido al contenido considerado.

Estos tres organizadores del currículo son los que organizan el análisis de contenido y este esquema es el que hemos empleado en nuestra investigación²⁶.

A continuación describiremos con más detalle cada uno de esos tres organizadores y ejemplificaremos su uso en el análisis del contenido del sistema de los números naturales (Gómez 2007; Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). Comenzaremos con una revisión del tema en los documentos curriculares, lo cual permitirá organizar los principales conceptos y procedimientos en focos de contenido, como paso previo al estudio de la estructura conceptual.

3.4 Focos de Contenido en el Sistema de los Números Naturales

En el currículo actual, el tema de los números naturales se desarrolla en Educación primaria y se distribuye a lo largo de sus diferentes ciclos. La llamada *alfabetización numérica* de los escolares está estrechamente vinculada con una visión del aprendizaje que promueve utilizar las matemáticas *en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a, p. 31555).

El logro de la alfabetización numérica se convierte en una meta primordial:

En la Educación primaria se busca alcanzar una eficaz alfabetización numérica, entendida como la capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones en las que intervengan los números y sus relaciones, permitiendo obtener información efectiva, directamente o a través de la comparación, la estimación y el cálculo mental o escrito. Es importante resaltar que para lograr una verdadera alfabetización numérica no basta con dominar los algoritmos de cálculo escrito, se precisa también, y principalmente, actuar con confianza ante los números y la cantidades, utilizarlos siempre que sea pertinente e identificar las relaciones básicas que se dan entre ellos (p. 31555).

Pero el interés por la alfabetización numérica se extiende a todo el periodo de la educación obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

El desarrollo del sentido numérico iniciado en Educación primaria continúa en Educación secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre

²⁶ Otro organizador relacionado con el contenido es la Historia de las Matemáticas, ya que el desarrollo histórico de un tema es útil para determinar el origen de algunas nociones, comparar diferentes sistemas de representación empleados o localizar problemas clásicos. Furinghetti (2007) enfatiza el uso de la Historia en los programas de formación de profesores por los distintos significados de las matemáticas que éstos pueden descubrir y analizar.

distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes. Lo importante en estos cursos no son sólo las destrezas de cálculo ni los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados y posibles errores (p. 31790).

En los documentos curriculares aparecen los contenidos organizados por ciclos, si bien esa información es lo suficientemente amplia y genérica como para admitir diversidad de interpretaciones. De hecho, distintos libros de texto y otras propuestas didácticas muestran diferentes aproximaciones que, por razones diversas, se suelen aceptar como modelos de propuestas curriculares. Conviene pues, focalizar prioridades, seleccionar y organizar conceptos y procedimientos, y encontrar relaciones y complementariedad entre ellos. Un paso inicial es destacar ciertas ideas centrales a partir de las cuales organizar esos conceptos y procedimientos.

Cuando se quieren organizar los contenidos de un tema a partir de un número reducido de ideas, se habla de *focos de contenido*. Los focos de contenido consisten en agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones, que adquieren importancia especial ya que expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos.

Una revisión de los contenidos recogidos en los documentos curriculares permite ubicar y organizar esos focos; esa información puede complementarse con otros documentos que abordan el análisis de las matemáticas escolares. En el caso del sistema de los números naturales, estas revisiones permiten delimitar cinco focos²⁷ que son: *nociones sobre significados y usos de los naturales, sistema decimal de numeración, relación de orden, suma de naturales, y producto de naturales* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a, pp. 31557- 31663; Castro, Rico y Castro, 1988 y Gómez, 1993).

Cada uno de estos focos incluye una diversidad de conceptos y procedimientos. Los distintos focos muestran una clasificación que destaca las ideas principales y expresa unas prioridades para el tema de los números naturales, como se muestra en la Tabla 4.

La elección de conceptos prioritarios permite organizar los contenidos fundamentales del tema, pero esos listados no muestran conexiones entre diferentes focos, ni tampoco las relaciones internas en cada uno de los focos de contenido.

²⁷ En realidad surgen seis focos, añadiendo el de divisibilidad a los cinco que recoge la Tabla 4, pero en el ejemplo no lo consideramos por constituir en sí mismo, un tema con entidad y complejidad suficiente para analizarse por separado. De hecho, el tema de divisibilidad es de los primeros del bloque de contenido *Números* en el currículo de Educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31792).

Tabla 4

Principales conceptos y procedimientos del sistema de los números naturales según focos de contenido

Significados y usos	Sistema Decimal de Numeración	Suma de naturales	Orden entre naturales	Producto de naturales
Secuencia/ Contar	Símbolos Cero	Símbolos de suma y resta	Siguiente y anterior	Símbolos del producto y la división
Ordinal/ Ordenar	Base: principio de agrupamiento	Noción de suma y resta	Secuencia numérica	Términos del producto y división
Cardinal/ Cuantificar	Unidades de orden superior	Composiciones aditivas de un número	Comparar naturales	Notaciones
Medida/Medir	Escritura y lectura de números	Tabla de sumar	Relación de orden	Tabla de multiplicar
Signo/Codificar	Notación polinómica	Algoritmos de suma y resta	Estructura ordinal de N	Algoritmos
Símbolos/ Estructurar	Tablas numéricas	Suma con la calculadora	Orden de magnitud de un número	Productos y divisiones con la calculadora
Números/ Operar	Algoritmos de suma y resta	Propiedades de la suma	Orden de aproximación en una estimación	Factorización
Recta/ Visualizar	Algoritmos de producto y división	Estructura (N; +)		Estructura (N; x)
Nociones y conceptos de número natural		Estimación de sumas y restas		Estimación de productos y divisiones
Números pequeños, medianos y grandes ²⁸				Estructura (N; x; +)

La organización alrededor de conceptos básicos admite una primera reflexión en modo de mapa conceptual, específico a cada uno de los focos. Con esta representación, se establecen nexos entre el conocimiento conceptual y procedimental de un mismo núcleo de conceptos básicos. La Figura 3 muestra un ejemplo de mapa conceptual relativo al foco *suma de números naturales* del tema que nos ocupa:

²⁸ Esta clasificación escolar de los números naturales depende de la complejidad del patrón del cual proceden. Se distinguen los números *pequeños* (números de uno o dos dígitos, números de la vida cotidiana); números *medianos* (números que se expresan mediante la totalidad de sus cifras, hasta un orden de magnitud del billón, números usuales de las magnitudes cotidianas) y números *grandes* (que son aquellos números que se expresan mediante notación científica, de un orden de magnitud elevado y que corresponden a magnitudes de disciplinas científicas) (Rucker, 1988; pp. 72-73).

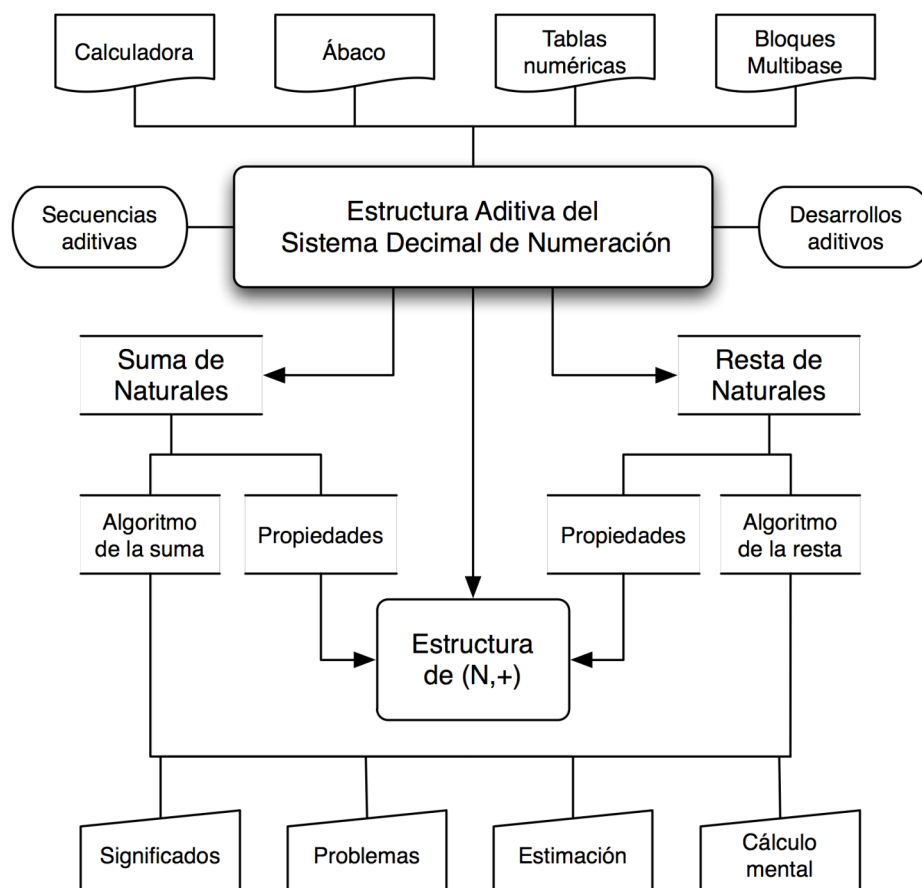


Figura 3. Mapa conceptual de la estructura aditiva en el sistema decimal de numeración

Por cada uno de los focos prioritarios localizados puede y debe establecerse un sistema de relaciones que articule sus conceptos y procedimientos, junto con las nociones principales del foco. Con este ejercicio de síntesis y estructuración se logra elaborar una red de conceptos y procedimientos básicos, una estructura, que se concreta en el mapa conceptual correspondiente, donde conectan las nociones centrales señaladas.

3.5 Sistemas de Representación

Organizar en focos prioritarios los contenidos de un bloque o de un tema del currículo de matemáticas es un primer paso para interpretar su extensión y complejidad. A la necesaria reflexión sobre los focos de contenido y su estructura, añadimos el estudio y revisión de las diferentes formas de representarlos. Podemos así trabajar con ellos y expresar y desarrollar algunas de sus propiedades y relaciones.

La tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos y procedimientos matemáticos son fundamentales para su comprensión, ha hecho que los sistemas de representación ocupen un lugar preponderante en la investigación en educación matemática en los últimos años. Como señala Gómez (2007, p. 42), existen un gran número de publicaciones en revistas de investigación sobre este tema, y algunas reuniones científicas han considerado

los sistemas de representación como núcleo central de debate²⁹ (Lupiáñez y Moreno, 2001).

Por otro lado, documentos curriculares como los *Principios y estándares de la educación matemática* (NCTM, 2003) o proyectos de evaluación como PISA 2003 (OCDE, 2005a), consideran que la competencia de representar debe formar parte de las finalidades formativas en matemáticas dentro de la Educación obligatoria.

Siguiendo a Castro y Castro (1997), por *representaciones* entenderemos, en el ámbito de las matemáticas, notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina así como sus características y propiedades más relevantes. Estas representaciones pueden clasificarse en *registros* o *sistemas de representación*, según sus características (Duval, 1995). Por ejemplo, si consideramos el concepto de número natural, asociado a él existen registros simbólicos cuando usamos la grafía habitual para notarlos, gráficos si los representamos en la recta real o de tipo manipulativo si los representamos en un ábaco, entre otros. El trabajo en matemáticas se lleva a cabo mediante representaciones de las nociones que se emplean y, al mismo tiempo, diferentes sistemas de representación ponen de manifiesto determinadas propiedades y cualidades de esas nociones (Damerow, 1996).

Dentro de cada sistema de representación se pueden llevar a cabo *procesamientos*, es decir, transformaciones de las representaciones en el mismo registro donde fueron creadas (Duval, 1995). Si consideramos el número natural 15, lo podemos expresar como suma de dos ($7+8$), tres ($4+5+6$) o cinco ($1+2+3+4+5$) números naturales consecutivos, pero es imposible hacerlo con cuatro. También lo podemos expresar como diferencia de cuadrados (4^2-1^2) y, por lo tanto, también como producto de una suma por una diferencia $[(4-1)(4+1)]$. Estas diferentes representaciones siempre están en el sistema simbólico, por lo que constituyen ejemplos de procesamientos.

Por otro lado, entre diferentes sistemas de representación se pueden realizar *conversiones*, que son transformaciones de una representación hecha dentro de un sistema, en otra representación dentro de otro sistema (Duval, 1995).

En el caso de los números naturales, la Figura 4 muestra cómo puede explorarse gráficamente la igualdad numérica $n^2 = 1 + 3 + 5 + \dots + [2n-1]$.

Profundizando en el tema del sistema de los números naturales, desde su estructura conceptual y desde una revisión histórica de su desarrollo (Ifrah, 1997), hay que destacar cuatro sistemas de representación (que relacionamos en la Figura 5).

²⁹ Dos ejemplos fueron el 21th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Hitt y Santos, 1999), y el Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (Contreras, Carrillo, Climent y Sierra, 2000), que giraron en torno a la visualización y representación en educación matemática.

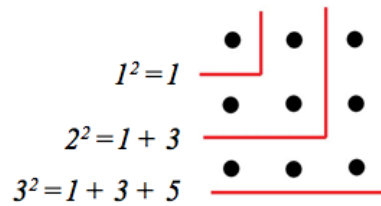


Figura 4. Conversiones entre diferentes sistemas de representación en el caso de los números naturales (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008, p. 15)

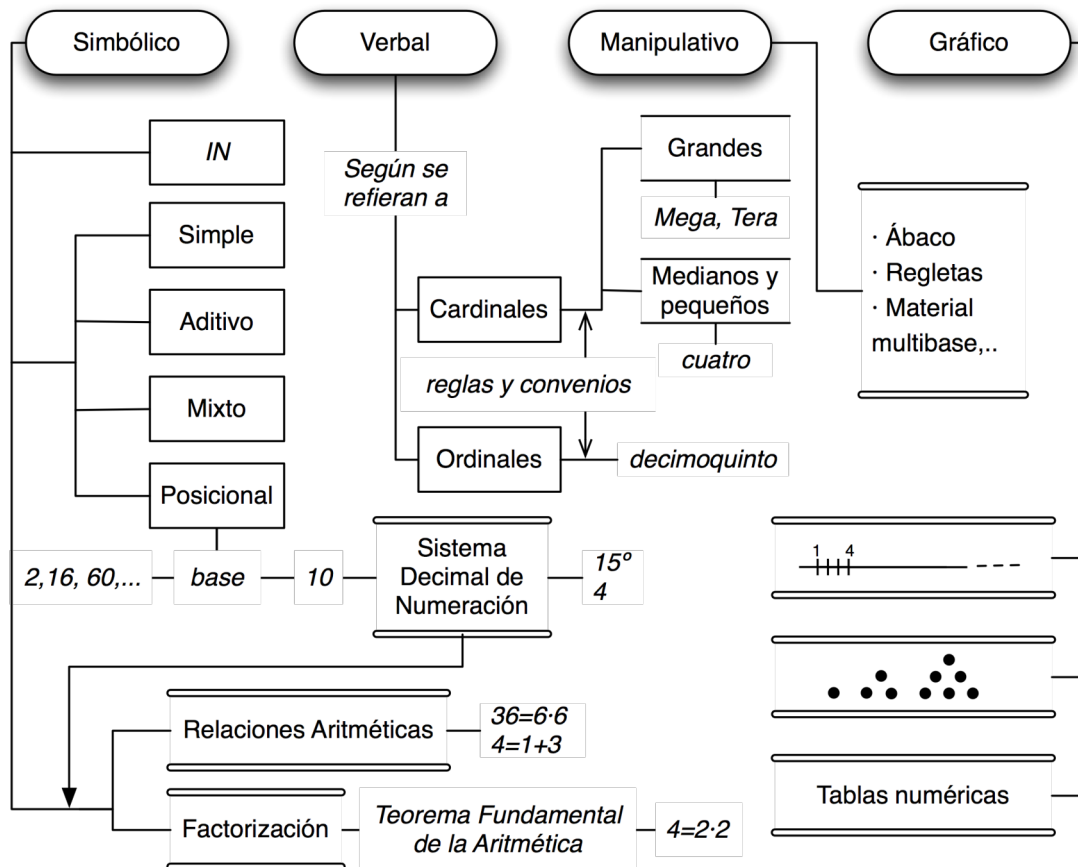


Figura 5. Sistemas de representación de los números naturales

Los cuatro sistemas de representación considerados son:

- *Simbólico*, referido a los sistemas estructurados de grafismos que pueden usarse para representar números; tienen sus propias reglas internas, como la numeración egipcia, de estructura aditiva, la romana, mixta entre aditiva y multiplicativa, o la que brinda el sistema decimal de numeración, que opera en base diez.
- *Verbal*, relativa al modo en el que expresamos verbalmente los números, sus relaciones y prioridades; existe terminología específica para distinguir el contexto cardinal del ordinal, o prefijos que denotan el orden de magnitud de las cifras.
- *Gráfico*, que aparece al representar números en la recta numérica, al desarrollar patrones y configuraciones puntuales (Castro, 1995), o al

explorar relaciones aritméticas en tablas numéricas, como la Tabla 100 (Ruiz, 2000).

- Mediante *materiales manipulativos*, ya que el ábaco, las regletas o los bloques multibase, permiten representar y operar con números naturales.

Mediante un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación en una misma estructura matemática y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio de dicha estructura. En el caso de los números naturales, el manejo de los diferentes modos de representarlos contribuye de manera importante al desarrollo del sentido o pensamiento numérico (Llinares, 2001).

3.6 Análisis Fenomenológico

El último aspecto que estudiamos para organizar y analizar los contenidos de un tema escolar de matemáticas, tiene en cuenta el planteamiento funcional de las matemáticas escolares. En este enfoque, el significado de conceptos y procedimientos matemáticos se muestra mediante su conexión con el mundo real, con las situaciones en las que se localizan, con los contextos en los que tiene sentido ponerlos en juego y con los fenómenos de los que surgen o en cuyo tratamiento se implican tales conceptos.

Situaciones

El análisis fenomenológico de una estructura matemática comienza por delimitar aquellas situaciones donde tienen uso los conceptos matemáticos involucrados, aquéllas en las que éstos muestran su funcionalidad. Las situaciones destacan el medio en el cual una determinada estructura matemática tiene uso regular. Cualquier tarea matemática a la que se enfrenta un individuo viene asociada a una situación, considerando ésta como aquella parte del mundo real en la cual se sitúa la tarea, para el propio individuo. Una situación viene dada por una referencia al medio (natural, cultural, científico y social) en el cual se sitúan problemas y cuestiones matemáticas que pueden encontrar los ciudadanos, que se proponen a los estudiantes y que centran su trabajo. Las situaciones que consideramos son las usadas en el estudio PISA³⁰ como criterio clasificador de tareas matemáticas: personales, educativas o laborales, públicas y científicas (OCDE, 2005a; pp. 41-42).

Las *situaciones personales* están relacionadas con las actividades diarias de los escolares. Se refieren a la forma en que un problema matemático afecta inmediatamente al individuo y al modo en que el individuo percibe el contexto del problema. Las *situaciones educativas* o *laborales* las encuentra el escolar en el centro educativo o en un entorno de trabajo. Se refieren al modo en que desde esos espacios surgen tareas para el escolar que le imponen una actividad matemática para encontrar su respuesta.

³⁰ Describiremos otros aspectos del proyecto PISA que son importantes en nuestra investigación, más adelante en este capítulo y en el capítulo 3.

Las *situaciones públicas* se refieren a la comunidad local u otra más amplia, con la cual los estudiantes observen un aspecto determinado de su entorno. Requieren que los escolares activen su comprensión, conocimiento y habilidades matemáticas para evaluar los aspectos de una situación externa con repercusiones importantes en la vida pública. Finalmente, las *situaciones científicas* son más abstractas y pueden implicar la comprensión de un proceso tecnológico, una interpretación teórica o un problema específicamente matemático.

En el caso de los números naturales, el uso cotidiano básico más extendido es la práctica de la secuencia numérica. También el conocimiento de los números pequeños y de sus relaciones aditivas es obligado en la mayor parte de las situaciones personales.

Por otro lado, el mundo del trabajo incluye el conocimiento de horarios, retribuciones, manejo de cuentas corrientes, pagos y adquisiciones. La administración del tiempo, del dinero y la gestión de cantidades de determinados materiales forma parte de la práctica usual de la población adulta, y el campo de aplicaciones y usos de los números es también muy frecuente en la escuela actual. El abanico de problemas relacionados con situaciones educativas o laborales es, por lo tanto, amplio.

Los estudiantes como ciudadanos deben estar capacitados para interpretar, analizar y evaluar información numérica que se presente en los medios de comunicación, que forme parte de las decisiones que afectan a la vida política y social de una comunidad. También deben dominar las operaciones básicas para seguir argumentos cuantitativos, tener sentido del número, capacidad para hacer estimaciones y dominio de distintos códigos que se emplean en la presentación de datos numéricos. Estos aspectos, constituyen ejemplos de situaciones públicas.

Por último, las disciplinas científicas o técnicas hacen cierto uso técnico específico, en ocasiones muy elaborado, de los conceptos y estructuras numéricas. El dominio de los distintos conjuntos numéricos forma parte del marco conceptual donde se sitúan las aplicaciones y usos científicos numéricos más avanzados; de ahí la gran cantidad de situaciones científicas en las que se enmarcan problemas numéricos (Castro, Rico y Castro, 1988, pp. 30-42).

Contextos

Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento (Rico y Lupiáñez, 2008a). Los contextos de una determinada estructura se reconocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta *¿en qué se usan estas nociones?* El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones. Son varios los contextos numéricos para los números naturales, ya que éstos satisfacen distintas funciones y atienden a diferentes necesidades:

- *Contar*, o lo que es lo mismo, asignar los términos de la secuencia numérica a los objetos de una colección. Este contexto responde a la cuestión ¿cuál es el número?
- *Expresar cantidad*, utilizamos este sentido cuando queremos dar respuesta a la cuestión ¿cuántos hay? ante una colección discreta de objetos distintos.
- *Medir*, es decir, conocer la cantidad de unidades de alguna magnitud continua. En este caso el contexto viene dado porque proporciona respuesta a la pregunta ¿cuánto mide?
- *Ordenar*, conocer la posición relativa de un elemento en un conjunto discreto y ordenado; proporciona respuesta a la pregunta ¿qué lugar ocupa?
- *Operar*, es decir, hallar un resultado, que se concreta en acciones como agregar, separar, reiterar o repartir; da respuesta a la cuestión ¿cuál es el resultado?
- *Simbolizar*, cuando se emplean los números para distinguir y denominar clases de fenómenos o elementos, como si fueran etiquetas. La pregunta es ¿cuál es el código?

Los diferentes contextos numéricos se basan en las cuestiones planteadas y en los modos de uso, en las funciones de las estructuras numéricas (Castro, Rico y Castro, 1988, pp. 23-30).

Fenómenos y Subestructuras

Hemos visto que se puede reconocer el uso de un determinado tema en una variedad de situaciones. También hemos visto que conceptos y estructuras desempeñan diferentes funciones según el marco estructural –el contexto- en que los situemos y que estos contextos son reconocibles, básicamente, por la cuestión o cuestiones a las que se proponen dar respuesta. Estas cuestiones permiten marcar los principales modalidades de uso y señalan, junto con las situaciones, las principales familias de fenómenos que están en el origen de la estructura conceptual que se considera (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Pero caracterizar la relación de una estructura matemática con los fenómenos sólo por el medio en que se localizan y por los modos en que los trata, es un resultado limitado. Familias de fenómenos y subestructuras se vinculan porque éstas modelizan a aquéllas y, así, expresan su sentido. Sostenemos que es posible establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras, en las que cada fenómeno conecta con una subestructura que lo expresa matemáticamente mediante su modelización, con la cual contribuye a plantear y resolver cuestiones y problemas vinculados a tales fenómenos o familias de fenómenos. Se pueden establecer parejas (subestructura, fenómeno), en las que la subestructura ofrece un modelo para el fenómeno (Gómez, 2007).

Nuestra técnica para el análisis fenomenológico concluye cuando vinculamos las familias de fenómenos con las subestructuras detectadas. Consideremos este

tercer paso para el sistema de los números naturales. Este tema tiene un amplio campo de subestructuras, que ofrecen distintos modelos para las acciones reales sobre objetos y cantidades. Entre las diferentes subestructuras destacan las establecidas inicialmente en algunos de los focos de contenido:

1. El *sistema decimal de numeración*, como subestructura orientada a representar verbal y simbólicamente cantidades y medidas mediante los términos numéricos; la simbolizaremos de aquí en adelante por S. D. N.
2. La subestructura de *orden* de los números naturales, basada en la relación “siguiente de” o “sucesor de”, con sus propiedades; la simbolizamos por (\mathbb{N}, \leq) .
3. La subestructura *aditiva* de los números naturales, basada en las relaciones aditivas (suma y resta) y en sus propiedades, que simbolizamos por $(\mathbb{N}, +)$.
4. La subestructura *multiplicativa* de los números naturales, subestructura basada en las relaciones multiplicativas (producto y división entera) y en sus propiedades; la simbolizamos por (\mathbb{N}, \times) .

Resumimos el ejemplo de Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2008) con las subestructuras tercera y cuarta el tercer paso del análisis fenomenológico, ya que las operaciones numéricas dotan al sistema de los números naturales de su gran poder de modelización y contribuyen a su uso de una manera dinámica (Freudenthal, 1983).

Los fenómenos que se relacionan con la subestructura aditiva son aquellos que se basan en la consideración de la unión de colecciones, en las acciones de juntar o añadir/ separar o segregar, en las comparaciones aditivas basadas en las relaciones cuánto más que/ cuánto menos que y otras variantes similares. El listado de fenómenos aditivos puede ampliarse indefinidamente si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables. Abstrayendo el resultado, tenemos que la subestructura $(\mathbb{N}, +)$ se vincula con los contextos cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones de las subestructuras con los fenómenos subyacentes; en la literatura especializada se presentan como *problemas aritméticos aditivos* (Castro, 2001b):

- Problemas aditivos de *combinación*,
- problemas aditivos de *cambio*, y
- problemas aditivos de *comparación*.

Los fenómenos relacionados con la subestructura multiplicativa son aquellos que se basan en la consideración de la reiteración de colecciones; en las acciones de repetir y repartir una cantidad; formar una cantidad varias veces mayor que otra o hacer un número dado de partes de una cantidad; en las comparaciones multiplicativas basadas en las relaciones “tantas veces”, “más que”, “tantas veces menos que” y en los posibles emparejamientos de los elementos de dos colecciones y otras variantes similares.

El listado de fenómenos multiplicativos puede ampliarse si se contemplan otras condiciones dadas por la situación concreta que se considere y otras variables.

Según sus modos de uso, tenemos que la subestructura (N, x) se vincula con los contextos cardinal, de medida y operacional, fundamentalmente, dando lugar a tres tipos de modelos o relaciones entre las subestructuras y los fenómenos, que en la literatura especializada (Castro, 2001b) se presentan como *problemas aritméticos multiplicativos*:

- Problemas multiplicativos de *producto cartesiano*,
- problemas multiplicativos de *proporcionalidad simple*, y
- problemas multiplicativos de *comparación*.

3.7 Estructura Conceptual

Toda la información obtenida en el análisis de contenido, muestra la riqueza de relaciones entre los diferentes contenidos, el modo en el que se representan y su funcionalidad. Es posible sintetizar toda esa información en un mapa conceptual y, al mismo tiempo, mostrar las prioridades y nociones básicas de un tema de matemáticas. A continuación mostramos un ejemplo de mapa conceptual en el caso del sistema de los números naturales.

La Figura 6 representa un mapa en el que se introduce el sistema decimal de numeración y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos de los números naturales, así como con los sistemas usuales de representación numérica.

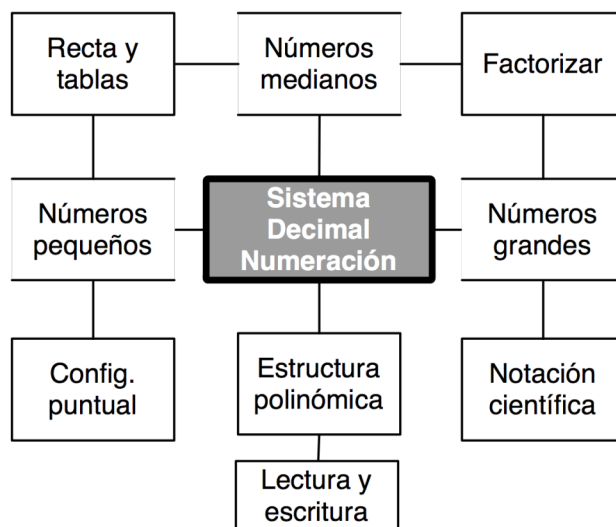


Figura 6. Inicio de la estructura conceptual del sistema de los números naturales

El mapa conceptual de la Figura 6 parte de la noción central de sistema decimal de numeración, señala los tres tipos de números ya mencionados antes e indica y relaciona los sistemas de representación que presentamos anteriormente.

Es obvio que todos los números se pueden representar en el sistema decimal de numeración, pero existen además otras relaciones importantes. Los números pequeños suelen representarse en tablas, en la recta o mediante configuraciones puntuales. Para los números medianos es útil la escritura en forma factorizada, y además los números grandes requieren también la notación científica.

Cuando se incorporan nuevos conceptos y procedimientos ligados a los restantes focos de contenido del Sistema de los Números Naturales, además del relativo a divisibilidad, junto a nociones referentes a estrategias de resolución de problemas y otros usos y significados del número, con sus correspondientes conexiones, tenemos un mapa que expresa con mayor complejidad la estructura conceptual del tema *sistema de los números naturales* (Figura 7).

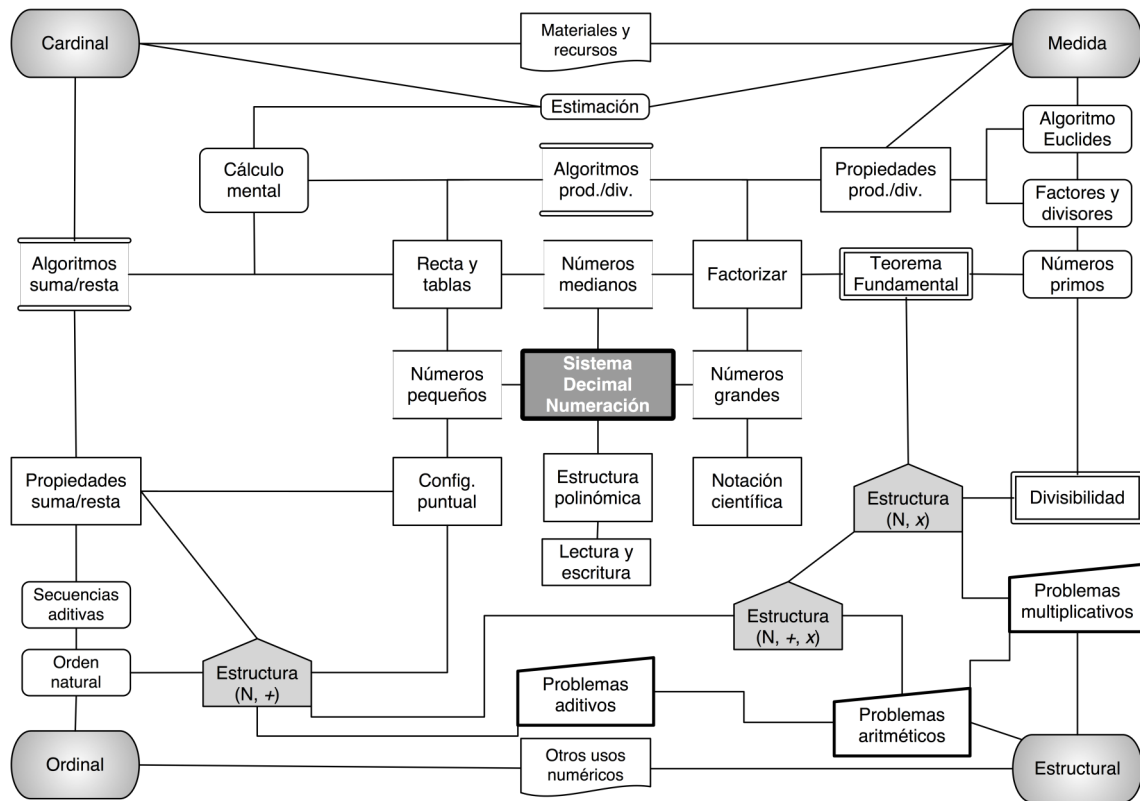


Figura 7. Estructura conceptual del sistema de los números naturales

Los cuatro contextos de usos del número natural (primer foco) aparecen en los vértices del mapa que se muestra en la Figura 7, en donde también se introducen los diferentes tipos de problemas aritméticos.

Dos actividades importantes relacionadas con el pensamiento numérico, como son la estimación y el cálculo mental (Segovia, 1997), también están recogidas, así como los materiales y recursos que pueden emplearse para representar y trabajar con algunos conceptos y procedimientos numéricos.

3.8 Análisis de Contenido y Conocimiento del Profesor

La selección de las nociones centrales de un tema de matemáticas, y la organización del resto de sus conceptos y procedimientos en focos de contenido, permite al profesor profundizar en la complejidad de los contenidos de las matemáticas escolares. Ese procedimiento suministra una rica información de cara a la secuenciación de contenidos.

Los sistemas de representación constituyen elementos centrales para un tema de matemáticas. Mediante un trabajo explícito sobre la diversidad de sistemas de representación y sobre las conexiones entre ellos, se profundiza en el dominio del

contenido en estudio. A modo de ejemplo, la búsqueda de nuevas o diversas expresiones de una misma propiedad contribuye a clarificar y a profundizar el entramado de conceptos en que se sustenta.

Adquirir destrezas y desarrollar capacidades para seleccionar relaciones entre distintos sistemas de representación de un mismo concepto, con las cuales traducir sus propiedades y regularidades de un sistema a otro, proporciona una técnica para relacionar distintos conceptos, interpretar propiedades y desarrollar argumentos de prueba y demostración. Estas capacidades, derivadas del estudio de los sistemas de representación enriquecen el conocimiento profesional de los profesores, en especial su competencia de planificación³¹.

En la realización del análisis fenomenológico se desarrollan capacidades tales como tipificar diferentes medios en los que se usan los conocimientos matemáticos; conectar las matemáticas con las ciencias experimentales, con el arte, la economía y otras ramas del conocimiento; atender distintos modos de uso de los conceptos, es decir, precisar las funciones que se llevan a cabo mediante la estructura contemplada, enunciar las cuestiones y familias de problemas a las que dan respuesta; finalmente, establecer relaciones entre fenómenos y subestructuras en tanto las segundas modelizan a los primeros.

El resultado más importante que se obtiene de la organización de la estructura conceptual de un tema en un mapa, es la riqueza del análisis de relaciones entre conceptos y procedimientos, representaciones y aspectos fenomenológicos que el profesor puede realizar. Esto contribuye a un mejor conocimiento profesional del profesor de matemáticas, que consiste en el dominio de la estructura matemática que es objeto de estudio a los efectos de su consideración como objeto de enseñanza y aprendizaje.

Todas estas capacidades contribuyen a la competencia de planificación del profesor en formación, ya que son otros datos que conviene considerar en el momento en que el profesor tenga que establecer sus expectativas de aprendizaje para los alumnos, seleccionar y organizar los contenidos y diseñar secuencias metodológicas, ejemplos, motivaciones y materiales para su transmisión. Se enriquece así el conocimiento didáctico que el profesor tiene acerca de los contenidos de las matemáticas escolares.

En la investigación llevada a cabo por Gómez (2007) se analiza con detalle el desarrollo de la competencia de planificación de varios grupos de futuros profesores en relación al análisis del contenido matemático. En nuestra investigación nos centraremos también en esa competencia de planificación, pero en relación con el análisis cognitivo, que describimos y caracterizamos a continuación.

³¹ Caracterizamos esta competencia del profesor en el capítulo 4.

4. EL ANÁLISIS COGNITIVO

En esta investigación ponemos especial énfasis en la dimensión cognitiva del currículo que hemos considerado en el epígrafe 1.1 de este capítulo. Las componentes que allí hemos considerado según los diferentes niveles, son: fines formativos y de desarrollo, teorías de aprendizaje, el alumno, los objetivos y el propio análisis cognitivo. Esos descriptores son fundamentales en nuestra investigación y subrayamos las estrechas y consolidadas relaciones que existen entre ellos.

También en el epígrafe 1.2 hemos puesto de manifiesto cómo la noción de competencia enfatiza el papel funcional de las matemáticas. Dado que las competencias establecen expectativas de aprendizaje para los escolares (en términos de lo que deberían aprender los escolares en el aula de matemáticas), las nuevas orientaciones curriculares afectan fundamentalmente a la dimensión cognitiva del currículo. Las competencias se vinculan con la formación, el aprendizaje y el desarrollo de los escolares y ahí reside su relación con la dimensión cognitiva del currículo.

En este epígrafe hacemos una presentación sobre nuestra posición en relación al aprendizaje de las matemáticas y contextualizamos así el análisis cognitivo; también introducimos la finalidad y la estructura de ese análisis. La descripción detallada del análisis cognitivo la realizamos en el capítulo 3, en donde entramos en definir, caracterizar y relacionar los tres organizadores del currículo que lo estructuran. También ejemplificamos su puesta en práctica para continuar el análisis del tema de los números naturales que hemos iniciado en este capítulo.

4.1 Aprendizaje de las Matemáticas Escolares

Al enmarcarse en la dimensión cognitiva del currículo, el análisis cognitivo pone su foco de atención en el aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares. Algunas de las preguntas que surgen en ese contexto son ¿qué es aprender matemáticas? ¿cómo se produce el aprendizaje de las matemáticas? ¿cómo se facilita el aprendizaje? ¿qué dificulta el aprendizaje? ¿cómo se reconoce el aprendizaje? Estas cuestiones tienen gran importancia para la educación matemática ya que, por ejemplo, en virtud de las respuestas que se asuman, la actividad del profesor puede tomar orientaciones muy diferentes en su práctica docente.

Consideramos que el aprendizaje de las matemáticas se ve influenciado por diferentes aspectos estrechamente vinculados con la propia naturaleza de la disciplina. Uno de los aspectos que condicionan el aprendizaje matemático escolar tiene que ver con los diferentes tipos de conocimientos que se consideran en estos niveles. Onrubia, Rochera y Barberá (2001) afirman que la coordinación de esos conocimientos y de los enfoques que los vehiculan

resulta compleja y es un obstáculo central en el aprendizaje de las matemáticas. (...) El resultado es que muchos alumnos aplican procedimientos matemáticos, pero no saben por qué funcionan; dominan las habilidades de cálculo necesarias

para resolver problemas escolares estándar, pero carecen de la comprensión para aplicar su conocimiento a situaciones nuevas; son capaces de manipular símbolos, pero no entienden el significado de los mismos ni de lo que están haciendo con ellos (pp. 489-490).

Estos autores sostienen que, para romper con esta tradición, la actual investigación psicoeducativa postula que es fundamental que las capacidades que desarrollen los escolares incluyan el conocimiento conceptual y el procedimental³², así como el condicional y algunos aspectos afectivos, relacionales y de motivación. El conocimiento condicional implica una aplicación intencional y consciente tanto del conceptual como del procedimental, según las condiciones específicas en la que se contextualice una acción (p. 494).

En relación al proceso de aprendizaje de las matemáticas, éstos y muchos otros autores en la actualidad, afirman que existe un alto grado de consenso en relación a que ese proceso es una actividad socialmente mediada. Esto significa que

los alumnos no aprenden recibiendo y acumulando pasivamente información del entorno, sino que lo hacen a través de un proceso activo de elaboración de significados y de atribución de sentidos; un proceso que se lleva a cabo mediante la interacción, la negociación y la comunicación con otras personas en contextos particulares culturalmente definidos, y en el que determinados artefactos e instrumentos culturales juegan también un papel decisivo (p. 495).

Esta caracterización social del aprendizaje tiene varias implicaciones. En primer lugar, resalta la importancia de la comunicación y la argumentación en el aula de matemáticas, ya que éstos constituyen el principal vehículo para elaborar y compartir significados acerca de las nociones matemáticas. La promoción de los debates, la participación de los alumnos en ellos y el énfasis en el desarrollo de su competencia comunicativa y argumentativa han de ser prioridades para el profesor.

En segundo lugar, hay que destacar los conocimientos previos e informales de los escolares a partir de los cuales el profesor puede organizar su enseñanza. Como también señalan Onrubia, Rochera y Barberá algunas dificultades de aprendizaje tienen su origen en obviar este tipo de conocimiento informal (p. 496).

Finalmente, una tercera implicación de esta visión social del aprendizaje se relaciona con la visión funcional de las matemáticas escolares.

la mejor manera de aprender matemáticas en la enseñanza obligatoria es en el seno de un contexto relevante de aplicación y toma de decisiones específicas. En este sentido, la resolución de problemas, y no tanto el aprendizaje estructural y poco contextualizado de la matemática, es el entorno que enmarca y da sentido al uso de la matemática en el ámbito escolar (p. 496).

³² En el texto original los autores hablan de conocimiento *declarativo* y procedimental, si bien la caracterización que realizan de cada uno de ellos (pp. 490-494), es exactamente la que hemos descrito en este mismo capítulo al presentar la clasificación cognitiva del conocimiento matemático.

El aprendizaje escolar implica siempre un dominio de conocimientos y una construcción de múltiples significados. Implica una actividad cognitiva inseparable del medio cultural y tiene lugar entre las personas, de manera que, mediante las interacciones establecidas, los niños aprenden los instrumentos cognitivos y comunicativos de su cultura.

En una encuesta realizada a futuros profesores acerca de cómo interpretaban el aprendizaje al inicio de un programa formativo, encontramos que la mayor parte de ellos no valoraban especialmente esta visión social del aprendizaje, ya que consideraban que la ejercitación y la reiteración de procedimientos y algoritmos pueden guiar el aprendizaje de los escolares, en posturas más cercanas al conductismo (Lupiáñez y Gómez, 2003). Sin embargo, la experiencias de los últimos años nos ha puesto de manifiesto que, al final del programa, merced al propio trabajo en grupo, los futuros profesores valoran más el aspecto social y colaborativo del aprendizaje.

Para nosotros no tiene sentido

aislar al sujeto y al conocimiento en estado puro y aséptico. Los procesos de aprendizaje que nos interesan se producen en el Sistema Educativo, y, en este caso, la acción del sujeto está condicionada por el medio social (el entorno); también hay que contemplar al profesor (Rico, 1997a, p. 399).

El profesor interactúa con el escolar, trata de promover la formación integral de alumno y persigue la adquisición, integración y aplicación de los conocimientos y el desarrollo de sus competencias y la superación de sus dificultades a través de la enseñanza.

4.2 Finalidad y Estructura del Análisis Cognitivo

Como parte del análisis didáctico, el análisis cognitivo es un procedimiento que contribuye al proceso de planificación de las matemáticas escolares. Este procedimiento permite al profesor llevar a cabo una descripción y un análisis detallados de toda la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional.

Tal y como hemos visto anteriormente, con la realización del análisis de contenido de un tema de matemáticas, el profesor puede organizar toda la complejidad de nociones y relaciones que conforman ese tema. Pero de cara a planificar su actuación docente, el profesor no debe limitar su actividad a analizar el contenido matemático (Rico, 1997b, pp. 39-42).

Gómez (2007, pp. 56-76) reflexiona en torno al análisis cognitivo y lo caracteriza como un procedimiento mediante el que “el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción de su conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenten a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (p. 56).

El análisis cognitivo, desde un planteamiento constructivista (Coll, 2002), capacita a los profesores para que, a partir de la información obtenida en el análisis de contenido previo y del conocimiento sobre matemáticas escolares y

sobre su aprendizaje, describan, analicen y organicen las expectativas de aprendizaje que tienen para los escolares de un nivel educativo concreto sobre ese tema matemático. Estas expectativas de aprendizaje se pueden estructurar en varios niveles, tal y como describiremos más adelante, pero un aspecto común a todos ellos es que el logro de esas expectativas se hace visible mediante la actuación de los escolares ante las tareas que el profesor les demanda.

En el análisis cognitivo, los profesores también llevan a cabo un estudio de errores y dificultades, con el que analizan qué puede limitar el proceso de aprendizaje del tema que están planificando. Esas dificultades están asociadas a las expectativas que los escolares deben lograr y se hacen visibles en forma de errores cuándo éstos ponen en juego su conocimiento del tema para afrontar y resolver tareas.

Obviamente, un punto de partida fundamental lo constituye el aprendizaje del que parten los escolares. Gómez (2007) señala que varios autores como Ball, Lubienski y Mewborn (2001) y Krainer (2004) destacan la importancia del conocimiento previo de los escolares y, basándose en la reflexión de Robert y Hache (2000), indica que “son pocos los formadores y los profesores en formación que tienen en cuenta este aspecto” (Gómez, 2007, p. 56).

Resumiendo lo presentado hasta ahora, el análisis cognitivo se estructura en torno a lo que el profesor espera que aprendan los escolares, a lo que puede interferir en ese aprendizaje, y a lo que les permite a los escolares aprender y al profesor observar si se produce ese aprendizaje de manera efectiva. Estas tres herramientas delimitan los tres organizadores del currículo que estructuran y organizan el análisis cognitivo:

- las *expectativas de aprendizaje*, que delimitan y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según diferentes niveles;
- el análisis de *limitaciones de aprendizaje*, que se centran en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje; y
- las *oportunidades de aprendizaje* que el profesor brinda sus escolares.

Cada uno de estos organizadores aporta al profesor una herramienta de análisis importante relacionada con el desarrollo cognitivo de los escolares. Obviamente no son los únicos aspectos que podrían considerarse de cara a la planificación de las matemáticas escolares³³, pero como veremos más adelante, son aspectos centrales que tienen gran importancia en la investigación reciente en educación matemática y en la actividad del profesor.

³³ Por ejemplo, otro aspecto que en la actualidad está siendo objeto de investigación y que forma parte de la dimensión cognitiva del currículo son las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje*, que a partir de los trabajos de Simon (1995) y Simon y Tzur (2004), se caracterizan como una visión dinámica que coordina objetivos, tareas e hipótesis acerca del proceso y el progreso de aprendizaje de los escolares. Gómez (2007), Gómez y González (2009), Gómez, González y Lupiáñez (2007) y Gómez y Lupiáñez (2007) investigan su implementación en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria.

Dado que el análisis cognitivo es aquella parte del análisis didáctico en la que centramos nuestra investigación, dedicamos especialmente el capítulo 3 a la descripción de cada uno de estos tres organizadores. También ejemplificamos el procedimiento del análisis cognitivo al considerar el tema de los números naturales, dando continuidad a lo mostrado anteriormente sobre el análisis de contenido.

4.3 Análisis Cognitivo y Conocimiento del Profesor

El trabajo con profesores en formación inicial en torno a los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo, suministra una serie de herramientas que tienen especial incidencia en su aprendizaje profesional.

Al manejar diferentes niveles de expectativas de aprendizaje, el profesor dispone de criterios para interpretar las directrices sobre objetivos y competencias que se expresan en los documentos curriculares, y relacionarlas con lo que espera que aprendan unos escolares acerca de un tema de matemáticas concreto. La noción de expectativa de aprendizaje pone el énfasis en actuaciones de los escolares que son observables y que suministran prioridades para la evaluación posterior.

La caracterización de las limitaciones de aprendizaje en términos de errores y dificultades brinda al profesor una importante información acerca de en qué aspectos de las matemáticas que trabaja en el aula, pueden surgir situaciones que frenen o ralenticen el aprendizaje de los escolares.

Por otro lado, el profesor dispone de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar las tareas que habrán de resolver los escolares a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. Si la finalidad es que los escolares lleguen a desarrollar ciertos objetivos, ese logro ha de mostrarse en la ejecución de tareas que muestren de qué son, o no, capaces esos escolares.

Todos estos aspectos ponen de manifiesto que la estructura que se ha diseñado para el análisis cognitivo contribuye a que los profesores en formación adquieran herramientas útiles que les permitan planificar sus actuaciones profesionales de una manera fundamentada y sistemática.

Desde otro punto de vista, la estructura y organización del análisis cognitivo que hemos desarrollado, permite avanzar y mejorar el propio diseño del análisis didáctico, ya que pone de manifiesto los vínculos entre diferentes elementos que lo constituyen y refuerza su estructura cíclica.

5. EL ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

En la actualidad, el análisis de instrucción está siendo objeto de estudio y diseño (Marín, 2009), a partir de los trabajos de Rico (1997d), Marín (2005) y Gómez (2007), entre otros. El análisis de instrucción se centra, en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula, al empleo de materiales y recursos y a los criterios y métodos de evaluación.

Gómez (2007) enfatiza el papel de las tareas en esta fase del análisis didáctico, si bien señala que “la separación entre el análisis cognitivo y el análisis de instrucción es analítica: estos dos análisis dependen uno de otro” (p. 76). Efectivamente, la selección de unas expectativas de aprendizaje concretas marcan la orientación de las tareas que habrá de poner en juego el profesor, pero al mismo tiempo, el análisis de una tarea específica puede ampliar ese abanico de expectativas de aprendizaje. Como veremos de aquí en adelante, las tareas matemáticas son elementos centrales en ambos análisis.

Por esta razón, centramos nuestra presentación del análisis de instrucción poniendo especial énfasis en la noción y el papel de las tareas en matemáticas. En primer lugar, analizamos los términos *tarea* y *actividad* para distinguirlos y acotar un significado en el marco de nuestra investigación. A continuación, describimos la estructura del análisis de instrucción en torno a siete componentes que lo configuran y, por último, caracterizamos el procedimiento de llevarlo cabo y sus implicaciones en el aprendizaje del profesor.

5.1 Tarea y Actividad

Los términos *tarea* y *actividad* se usan con frecuencia como sinónimos. Gómez (2007) recoge tres aportaciones sobre la distinción entre *tarea* y *actividad* (pp. 78-79). En primer lugar, a partir de la propuesta de Doyle (1986), él distingue cuatro niveles de sucesos en el aula: sesión, lección, *tarea* y *actividad*, destacando que la última es la unidad organizativa más básica en el aula. En segundo lugar, alude al trabajo de Herbst (2003) para describir

*las cuatro componentes generales de las tareas académicas propuestas por Doyle*³⁴ (1988, p. 169): (a) un producto que hay que obtener; (b) operaciones que se hacen para producir ese producto; (c) recursos que se usan en esa producción; (d) importancia de la *tarea* en el sistema de responsabilidades de la clase (Gómez, 2007; p. 78).

Finalmente cita el trabajo de Christiansen y Walter (1986) al analizar los términos *tarea* y *actividad*. Mason y Johnston-Wilder (2006), destacan también ese trabajo para distinguir ambas nociones, y reconocen que en muchas ocasiones se emplean como sinónimos. Gómez (2007) finalmente acota el término *tarea* para referirse a demandas de actuación que el profesor da a los escolares, y denomina *actividades* a todo aquello que escolares y profesores realizan con motivo de una *tarea* (p. 79).

Mason y Johnston-Wilder (2006) caracterizan una relación entre *tarea* y *actividad*: “El propósito de una *tarea* es iniciar la *actividad* de los escolares. En tal *actividad*, los escolares construyen y actúan sobre los objetos, físicos, mentales o simbólicos, que forman parte de un tema de matemáticas” (p. 5).

Esta relación también la sostienen Horoks y Robert (2007, p. 280), quienes afirman que las *actividades* que realizan los escolares con motivo de afrontar la

³⁴Doyle, W. (1988). Work in mathematics classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist*, 23, 167-180.

resolución de tareas, influye de manera significativa en el aprendizaje de los escolares.

Partiendo de estas dos últimas fuentes, en el marco de nuestra investigación, consideramos que:

- las tareas son demandas que un profesor plantea a los escolares, que movilizan el conocimiento de éstos sobre un tema matemático determinado, y que concretan los objetivos específicos de este tema matemático en términos de actuaciones. Las tareas implican que un escolar ponga de manifiesto su actitud e interés hacia la propuesta de trabajo y que explicita su conocimiento de unos conceptos y procedimientos determinados y el dominio de determinadas capacidades.
- las actividades son las diversas respuestas de los escolares ante las demandas planteadas; nos referimos a su actividad en términos de las actuaciones que se derivan de la realización de tareas.

Watson y Sullivan (2008), describen esta relación entre ambas nociones:

Las diferentes tareas escolares proporcionan diferentes tipos de actividad matemática y las experiencias de los estudiantes con estas diferentes actividades, indican distintos tipos de aprendizaje de las matemáticas. Cuando el profesor decide emplear unas tareas particulares, o una clase de tareas, están tomando decisiones acerca de actividad matemática, del aprendizaje que podría producirse y sobre las propias matemáticas. (p. 111)

También la actividad puede referirse al profesor. En este caso describe todo lo que el profesor realiza en su clase al plantear tareas a sus escolares, al introducir, explicar o ejemplificar nociones, etc.

Esta caracterización de tarea y actividad nos permite introducir la estructura del análisis de instrucción siguiendo la propuesta de Marín (2009).

5.2 Estructura del Análisis de Instrucción

El análisis de instrucción, como parte del análisis didáctico, se articula en torno a siete componentes claves, determinantes en el proceso de planificación, que siempre tienen a las tareas como elemento organizador. Las cuatro primeras se pueden identificar como *variables singulares* de tarea; las tres últimas como *variables de conjunto* de tareas organizadas. Estas variables son: la adecuación, la complejidad, la resolución de problemas y la modelización, el empleo de materiales y recursos, la secuenciación, la evaluación y la gestión del aula de matemáticas.

Adecuación

Las tareas que el profesor planifique, deben ser compatibles con el contenido que se está trabajando. Las tareas, como propuestas de acción, están vinculadas al análisis y selección que hace el profesor sobre los conceptos y procedimientos que configuran el contenido matemático seleccionado. Al analizar la complejidad de ese contenido, se han puesto de manifiesto relaciones y jerarquías en los

contenidos, que es necesario que se plasmen con coherencia en las tareas que habrán de afrontar los escolares.

Por otra parte, en el análisis cognitivo se establecieron las expectativas de aprendizaje que el profesor perseguirá para sus escolares. Las tareas que el profesor diseñe y seleccione deben contribuir al logro de esas expectativas y, por otro lado, también deben permitir a los escolares a superar las posibles dificultades y errores previstos también en el análisis cognitivo.

Complejidad

Las tareas exigen determinadas demandas cognitivas a los escolares que las afrontan, pero no siempre esas demandas tienen el mismo grado de complejidad. A veces las tareas resultan más sencillas a los escolares por estar enmarcadas en un contexto cercano a ellos porque los conceptos y procedimientos que la resuelven son simples, corresponden a significados o representaciones más sencillas o han sido suficientemente practicadas. Marín (2009) realza la importancia de la complejidad como una de las variables de análisis de tareas y propone una serie de criterios que inciden en la categorización de esa complejidad.

1. Relativos a la presentación y formulación de la tarea:

- a. forma de redacción (tipo de oraciones, vocabulario empleado, tiempos verbales para indicar la actividad demandada, etc.);*
- b. encuadre en contextos más o menos motivadores y auténticos; y*
- c. representaciones como apoyo, representaciones que requieren decodificar la información para extraerla.*

2. Relativos al tipo y medida de las competencias que se activan:

- a. tipo y grado de interpretación y reflexión requeridos al alumno al leer y comprender el problema;*
- b. tipo de habilidades en la representación;*
- c. complejidad del razonamiento requerido para detectar un planteamiento correcto o una idea feliz;*
- d. tipo y nivel de las destrezas matemáticas requeridas en la resolución (problemas de un solo paso o de varios pasos, procedimientos simples o estrategias complejas, modelización en todas sus fases o en alguna de ellas, etc.); y*
- e. tipo y grado de argumentación matemática.*

3. Relativos al contenido matemático necesario para interpretar y resolver el problema.

4. La cercanía al alumno del contexto en que se presenta el problema (p. 11).

La mayor parte de los descriptores presentados en esa lista de criterios son recogidos en el marco del Proyecto PISA (OCDE, 2005a, pp. 40-41) en tres conjuntos de tareas, en función de las demandas cognitivas que son necesarias

para resolverlas. Resumimos esos tres conjuntos en la Tabla 5.

Tabla 5

Indicadores para los grados de complejidad de las tareas (Lupiáñez, 2005)

Reproducción	Conexión	Reflexión
Contextos familiares	Contextos menos familiares	Tareas que requieren comprensión y reflexión
Conocimientos ya practicados	Interpretar y explicar	Creatividad
Aplicación de algoritmos estándar	Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación	Ejemplificación y uso de conceptos
Realización de operaciones sencillas	Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos
Uso de fórmulas elementales.		Generalizar y justificar resultados obtenidos

El interés de esta categorización va más allá del diseño y análisis de tareas, ya que también suministra información importante para su secuenciación de tareas y para la evaluación, entre otros aspectos.

Resolución de Problemas y Modelización

Queremos destacar la importancia de que, en el diseño y selección de tareas, el profesor incorpore problemas y tareas de modelización.

En un enfoque funcional del currículo de matemáticas, la resolución de problemas ocupa un lugar predominante ya que, como hemos argumentado, la educación matemática persigue que los escolares sean capaces de usar su conocimiento matemático para dar respuesta a problemas y necesidades que surgen en una amplia variedad de situaciones y contextos. Este enfoque

postula que ideas, estructuras y conceptos matemáticos se han generado y constituido como herramientas para organizar los fenómenos de los mundos natural, mental y social. Los términos y conceptos matemáticos que se usan y presentan en el sistema educativo corresponden a nociones socialmente útiles y culturalmente relevantes, por ello forman parte del patrimonio intelectual que se transmite a las generaciones jóvenes para su formación como ciudadanos. El sistema educativo organiza y estructura dichos conceptos e ideas a los efectos de su transmisión por medio de la enseñanza, y contribuye a que los ciudadanos lleven a cabo su aprendizaje en el dominio y uso en contexto de tales herramientas.

Las matemáticas son un modelo paradigmático de proporcionar significado a relaciones y expresiones abstractas, que no corresponden a objetos o propiedades físicas, pero que satisfacen un marco de experiencias estructuradas, relacionadas con las acciones de clasificar, contar, ordenar, situar, representar,

medir, expresar armonía, buscar relaciones y regularidades, jugar y explicar. Las conexiones internas en los sistemas de conceptos matemáticos los constituyen en estructuras; de este modo proporcionan referencia –valor veritativo– a cada noción, por medio de sus vínculos en la estructura conceptual en que se inserta. Un concepto adquiere objetividad y potencial argumentativo cuando forma parte de una estructura. Las conexiones y usos externos aportan sentido, basado en la experiencia propia o en la experiencia culturalmente acumulada; incorporan modos de actuar ante situaciones, contribuyen a resolver problemas, a procesar información y al ajuste a modelos. (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008; p. 9)

Las tareas de modelización son un caso concreto de problemas que están enunciados en un contexto real, que deben ser reformulados en términos matemáticos para su resolución y que después se vuelven a interpretar en el contexto original. Esta lectura simplificada del proceso de modelización se puede ampliar en el trabajo de Ortiz (2002), quién hizo operativa esa noción en el marco del trabajo con futuros profesores.

Empleo de Materiales y Recursos

La investigación actual pone de manifiesto la importancia y la utilidad del empleo de recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje (English, 2009; de Vries y Mottier, 2006; Lever-Duffy y McDonald, 2007). Habitualmente estas tecnologías se refieren principalmente a ordenadores e Internet, y en menor medida a otros dispositivos electrónicos como calculadoras. Más allá de la tecnología, en general está constatado el importante papel que pueden jugar los materiales y recursos en la educación matemática (Coriat, 1997).

Ordenadores, Internet, calculadoras, materiales manipulativos y otro tipo de recursos poseen un gran potencial para la educación en general, y para la educación matemática en particular. Pero no debe usarse este potencial como excusa para llevar al aula de matemáticas todo aquello que sorprende por su versatilidad; es necesario planificar con detalle qué uso queremos darle: qué objetivos y competencias podemos desarrollar en nuestros escolares, qué tareas podemos diseñar con esos materiales y recursos para conseguirlo y qué sistema de evaluación pondremos en práctica para medir ese aprendizaje (Lupiáñez y Codina, 2004; Lupiáñez, 2000). Como señala Gómez (2004), el éxito de su empleo depende de que el profesor diseñe y lleve a la práctica el currículo de tal forma, que todos esos materiales y recursos contribuyan al aprendizaje de los escolares.

Lo que no cabe duda, es que con el uso de determinados materiales y recursos es posible diseñar tareas matemáticas que ponen en juego capacidades de los alumnos que de otro modo sería complicado lograr. Cuando el profesor delimite los objetivos específicos acerca de algún tema de matemáticas, muy seguramente la inclusión o no de un material o recurso puede modificar ese enunciado de objetivos y, por lo tanto, puede modificarse el desarrollo de determinadas competencias matemáticas.

En Lupiáñez, Marín, Gómez y Rico (2007), ejemplificamos, desde una perspectiva curricular, una tarea de modelización en la que se emplean diversos materiales electrónicos, y se muestra cómo se pueden promover diferentes actuaciones de los escolares que inciden en diferentes aspectos de la competencia *modelizar*.

Secuenciación

La secuenciación didáctica constituye una serie organizada “de unidades de información y propuestas de acción que el profesor suministra al alumno con diferentes intenciones” (Marín, 2009, p. 18). Cuando un profesor diseña una sesión de clase, estructura y organiza temporalmente las tareas que realizarán los escolares; al planificar una unidad didáctica debe, además, ordenar las diferentes sesiones que la compondrán.

Existen varios criterios que permiten al profesor secuenciar las tareas que ha diseñado o seleccionado, y entre ellos destacamos dos, que tienen que ver con la intencionalidad y la funcionalidad de las tareas.

Desde el punto de vista del fomento del aprendizaje, Mason y Johnston-Wilder (2006) señalan las intenciones principales de las tareas:

- *pueden idearse para introducir algunos temas matemáticos;*
- *pueden diseñarse para suministrar un contexto en el cual encontrar nuevas ideas o en el que practicar ideas introducidas previamente;*
- *pueden idearse para revisar o consolidar o para provocar la reflexión y la integración a través de una visión global* (p. 69).

Parcerisa (1996) clasifica las tareas de acuerdo a la funcionalidad que poseen en una secuencia de aprendizaje, y distingue:

- tareas cuya finalidad es conocer los aprendizajes previos de los escolares,
- tareas para ayudar a la motivación y de relación con la realidad,
- tareas exploratorias fomentadoras de la interrogación y del cuestionamiento,
- tareas de elaboración y construcción de significados,
- tareas de ejercitación, y
- tareas de síntesis.

Tareas de Evaluación

La evaluación es una componente central en el currículo (ver Tabla 2) y en la actividad docente del profesor. En el marco de esa actividad docente, la evaluación se sitúa en el análisis de actuación que introduciremos más adelante, y lo que nos interesa aquí es destacar la importancia del diseño de tareas para llevar a cabo la evaluación.

Tanto para la evaluación formativa como para la sumativa (Scriven, 1967; Gimenez, 1997), es importante disponer de criterios que permitan el diseño y la

selección de tareas que brinden información al profesor acerca del aprendizaje de los escolares.

Marín (2009, p. 27) señala varios aspectos que inciden en ese diseño y selección de tareas de evaluación y que ponen de manifiesto la relación de los análisis de contenido y cognitivo con el análisis de instrucción. Entre ellos destacamos los siguientes:

- Conocer los criterios de evaluación que establecen los documentos curriculares;
- establecer relaciones entre esos criterios y los objetivos específicos y las competencias que perseguirá la unidad didáctica; y
- recopilar y organizar tareas según capacidades que activan; variantes en el contenido tratado, en los sistemas de representación implicados; en los tipos de situaciones y contextos y con diferentes grados de complejidad.

Rico (1997b) señala la importancia de caracterizar instrumentos que permitan llevar a cabo la evaluación de los escolares, y cita a Bell, Burkhardt y Swan (1992) para destacar algunas condiciones que ha de satisfacer las tareas de evaluación, y en las que encontramos también descriptores de los análisis previos al análisis de instrucción Rico (1997b):

1. Relevancia práctica: *muchas cuestiones presentan una situación de la vida real, pero plantean cuestiones que no tienen significado práctico.*
2. Coherencia o fragmentación de la tarea: *muchas tareas conducen al estudiante a través de una secuencia de pequeños pasos, que reducen o suprimen a capacidad de decisión del estudiante (...). Pocas tareas invitan al estudiante a seleccionar su repertorio de técnicas, recorrer una cadena de razonamientos o comparar métodos alternativos.*
3. Rango de respuestas posibles: *¿hasta qué punto podemos proponer tareas que proporcionan la oportunidad a los estudiantes de trabajar con un amplio rango de capacidades y talentos? Usualmente el nivel de respuestas posibles ha venido determinado más por la tarea que por el estudiante.*
4. Extensión y valor de la tarea: *el pensamiento de orden superior se muestra mejor, por lo general, en tareas extensas que en tareas cortas. Es necesario que estas actividades constituyan por sí mismas experiencias de aprendizaje válidas y aceptables.*
5. Modo de trabajar las tareas: *tradicionalmente los estudiantes han trabajado las tareas individualmente y en silencio. Estas condiciones artificiales se han impuesto en beneficio de la fiabilidad, y probablemente se mantendrán en el sistema. Sin embargo, hay una gran necesidad de explorar cómo se puede evaluar la capacidad de los estudiantes para trabajar cooperativamente, quizá utilizando formas de comunicación orales y prácticas en un ambiente usual de trabajo. (pp. 37-38)*

Son muchas las variables que inciden en la selección de tareas de evaluación, pero es importante que el profesor tome en consideración el mayor número

posible de ellas para disponer así de un banco de tareas lo suficientemente amplio para obtener información coherente y relevante acerca del aprendizaje de sus escolares.

Gestión del Aula

La gestión del proceso de enseñanza y aprendizaje en el aula es compleja y requiere considerar muchos aspectos (Doyle, 1983; Marín, 1997; Zabalza, 2004). Algunos de ellos son la disciplina, la integración de todos los escolares, la organización de las diferentes actividades o el manejo del tiempo. Muchos de esos aspectos surgen directamente en el contexto del aula y por tanto no siempre se pueden planificar de antemano. Como señala Gómez (2007, p. 86), en esos casos el profesor deberá reaccionar a determinadas actuaciones en el momento preciso en el que tienen lugar.

No obstante, desde el punto de vista de la planificación es posible prever algunas situaciones partiendo de las expectativas de aprendizaje y de las tareas que el profesor ha seleccionado.

Marín (2009, pp. 29-30) propone una serie de dimensiones que el profesor puede considerar a la hora de planificar la gestión del aula. Las decisiones que asuma con respecto a ellas pueden orientar su posterior práctica docente en el aula. Estas dimensiones son:

- Análisis del contenido y cognitivo de la sesión:
 - Selección de contenidos básicos (conceptos y procedimientos, representaciones, situaciones y contextos).
 - Objetivos específicos a desarrollar y su relación con las competencias matemáticas.
- Intenciones y expectativas generales que orientan la planificación.
- Enmarque de la sesión en relación con las sesiones previas y posteriores.
- Secuencia de tareas por orden de desarrollo.
- Guión de descripción de cada tarea:
 - Título y duración aproximada.
 - Organización (agrupamientos, puesta en común,...).
 - Descripción de la actividad del escolar y del profesor.
 - Material o recurso necesario.
 - Previsiones acerca de la actuación del profesor y los escolares.

Este esquema de análisis permite también secuenciar el conjunto de sesiones que abarcará la unidad didáctica que el profesor está planificando.

Estas siete dimensiones que hemos presentado para caracterizar el análisis de instrucción, no agotan todos los aspectos que puede abarcar este análisis. En muchos casos hemos señalado que sólo atendíamos aquellas variables relacionadas y abordables desde la planificación de las matemáticas escolares.

5.3 Procedimiento del Análisis de Instrucción

En este epígrafe, usamos la caracterización del análisis de instrucción del epígrafe anterior para delimitar un procedimiento propio de este análisis, en torno a siete pasos. Asimismo, consideramos las implicaciones que dicha aplicación tiene en el aprendizaje de los profesores en formación.

Como hemos visto, el análisis de instrucción se centra en el diseño, la selección y la secuenciación de tareas desde diferentes puntos de vista. Partimos de la propuesta de Marín (2009), para acotar las actuaciones que el profesor ha de realizar para llevar a cabo el análisis de instrucción:

1. Describir y clasificar tareas matemáticas, atendiendo a los siguientes criterios:
 - 1.1 los contenidos matemáticos que ponen en juego;
 - 1.2 las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir; y
 - 1.3 para detectar y diagnosticar errores.
2. Diseñar o seleccionar tareas sobre el tema específico en el que se centra la unidad didáctica, atendiendo a los criterios anteriores y con diferentes grados de complejidad (reproducción, conexión y reflexión).
3. Reformular el enunciado de algunas tareas para que promuevan el desarrollo de alguna competencia matemática específica, destacando entre ellas la de *plantear y resolver problemas* y *modelizar*³⁵.
4. Analizar críticamente secuencias didácticas presentadas en libros de texto y otros materiales curriculares, presentando propuestas de modificación.
5. Construir secuencias de tareas orientadas por características específicas, como:
 - 5.1 Secuencias cuyo objetivo es la construcción de conocimientos nuevos.
 - 5.2 Secuencias en las que predomina el uso de un material o recurso específico.
 - 5.3 Secuencias orientadas a guiar el logro de objetivos específicos estrechamente vinculados con alguna competencia matemática determinada, y que incluyen la graduación de las tareas en función de fases en el desarrollo de esa competencia.
6. Elaborar criterios sobre el papel del profesor en el aula y las diferentes variables que intervienen en la planificación de una sesión de trabajo en el aula.
7. Analizar y seleccionar tareas orientadas a la evaluación del aprendizaje de un tema matemático.
8. Planificar los contenidos y expectativas de todas las sesiones de trabajo de una unidad didáctica y diseñarlas haciendo intervenir criterios de secuenciación y de gestión del aula.

³⁵ Estas son dos de las competencias matemáticas enunciadas en el marco del Proyecto PISA, tal y como veremos en el capítulo siguiente.

5.4 Análisis de Instrucción y Conocimiento del Profesor

Toda la actividad que el profesor lleva a cabo al realizar el análisis de instrucción sobre un tema específico, le brinda un gran número de criterios para diseñar y seleccionar tareas matemáticas de ese tema. Estos criterios constituyen un conocimiento importante de cara al desarrollar en el profesor su competencia de planificar unidades didácticas.

Hoy en día es sencillo disponer de un gran número de tareas matemáticas merced a las numerosas publicaciones y, sobre todo, a la creación constante de páginas Web que recogen muchos ejemplos de cuestiones, problemas y actividades relacionadas con las matemáticas. Lo importante entonces es disponer de criterios y herramientas que permitan al profesor discernir cuáles de estas propuestas son apropiadas para lograr alcanzar las expectativas de aprendizaje que ha establecido.

En ocasiones, el simple hecho de realizar una tarea que hemos encontrado, nos da información sobre su idoneidad para el aprendizaje de las matemáticas. Pero, en otros casos, es necesario profundizar más en el tipo de actuaciones que promueve, en la diversidad de modos de solución o en su grado de dificultad. Una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor en la programación. Lo importante, en ese caso, es disponer de criterios para llevar a cabo tales modificaciones.

6. EL ANÁLISIS DE ACTUACIÓN

El análisis de actuación cierra un ciclo del análisis didáctico y constituye el inicio del siguiente. Este análisis

utiliza la información que surge de la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y aprendizaje para producir información que permita determinar la comprensión de los escolares en ese momento, los contenidos a tratar en el aula y los objetivos de aprendizaje que se deben buscar en el nuevo ciclo (Gómez, 2007, pp. 93-94).

En el análisis de contenido el profesor organiza los diferentes significados que admiten las nociones matemáticas que conforman un tema determinado, en términos de sistemas de representación, análisis fenomenológico y estructura conceptual. En el análisis cognitivo, enuncia y organiza los objetivos que deben alcanzar los escolares en torno a ese tema y describe en qué medida eso contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas. También destaca algunos errores y dificultades que pueden surgir en ese proceso de aprendizaje. En el análisis de instrucción el profesor diseña, selecciona y secuencia las tareas que conformarán la unidad didáctica, selecciona los materiales que puede usar durante la instrucción y, finalmente, diseña los instrumentos de evaluación que empleará para valorar los logros de esa instrucción.

El análisis de actuación se centra en valorar en qué medida se ha logrado lo que se pretendía y a qué aspectos se atribuyen los logros y las carencias de la unidad didáctica que se diseñó y se llevó a la práctica. Dado que la finalidad de esa puesta en práctica es que los escolares logren las expectativas de aprendizaje que se han determinado, la información suministrada por el análisis cognitivo es fundamental para el análisis de actuación. Pero como la consecución de esas expectativas por parte de los escolares la ha perseguido el profesor mediante la realización de tareas centradas en determinados contenidos, la reflexión realizada en los análisis de contenido y de instrucción resulta central también para el análisis de actuación.

Por tanto, en el análisis de actuación, además de considerar y reflexionar sobre los resultados de la evaluación realizada (Gómez, 2007, p. 94), el profesor también puede:

- determinar en qué medida los escolares alcanzaron los objetivos específicos de aprendizaje que se habían planificado;
- valorar si la selección y organización de contenidos ha permitido llevar a cabo la instrucción de una manera consistente y coherente;
- comprobar el nivel de desarrollo de las competencias matemáticas de los escolares con motivo del trabajo realizado con un tema específico de matemáticas;
- constatar la superación de los errores y dificultades de los escolares en el trabajo con ese tema de matemáticas;
- analizar si la selección y organización de las tareas resultaron provechosas y adecuadas para el aprendizaje perseguido;
- determinar si esas tareas cumplieron con la función con la que fueron diseñadas;
- establecer en qué medida el empleo de materiales y recursos optimizó el proceso de aprendizaje de los escolares; y
- valorar la conveniencia de los métodos e instrumentos de evaluación para extraer información del aprendizaje de los escolares de forma objetiva y clarificadora.

En resumen, el profesor obtiene información de las fortalezas y debilidades de la planificación y puesta en práctica de una unidad didáctica. Como hemos argumentado en este capítulo (§1.2, Figura 1), toda esta información suministra al profesor conocimiento didáctico acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares y le permite afrontar un nuevo ciclo del análisis didáctico.

7. EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN UN PROGRAMA DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Hemos presentado el análisis didáctico como un procedimiento para diseñar, llevar a cabo y evaluar unidades didácticas sobre un tema concreto de las matemáticas escolares. Esta presentación la hemos enmarcado en una visión curricular y funcional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Los cuatro análisis que componen el análisis didáctico son el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación, y hemos descrito las principales herramientas (organizadores del currículo) que articulan y estructuran cada uno de ellos. Esas herramientas permiten al profesor describir, analizar y organizar un tema de las matemáticas escolares de cara a su enseñanza y aprendizaje.

Desde hace varios años, el análisis didáctico, unido a la noción de currículo, se ha convertido en el eje vertebrador del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria que se lleva a cabo mediante la asignatura “Didáctica de la Matemática” en la Universidad de Granada. A ese programa nos hemos referido ya en el primer capítulo. La experiencia como formadores de todos los que hemos participado en esa asignatura, unido a las diferentes investigaciones realizadas en el seno del grupo FQM193, han constatado que el análisis didáctico es una noción potente en el aprendizaje de los futuros profesores.

La mayor parte de los estudiantes que se matriculan en la asignatura son estudiantes de segundo ciclo de la Licenciatura de Matemáticas y, a pesar de que nunca han tenido oportunidad de reflexionar y trabajar en profundidad en temas educativos, al final del programa muchos de ellos consiguen romper con la tradición de la matemática formal que siempre han estudiado y consiguen diseñar unidades didácticas con una complejidad considerable que, además, son capaces de justificar.

En el trabajo de Gómez (2007), se puede comprobar el modo en que un grupo de futuros profesores que cursan esa asignatura desarrollan un conocimiento didáctico de las matemáticas escolares que les permite diseñar una unidad didáctica. Gómez centra su investigación en el primero de los análisis del análisis didáctico, el análisis de contenido.

El segundo de los análisis, el análisis cognitivo, es objeto de estudio en esta investigación. Su organización contribuye al carácter cíclico e interrelacionado del análisis didáctico como una herramienta de planificación para el profesor, lo cual, desde nuestro punto de vista, constituye un avance más en la conceptualización y caracterización del análisis didáctico.

El análisis cognitivo se ubica en la dimensión cognitiva del currículo, y su estructura y finalidad permite al profesor afrontar el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares sobre un tema específico. Esta caracterización nos

permitirá abordar (junto con el capítulo siguiente) el primer objetivo general de nuestra investigación.

EXPECTATIVAS, LIMITACIONES Y OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

En el capítulo anterior hemos introducido el análisis didáctico como un procedimiento de planificación, desarrollo y evaluación para un tema matemático concreto, fundamentado en la noción de currículo, sostenido por los organizadores curriculares y orientado hacia un enfoque funcional de las matemáticas escolares. El análisis didáctico está compuesto a su vez por cuatro análisis, siendo uno de ellos el análisis cognitivo.

También hemos señalado que el análisis cognitivo aborda la problemática del aprendizaje de cada tema matemático por parte de los escolares (§2.4). Para llevar a cabo el análisis cognitivo, el profesor enuncia y organiza expectativas de aprendizaje sobre ese tema matemático, describe las limitaciones que pueden interferir el aprendizaje y organiza la selección de tareas que les suministrarán a los escolares las oportunidades de aprender. El análisis cognitivo se organiza, por lo tanto, en torno a tres organizadores del currículo.

En este capítulo describiremos con detalle cada uno de esos tres organizadores. Nuestro objetivo es delimitar un significado para ellos y ver en qué medida los usamos en el programa de formación de profesores. A continuación describiremos cómo se pueden poner en juego con objeto de analizar un tema de matemáticas. Seleccionaremos como ejemplo el tema del sistema de los números naturales, para dar así continuidad al análisis de contenido que sobre ese mismo tema hicimos en el capítulo anterior. Asimismo, este ejemplo sirve para mostrar el modo en que presentamos el análisis cognitivo a los futuros profesores en el contexto de la asignatura. Durante esa presentación, conjugamos la reflexión teórica en nuestras intervenciones como formadores con la ejemplificación de los diferentes organizadores. Zazkis (2008), sostiene que el uso de ejemplos en la formación de profesores, les lleva a reconsiderar su visión de las matemáticas y de su enseñanza (p. 135).

Finalmente, reflexionaremos acerca del conocimiento que puede desarrollar un profesor con motivo de poner en juego el análisis cognitivo y que contribuye al desarrollo de su competencia de planificación para el diseño de unidades didácticas.

1. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE EN MATEMÁTICAS³⁶

Un programa educativo, como cualquier actividad, está dirigido por las expectativas de ciertos resultados. La actividad principal de la educación es cambiar a los individuos en alguna medida: agregar conocimientos a los que ya poseen, permitirles desempeñarse en habilidades que, de otra manera, no podrían realizar, desarrollar ciertas comprensiones, intuiciones y apreciaciones. Los enunciados de estos resultados esperados se denominan corrientemente metas u objetivos educativos (Taba, 1983, p. 257).

Establecer qué es lo que deben aprender los escolares en cada momento, constituye una dimensión crucial dentro de la planificación curricular: “la razón principal de planificar la enseñanza es hacer posible la consecución de un cierto conjunto de objetivos” (Gagné y Briggs, 1976, p. 31).

Al hablar de expectativas de aprendizaje nos referimos a todo aquello que tiene que ver con lo que se espera, desde diferentes ámbitos, que aprendan los escolares a lo largo de la Educación obligatoria y con las implicaciones de ese aprendizaje. Lo que sostienen los especialistas sobre las grandes prioridades y estándares hacia las que dirigir el aprendizaje, los documentos y directrices curriculares que establecen finalidades generales de la educación, o los objetivos específicos de un libro de texto sobre un tema concreto de matemáticas, son ejemplos de diversas expectativas de aprendizaje.

En Rico y Lupiáñez (2008a) recogemos una detallada reflexión sobre diferentes niveles de expectativas, desde la definición y concreción de las finalidades de la educación matemática (Coll y Martín, 2003; Delval, 1990; Niss, 1995; Rico, 1997a; Romberg, 1991; Skovmose, 1994; Taba 1983), hasta el análisis de los objetivos operativos (Bloom et al., 1971; Anderson et al., 2001). Dos de los niveles de expectativas analizados que forman parte del currículo de Educación obligatoria y que son los que más incidencia tienen de cara a la planificación docente, son los que nos interesan en el marco de nuestra investigación. Estos niveles son los objetivos específicos y las competencias siempre centrados en matemáticas.

En este apartado delimitamos el significado que damos a las expectativas de aprendizaje para, a continuación, caracterizar los objetivos específicos y las

³⁶ Parte de la reflexión recogida en este apartado procede del trabajo desarrollado por Luis Rico y por mi para la elaboración del libro *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular* (Rico y Lupiáñez, 2008a). En ese trabajo se describen con más detalle todos los aspectos presentados aquí, por lo que remitimos a él para profundizar en algunas ideas.

competencias como dos niveles de expectativas. Para ello, acotamos su significado, su papel en el currículo y la importancia de cara a la planificación del aprendizaje de las matemáticas por parte de los escolares.

1.1 Expectativas de aprendizaje

Desde nuestro punto de vista, el aprendizaje de los escolares se muestra mediante actuaciones observables y por inferencia de ciertas estructuras y contenidos en su memoria. Los escolares llevan a cabo determinadas actuaciones como respuesta a las demandas que se les plantean por medio de tareas. El análisis de actuaciones contempla el dominio de conocimientos concretos alcanzado, pero también estudia la riqueza de conexiones que se establecen entre los diversos conocimientos y que muestran su complejidad cuando se movilizan para dar respuesta a las demandas planteadas. Igualmente considera la variedad de significados de tales conceptos, basada en la diversidad de los sistemas simbólicos utilizados y de los contextos en que se aplican. Conexiones y significados, dominio de estructuras, representaciones y contextos, mostrados o inferidos por medio de actuaciones, expresan el aprendizaje matemático de los escolares.

Empleamos el término *expectativas de aprendizaje* para denominar, de manera genérica, aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares. En el caso de las matemáticas, las expectativas expresan determinados usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden observar o inferir a partir de actuaciones de los escolares ante tareas. Las expectativas de aprendizaje en matemáticas se sostienen en demandas de actuaciones, en contenidos y en tareas³⁷.

Para determinar el aprendizaje de las matemáticas, el profesor plantea a los escolares tareas y problemas que demandan actuaciones que muestran sus capacidades y conocimientos alcanzados y las competencias matemáticas desarrolladas. La satisfacción de unas expectativas de aprendizaje se pone de manifiesto mediante los modos de hacer y de conducirse de los estudiantes ante las tareas y problemas, así como de las inferencias sobre el logro de determinadas competencias (Bell, Costello y Kucheman, 1985; p. 77).

Como resultado de las demandas se producen respuestas, que muestran el alcance de las expectativas enunciadas sobre el aprendizaje matemático y, parcialmente, el alcance de las finalidades formativas generales con las que conectan.

La profundidad y el valor del aprendizaje esperado, están en función de la variedad de conexiones y de la riqueza simbólica de los conocimientos matemáticos que se movilizan y de la dificultad de los problemas que se abordan. Tareas y conocimientos admiten diferentes niveles; por ello las actuaciones de

³⁷ Como veremos más adelante en este mismo capítulo, las tareas constituyen también un elemento central en nuestro trabajo y las caracterizaremos como propuestas y oportunidades para el aprendizaje para los escolares.

los estudiantes pueden presentar distintos rangos de dominio y satisfacer en distinto grado las expectativas de aprendizaje enunciadas. El aprendizaje matemático se detecta y confirma delimitando actuaciones que hacen uso de unos conocimientos y dan respuesta a unas tareas determinadas.

Las expectativas sobre aprendizaje de las matemáticas, reconocibles por actuaciones que responden a tareas concretas sobre un tema, se han enunciado tradicionalmente mediante objetivos específicos. Los denominados criterios para la evaluación presentan, igualmente, similares expectativas sobre el aprendizaje: “Los criterios de evaluación de las materias serán referente fundamental para valorar tanto el grado de adquisición de las competencias básicas como el de la consecución de los objetivos” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006c, p. 681).

Al igual que en los estudios de los expertos, en los documentos curriculares se encuentran objetivos específicos con diferente grado de generalidad, debido a que en la gestión de un currículo hay distintos niveles de decisión con agentes y responsable diferentes. Por ello, es lógico que en el currículo coexistan expectativas sobre el aprendizaje con distintos niveles de generalidad.

De aquí en adelante nos centraremos en dos de los niveles de expectativas de aprendizaje que considera el currículo y que constituyen nociones fundamentales de cara a la planificación de las matemáticas escolares: los objetivos específicos y las competencias.

1.2 Los Objetivos en el Currículo

El desarrollo normativo de los últimos años, ha manejado una noción de currículo:

A los efectos de lo dispuesto en esta Ley, se entiende por currículo el conjunto de objetivos, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada uno de los niveles, etapas, ciclos, grados y modalidades del sistema educativo que regulan la práctica docente (Ministerio de Educación y Ciencia, 1990).

El desarrollo sistemático del currículo, lo que se denomina currículo prescriptivo, marca sus prioridades e intenciones generales y procede por análisis desde los enunciados generales hasta los objetivos vinculados con contenidos y tareas concretos. Posteriormente, en una labor de síntesis racional y estructurada, el responsable del desarrollo curricular deberá integrar los objetivos alcanzados y, así, inferir e interpretar la formación y el desarrollo logrados por los individuos. En tal caso, las conductas que muestran el alcance del aprendizaje por el dominio de ciertas capacidades se consideran indicadores de esos logros.

Las capacidades son aquellas aptitudes o habilidades para realizar determinadas tareas o actividades que posee un sujeto, su poder para realizar un acto físico o mental. Cuando nos centramos en matemáticas, las expectativas de aprendizaje de esta materia se han concretado en el desarrollo de capacidades vinculadas con los conocimientos matemáticos que se espera que adquieran los escolares durante su etapa formativa obligatoria. Es decir, en el modo en que los estudiantes actúan y pueden usar tales conocimientos para realizar tareas y resolver problemas en

diferentes situaciones y contextos. Cuando los estudiantes logran ser “capaces de”, han satisfecho determinados objetivos, han cubierto unas expectativas de aprendizaje.

Los objetivos en matemáticas pueden enunciar expectativas de aprendizaje con distintos grados de generalidad pero, en todos los casos, destacan unos conocimientos matemáticos y se vinculan a unas tareas cuya realización mostraría el logro de una o varias capacidades.

Los expertos distinguen, al menos, tres niveles para los objetivos curriculares y, para el caso concreto de las matemáticas, el currículo establece también esos tres niveles, como recogemos en la Tabla 6.

Tabla 6

Niveles de objetivos en el currículo (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 69)

Ámbito	Objetivos	Describen
Etapa	Generales de área	Resultados generales de toda una etapa educativa
Curso	De curso o programa (criterios de evaluación)	Resultados esperados de un curso o programa
Tema	Específicos	Resultados esperados de un tema concreto, afectan a una unidad temática

Los niveles siguen una organización lógica, que se muestra en una jerarquía de importancia y en una secuencia de realización. A continuación, describimos con más detalle cada uno de ellos.

Objetivos Generales de Área

El primero de los niveles anteriores, al que nos referiremos como *objetivos generales*, aparece explícitamente en los documentos curriculares actuales. Estos objetivos generales expresan unas expectativas de aprendizaje a largo plazo para cada una de las disciplinas básicas que conforman la Educación obligatoria. En el caso de las matemáticas, no aparecen descripciones precisas de las nociones matemáticas y muchas de las finalidades se centran más en el uso de esas nociones que en su propio aprendizaje. Un ejemplo de este nivel de expectativas es el siguiente, extraído de los objetivos generales de matemáticas para la Educación secundaria según la legislación vigente (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación. (p. 31791)

Objetivos de Curso o Programa

Estos objetivos se expresan en los documentos curriculares mediante los criterios

de evaluación. Proporcionan un núcleo de contenidos matemáticos para cada curso, delimitando prioridades en esos contenidos. También enumeran capacidades que contribuyen al desarrollo y al dominio de determinados procesos cognitivos por parte de los escolares, y brindan criterios para seleccionar tareas que sirvan para valorar la consecución de los objetivos.

Como ejemplo, mostramos el primero de los diez criterios de evaluación para la asignatura *Matemáticas* de cuarto curso de Educación secundaria, que se desglosa a su vez en varias capacidades (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b):

1. Utilizar los distintos tipos de números y operaciones, junto con sus propiedades, para recoger, transformar e intercambiar información y resolver problemas relacionados con la vida diaria y otras materias del ámbito académico. Se trata de evaluar la capacidad de:

- *Identificar y emplear los distintos tipos de números y las operaciones siendo conscientes de su significado y propiedades,*
- *Aplicar la jerarquía de las operaciones y el uso correcto de los signos y paréntesis en el cálculo numérico.*
- *Elegir la forma de cálculo apropiada (mental, escrita o con calculadora).*
- *Estimar la coherencia y precisión de los resultados obtenidos.*
- *Adecuar la solución (exacta o aproximada) a la precisión exigida en el problema, particularmente cuando se trabaja con potencias, radicales o fracciones. (p. 31802)*

Estos enunciados muestran el núcleo central de conocimientos matemáticos para la enseñanza en este ciclo. Los criterios de evaluación contribuyen a la toma de decisiones sobre el contenido, a la extensión con que se contempla cada bloque en el ciclo y a marcar ciertas prioridades. Establecen indicadores para la selección de tareas que permitan valorar el logro del objetivo, e igualmente enumeran algunas de las capacidades que contribuyen al desarrollo cognitivo de los escolares.

El último de los niveles de objetivos, los que llamamos específicos, suelen concretarse por el Claustro y los equipos de profesores de cada centro, que se realiza en la planificación de cada asignatura y que incluye el desarrollo de sus objetivos. Esta planificación forma parte del proyecto educativo de cada centro (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a). También es habitual que los autores de libros de texto los especifiquen cuando diseñan las diferentes lecciones. A los objetivos específicos dedicaremos el siguiente epígrafe.

1.3 Objetivos específicos

Esta nueva concreción de las expectativas de aprendizaje se expresan mediante objetivos para cada uno de los temas de matemáticas que quedan incluidos en el proyecto de centro. En este caso no hay un modelo prescriptivo basado en documentos oficiales que delimiten el conjunto de objetivos establecidos, sino que es el propio centro, por medio del equipo o seminario de profesores de

matemáticas, quien establece un desarrollo, en este nivel, a partir de los objetivos ya enunciados en los niveles anteriores de etapa y curso.

Tradicionalmente, las editoriales incluyen en sus guías didácticas para el profesorado enunciados de objetivos para cada uno de los temas, o bloques de temas, del programa propuesto de una asignatura. La principal limitación en este nivel radica en que los enunciados deben ser coherentes con el desarrollo de los objetivos planteado en los niveles anteriores. Un ejemplo de objetivos específicos es el siguiente, referidos al tema del segundo ciclo de primaria *Polígonos* (Rico, 1990):

1. Construir polígonos libremente con un determinado material o bien dando condiciones sobre los lados o sobre los ángulos.
2. Relacionar el nombre de un polígono con su número de lados.
3. Clasificar una colección de polígonos según el criterio de “tener los mismos lados que”.

Todos estos enunciados incluyen un verbo de acción, que describe la aptitud o capacidad que se espera muestre el escolar una vez hecho su aprendizaje sobre el correspondiente tema.

Todos los objetivos específicos establecen la vinculación entre unos determinados contenidos y unas tareas, dando lugar al enunciado de una conducta esperada por parte del estudiante que aprende. El grado de precisión de los objetivos temáticos específicos es alto, ya que la conducta o conductas esperadas y los contenidos a que se refieren no dan lugar a equívocos, si bien puede admitirse un amplio rango de tareas diferentes. El objetivo se concreta al establecer un conjunto de tareas bien delimitadas que lo ejemplifican.

Los objetivos específicos expresan qué se espera que haga un sujeto, de una edad y nivel determinados, en situaciones que requieren el uso de nociones matemáticas concretas. Denominamos específicos a estos objetivos para distinguirlos de aquellos otros mucho más minuciosos como los objetivos operativos. Como ejemplo, mostramos parte de la propuesta de objetivos operativos de Martín (2008), para trabajar la numeración niños de cinco o seis años:

- *Interiorizar los dígitos en el esquema corporal de los dedos de las manos.*
- *Establecer relación entre los números y cantidades de objetos discontinuos ordenados. (Puntos de los dados, cartas de la baraja).*
- *Ordenar materiales discontinuos para reconocer la cantidad con una mirada sin contar. Ordenar los conjuntos de mayor a menor y viceversa.*
- *Ordenar materiales continuos por su longitud. (Regletas) Primero con 3 regletas y luego ir ampliando de una en una.*
- *Añadir y quitar los dedos que diga el profesor a partir de un número. (Siempre usando los dedos y añadiendo números que reconozca con facilidad) (p. 57)*

Mediante el término *objetivos específicos* nos referimos a *niveles concretos de expectativas de aprendizaje, que se expresan como capacidades y se muestran mediante conductas observables, relativos a un tema concreto y referidos a tareas de una complejidad determinada sobre ese tema.*

En las matemáticas escolares, como en otras disciplinas, un conjunto determinado de objetivos tiene como función principal guiar la toma de decisiones en el currículo, en tanto que destaca cuáles contenidos seleccionar y qué actuaciones promover en los escolares para dar satisfacción a la demanda de capacidades requeridas, de resultados de aprendizaje predeterminados. El desarrollo integral como personas de los escolares necesita el desarrollo y consecución de sus capacidades cognoscitivas y afectivas.

En la Figura 8 representamos esquemáticamente la terna de ideas en las que se sustenta la noción de objetivo específico: capacidad/es, conocimientos, resolución de problemas en contexto.

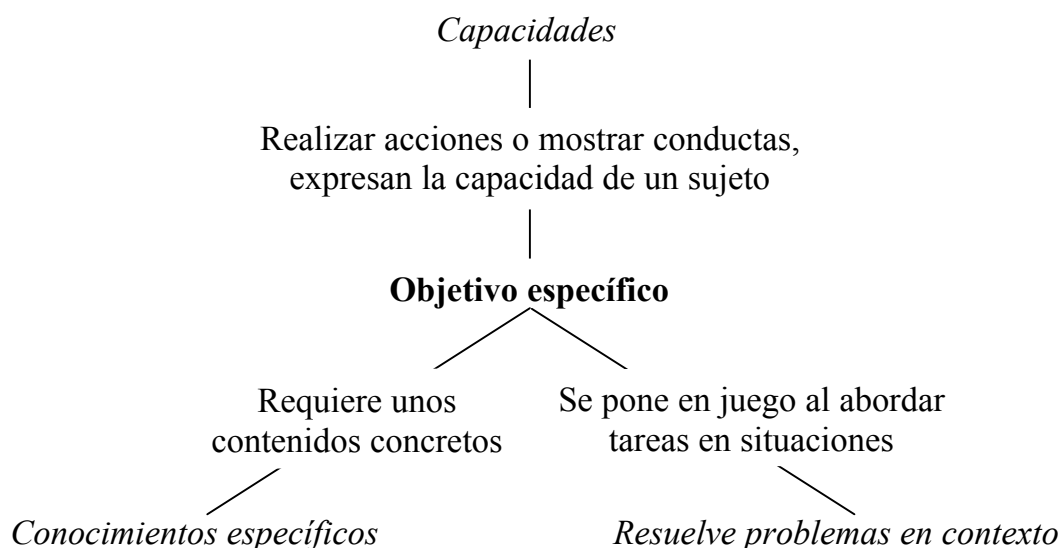


Figura 8. Componentes de los objetivos específicos

Funciones de los objetivos específicos

En línea con Taba (1983) asumimos que los objetivos específicos satisfacen determinadas funciones que pasamos a resumir:

- Contribuyen a la toma de decisiones sobre el contenido y la extensión con que se contempla tal contenido en cada tema de matemáticas.
- Relacionan los contenidos con las tareas, teniendo en cuenta que tales tareas han de ser importantes, necesarias y eficaces para el aprendizaje pretendido.
- Clarifican, o contribuyen a clarificar, los tipos de competencias³⁸ que deben contribuir a desarrollar. La definición de esas competencias determina cómo se selecciona la materia y cómo se maneja en el aula.

³⁸ Delimitaremos la noción de competencia en el siguiente epígrafe.

- Coordinan diversos niveles en las expectativas de aprendizaje, buscando cierta unidad de intereses y puntos de atención común.
- Sirven como guía para la evaluación del rendimiento, en tanto establecen expectativas sobre el aprendizaje de temas matemáticos concretos.

El procedimiento estándar de planificación del currículo tiene en los objetivos una de sus herramientas principales. La secuencia convencional comienza por delimitar las finalidades del plan de formación de acuerdo con las necesidades que haya que atender, continúa con los objetivos, lleva a la selección de los contenidos y contribuye a su organización. La conjunción de objetivos y contenidos provoca la delimitación de las experiencias de aprendizaje en forma de tareas escolares, cuya organización y realización concluyen en la elección de los modos, medios y contenidos a evaluar. El modelo de desarrollo curricular por objetivos proporciona una base sistemática para las distintas ramas de la educación.

1.4 Las Competencias como un Nivel de Expectativas de Aprendizaje

Que la noción de competencia ha irrumpido internacionalmente en todos los niveles educativos y formativos, es ya una realidad que no es necesario constatar. Un simple ejemplo en el caso de la legislación educativa en España, basta señalar que las competencias forman parte de la noción de currículo (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a), uniéndose así a las componentes “tradicionales” de contenidos, objetivos, metodología y evaluación (Ministerio de Educación y Ciencia, 1990). De esta manera, las expectativas de aprendizaje de los escolares no quedan determinadas exclusivamente por los objetivos, y desde nuestro punto de vista, “esta reforma, en apariencia controlada y de escaso alcance, supondrá – de llevarse a cabo- la transformación de mayor importancia en el currículo de las matemáticas escolares desde la implantación del programa de la Matemática Moderna hace cuarenta años” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 164).

Las competencias corresponden, también, a la dimensión cognitiva del currículo. Marcan una perspectiva diferente, más amplia y comprensiva, en relación con las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares. En su preámbulo, la LOE destaca como finalidad (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a): “proporcionar a los jóvenes una educación completa, que abarque los conocimientos y las competencias básicas que resultan necesarias en la sociedad actual” (p. 17160). Para ello, afirma que “todos los ciudadanos deben tener la posibilidad de formarse (...) con el fin de adquirir, actualizar, completar y ampliar sus capacidades, conocimientos, habilidades, aptitudes y competencias para su desarrollo personal y profesional” (p. 17162).

No es nuestro interés en este apartado retomar todas las posibles líneas de debate que se han ido abriendo en los últimos años en torno al significado de la noción de competencia, a su función en las directrices curriculares o a diversas legislaciones internacionales que la consideran central para la educación. En Rico y Lupiáñez (2008a) hacemos una descripción detallada de esos y otros aspectos, mientras que aquí sintetizaremos las conclusiones de ese trabajo que son útiles para nuestra investigación.

Para ello acotaremos un significado del término en el campo de la educación y estructuraremos la noción de competencia en torno a tres componentes de manera equivalente a lo hecho antes con los objetivos específicos. Después, concretaremos nuestra reflexión al caso de las competencias matemáticas y veremos cómo pueden clasificarse. Finalmente, describiremos diferentes niveles de competencia que son importantes para nuestra investigación.

Un Significado para el Término Competencia

El uso frecuente del término competencia en la actualidad no ha hecho sino acrecentar el número de sus interpretaciones: “durante las últimas décadas la competencia se ha convertido en un término de moda, con un significado vago, no sólo en el uso público, sino también en diversas ciencias sociales” (Weinert, 2004, p. 95).

Parece comúnmente aceptado que uno de los primeros significados concretos al término competencia se atribuye a los trabajos en lingüística de Noam Chomsky³⁹ (1957, 1965, 1980). Desde la perspectiva lingüística de Chomsky se define la competencia como el dominio de los principios que gobiernan el lenguaje; y la actuación como la manifestación de las reglas que subyacen al uso del lenguaje⁴⁰.

La generalización del término a otras disciplinas no sirve necesariamente para unificar significados, pero sí para identificar invariantes:

Si restringimos nuestro enfoque al uso del término competencia en filosofía, psicología, lingüística, sociología, ciencia política y economía, seguimos teniendo una amplia variedad de definiciones. No obstante, en todas estas disciplinas se interpreta la competencia como un sistema bastante especializado de habilidades y capacidades necesarias o suficientes para alcanzar una meta específica (Weinert, 2004; p. 94-95).

El uso del término competencia en educación tampoco es algo nuevo. En los años setenta se fortaleció una corriente denominada *educación basada en competencias*, que se caracteriza como un “sistema educativo que enfatiza la especificación, aprendizaje y demostración de aquellas competencias (conocimientos, destrezas y actitudes) que tienen una importancia central para

³⁹ Mi agradecimiento a Pilar Núñez Delgado por la reflexión que me brindó sobre el trabajo de Chomsky y la competencia comunicativa para esta investigación.

⁴⁰ La traducción del significado de Chomsky a otras disciplinas no es inmediato. Puig (2008, p.89), emplea esa noción de competencia lingüística para acotar el significado de competencia matemática. Pero desde los trabajos de Chomsky, el significado del término competencia se ha venido aplicando en un amplio campo de disciplinas, y el tándem competencia-desempeño en lingüística se ha generalizado en psicología. Varios investigadores, entre los que se encuentran Weinert (2004), señalan que el constructo teórico de Chomsky tiene una difícil traducción o aplicación en otros fenómenos psicológicos y en otras disciplinas diferentes de la lingüística. Algunas de estas opiniones se sostienen en el hecho de que el modelo de Chomsky deja de lado aspectos socioculturales, y ese modelo se ha puesto a debate continuamente incluso dentro de la propia lingüística (Hymes, 1971; Canale, 1983; Hornberger, 1989; Llobera, 1995; Lomas, 1999).

determinadas tareas”⁴¹. Desde entonces el uso del término competencia se ha empleado con diferentes acepciones en el terreno educativo, y es frecuente encontrar dudas e imprecisiones sobre su interpretación (Short, 1985).

La fuerte corriente actual en la que el término competencia organiza las metas formativas de prácticamente la totalidad de los documentos curriculares para todos los niveles educativos, ha puesto de manifiesto coincidencias y discrepancias acerca de sus definiciones y caracterizaciones. En Rico y Lupiáñez, 2008, pp. 132-142), hemos recogido y analizado diferentes acercamientos a la noción de competencia y concluimos que este análisis proporciona tres ideas centrales que, de manera más o menos explícita, intervienen en todas ellas:

- componentes *cognitivos o de otros tipos que entran en la caracterización que cada autor hace de la competencia,*
- *finalidad o finalidades que se le asignan, y*
- *contexto en que se sitúa o desempeña la competencia (p. 138).*

La Tabla 7 recoge el análisis de diferentes documentos analizados de acuerdo a estas tres ideas clave.

Tabla 7

Comparación de ideas clave entre distintas caracterizaciones educativas sobre competencias (a partir de la propuesta de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 139)

Componentes	Finalidad	Contexto
<i>Recomendación del Parlamento Europeo (Comisión de las Comunidades Europeas, 2005)</i>		
Conocimientos, capacidades, actitudes	Actuar	Situación determinada
<i>Proyecto Eurydice Unidad Europea de Eurydice (2002)</i>		
Contenidos básicos, aprendizaje, Conocimientos, destrezas, valores, actitudes	Vivir, trabajar, desarrollar capacidades, mejorar calidad vida, tomar decisiones	Social
<i>Proyecto DeSeCo OCDE (2005b)</i>		
Conocimientos, destrezas, actitudes	Enfrentar demandas complejas	Contexto particular

⁴¹ Traducción de la definición del término ‘Competency-based Education’ recogida el 10 de Julio de 2005, en la base de datos sobre términos educativos de la UNESCO, disponible en <http://www.ulcc.ac.uk/unesco>. Esta corriente la describe con más detalle Bowden (1997), cuyo análisis lo resume Gómez (2007).

Tabla 7

Comparación de ideas clave entre distintas caracterizaciones educativas sobre competencias (a partir de la propuesta de Rico y Lupiáñez, 2008, p. 139)

Componentes	Finalidad	Contexto
	<i>Proyecto PISA</i> OCDE (2005a)	
Capacidad para analizar, razonar y comunicar	Interpretar y resolver problemas	Variedad de áreas
	<i>Proyecto Tuning</i> González y Wagenaar (2003)	
Capacidades, conocimiento, comprensión, valores, aptitudes, destrezas, responsabilidades	Actuar, aplicar conocimientos a la práctica	Ciertas situaciones
	<i>Estructura de las Enseñanzas Universitarias</i> Ministerio de Educación y Ciencia (2005)	
Conocimientos, habilidades, actitudes, valores	Afrontar resolución de problemas, intervenir en asuntos	Académico, profesional; social
	<i>Currículo de Educación Secundaria Obligatoria</i> Ministerio de Educación y Ciencia (2007b)	
Conjunto de saberes, distintos tipos de conocimientos	Integrar, aplicar, utilizar, ejercer ciudadanía, realización personal	Diferentes situaciones y contextos
	<i>Evaluación de Diagnóstico</i> Junta de Andalucía (2006)	
Capacidades, conocimientos, destrezas y actitudes	Aplicar	Situaciones de la vida real y cotidiana
	Perrenoud (1997)	
Capacidades, conocimientos,	Actuar.	Situaciones definidas
	Weinert (2001)	
Capacidades; conocimientos; destrezas	Alcanzar un objetivo	No explícito
	Coolahan (1996)	
Conocimientos; experiencias; valores; disposiciones	Desarrollo personal	Práctica educativa

El análisis de las diferentes caracterizaciones, permite extraer tres ideas importantes en relación al significado de competencia en educación (Rico y Lupiáñez, 2008a):

- La competencia *sirve para y se manifiesta mediante la acción*, lo cual se expresa de diversos modos, genéricos o específicos como actuar, interpretar y resolver problemas, enfrentar demandas complejas o aplicar conocimientos a la práctica.
- La competencia *se muestra mediante el desarrollo personal y social* del sujeto competente, lo cual también se expresa de diversas maneras como vivir, desarrollar capacidades, tomar decisiones, continuar aprendiendo, trabajar, o mejorar la calidad de vida.
- La competencia siempre hace referencia a un contexto de aplicación. Hay un claro énfasis en que la acción y el desarrollo, que se derivan de las componentes cognitivas y actitudinales tienen lugar en un marco concreto, de manera contextualizada. Las menciones son amplias y, a veces, imprecisas pero no dejan lugar a dudas. En el análisis anterior se mencionan situaciones determinadas o definidas, y las referencias a contextos tienen mayor diversidad y transmiten más precisión: contextos académicos, profesionales o sociales en una variedad de áreas, en la práctica educativa o en la sociedad.

Este análisis nos permite caracterizar la competencia de acuerdo a tres componentes (Figura 9), de manera análoga a como lo hicimos con la noción de objetivo (Figura 8).

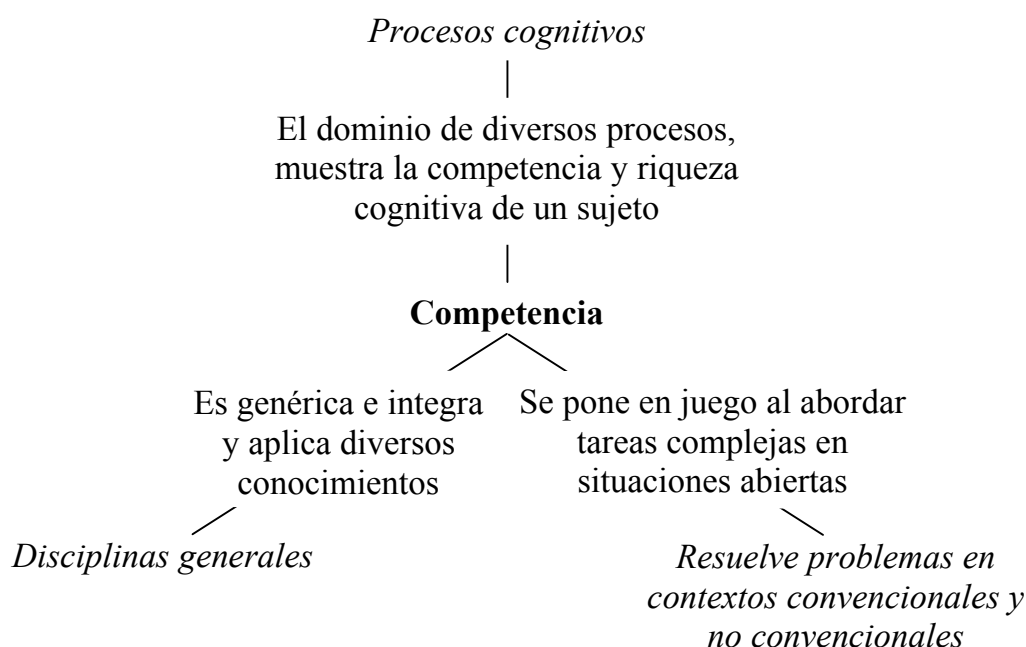


Figura 9. Componentes de la noción de competencia

Este análisis estructural es coherente con el planteamiento que hemos hecho de las expectativas de aprendizaje en un marco curricular y responde a un

planteamiento funcional como el que realizan Rychen y Salganick (2006), quienes establecen que:

Una competencia se define como la habilidad para satisfacer con éxito exigencias complejas en un contexto determinado, mediante la movilización de prerrequisitos psicosociales que incluyen aspectos tanto cognitivos como no cognitivos (...) esto representa un enfoque orientado hacia la demanda o funcional (...) El centro de atención principal se pone en los resultados obtenidos por el individuo mediante una acción, decisión o forma de comportarse con respecto a las demandas que se le plantean. (p. 74)

Le Boterf (2002) añade a esta reflexión aspectos metacognitivos y puntualiza lo importante del entorno social en el que se desarrollan las competencias.

Los objetivos, que se enuncian en términos de capacidades o de dominio de determinados conceptos o procedimientos, muestran aptitudes, expresan las prioridades formativas, las capacidades que se proponen en el corto plazo, para una etapa o curso y unos contenidos determinados. Tienen carácter local. Los objetivos contribuyen, singularmente, al desarrollo y avance de una o varias competencias. Las competencias integran diversos aprendizajes concretos y se plantean para la totalidad de la educación obligatoria en el nuevo currículo.

La consideración de las competencias implica nuevos desafíos ya que “no existe una relación unívoca entre la enseñanza de determinadas áreas o materias y el desarrollo de ciertas competencias” (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31688). A diferencia de los objetivos, que están usualmente vinculados con materias y contenidos específicos, las competencias no lo están y su logro suele ser consecuencia del trabajo en diversas áreas o materias.

Desde una perspectiva curricular, objetivos y competencias enuncian expectativas sobre el aprendizaje de los escolares. Las competencias corresponden al segundo nivel de reflexión, el Sistema Educativo (§2.1.1), ya que la consecución de tales expectativas no es exclusiva de una materia ni de un nivel determinados, sino que su alcance se establece para las etapas del sistema educativo.

1.5 La Competencia Matemática

Los Reales Decretos 1513/2006 y 1631/2006 (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b, 2006c) de enseñanzas mínimas de primaria y de secundaria obligatoria, fijan ocho competencias básicas que los alumnos y alumnas deberán adquirir al finalizar las correspondientes etapas:

1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.

7. Competencia para aprender a aprender.

8. Autonomía e iniciativa personal.

La competencia matemática ocupa un lugar destacado en los informes, estudios y reformas curriculares nacionales e internacionales. En el contexto de la *Propuesta de Recomendación sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente* (Comisión de las Comunidades Europeas, 2005), la competencia matemática se define como

la habilidad para utilizar sumas, restas, multiplicaciones, divisiones y fracciones en el cálculo mental o escrito con el fin de resolver diversos problemas en situaciones cotidianas. El énfasis se sitúa en el proceso y la actividad, aunque también en los conocimientos. La competencia matemática entraña -en distintos grados- la capacidad y la voluntad de utilizar modos matemáticos de pensamiento (pensamiento lógico y espacial) y representación (fórmulas, modelos, construcciones, gráficos y diagramas).(p. 17)

A continuación describen conocimientos, capacidades y actitudes esenciales que se relacionan con la competencia matemática:

*Las capacidades necesarias en el ámbito de las matemáticas incluyen un buen **conocimiento** de los números, las medidas y las estructuras, así como de las operaciones básicas y las representaciones matemáticas básicas, y la comprensión de los términos y conceptos matemáticos y de las preguntas a las que las matemáticas pueden dar respuesta.*

*Las personas deberían contar con las **capacidades** necesarias para aplicar los principios y los procesos matemáticos básicos en situaciones cotidianas de la vida privada y profesional, así como para seguir y evaluar cadenas argumentales. Deberían ser capaces de razonar matemáticamente, comprender una demostración matemática y comunicarse en el lenguaje matemático, así como de utilizar las herramientas de ayuda adecuadas.*

*Una **actitud** positiva en matemáticas se basa en el respeto de la verdad y en la voluntad de encontrar argumentos y evaluar su validez.* (p. 17, negritas en el original)

El documento *Las Competencias Clave* (Unidad Europea de Eurydice, 2002), dedica un apartado a identificar este tipo de competencias. En el documento se reconoce la importancia del cálculo aritmético, prioritariamente, así como su carácter nuclear de competencia básica y de competencia transversal (pp. 15-16).

En el Proyecto PISA la noción de competencia es central⁴², aunque a lo largo de diferentes informes publicados se ha utilizado con significados distintos (Rico, 2007, p. 42).

El dominio sobre matemáticas que se estudia en el proyecto PISA se conoce como Alfabetización Matemática -*Mathematical Literacy*- (OCDE, 2003), que

⁴² El impacto de la noción de competencia planteada por el estudio PISA ha sido y está siendo determinante para la revisión de las orientaciones y de la normativa sobre las matemáticas escolares en la mayoría de los países de la OCDE, como en España y otros en vías de desarrollo.

también se ha traducido como Competencia Matemática (OCDE, 2004; OCDE 2005a). Se define como

La capacidad individual para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados, utilizar las matemáticas y comprometerse con ellas, y satisfacer las necesidades de la vida personal como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo. (OCDE, 2004, p. 3).

El foco de la evaluación PISA 2003⁴³ se centra, pues, en cómo los escolares pueden utilizar en situaciones usuales de la vida cotidiana lo que han aprendido y no sólo, ni fundamentalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido (OCDE, 2004).

El carácter complementario del Proyecto DeSeCo respecto de la evaluación PISA es manifiesto porque se centra en elaborar un marco donde situar las competencias básicas, pero no entra en su consideración singular (OCDE, 2005b).

Las competencias básicas específicas no son objeto de estudio en este proyecto, que no se refiere explícitamente a la competencia matemática. Por el contrario, proporciona un marco al cual deben adecuarse tales competencias básicas. La competencia matemática establecida en PISA satisface las condiciones señaladas para las competencias básicas de manera general por el proyecto. El concepto establecido en el Resumen Ejecutivo de DeSeCo (OCDE, 2005b), proporciona enraizamiento a la noción de competencia de PISA (Rico y Lupiáñez, 2008a).

Adding it up (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001), es un informe del Consejo Nacional de Investigación de Estados Unidos⁴⁴, centrado en las matemáticas escolares desde Educación Infantil hasta 2º de ESO⁴⁵. Las principales finalidades de este informe son:

- Sintetizar la investigación sobre el aprendizaje de las matemáticas en esos niveles;
- suministrar recomendaciones basadas en la investigación para la enseñanza, la formación del profesorado y el currículo, para mejorar el aprendizaje de los escolares y para identificar áreas en las que fuese necesario investigar; y
- dar recomendaciones y guías a educadores, investigadores, autores de libros, representantes de política educativa y a padres.

Todo el estudio se organiza y articula en torno a una noción que se usa para caracterizar las expectativas sobre el aprendizaje matemático de los escolares al término de su formación, es decir, aquel dominio que los alumnos deben desarrollar durante su formación matemática. Los autores emplean la noción “*mathematical proficiency*” para expresar la complejidad de ese aprendizaje de

⁴³ Hasta el momento, 2003 fue el último año en el que las matemáticas fueron el foco principal de estudio en el Proyecto PISA.

⁴⁴ National Research Council, en inglés.

⁴⁵ Pre-Kindergarten – 8º grado en el sistema educativo estadounidense.

las matemáticas. Seleccionan ese término pues consideran que no existe ningún otro que recoja completamente todos los aspectos de destreza, competencia, conocimiento y facilidad en matemáticas⁴⁶.

Este informe considera que la competencia matemática (mathematical proficiency) tiene cinco componentes (p. 116):

- *Comprensión conceptual*: comprensión de los conceptos matemáticos, las operaciones y las relaciones. Se refiere a una comprensión integrada y funcional de las ideas matemáticas.
- *Fluidez procedimental*: habilidad para llevar a cabo procedimientos de manera fluida, precisa, eficiente y apropiada. También se refiere al conocimiento de cuándo y cómo llevarlos a cabo.
- *Competencia estratégica*: habilidad para formular, representar y resolver problemas matemáticos.
- *Razonamiento adaptativo*: capacidad para el pensamiento lógico, la reflexión, la explicación y la justificación. También se refiere a las relaciones entre conceptos y situaciones.
- *Disposición productiva*: inclinación habitual a considerar las matemáticas como algo sensible, útil y que vale la pena, conjuntamente con la creencia de ser diligente y eficaz en matemáticas.

Como señalan los autores, esas cinco componentes que conforman la competencia matemática están entrelazadas y son interdependientes, ya que si sólo se desarrollase una o algunas de ellas no se alcanzaría la competencia matemática. Además, señalan otros dos aspectos importantes que ya destacamos antes cuando caracterizamos la noción de competencia como expectativa de aprendizaje.

El primero es que la competencia matemática admite un amplio conjunto de niveles, y que por tanto no es posible hablar en términos de todo o nada. El segundo es que la competencia matemática se desarrolla a largo plazo, durante toda la formación matemática (p. 135).

Gómez (2007) señala que la noción de competencia se emplea en el informe para definir los objetivos de aprendizaje por niveles en el bloque de números, y destaca que esta noción tiene un carácter eminentemente cognitivo pues resalta las nociones de conocimiento conceptual, conocimiento procedimental y resolución de problemas (p. 46).

⁴⁶ La traducción del término “proficiency” al español no es sencilla. Traducirlo como competencia, destreza, capacidad o pericia, eliminaría, en principio parte del significado que le dan los autores. Pero precisamente esas son las traducciones comúnmente aceptadas del término (ver por ejemplo el análisis realizado en el Webster’s Online Dictionary: <http://www.websters-online-dictionary.org/definition/proficiency>). La definición que ahí se recoge es “la cualidad de tener gran facilidad o competencia”. Mantendremos por tanto el término competencia, por tener cierto paralelismo con el significado que, en nuestro marco de trabajo, le damos a dicho término.

Finalmente, el Ministerio de Educación proporciona también una descripción normativa sobre la competencia matemática (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006c, pp. 686-687) en la que destaca la integración y el empleo de diferentes conocimientos matemáticos para expresar información, interpretar la realidad, resolver problemas y afrontar situaciones de la vida cotidiana.

Diferentes Acercamientos pero con Descriptores Similares

De las definiciones revisadas y analizadas sobre competencia matemática, destacamos aquellas que se centran en unos atributos –conocimientos, capacidades y actitudes–, que postulan la necesidad de realizar el aprendizaje en contexto y que se ponen a prueba mediante el planteamiento y solución de problemas en situaciones de la vida real. La competencia matemática expresa unas expectativas sobre el aprendizaje matemático de los escolares, relativas al conocimiento matemático en acción.

Hemos comprobado, por lo tanto, que la competencia matemática:

- consiste en un saber hacer en la práctica mediante herramientas matemáticas;
- consiste en utilizar la actividad matemática en contextos tan variados como sea posible;
- hace especial énfasis en aspectos sociales como la comunicación y la argumentación;
- muestra cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana; y
- se alcanzará en la medida en que los conocimientos matemáticos se apliquen de manera espontánea a una amplia variedad de situaciones, provenientes de otros campos de conocimiento y de la vida cotidiana.

Después de esta revisión, elegimos para nuestro estudio la caracterización que hace el proyecto PISA de la noción de competencia matemática, ya que resulta concisa y operativa para el profesorado y se relaciona adecuadamente con otras dimensiones curriculares. Por esta razón, a continuación detallamos otros aspectos del marco teórico de este proyecto que son importantes en nuestra investigación.

1.6 La Competencia Matemática en el Proyecto PISA

La evaluación PISA de la OCDE⁴⁷ pretende obtener, entre otras, información sobre el dominio de los ciudadanos de una comunidad cuando usan las herramientas matemáticas en situaciones de la vida cotidiana y, a partir de esa información, establecer referentes de la calidad de su sistema educativo, es decir, del nivel y desarrollo de la competencia matemática. La evaluación PISA se sostiene sobre un marco teórico preciso y complejo, cuyo conocimiento conviene conocer si se desea interpretar correctamente los indicadores, datos y valoraciones derivados del estudio (Rico, 2004).

⁴⁷ Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (www.oecd.org).

Pero en este caso, no atenderemos todos los elementos de ese marco, que se pueden consultar en los diferentes informes y trabajos publicados (OCDE, 2005a; Rico, 2004, 2007b)⁴⁸. Nos centraremos en tres aspectos importantes para nuestra investigación: la caracterización de la competencia matemática general en torno a ocho competencias concretas, los posibles niveles de desarrollo de esas competencias y algunos indicadores para tres niveles de complejidad de tareas matemáticas y su relación con esas ocho competencias matemáticas.

Competencias Matemáticas de PISA

Estas competencias centran la educación matemática en el estudiante, en su aprendizaje y en el enfoque funcional de ese proceso y establecen variables de proceso para el proyecto PISA. Son, como ya hemos dicho:

1. Pensar y razonar.
2. Argumentar
3. Comunicar
4. Modelizar
5. Plantear y resolver problemas
6. Representar
7. Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones⁴⁹
8. Emplear soportes y herramientas tecnológicas

El proyecto PISA sostiene que el desarrollo cognitivo de los estudiantes en matemáticas se pueden expresar mediante los logros individuales en este conjunto de competencias y procesos. Postula que *las competencias matemáticas* describen, en conjunto, los conocimientos, capacidades, habilidades y actitudes que se requieren para el uso de las matemáticas en contexto, para el desarrollo de la competencia matemática general. Elegimos esas competencias como constitutivas de la competencia matemática, como sistema para analizar su desarrollo y evaluar sus logros.

A continuación presentamos como indicadores de logro algunas capacidades relevantes, que contribuyen a ejemplificar e identificar cada una de esas competencias.

Pensar y Razonar

En esta competencia se incluyen capacidades propias de la actividad matemática, que constituyen procedimientos fundamentales de la disciplina y que sería deseable que dominaran los escolares al término de su formación obligatoria.

⁴⁸ Ya nos referimos a la organización de *situaciones* en las que pueden enmarcarse las tareas matemáticas, en la descripción del análisis fenomenológico que hicimos al presentar el análisis de contenido en el capítulo 2.

⁴⁹ Por abreviar, nos referiremos en varias ocasiones a esta competencia como *utilizar el lenguaje simbólico*, mientras que a la última lo haremos como *emplear herramientas tecnológicas*.

Tiene que ver con plantear y dar respuesta a cuestiones propias de la matemática y conocer el tipo de respuestas que ofrecen las matemáticas. También tiene que ver con ser capaz de desarrollar estrategias con cierta independencia o con ser capaz de seguir unas instrucciones detalladas. En el desarrollo de esta competencia se puede pasar de realizar razonamientos evidentes y sencillos a poner en juego razonamientos matemáticos muy avanzados.

Más concretamente, esta competencia tiene que ver con:

- plantear cuestiones propias de las matemáticas (¿Cuántos hay? ¿Cómo encontrarlo? Si es así, ¿entonces...? etc.);
- conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones;
- distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionadas); y
- entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

*Argumentar y Justificar*⁵⁰

El modo en el que los escolares justifican sus afirmaciones, constituye una rica fuente de información para el profesor acerca del conocimiento matemático de esos escolares y del modo en que lo movilizan y ponen en juego.

En matemáticas, la justificación de afirmaciones y proposiciones se formaliza en forma de demostraciones. La demostración matemática consiste en un conjunto de técnicas que permiten inferir y validar nuevos conocimientos matemáticos a partir de conocimientos anteriores. Por tanto, es un medio para el desarrollo de la propia disciplina. En el momento en que una demostración se admite como correcta por la comunidad, su conclusión pasa a formar parte del acervo matemático.

La demostración matemática recoge los fundamentos tradicionales de la disciplina: es rigurosa y precisa; emplea adecuadamente el lenguaje matemático y los resultados ya conocidos, y posee toda la formalidad necesaria. Todo esto hace que la demostración sea pilar central sobre el que se sostienen la validez y el desarrollo de la matemática.

Pero cuando nos centramos en las matemáticas escolares, los énfasis y las prioridades son diferentes. La capacidad de un individuo para demostrar en matemáticas está relacionada con su capacidad para razonar y para elaborar

⁵⁰ En los documentos oficiales de PISA, esta competencia se llama simplemente “argumentar”. Esta modificación de la denominación que realizamos en este trabajo, se enmarca en las investigaciones sobre formación inicial de profesores de matemáticas que venimos realizando en la Universidad de Granada. Dentro de las investigaciones en educación matemática, es frecuente y está documentado, que la argumentación es un tipo de validación que en su propia estructura se basa en el lenguaje con la intencionalidad fundamental de convencer (Duval, 1999). Sin embargo, en las matemáticas escolares tienen cabida otras formas de justificación que promueven diferentes actuaciones de los escolares, como la explicación, el descubrimiento o la sistematización, entre otros (de Villiers, 1999; Hanna, 2000).

argumentos que justifiquen sus afirmaciones y deducciones. Sin embargo, el *método formal* de justificación no es directamente trasladable al ámbito escolar. (González, 2002).

Existen numerosas investigaciones que ponen de manifiesto que, antes de llegar a elaborar demostraciones matemáticas formales, hay diferentes formas de justificación que involucran fundamentos, procesos cognitivos y valores formales diferentes entre sí, y diferentes a los de la demostración formal (Balacheff, 2000; Miyakazy, 2000; Marrades y Gutiérrez, 2000).

Estos *otros* modos de justificación tienen especial relevancia en la educación matemática secundaria, pues ponen de manifiesto gran parte del significado que para los escolares tienen las nociones matemáticas que precisan de justificación. Además, al quitar peso al rigor del razonamiento empleado, la justificación no sólo sirve para comprobar la veracidad de una propiedad matemática, sino que surgen otras funciones para estas justificaciones: explicar, descubrir, generalizar, verificar, refutar, o sistematizar (De Villiers, 1999).

La competencia de argumentar y justificar incluye que los escolares sean capaces de elaborar argumentos y explicaciones que justifiquen sus afirmaciones, de desarrollar paulatinamente explicaciones más sólidas y de identificar y validar la bondad de los argumentos y las pruebas realizadas por otros.

Esta competencia por lo tanto tiene que ver con:

- conocer lo que son las pruebas y demostraciones matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático;
- seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos;
- disponer de sentido para la heurística (¿Qué puede, o no, ocurrir y porqué?);
y
- crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar

Comunicarse en el aula, de manera verbal o escrita, entre estudiantes o entre ellos y el profesor, es el medio por el que se lleva a la práctica la actividad de enseñar. La comunicación se produce cuando el profesor explica algún concepto, cuando propone una tarea a sus escolares, cuando los estudiantes comentan algo sobre ese concepto o discuten entre sí acerca de esa tarea, o bien cuando éstos responden al profesor.

Es tal la complejidad de todo este proceso, que desde los años setenta toda esa actividad de interacción ha sido objeto de investigación desde la psicología del aprendizaje de las matemáticas. Green (1983), encuentra coincidencias en todos esos trabajos, aun cuando parten de enfoques diferentes. Este autor señala algunos principios e ideas clave:

- La interacción que tiene lugar en el aula es un proceso gobernado por reglas.
- Las actividades que despliegan profesores y alumnos en el aula, y las

interacciones que estableen durante su transcurso son, en buena medida, resultado de un proceso de construcción entre los participantes.

- El significado depende del contexto específico en el que se manifiesta.
- La comprensión y construcción de significados sobre los contenidos escolares comporta la puesta en marcha de diferentes procesos cognitivos.
- Las aulas son entornos comunicativos con unas características propias.
- La enseñanza es un proceso comunicativo asimétrico.

De toda esa complejidad y diversidad, la competencia de comunicar se centra sólo en aquellos aspectos que se relacionan con la expresión de los escolares y de la forma en que se comunican. Esta competencia incluye, por tanto, expresarse de diferentes formas, sobre un contenido matemático, tanto de manera oral como escrita. También incluye comprender otras afirmaciones orales o escritas sobre esas cuestiones.

Como competencia, la comunicación tiene que ver con que los escolares:

- expresen de manera oral o escrita acerca de las matemáticas; y
- comprendan e interpreten los enunciados orales o escritos de otras personas.

Modelizar

Las tareas de modelización se enmarcan dentro de aquellos procesos que permiten a los estudiantes el manejo y uso de conceptos para la resolución de problemas. Constituye, sin duda, unos de los peldaños superiores de actuación matemática, por el gran número de conexiones y relaciones que es necesario establecer. Con la modelización matemática no sólo se amplía el conocimiento de los estudiantes, sino que se desarrolla una particular manera de pensamiento y actuación. La modelización matemática contribuye a dotar de mayor significado a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas (Ortiz, 2002, p. 62).

El proceso de modelización matemática se inicia con un problema dado en un entorno y un contexto del mundo real. En primer lugar, se seleccionan y organizan los datos relevantes de ese problema para, a continuación, establecer las estructuras y subestructuras matemáticas que permiten organizar y estudiar esos datos a los efectos de dar respuesta a la cuestión inicialmente planteada. Es la construcción de un modelo matemático adecuado o *matematización horizontal*.

El tercer paso de la modelización es resolver el problema *dentro* de la matemática, con todas las herramientas que ésta nos brinda, o *matematización vertical*. La última fase consiste en interpretar la solución matemática en términos del problema original, con objeto de validar la bondad del modelo seleccionado.

Esta competencia tiene que ver con que los escolares:

- estructuren y analicen la situación o problema inicial;
- expresen esa situación en términos matemáticos;
- construyan o usen modelos matemáticos para resolver ese problema

matemático;

- interpreten los resultados matemáticos obtenidos en términos de la situación o problema inicial; y
- analicen y critiquen ese modelo y sus resultados.

Plantear y Resolver Problemas

Como ya hemos descrito, la resolución de problemas ha sido y sigue constituyendo un eje vertebrador del currículo de matemáticas en muchos países. Su conexión con la matemática funcional subraya, aún más, su importancia en las directrices curriculares actuales. La resolución de problemas ha sido, asimismo, uno de los más importantes focos de investigación en educación matemática.

La gran variedad de tipos de problemas matemáticos que pueden encontrarse, su diversa complejidad, los procesos cognitivos que movilizan, su innegable conexión con la realidad y con otras disciplinas científicas, junto con muchos otros indicadores, subrayan la importancia de esta competencia para resolver problemas en diferentes situaciones y contextos. Desde enfrentarse a problemas muy explícitos y directos hasta comparar y evaluar diferentes estrategias de resolución, todas las capacidades que los escolares pueden desarrollar a partir de la resolución de problemas la convierten en una competencia prioritaria de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en todos los niveles.

En el marco del proyecto PISA, esta competencia de resolución de problemas incluye, también, que los escolares sean capaces de enunciar y plantear problemas en diferentes situaciones y con diferentes criterios.

En resumen, la competencia de plantear y resolver problemas tiene que ver con que los escolares:

- planteen, formulen y definan diferentes tipos de problemas matemáticos (puros, aplicados, de respuesta abierta, cerrados); y
- resuelvan distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías.

Esta competencia está estrechamente relacionada con la de modelización y con algunos aspectos del análisis de contenido que hemos presentado antes, como puede mostrarse en la Figura 10. Destaca el papel del análisis fenomenológico como procedimiento organizador de los campos de fenómenos en los que es posible modelizar problemas mediante nociones matemáticas.

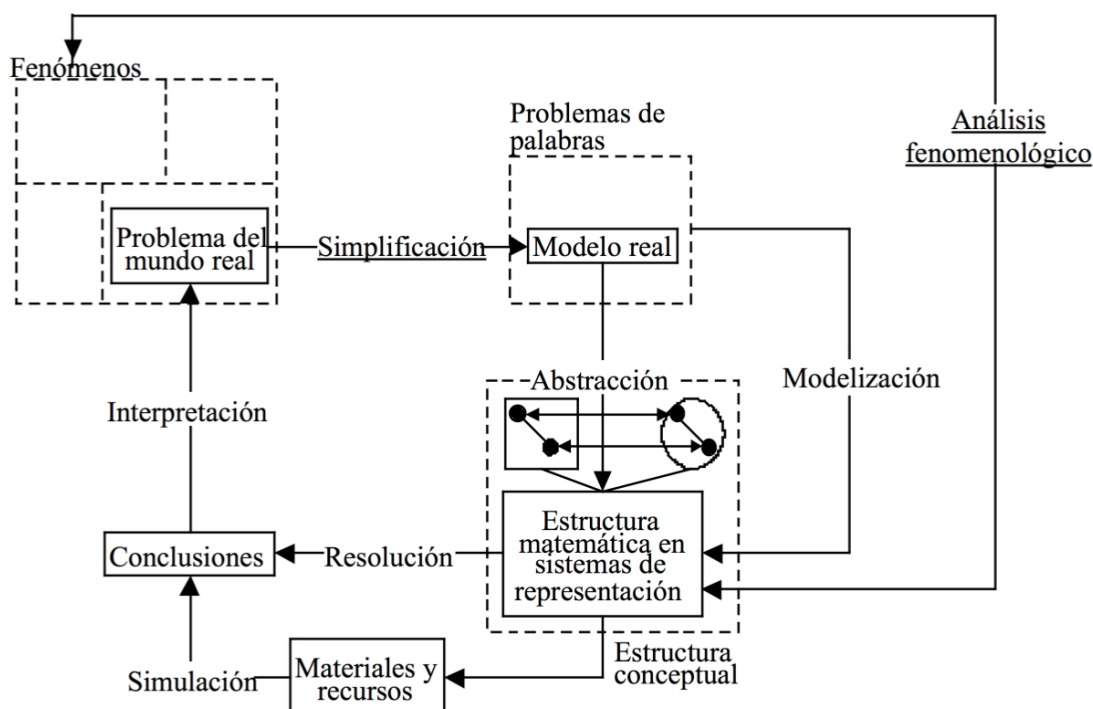


Figura 10. El proceso de modelización y la resolución de problemas (Gómez, 2007, p. 88)

Representar

La hipótesis de que las diferentes representaciones de las nociones matemáticas son elementos fundamentales para su comprensión y por tanto para su enseñanza y aprendizaje, ha llevado a que el interés de especialistas se centre en su estudio. Muchos investigadores han dedicado estudios a precisar el concepto de representación, y a analizar el papel que desempeñan en el razonamiento de los estudiantes (Balacheff y Kaput, 1996; Janvier, 1987; Castro y Castro, 1997; Duval, 1995; Hitt, 1998b, entre otros).

El NCTM, dentro de sus Principios y Estándares para las Matemáticas Escolares del 2000 (NCTM, 2003), señala que:

Los programas de enseñanza de todas las etapas deberían capacitar a todos los estudiantes para:

- *Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.*
- *Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.* (p. 366)

Los sistemas de representación que admite una estructura matemática le otorgan diferentes significados a efectos de su enseñanza, pues ponen de manifiesto distintos elementos, características o propiedades de la estructura (Gómez, 2002, p. 265-266). Un ejemplo sistemas de representación de un tema de matemáticas

lo encontramos en el estudio de las funciones, que podemos representar de manera gráfica, numérica, o simbólica (Janvier, 1987). De hecho, al trabajar con algún concepto o procedimiento matemático, lo que hacemos es operar y trabajar *dentro de o entre varias* de las posibles representaciones que admite.

En actividades cotidianas es frecuente que necesitemos extraer o sintetizar información de gráficos, o bien expresar matemáticamente un problema para afrontar satisfactoriamente su resolución. En esas actuaciones se constata la importancia de relacionar diferentes representaciones de las mismas nociones.

Por tanto, esta competencia tiene que ver con:

- decodificar y codificar;
- interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones; y
- escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico, y Operaciones

Esta competencia está estrechamente relacionada con la de representación. Se centra en un sistema de representación y en el modo de procesamiento que ese sistema de representación proporciona, es decir, en las operaciones que se pueden realizar en él. El lenguaje simbólico es una pieza crucial en matemáticas por la potencia y, al mismo tiempo, por la economía que brinda a los procesos de deducción, de prueba y demostración en matemáticas. El lenguaje simbólico está sujeto a una serie de reglas, convenios y limitaciones a los que es importante que se acerquen los escolares.

También tiene que ver con la aplicación directa de reglas, algoritmos y fórmulas, que constituyen herramientas fundamentales para el trabajo en matemáticas. Ese tipo de rutinas son importantes a la hora de afrontar la resolución de tareas matemáticas más complejas.

Esta competencia tiene que ver, por tanto, con que los escolares sean capaces de:

- decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural;
- traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal;
- manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas; y
- utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas

Se centra en el uso de recursos que contribuyan a la resolución de tareas matemáticas, e incluye capacidades como:

- tener conocimientos sobre diferentes soportes y herramientas;
- ser capaz de utilizar herramientas de las tecnologías de la información que

pueden ayudar en la actividad matemática; y

- conocer las limitaciones de las herramientas y de las tecnologías de la información.

Niveles de Desarrollo de las Competencias Matemáticas PISA

El informe de conclusiones sobre los resultados de la evaluación de PISA, basado en el análisis de las diferentes respuestas que dieron los escolares a las tareas propuestas, interpreta los resultados mediante una clasificación en 6 niveles para cada una de las competencias matemáticas (OCDEa, 2005, p. 46). Esta clasificación permite conocer el nivel de desarrollo en cada una de las competencias de los escolares y apreciar, en su caso, los cambios progresivos de nivel y el desarrollo para cada una de ellas. En la Tabla 8 resumimos los descriptores para cada una de las ocho competencias a partir de la propuesta de la OCDE.

Tabla 8

Descriptores de los niveles empíricos en el desarrollo de las competencias matemáticas PISA

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
<i>Pensar y razonar</i>					
Responder a cuestiones en contextos muy conocidos		Responder a cuestiones en contextos poco familiares		Responder a cuestiones complejas en multitud de contextos	Formar y relacionar conceptos
<i>Argumentar y justificar</i>					
			Elaborar argumentos basados en sus acciones	Formular los razonamientos desarrollados	Elaborar argumentos desde su propia reflexión.
<i>Comunicar</i>					
	Describir resultados obtenidos	Realizar explicaciones sencillas		Comunicar conclusiones con precisión	
<i>Modelizar</i>					
			Usar modelos explícitos en situaciones concretas	Desarrollar y usar modelos en situaciones abiertas	

Tabla 8

Descriptores de los niveles empíricos en el desarrollo de las competencias matemáticas PISA

Nivel 1	Nivel 2	Nivel 3	Nivel 4	Nivel 5	Nivel 6
<i>Resolución de Problemas</i>					
		Seleccionar y aplicar estrategias sencillas		Seleccionar, comparar y evaluar estrategias	Generalizar resultados de problemas
<i>Representar</i>					
Leer datos directamente de tablas o figuras	Usar un único tipo de representación	Conocer y usar diferentes sistemas de representación	Vincular diferentes sistemas de representación incluyendo el simbólico		Relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación
<i>Utilizar el Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico, y las Operaciones</i>					
Realizar operaciones básicas	Usar algoritmos y fórmulas elementales	Aplicar procedimientos descritos con claridad	Representar situaciones reales por símbolos		Dominar con rigor el lenguaje simbólico
<i>Emplear soportes y herramientas tecnológicas</i>					
	Realizar operaciones básicas		Emplear recursos para resolver tareas en situaciones concretas	Usar criterios para buscar información acerca de las matemáticas	Emplear recursos para proponer y resolver tareas en situaciones abiertas

La Tabla 8 recoge, según las diferentes competencias, cuáles son los descriptores básicos de las actuaciones que dominan los escolares a partir de cuyos datos se han establecido cada uno de los seis niveles. El significado de una celda en blanco es que el escolar que se encuentre en un nivel de competencia determinada, sólo es capaz de realizar las acciones relacionadas con los niveles inferiores de esa competencia. Por ejemplo, en el nivel 1, los escolares no son capaces de justificar sus hipótesis o resultados, ni siquiera de una manera poco formal. Pero los escolares que estén en el nivel 5, no son capaces de relacionar y traducir con fluidez diferentes sistemas de representación, pero por ejemplo, sí pueden leer información sencilla de tablas y figuras y resolver problemas usando diferentes sistemas de representación. Estos descriptores contribuyen a establecer el nivel de competencia que poseen los escolares en matemáticas, por lo que constituyen una herramienta práctica desde el punto de vista de la evaluación o del diseño y selección de tareas.

2. LIMITACIONES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

“Aunque la meta de la educación matemática sea que todos los escolares logren un aprendizaje exitoso, es un hecho que mientras sólo algunos prosperan, un gran número de ellos tienen dificultades” (Tall y Razali, 1993, p. 209).

El segundo organizador del currículo que estructura el análisis cognitivo se ocupa de las limitaciones para el aprendizaje que, de diferente modo, pueden distorsionar, ralentizar o frenar el aprendizaje de los escolares. Son muchas las variables que pueden afectar así al desarrollo cognitivo de los escolares en el contexto del aprendizaje escolar: “Las limitaciones de aprendizaje que manifiestan el alumnado a lo largo de su proceso educativo, han sido estudiados desde múltiples perspectivas y han generado marcos conceptuales y modelos explicativos diversos” (Calzadilla, 2006, p. 2).

Algunos de esos estudios se centran en aspectos sociales como el ambiente familiar o el nivel socio cultural (op. cit.). Otros, como los de Manga y Fournier (1997), Kosci (1974, 1981) y Manga y Ramos (2001), se ocupan de trastornos mentales que pueden afectar al rendimiento en matemáticas. Allsopp, Lovin, Green y Savage-Davis (2003) se centran en escolares con necesidades educativas especiales.

Nuestra perspectiva es mucho más concreta. En el contexto de esta investigación y en el del análisis didáctico, nos preocuparemos de limitaciones de aprendizaje en relación a temas matemáticos particulares. Es una manera de complementar la reflexión realizada sobre las expectativas de aprendizaje ya que, metafóricamente, el análisis cognitivo atiende tanto la parte *positiva* del aprendizaje (qué esperamos que sean capaces de hacer los escolares), como la parte *negativa* (qué limitaciones pueden surgir en ese proceso de aprendizaje).

Siguiendo el modelo de los organizadores del currículo propuesto por Rico (1997d), consideraremos los errores y dificultades, como dos tipos básicos de limitaciones en el aprendizaje para cada tema específico de matemáticas⁵¹. El estudio de errores y dificultades

tiene por finalidad poner en conocimiento del profesor los resultados de las investigaciones realizadas en torno a las dificultades de comprensión durante la enseñanza y aprendizaje de los contenidos matemáticos correspondientes. Uno

⁵¹ Cuando Rico introduce el organizador del currículo *errores y dificultades* (Rico, 1997d, p. 47), también se menciona la noción de obstáculo. Dentro de la misma obra, Socas (1997) hace explícito el uso de esa noción a partir de la propuesta de Bachelard (1988) y Brousseau (1983), para describir un conocimiento adquirido que tiene un dominio de eficacia, fuera del cual conduce a resultados erróneos o falsos (p. 137). En esta investigación no consideramos los obstáculos ya que es raro que sean específicos a un tema de matemáticas, o que para cualquier tema de las matemáticas escolares se encuentren ejemplos de obstáculos. No los tratamos por tanto en el programa de formación de profesores en el que contextualizamos nuestra investigación.

de los datos que surgen en estos estudios son los errores de los alumnos, tanto en los aspectos conceptuales como en los procedimentales. (Rico, 1997d, pp. 53-54)

En este apartado delimitaremos un significado y una relación entre dificultad y error y exploraremos diferentes clasificaciones que permiten llevar a cabo un análisis detallado de dificultades y errores de cara a la planificación de unidades didácticas. La mayor parte de esta reflexión se sustenta en los trabajos de Socas (1997) y Rico (1995b).

2.1 Un Caso Concreto de Dificultades de Aprendizaje en Matemáticas

Socas (1997) sostiene que las dificultades de aprendizaje en matemáticas tienen naturaleza distinta y que por tanto su estudio se puede abordar desde diferentes perspectivas. Ese estudio organiza las dificultades de aprendizaje en cinco tipos según su naturaleza (p. 126).

1. Asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
2. Asociadas a los procesos de propios de la actividad matemática.
3. Asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Asociadas a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Asociadas a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.

Las dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos tienen que ver con la propia naturaleza de los conceptos matemáticos, con su naturaleza teórica y formal y al mismo tiempo práctica, capaz de resolver problemas (Onrubia, Rochera, y Barberá, 2001; Sfard, 1991). Estas dificultades también se relacionan con las formas de representar esos conceptos y con las relaciones que se establecen entre esas representaciones (Bagni, 2005; Hitt, 1998a). El propio lenguaje que se usa en las matemáticas y su relación con el lenguaje natural, también están en la base de este tipo de dificultades (Socas, 1997). Podemos observar, por lo tanto, cierta relación entre estas dificultades y algunas de las competencias matemáticas que hemos destacado antes en este mismo capítulo, como por ejemplo *pensar y razonar, representar, comunicar y usar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones*.

En matemáticas también existen modos de actuación propios, que constituyen la base del conocimiento procedimental. El desarrollo de explicaciones, argumentos y demostraciones concentran a menudo muchas de las dificultades de los escolares (Sowder y Harel, 2003). Distinguir esos niveles de justificación y el llevarlos a cabo es un proceso fundamental en matemáticas, pero de una gran complejidad. La resolución de problemas, según vimos en la primera sección de este capítulo, también es fundamental en matemáticas, y más aún en un planteamiento funcional de la matemática escolar. Pero diferentes investigaciones y evaluaciones han puesto de manifiesto que, aún cuando los escolares manejen con soltura nociones matemáticas, su puesta en práctica en la resolución de problemas no es sencilla (Berinderjeet, 1997). Algo similar ocurre con la modelización, en donde están constatadas las dificultades de los escolares para seleccionar y aplicar nociones matemáticas para construir un modelo en

situaciones abiertas (Turner, 2007). Este tipo de dificultades se relacionan, por lo tanto, con las competencias matemáticas *pensar y razonar, argumentar y justificar, plantear y resolver problemas y modelizar*.

Las dificultades que surgen con motivo de procesos de enseñanza se relacionan “con la institución escolar, con el currículo de matemáticas y con los métodos de enseñanza.” (Socas, 1997, p. 133). En este caso, el papel del profesor es predominante, ya que el uso optimizado de los recursos disponibles, la concreción y adaptación de las directrices curriculares y la planificación y puesta en práctica de su actividad docente son parte de su responsabilidad.

Las dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos abarcan también varios aspectos. De una manera general un buen conocimiento del funcionamiento del aprendizaje desde el punto de vista psicológico, contribuye a comprender y analizar mejor la naturaleza de las dificultades de aprendizaje (Jiménez, 1999, p. 12). Por otro lado,

conocer los estadios generales del desarrollo intelectual, representado cada uno de ellos por un modo característico de razonamiento y por unas tareas específicas de matemáticas que los alumnos son capaces de hacer, constituye una información valiosa para los profesores a la hora de diseñar el material de enseñanza. (Socas, 1997, p. 134).

Las teorías de aprendizaje, como vimos en el capítulo 2, suministran información que puede explicar estas y otras cuestiones, y es importante que el profesor conozca diferentes posiciones y alternativas.

Finalmente, las dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales tiene que ver con la aversión de los escolares hacia las matemáticas, que en ocasiones le lleva a situaciones de ansiedad o de infravaloración personal. El propio Socas destaca los trabajos de Buxton (1981) sobre creencias generalizadas acerca de las matemáticas, y McLeod y Adams (1989) sobre aspectos afectivos en matemáticas.

De estos cinco grupos de dificultades, de ahora en adelante nos centraremos en los dos primeros: las que tienen que ver con la complejidad de los objetos matemáticos y las relacionadas con los procesos de pensamiento matemático. La razón es que al centrarse en conceptos y procedimientos matemáticos, se pueden analizar para cada tema de las matemáticas escolares, lo cual corresponde con el carácter local del análisis didáctico.

Pero esa clasificación no resulta operativa, por lo que necesitamos concretarla aún más. En ese punto se centra la relación entre errores y dificultades. Coincidimos con Socas (1997), cuando sostiene que las dificultades “se manifiestan en los alumnos en forma de errores” (p. 125), opinión también defendida por Li y Li (2008). Para profundizar en el significado de esos grupos de dificultades, describiremos dos clasificaciones de errores en los que se pueden hacer visibles y que pueden describirse para cada tema de matemáticas.

2.2 El Error en el Aprendizaje de las Matemáticas

El error es la manifestación visible de una dificultad. El error es observable directamente en las actuaciones de los escolares, en sus respuestas a las cuestiones y tareas que les demanda el profesor. “Cuando un alumno proporciona una respuesta incorrecta a una cuestión matemática que se le plantea se puede decir que su respuesta es errónea, y la solución proporcionada es **un error** en relación con la cuestión propuesta” (Rico, 1995b, p. 6, negrita en el original).

Nos interesan fundamentalmente los errores sistemáticos y predominantes relativos a cada tema de matemáticas, dejando de lado consideraciones más superficiales:

El error va a tener procedencias diferentes, pero en todo caso, va a ser considerado como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado, y no solamente como consecuencia de una falta específica de conocimiento o de un despiste. (Socas, 1997, p. 125)

Rico (1995b) llevó a cabo un trabajo sobre errores desde una visión epistemológica y mediante una revisión del papel y el tratamiento del error en la investigación en Educación Matemática. Resumimos brevemente estos dos aspectos, ya que constituyen, además, el guión básico que seguimos en la asignatura para introducir a los profesores en formación en el análisis de errores y dificultades.

2.3 El Error Desde un Punto de Vista Epistemológico

Rico justifica la importancia del error en educación en los trabajos de varios filósofos de la Ciencia que argumentan cómo el error es parte constitutiva del conocimiento humano y algo inherente al avance científico. A partir de los trabajos de Karl Popper (1979), Gaston Bachelard (1978, 1988) e Imre Lakatos (1978), Rico reivindica la legitimidad del error como parte del proceso de aprendizaje individual y extrae consecuencias importantes para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (1995b, p. 6):

- Los errores pueden contribuir de manera positiva en el aprendizaje de las Matemáticas.
- Los errores no son un fenómeno aleatorio, sino que están estructurados en un sistema consistente. Los errores forman parte de las producciones de los escolares durante todo su proceso de aprendizaje.
- La instrucción debe abandonar la respuesta sancionadora al error, y ha de poner énfasis en su previsión, tratamiento y su consideración en los procesos de aprendizaje.
- Toda actividad de enseñanza es potencialmente generadora de errores.
- Los escolares pueden aprender propiedades, conceptos y procedimientos matemáticos a partir de sus errores, ya que pueden percibir aspectos de los que no eran previamente conscientes.
- Al incurrir en un error, los escolares hacen explícito su conocimiento, y

permiten a los compañeros y al profesor completar su conocimiento o llevarlo a comprender qué ha sido erróneo.

2.4 Investigación Sobre Errores en Educación Matemática

La segunda parte del trabajo de Rico (1995b), constituye una revisión de la investigación en Educación Matemática sobre errores, que le permitió acotar cuatro líneas prioritarias de interés para la investigación, de las que detallaremos más detenidamente la primera. Estas líneas son (pp. 10-16):

1. Análisis, causas y tipologías de errores
2. Tratamiento curricular de los errores
3. Los errores y la formación del profesorado
4. Técnicas de análisis de los errores

Análisis, Causas y Tipologías de Errores

Los estudios relacionados con la primera línea de investigación son los más numerosos, sobre todo porque se ubican ahí todos los trabajos que tratan de categorizar los errores más habituales en temas específicos de matemáticas. Algunos de estos ejemplos son los de Carpenter, Franke y Levi (2003) sobre aritmética y álgebra escolar; Geier (1998) sobre geometría; González (1995) sobre números naturales; Hitt (2003) sobre la noción de infinito y sus repercusiones en el aprendizaje del estudio de funciones; Rico y Castro (1995) sobre razonamiento numérico; Ruiz y Lupiáñez (2009) sobre razón y proporción; Vamvakoussi y Vosniadou (2004) sobre números racionales y el de Zaslavsky (1997), sobre errores relacionados con el estudio de la función cuadrática.

Dentro de este tipo de investigaciones, queremos destacar dos que establecieron diferentes clasificaciones de errores que permiten profundizar en los dos tipos de dificultades de aprendizaje que destacamos antes (relacionadas con conceptos y procedimientos matemáticos). Estas investigaciones se realizaron a partir de marcos metodológicos diferentes y por esa razón ofrecen una visión complementaria interesante.

El primero de los trabajos es el de Radatz (1979), quien desde una revisión de la literatura de investigación, establece cinco categorías generales de errores (Rico, 1995b, pp. 13-14):

- Errores debidos a dificultades de lenguaje.
- Errores debidos a dificultades para obtener información especial.
- Errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.
- Errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento.
- Errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

El segundo trabajo es el de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), quienes realizaron un estudio empírico con estudiantes de Educación secundaria. Después

de recoger las soluciones de estos escolares a una serie de problemas, diferentes expertos clasificaron los errores y la depuración de ese análisis brinda seis categorías descriptivas (Rico, 1995b):

- Datos mal utilizados.
- Interpretación incorrecta del lenguaje.
- Inferencias no validadas lógicamente.
- Teoremas o definiciones deformados.
- Falta de la verificación de la solución.
- Errores técnicos.

Los primeros incluyen errores producidos por alguna discrepancia entre los datos que aparecen en una cuestión y el tratamiento que le ha dado el alumno. La segunda categoría tiene que ver con errores debidos a una traducción incorrecta de hechos matemáticos descritos en un lenguaje simbólico a otro lenguaje simbólico distinto.

La tercera categoría incluye aquellos errores que se producen por falacias de razonamiento y no se deben al contenido específico. La cuarta incluye errores que se producen por deformación de un principio, regla o definición identificable.

Los errores clasificables en la quinta categoría se presentan cuando cada paso en la realización de la tarea es correcto, pero el resultado final no es la solución de la pregunta planteada. Finalmente, los errores técnicos son errores de cálculo, errores al tomar datos de una tabla, errores en la manipulación de símbolos algebraicos y otros derivados de la ejecución de algoritmos básicos (pp. 14-15).

Estas dos clasificaciones permiten organizar con criterio los errores que pueden surgir al trabajar un tema específico de matemáticas y, en el caso de la formación inicial de profesores, suministran una herramienta de análisis y organización de los errores escolares importante y útil. En el capítulo 9, usaremos la segunda clasificación mostrada para clasificar los errores enunciados por los grupos de futuros profesores en sus producciones de la asignatura.

Otros acercamientos de investigación en educación matemática a los errores, se centran en aquellos que surgen con motivo del desarrollo de determinadas competencias matemáticas. Así, los trabajos de Garuti, Boero y Lemut (1998) y Otte (2003) se preocupan de errores relacionados con la demostración matemática y por lo tanto, también relacionados con la competencia *argumentar* y *justificar*. Drake y Amspaugh (1994) analizan errores vinculados a la competencia *comunicar* en el caso de escolares de Educación primaria, mientras que Turner (2007) se preocupa de dificultades de escolares de Educación secundaria relativas a *modelizar*. Cho y Hwang (2006) investigan las dificultades que encuentran un grupo de escolares cuando se enfrentan a la resolución de problemas no convencionales (competencia *plantear y resolver problemas*). Finalmente, destacamos el trabajo de Swan (2001) sobre errores de los escolares en el manejo de diferentes representaciones (vinculados a la competencia

representar), mientras que Ruano, Socas y Palarea (2008) se centran en errores vinculados al trabajo con expresiones algebraicas, que consideramos relacionados estrechamente con el desarrollo de la competencia *utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones*.

Tratamiento Curricular de los Errores

Esta segunda línea de interés para la investigación sobre errores recoge, fundamentalmente, trabajos dedicados a la organización didáctica de la enseñanza que contempla la consideración de los errores como dato destacado. Rico (pp. 16-17) destaca el ejemplo de la enseñanza diagnóstica en matemáticas con el trabajo de Bell (1987) y la propuesta de Borassi (1987), acerca del uso del error como plataforma para explorar nuevos conocimientos matemáticos. En un trabajo posterior, Borassi (1997) describe una aproximación al uso del error como oportunidad de aprendizaje⁵² para los propios escolares.

Torre (2004) constata que, más allá de propuestas muy concretas, no es frecuente encontrar propuestas didácticas centradas en el error en el campo de las ciencias en general, y en el de las matemáticas en particular (p. 17). Este autor propone una lectura constructiva y creativa del error, mediante una estrategia docente basada en una visión “pedagógica y didáctica del error” (p. 15), pero no centrada en ninguna disciplina específica.

Los Errores y la Formación del Profesorado

Los errores, como aspecto importante en el aprendizaje de las matemáticas escolares, deben introducirse en los programas de formación de profesores (Rico, 1995b):

Además del entrenamiento en la observación de las actuaciones de los alumnos y en una guía efectiva para ayudarles a superar las concepciones inadecuadas y los errores, los profesores en formación inicial y permanente deben tener un conocimiento general de las consideraciones teóricas y de fundamentación (...) relativas a la clasificación de errores, determinación de causas, esquemas teóricos de interpretación y desarrollo curricular derivado del diagnóstico, tratamiento y superación de los errores en el aprendizaje. (p. 21)

Al introducir en la estructura del análisis cognitivo que estamos presentando el análisis de errores y dificultades, contribuimos a que futuros profesores desarrollen ese tipo de conocimiento. Al final de este capítulo veremos cómo se puede llevar a cabo este análisis con un ejemplo concreto.

Rico señala otros dos aspectos relativos al estudio de errores en el contexto de la formación de profesores. Por una parte, es importante que los profesores discutan, debatan y hagan explícitas sus creencias acerca del aprendizaje y los errores de los escolares, para así promover “una concepción más completa de las tareas docentes” y para “ayudar a sus alumnos a superar el sentimiento negativo que las personas tienen hacia los errores” (p. 21). Un trabajo sobre este tipo de

⁵² Abordamos la descripción de las oportunidades de aprendizaje en el apartado 3 de este capítulo.

creencias de los profesores es el de Hannula, Kaasila, Pehkonen y Laine (2005).

Un segundo aspecto, tiene que ver con que es frecuente que los profesores en formación incurran en los mismos errores que los escolares al realizar tareas matemáticas. Este aspecto está refrendado en varias investigaciones, como la de Ryan y McCrae (2005), que hicieron un estudio con más de 400 profesores de Educación primaria en formación inicial. De Castro, Castro y Segovia (2008) analizan también errores de futuros profesores de Educación primera, pero focalizados en tareas de estimación de multiplicación y división con números naturales y decimales.

Técnicas de Análisis de los Errores

Esta última línea de investigación, que sólo citamos brevemente, se centra en trabajos que desarrollen o apliquen métodos para el estudio de los errores en matemáticas.

La mayor parte de estas investigaciones realizan análisis estadísticos de distinto orden para cuantificar o clasificar errores, o bien para delimitar patrones de errores (Rico, 1995b, p. 22).

2.5 Análisis de Limitaciones de Aprendizaje en el Análisis Cognitivo

La caracterización de limitaciones de aprendizaje en torno a errores y dificultades suministra una importante herramienta al profesor de cara al diseño de unidades didácticas. Hemos visto cómo las dificultades de aprendizaje forman parte inherente del propio proceso de aprendizaje y que, aunque puedan tener su origen en muchas causas, una de ellas tiene que ver con la propia complejidad del conocimiento matemático. Eso nos ha permitido caracterizar los errores como el aspecto visible de ese tipo de dificultades que se ponen de manifiesto cuándo los escolares afrontan la resolución de tareas.

Desde el punto de vista de la formación inicial de profesores, la descripción de errores y dificultades lleva a los futuros profesores a reflexionar sobre una realidad en el aula de matemáticas y a considerar los errores como herramientas de las que el profesor puede sacar partido. Carrión (2007) señala que

Si el profesor conoce los errores más frecuentes de los estudiantes, tiene ocasión de preparar estrategias didácticas alternativas previas a la realización de la enseñanza para afrontar el aprendizaje de los contenidos que presentan dificultades. Con base en los tipos de errores y en la frecuencia de su incurrimento, hay la posibilidad de contemplar acciones para su prevención en el aula. (pp. 55-56)

La relación de dificultades y errores con los objetivos específicos que se persiguen, dan consistencia, coherencia y unidad a estos dos organizadores del currículo del análisis cognitivo. Como veremos a continuación, el tercer organizador que consideramos refuerza este carácter del análisis cognitivo.

3. OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE Y TAREAS EN LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

El término “oportunidades de aprendizaje” (OTL⁵³) se ha empleado en la investigación educativa con diferentes interpretaciones y énfasis. Como señala Floden (2002), durante más de treinta años de estudios comparativos internacionales, las OTL ha sido una noción importante en la recogida, análisis y comunicación de datos, sobre todo en matemáticas y en el aprendizaje de las ciencias en general.

Con el objetivo de concretar un significado para nuestra investigación en el que enmarcar la noción de tarea, a continuación revisaremos el constructo OTL y sus diferentes interpretaciones en educación. La reflexión que realizamos en el capítulo 2 al describir el análisis de instrucción, en donde concretamos un significado para el término *tarea* y su distinción del de *actividad*, y destacamos distintas clasificaciones de tareas, sirven para cerrar la reflexión sobre esta noción de OTL.

3.1 Oportunidades de Aprendizaje: Revisión de Antecedentes

Aunque las OTL fueron introducidas en la primera aplicación del proyecto FIMS⁵⁴ en los inicios de los años sesenta del siglo pasado, uno de los primeros significados más concretos en educación de la noción OTL se atribuye a John Carroll (1963), quien la definió como el tiempo dedicado al aprendizaje (Collie-Patterson, 2000). Ya desde su desarrollo y aplicación en el FIMS, se hicieron públicas algunas opiniones en contra del uso del término. Freudenthal (1975) realizó una fuerte crítica al modo en el que la IEA⁵⁵ aplicó el concepto de las OTL y como organizaron el FIMS en torno a él. Sus críticas se centraron en que la influencia de los matemáticos y de los educadores matemáticos fue prácticamente insignificante en la fase de preparación del test para evaluar en qué medida se facilitaban OTL a los escolares.

No obstante, es ampliamente compartido que fue algunos años después cuando las OTL fueron más allá de la dimensión temporal y constituyeron un elemento central en el marco de un estudio comparativo que la IEA realizó en Estados Unidos para valorar el logro en matemáticas de sus escolares (McDonnell, 1995; Törnroos, 2005; Boscardin, Aguirre-Muñoz, Stoker, Kim et al., 2005; Snow-Renner, 2001; Collie-Patterson, 2001).

En ese estudio, el objetivo central era comparar el logro de los escolares en diferentes sistemas educativos estadounidenses. Para ello se diseñaron unos cuestionarios para los escolares con ítems sobre matemáticas. Las OTL se constituyeron en una medida de si los escolares habían tenido o no la

⁵³ Del original inglés “Opportunity-To-Learn”.

⁵⁴ First Internacional Mathematics Survey.

⁵⁵ Internacional Association for the Evaluation of Educational Achievement (<http://www.iea.nl/>).

oportunidad de estudiar un tema o de resolver un problema del tipo de los que aparecían en el cuestionario. En el SIMS⁵⁶ que se llevó a cabo entre 1976 y 1982, las OTL cumplieron ese mismo cometido, y para medirlo, se preguntó a los profesores si habían enseñado en sus clases los contenidos matemáticos que estaban detrás de los ítems usados en la evaluación. En caso de que la respuesta fuera negativa, se preguntaba también, entre otras posibilidades, si la razón era que el contenido debía impartirse en un curso distinto, o que ese contenido no formaba parte del currículo (McDonnell, 1995)⁵⁷.

Otras cuestiones que se plantearon a los profesores permiten delimitar el significado que se atribuía a las OTL: metas instruccionales, actitudes y creencias sobre la enseñanza de las matemáticas, estrategias docentes o su formación profesional constituyeron dimensiones de las OTL. Durante muchos años posteriores fueron frecuentes los estudios centrados en la formación y actividad del profesor en comparación con los logros de sus escolares (Gómez, 2007; Raizen y Jones, 1985).

De manera global, lo que se perseguía el estudio SIMS era una comparación entre el currículo oficial, el currículo aplicado y los resultados derivados de su aplicación. El uso de las OTL en este estudio sirvió para que esa noción se comenzara a considerar a mediados de la década de los ochenta del siglo pasado como un indicador que sirviera para orientar tendencias educativas, y para realizar comparaciones curriculares según diferencias geográficas. Más allá del uso en el SIMS, que estaba centrado principalmente en los profesores y en el contenido matemático, en el estudio de las OTL comenzaron a incluirse estudios de escolares y responsables escolares y se abordaban aspectos tales como la organización y los recursos de los centros educativos, el propio contenido en el currículo, la formación previa del profesor y sus estrategias instruccionales (McDonnell, 1995). De hecho, las OTL llegaron a constituirse como los vehículos más apropiados para reconducir los problemas de calidad y equidad de la educación (McLaughlin & Shepard, 1995; Traiman, 1993).

En Floden (2002) se recoge un detallado análisis del papel de las OTL en diferentes estudios comparativos internacionales. Una característica común en esos diferentes estudios es que se reconoce la amplitud de aspectos que abarcan las OTL, que Valverde y sus colaboradores (Valverde et al., 2002) definen como “la configuración de las condiciones sociales, políticas y pedagógicas que suministran a los escolares la posibilidad de adquirir conocimiento, desarrollar destrezas y formar actitudes relacionadas con las materias escolares” (p. 6).

En el marco de la formación de profesores también se ha empleado las OTL

⁵⁶ Second International Mathematics Study.

⁵⁷ Estas preguntas dieron lugar a un debate que aún hoy en día tiene validez. Poco tiempo después de hacerse públicos los resultados del informe PISA 2003 (OCDE, 2005a), fue comúnmente aceptado que aunque los profesores de Educación secundaria españoles no fomentaban en sus clases el tipo de problemas que formaron parte de la evaluación, si era deseable y razonable que al término de esa etapa educativa los escolares resolvieran problemas de ese tipo (Recio y Rico, 2005).

como una noción central. El estudio TEDS-M⁵⁸ constituye un ejemplo relevante, ya que usa el concepto de OTL como noción central para “explicar el impacto de la preparación del profesor en su aprendizaje” (Tatto et al., 2008, p. 44). En este estudio, las OTL persiguen varios propósitos, como son:

una explicación de diferencias en los niveles de conocimiento; como un indicador de variaciones curriculares entre países; como un aspecto de imparcialidad (...); y como una representación de la diversidad del contenido, tanto a nivel global como para grupos específicos de profesores (p. 44).

En la reciente investigación sobre formación de profesores centrada en comunidades de práctica que citamos en el primer capítulo, también se reconoce el constructo de las OTL bajo la naturaleza de esas comunidades, las condiciones que suministran y las actividades que en ellas se abordan (Jaworski, 2008).

Pero más allá de delimitar un significado para las OTL, también se han realizado diferentes aproximaciones para concretar qué aspectos o dimensiones del proceso educativo deben recoger.

3.2 Dimensiones de las Oportunidades de Aprendizaje

En el proyecto TIMSS las OTL⁵⁹ se emplearon para recopilar datos de los escolares que formaron parte del estudio. En este caso, se identificaron cuatro dimensiones relativas al curriculum, al aula, a la escuela y a los escolares. Estas dimensiones delimitaban cuatro cuestiones: ¿Qué se espera que aprendan los escolares? ¿Quién administra la instrucción? ¿Cómo se organiza la instrucción? ¿Qué han aprendido los escolares? (Schmidt y McKnight, 1995; Clarke y Gregory, 2003).

Basándose en el estudio TIMSS, Snow-Renner (2001) profundiza en la cuestión relacionada con la organización de la instrucción y considera tres variables para caracterizar las OTL y analizar los resultados de un grupo de escolares que trabajaron temas de aritmética. Esas tres variables son el *foco curricular*, la *cobertura de contenidos* y las *actividades de aprendizaje de los escolares*⁶⁰.

Lo y Wheatly (1994) definen las OTL como aquellas condiciones o circunstancias dentro de la escuela o el aula que promueven el aprendizaje de todos los escolares, y las caracterizan en función de varias componentes como currículos, profesores, materiales de aprendizaje, diferentes experiencias instruccionales. También señalan que las OTL se relacionan a su vez con la ausencia de barreras que dificulten el aprendizaje. Stevens y Grymes (1993) destaca además el papel del profesor a la hora de determinar oportunidades de aprendizaje “implementando modelos y programas instruccionales” (p. 3).

Reconociendo y admitiendo la importancia de todas las dimensiones que abarca las OTL, no cabe duda que el diseño y la selección de tareas es una de las más

⁵⁸ IEA Teacher Education and Development Study in Mathematics.

⁵⁹ Renombradas como oportunidades educativas (educational opportunity), (Collie-Patterson, 2000), aunque con un significado equivalente.

⁶⁰ *Curricular focus, topic coverage y student learning activities*, en el original (p. 12).

relevantes desde el punto de vista de la actividad del profesor: “La selección de tareas es de especial importancia. (...) el profesor es capaz de planificar actividades que tengan el potencial de crear oportunidades de aprendizaje” (Lo y Wheatly, 1994; p. 148).

En el marco de nuestra investigación, consideramos las tareas como el principal vehículo para suministrar a los escolares oportunidades de aprendizaje, por lo que las tareas constituirán un aspecto central en el análisis cognitivo. Horoks y Robert (2007) sostienen que un análisis detallado de las tareas que los profesores plantearán a los escolares, es fundamental en el aprendizaje de éstos. Carrión (2007) sostiene que “Las oportunidades de los estudiantes para aprender matemáticas dependen del entorno, del tipo de **tareas** y del discurso en que participan.⁶¹” (p. 20)

En el capítulo 2, cuando presentamos el análisis de instrucción, describimos el trabajo que los profesores en formación llevan a cabo para el diseño, selección y secuenciación de tareas en el marco de la asignatura en la que contextualizamos nuestra investigación (§2.5.3). Parte de ese trabajo se centra en clasificar y organizar tareas de acuerdo a (a) los objetivos específicos que persiguen, (b) las competencias que pueden desarrollar o activar y, (c) los errores que permiten detectar y a cuya superación pueden contribuir.

Las tareas constituyen el principal medio por el que un profesor puede perseguir en sus escolares el logro de los objetivos específicos de un tema de matemáticas. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto en el cual proponer determinadas actuaciones a los escolares mediante el uso de una o varias herramientas matemáticas. Las tareas ejemplifican y, a la vez, muestran la diversidad de actividades que pueden considerarse en relación y bajo el enunciado de un determinado objetivo. Las tareas son demandas cognitivas que movilizan conocimientos para su empleo. Una tarea es un reto para el alumno, y sirve para mostrar su aprendizaje sobre un foco de contenido movilizándolo conceptos y procedimientos y, asimismo, un indicador para que el profesor valore el grado de logro del aprendizaje expresado mediante uno o varios objetivos.

A su vez, una familia de tareas conexas también han de contribuir al desarrollo paulatino de las competencias matemáticas en los escolares y servir como instrumentos para valorar su grado de desarrollo. En estas consideraciones reside la principal relación de las tareas con diferentes niveles de expectativas de aprendizaje.

Por otro lado, el diseño y selección de tareas permite al profesor afrontar el estudio de las limitaciones en el aprendizaje en términos de errores y dificultades. Las tareas constituyen indicadores para detectar la existencia de errores en las actuaciones de los escolares, suministran una vía para superarlos, y brindan criterios para evaluar esa superación.

Desde el análisis cognitivo, consideramos de manera primordial la relación entre

⁶¹ Negrita en el original.

tareas, expectativas y limitaciones de aprendizaje que hemos descrito hasta ahora en el contexto del diseño de unidades didácticas por parte del profesor. En las expectativas de aprendizaje, las tareas son el contexto en el que se activan unas capacidades relativas a unos conocimientos específicos (Figura 8). Además, la diversa complejidad de las tareas tiene que ver con la profundidad y amplitud de las diferentes expectativas enunciadas. Igualmente, la mayor o menor variedad de tareas vinculadas a una serie de contenidos, estarán relacionadas con la extensión de expectativas sobre esos contenidos y también con la complejidad de sus dificultades y la diversidad de errores.

4. EL PROCEDIMIENTO DEL ANÁLISIS COGNITIVO DE LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

En el capítulo 2 hemos presentado el análisis didáctico, como una herramienta que permite al profesor diseñar unidades didácticas y que, por lo tanto, contribuye a desarrollar su competencia de planificación (§2.2). El análisis cognitivo es uno de los cuatro procedimientos que conforman el análisis didáctico y se ubica en la dimensión cognitiva del currículo, con el que se aborda la problemática del aprendizaje de un tema matemático por parte de los escolares.

Para abordar esa problemática, el análisis cognitivo se estructura en torno a lo que el profesor espera que aprendan los escolares, a lo que puede interferir en ese aprendizaje y a las demandas cognitivas para activar tal aprendizaje, las cuales permiten a los escolares aprender según las expectativas previstas y al profesor observar si se produce ese aprendizaje de manera efectiva, sin quedar limitado por las dificultades detectadas. Estos tres aspectos delimitan los tres organizadores del currículo que estructuran y organizan el análisis cognitivo y que hemos descrito con detalle en este mismo capítulo:

- las *expectativas de aprendizaje*, que enumeran, describen y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según objetivos específicos y competencias, principalmente;
- el análisis de *limitaciones de aprendizaje*, que se centran en los posibles errores detectados, que se consideran síntomas de las dificultades que hayan podido surgir durante el proceso de aprendizaje y que, por tanto, hay que diagnosticar y superar ya que lo están constriñendo o anulando; y
- las *oportunidades de aprendizaje* que el profesor brinda, mediante las tareas que selecciona y diseña, con las que reta al alumno para que movilice sus conocimientos, en contextos concretos de aplicación, y realice mediante esas herramientas determinadas actividades que muestren las capacidades alcanzadas y, a su vez, contribuyan a su fortalecimiento y desarrollo.

Vamos a presentar a continuación cómo poner en juego estos tres organizadores para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema específico. En este apartado cubrimos dos finalidades. Por una parte, describir cuál es el procedimiento del análisis cognitivo y, por otra, ejemplificar ese procedimiento con el análisis de un

tema específico de matemáticas. Hemos seleccionado el tema del sistema de los números naturales, dando continuidad al análisis didáctico de este tema que iniciamos cuando ejemplificamos el procedimiento del análisis de contenido (§2.3).

4.1 Expectativas sobre el Aprendizaje de los Números Naturales

La primer parte del análisis cognitivo consiste en una revisión curricular que permita establecer cuáles son las finalidades que se persigue con el tema para el que se está diseñando una unidad didáctica. La concreción del nivel educativo al que se dirigirá esa unidad es imprescindible. Esa revisión, unida a la información suministrada por el análisis de contenido previo, permite al profesor enunciar los objetivos específicos que perseguirá la unidad didáctica.

En el capítulo 2, al presentar el análisis de contenido, describimos el tratamiento de los números naturales en los currículos de Educación primaria y secundaria. A partir del desglose, análisis y organización de los contenidos que realizamos entonces, el profesor puede delimitar *prioridades para el aprendizaje* de los contenidos de este tema. Para ello, además de analizar los contenidos seleccionados, tiene que considerar los objetivos del área (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a) y las indicaciones que establece la noción de competencia matemática, tal y como viene establecida por el currículo (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006b). Las prioridades de aprendizaje permiten disponer de un criterio organizados de los objetivos.

En este caso se trata de una opción que debe tomar el profesor o el grupo de profesores, en función del análisis del contenido previo. Los objetivos específicos que se elijan en cada caso son responsabilidad del seminario o departamento de matemáticas y deben expresar con el máximo rigor, amplitud y concisión, las prioridades que sobre el aprendizaje de los escolares se establecen en ese momento.

Después de enunciar y organizar los objetivos específicos, el profesor relaciona este nivel de expectativas con el de las competencias matemáticas. Ese es el orden que seguiremos a continuación.

Prioridades de Aprendizaje y Objetivos Específicos

Retomamos la Figura 7 del capítulo 2, como síntesis de la información suministrada en el análisis de contenido del tema de los números naturales (Figura 11).

En la Figura 11 podemos agrupar algunos de los conceptos y procedimientos recogidos de acuerdo con los focos de contenido originales (§2.3.5) y con las directrices generales del Currículo (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a). En la Figura 12 destacamos cuatro agrupamientos, que nos darán lugar a organizar los objetivos específicos del tema en torno a cuatro focos de contenido para el tema de los números naturales.

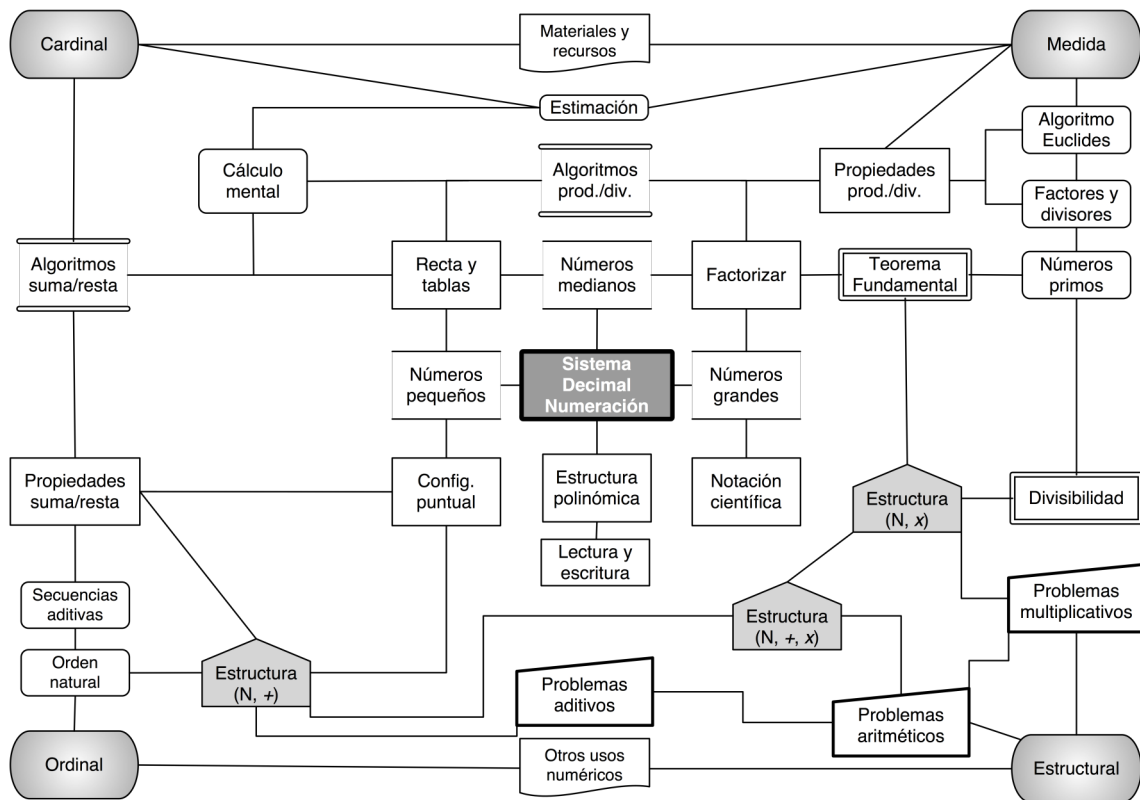


Figura 11. Estructura conceptual del sistema de los números naturales

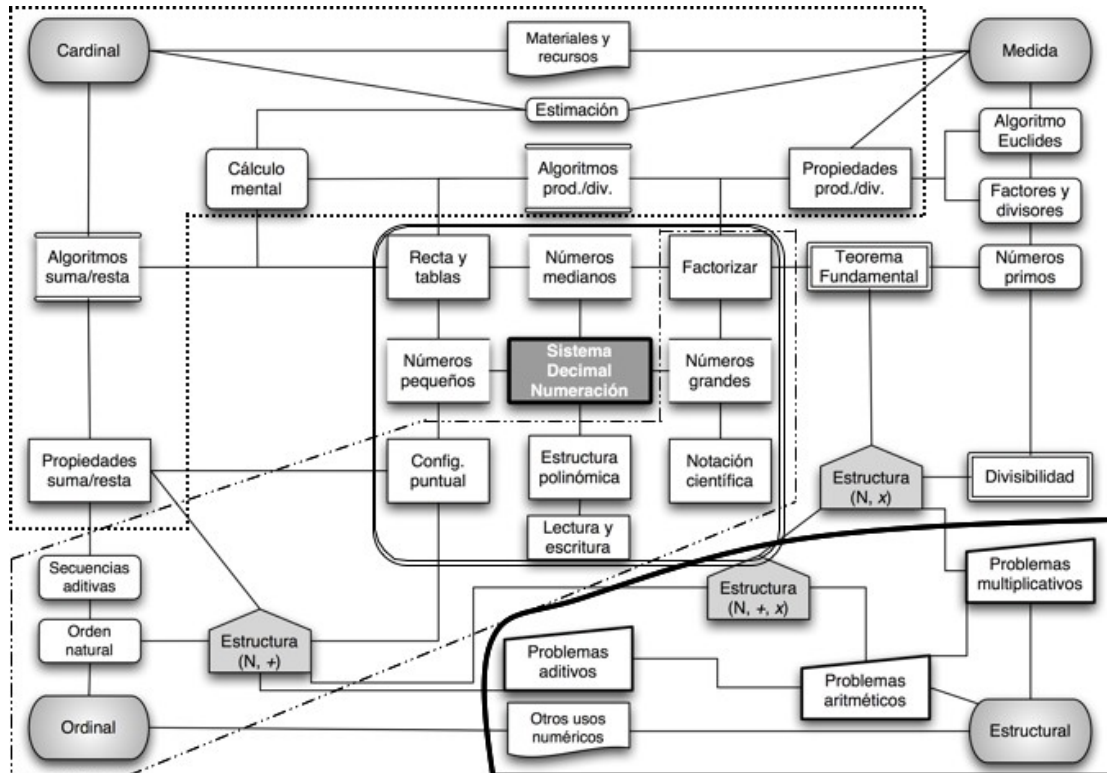


Figura 12. Focos de contenido en el de tema Sistema de Números Naturales

Las cuatro prioridades de aprendizaje surgen de cada uno de esos focos de contenido. Enunciadas para los últimos cursos de Educación primaria y comienzos de secundaria, son las siguientes:

1. *Profundizar en el estudio de relaciones numéricas*, que tiene que ver con la noción de orden, con el estudio de secuencias numéricas, y con relacionar e inventar diferentes modos de representar números naturales.
2. *Dominar el Sistema Decimal de Numeración*, que se concreta en dominar el valor posicional de las cifras, los diferentes órdenes de los números, y con las normas de escritura y lectura de números.
3. *Trabajar con las operaciones y propiedades de los números naturales*, tanto en la dimensión aditiva como en la multiplicativa, además de manejar los procesos de estimación y de cálculo mental.
4. *Interpretar y resolver situaciones y problemas con los números naturales*, incluyendo problemas aditivos y multiplicativos.

Para cada una de estas prioridades, de acuerdo con los documentos curriculares y con la revisión de los contenidos que realizamos en el capítulo 2, podemos enunciar objetivos específicos de aprendizaje sobre los números naturales (Tablas 9 a 12).

Tabla 9

Objetivos específicos relacionados con profundizar en el estudio de las relaciones numéricas

-
- 1 Descubrir e inventar relaciones entre números naturales.
 - 2 Expresar números naturales como resultado de operaciones básicas entre otros naturales.
 - 3 Usar la Tabla-100 para encontrar y mostrar relaciones básicas entre naturales.
 - 4 Describir estructuras aditivas o multiplicativas que comparten 2 ó 3 números.
 - 5 Representar gráficamente los números triangulares y cuadrados.
 - 6 Justificar regularidades en un conjunto de números.
-

Tabla 10

Objetivos específicos relacionados con dominar el sistema decimal de numeración

-
- 7 Expresar el valor de los diferentes órdenes de magnitud de números naturales hasta el billón.
 - 8 Ordenar números naturales *grandes*.
 - 9 Reconocer el valor posicional de una cifra dentro de un número natural.

Tabla 10

Objetivos específicos relacionados con dominar el sistema decimal de numeración

- 10 Ampliar el sistema decimal de numeración a órdenes superiores a 10^{12} .
 - 11 Estimar el orden de magnitud de un número escrito en notación factorial.
 - 12 Representar números naturales en el sistema de numeración romano.
-

Tabla 11

Objetivos específicos relacionados con trabajar con las operaciones y propiedades de los naturales

- 13 Establecer propiedades aditivas y multiplicativas de los números menores que 1000.
 - 14 Realizar mentalmente operaciones sencillas de suma, resta, producto y división exacta de naturales.
 - 15 Redondear por exceso y por defecto números naturales de 2 ó más cifras.
 - 16 Utilizar las técnicas de cálculo aproximado para estimar el resultado de una operación.
 - 17 Estimar el error cometido en redondeos y en el resultado de operaciones.
 - 18 Manejar la calculadora para comparar, ordenar y operar con números naturales.
-

Tabla 12

Objetivos específicos relacionados con interpretar y resolver situaciones y problemas con los números naturales

- 19 Describir situaciones personales, públicas, educativas, laborales y científicas en las que se usen números naturales y operaciones entre ellos.
 - 20 Manejar los números para medir, contar, ordenar, simbolizar y operar, de manera exacta o aproximada, en situaciones que surgen en contextos culturales, científicos y económicos.
 - 21 Utilizar los números naturales con claridad y precisión como herramienta de expresión, representación y comunicación social.
 - 22 Distinguir los diferentes contextos numéricos por sus diferencias estructurales.
 - 23 Enunciar problemas aditivos y multiplicativos con números naturales en diferentes situaciones.
 - 24 Resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante el uso adecuado de datos numéricos en diferentes situaciones.
-

Estos objetivos concretan y muestran de manera precisa las prioridades sobre lo que se espera que aprendan los escolares de tercer ciclo de educación primaria acerca de los números naturales. Las tareas que se propongan a los escolares pueden dirigirse a reforzar una o varias de estas expectativas de aprendizaje, mientras que las unidades didácticas deben centrarse en grupos de ellas. La reflexión realizada sobre los contenidos permite organizar estas expectativas de aprendizaje de manera coherente con las directrices curriculares, atendiendo a la finalidad de que cubran con suficiente exhaustividad toda la complejidad del entramado de nociones que estructuran el tema de los números naturales.

La organización cognitiva de los contenidos permite discernir diferentes actuaciones de los escolares con distinto nivel de complejidad. El estudio de las representaciones permite disponer de criterios para, por ejemplo, estudiar relaciones y propiedades numéricas. La reflexión fenomenológica no sólo organiza campos de problemas, sino que permite acotar los diferentes contextos en los que tiene sentido usar los números naturales.

Vinculación Entre Objetivos Específicos y Competencias Matemáticas

El siguiente paso del análisis cognitivo centrado en las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares consiste en relacionar estos objetivos específicos, establecidos para un contenido matemático y un nivel educativo determinado, con las competencias matemáticas que se espera que los escolares desarrollen a lo largo de su Educación obligatoria.

Como vimos en el primer apartado de este capítulo, las competencias matemáticas que, a nuestro juicio, resultan más coherentes con el planteamiento funcional del currículo de matemáticas, son las ocho competencias matemáticas enunciadas en el Proyecto PISA. Por esta razón, son esas competencias las que seleccionamos para llevar a cabo el análisis cognitivo e implementarlo en el programa de formación de profesores que estudiamos en esta investigación. Nuestra intención ahora es mostrar un procedimiento para expresar la contribución de los objetivos específicos al desarrollo de cada una de esas competencias matemáticas.

Mediante este procedimiento se relacionan dos niveles diferentes de expectativas de aprendizaje, es decir, se desarrolla un vínculo entre la planificación a nivel local (de unas actuaciones concretas en un tema concreto) y el diseño curricular global (de toda una asignatura o de un programa formativo). También se obtiene información sobre la contribución a la formación matemática integral de los escolares que un profesor espera a partir de cada tema concreto. La elección posterior de tareas relacionadas con esos objetivos específicos, permitirá posteriormente obtener criterios de diseño y selección del tipo de tareas y de problemas que sirvan para activar o desarrollar determinadas competencias (Rico y Lupiáñez, 2008).

En las Tablas 13, 14, 15 y 16 hemos retomado los cuatro grupos anteriores de objetivos específicos relacionados con los números naturales, y los relacionamos con las ocho competencias matemáticas de PISA, que aparecen codificadas con las abreviaturas siguientes:

- Pensar y razonar, PR;
- Argumentar y justificar, AJ;
- Comunicar, C;
- Modelizar, M;
- Plantear y resolver problemas, RP;
- Representar, R;
- Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones, LS; y
- Emplear soportes y herramientas tecnológicas, HT.

Tabla 13

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al estudio de las relaciones numéricas

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1 Descubrir e inventar relaciones entre números naturales.	✓		✓			✓	✓	
2 Expresar números naturales como resultado de operaciones básicas entre otros naturales.			✓			✓	✓	✓
3 Usar la Tabla-100 para encontrar y mostrar relaciones básicas entre naturales.	✓					✓		
4 Describir estructuras aditivas o multiplicativas que compartan 2 ó 3 números.	✓	✓						✓
5 Representar gráficamente los números triangulares y cuadrados.						✓		
6 Justificar regularidades en un conjunto de números.	✓	✓					✓	

Tabla 14

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al sistema decimal de numeración

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
7 Expresar el valor de los diferentes órdenes de magnitud de números naturales hasta el billón.	✓		✓				✓	
8 Ordenar números naturales <i>grandes</i> .	✓	✓				✓		
9 Reconocer el valor posicional de una cifra dentro de un número natural.	✓		✓					
10 Ampliar el sistema decimal de numeración a órdenes superiores a 10^{12} .	✓					✓	✓	✓
11 Estimar el orden de magnitud de un número escrito en notación factorial.	✓	✓				✓		
12 Representar números naturales en el sistema de numeración romano.						✓	✓	

Tabla 15

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a las operaciones y propiedades de los naturales

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
13 Establecer propiedades aditivas y multiplicativas de los números menores que 1000.	✓	✓	✓		✓			✓
14 Realizar mentalmente operaciones sencillas de suma, resta, producto y división exacta de naturales.	✓		✓					
15 Redondear por exceso y por defecto números naturales de 2 ó más cifras.	✓				✓	✓		

Tabla 15

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a las operaciones y propiedades de los naturales

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
16 Utilizar las técnicas de cálculo aproximado para estimar el resultado de una operación.		✓	✓		✓			
17 Estimar el error cometido en redondeos y en el resultado de operaciones.	✓	✓						
18 Manejar la calculadora para comparar, ordenar y operar con números naturales.	✓				✓		✓	✓

Tabla 16

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a interpretar y resolver situaciones y problemas con números naturales

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
19 Describir situaciones personales, públicas, educativas, laborales y científicas en las que se usen números naturales y operaciones entre ellos.		✓	✓		✓			
20 Manejar los números para medir, contar, ordenar, simbolizar y operar, de manera exacta o aproximada, en contextos culturales, científicos y económicos.	✓			✓	✓			✓
21 Utilizar los números naturales con claridad y precisión como herramienta de expresión, representación y comunicación		✓	✓			✓		
22 Distinguir diferentes contextos numéricos por sus diferencias estructurales.	✓		✓	✓				

Tabla 16

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos a interpretar y resolver situaciones y problemas con números naturales

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
23 Enunciar problemas aditivos y multiplicativos con números naturales en diferentes situaciones.			✓	✓	✓			
24 Resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante el uso adecuado de datos numéricos en diferentes situaciones.		✓		✓	✓		✓	✓

Cada una de las ocho últimas columnas de las tablas anteriores corresponde a una de las ocho competencias consideradas (§3.1.6). La relación de cada objetivo específico con cada una de las diferentes competencias se expresa poniendo una marca en la celda correspondiente. La marca indica si ese objetivo contribuye o no al desarrollo de la competencia (Lupiáñez y Rico, 2006).

Para tomar la decisión de vincular un objetivo concreto con una competencia dada existen varios criterios. El primero tiene que ver con la propia definición y caracterización de cada una de las competencias matemáticas. Como vimos en el capítulo anterior, cada una de ellas expresa unos énfasis en determinadas actuaciones, indica unas demandas cognitivas prioritarias, y esas características las vinculan con determinados objetivos. Por ejemplo, el objetivo 4 de la Tabla 13 persigue que los escolares, dados dos o tres números naturales, describan y justifiquen estructuras comunes a esos números. Algunos ejemplos de esas estructuras pueden ser que todos los números son pares o impares, que unos se obtienen a partir de otros con alguna operación elemental, o que todos, o ninguno, se pueden expresar como sumas de números naturales consecutivos. Este tipo de actuaciones promueve que los escolares relacionen conceptos y propiedades y que busquen ejemplos que muestren esas relaciones. Si, además, han de explicar en qué consiste la estructura compartida o por qué es válida, están desarrollando su competencia para justificar decisiones o actuaciones. Por eso consideramos que ese objetivo se relaciona con las competencias *pensar y razonar* y *argumentar y justificar*. Igualmente, muchas de esas estructuras pueden encontrarse operando repetidamente con los números, por ello el uso de la calculadora es interesante en este caso. Así, también hemos señalado la competencia *emplear soportes y herramientas tecnológicas*.

Es fácil pensar que muchos de los objetivos enunciados pueden relacionarse con prácticamente todas las competencias, ya que cualquier actuación en matemáticas tiene que ver con pensar, argumentar, usar representaciones, o manejar el

lenguaje simbólico. Pero las vinculaciones deben enfatizar unas prioridades, unos vínculos muy claros que deben ser coherentes con las tareas que posteriormente el profesor seleccione o diseñe para los escolares. Por ejemplo, no tiene sentido relacionar un objetivo con la competencia *comunicar*, si las tareas que luego se usen en clase para lograr ese objetivo no promueven explícitamente que los escolares expresen sus ideas o expliquen de manera más o menos detallada lo que han hecho o pensado.

Un segundo criterio tiene que ver con el diseño curricular global de la asignatura, e incluso con el nivel educativo en que se enmarca la planificación que se está realizando. En ese nivel de descripción curricular se expresan objetivos generales de área que pueden interpretarse en términos de competencias. Esa información facilita tomar decisiones a la hora de decidir qué competencias interesa desarrollar, y por tanto, cómo deben orientarse los objetivos específicos. El siguiente enunciado, forma parte del listado de objetivos generales del área de Matemáticas y, como podemos comprobar, se indican claramente aspectos relacionados con la competencias *argumentar* y *justificar*. Esa es una competencia que, en consecuencia, hemos querido destacar en nuestro ejemplo del tema de los números naturales.

Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana. (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007b, p. 31791)

Un tercer criterio tiene que ver con la información que suministra el análisis del contenido matemático que se ha realizado previamente. En ese análisis se ponen de manifiesto multitud de significados de las nociones matemáticas involucradas, y se describen qué vínculos se establecen entre ellas. La cantidad y la fuerza de esos vínculos permiten concluir que, cuando se desarrollen ciertos objetivos específicos, se está contribuyendo especialmente a algunas competencias. Por ejemplo, en el análisis de contenido que realizamos en el capítulo 2 para los números naturales, pusimos de manifiesto la importancia de establecer relaciones entre números o conjuntos de números según la estructura aritmética que posean de cara a mejorar las operaciones mentales con ellos y a estimar resultados de operaciones (§2.3). También constatamos el papel predominante del sistema decimal de numeración, ya que suministra una forma de representar números que es muy potente de cara a la ordenación y a las operaciones con números naturales. De esta manera, vemos que competencias como *pensar y razonar* y *representar* son importantes en este tema, luego hacia ellas han de enfocarse algunos objetivos específicos.

Otra información que mostramos en las Tablas 13, 14, 15 y 16 es la relación entre cada conjunto de objetivos (según las prioridades de aprendizaje que delimitamos previamente) y cada una de las ocho competencias consideradas. Esa relación viene marcada en las celdas en las que se interseca la segunda fila de cada tabla con cada una de las ocho columnas de competencias. La presencia de cada competencia se muestra haciendo un recuento del número de marcas que se han puesto en cada columna y usando un sistema de sombreado para codificarlo.

La presencia de cada competencia se muestra relacionando la intensidad del sombreado que aparece en las celdillas de esa segunda fila con el mayor o menor número de objetivos que se vinculan con esa competencia. De esta forma es posible hacer un balance de cuáles competencias se enfatizan (sombreado más oscuro), y eso nos lleva a valorar, en su conjunto, la descripción de objetivos específicos que se han enunciado.

Un cuarto criterio está asociado a las decisiones que el profesor toma a la hora de planificar sus actividades de clase. Se pueden establecer preferencias sobre métodos de resolución, sobre tipos de problemas, sobre formas de razonamiento o sobre el empleo de recursos pero, de nuevo, lo importante es que esas preferencias sean coherentes con las directrices curriculares, que estén adaptadas al nivel de los escolares y, sobre todo, que luego se vean reflejadas en las tareas que planteará a sus alumnos. Así por ejemplo, si un profesor acostumbra a emplear calculadoras en sus clases, es natural que la competencia *emplear herramientas tecnológicas*, tenga una considerable presencia en su planificación del aprendizaje de sus escolares.

En resumen, el instrumento y el procedimiento que hemos presentado y que hemos ejemplificado con el tema de los números naturales, brinda importante información sobre el aprendizaje que se persigue con los objetivos específicos enunciados, pues pone de manifiesto unas prioridades acerca de lo que se pretende que los escolares aprendan y sobre cómo usarán ese aprendizaje. Al mismo tiempo, también sienta las bases para el posterior diseño y selección de las tareas que formarán parte de la instrucción.

4.2 Limitaciones de Aprendizaje en el Aprendizaje de los Números Naturales

El segundo organizador curricular del análisis cognitivo está estrechamente vinculado con el primero, tal y como hemos descrito en este capítulo. Este organizador que se centra en aquello que puede interferir en el aprendizaje de los escolares, se concreta en dificultades y errores.

Partiendo del enunciado de objetivos específicos sobre los números naturales que hemos descrito antes y de su contribución a las competencias matemáticas PISA, consideramos ocho dificultades, organizadas en cada uno de los cuatro focos de contenido que hemos delimitado. Para cada una de esas dificultades, ejemplificamos algunos posibles errores en los que pudieran incurrir los escolares.

En la Tabla 17 recogemos esas dificultades y errores y señalamos además aquellos objetivos específicos (Tablas 9 a 12), con los que se vinculan esos errores.

Tabla 17
Dificultades, errores y objetivos relacionados en cada uno de los focos de contenido del tema de los números naturales

Dificultades	Errores	Objetivos	
<i>Profundizar en el estudio de las relaciones numéricas</i>			
Predominio de la estructura aditiva sobre la multiplicativa	E ₁	Expresar con operaciones aditivas relaciones numéricas multiplicativas ⁶²	2, 4, 13, 23, 24
	E ₂	Resolver problemas multiplicativos con operaciones aditivas	23, 24
Desconexión entre diferentes representaciones de los números naturales	E ₃	Construir identidades falsas entre números naturales y sus representaciones	1, 2, 4
	E ₄	Generalización inadecuada o sin criterio de los términos de una secuencia numérica	1, 6
	E ₅	Desconocimiento de la expresión gráfica de una relación aditiva o multiplicativa entre naturales	2, 3, 5
	E ₆	Escribir incorrectamente números usando la numeración romana	12
<i>Dominar el sistema decimal de numeración</i>			
Desconocimiento o falta de dominio en algunas de las reglas que determinan el sistema decimal de numeración	E ₇	Errores en la lectura y escritura de un número en el SDN	7, 10
	E ₈	Confundir el valor de una cifra con su valor posicional	9
	E ₉	Interpretar incorrectamente el significado de una cifra “0” en un número natural	8, 9, 11, 14
	E ₁₀	No saber agrupar/ disgregar 10 unidades de un orden cualquiera en una unidad del orden inmediato superior/ inferior	7, 8, 10
Manejar sin criterio las notaciones factorial o	E ₁₁	Errores en el uso de la notación científica para números <i>grandes</i>	8, 10

⁶² Por ejemplo para una secuencia numérica geométrica: 2, 4, 8,.... Continuarla aditivamente: 2, 4, 8, 10, 12, ... o bien 2, 4, 8, 14, ...

Tabla 17

Dificultades, errores y objetivos relacionados en cada uno de los focos de contenido del tema de los números naturales

Dificultades	Errores	Objetivos	
científica para expresar números en el sistema decimal de numeración	E ₁₂	Expresar incorrectamente números naturales en notación factorial	7, 10, 11
	E ₁₃	Aplicar la reglas de valor posicional del SDN a la numeración romana	12
	E ₁₄	Error al comparar naturales en notación factorial o científica por uso de criterios inadecuados ⁶³	10, 11
<i>Trabajar con las operaciones y propiedades de los naturales</i>			
Aplicación incorrecta de reglas y algoritmos	E ₁₅	Utilizar la conmutatividad de la suma y el producto en la resta y la división	13, 14
	E ₁₆	Desconocimiento de las reglas de “llevarse” o de “prestar” en las operaciones aditivas	14, 16
	E ₁₇	Desconocimiento del uso de las reglas del producto cuando en el multiplicando aparecen una o más veces la cifra 0	9, 14
	E ₁₈	Desconocimiento del uso de las reglas de la división cuando aparece una o mas veces la cifra 0 bien en el dividendo o en el cociente	14, 16
Dificultades en los procesos de estimación y de cálculo mental	E ₁₉	Carecer de un criterio para estimar por defecto o por exceso la medida de cantidades habituales	15, 16, 17
	E ₂₀	Aplicar inadecuadamente relaciones de proporcionalidad para el cálculo de cantidades a partir de la elección de un referente	14, 15, 16, 17, 18

⁶³ Por ejemplo, afirmar que 10^2 es mayor que 2^{10} , por razón de que la base del primer número es mayor que la del segundo

Tabla 17

Dificultades, errores y objetivos relacionados en cada uno de los focos de contenido del tema de los números naturales

Dificultades	Errores	Objetivos
	E ₂₁ Aplicar criterios inadecuados para obtener el resultado de cálculos mentales ⁶⁴	14, 17
<i>Interpretar y resolver situaciones y problemas relacionados con los números naturales</i>		
Manejar sin criterio situaciones en las que intervengan números naturales	E ₂₂ No reconocer o identificar el uso de números naturales en situaciones y contextos no matemáticos	19, 20, 22
	E ₂₃ Aplicar incorrectamente propiedades de los naturales en situaciones no convencionales	20, 21
	E ₂₄ Confundir el significado ordinal y cardinal de los números naturales	21
	E ₂₅ Incapacidad para transformar una operación indicada en el enunciado de un problema	21, 23
	E ₂₆ Incapacidad para redactar el enunciado de un problema en el que se relacionen varios números o cantidades dadas	21, 23
Dificultades para plantear y resolver problemas con números naturales	E ₂₈ Desconocimiento de criterios para identificar las operaciones o algoritmos que resuelven un problema	23, 24
	E ₂₉ Aplicación incorrecta de algoritmos o propiedades numéricas de los naturales en la resolución de problemas	20, 23, 24

El listado que recoge la Tabla 17 no pretende ser exhaustivo. Simplemente hemos querido mostrar cómo la estructura de focos de contenidos permite organizar las dificultades de un tema y ejemplificar algunos errores posibles

⁶⁴ Por ejemplo, si para realizar la estimación del resultado del producto 4×18 el escolar sustituye 18 por $(20 - 2)$, pero no agrupa correctamente y hace $4 \times 18 = 4 \times 20 - 2 = 80 - 2 = 78$.

relacionados con esas dificultades. Asimismo, hemos relacionado errores con objetivos específicos.

Este análisis facilita seleccionar y diseñar tareas para detectar y tratar esos errores y dificultades, tal y como veremos más adelante.

4.3 Oportunidades de Aprendizaje: Tareas sobre los Números Naturales

El tercer organizador del currículo del análisis cognitivo que hemos presentado antes, en este mismo capítulo, pone su foco de atención en aquellas oportunidades que el profesor puede brindar a sus escolares para que éstos aprendan. De todas las oportunidades posibles, seleccionamos las tareas como elemento clave dentro de ellas.

El diseño y la selección de tareas constituye un aspecto central dentro del proceso que realiza un profesor para diseñar una unidad didáctica. El logro de los objetivos específicos al tema de matemáticas seleccionado, se alcanzará mediante la realización por parte de los escolares de tareas que desarrollen y movilicen su conocimiento acerca de ese tema.

Retomamos ahora el primero de los criterios que presentamos en el capítulo 2 para el diseño y selección de tareas:

1. Describir y clasificar tareas matemáticas, atendiendo a los siguientes criterios:
 - 1.1 los contenidos matemáticos que ponen en juego,
 - 1.2 las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir, y
 - 1.3 para detectar y diagnosticar errores.

Lo que haremos a continuación es ejemplificar tareas matemáticas centradas en los números naturales atendiendo a esos criterios, que usaremos de manera conjunta. En primer lugar analizaremos las tareas por el contenido y por los objetivos y las competencias a la que contribuyen, y en segundo lugar nos centraremos en un análisis de las tareas según el contenido y el modo que pueden servir para detectar y diagnosticar errores. Estos ejemplos sirven de referencia para el trabajo de elaboración de tareas que deben realizar los profesores en formación, como conclusión del análisis cognitivo. Las decisiones sobre las expectativas de aprendizaje planteadas y el análisis de errores y dificultades realizado, deben concluir en un diseño y selección de tareas que concreten las reflexiones anteriores, planteando actuaciones que proporcionen oportunidades de aprendizaje a los escolares.

El profesor en formación debe iniciar el diseño y selección de tareas escolares a partir de unos criterios y procedimientos claros, que se sustenten en el trabajo ya realizado con el análisis de contenido y en las dos etapas anteriores del análisis cognitivo. Pasamos a ejemplificar esta tercera etapa.

Objetivos, Competencias y Tareas

Las tareas seleccionadas sirven para ilustrar el significado de los objetivos enunciados anteriormente y el tipo de actuaciones que los escolares pueden desarrollar o movilizar. Las tareas están extraídas de Rico y Lupiáñez (2008a).

Tarea 1. Sumas curiosas

Las sumas $243 + 675 = 918$; $318 + 654 = 972$ y $154 + 782 = 936$ contienen todos los dígitos del 1 al 9. Descubre nuevas sumas con esta misma propiedad.

Tarea 2. Números consecutivos

Descubre qué números entre los 40 primeros no se pueden escribir mediante una suma de dos o tres números consecutivos. Indaga la razón.

Desde el punto de vista del contenido matemático, ambas tareas se centran en el algoritmo de la suma y en algunas de sus propiedades. También ambas vienen expresadas en lenguaje simbólico, y la respuesta de los escolares también se espera en ese lenguaje. No obstante, las configuraciones puntuales de los números naturales permiten que la tarea 2 pueda ser resuelta mediante gráficos de puntos. La situación de ambas tareas es de tipo científico, interior a las matemáticas.

Las tareas 1 y 2 son claros ejemplos del tipo de actuación a la que se refiere el objetivo 1 (*descubrir e inventar relaciones entre números naturales*). En ambas se fomenta el cálculo mental, que unido a la búsqueda de relaciones precisas, muestra que esta tarea ejemplifica la competencia *pensar y razonar*. También ambas tareas pueden favorecer la acción de *comunicar* resultados o hallazgos encontrados, pues es fácil que los escolares den con al menos un ejemplo de resultado válido, aunque no logren extrapolar la regla general. La posibilidad de encontrar relaciones gráficas y simbólicas hace que estas tareas también ejemplifiquen las competencias *representar y usar el lenguaje simbólico*, tal y como señalamos en la Tabla 13.

La tarea 3, que mostramos a continuación, comparte algunas características con las anteriores en términos del uso del lenguaje simbólico, pero en este caso el algoritmo de la suma se cambia por el algoritmo del producto y sus propiedades.

Tarea 3. ¡Todo unos!

Calcula con una calculadora, o manualmente, lo que obtienes al multiplicar por sí mismo, cada uno de los números siguientes: 1, 11, 111, 1111 y 11111. Explica la regularidad que observas y trata de encontrar una explicación de ella ¿Qué conjetura propones?

En este caso la tarea es un ejemplo claro que muestra el dominio sobre la competencia *Emplear soportes y herramientas tecnológicas*. El hecho de usar la calculadora hace que el escolar no se disperse con cálculos manuales, ya que la finalidad principal de la tarea es la búsqueda de regularidades numéricas. De hecho, es una tarea prototípica para los objetivos 4 y 6 (*describir estructuras aditivas o multiplicativas que comparten dos o tres números, y justificar regularidades en un conjunto de números, respectivamente*). De nuevo la

representación simbólica es predominante, y la situación sigue siendo interna a las matemáticas.

También esta tarea está en la línea de actuaciones básicas relacionadas con *pensar y razonar*, pero en este caso, el aspecto de *argumentar y justificar* es más claro. Es obvio que no se pretende una demostración formal o exhaustiva, pero sí es factible una explicación sustentada en el propio algoritmo de la multiplicación, que en el último curso de educación primaria ya se maneja con soltura.

Las siguientes tareas que proponemos sobre números naturales se salen de la situación meramente matemática y del contexto propiamente operacional. En las tareas 4 y 5 el contexto es de conteo con operaciones de agrupamiento o división, con tratamiento de números de un orden de magnitud grande. Estas dos tareas provienen del banco de ítems que se aplicaron en el proyecto PISA en 2003, (Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, 2005). Algunas de las tareas usadas en el proyecto PISA son buenos indicadores del tipo de actuaciones con números naturales que promueven el desarrollo de competencias matemáticas.

Tarea 4. *Estanterías*

Para construir una estantería un carpintero necesita lo siguiente:

- 4 tablas largas de madera
- 6 tablas cortas de madera
- 12 ganchos pequeños
- 2 ganchos grandes
- 14 tornillos.

El carpintero tiene en su almacén 26 tablas largas de madera, 33 tablas cortas de madera, 200 ganchos pequeños, 20 ganchos grandes, y 510 tornillos ¿Cuántas estanterías completas puede construir el carpintero? (p. 46)

Esta tarea, vinculada al objetivo 24 (*resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante el uso adecuado de datos numéricos en diferentes situaciones*), implica la búsqueda de una estrategia no trivial. Es necesario comprobar cuántas estanterías se podrían hacer con cada tipo de material, y seleccionar entre ellos el menor dato. Por eso las competencias de *argumentar y justificar* y *modelizar* están asociadas a tareas de este tipo.

Tarea 5. *Vuelo espacial*

La estación espacial Mir permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio alrededor de 86.500 vueltas a la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días. La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros.

El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12.700 Km. y su circunferencia es de alrededor de 40.000 Km. ($\pi \times 12.700$).

Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus

86.500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

Según nuestra propuesta de objetivos, esta tarea se relacionaría con los objetivos número 7 (*expresar el valor de los diferentes órdenes de magnitud de números naturales hasta el billón*), número 20 (*manejar los números para medir, contar, ordenar, simbolizar y operar, de manera exacta o aproximada, en situaciones que surgen en contextos culturales, científicos y económicos*), y número 24 (*resolver problemas aditivos y multiplicativos mediante el uso adecuado de datos numéricos en diferentes situaciones*).

La tarea 5 es típica de actuaciones relacionadas con la competencia de *pensar y razonar*. Su principal dificultad la plantea la existencia de datos superfluos, como el tiempo de permanencia en la estación espacial de un astronauta. Por tanto, los escolares deben definir una estrategia de resolución precisa que haga intervenir sólo los datos relevantes.

Por otro lado, el hecho de que se manejen diferentes unidades de medida y que se pidan órdenes de magnitud específicos pone en juego, sin duda, aspectos relacionados con *representar y usar el lenguaje simbólico*.

Errores y Tareas

Cuando hablamos de limitaciones de aprendizaje, señalamos la importancia del papel del error como elemento que permite al escolar avanzar en su aprendizaje, así como la necesidad de que el profesor abandone el carácter sancionador que suele acompañar a su tratamiento casi de manera permanente.

En ocasiones, hacer explícitos errores habituales y frecuentes en temas concretos, puede ayudar al alumno a evitar ese conocimiento inadecuado que le lleva a incurrir en errores. En Rico, Coriat, Marín y Palomino (1994) encontramos un ejemplo centrado en números decimales⁶⁵:

Para comparar números decimales hay que tener en cuenta algunas ideas importantes. Así, si queremos ordenar 0.1, 0.23 y 0.115, observamos que:

Mayor número de cifras en un decimal no significa que sea mayor; la comparación no puede hacerse por el número de cifras decimales.

Entre dos números decimales el mayor no tiene por que ser el de más cifras: 0.115 es menor que 0.23. (p. 39)

Parece evidente señalar que prácticamente cualquier tarea puede usarse para detectar en qué errores incurren los escolares. Pero si esa es la finalidad que persigue el profesor, el diseño de tareas específicas que involucren los elementos que desea observar es importante. El ejemplo siguiente está en esta línea.

Tarea 6. *Yo uso ese número para...*

Elige cuál o cuáles de estos números

⁶⁵ Usamos este ejemplo para ejemplificar el significado de obstáculo en el caso de los números naturales, en el segundo apartado de este capítulo.

2 3,5 35 21 2×10^5 3,512 35126 21

pueden usarse para:

- a) *Aproximar el ancho de una estantería para libros.*
- b) *Dar el precio en euros de una casa nueva.*
- c) *Elegir el número de caramelos que le corresponde a cada niño en una fiesta de cumpleaños.*
- d) *Decir un número de pie para comprar unas zapatillas de deporte.*
- e) *Contar el número de asistentes a un concierto de rock.*

Inventa ahora diferentes situaciones en las que pueda usarse cada uno de los números anteriores.

La tarea 6 explora diferentes contextos en términos de los usos que podemos hacer de determinados números,

Esta tarea ejemplifica el tipo de actuación que persiguen los objetivos 19 y 22 (*describir situaciones personales, públicas, educativas, laborales y científicas en las que se usen números naturales y operaciones entre ellos, y distinguir los diferentes contextos numéricos por sus diferencias estructurales, respectivamente*). En esta tarea la competencia de *comunicar* es evidente y, merced a las descripciones de los escolares, el profesor puede observar la cantidad de contextos diferentes que manejan.

Pero desde el punto de vista de los posibles errores de los escolares que recogimos en la Tabla 17, permite explorar en qué medida éstos manejan el sistema decimal de numeración en relación a si confunden o no el valor de un número con la cantidad de cifras que posee (E_8 y E_9) o la interpretación de la notación factorial (E_{11} , E_{12} y E_{14}). También permite explorar si asocian números a contextos inapropiados (E_{22} y E_{23}). En las dos clasificaciones que presentamos anteriormente sobre errores, ambas destacan la importancia de errores asociados al lenguaje, y una tarea centrada en la competencia de *comunicar* como es el ejemplo anterior, es muy apropiada para explorar ese tipo de errores.

Los ejemplos de tareas que hemos mostrado, ponen de manifiesto la importancia del proceso de diseño y selección de tareas para el logro de los objetivos planteados y para detectar y tratar posibles errores de los escolares. En el marco de nuestro programa de formación inicial, esta reflexión impulsa y favorece el desarrollo de la competencia de planificación de los futuros profesores, tal y como describimos a continuación.

5. ANÁLISIS COGNITIVO Y CONOCIMIENTO DEL PROFESOR EN FORMACIÓN

El análisis didáctico suministra una serie de importantes herramientas al profesor en formación inicial para el diseño de unidades didácticas. El análisis cognitivo

que hemos presentado aporta tres de esas herramientas a través de los tres organizadores que lo configuran (expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje). El conocimiento y manejo del profesor acerca de esos tres organizadores le permite afrontar parte del diseño de una unidad didáctica, en lo que a la problemática del aprendizaje de los escolares se refiere. Y ese conocimiento y manejo contribuye de manera importante al desarrollo de su competencia de planificación.

Las expectativas de aprendizaje expresan, desde diferentes niveles, lo que se espera que alcancen, desarrollen y usen los escolares por medio del aprendizaje producido en su proceso de formación. En el caso de las matemáticas, las expectativas de aprendizaje se sostienen a su vez en actuaciones, contenidos y tareas, en el sentido que esas expectativas expresan ciertos usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden desarrollar, observar o inferir a partir de las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas.

De entre los posibles niveles en los que se expresan expectativas de aprendizaje, el análisis cognitivo se centra expresamente en dos de ellos: los objetivos específicos y las competencias. Ambos niveles poseen gran importancia en la actividad docente, ya que se centran en dos aspectos claves en el proceso de enseñanza. Los objetivos específicos se refieren a las expectativas de aprendizaje que el profesor tiene para los escolares acerca de un tema específico de matemáticas para un curso concreto, a corto plazo. Las competencias, por el contrario, expresan finalidades educativas a largo plazo, que han de desarrollarse paulatinamente a lo largo de varios cursos y etapas, y mediante el trabajo en diferentes temas de matemáticas. En ambos casos, las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas permiten observar el grado de consecución de esas expectativas. Pero, mientras en el caso de los objetivos específicos esas tareas están vinculadas a un contenido matemático concreto, en el caso de las competencias las tareas son más abiertas, abarcan conocimientos de distintos temas y deben referirse a diferentes situaciones y contextos.

Al manejar diferentes niveles de expectativas de aprendizaje, el profesor dispone de criterios para interpretar las directrices sobre objetivos y competencias que se expresan en los documentos curriculares; también puede diseñar con mayor precisión y establecer preferencias para evaluar lo que espera que aprendan unos escolares, acerca de un tema de matemáticas concreto.

La caracterización de las limitaciones de aprendizaje en términos de errores y dificultades brinda también al profesor una importante información acerca de en qué aspectos de las matemáticas que trabaja en el aula pueden surgir situaciones que frenen, ralenticen o desvirtúen el aprendizaje de los escolares. No se trata de abarcar todo el abanico posible de errores que pueden surgir al trabajar en un tema, sino en organizar errores sistemáticos o reiterados, específicos a ese tema. Esa información permite al profesor prever diferentes alternativas para presentar determinados conceptos o procedimientos, seleccionar ejemplos y contraejemplos que faciliten corroborar o desmentir algunas creencias, o incluir en su actividad docente tareas que pongan de manifiesto la existencia de ciertos errores.

Finalmente, con la información de expectativas y limitaciones, el profesor dispone de criterios para estudiar, seleccionar y diseñar las tareas que habrán de resolver los escolares a lo largo de la implementación de la unidad didáctica. Si la finalidad es que los escolares lleguen a desarrollar ciertos objetivos, ese logro ha de mostrarse en la ejecución de tareas que muestren de qué son, o no, capaces. Por tanto, también existen criterios para diseñar o seleccionar tareas de evaluación.

Todos estos aspectos ponen de manifiesto que la estructura que se ha diseñado para el análisis cognitivo contribuye a que los profesores en formación adquieran herramientas que les permiten diseñar sus actuaciones profesionales de una manera fundamentada, sistemática y coherente con el resto del análisis didáctico.

El objeto de esta investigación se centra en evaluar el aprendizaje alcanzado por los profesores en formación dentro del programa diseñado, y el desarrollo de su competencia de planificación, según hemos enunciado en el objetivo general y los objetivos parciales de esta investigación.

CONOCIMIENTO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. UN ENFOQUE FUNCIONAL PARA LA FORMACIÓN INICIAL

No es la primera vez que reflexionamos sobre el “enfoque funcional” en este trabajo. Lo introducimos en el capítulo 2 al describir en qué consiste un enfoque o visión funcional de las matemáticas escolares y destacamos que el modelo de enseñanza basado en competencias es coherente con el enfoque funcional del currículo de matemáticas (§2.1.2).

La noción de competencia integra tres componentes, según hemos argumentado en el capítulo 3 y que teorizamos en Rico y Lupiáñez (2008a, pp. 71-74). En el estudio que nos ocupa, trabajamos en el desarrollo de competencias profesionales del profesor de matemáticas de secundaria en un programa de formación inicial; en particular, trabajamos en la competencia de planificación, que tiene especial relevancia en este caso. En ese contexto las principales actividades y problemas que deben abordar y resolver los profesores en formación consisten en el análisis y selección de tareas escolares, observación de los aprendizajes y diseño de materiales, de recursos y de unidades didácticas de matemáticas.

En el contexto de la asignatura Didáctica de la Matemática, que describimos en el capítulo 1, el profesor en formación utiliza conocimientos generales y básicos de la disciplina Didáctica de la Matemática para llevar a cabo esas tareas. Es decir, maneja conceptos y procedimientos sobre las matemáticas escolares y otros conocimientos didácticos sobre su enseñanza y aprendizaje, que hemos sistematizado y englobado bajo la noción de *análisis didáctico*, según hemos visto en los capítulos 2 y 3. Cuando el profesor en formación centra su actividad en las tareas de planificación, moviliza unos conocimientos, capacidades, destrezas, intuiciones y actitudes, que configuran su competencia profesional en este campo.

Los componentes considerados para estudiar la competencia de planificación, por tanto, son: los problemas de diseño, análisis y selección de tareas escolares a las

que se enfrenta; las disciplinas que se manejan e integran para abordar los problemas de planificación; y los conocimientos, capacidades y actitudes que el profesor en formación moviliza para llevar a cabo la planificación.

En este capítulo queremos centrarnos en caracterizar el conocimiento didáctico que necesita desarrollar un profesor en formación para ser competente a la hora de planificar el aprendizaje de sus escolares. Es decir, qué conocimientos, capacidades y actitudes necesita desarrollar y movilizar para llevar a cabo el análisis cognitivo de los distintos temas de las matemática escolares. Esto permitirá avanzar en los objetivos generales segundo y tercero de nuestra investigación.

Comenzaremos describiendo el aprendizaje esperado del profesor en formación en términos de la noción de competencia (Rico y Lupiáñez, 2008a, p. 72) y según aquellas competencias específicas establecidas para la formación inicial de profesores en las distintas normativas, informes, planes de trabajo e investigaciones que recientemente se han documentado. A continuación nos centraremos en el caso de los futuros profesores de matemáticas; veremos cómo la competencia de planificación es recurrente en diferentes aproximaciones y en los contextos de formación inicial, tanto en las nuevas titulaciones universitarias como en la investigación. Esto nos permitirá caracterizar el conocimiento didáctico del profesor en formación sobre la base de las diversas competencias requeridas y desde un punto de vista funcional, para después describir el conocimiento que han de poner en juego los profesores en formación, específicamente, cuando llevan a cabo el análisis cognitivo. Esta referencia servirá de inicio a la parte empírica de nuestra investigación, ya que nos proponemos establecer aquellas capacidades, destrezas y actitudes que caractericen y confirmen la competencia de planificación en relación al análisis cognitivo.

1. COMPETENCIAS DEL PROFESOR EN FORMACIÓN

Como señala Gómez (2007), la corriente en torno a las competencias del profesor, como un instrumento para evaluar la calidad de su actividad, comenzó a extenderse en la década de los sesenta desde Estados Unidos. En el caso de la formación inicial de profesores de matemáticas, existe una constatada preocupación por establecer el perfil profesional de los futuros profesores en términos de las competencias que deberían desarrollar éstos para el ejercicio de su actividad docente (Abbott y Huddleston, 2000; Beck, Hart y Kosnik, 2002; Gómez, 2007; Niss, 2004a y 2004b; Recio, 2004; Rico, 2004).

Como veremos a continuación son diversas las instituciones, programas y grupos de investigación que se han ocupado recientemente de las competencias profesionales del profesor en formación, que han proporcionado información confiable. Sin embargo, todavía existen imprecisiones y lagunas acerca de cuestiones fundamentales como cuál es la estructura y jerarquía de esas

competencias y cómo puede optimizarse su desarrollo en un programa de formación.

Estas limitaciones se constatan en distintos autores. Gómez (2007) destaca “la carencia, por el momento, de una caracterización suficientemente detallada de las competencias del profesor, en general, y del profesor de matemáticas en particular.” (p. 123). Oser, Achtenhagen y Renold (2006b) constatan que, del mismo modo que no existe una teoría final de la instrucción y a pesar de que existen propuestas específicas de formación de profesores basadas en competencias, “todavía vamos hacia una teoría sobre las competencias profesionales del profesor.” (p. 7)

En este apartado describiremos los avances importantes alcanzados en los últimos años, que se muestran por las diferentes aproximaciones a la caracterización de las competencias del profesor en formación, que proceden de dos fuentes diferenciadas pero relacionadas. Por una parte, desde las nuevas directrices curriculares y normativas que conforman el Espacio Europeo de Educación Superior y sus implicaciones en el diseño de planes de formación de profesores. La segunda fuente la constituye la propia investigación que desde la Educación Matemática se preocupa de las competencias profesionales que deben desarrollar los profesores de matemáticas en esos programas de formación inicial.

1.1 Competencias y Formación Inicial de Profesores en el Contexto del Espacio Europeo de Educación Superior

El Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) constituye un complejo plan de la Unión Europea para unificar criterios estructurales, organizativos y funcionales entre todas las universidades europeas. Aunque originalmente se concibió en la Declaración de la Sorbona (Allegre, Berlinguer, Blackstone y Rüttgers, 1998), la Declaración de Bolonia (Einem et al., 1999) fue la primera en la que se avanzó estructuralmente en este proyecto⁶⁶.

Esta iniciativa, que en la actualidad tiene un impacto social considerable como se refleja en su gran repercusión mediática (Sotelo, 2009), tiene varias implicaciones y, entre ellas, queremos destacar dos. En primer lugar, el movimiento del EEES ha promovido la realización de diferentes actividades que avanzan en una dirección de convergencia europea y entre ellos destaca el proyecto *Sócrates-Erasmus Tuning Educational Structures in Europe*, al que nos referiremos desde ahora como Tuning (González y Wagenaar, 2003; 2006). En segundo lugar, nos ocuparemos de los cambios y adaptaciones que han tenido lugar en las titulaciones universitarias españolas, entre las que se encuentran las relacionadas con la formación de profesores. Dedicaremos el resto del epígrafe a estos dos aspectos y a su relación con las competencias del profesor.

⁶⁶ Es posible consultar todo el recorrido y la evolución del EEES desde su origen hasta la actualidad en <http://www.eees.es/es/documentacion/>

El Proyecto Tuning

El proyecto Tuning persigue la adopción de un sistema de titulaciones reconocibles y comparables en Europa, y recientemente se ha llevado a cabo un estudio similar en América Latina (Beneitone et al., 2007)⁶⁷. Una de sus aportaciones principales ha sido la puesta en uso del concepto de competencia para precisar el significado de los nuevos objetivos formativos de la educación universitaria (González y Wagenaar, 2003):

*Las competencias tienden a transmitir el significado de lo que la persona es capaz de o es competente para ejecutar, el grado de preparación, suficiencia o responsabilidad para ciertas tareas. (...) El concepto de las competencias trata de seguir un enfoque integrador, considerando las capacidades por medio de una dinámica combinación de atributos que juntos permiten un desempeño competente como parte del producto final de un proceso educativo (...). Las competencias y las destrezas se entienden como **conocer y comprender** (conocimiento teórico de un campo académico, la capacidad de conocer y comprender), **saber cómo actuar** (la aplicación práctica y operativa del conocimiento a ciertas situaciones), y **saber cómo ser** (los valores como parte integrante de la forma de percibir a otros y vivir en un contexto social). Las competencias representan una combinación de atributos (con respecto al conocimiento y sus aplicaciones, aptitudes, destrezas y responsabilidades) que describen el nivel o grado de suficiencia con que una persona es capaz de desempeñarlos. (pp. 69-70, en negritas en el original)*

La educación [universitaria] deberá centrarse en la adquisición de competencias por parte del estudiante. Se trata de centrar la educación en el estudiante. El papel fundamental del profesor debe ser el de ayudar al estudiante en el proceso de adquisición de competencias. El concepto de competencia pone el acento en los resultados del aprendizaje, en lo que el estudiante es capaz de hacer al término del proceso educativo y en los procedimientos que le permitirían continuar aprendiendo de forma autónoma a lo largo de su vida. (Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela, 2007, p. 1)

En el marco del proyecto Tuning se consideran dos tipos de competencias. Aquellas que se relacionan con áreas temáticas determinadas (como Geología, Historia o Matemáticas), y que se denominan *específicas*; y las *competencias genéricas* que recogen “aquellos atributos compartidos que pudieran generarse en cualquier titulación y que son considerados importantes por ciertos grupos sociales” (González y Wagenaar, 2003, p. 70).

Estas nociones sobre competencias son coincidentes con las propuestas en nuestra reflexión teórica (Rico y Lupiáñez, 2008), y que presentamos en el primer apartado del capítulo anterior. En él destacamos que las ideas claves que

⁶⁷ No entramos en detalle en la descripción de Proyecto Tuning América Latina por varias razones. En primer lugar este proyecto no se sustenta en un marco político unificado como en el caso de Europa, porque en América Latina no existe ese marco y porque están aún en un proceso de integración regional (p. 19). En nuestro caso, el marco político de Bolonia contextualiza todas las reformas curriculares en Educación Superior.

intervienen en la noción de competencia son unos componentes cognitivos, una serie de finalidades asignadas y un contexto en el que se desempeña la competencia (p. 138). La Tabla 18 recoge la organización de esas competencias genéricas realizada por investigadores de la Universidad de Granada (Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela, 2007). Esta clasificación se basa en el carácter más o menos básico de las competencias y en sus aspectos instrumentales⁶⁸.

Tabla 18

Clasificación de las competencias genéricas Tuning según su carácter básico, de intervención o específico (Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela, 2007, p. 7)

Competencias Básicas		
<i>Cognitivas</i>	<i>Motivaciones y valores</i>	
Conocimientos básicos y específicos	Motivación de logro	
Análisis y síntesis	Iniciativa y espíritu emprendedor	
Organizar y planificar	Preocupación por la calidad	
Solución de problemas	Compromiso ético	
Toma de decisiones		
Aprender		
Competencias de Intervención		
<i>Cognitivas</i>	<i>Sociales</i>	<i>Culturales</i>
Capacidad de:	Capacidad de:	Capacidad de:
Aplicar conocimiento a la práctica	Habilidades interpersonales	Apreciar la diversidad
Adaptarse a nuevas situaciones	Liderazgo	Conocimiento de culturas
Creatividad	Trabajo en equipo	Trabajo intercultural
	Trabajo disciplinar	
Crítica y autocrítica		
Trabajar de forma autónoma		
Investigación		
Competencias Específicas		
Comunicación oral y escrita		
Conocimiento de segundo idioma		
Habilidades básicas de manejo de ordenador		
Habilidades de gestión de información		

⁶⁸ En el caso de Tuning América Latina, no se han establecido listados de competencias genéricas muy diferentes a esta propuesta; se produce una reorganización de éstas y se añaden tres nuevas: “responsabilidad social y compromiso ciudadano, compromiso con la preservación del medio ambiente y compromiso con su medio cultural” (Beneitone et al., 2007, p. 45).

La principal contribución del trabajo de Moreno y sus colaboradores reside en que han elaborado un significado conciso y estructurado para cada una de estas competencias. Del listado anterior destacamos las competencias cognitivas, básicas y de intervención, relevantes para este estudio. También subrayamos las competencias sociales de intervención, singularmente el *trabajo disciplinar* y el *trabajo en equipo*. Además, hemos localizado diferentes acercamientos a cómo se pueden diseñar e implementar metodologías que persigan el desarrollo de estas competencias (Fernández, 2006).

Otros trabajos han hecho hincapié en caracterizar algunas de esas competencias en términos de diferentes niveles de dominio, indicadores y descriptores que permiten hacer un seguimiento del grado en el que se desarrollan en programas de formación universitaria (Villa y Poblete, 2007).

En relación a las competencias específicas en el área de educación, ya existen diferentes aproximaciones al establecimiento de las competencias que deben desarrollar los profesores en formación. A continuación veremos cómo se establecen en el marco curricular universitario español en las titulaciones que forman al profesorado de Matemáticas de Educación secundaria⁶⁹.

Titulaciones Oficiales para ser Profesor de Educación Secundaria

Uno de los avances del EEES ha consistido en organizar las titulaciones universitarias en términos de *Grado* y su continuidad en forma de *Máster* y *Doctorado* (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007e, p. 44038)⁷⁰. Describiremos en primer lugar las normativas recientes sobre el Máster que habilita para ser profesor de Educación Secundaria y Bachillerato, para después centrarnos en los Grados de Pedagogía y de Matemáticas, aunque también nos referiremos al de Magisterio.

Desde las propuestas para las enseñanzas de postgrado mediante los títulos oficiales de *Máster* del Ministerio de Educación y Ciencia, se ha resaltado una aproximación a la formación universitaria basada en la noción de competencia y, particularmente, también han surgido diferentes acercamientos al diseño de planes de formación para el profesorado de Educación secundaria a partir de la propuesta del Consejo de Coordinación Universitaria (2006).

En este contexto de reforma y nueva estructura de planes de estudios universitarios, la legislación establece la formación inicial del profesorado de Educación secundaria mediante un título de Máster, centrado en la adquisición y desarrollo de unas competencias generales y específicas, de carácter profesional propio, tales como (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007d):

⁶⁹ En Educación primaria hay también propuestas concretas. En Ruiz, Molina, Lupiáñez, Segovia y Flores (2009), concretamos algunas de las competencias matemáticas de los futuros maestros y describimos una propuesta formativa de la Universidad de Granada dirigida al desarrollo de esas competencias.

⁷⁰ Otro aspecto importante es el establecimiento de un nuevo sistema de créditos, el denominado *European Credit Transfer System* (ECTS). La valoración de estos créditos se hace en términos de horas de trabajo de los estudiantes y no de horas de clases presenciales en las que el trabajo lo protagoniza el profesor (p. 44037).

1. *Conocer los contenidos curriculares de las materias relativas a la especialización docente correspondiente, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos. Para la formación profesional se incluirá el conocimiento de las respectivas profesiones.*
2. *Planificar, desarrollar y evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje potenciando procesos educativos que faciliten la adquisición de las competencias propias de las respectivas enseñanzas, atendiendo al nivel y formación previa de los estudiantes así como la orientación de los mismos, tanto individualmente como en colaboración con otros docentes y profesionales del centro.*
3. *Buscar, obtener, procesar y comunicar información (oral, impresa, audiovisual, digital o multimedia), transformarla en conocimiento y aplicarla en los procesos de enseñanza y aprendizaje en las materias propias de la especialización cursada.*
4. *Concretar el currículo que se vaya a implantar en un centro docente participando en la planificación colectiva del mismo; desarrollar y aplicar metodologías didácticas tanto grupales como personalizadas, adaptadas a la diversidad de los estudiantes.*
5. *Diseñar y desarrollar espacios de aprendizaje con especial atención a la equidad, la educación emocional y en valores, la igualdad de derechos y oportunidades entre hombres y mujeres, la formación ciudadana y el respeto de los derechos humanos que faciliten la vida en sociedad, la toma de decisiones y la construcción de un futuro sostenible.*
6. *Adquirir estrategias para estimular el esfuerzo del estudiante y promover su capacidad para aprender por sí mismo y con otros, y desarrollar habilidades de pensamiento y de decisión que faciliten la autonomía, la confianza e iniciativa personales.*
7. *Conocer los procesos de interacción y comunicación en el aula, dominar destrezas y habilidades sociales necesarias para fomentar el aprendizaje y la convivencia en el aula, y abordar problemas de disciplina y resolución de conflictos.*
8. *Diseñar y realizar actividades formales y no formales que contribuyan a hacer del centro un lugar de participación y cultura en el entorno donde esté ubicado; desarrollar las funciones de tutoría y de orientación de los estudiantes de manera colaborativa y coordinada; participar en la evaluación, investigación y la innovación de los procesos de enseñanza y aprendizaje.*
9. *Conocer la normativa y organización institucional del sistema educativo y modelos de mejora de la calidad con aplicación a los centros de enseñanza.*
10. *Conocer y analizar las características históricas de la profesión docente, su situación actual, perspectivas e interrelación con la realidad social de cada época.*

11. *Informar y asesorar a las familias acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje y sobre la orientación personal, académica y profesional de sus hijos.* (pp. 53751-53752)

Estas once competencias se enmarcan fácilmente en la clasificación realizada por Moreno, Bajo, Moya, Maldonado y Tudela (2007). Las cuatro primeras son la concreción para un profesor de Educación secundaria de cuatro competencias cognitivas básicas: *conocimientos básicos específicos, organizar y planificar, analizar y sintetizar, y toma de decisiones.*

Las siete competencias restantes son competencias de intervención en distintas modalidades: *Atención a la diversidad* (cultural), *destrezas para autonomía de los aprendizajes* (cognitiva), *interacción y comunicación en el aula* (social), *participación cultural, tutoría y orientación* (cultural), *conocimiento de normativa* (cognitiva), *conocimiento de la historia* (cultural), y *asesoramiento y orientación a la familia* (social).

El marco de competencias parece especialmente adecuado para abordar la formación inicial del profesorado de secundaria en un Máster. Ofrece un campo más amplio para abordar la formación de los futuros profesores, ya que establece unas expectativas más complejas sobre su aprendizaje, lo cual exige un dominio de conocimientos específicos y la atención a las necesidades de la práctica profesional. En el modelo funcional que postulamos, los conocimientos específicos de la profesión de profesor son las herramientas necesarias para el desarrollo y logro de competencias, que den satisfacción a las cuestiones y problemas con que se enfrenta el profesor en el Sistema Educativo.

Este Máster supone una ruptura con el planteamiento tradicional basado en contenidos teóricos generales y horas lectivas. Se trata además de enfatizar métodos de aprendizaje basados en competencias y modos para evaluar su grado de desarrollo en un programa específico de formación superior (Rico, 2008).

A partir de aquí el trabajo se centrará en delimitar la estructura y organización de los diferentes módulos que incluirá el citado Máster. Un ejemplo lo constituye el informe final del *Seminario sobre el Prácticum del Máster de Profesor de Secundaria en la especialidad de Matemáticas* (Rico, Mallavibarrena y Deulofeu, 2009), donde, entre otros aspectos, se recoge en qué medida puede contribuir esa materia al desarrollo de las anteriores competencias en los profesores en formación (p. 3).

Titulaciones de Grado y Formación Inicial del Profesorado

En el marco de los títulos de *Grado*, no existen ninguna titulación específica que capacite a los egresados para ser profesores de Educación Secundaria. No obstante, los futuros profesores de Educación Secundaria han de disponer de un título de Grado para poder acceder al Máster antes mencionado. Los profesores de matemáticas serán graduados en matemáticas, o bien con una formación matemática básica acreditada. También hay otros títulos de Grado cuya cualificación se orienta a la formación de profesionales de la educación, como son los Grados de Pedagogía y Magisterio. Por ello, las nuevas titulaciones estructuradas en términos de competencias, brindan información acerca de qué

competencias son importantes para el futuro profesor de matemáticas, como son las competencias específicas de los Grados de Pedagogía, de Matemáticas y de Magisterio.

Los estudiantes de Pedagogía deben desarrollar las competencias transversales (genéricas) que son comunes al resto de titulaciones. Pero además, estos estudiantes han de adquirir 31 competencias específicas (ANECA, 2005b) enunciadas en términos de conocimientos (saber), destrezas (saber hacer) y actitudes (saber ser). Entre esas 31 competencias, destacamos aquí algunas que, en mayor o menor medida, también debieran de formar parte de la formación de profesores de secundaria:

4. Conocer los fundamentos y la metodología de evaluación, referida a programas, contextos, procesos, productos, profesionales, instituciones y/o organizaciones y sistemas educativos.

6. Conocer las bases del desarrollo humano (teóricas, evolutivas y socioculturales).

8. Conocer los principios y fundamentos de atención a la diversidad en educación.

9. Conocer los fundamentos y principios de la teoría del currículo y su aplicación a los procesos de enseñanza-aprendizaje.

13. Conocer la legislación educativa.

14. Fundamentar el diseño de medios didácticos y de contextos educativos, y diseñar y evaluar su utilización.

15. Diseñar programas de intervención, orientación y formación adaptados a las características diferenciales de sujetos y situaciones, en los diferentes tramos del sistema educativo y áreas curriculares.

17. Diseñar y aplicar técnicas e instrumentos de diagnóstico y detección de variables que justifican una acción educativa concreta (diagnóstico de necesidades, capacidades, factores de exclusión y discriminación social, dificultades de aprendizaje, etc.).

23. Diseñar y desarrollar procesos de investigación aplicados a diferentes contextos y con enfoques metodológicos diversos.

24. Diseñar recursos didácticos, materiales y programas de formación para distintos colectivos, niveles, áreas curriculares.

25. Evaluar recursos didácticos, materiales y programas de formación para distintos colectivos, niveles y áreas curriculares. (pp. 159-180)

Las cinco primeras competencias destacan conocimientos generales necesarios para un educador y la seis siguientes enuncian distintas destrezas y capacidades de diseño y evaluación educativa.

En el caso del Grado de Matemáticas (ANECA, 2005c), primero se caracterizan los principales perfiles profesionales de esta titulación, en los que se ocupan el 93,85% de los 7462 licenciados entre 1999 y 2003 que fueron encuestados. Estos

perfiles son: docencia universitaria o investigación (10,88%), docencia no universitaria (32,31%), administración pública (6,04%), empresas de banca, finanzas y seguros (7,69%), consultorías (8,57%), empresas de informática y telecomunicaciones (25,05%), e industria (3,30%) (p. 58)⁷¹. A continuación se clasifican las competencias transversales (genéricas) y las específicas de acuerdo a esos diferentes perfiles profesionales. Para el caso de la docencia no universitaria, las competencias seleccionadas son las que aparecen en la Tabla 19.

Tabla 19

Competencias más relevantes del Grado de Matemáticas para el perfil profesional de docencia no universitaria (ANECA, 2005c, p. 98)

Competencias Transversales		
<i>Instrumentales</i>	<i>Personales</i>	<i>Sistémicas</i>
Capacidad de organización y planificación	Razonamiento crítico	Adaptación a nuevas situaciones
Resolución de problemas	Reconocimiento a la diversidad y la multiculturalidad	Aprendizaje autónomo
Competencias Específicas		
<i>Conocimientos disciplinares</i>	<i>Competencias profesionales</i>	
Análisis matemático	Aplicación de los conocimientos a la práctica	
Álgebra	Visualización e interpretación de soluciones	
<i>Competencias académicas</i>	<i>Otras competencias específicas</i>	
Expresión rigurosa y clara	Capacidad de adaptación	
Generación de curiosidad e interés por las matemáticas y sus aplicaciones		

Aunque el informe que se recoge en el *Libro Blanco del Título de Grado en Matemáticas* reconoce que la docencia en Educación secundaria requiere una preparación específica dentro del propio grado: “*Podrían integrarse dentro del Grado en Matemáticas algunas materias de formación didáctica específica en Matemáticas, así como algunas materias de ‘Matemáticas elementales desde el punto de vista superior’.* Ambos tipos de materias podrían constituir el núcleo de una ‘Orientación Educativa’ del Grado en Matemáticas.” (p. 35). En este Libro Blanco se presta escasa atención a la especificidad de la formación del profesor de matemáticas y las competencias descritas son muy generales. Por ello, finalmente, quedan sin aplicación pues no existe ninguna propuesta de formación

⁷¹ El estudio *Salidas Profesionales de los Estudios de Matemáticas. Análisis de la Inserción Laboral y Ofertas de Empleo*, realizado por la Comisión Profesional de la RSME y la ANECA (Soria, Trujillo y Vázquez, 2007), sobre 516 titulados encuestados, arroja cifras distintas acerca de su ocupación profesional. No obstante, se mantiene constante la preponderancia de la docencia (38,3%), frente a Bancos/Cajas/Finanzas (16,4%), Administración Pública (14,5%), Informática (7%), Consultoría (6,6%) y Ciencia/Tecnología (5,1%) (p. 570).

para futuros profesores dentro del Grado en los planes de estudio propuestos por las universidades en España.

Los conocimientos básicos requeridos son el núcleo del conocimiento matemático disciplinar: álgebra y análisis y las competencias instrumentales son la planificación y organización y la resolución de problemas.

Si bien aproximadamente un tercio de los egresados en Matemáticas se dedican profesionalmente a la docencia no universitaria, esto es, secundaria y bachillerato fundamentalmente, las competencias consideradas como prioritarias para ese fin (Tabla 19), coinciden en casi un 60% con las asociadas a otros perfiles profesionales, como los de la banca, finanzas y seguros. Resulta curioso que, en este caso, no se reconozca el trabajo en equipo como un elemento importante en la formación del profesor, y que sólo se fomente el aprendizaje autónomo.

En el *Libro Blanco del Título de Grado en Magisterio* (ANECA, 2005a), se describen las competencias disciplinares y profesionales que debe desarrollar un profesor de Educación primaria e infantil, distinguiendo aquellas que son comunes a las diferentes especialidades, así como las específicas a cada una de ellas. Centrándonos en las primeras, en la Tabla 20 destacamos aquellas que encontramos más relevantes para compararlas con las de un programa de formación inicial de profesores de Educación secundaria.

Tabla 20

Competencias más relevantes del Grado de Magisterio de interés para el profesor de Educación secundaria (ANECA, 2005a, p. 90)

2. Conocimiento de los contenidos que hay que enseñar, comprendiendo su singularidad epistemológica y la especificidad de su didáctica
 3. Sólida formación científico-cultural y tecnológica
-

Saber hacer

6. Diseño y desarrollo de proyectos educativos y unidades de programación que permitan adaptar el currículum al contexto sociocultural
7. Capacidad para promover el aprendizaje autónomo de los alumnos a la luz de los objetivos y contenidos propios del correspondiente nivel educativo, desarrollando estrategias que eviten la exclusión y la discriminación
8. Capacidad para organizar la enseñanza, en el marco de los paradigmas epistemológicos de las áreas, utilizando de forma integrada los saberes disciplinares, transversales y multidisciplinares adecuados al respectivo nivel educativo
9. Capacidad para preparar, seleccionar o construir materiales didácticos y utilizarlos en los marcos específicos de las distintas disciplinas
10. Capacidad para utilizar e incorporar adecuadamente en las actividades de enseñanza-aprendizaje las tecnologías de la información y la comunicación

Tabla 20

Competencias más relevantes del Grado de Magisterio de interés para el profesor de Educación secundaria (ANECA, 2005a, p. 90)

12. Capacidad para utilizar la evaluación, en su función propiamente pedagógica y no meramente acreditativa, como elemento regulador y promotor de la mejora de la enseñanza, del aprendizaje y de su propia formación

Saber estar

16. Capacidad de relación y de comunicación, así como de equilibrio emocional en las variadas circunstancias de la actividad profesional

17. Capacidad para trabajar en equipo con los compañeros como condición necesaria para la mejora de su actividad profesional, compartiendo saberes y experiencias

Saber ser

22. Compromiso de potenciar el rendimiento académico de los alumnos y su progreso escolar, en el marco de una educación integral

23. Capacidad para asumir la necesidad de desarrollo profesional continuo, mediante la autoevaluación de la propia práctica

Estas doce competencias del Grado de Maestro de Educación Primaria que hemos considerado refuerzan las mismas prioridades sobre el aprendizaje y desarrollo de los profesores en formación antes vistas en términos de competencias cognitivas instrumentales, sociales y profesionales. En este caso, los enunciados son muy generales en lo cognitivo y más prácticos en lo instrumental.

Existen trabajos que constatan el esfuerzo de diferentes colectivos por hacer operativa la noción de competencia en este campo de la formación de profesores de Educación primaria. Un ejemplo importante lo constituyen las actividades desarrolladas en diferentes universidades españolas para adecuar progresivamente diversas titulaciones al EEES mediante experiencias piloto (ver ejemplo en Mesa et al. [2007]). Entre esas titulaciones se encuentra la de *Maestro: Especialidad de Educación Primaria* de la Universidad de Granada; en Lupiáñez, Molina, Flores y Segovia (2007) se ejemplifica uno de estos trabajos en el caso de la formación matemática de los futuros maestros.

Con este breve análisis realizado de los Grados de Pedagogía, Matemáticas y Magisterio, se pone de manifiesto la complejidad de los planes de formación inicial de profesores y la necesidad de concreción de las competencias que han de desarrollar los que trabajarán en Educación secundaria.

En las competencias ejemplificadas, vemos ideas que se reiteran con diferente precisión y énfasis y que subrayan que los conocimientos profesionales requeridos para ser profesor de una o de varias disciplinas demandan. Estas ideas son:

- un dominio técnico de los conocimientos disciplinares, así como de su especificidad epistemológica y didáctica;
- un dominio en las destrezas sobre diseño de proyectos y unidades, intervención en los procesos de aprendizaje, capacidades de organización y gestión en el aula, preparación de materiales, uso de recursos y nuevas tecnologías, así como de observación y evaluación de los procesos y resultados del aprendizaje escolar.

La competencia de planificar actividades de enseñanza y aprendizaje, que es objeto fundamental del análisis didáctico, se considera sistemáticamente en todas las propuestas. Por otra parte, los documentos considerados marcan distintos énfasis en las competencias culturales, sociales y profesionales.

Como balance de esta revisión de las propuestas de planes de estudio para la formación inicial de profesores desde el enfoque de competencias, destacan unos determinados conocimientos, conceptuales y procedimentales, que se centran, en cada caso, en los contenidos disciplinares y en los conocimientos epistemológicos y didácticos propios de cada materia, en los conocimientos sobre planificación y organización del trabajo escolar, sobre el análisis y síntesis didácticos de los contenidos disciplinares, sobre el papel de la resolución de problemas en la disciplina, así como de las estrategias para la toma de decisiones, diseño de tareas e instrumentos de evaluación.

Un programa de formación basado en competencias y con un enfoque funcional tiene, pues, que establecer, junto con los enunciados precisos de tales competencias, los conocimientos en los que se quieren sustentar y los contextos y problemas que se quieren abordar con su dominio.

1.2 Tres Aproximaciones a las Competencias Específicas del Profesor

Desde la investigación también se trata de establecer y organizar las competencias que deben desarrollar los profesores en un programa de formación. Consideramos tres aportaciones sobre competencias profesionales específicas del profesor y las evaluamos desde una perspectiva curricular, para identificar los niveles y dimensiones que las caracterizan en cada caso. Esta perspectiva contribuirá a delimitar los conocimientos necesarios para su logro.

Achtenhagen, Oser y Renold (2006), relacionan las competencias profesionales del profesor con aquellas situaciones de enseñanza y aprendizaje en las que un profesor tiene que intervenir: “La relación entre el desarrollo de competencias por un lado, y el dominio de situaciones de enseñanza y aprendizaje por otro, constituye un viejo problema que aborda la cuestión central de la formación de profesores.” (p. 297). Desarrollar competencias para un profesor implica, para cada una de esas situaciones, una parte de diagnóstico, una de actuación y finalmente una de valoración. De este modo destacan que el desarrollo de competencias profesionales docentes es un conocimiento situado.

Estos autores, basándose en investigaciones y proyectos previos⁷², señalan que la noción de competencia profesional del profesor se conceptualiza en torno a cuatro dimensiones: una competencia personal ó autocompetencia, que incluye diferentes aspectos del desarrollo personal profesional como cognición, emoción, motivación, metacognición o ética; una competencia cognitiva y del conocimiento del contenido, que incluye requerimientos teóricos y analíticos como para, por ejemplo, “aplicar conceptos”; una competencia funcional y didáctica que comprende requerimientos técnicos, prácticos y funcionales, como para, por ejemplo, “usar herramientas, equipamiento y recursos técnicos”; y una competencia social y comunicativa que incluye requerimientos interpersonales, para, por ejemplo, “interactuar en servicio de otros, y con otros”. (p. 297)

Es importante constatar que las dimensiones mencionadas son muy similares a las de nuestra noción de currículo, si bien se enuncian en orden distinto: cognitiva, conceptual, formativa y social. En este caso consideramos que se describe un nuevo nivel de reflexión curricular, centrado en los planes de formación de profesorado y descrito en términos de competencias.

Al contemplar las competencias profesionales del profesor en formación dentro de este marco, el conocimiento disciplinar requerido debiera ser un conocimiento teórico y profesional sobre el currículo de secundaria, en nuestro caso de las matemáticas escolares de este nivel educativo.

En Oser, Achtenhagen, y Renold (2006a), pueden encontrarse distintas investigaciones basadas en formación de profesores y competencias profesionales en diferentes contextos.

Gómez (2007) recoge dos referentes sobre competencias del profesor que son importantes (p. 127). La primera de ellas proviene de Australia, en donde se trabajó en un esquema organizador de las competencias del profesor en torno a cinco dimensiones: facilitar el aprendizaje de los escolares, evaluar e informar sobre el resultado de ese aprendizaje, comprometerse en el aprendizaje profesional, participar en el diseño curricular y en otras iniciativas centradas en la obtención de resultados y asociarse con la comunidad escolar (Department of Education and Training, 2004).

En este caso las dimensiones contemplan dos focos de atención. En primer término destacan dos aspectos relativos al aprendizaje de los escolares; en segundo lugar consideran tres facetas del trabajo del profesor como miembro de una comunidad. Desde nuestra perspectiva curricular, las cinco dimensiones mencionadas son en realidad tres, pero contempladas desde dos niveles distintos: el relativo al aprendizaje escolar y el correspondiente al desarrollo profesional. En este caso, los conocimientos requeridos se centran en el aprendizaje de los escolares y en el diseño de unidades y tareas.

La segunda referencia se enmarca en Estados Unidos, donde

⁷² Achtenhagen, Oser y Renold citan dos fuentes pero sólo referencian una de ellas. Afirman que esa conceptualización de la competencia del profesor proviene de los trabajos de Heinrich Roth y Lotear Reetz, y que fue adaptada en el marco de un proyecto PISA sobre formación profesional (Baethge, Achtenhagen, Arends, Babic, Baethge-Kinsky y Weber, 2006).

el Consejo Nacional para la Enseñanza Profesional identificó las siguientes competencias del profesor: compromiso con los estudiantes y su aprendizaje, conocimientos de los temas que se enseñan y de cómo se deben enseñar, responsabilidad para gestionar y hacer seguimiento del aprendizaje de los estudiantes, reflexión sistemática sobre su práctica, aprendizaje a partir de la experiencia, y membresía a comunidades de aprendizaje. (Gómez, 2007, p. 127)⁷³

Aquí se consideran, igualmente, dos niveles para las cuatro dimensiones del currículo y los conocimientos requeridos para el logro de estas competencias son similares a los ya considerados. Finalmente, destacamos una reflexión de Claude Lessard, un experto en competencias canadiense, que señala sólo dos dimensiones curriculares, pero que encontramos interesante ya que pone de manifiesto la complejidad de las caracterizar las competencias relacionadas con disciplinas curriculares específicas (Luengo, Luzón y Torres, 2008):

En el caso de la situación de la formación profesional del docente, todo el mundo comprende fácilmente la lógica de esa formación, un futuro docente debe aprender a saber gestionar una clase, eso es una competencia. Podemos pensar que en una situación de formación hay un perfil de salida de ese docente, que va a suministrar las herramientas adecuadas para gestionar la clase de manera competente. Yo no digo que sea fácil de hacer, pero comprendemos de qué se trata. Sin embargo, cuando se afirma, por ejemplo, que hay que tener la competencia matemática, no puedo resolver esa cuestión sin hacer referencia a lo que son las matemáticas, a su construcción histórica, a las grandes operaciones matemáticas, a su campo conceptual y tengo que construir situaciones de aprendizaje que permitan a los alumnos aprender para aprender esas operaciones, para integrar los diferentes campos conceptuales, para utilizar esos conceptos en diferentes contextos. (p. 6)

Como vemos en estas referencias, la noción de competencia o competencias del profesor se articula en torno a diferentes dimensiones y se describe con distintos niveles de precisión, dependiendo de los autores. Si analizamos estas aportaciones que los distintos investigadores considerados hacen en relación con las competencias que debe desarrollar un profesor de matemáticas para sistematizarlas desde nuestra perspectiva curricular, es posible ubicar cada una de ellas según el esquema de dimensiones y niveles. Las dimensiones son las mismas ya establecidas en nuestro concepto de currículo (Rico, 1997c). Sin embargo, los distintos autores destacan diferentes focos prioritarios para establecer los niveles con los que concretan sus competencias.

En cuanto a los conocimientos requeridos para que un profesor de secundaria pueda desarrollar y lograr las competencias analizadas, podemos inferir con precisión que tales conocimientos son:

- una visión funcional de las matemáticas escolares;
- la noción de currículo, articulada en sus diferentes dimensiones y niveles;

⁷³ Cita que proviene de Department of Education (2001).

- herramientas de análisis de las matemáticas escolares, desde un punto de vista conceptual, cognitivo, formativo y social (organizadores del currículo); y
- herramientas de diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje (análisis didáctico).

2. COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS. LA IMPORTANCIA DE LA PLANIFICACIÓN

En el anterior apartado hemos hecho una revisión de las competencias profesionales establecidas en los planes de formación inicial de profesores y recogidas en los documentos y recomendaciones elaborados con motivo del proceso de convergencia europea y de la nueva organización de los estudios universitarios, conocida como Plan Bolonia. Estas competencias se sustentan sobre un núcleo de conocimientos, capacidades, destrezas y actitudes que señalan prioridades para nuestra visión del conocimiento profesional del profesor.

En este apartado haremos una reflexión similar sobre el conocimiento del profesor de matemáticas sobre la base de los requerimientos que plantean las competencias convenidas para estos profesores. Nos centraremos en dos acercamientos, que se han realizado recientemente, sobre el establecimiento de las competencias profesionales del profesor de matemáticas⁷⁴.

En primer lugar presentamos las reflexiones de Moguen Niss sobre las competencias del profesor de matemáticas. Consideramos relevantes estas aportaciones, que dan continuidad y se basan en el trabajo desarrollado por este autor para las competencias matemáticas escolares, que están en la base del estudio PISA ya descrito en el capítulo 3.

En segundo lugar nos centraremos en algunos de los resultados y acuerdos alcanzados en el *Seminario Itermat*, celebrado en Granada en 2004, que ha sido, hasta el momento, la principal aportación española con repercusión institucional para el establecimiento de las competencias específicas del profesor de matemáticas.

⁷⁴ De acuerdo con el marco general de esta investigación, toda la reflexión que realizaré aquí se centra en las competencias del profesor de matemáticas de Secundaria. En la Universidad de Granada y en el equipo de investigación *Pensamiento Numérico*, se han estudiado y se siguen investigando las competencias del profesor de Educación primaria, estudios que se han centrado en diferentes aspectos, como son el análisis, estructura, jerarquía y organización teórica de esas competencias (Segovia, 2005), el diseño y evaluación de un programa de formación inicial que contribuya al desarrollo de competencias profesionales (Segovia, Lupiáñez y Flores, 2006; Lupiáñez, Molina, Flores y Segovia, 2007) o, también, la vinculación de las actividades planteadas en el programa de formación con el desarrollo de competencias (Cecilia, 2007).

2.1 ¿Qué Significa ser un Profesor de Matemáticas Competente?

En el marco del *Danish KOM Project*⁷⁵, además de investigar sobre la clasificación y organización de las competencias matemáticas de los escolares, también se produjeron resultados acerca de cómo debe orientar su actividad docente un profesor de cara a desarrollar esas competencias en sus alumnos (Niss, 2004a y 2004b).

La pregunta que aparece en el título de este epígrafe la plantea el propio Niss y la responde sosteniendo que un profesor de matemáticas competente es aquél que “de una manera efectiva y eficiente es capaz de ayudar a sus escolares a construir y desarrollar competencias matemáticas.” (Niss, 2006, p. 44)

Esta caracterización de profesor competente posee al menos dos implicaciones. En primer lugar, el profesor debe poseer un dominio de las competencias matemáticas que serán objeto de aprendizaje por parte de sus escolares que vaya acorde con el nivel educativo en el que se centra su actividad docente⁷⁶. Esto implica que el profesor de matemáticas en formación necesita desarrollar y lograr cierta maestría sobre una serie de conocimientos matemáticos, capacidades, destrezas y actitudes hacia las matemáticas y que debe poder utilizarlos en una variedad de contextos y situaciones propios de un ciudadano alfabetizado.

Si recordamos las ocho competencias que desglosan la competencia matemática general del estudio PISA, podemos sostener que entre los conocimientos, destrezas y capacidades necesarias para el profesor de matemáticas, siempre en relación con cada uno de los temas que forman parte del currículo de secundaria, se encuentran:

- El manejo de los principales conceptos y procedimientos matemáticos (*pensar y razonar*).
- Los procedimientos y técnicas usuales de prueba y demostración (*argumentar y justificar*).
- La capacidad de expresar ordenadamente y con claridad las propias ideas matemáticas (*comunicar*).
- La selección de tareas que pongan en juego diferentes fases del proceso de modelización (*modelizar*).
- La sección y secuenciación de problemas en diferentes situaciones y con distintos niveles de complejidad (*plantear y resolver problemas*).
- Los distintos sistemas de representación para un mismo concepto y la capacidad para expresar sus propiedades en cada uno de ellos (*representar*).

⁷⁵ Este proyecto fue promovido por el Ministerio de Educación de Dinamarca y otros estamentos, con el objetivo de crear una plataforma para llevar a cabo una profunda reforma de la educación matemática en ese país, desde la educación básica hasta la universitaria (Niss, 2003). KOM son las siglas en danés de *Competencias y Aprendizaje de las Matemáticas*.

⁷⁶ Ya describimos estas competencias en el capítulo 3.

- Emplear de manera operativa el simbolismo matemático y poner en juego los rudimentos y las destrezas básicas (*usar el lenguaje simbólico, formal y técnico y las operaciones*).
- La capacidad de usar recursos tecnológicos que fomenten y apoyen el aprendizaje (*emplear soportes y herramientas tecnológicas*).

Todos estos conocimientos y capacidades muestran la necesidad de un considerable dominio de los contenidos del programa escolar de matemáticas, centrado en las estructuras conceptuales, en el uso experto de los correspondientes sistemas de representación y en el manejo de los diversos contextos y situaciones en los que tales contenidos tienen un uso social convenido, así como en la aplicación de diversas estrategias para la resolución de problemas.

Estos conocimientos, destrezas y capacidades constituyen el núcleo del análisis de contenido (§2.3). Un estudio detallado de cada estructura conceptual en términos de conocimientos conceptuales y procedimentales, de los sistemas de representación de cada tópico y su correspondiente análisis fenomenológico, que son los distintos componentes del análisis de contenido, constituyen parte sustantiva del conocimiento profesional en el dominio conceptual requerido para la formación inicial del profesor de matemáticas. Los organizadores del currículo que hemos denominado estructura conceptual, sistemas de representación y análisis fenomenológico, constituyen piezas básicas y esenciales del conocimiento del profesor de matemáticas.

El análisis de contenido es un procedimiento para que el profesor en formación desarrolle su competencia matemática, en el sentido que establece el proyecto PISA. Los organizadores del currículo constituyen la base teórica de este análisis y forman parte ineludible del conocimiento requerido para el profesor de matemáticas en formación (§2.3.8).

La competencia matemática da concreción a parte de las competencias básicas cognitivas y de intervención requeridas para el profesor de matemáticas; expresa con mayor precisión la primera de las competencias generales establecidas para el Master Oficial para Profesor de Secundaria y podemos reconocer alguna de sus componentes en las competencias generales del Grado de Matemáticas.

Al profesor en formación le es imprescindible desarrollar su propia competencia matemática, pero no le resulta suficiente. Por ello, en segundo término, Niss también afirma que un profesor de matemáticas competente debe poseer seis competencias didácticas y pedagógicas centradas en matemáticas, que son las siguientes (pp. 44-45):

Competencia curricular: centrada en analizar, evaluar, relacionar e implementar programas formativos y currículos existentes, así como construir otros nuevos.

Competencia de enseñanza: para diseñar, planificar, organizar, orquestar y gestionar la enseñanza de las matemáticas como por ejemplo crear un amplio espectro de situaciones de enseñanza y aprendizaje, inspirar y motivar a los

escolares o discutir con ellos sobre currículos o sobre esas actividades de enseñanza y aprendizaje.

Competencia sobre aprendizaje: centrada en descubrir, interpretar y analizar el aprendizaje de las matemáticas de los escolares, así como sus nociones, creencias y actitudes hacia las matemáticas. También incluye identificar el desarrollo individual de cada uno de los escolares.

Competencia sobre evaluación: para identificar, evaluar, caracterizar y comunicar los resultados de los escolares y sus competencias. También incluye seleccionar, modificar, construir, analizar críticamente e implementar una variedad de formas de evaluación e instrumentos para diferentes propósitos formativos y sumativos.

Competencia colaborativa: centrada en colaborar con diferentes colegas de matemáticas y de otras disciplinas, así como con otras personas relacionadas con la enseñanza de las matemáticas y sus condicionantes, como padres o autoridades.

Competencia para el desarrollo profesional: para desarrollar la propia competencia como profesor de matemáticas (meta-competencia), y que incluye, participar y relacionarse con actividades de desarrollo profesional, tales como cursos formativos, proyectos o conferencias; reflexionar sobre la propia enseñanza y sus necesidades, y mantenerse actualizado acerca de nuevas tendencias en la investigación y en la práctica.

Niss concluye señalando que en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, la Didáctica de la Matemáticas constituye un componente crucial para iniciar el desarrollo de las cuatro primeras competencias descritas antes, mientras que las dos últimas, se desarrollan con motivo de la práctica docente (p. 46).

Si tenemos en cuenta la competencia matemática general también considerada por Niss y aplicamos nuestra perspectiva curricular, apreciamos tres niveles distintos en esta propuesta de competencias. En un primer nivel hay una consideración global del currículo, y aparece la *competencia curricular*, enunciada en primer lugar, y que cubre todas las dimensiones. En un segundo nivel hay una consideración desglosada del currículo donde enuncia cuatro competencias, cada una según una dimensión: *matemática* (conceptual), *enseñanza* (formativa), *aprendizaje* (cognitiva) y *evaluación* (social). En el tercer nivel, donde considera al profesor como miembro de una comunidad profesional, sólo hay dos dimensiones: la relativa al *desarrollo profesional* (cognitiva) y a la *colaboración profesional* (social).

Como hemos visto para el análisis de contenido, el análisis didáctico, planteado como marco teórico de esta investigación, tiene una relación y similitud considerables con el conjunto de las cuatro competencias señaladas por Niss para el segundo nivel: matemática, enseñanza, aprendizaje y evaluación, ya que se sustentan sobre una misma perspectiva curricular.

En nuestra propuesta, el análisis cognitivo se centra sobre el aprendizaje de las matemáticas escolares; se trata de un procedimiento para el desarrollo y logro de la *competencia sobre aprendizaje* de Niss. En el capítulo 3 hemos visto que son tres los organizadores del currículo que dan fundamento al análisis cognitivo: expectativas sobre el aprendizaje escolar, limitaciones y oportunidades de aprendizaje, que incluyen una serie de conocimientos, capacidades, destrezas y actitudes. Precisamente nuestro estudio se centra en proporcionar una prueba del desarrollo de la *competencia sobre aprendizaje* basada en estos conocimientos.

El análisis de instrucción lo centramos en el diseño, selección y secuenciación de tareas que conforman una unidad didáctica. En este caso se trata de un procedimiento para el desarrollo y logro de la *competencia de enseñanza* según la establece Niss. También hemos descrito los conocimientos y capacidades que están en la base de este análisis de instrucción y que, por tanto, contribuyen al logro de esta competencia (§2.5).

Finalmente, el análisis de actuación (§2.6), lo hemos centrado en valorar los logros de la planificación y de su puesta en práctica, mediante la evaluación de los aprendizajes y el análisis de los resultados. Se trata de un procedimiento para el desarrollo y logro de la *competencia sobre evaluación*, también descrita por Niss.

Los conocimientos del profesor en formación necesarios para el desarrollo de estas competencias son los organizadores del currículo de matemáticas en su triple vertiente: teórica, técnica y práctica (Rico, 1997d; Segovia y Rico, 2001; Gómez, 2007).

La *competencia curricular* inicial la consideramos como una competencia general, que engloba las cuatro anteriores y que requiere de conocimientos generales sobre el currículo de matemáticas, sus finalidades, sus niveles y dimensiones, su organización; sobre historia de la matemática y de la educación matemática; sobre las matemáticas escolares y sus fuentes epistemológicas y axiológicas; sobre psicología de la educación, teorías del aprendizaje escolar y su funcionalidad en el aprendizaje de las matemáticas; sobre teorías de la enseñanza e instrucción y su funcionalidad en la enseñanza de las matemáticas; sobre marcos teóricos, principios, modalidades e instrumentos de evaluación. Todos estos conocimientos, capacidades y destrezas asociados constituyen los principios que articulan un conocimiento general y básico sobre Didáctica de la Matemática, desarrollado extensamente en Rico (1992, 1997a) y Rico y Gutiérrez (1994).

A los efectos de este estudio no consideramos las dos competencias del nivel profesional señaladas por Niss, por centrarnos en un programa de formación inicial.

El balance de las competencias enunciadas por Niss muestra que el análisis conceptual proporciona una base de conocimientos, capacidades, destrezas y actitudes necesarios y adecuados para el desarrollo y logro de esas competencias profesionales, en particular, para abordar las tareas de planificación. Hay otros conocimientos no contemplados expresamente en el análisis didáctico, que son

también parte importante del conocimiento del profesor de matemáticas de secundaria. Parte importante de estos conocimientos están enumerados para la *competencia curricular*, pero no los trataremos explícitamente en este estudio.

2.2 Conocimiento General Básico y Conocimiento Básico de la Profesión del Profesor de Matemáticas de Secundaria

En el *Seminario Itermat* (Recio, 2004), y dentro del contexto del proyecto Tuning, se analizaron las nociones de *conocimiento general básico* (CGB) y *conocimiento básico de la profesión* (CBP) (Bajo, Maldonado, Moreno, Moya y Tudela, 2003; González y Wagenaar, 2003). Dentro del contexto de la definición de competencias para la Licenciatura de Matemáticas, González (2004) interpreta esas nociones de la siguiente manera:

El CGB corresponde a fundamentos disciplinares generales de la Didáctica de la Matemática que son referentes teóricos para el profesor de matemáticas. El CBP es el que capacita para investigar/ejercer la práctica de la profesión de profesor de matemáticas de modo independiente. Esta separación no tiene fronteras claras en los planes de formación de profesores. Las investigaciones sobre la naturaleza del conocimiento del profesor de matemáticas sitúan a este conocimiento en un plano intermedio entre lo teórico y lo empírico y lo describen como un sistema de funcionamiento integrado que combina saberes de naturaleza académica y su puesta en práctica. (p. 4)

Llinares (2004, p. 2) propone que la discusión sobre las competencias del profesor de matemáticas se articule en torno a tres “sistemas de actividad”: (a) organizar el contenido matemático para enseñarlo; (b) analizar e interpretar las producciones matemáticas de los alumnos; y (c) gestionar el contenido matemático en el aula.

Uno de los acuerdos de esa reunión fue el establecimiento de las competencias básicas del profesor de matemáticas de secundaria, entre las que destacan (Rico, 2004, pp. 8-9):

1. El dominio de los contenidos matemáticos de Educación Secundaria desde una perspectiva matemática superior y su conocimiento como objetos de enseñanza-aprendizaje;
2. la organización curricular y planificación de estos contenidos matemáticos para su enseñanza;
3. el análisis, interpretación y evaluación de los conocimientos matemáticos de los alumnos a través de sus actuaciones y producciones matemáticas; y
4. la capacidad de gestión del contenido matemático en el aula.

De nuevo se constata aquí la importancia de la planificación dentro de la actividad docente del profesor de matemáticas, así como aspectos relacionados con el aprendizaje de los escolares, punto central del análisis cognitivo.

Estos y otros documentos similares contemplan competencias muy próximas entre sí en el modelo básico de formación y actualización docente para el

profesorado de secundaria. Tales trabajos han tenido especial incidencia en las reflexiones acerca de la formación inicial de profesores de matemáticas de Secundaria, y contemplan los siguientes tipos de competencias (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008):

1. Conocimiento genérico y especializado, científico y técnico de matemáticas, sobre sus contenidos, métodos y estrategias de resolución de problemas.
2. Competencias sobre diseño y planificación que permitan organizar y reformular los procesos de enseñanza-aprendizaje. Capacidades instrumentales como analizar y sintetizar, organizar y proponer problemas, junto con habilidades interpersonales como capacidad para la crítica y para trabajar en grupo.
3. Competencias didácticas que consideren los propios conocimientos disciplinares como objetos de enseñanza y aprendizaje, orientadas a la implementación docente y evaluación de los aprendizajes. La capacidad para el análisis didáctico de los contenidos curriculares establece la estructura conceptual de una determinada técnica o teoría y el modo de abordarla para su comprensión y aprendizaje.

Como hemos visto, desde diferentes fuentes se destaca el papel de la competencia de planificación por parte del profesor, si bien se hace con diferentes énfasis.

En el momento actual, nosotros sostenemos que la formación del profesorado de Educación Secundaria requiere incorporar reflexión teórica e instrumentos técnicos que promuevan la competencia en el proceso de planificación de la enseñanza y aprendizaje en el aula del futuro profesor (Gravemeijer, 2008). Son varias las razones que refuerzan esta necesidad (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008):

La información que aportan a la planificación docente los currículos de Educación Secundaria establecidos y las secuenciaciones de contenidos que los boletines oficiales publican, se muestran claramente insuficientes para llegar al nivel del aula y decidir acerca de qué debe aprender un alumno o alumna de secundaria en cada tema y cómo hacerlo operativo cada día. Los libros de texto que publican las editoriales y su complemento en forma de libro del profesor ocupan el espacio intermedio entre la secuenciación general del Boletín Oficial del Estado y la planificación diaria de actividades que el profesor debe realizar, ya que responden a preguntas como ¿qué contenidos trabajo con mis alumnos? ¿qué expectativas tengo respecto a su aprendizaje? ¿cómo selecciono y estructuro las clases para que el alumno alcance las expectativas previstas? Sin embargo los libros de texto se redactan para perfiles de alumnos y profesores que no coinciden con la realidad de cada centro y aula. La información que contienen, las estrategias didácticas con las que organizan los contenidos, la selección de tareas que realizan y la limitación de recursos que suponen, obligan, cada vez más, a que el profesor utilice el libro de texto como un apoyo a su trabajo en el aula y no como una guía de actuación para seguir de modo prescriptivo.

La normativa educativa señala la obligatoriedad de elaborar documentos curriculares específicos para cada centro, que contengan instrumentos para tomar decisiones y propuestas para ajustar el contenido oficial del currículo a la realidad del alumnado de cada centro. Igualmente, enfatiza la necesidad de responder a la diversidad del alumnado en sus condiciones de vida, expectativas y conocimientos con variedad de actividades. Estas consideraciones, relativas al diseño y desarrollo curricular, refuerzan la importancia del trabajo de programación y selección de tareas en la labor del profesor. La planificación, como competencia clave del profesor de matemáticas, demanda el desarrollo de capacidades específicas para identificar, organizar, seleccionar y priorizar los significados de los conceptos matemáticos mediante el análisis cuidadoso de su contenido, análisis necesario para establecer las expectativas de aprendizaje, previo al diseño de tareas y necesario para la elección de secuencias de actividades. (p. 8)

En el capítulo 3 caracterizamos la noción de competencia en torno a tres componentes. De manera sintética, ser competente consiste en activar unos determinados procesos cognitivos sobre algunos conocimientos para dar respuesta a problemas o cuestiones en diferentes situaciones y contextos. Podemos usar esa caracterización para estructurar la competencia de planificación del profesor en formación en base a esas tres componentes (Figura 13).



Figura 13. Componentes de la noción de competencia de planificación del profesor de matemáticas

En el primer capítulo contextualizamos nuestra investigación en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria, que se lleva a cabo

mediante una asignatura impartida en la Universidad de Granada. Ese es el contexto que empleamos para caracterizar la competencia de planificación de los profesores en formación.

Posteriormente, en el capítulo 2, introdujimos el análisis didáctico como un procedimiento que permite abordar el problema del diseño de unidades didácticas centradas en temas de las matemáticas escolares, y por esa razón resulta central para el desarrollo de la competencia de planificación de los futuros profesores. También presentamos en ese capítulo el conocimiento didáctico como el conocimiento que necesita poner en juego un profesor para llevar a cabo el análisis didáctico de un tema de matemáticas. En el capítulo 3 profundizamos en la estructura de análisis cognitivo presentando y ejemplificando los tres organizadores del currículo que lo estructuran.

A lo largo de este capítulo, hemos puesto de manifiesto que el conocimiento didáctico aglutina una diversidad de conocimientos, capacidades y actitudes y que varios de ellos se centran en la problemática del aprendizaje de los escolares.

A continuación describiremos con más detalle el conocimiento didáctico de manera que atienda a dos requisitos. Por una parte, servir de fundamento al plan de formación de profesores en que se basa esta investigación. Por otra parte, caracterizar el desarrollo de la competencia de planificación de los grupos de futuros profesores en relación al análisis cognitivo para la parte empírica.

3. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN FORMACIÓN

En el capítulo 1 hicimos un balance de la investigación actual sobre formación de profesores. Allí subrayamos que la noción de conocimiento pedagógico de contenido de Shulman (1986), si bien adolece de ciertas limitaciones para describir el conocimiento que debe poseer y manejar un profesor, sigue siendo central para caracterizar ese conocimiento, sobre todo debido a los trabajos que han tratado de ampliar y definir esa noción (§1.3.1).

Gómez (2007) parte de esa noción de conocimiento pedagógico de contenido para caracterizar la de conocimiento didáctico, y pone el énfasis en lo que el profesor necesita conocer para diseñar y gestionar actividades de enseñanza y aprendizaje, más que en lo que necesita para simplemente *transmitir* conocimiento. El análisis didáctico es un procedimiento para el diseño, la puesta en práctica y la evaluación de esas actividades de enseñanza y aprendizaje, y se estructura en torno a los organizadores del currículo como herramientas prácticas de actuación. El *conocimiento didáctico* se refiere a “los conocimientos y destrezas que son necesarios para realizar el análisis didáctico de un tema matemático.” (p. 119)

Como señala el propio Gómez, esta definición no es operativa, y necesita de una mayor concreción. A eso dedicaremos el siguiente epígrafe, siguiendo la reflexión de este autor (pp. 119-122).

3.1 La Noción de Conocimiento Didáctico

La presentación del análisis didáctico hecha en los capítulos 2 y 3 constituye este análisis como un conjunto organizado de procedimientos que permiten analizar, describir y planificar un tema de matemáticas desde distintos puntos de vista. Esos procedimientos se sustentan a su vez en los llamados organizadores del currículo, entre los que se encuentran, por ejemplo, el análisis fenomenológico, las limitaciones en el aprendizaje o la evaluación.

Para cada uno de los organizadores del currículo la investigación en Educación Matemática ha desarrollado múltiples interpretaciones y diferentes significados, que forman parte de la producción en esta disciplina. Así, por ejemplo, sabemos que la evaluación en matemáticas ha sido objeto continuo en investigación, y que se han producido avances que, entre otros aspectos, distinguen diferentes tipos de evaluación de acuerdo a sus propósitos e instrumentos (Scriven, 1967; Gimenez, 1997). Cuando en el capítulo 3 presentamos el análisis cognitivo y presentamos la competencia *argumentar y justificar*, vimos como existen diferentes investigaciones que llevan a cabo acercamientos distintos a la demostración matemática (Duval, 1999a; de Villiers, 1999). Ese acervo de significados e interpretaciones de las nociones que considera la Educación Matemática, constituye el *conocimiento didáctico disciplinar de referencia*.

A la hora de diseñar la asignatura que cursan los profesores en formación, los formadores tomamos decisiones acerca de cuáles de esos significados serán los que introduciremos en el programa formativo. En los capítulos 2 y 3 hemos descrito esas posiciones y, por ejemplo, a la hora de llevar a cabo el análisis fenomenológico consideramos que la caracterización de situaciones que se describe en el proyecto PISA (OCDE, 2005a) es acertado para el trabajo con futuros profesores. Por otro lado, en la caracterización de los errores y dificultades, seleccionamos las clasificaciones de errores de Radatz (1979) y de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), para que los futuros profesores organicen los posibles errores que pueden presentarse en los temas de matemáticas. Esos significados que hemos acotado en el contexto del programa de formación en el que centramos nuestra investigación, lo denominamos *conocimiento didáctico de referencia para la asignatura*. Las nociones de currículo, de organizadores del currículo y la del análisis didáctico, constituyen los fundamentos de esta faceta del conocimiento didáctico.

Finalmente, con motivo de cursar la asignatura, los profesores en formación, o grupo de ellos interpretan ese conocimiento didáctico de referencia para la asignatura, y construyen y desarrollan el *conocimiento didáctico del profesor o del grupo de profesores en formación*. Ese conocimiento es el que nos proponemos explorar en nuestra investigación para el caso del análisis cognitivo. Concretamente, nos preocuparemos de estudiar el desarrollo del conocimiento didáctico de los grupos de profesores sobre los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo. Eso nos permitirá analizar en qué medida han desarrollado su competencia de planificación sobre el aprendizaje de los escolares. En Gómez (2007), se describe detalladamente el conocimiento didáctico que desarrollaron los grupos de profesores en formación que participaron en la asignatura en el

curso 2000-2001, en relación a los organizadores del currículo que pone en juego el análisis de contenido.

3.2 Enfoque Funcional del Conocimiento Didáctico de los Profesores en Formación

La caracterización anterior del conocimiento didáctico de los grupos de profesores en formación, se ha articulado en torno al significado que estos grupos de futuros profesores desarrollan acerca de los organizadores del currículo que configuran el análisis didáctico. Esta caracterización tiene una importante implicación, ya que

cuando queremos hablar de un “profesor eficiente” (como lo hacen Cooney y otros) o de “formas pedagógicamente potentes” (como lo hace Shulman), no podemos pensar, como lo sugiere Carlsen, en un conocimiento preestablecido, estático y neutro. Estamos más bien hablando de una integración de conocimientos, habilidades y actitudes para la acción. Debemos, por lo tanto, abordar el conocimiento de profesor de matemáticas desde una perspectiva funcional. (Gómez, 2007, p. 118)

En este capítulo hemos constatado cómo la noción de competencia permite caracterizar la formación del profesorado, y que una competencia central en esa formación es la de planificar. En el capítulo 3 pusimos de manifiesto que el empleo de esa noción de competencia trae consigo una visión funcional del aprendizaje y del conocimiento.

Nuestro enfoque funcional del aprendizaje de los profesores (o grupos de profesores) se sustenta en teorías más generales que hablan de “procesos de aprendizaje funcional”⁷⁷ (Patry, 1999), y de la “educación en un contexto funcional”⁷⁸ (Sticht, 1997). Estas teorías se aplican a cualquier proceso formativo, y sostienen, entre otros aspectos, que hay que atender tanto el aprendizaje como el modo en el que se aprende y que si ese aprendizaje se descontextualiza de las situaciones en la que se puede aplicar, pierde totalmente su efectividad e interés. Nociones como la implicación del sujeto en su proceso de aprendizaje, el “aprender a aprender” o la autonomía, son otros elementos importantes en estas teorías; pero nosotros destacamos simplemente el referido a la importancia de que el aprendizaje vaya vinculado a su aplicación para resolver cuestiones y problemas y a afrontar retos.

Este enfoque funcional nos permite caracterizar el profesor en formación competente para planificar las matemáticas escolares, en términos de que ha desarrollado un conocimiento didáctico que le permite poner en juego el análisis didáctico, para abordar el problema del diseño de unidades didácticas en el contexto del propio programa de formación (ver Figura 13).

Y para justificar el diseño de ese programa formativo y para explorar el conocimiento didáctico que desarrollan unos grupos de profesores en formación

⁷⁷ *Functional Learning Process*, en el original.

⁷⁸ *Functional Context Education*, en el original.

que lo cursan, distinguiremos tres niveles de los organizadores del currículo que, como ya hemos señalado antes, están en la base de ese conocimiento didáctico. Siguiendo la propuesta de Gómez (2007), que destaca que esos tres niveles aunque son diferentes, están muy relacionados, consideraremos los niveles “teórico, técnico y práctico de cada organizador del currículo.” (p. 121)

El nivel *teórico* de un organizador del currículo tiene que ver con “la opción que, como formadores, hemos tomado para el significado del organizador del currículo dentro de la variedad de posibles significados” (op. cit.) posibles que existen en Educación Matemática. Pusimos un ejemplo en el capítulo 3 al considerar unas clasificaciones específicas de los errores en el aprendizaje de las matemáticas.

En el contexto de análisis didáctico, los organizadores del currículo tienen una función concreta para analizar un tema de matemáticas. En particular, en el caso del análisis cognitivo, mediante el estudio de las expectativas de aprendizaje, los grupos de profesores en formación tratan de establecer qué esperan que aprendan los escolares acerca de un tema concreto de matemáticas. Este uso de cada organizador del currículo para analizar un tema de matemáticas, configura el nivel *técnico* de ese organizador.

Finalmente, dentro del proceso de planificación de una unidad didáctica, cada uno de los organizadores aporta una información importante a otros y que contribuye a estructurar esa planificación. Consideraremos entonces el nivel *práctico* de un organizador del currículo como el conjunto de estrategias y técnicas necesarias para utilizar la información que surge de ese organizador para otros organizadores del análisis didáctico y en el diseño de la unidad didáctica (Op. cit.).

Estos tres niveles de cada organizador del currículo, brindan tres facetas del conocimiento didáctico de los profesores han de desarrollar para poner en juego el análisis didáctico. Es decir esas tres facetas del conocimiento didáctico, en base a los organizadores del currículo y la propia noción de currículo, constituyen la componente cognitiva de la competencia de planificación del profesor.

Pero al mismo tiempo, esta reflexión teórica nos permitirán afrontar la parte empírica de nuestra investigación. Con ese objetivo usaremos a continuación los niveles de los organizadores del currículo para organizar las capacidades que han de poner en juego los grupos de futuros profesores para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema de matemáticas. En Gómez (2007) se lleva a cabo una reflexión similar, pero centrada en el análisis de contenido.

4. CONOCIMIENTOS Y CAPACIDADES DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN EN LA PUESTA EN PRÁCTICA DEL ANÁLISIS COGNITIVO

La descripción del análisis cognitivo que hicimos en los capítulos 2 y 3, junto a la caracterización del conocimiento didáctico que hemos realizado en este capítulo, nos permitirá detallar qué capacidades⁷⁹ han de poner en juego los profesores en formación para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares. Como parte del análisis didáctico, el procedimiento del análisis cognitivo contribuye a desarrollar en los futuros profesores su competencia de planificación, cuya importancia hemos constatado en secciones anteriores de este mismo capítulo.

El análisis cognitivo se organiza y estructura en torno a tres organizadores del currículo que presentamos en el capítulo 2 y que describimos con detalle en el capítulo 3: expectativas de aprendizaje (referidas a objetivos específicos y competencias matemáticas), limitaciones de aprendizaje (referidas a errores y dificultades) y oportunidades de aprendizaje (referidas a tareas matemáticas). A continuación enumeramos los conocimientos y las capacidades que han de poner en juego los grupos de profesores en formación en relación a la puesta en práctica del análisis cognitivo. Los presentamos de acuerdo con los tres niveles del conocimiento didáctico que introdujimos en el epígrafe anterior.

4.1 Nivel Teórico

1. Describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo.
2. Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico.
3. Conocer la noción de competencia y su clasificación (en el marco de PISA).
4. Delimitar y distinguir las nociones de error y dificultad y la relación entre ambas.
5. Reconocer y expresar el papel del error en la educación matemática.
6. Conocer y ejemplificar errores y dificultades según diferentes clasificaciones.

4.2 Nivel Técnico (Relativo a un Tema Específico de Matemáticas)

7. Seleccionar las principales prioridades de aprendizaje o focos de contenido de un tema de las matemáticas escolares.
8. Enunciar objetivos específicos y organizarlos según prioridades o focos.
9. Describir y justificar la contribución de objetivos a competencias.

⁷⁹ Usamos el término *capacidad* con el mismo significado que introdujimos en el capítulo 2. En Lupiáñez (2005, 2008) y Lupiáñez y Rico (2006, 2008), analizamos este término con más detalle.

10. Ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos.
11. Analizar el desarrollo esperado de competencias y revisar el proceso.
12. Enunciar errores y dificultades según diferentes fuentes (incluyendo referentes teóricos).
13. Vincular posibles errores y dificultades con el desarrollo de determinados objetivos específicos.
14. Ejemplificar tareas para detectar y corregir errores y dificultades.

4.3 Nivel Práctico

15. Usar la descripción de objetivos específicos y competencias para diseñar y seleccionar tareas.
16. Aplicar la selección de errores y dificultades en el diseño y selección de tareas.
17. Emplear la información del análisis cognitivo para la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.
18. Aplicar el enunciado de los objetivos y la selección de competencias en el diseño de las tareas de evaluación.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Estos diecinueve conocimientos y capacidades constituyen el conocimiento didáctico en sus tres niveles (teórico, técnico y práctico) necesario para llevar a cabo el análisis cognitivo. Su descripción cumple un triple propósito.

En primer lugar, nos permiten caracterizar por completo la noción de la competencia de planificación para el profesor de formación, en relación con el análisis cognitivo. En este mismo capítulo presentamos las tres componentes de esa competencia (Figura 13): Integra diferentes conocimientos y capacidades que conforman el conocimiento didáctico (§4.3); se desarrolla y pone en juego mediante la actuación del profesor en el análisis didáctico (capítulo 2), en el contexto del diseño de unidades didácticas un programa de formación centrado en una asignatura (ver capítulos 1 y 5). Lo que hemos hecho en este último apartado es describir los conocimientos y capacidades del conocimiento didáctico, que el profesor debe poner en juego para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares.

En segundo lugar, este listado organizado de conocimientos y capacidades suministra un guión de actuación en el programa de formación que es objeto de estudio en nuestra investigación. Como veremos en el capítulo 5, la descripción de cómo se llevó a la práctica ese programa en el curso académico 2008-2009 en lo referente al análisis cognitivo, se sustenta (junto con lo expuesto en los capítulos 2 y 3) en esta descripción de capacidades.

Finalmente y en relación con el tercer objetivo de nuestra investigación, el listado de conocimientos y capacidades que se ponen en juego con la realización del

análisis cognitivo, nos suministra una herramienta central para describir el aprendizaje logrado por los grupos de futuros profesores en la asignatura en relación a esa componente del análisis didáctico y, posteriormente, para analizar el desarrollo de su competencia de planificación. El diseño y la organización del estudio empírico los describimos en el capítulo 6.

LA ASIGNATURA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN EL CURSO 2008-2009

En este capítulo describimos cómo fundamentamos, diseñamos y llevamos a la práctica un programa de formación inicial de profesores de matemáticas, estructurado en torno a las nociones de currículo, matemática escolar y análisis didáctico que, además, considere nuestra caracterización del análisis cognitivo y que, finalmente, contribuya al desarrollo de la competencia de planificación de los profesores en formación que lo cursen.

Para ello, en el primer apartado ubicamos nuestra posición con respecto al diseño de un programa de formación inicial de profesores dentro de la investigación actual y dentro de la tradición formativa e investigadora de el grupo de investigación FQM193. En los apartados segundo y tercero, describimos los antecedentes de la asignatura “Didáctica de la Matemática” en la que contextualizamos nuestra propuesta de programa de formación inicial.

La descripción de su finalidad, sus objetivos, sus contenidos, de varios aspectos metodológicos y de su evaluación en el curso 2008-2009, en el que llevamos a cabo el estudio empírico de nuestra investigación, la incluimos en el cuarto apartado. A continuación, en el quinto, describimos el desarrollo general de la asignatura en ese curso. El sexto apartado se centra en las sesiones relacionadas con el análisis didáctico, prestando especial atención a aquellas centradas en el análisis cognitivo.

Con estos avances, nos aproximamos a la consecución del segundo de los objetivos generales que abordamos en nuestra investigación:

Diseñar e implementar un programa de formación inicial que incorpore el análisis cognitivo desde una perspectiva funcional.

1. DISEÑO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN

Cuando en el capítulo 1 presentamos y contextualizamos nuestro estudio, destacamos que la línea de investigación sobre formación de profesores ha sido objeto de interés para la investigación en Educación Matemática en los últimos veinte años (Oliveira y Hannula, 2008). La perspectiva de continuidad del trabajo en este tema en el futuro sigue igualmente abierta, como señala English (2009) al establecer las prioridades en la investigación venidera.

Al centrarnos en formación inicial, también constatamos que existe un gran número de investigaciones que analizan cómo puede diseñarse y llevarse a la práctica un programa de formación inicial de profesores de matemáticas (Cochran-Smith, 2004; Gómez, 2007; Jaworski y Word, 2008; Tirosh y Word, 2008).

Gómez (2007, pp. 163-180) realiza una revisión minuciosa en esa línea con un análisis detallado de trabajos que tratan de fundamentar y justificar diferentes diseños de programas formativos que persiguen distintas finalidades. En este trabajo asumimos la revisión de Gómez, que no ampliaremos.

Nuestra posición respecto a la formación inicial de profesores de matemáticas es muy concreta, por diversas razones que pasamos a enumerar.

En primer lugar, el programa formativo en el que centramos nuestra investigación da continuidad a una línea de trabajo con futuros profesores, desarrollada en el seno del grupo FQM193 desde hace más de veinte años. Como veremos más adelante, en 1992 se fundamenta el programa de la asignatura “Didáctica de la Matemática en el Bachillerato”, precursora de la materia “Didáctica de la Matemática” en la que concretamos nuestra investigación. Aunque la asignatura ha variado en todos y cada uno de estos años, gran parte de esos fundamentos sostienen su actual estructura.

En segundo lugar, la investigación realizada en el seno de ese mismo grupo sobre formación de profesores y sobre evaluación de programas (ver capítulo 1), ha ido modelando el diseño y el desarrollo de esa asignatura. Un avance fundamental fue el trabajo coordinado por Luis Rico acerca de los organizadores del currículo (Rico, 1997c). Desde la investigación, trabajos como los de Bedoya (2002); Gómez (2007); Gómez, González, Gil, Lupiañez et al. (2007); Gómez, González, Rico, Gil et al. (2007) u Ortiz (2002), se han ocupado, entre otras finalidades, de evaluar distintos aspectos de ese programa de formación. Muchos de los resultados obtenidos, han repercutido también en el modo de llevar a la práctica la formación de los futuros profesores de matemáticas de secundaria a través de la asignatura.

En tercer lugar, y por último, el avance que hemos constatado en los capítulos previos de este trabajo, contextualiza nuestra investigación. Por una parte, hemos delimitado una estructura para el análisis cognitivo en torno a tres organizadores del currículo que permiten que un profesor en formación planifique el aprendizaje de los escolares desde un punto de vista funcional. También hemos

enmarcado el análisis cognitivo, dentro del análisis didáctico, en coherencia con el resto de los análisis que lo componen y, además, hemos delimitado un procedimiento para llevarlo a cabo. Por otra parte, hemos relacionado la noción de competencia con un enfoque funcional del aprendizaje. Asimismo hemos constatado la importancia de la competencia de planificación en la formación del profesorado y también que la estructura diseñada para el análisis cognitivo, suministra al profesor herramientas teóricas, técnicas y prácticas que contribuyen al desarrollo de esa competencia.

Estos tres condicionantes contextualizan la asignatura cuya edición para el Curso 2008-2009 proporciona el trabajo de campo para nuestra investigación. Dedicamos el siguiente apartado a sus antecedentes.

2. LA ASIGNATURA “DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN BACHILLERATO”

En 1992, cuando Luis Rico presentó su proyecto docente (Rico, 1992), plasmó en dos asignaturas su experiencia en el campo de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Estas asignaturas, “Didáctica de la Matemática en el Bachillerato” y “Prácticas de Enseñanza en Instituto”, se enmarcaban en el plan de 1975 de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, y en la recientemente estrenada LOGSE⁷² (Ministerio de Educación y Ciencia, 1990)⁷³. Ambas asignaturas figuraban como materias obligatorias de nueve créditos cada una y se ubicaban en la especialidad “Metodología” del segundo ciclo de la Licenciatura.

La Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato proporciona al Profesor en formación un conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas dentro del Sistema Educativo en sus etapas Obligatorias y Postobligatorias, sobre la transmisión y aprendizaje de conceptos, procedimientos y estrategias matemáticas, sobre la detección y tratamiento de los errores, organización de contenidos, alternativas metodológicas, evaluación de los aprendizajes y, en general, sobre los sistemas conceptuales construidos para el estudio de los problemas derivados de la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas.

La Asignatura Prácticas de Enseñanza en Instituto aporta el contacto con el aula y con los alumnos, permite controlar y valorar la utilidad de los planteamientos teóricos, aporta la dimensión del conocimiento directo y las limitaciones de la realización de los programas; esta materia proporciona información directa sobre los Centros de Secundaria, los Seminarios de Profesores y sus dinámicas de trabajo, ofrece un espacio para la puesta en práctica de las Programaciones y Diseños de Unidades Didácticas y para el análisis y revisión de las actuaciones del Profesor en el aula. (Rico, 1992, § III.1.2)

⁷² Ley Orgánica General del Sistema Educativo.

⁷³ Gómez (2007, pp. 180-185) describe con más detalle los contextos social e institucional en los que se ubica estas dos asignaturas.

Con respecto a la primera de esas asignaturas, Rico delimita dos metas básicas: “conseguir una visión global del campo de la Didáctica de la Matemática y articular el conocimiento matemático sobre los contenidos de la educación secundaria y bachillerato a través de una reflexión didáctica sistemática” (Rico, 1992, § III.2.1). Los objetivos son (Rico, 1992, § III.2.2):

1. *Establecer fundamentos para el currículo de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria y Bachillerato.*
2. *Conocer y analizar las diferentes funciones de las matemáticas en el sistema educativo.*
3. *Contextualizar el aprendizaje matemático según las teorías cognitivas que sirven de fundamento a la educación.*
4. *Establecer los diferentes elementos, fases y etapas en los que se integra el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas.*
5. *Estudiar los Programas de Matemáticas en Secundaria y Bachillerato.*
6. *Conocer los materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos e instrumentos de evaluación.*
7. *Conectar a los Profesores en Formación con las organizaciones de la comunidad de Educadores Matemáticos y sus medios de comunicación.*

Los contenidos de la asignatura se estructuran en torno a dos bloques complementarios: *fundamentación y marco de referencia y análisis didáctico y diseño de unidades para los contenidos del Currículo de Educación Secundaria y Bachillerato en Matemáticas*. El primero de ellos recoge temas relacionados con la Didáctica útiles para organizar y llevar a cabo la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Rico, 1992, § III.2.2):

1. *Enseñanza de las matemáticas y sistema educativo.*
2. *Educación matemática y educadores matemáticos.*
3. *Currículo de matemáticas en Educación Obligatoria y Bachillerato.*
4. *Metas generales de la Educación Matemática.*
5. *Aprendizaje de las matemáticas*
6. *Contenidos del currículo de matemáticas*
7. *Objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y en el Bachillerato.*
8. *Estilos de enseñanza. Métodos, medios, materiales y recursos.*
9. *Evaluación en el aula de matemáticas*
10. *Resolución de problemas*

El segundo bloque recoge una veintena de temas matemáticos que formaban parte del currículo de Educación secundaria, como transformaciones en el plano, probabilidad o resolución de ecuaciones.

En ese proyecto docente ya se establecen algunas prioridades metodológicas que siguen teniendo validez hoy en día. En primer lugar, los profesores en formación se constituían en grupos de cuatro o cinco integrantes y en esos grupos realizaban los trabajos correspondientes y los presentaban en clase al resto de compañeros y a los formadores. Además, en la parte de la asignatura centrada en el segundo bloque de contenidos, cada uno de esos grupos tenía asignado un tema de las matemáticas escolares que analizaba y organizaba para concluir con el diseño de una unidad didáctica sobre él. Como señala Gómez (2007, p. 186), los estudiantes que se matriculan en esta materia, están poco habituados a este tipo de trabajo colaborativo en el que deben participar activamente. Este “choque” con la forma de trabajo habitual en el resto de asignaturas de la titulación, sigue vigente en la actualidad.

Los trabajos de investigación coordinados por Luis Rico que dieron como resultado un estudio pormenorizado de la teoría curricular (Rico, 1997a), y el desarrollo teórico de los organizadores del currículo (Rico et al, 1997), repercutieron en la organización de la asignatura a partir de 1999. Se introducen temas relacionados con el currículo y algunos nuevos organizadores del currículo (como la fenomenología, los modelos o los sistemas de representación), para el análisis de las matemáticas escolares. Además, se reformula su finalidad, que pasa a ser la de “iniciar la formación del estudiante de la Licenciatura de Matemáticas como profesor de secundaria mediante la Didáctica de la Matemática” (Rico y Segovia, 1999, p. 1). En estos años, desde 1990 hasta 1998, además de Luis Rico como formador, también participaron Moisés Coriat e Isidoro Segovia.

El listado de contenidos de ese programa permaneció más o menos estable durante varios años, con modificaciones puntuales. Sin embargo algunos aspectos metodológicos sí fueron remodelados a partir del curso 1997-1998, de modo destacado en el curso 2000-2001, tal y como se describe en Gómez (2002, 2007).

Estas modificaciones fueron viables, en primer término por la reducción significativa que se produjo en el número de estudiantes que cursaron la Licenciatura de Matemática en la Universidad de Granada entre los cursos académicos 1994-1995 y 2004-2005, con la consiguiente disminución del número de estudiantes en la asignatura Didáctica de la Matemática. A comienzos y primera mitad de la década de los 90 hay matriculados en esta asignatura un promedio de noventa alumnos. A partir del curso 2000-2001, y hasta la extinción del plan en el curso 2005-2006, el número de alumnos que cursan esta materia se reduce a un promedio de treinta y cinco estudiantes matriculados. Esta importante disminución del número de alumnos, hasta quedar en la mitad, permitió introducir innovaciones metodológicas que no habían sido viables anteriormente, para mejorar considerablemente la dinámica de trabajo en clase y la atención a los grupos de trabajo constituidos.

Las condiciones más favorables contribuyeron a atender y trabajar en clase la noción de análisis didáctico, conceptualizada por Pedro Gómez y Luis Rico y que ya comentamos en el capítulo 2. Consecuencia de esos cambios metodológicos

fue la disminución del número de sesiones con carga teórica y el aumento de las presentaciones realizadas por los grupos de profesores en formación. Pedro Gómez participó como formador de la asignatura en ese curso.

Estos cambios contribuyen a la necesaria actualización de la asignatura, derivada del nuevo Plan de Estudios para la Licenciatura de Matemáticas, que se aprueba en el año 2000 (Ministerio de Educación y Ciencia, 2000). La asignatura se transforma significativamente al pasar a ser optativa y al producirse una nueva reducción del número de estudiantes que la cursan. Entre otros cambios que detallamos en el siguiente apartado, desde la implantación del nuevo Plan de Estudios, el promedio de alumnos que cursan esta asignatura es de quince por año académico. Por otra parte, se lleva a una reducción considerable de los contenidos teóricos y a un refuerzo de los contenidos prácticos y aplicados, facilitados por el razonable número de profesores en formación a los que atender.

Mi incorporación a la asignatura la realicé en esta nueva etapa, en el curso 2002-2003. Ese año limité mi participación a la realización de algunas actividades prácticas con los profesores en formación, usando materiales y recursos, aunque también pusimos de manifiesto nuestro interés por explorar cuestiones relacionadas con el aprendizaje de las matemáticas (Lupiáñez y Gómez, 2003). A partir del curso 2003-2004, mi participación se hizo más presente y desde entonces he participado de manera continua como formador junto a Luis Rico⁷⁴.

Ese mismo curso iniciamos el trabajo para la conceptualización del análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, para afrontar la problemática del aprendizaje de los escolares acerca de un tema de matemáticas concreto (Gómez y Lupiáñez, 2005; González y Lupiáñez, 2005; Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín, 2005).

El trabajo sobre los organizadores del currículo (Rico, 1997c), recoge los errores y dificultades como uno de esos organizadores. Desde ese momento, el análisis de errores y dificultades ha formado parte de las herramientas que en la asignatura los profesores en formación emplean para analizar un tema de matemáticas y diseñar sobre él una unidad didáctica. Sin embargo, no es hasta el curso 2003-2004, cuando iniciamos el trabajo sobre expectativas de aprendizaje al introducir la noción de competencia para expresar el aprendizaje esperado en matemáticas.

En el curso académico 2005-2006 fue el siguiente en el que hubo importantes reestructuraciones en la asignatura con motivo del cambio al Plan docente del año 2000 de la Licenciatura de Matemáticas. Esta actualización, a la que dedicaremos el siguiente apartado, afectó en 2005 a las materias de quinto curso y a los cambios en la asignatura que estamos presentado.

⁷⁴ En el curso académico 2005-2006 se incorporó también en la asignatura el profesor Antonio Marín, colaborando en tareas formativas.

3. LA ASIGNATURA “DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA” DEL PLAN 2000

Con motivo del cambio al Plan 2000 en la Universidad de Granada, desaparece la asignatura “Didáctica de la Matemática en el Bachillerato” y se establece la asignatura “Didáctica de la Matemática”, optativa de segundo ciclo y con 6 créditos, como sigue en la actualidad.

Partiendo de la misma finalidad que en la asignatura anterior, los objetivos y los contenidos sí fueron considerablemente modificados, por causa de la disminución de horas lectivas e, igualmente, por la experiencia recogida en los últimos años. La estructura de la asignatura original abordaba dos bloques de contenido, y por ende, dos conjuntos de objetivos. Los primeros tenían que ver con varios fundamentos teóricos de la Didáctica de la Matemática, mientras que los segundos se centraban en la recogida y el análisis de información sobre un tema de matemáticas para la realización de una unidad didáctica. Desde el curso 2000-2001, se disminuyó el tiempo dedicado a la primera parte, mientras que se amplió la segunda. De esta manera se pudo incrementar el tiempo dedicado a la planificación de una unidad didáctica, basada en las distintas componentes del análisis didáctico.

En 2005 optamos por simplificar la primera parte centrándola en una reflexión curricular (que sigue siendo básica en el modelo de los organizadores del currículo), una discusión sobre los fines de la educación matemática y una introducción a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. El resto del tiempo, los grupos de futuros profesores trabajaron sobre temas específicos de las matemáticas escolares para diseñar una unidad didáctica, lo cual constituyó el foco central de la asignatura.

Tanto los objetivos como los contenidos de la asignatura, reflejan y concretan esa nueva estructura, estando dedicados la mayor parte de ellos a diferentes aspectos del análisis didáctico (Rico y Lupiáñez, 2005)⁷⁵.

En el caso del análisis cognitivo, el contenido correspondiente se señala como “6. Análisis cognitivo. Competencias. Errores y dificultades” (p. 1) y aparece inmediatamente después del análisis de contenido. Con esa secuencia se llevaron a la práctica estos contenidos en la asignatura.

Otra consecuencia de la implantación del nuevo Plan de Estudios del año 2000 fue la diversificación de la oferta de asignaturas optativas de segundo ciclo que se produjo en la Licenciatura de Matemáticas. Eso, unido al claro descenso de estudiantes que ingresaron en esa titulación, hizo que el número de matriculados en cada una de esas asignaturas fuera bajo. No obstante, la asignatura Didáctica de la Matemática ha mantenido un número constante de estudiantes que ha sido de los más altos cada año en comparación con el resto. Esto ha hecho que desde

⁷⁵ Los programas de la asignatura que se entregaron en clase en diferentes cursos académicos están en el Anexo A.

2005, hayamos trabajado con unos quince grupos de futuros profesores, sumando aproximadamente setenta estudiantes de segundo ciclo de la Licenciatura⁷⁶.

Después de impartir la asignatura durante varios años consecutivos, hemos ido depurando aspectos tanto desde el punto de vista de su contenido como de su metodología. Hemos sometido a evaluación y análisis las producciones de los diferentes grupos y eso nos ha permitido tomar decisiones importantes para hacer cambios entre un año académico y el siguiente. La configuración actual de la asignatura, especialmente en lo relativo al análisis cognitivo, ha alcanzado un nivel de desarrollo que ha llevado en el curso 2008-2009 a analizar exhaustivamente el aprendizaje que los grupos de profesores de matemáticas han alcanzado sobre el análisis cognitivo de un tema y su implicación para el diseño de una unidad didáctica relacionada.

4. PROGRAMA DE LA ASIGNATURA EN EL CURSO 2008-2009

El trabajo de campo, es decir, la parte empírica de nuestra investigación, la realizamos durante el desarrollo de la asignatura “Didáctica de la Matemática” en el curso 2008-2009. Por eso resulta especialmente importante describir con detalle el programa previsto para la asignatura en este curso académico.

Para llevar a cabo esta descripción, comenzamos detallando algunos aspectos generales, como las expectativas de la asignatura, sus contenidos básicos, algunos principios metodológicos y sus implicaciones, y los criterios y métodos de evaluación empleados. A continuación, en otro epígrafe, describimos la estructura estándar de las sesiones y la distribución de contenidos a lo largo de todas ellas. Finalmente, entramos en el detalle del contenido y el desarrollo de las sesiones centradas en el análisis cognitivo, aunque también resumimos aquellas centradas en el resto de análisis del análisis didáctico.

Para presentar las principales características de la programación de la asignatura, seguiremos las cuatro dimensiones del currículo correspondientes al nivel de planificación para los profesores (ver Tabla 3). Esta descripción nos permitirá abordar el objetivo 2.1 de nuestra investigación:

Fundamentar un programa de formación inicial desde una perspectiva funcional que contemple el análisis cognitivo, en coherencia con el análisis didáctico,

⁷⁶ En conversaciones mantenidas con diferentes estudiantes, éstos han constatado que entre los que cursan la Licenciatura es conocido el esfuerzo que deben realizar para superar nuestra asignatura, sobre todo en comparación con los requerimientos de otras materias también optativas de la titulación. Por otro lado, el nuevo diseño de las titulaciones de la Universidad de Granada facilita que cursen materias propias de una titulación, estudiantes de otra. En nuestra asignatura, hemos tenido estudiantes de la Diplomatura de Estadística y de Arquitectura, además de estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas de otras universidades españolas y europeas.

como procedimiento que contribuya a la competencia de planificación por parte de los futuros profesores .

4.1 Finalidad y Objetivos

El enunciado de la finalidad general de la asignatura no se modifica con respecto al de años anteriores. De esta manera, esa finalidad sigue siendo “iniciar la formación como profesor de secundaria del estudiante de la Licenciatura de Matemáticas mediante la Didáctica de la Matemática” (Rico y Lupiáñez, 2008b).

La finalidad de la asignatura se concreta, fundamentalmente, en que los futuros profesores desarrollen su competencia de planificación, de manera que les permita diseñar una unidad didáctica sobre un tema específico de las matemáticas escolares. De una manera más precisa, para lograr alcanzar esa finalidad, articulamos los siguientes objetivos:

- 1. Establecer fundamentos del currículo de matemáticas en Educación Secundaria, analizando finalidades, dimensiones y niveles.*
- 2. Presentar diferentes teorías que explican los procesos de aprendizaje y de enseñanza en matemáticas. Fundamentar el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares.*
- 3. Estudiar los organizadores del currículo de matemáticas y aplicarlos al análisis didáctico de temas de las matemáticas escolares.*
- 4. Recopilar y estructurar información relativa a los temas de matemáticas de secundaria según diferentes organizadores del currículo.*
- 5. Diseñar unidades didácticas de matemáticas para Educación Secundaria.*
- 6. Conectar a los profesores de matemáticas en formación con la comunidad de educadores matemáticos y sus medios de comunicación. (p. 1)*

4.2 Contenidos

El listado inicial de los contenidos de la asignatura, en los que ya se recogen términos que aluden a los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo, es el siguiente:

- 1. Noción de Currículo. Niveles y dimensiones.*
- 2. Fines generales de la Educación Matemática. Matemáticas escolares.*
- 3. Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas.*
- 4. Análisis Didáctico. Organizadores del currículo de matemáticas. Una visión funcional del aprendizaje.*
- 5. Análisis de Contenido. Historia de la matemática. Estructura conceptual. Sistemas de representación. Fenomenología de los conceptos matemáticos.*
- 6. Análisis Cognitivo. Expectativas de aprendizaje. Niveles. Objetivos y competencias. Limitaciones y oportunidades de aprendizaje: Errores, dificultades y tareas.*
- 7. Análisis de Instrucción. Diseño, selección y organización de Tareas. Materiales y recursos para la enseñanza de las matemáticas.*

8. *Resolución de problemas.*

9. *Evaluación en el área de matemáticas.*

10. *Diseño de unidades didácticas en matemáticas.* (p. 1)

Pero aunque el orden en el que están enumerados los diferentes contenidos sirvió de guía para el desarrollo de la asignatura en años anteriores, en el curso 2008-2009 llevamos a cabo una modificación en esa secuencia. Queríamos analizar el impacto que tendría en el aprendizaje de los futuros profesores, modificar la secuencia de contenidos original, ya que teníamos la hipótesis de que iniciar la asignatura abordando algunos aspectos del aprendizaje de los escolares, facilitaría el posterior desarrollo del análisis de contenido y del propio análisis cognitivo. Esto supuso una ruptura con el planteamiento que habíamos implementado en años anteriores.

La asignatura comenzó con una revisión de los diferentes tipos de expectativas de aprendizaje que menciona el currículo actual de Educación secundaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007a), prestando especial interés a los objetivos generales de área y a las competencias. Los futuros profesores trabajaron con diferentes ejemplos de libros de texto para ver en qué medida esas propuestas atienden las directrices de objetivos y competencias del currículo.

Estas sesiones iniciales dieron paso a iniciar el primero de los análisis del análisis didáctico: el análisis de contenido. Desde ese momento, los profesores en formación trabajaron en grupo y cada uno de ellos tenía asignado un tema de las matemáticas escolares. En el análisis de contenido, analizaron esos temas desde diferentes puntos de vista, como son la organización de los distintos conceptos y procedimientos que lo conforman, la clasificación de las diversas representaciones que admiten y, finalmente, los problemas y situaciones a los que dan respuesta esos conceptos y procedimientos.

Después comenzaron las sesiones centradas en el análisis cognitivo, donde, además de retomar la discusión sobre expectativas de aprendizaje, los grupos de profesores en formación enunciaron los objetivos específicos que perseguiría su unidad didáctica y la relación de éstos con las competencias matemáticas. Los grupos también describieron las limitaciones que podrían ralentizar el aprendizaje de los escolares y, además, organizaron las oportunidades que como profesores, podrían brindarles para lograr los objetivos propuestos.

El tercer bloque de contenido es el del análisis de instrucción. En él, además del diseño, selección y secuenciación de tareas, los grupos de futuros profesores abordan el análisis de materiales y recursos, el diseño de la gestión de las clases que compondrán su unidad didáctica y diseñan sus criterios e instrumentos de evaluación. Esta última parte de la asignatura coincide con la redacción de la memoria final de la unidad didáctica, que presentaron los grupos después al término de la asignatura.

4.3 Metodología

En la revisión de antecedentes del capítulo 1 y en la caracterización del conocimiento didáctico del profesor que realizamos en el capítulo 4, constatamos

nuestra visión social⁷⁷ y funcional del aprendizaje de los futuros profesores. Esta visión se ha ido implementado en la asignatura desde hace varios años, pero en la actualidad se ha remarcado y sistematizado (Gómez, 2007):

(...) el trabajo en grupo ya no era solamente un propósito de formación (preparar a los futuros profesores para el trabajo en el seminario del departamento de matemáticas de la institución), sino que era además el entorno primordial en el que se inducía el aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Al enfatizar la importancia de la práctica y al destacar el papel de los conceptos como herramientas para abordar problemas de esa práctica, cambiamos también la manera como introducíamos y trabajábamos cada uno de las nociones que conformaban el contenido (...) de la asignatura. (p. 187)

Esta visión tiene, por lo tanto, una serie de implicaciones para el desarrollo y metodología seguidos en la asignatura que, resumidamente, son las cuatro siguientes:

1. Dinámica de trabajo, con la modificación de la secuencia usual de lo teórico a lo práctico, por una nueva secuencia alternativa que comienza con la presentación de un problema a resolver.
2. Dinámica de participación en el trabajo en el aula, con el ciclo de las intervenciones de los formadores y los futuros profesores.
3. Tutorías y trabajo de orientación personalizada.
4. Tablón de docencia y trabajo en red.

La primera implicación metodológica es el abandono de la secuencia tradicional en la que los fundamentos teóricos preceden a las actividades prácticas. Como hemos señalado antes, la mayor parte de las sesiones de la asignatura se dedican al trabajo con los diferentes análisis del análisis didáctico o, lo que es lo mismo, al trabajo con los distintos organizadores del currículo que estructuran cada uno de esos análisis. Basándonos en la descripción del ciclo metodológico del análisis didáctico de Gómez (2007, p. 194), presentamos el ciclo general de los momentos en el trabajo con cada uno de los organizadores que componen el análisis didáctico (Figura 14).

Por lo general, el debate final del ciclo anterior introduce la necesidad de una nueva herramienta de análisis de las matemáticas escolares. Por ejemplo, al acabar el trabajo sobre expectativas de aprendizaje, damos pie a discutir sobre los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el aprendizaje de los escolares mientras alcanzan esas expectativas. Esto nos lleva a los formadores a hacer una breve presentación del nuevo organizador que se pondrá en juego para ese análisis (limitaciones en el aprendizaje). Esta presentación, que se centra más en el uso del organizador que en su significado teórico (ejemplos de errores prototípicos en diferentes temas), permite a los grupos de futuros profesores realizar un ejercicio inicial en clase sobre la puesta en práctica del organizador para obtener nueva información de sus temas. El ciclo continúa con la

⁷⁷ Desde el punto de vista social, simplemente destacamos las bondades del trabajo en grupo en la formación inicial de profesores.

presentación de los formadores de un ejemplo más elaborado y completo del uso del organizador para analizar un tema (ejemplo de limitaciones en el aprendizaje de los números naturales). A continuación, los grupos realizan su primera presentación sobre cómo han aplicado ellos ese organizador en el análisis de sus temas y tanto los compañeros como los formadores comentan, critican y complementan esas presentaciones. Después se complementa la presentación del organizador con alguna lectura que le de soporte teórico y que permite a los grupos de profesores en formación, avanzar en su aplicación (entrega del artículo de Socas (1997) con un guión de una lectura⁷⁸). El siguiente paso del ciclo consiste en las presentaciones de los grupos sobre el estudio definitivo del organizador en cada uno de sus temas. De nuevo se produce un debate en el que intervienen compañeros de los que han expuesto y los formadores, procurando éstos dar indicaciones que puedan aprovechar los grupos para mejorar o ampliar su trabajo. En algunas ocasiones, algunos grupos solicitan hacer una nueva presentación de su trabajo a la luz de los comentarios recibidos en su intervención anterior. En otras, la propia complejidad del organizador requiere una segunda aproximación para todos los grupos. Estos debates permiten a los formadores hacer balance del trabajo realizado, consolidar algunos aspectos importantes y usar esa información para motivar el siguiente organizador (inicio del nuevo ciclo).

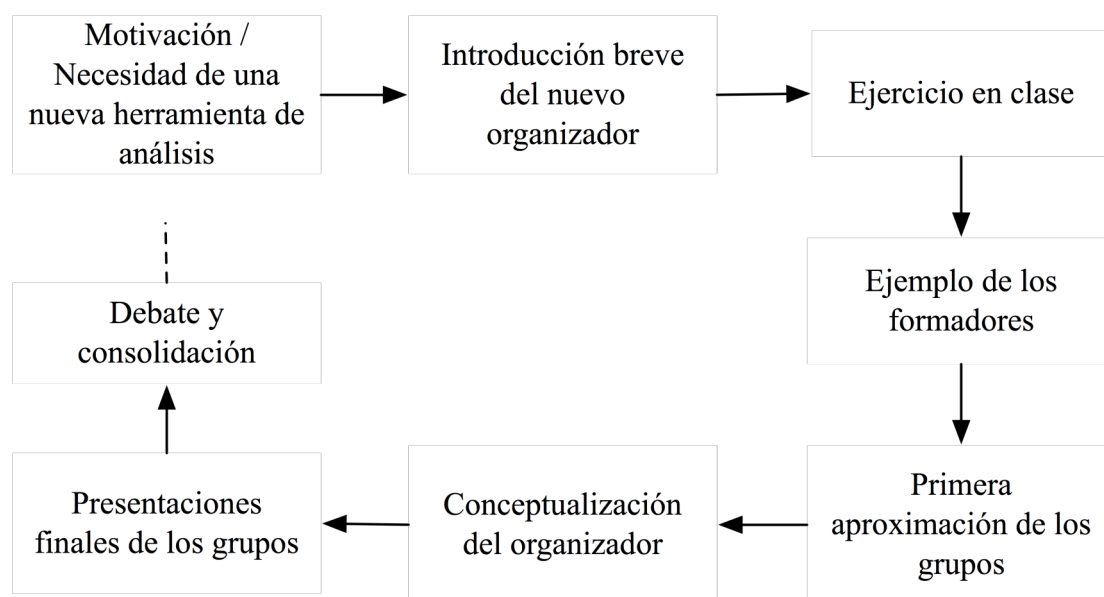


Figura 14. Ciclo metodológico de los momentos en el tratamiento general de cada uno de los organizadores del currículo

La segunda implicación de nuestra visión funcional del aprendizaje en la metodología de la asignatura, tiene que ver con la dinámica de participación en el aula. Como refleja la Figura 14 y hemos descrito antes, son frecuentes las intervenciones de los futuros profesores y de los formadores durante el desarrollo de las sesiones. De hecho, prácticamente todas las semanas, cada grupo de

⁷⁸ La documentación entregada a los futuros profesores en el curso 2008-2009 la hemos incluido en el Anexo C.

futuros profesores realiza una presentación del avance de su trabajo, lo que hace que pongan en juego de manera directa las herramientas que se presentan en clase y que les saquen partido de cara al diseño de su unidad didáctica. Como veremos en los capítulos siguientes, todas estas intervenciones suponen una importante fuente de información acerca del aprendizaje que van desarrollando los grupos de profesores en formación.

La tercera implicación para la metodología se refiere a las tutorías y trabajo de orientación realizado con los grupos. Con el establecimiento de las tutorías, deseamos crear un espacio de consulta y asesoramiento directo a los grupos de profesores en formación. Aunque no se programan con antelación, a lo largo del curso, es frecuente que cada grupo tenga entre cinco y seis tutorías con los formadores. En esas sesiones se hace balance del trabajo realizado y los formadores colaboran con la mejora de ese trabajo y con la aclaración de dudas o imprecisiones. Mousley, Lambdin y Koc (2003) y Viiri y Saari (2006) coinciden en destacar la importancia de las tutorías en el trabajo con profesores en formación, por las discusiones y reflexiones que pueden promoverse. A pesar de que es habitual que los estudiantes universitarios no hagan uso habitual de las tutorías (Coriat y Sanz, 2005, p. 35), nosotros hemos constatado en los últimos años que, cuando los grupos de profesores en formación encuentran un espacio que les permite avanzar en sus actividades, hacen uso voluntario de ellas con relativa frecuencia. Además, hemos comprobado cómo es posible llevar a cabo una actividad personalizada con estudiantes universitarios, como las que se promueven en el contexto del EEES (Michavila y García, 2003).

La cuarta implicación está relacionada con el empleo sistemático del tablón de docencia y la comunicación entre los formadores y los grupos por medio del correo electrónico. En relación al correo electrónico, en el programa de la asignatura señalamos (Rico y Lupiáñez, 2008b):

(...) es muy recomendable que cada alumno disponga de una cuenta de correo electrónico que permita comunicaciones entre compañeros y con los profesores. Cada alumno puede acceder a una cuenta de correo institucional como estudiante de la Universidad de Granada. (p. 3)

Efectivamente, el correo electrónico se ha convertido en una herramienta fundamental para la comunicación entre los grupos de profesores en formación y los formadores. A través del correo llegan dudas de algunos profesores en formación con respecto a las tareas demandadas o sobre los comentarios realizados en clase. También es un medio habitual para la solicitud de citas para tutorías y, este año, también ha servido para que todos los futuros profesores compartan recursos y materiales que ellos mismos encontraban a través de Internet. Desde el punto de vista de los formadores, nosotros usamos el correo para hacer llegar a los grupos de profesores en formación, los documentos de lectura y las presentaciones que hemos usado o vamos a usar en nuestras presentaciones. Tal y como veremos en el capítulo 8, también enviamos comentarios a algunas producciones de los grupos.

Con motivo de impartir la asignatura a lo largo de varios años, hemos elaborado una lista de destinatarios con estudiantes de años anteriores e incluso egresados de la titulación. En ocasiones les enviamos información que les puede ser de interés y, en otras, nos ha servido para iniciar proyectos de colaboración conjuntos en diferentes actividades educativas.

4.4 Evaluación

La evaluación en la asignatura persigue una doble finalidad. La primera se preocupa de valorar el desarrollo de la competencia de planificación por parte de los diferentes grupos de profesores en formación. Los diferentes trabajos que elaboran a lo largo de las sesiones, las presentaciones y defensa de éstos y la elaboración y presentación de la unidad didáctica final, son las principales fuentes de información que disponemos para valorar ese desarrollo de su competencia de planificación. Junto a estos indicadores, los resultados de evaluaciones individuales y la participación en los debates y discusiones promovidos en clase, nos permiten calificar a cada uno de los futuros profesores que cursan la asignatura. Todos estos aspectos quedan recogidos en el programa de la asignatura (Rico y Lupiáñez, 2008b):

A lo largo del curso cada alumna o alumno deberá:

- i) intervenir en la preparación y redacción de, al menos, cinco documentos de trabajo sobre las tareas que se indiquen; entre ellos estará el diseño de un material o recurso didáctico que sirva para el aprendizaje de un tópico concreto;*
- ii) presentar públicamente y debatir, al menos, dos trabajos preparados en grupo o individualmente;*
- iii) preparar la información necesaria para organizar el diseño de un tema del currículo de matemáticas de secundaria, programar una unidad didáctica sobre ese tópico y presentarlo en clase.*

La evaluación tendrá en cuenta los siguientes apartados:

- 1. Asistencia a clase con regularidad.*
- 2. Trabajos individuales realizados.*
- 3. Trabajos en grupo.*
- 4. Presentaciones y exposiciones individuales.*
- 5. Programación y presentación del tema final. (p. 3)*

Con respecto a la asistencia, en el inicio del curso insistimos en su importancia ya que mucho trabajo de la asignatura se realiza durante las propias clases. Desde las primeras sesiones, se regulariza, por lo general, la asistencia de todos los futuros profesores.

Los trabajos individuales se concentran en los diferentes cuestionarios y evaluaciones individuales que realizamos sobre distintos aspectos de la planificación escolar. A lo largo del curso, puede haber entre tres y cuatro trabajos de este tipo, que computan un 30% a la calificación final. Los trabajos

por grupos son los más numerosos en el curso. Se inician con motivo de introducir el análisis didáctico y, desde ese momento, se distribuyen a lo largo de toda la asignatura. En el curso 2008-2009, fueron alrededor de quince los trabajos que realizó cada uno de los grupos, sin contar la unidad didáctica final. Los trabajos en grupo tienen un peso de un 25% para la calificación final. Las presentaciones se valoran fundamentalmente desde el punto de vista individual, observando en qué medida los integrantes de un grupo participan activamente en la exposición y cuál es su nivel de dominio del tema tratado. Las participaciones en debates y discusiones en clase también contabilizan en este apartado, que computa con un 20% a la calificación final. El último 25% corresponde a la elaboración y presentación de la unidad didáctica final. Ambos aspectos, documento y presentación, se valoran por separado.

Durante el curso, los comentarios, críticas y sugerencias de los formadores suministran información a los grupos de profesores en formación acerca del progreso de un grupo y de cada uno de los integrantes del mismo.

La segunda finalidad de la evaluación tiene que ver con la valoración que hacemos los formadores del diseño y de la implementación de la propia asignatura. Con motivo de los sucesivos análisis de las producciones de los grupos, de sus comentarios o de sus dificultades, cada año depuramos determinados aspectos de la asignatura tanto en la selección final de contenidos como en aspectos metodológicos.

5. DESARROLLO DE LA ASIGNATURA

En este apartado describimos cómo se llevó a la práctica el programa que hemos descrito antes en el curso académico 2008-2009, prestando especial interés a aquellas partes de la asignatura centradas en el análisis cognitivo.

5.1 Aspectos Generales

Como hemos dicho anteriormente, la asignatura “Didáctica de la Matemática” se imparte en el seno de la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada, figurando como materia optativa de segundo ciclo (4º o 5º curso). Su carga docente es de seis créditos.

La impartimos en el primer cuatrimestre del curso 2008-2009, a razón de cuatro horas semanales. Estas sesiones se imparten de lunes a jueves de 8 a 9 de la mañana. Como veremos más adelante, de las sesenta horas presenciales programadas a priori, finalmente se impartieron cincuenta y cuatro, además de las sesiones de tutorías. Las presentaciones de los trabajos finales se realizaron fuera de esas sesiones.

En la lista definitiva de alumnos matriculados figuran veinte estudiantes, si bien uno de ellos no asistió a ninguna de las sesiones ni se presentó en el día oficial de examen. Aunque, como describiremos más adelante, en las primeras sesiones el número de asistentes osciló, finalmente contamos con la asistencia de diecinueve profesores en formación para nuestro trabajo.

Los formadores que participamos en la puesta en práctica de la asignatura en ese curso, con asistencia regular a todas las sesiones de trabajo, fuimos los profesores Luis Rico, Antonio Marín y, quien suscribe, Jose Luis Lupiáñez.

5.2 Grupos de Futuros Profesores. Temas de Trabajo

A la primera sesión del curso asistieron dieciocho estudiantes, de los cuales dieciséis finalizaron la asignatura. En la tercera sesión, las dos restantes manifestaron su intención de abandonar la asignatura a menos que se les permitiera trabajar en pareja, pero al confirmar que los grupos de trabajo han de estar compuestos por un mínimo de cuatro integrantes, decidieron anular su matrícula.

En la octava sesión se incorporó un nuevo estudiante, quién previamente advirtió de que condicionantes laborales le impedían asistir antes. En la novena sesión se incorporan los dos últimos estudiantes que conforman los asistentes a la asignatura⁷⁹. Finalmente, asisten regularmente trece mujeres y seis hombres. De ellos, tres estaban en la Universidad de Granada como estudiantes en un programa de intercambio.

Los cuatro grupos de trabajo se conforman entre la segunda y tercera sesiones, mientras que los temas de trabajo se asignan en la sexta. Aquellos estudiantes que se incorporan a la asignatura después de esa sesión, se integran en los grupos ya existentes.

La asignación de los temas se hizo por propia elección de los grupos de profesores en formación. Partiendo de un listado inicial de 6 temas que presentamos los formadores, los grupos seleccionaron el que más les interesó. Sólo el tema de fracciones atrajo la atención de dos grupos y, en ese caso, se sorteó entre ellos.

El primer grupo, formado por cinco estudiantes, seleccionó el tema de *Ecuaciones de primer grado*⁸⁰. El mismo número de integrantes conformó el grupo de *Fracciones*. El tema *Introducción a la probabilidad* lo seleccionó un grupo con también cinco estudiantes y, finalmente, cuatro futuras profesoras formaron el grupo que trabajó el tema *Razón y proporción aritméticas*.

5.3 Esquema General de las Sesiones

La Figura 14 que presentamos antes, sintetiza la dinámica general de actuación en la asignatura estructurada en momentos. Destacan las intervenciones de los participantes y los focos de atención que se abordan. La mayor parte de las sesiones se dedicó a uno o varios de los momentos recogidos en ese ciclo. No obstante, algunas de ellas no se pueden encuadrar en ese esquema. La primera y

⁷⁹ El sistema de alteración de matrícula permite que algunos estudiantes se den de baja o de alta en asignaturas, después que éstas hayan empezado.

⁸⁰ Desde las primeras sesiones del análisis de contenido, el grupo también en su trabajo consideró los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas.

la última sesión o aquella en la que se realizó una evaluación individual⁸¹, son ejemplos de sesiones con planteamiento diferente.

La Tabla 21 recoge el contenido tratado en cada una de las sesiones.

Tabla 21

Contenidos o temas a tratar en las sesiones del curso 2008-2009

Sesión	Fecha	Título
1	29/9/08	Presentación de la Asignatura
2	30/9/08	Objetivos Generales del Área de Matemáticas en Secundaria
3	1/10/08	El Currículo de Educación Secundaria
4	2/10/08	Expectativas de Aprendizaje en el Currículo
5	7/10/08	Expectativas de Aprendizaje sobre los Números Naturales
6	8/10/08	Balance sobre Expectativas de Aprendizaje
7	9/10/08	Diferentes Niveles de Expectativas de Aprendizaje
8	14/10/08	El Proyecto PISA
9	15/10/08	Competencias Matemáticas
10	16/10/08	Objetivos Específicos y Tareas
11	20/10/08	Cuestionario sobre Expectativas de Aprendizaje
12	21/10/08	Clasificación Cognitiva del Conocimiento Matemático
13	22/10/08	Clasificación cognitiva del contenido de los temas de trabajo
14	23/10/08	Estructura Conceptual de los Números Naturales
15	27/10/08	Estructura Conceptual de los Temas de Trabajo
16	28/10/08	Estructura Conceptual de los Temas de Trabajo II
17	29/10/08	Sistemas de Representación
18	30/10/08	Representaciones y Nuevas Tecnologías
19	3/11/08	Sistemas de Representación de los Temas de los Grupos
20	4/11/08	Sistemas de Representación de los Temas de los Grupos II
21	5/11/08	Análisis Fenomenológico. Situaciones
22	6/11/08	Análisis Fenomenológico. Contextos
23	10/11/08	Análisis Fenomenológico de los Temas de los Grupos
24	11/11/08	Historia de la Matemática

⁸¹ La evaluación individual es una prueba escrita que se realiza en diferentes momentos de la asignatura y que versa sobre el trabajo realizado en clase. No es habitual realizar una sola evaluación individual en un curso, pero en el que estamos describiendo dedicamos mucho tiempo a cuestionarios y encuestas en los que también obtuvimos información individualizada. Eso llevó a realizar una sola prueba de este tipo en la sesión 38.

Tabla 21

Contenidos o temas a tratar en las sesiones del curso 2008-2009

Sesión	Fecha	Título
25	12/11/08	Análisis Fenomenológico de los Temas de los Grupos
26	13/11/08	El Análisis Didáctico y el Análisis Cognitivo
27	17/11/08	Aprendizaje de las Matemáticas
28	18/11/08	Balance Análisis de Contenido
29	19/11/08	El Aprendizaje de las Matemáticas desde una Perspectiva Psicológica
30	20/11/08	Análisis Cognitivo. Competencias y Focos de Contenido
31	24/11/08	Análisis Cognitivo. Objetivos Específicos
32	25/11/08	Análisis Cognitivo. Objetivos Específicos y Competencias
33	26/11/08	Relación entre Objetivos y Competencias
34	27/11/08	Relación entre Objetivos y Competencias II
35	1/12/08	Relación entre Objetivos y Competencias III
36	2/12/08	Relación entre Objetivos y Competencias IV
37	3/12/08	La Competencia de Modelización
38	4/12/08	Evaluación Individual sobre Expectativas de Aprendizaje
39	9/12/08	Introducción a las Limitaciones de Aprendizaje
40	10/12/08	Presentaciones sobre Historia de la Matemática
41	11/12/08	Presentaciones sobre Historia de la Matemática
42	15/12/08	Limitaciones de Aprendizaje. Papel del error. Clasificaciones
43	16/12/08	Oportunidades de Aprendizaje. Las Tareas
44	17/12/08	Presentaciones sobre Limitaciones de Aprendizaje
45	7/1/09	Introducción al Análisis de Instrucción
46	8/1/09	Análisis de Tareas
47	12/1/09	Balance del Análisis Cognitivo
48	13/1/09	Niveles de Complejidad de las Tareas
49	14/1/09	Secuenciación de Tareas
50	15/1/09	Gestión del Aula y Diseño de Tareas
51	19/1/09	Planificación de una Hora de Clase
52	20/1/09	La evaluación
53	21/1/09	Criterios e Instrumentos de Evaluación

Tabla 21
Contenidos o temas a tratar en las sesiones del curso 2008-2009

Sesión	Fecha	Título
54	22/1/09	Ejemplos de Unidades Didácticas
55	16/2/09	Presentación Unidad Didáctica ECU
56	16/2/09	Presentación Unidad Didáctica RAZ
57	16/2/09	Presentación Unidad Didáctica PRO
58	16/2/09	Presentación Unidad Didáctica RAZ

La Tabla 21 presenta el título genérico de cada sesión. Sin embargo, fue habitual que en una misma sesión también se cerraran temas pendientes de sesiones anteriores o se avanzaran ideas para las siguientes. Para tener un registro más detallado del contenido, tópicos y desarrollo de las distintas sesiones, diseñamos una base de datos en la que se describe lo que ocurrió en cada sesión y quienes son los participantes que intervienen. Esta información está organizada en 7 campos. (ver ejemplo en Figura 15).

Cada registro de la base de datos⁸² corresponde a una sesión clase. En cada registro incluimos un número de identificación, la fecha en la que transcurre, el título de la sesión, algunos descriptores del contenido tratado, el nombre del archivo en el que se grabó el audio de la sesión⁸³, los nombres de los distintos archivos y documentos usados en clase y una descripción de su desarrollo. Los indicadores temporales indican el contador de la grabación en la que aparece lo descrito.

Tanto en la base de datos como en el resto del documento, usaremos una serie de siglas para referirnos a los agentes involucrados en el desarrollo de las sesiones, a los grupos de profesores en formación, a diferentes momentos del análisis didáctico, o al trabajo con determinados organizadores del currículo. La Tabla 22 resume las siglas que usamos.

⁸² En el Anexo D hemos incluido la base de datos completa con todos los registros de las sesiones.

⁸³ Grabamos digitalmente todas las sesiones de clase. Describiremos esas grabaciones y su organización en el capítulo 6.

Sesiones de clase

Sesión **6** Título **Balance sobre Expectativas de Aprendizaje**

Fecha

Audio	Docs.	Descriptores
081006S06.wma	081007Contx&CapacNat.key pisa2003liberados.pdf GuionLecturaPISA2003.doc	EA Números naturales Tareas Competencias y situaciones PISA

Desarrollo

Partiendo de las respuestas de los PF a las 3 primeras preguntas del cuestionario de los números naturales, JLL conduce una presentación hacia los 4 tipos de situaciones PISA (no grabado) y las 8 competencias PISA (0'00").

LR distingue la competencia matemática de las competencias matemáticas PISA (6'27").

Después JLL continúa con la distinción entre objetivos específicos y competencias y en la organización de los contenidos en el currículo y en PISA (10'37").

Finalmente se asignan los temas a los grupos: **Ecuación de primer grado (ECU), Fracciones (FRA); Introducción a la probabilidad (PRO) y Razón y proporción aritmética (RAZ)** (32'26").

Entregamos a los PF un documento del proyecto PISA y un guión de lectura del mismo.

Didáctica de la Matemática. Curso 2008-2009

Figura 15. Base de datos de las sesiones de clase. Ejemplo de la sesión 6

Tabla 22
Siglas y significados empleados en la descripción de las sesiones

Siglas	Significado
<i>Agentes participantes</i>	
AM	Antonio Marín
F	Formadores
JLL	Jose Luis Lupiáñez
LR	Luis Rico
PF	Profesor/es en formación
<i>Grupos de profesores en formación</i> ⁸⁴	
ECU	Ecuaciones de primer grado
FRA	Fracciones
PRO	Introducción a la probabilidad

⁸⁴ En ocasiones denominaremos también *Ecuaciones, Fracciones, Probabilidad y Razón y proporción* a los grupos ECU, FRA, PRO y RAZ, respectivamente.

Tabla 22
Siglas y significados empleados en la descripción de las sesiones

Siglas	Significado
RAZ	Razón y proporción aritméticas
<i>Análisis didáctico</i>	
AD	Análisis didáctico
AC	Análisis de contenido
ACg	Análisis cognitivo
AI	Análisis de instrucción
<i>Organizadores del currículo</i>	
AF	Análisis fenomenológico
E	Evaluación
EA	Expectativas de aprendizaje
EC	Estructura conceptual
H	Historia
LA	Limitaciones de aprendizaje
M	Modelización
MR	Materiales y recursos
OA	Oportunidades de aprendizaje
RP	Resolución de problemas
SR	Sistemas de representación

Considerando el tema principal desarrollado en cada sesión, es posible hacer un balance del porcentaje de horas dedicadas a tres de los cuatro componentes del análisis didáctico y a otros aspectos de las asignatura. La Figura 16 representa esa distribución.

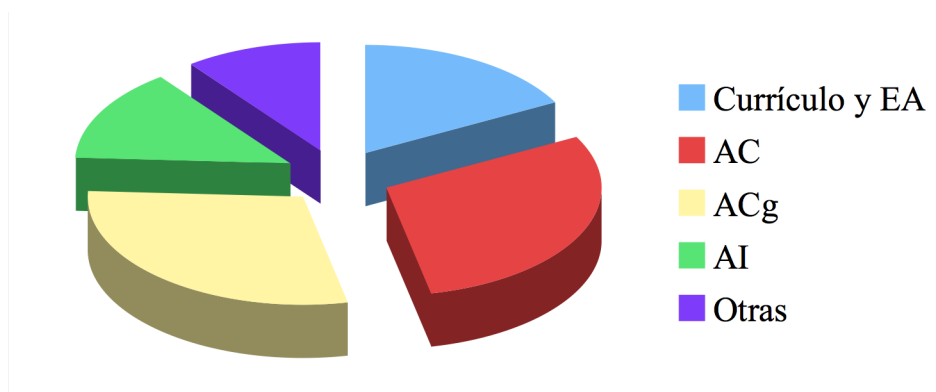


Figura 16. Distribución de las sesiones según el contenido principal tratado

El mayor número de sesiones se centraron en el análisis de contenido y en el análisis cognitivo. En esas sesiones se incluyen tanto aquellas en que los formadores son los que intervienen, fundamentalmente, como aquellas otras en que los grupos de profesores en formación presentan trabajos o se realizan tareas específicas.

El primer bloque que se trató en la asignatura tenía que ver con el currículo y con el tratamiento que en él se hace de las expectativas de aprendizaje, este bloque ocupó diez sesiones. El trabajo sobre los diferentes organizadores del análisis de contenido ocuparon diecisiete sesiones, las mismas que dedicamos al análisis cognitivo⁸⁵. A los distintos aspectos que aborda el análisis de instrucción dedicamos ocho sesiones y, finalmente, incluimos otras seis sesiones relativas a las sesiones inicial y final del curso, y cuatro horas dedicadas a las presentaciones finales de las unidades didácticas.

Otra reflexión importante de las sesiones de este curso es la actividad de los formadores y la de los profesores en formación. A grandes rasgos, podemos distinguir cuatro tipos de actividad. Por una parte están las *intervenciones de los formadores* cuando presentamos algún aspecto teórico o cuando lo ejemplificamos. También se refieren a cuando explicamos en clase algo acerca de la propia asignatura, como la presentación del programa o el método de evaluación que seguiremos.

Otra actividad son las *presentaciones de los profesores en formación*. Se refieren a los tiempos que dedicamos en la asignatura a las diferentes exposiciones que realizan los futuros profesores, individualmente o junto a otros compañeros. Sólo en contadas ocasiones, como en las presentaciones finales de la unidad didáctica, todos los integrantes de un grupo intervienen conjuntamente en una exposición.

Lo habitual es que tras ese tipo de presentaciones, los formadores promovamos algún *debate* o discusión acerca de esas exposiciones. También hay intercambio de opiniones entre los profesores en formación y entre ellos y los formadores cuándo proponemos algún tema o asunto específico para debatir.

Finalmente, consideramos también el tiempo que en la propia clase hemos dedicado a que los profesores en formación, individualmente o en grupos, realicen determinadas tareas. Las *tareas realizadas en clase* son la cuarta actividad de clase que consideramos. La Figura 17 (a y b) muestra el reparto del tiempo de todas las sesiones de clase globalmente y por sesiones, según los cuatro tipos de actividad.

Aunque la más frecuente se corresponde con las intervenciones de los formadores (36% del tiempo), las presentaciones de los grupos (24%) unido a las tareas realizadas en clase (11%), equiparan el tiempo en el que los protagonistas son los formadores con aquél en el que lo son los profesores en formación. La

⁸⁵ La mayor parte de lo tratado en las sesiones iniciales tiene que ver con alguno de los componentes del análisis didáctico, si bien gran parte de ellas se centraron en el trabajo con expectativas de aprendizaje, vinculadas fundamentalmente al análisis cognitivo. Esto constata el peso que en el curso 2008-2009 dedicamos a los diferentes organizadores de este análisis.

Figura 17a muestra también la gran cantidad de tiempo que dedicamos en la asignatura a los debates y a las discusiones (29%).

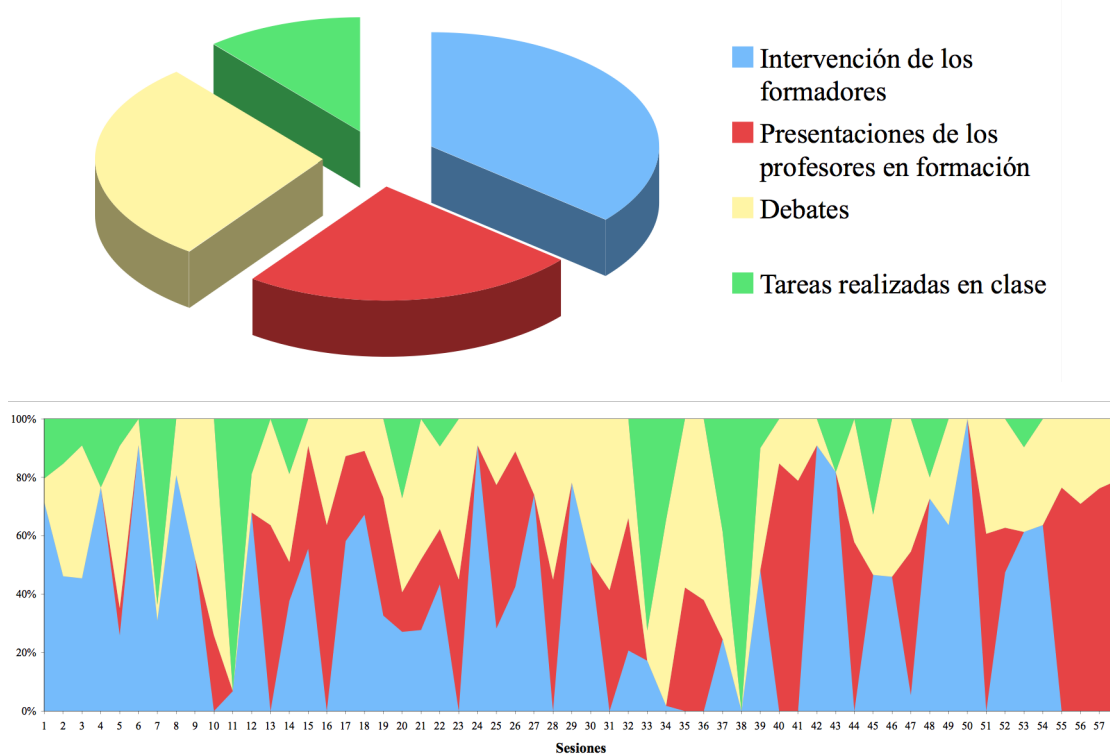


Figura 17 (a y b). Distribución de las sesiones según la actividad realizada

La Figura 17b muestra el mismo análisis, pero a lo largo de las cincuenta y ocho sesiones y pone de manifiesto varios aspectos. En primer lugar, se constata que las intervenciones de los formadores son más habituales en la primera mitad de la asignatura, mientras que en la segunda dedicamos más tiempo a discusión y presentaciones de los grupos.

En segundo lugar, se observa cómo, en las primeras sesiones, las presentaciones de los grupos de profesores en formación son prácticamente inexistentes, mientras que a partir de la sesión 13 son muy frecuentes. En tercer lugar, resulta fácilmente comprobable cómo, después de esas presentaciones, siempre dedicamos tiempo a la discusión y al debate buscando contribuir al trabajo de los grupos de profesores en formación enfatizando sus avances y proponiendo líneas de mejora.

En cuarto lugar, es recurrente que, tras alguna intervención de los formadores, se lleve a cabo una presentación de los profesores en formación y que antes se suela dedicar tiempo a alguna tarea en clase. Esto pone de manifiesto la dinámica de trabajo cíclica que secuencia los momentos con que se desarrolla cada organizador, que presentamos en la Figura 14. Un ejemplo claro de este ciclo lo constituyen las sesiones 10, 11, 12, 13, 14 y 15 (ver Anexo D).

Además de esta descripción general del desarrollo de la asignatura, en nuestra investigación interesa de modo particular el trabajo de los grupos de profesores en formación en las sesiones dedicadas al análisis cognitivo. En el siguiente

apartado describimos el contenido y el desarrollo de las sesiones centradas en el análisis cognitivo; también las contextualizaremos en el resto de análisis del análisis didáctico.

6. DESARROLLO DEL ANÁLISIS COGNITIVO EN LA ASIGNATURA

Como muestra la Figura 16 anterior, existen diez sesiones de clase centradas en currículo y en las expectativas de aprendizaje y diecisiete sesiones centradas específicamente en el análisis cognitivo. Dado que en el capítulo 7 detallamos con profundidad el contenido y desarrollo de las sesiones iniciales, aquí nos centramos en las que se refieren al análisis cognitivo. No obstante, antes describimos brevemente el desarrollo de las sesiones sobre análisis de contenido y después haremos lo mismo con las sesiones centradas en el análisis de instrucción y con las de presentación de las unidades didácticas finales⁸⁶.

6.1 Sesiones Sobre el Análisis de Contenido

La estructura general del análisis de contenido se presentó junto a la del análisis didáctico en la sesión 26, como un balance de lo realizado hasta ese momento. Pero, en realidad, el trabajo propio sobre análisis de contenido comenzó en la última parte de la sesión 11.

La última tarea significativa que realizaron los futuro profesores en las sesiones iniciales, fue un cuestionario sobre expectativas de aprendizaje en el tema de los números naturales⁸⁷. En la presentación de los resultados de ese cuestionario, los formadores pusimos de manifiesto la necesidad de organizar la amplitud y variedad de contenidos que surgen cuando se analiza un tema de las matemáticas escolares.

Esa reflexión sirvió para introducir la clasificación cognitiva del contenido matemático en la sesión 12⁸⁸, a partir de la identificación de nociones básicas de los temas de los grupos que ellos mismos realizaron. El grupo ECU propuso como nociones centrales: *resolución de ecuaciones, concepto de ecuación y variable definida e indefinida*. El grupo FRA propuso cuatro: *fracciones, operaciones con fracciones, relaciones entre fracciones y decimales y relación de equivalencia*. La propuesta del grupo PRO incluyó cinco nociones: *concepto de espacio muestral, teoría de conjuntos, sucesos dependientes e independientes, representación e interpretación de gráficas y regla de Laplace*. Por último, el grupo RAZ destacó cuatro nociones básicas para su tema: *concepto de razón*

⁸⁶ Para ejemplificar el desarrollo de las sesiones relacionadas con el análisis didáctico, usaremos ejemplos de las producciones de los cuatro grupos de profesores en formación. No incluiremos aquí las transcripciones de las sesiones relacionadas con el análisis cognitivo, ya que las usaremos en el estudio de las producciones sobre él a partir del capítulo 8.

⁸⁷ El cuestionario y sus resultados lo describimos y analizamos en el capítulo 7.

⁸⁸ Presentamos esta clasificación en el capítulo 2.

entre dos cantidades, relación de proporcionalidad entre magnitudes, repartos proporcionales y porcentajes.

Después, en esa misma sesión, los formadores ejemplificamos la clasificación cognitiva del conocimiento matemático, en el caso de los números naturales.

En la sesión 13, los grupos presentaron sus primeras propuestas de organización de sus temas según esta clasificación y los formadores insistimos en la importancia de cubrir tanto la parte conceptual como la procedimental con el mismo nivel de detalle. Después de esa primera propuesta, los grupos avanzaron en su clasificación y comenzaron a elaborar listados organizados de conceptos y procedimientos según focos del contenido. Por ejemplo, en el caso del grupo ECU, los focos seleccionados en ese momento de la asignatura fueron⁸⁹: *relación entre dependencia de variables, ecuación de primer grado, resolución de ecuaciones y utilidad de la ecuación de primer grado.*

El siguiente paso fue que los grupos de profesores en formación elaboraran pequeños mapas conceptuales que relacionasen algunas de las nociones de sus listados. Comenzaron haciéndolo con un listado de nociones sobre los números naturales y, entre las sesiones 15 y 17, lo ejemplifican en sus temas.

Una reflexión permanente de los formadores a esas propuestas fue que la consideración del modo en que se representan las nociones involucradas, da riqueza a las relaciones entre esas nociones. Después, a partir de la sesión 17, usamos el tema de los números naturales para destacar esa nueva herramienta del análisis de contenido.

Partiendo de ese ejemplo de los formadores, los grupos de futuros profesores presentaron su acercamiento a los sistemas de representación en las sesiones 19 y 20. La Figura 18 representa, por ejemplo, la propuesta que presentó el grupo RAZ.

En el caso del sistema de representación vinculado al lenguaje usual, el grupo señaló que “en las magnitudes que están en relación de proporcionalidad directa, al multiplicar (dividir) una cantidad por un cierto número, la cantidad correspondiente en la otra magnitud queda multiplicada (dividida) por el mismo número”. Nuestros comentarios como formadores, se centran en destacar que ese es el criterio para decidir si dos magnitudes están o no relacionadas proporcionalmente, ya que el lenguaje usual está vinculado a expresiones del tipo “cinco kilos de tomates por tres euros”.

En el resto de presentaciones, destacamos la importancia de las relaciones entre esos diferentes sistemas y, en particular, la relación entre el sistema de representación numérico y el simbólico. Además, dado que el grupo ECU usó datos históricos en su presentación, también aprovechamos para destacar que la revisión histórica suministra información relevante para analizar un tema de las matemáticas escolares. En ese momento convocamos a los grupos a hacer una revisión histórica de sus temas, que presentarían en la sesión 40. Finalmente,

⁸⁹ Las producciones de los diferentes grupos en relación con el balance final del análisis de contenido, las hemos recogido en el Anexo K.

indicamos a los grupos que el siguiente paso era introducir la información de los sistemas de representación en el mapa de la estructura conceptual.

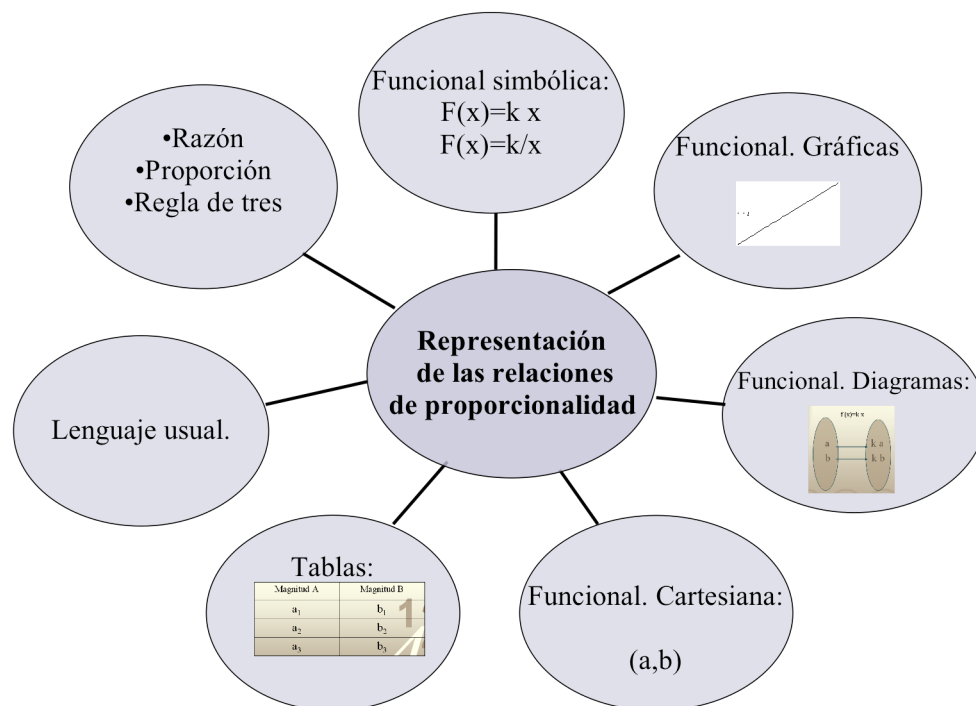


Figura 18. Organización de los sistemas de representación del grupo RAZ

El tercer organizador del análisis de contenido se centra en el estudio fenomenológico. Para su introducción, al final de la sesión 20, Antonio Marín propuso una tarea a los grupos [081104S20, 53'40'']:

Vais a pensar para mañana, cada grupo, una tarea que diera respuesta a esa pregunta que hacen los alumnos de vez en cuando y que nos dejan un poco atónitos: “Y esto, ¿para qué sirve?” Es decir, un ejemplo de tarea que creáis que pudiera darle respuesta a esos alumnos, de que el tema que vais a explicar les sirve en la vida cotidiana para algo.

En la sesión siguiente los grupos intervienen y anotan sus propuestas en la pizarra, distinguiendo distintos tipos de situaciones representadas en las tareas, contenidos involucrados y significados destacados. Esto abre la presentación de las situaciones PISA, sobre las que los grupos han de pensar tareas en sus temas de trabajo. En la sesión 22, Luis Rico introduce la noción de contexto y los grupos hacen su primera aproximación a las preguntas básicas de sus temas.

En la sesión 23, los grupos de futuros profesores presentan el análisis fenomenológico de sus temas, de acuerdo a situaciones y contextos. Pero debido al gran número de observaciones y comentarios de los formadores, sobre todo en la parte de contextos, tres de los cuatro grupos presentaron una nueva versión en la sesión 25 (ver versión final en el Anexo K). El grupo PRO fue el único que presentó una única versión y es la siguiente [081111S23, 37'52'']:

Nosotros hemos definido estos tres contextos. El primero, coincidiendo con el grupo de fracciones, es el de medida: medir la incertidumbre. En este caso la pregunta es: “¿Cómo puedo cuantificar lo incierto?”. En nuestro caso se

asigna un número entre cero y uno a un suceso. Dependiendo lo cerca que esté de uno, es más probable que ocurra. Pero también lo podemos ver como intentar prevenir. La pregunta entonces es: “¿Qué riesgo existe?”. Aquí entran todos los ejemplos de terremotos, inundaciones, el ser propenso una persona a cierta enfermedad, ... Se trata de analizar varios factores. Pero todos nos llevan, a la postre, a la toma de decisiones. Es una herramienta para responder a la pregunta: “¿Qué me conviene hacer?”. La probabilidad no te va a decir haz esto, pero sí dice que esto es más probable que esto otro.

Para cada una de las cuestiones señaladas, el grupo propuso ejemplos de tareas en diferentes situaciones. Ciertamente, el grupo PRO consiguió una propuesta muy bien estructurada de contextos en su primer intento. El resto de grupos tuvieron más complicaciones y necesitaron una segunda versión. Tal y como encontró Gómez (2007), el análisis fenomenológico es uno de los organizadores más complejos del análisis de contenido para los futuros profesores. Finalmente, todos los grupos, salvo ECU, logran delimitar con un grado aceptable de corrección los contextos de sus temas. Pero muy pocos son, como veremos en el capítulo 8, los que le dan utilidad a esta producción de cara al enunciado de objetivos específicos.

En la parte final de la sesión 25, los formadores introdujimos el análisis didáctico y dimos marco al análisis de contenido desde las producciones de los grupos. Asimismo, dimos entrada a la siguiente dimensión del análisis didáctico, el análisis cognitivo [081112S25, 41'31'']:

JLL. Ahora vamos a justificar lo que hemos hecho desde que empezamos el primer día de clase hasta hoy, para indicar hacia dónde vamos. Sobre todo porque en alguna tutoría, alguien había preguntado, no esto para qué sirve porque sois muy educados, pero sí hacia dónde vamos. Con esta terminología de análisis didáctico, recogemos todo el procedimiento que trabajamos en la asignatura de cara al diseño de unidades didácticas.

(...) Si miráis lo que os dimos el primer día de clase, donde aparecían los objetivos de la asignatura, una de las cosas que perseguimos es que vosotros, como futuros profesores de educación matemática en secundaria, desarrolléis algunas competencias; que os veáis cada vez más competentes a la hora de diseñar planificaciones, de diseñar actividades de clase, unidades didácticas.

(...) Dentro de todo lo que tiene que ver con la planificación, nos vamos a centrar en cómo se planifica una unidad didáctica sobre un tema matemático concreto y para un periodo limitado de tiempo (...). Y lo que vamos a hacer es usar el procedimiento de análisis didáctico.

El análisis didáctico a su vez está compuesto por cuatro análisis (...). El análisis del contenido tiene que ver con aquella parte del currículum que se centra en los contenidos, en los conceptos. El análisis cognitivo se centra en la parte cognitiva en relación con la dimensión del currículum que tiene que ver con el aprendizaje. El análisis de la instrucción que tiene que ver con la parte del currículum centrada en la propia enseñanza, en la actividad del docente.

Y el análisis de actuación, que tiene que ver con el valor social y de evaluación del curriculum.

(...) El análisis de contenido se centra en ver qué es lo que hay detrás de cada tema de matemáticas y para eso vamos a ver todos sus conceptos, relaciones, procedimientos, etc. Cómo se pueden estructurar en un mapa conceptual, lo que es análisis de la estructura, vamos a ver cómo se pueden analizar y describir las diferentes formas en las que se pueden representar esas nociones matemáticas, que es el apartado del tema de la representación, y finalmente, que es lo de lo que hemos estado hablando hasta hoy, todo lo que tiene que ver con la fenomenología, que lo hemos concretado en temas de situaciones y contextos.

Aunque desde ese momento comenzamos expresamente el análisis cognitivo, la sesión 28 se dedicó a las presentaciones de los grupos de un balance del análisis de contenido. Cada grupo resumió las nociones centrales de sus temas, los focos de contenido, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico. Además, presentaron la estructura conceptual de sus temas mediante mapas conceptuales. Un mapa conceptual reúne las principales nociones de un tema, destaca las que son básicas y muestra la riqueza de relaciones entre esas nociones, el modo en el que se pueden representar y su funcionalidad (ver ejemplo de los números naturales en la Figura 7 del capítulo 2 y su explicación en §2.3.7).

Dado que en capítulos posteriores nos referiremos a estas estructuras conceptuales para analizar e interpretar las producciones de los grupos sobre los diferentes organizadores del currículo del análisis cognitivo, a continuación mostramos esos mapas. Las Figuras 19, 20, 21 y 22 recogen, respectivamente, las estructuras conceptuales de los grupos ECU, FRA, PRO y RAZ en el balance del análisis cognitivo⁹⁰.

El grupo ECU fue uno de los que más tardó en delimitar su estructura conceptual (en el Anexo K puede verse su versión final del análisis de contenido). Aunque finalmente recogieron las nociones más importantes de su tema, aspectos también destacables como las relaciones entre sistemas de representación, la resolución de problemas o el tratamiento con nuevas tecnologías, no quedaron reflejados.

El grupo FRA, por el contrario, acotó con relativa rapidez las nociones y relaciones que configura su estructura conceptual. El mapa que recoge la Figura 20 es la versión que presentaron en el balance del análisis de contenido. Esta estructura no se modificó en el resto de la asignatura.

En la Figura 20 se reconocen los diferentes significados del concepto de fracción, también citan dos nociones importantes como son la equivalencia y el orden y, además, incluyen las operaciones y sus propiedades. Las diferentes

⁹⁰ En el caso de los grupos ECU y RAZ, mostramos los mapas de las estructuras conceptuales que elaboraron poco tiempo después de presentar el balance del análisis cognitivo. En esa presentación mostraron una versión previa que únicamente difiere de la mostrada en la ubicación de las nociones centrales. Reproducimos la versión mejorada ya que fue la que tenía el grupo durante su trabajo sobre el análisis cognitivo.

representaciones y algunos aspectos sobre resolución de problemas y materiales y recursos también son recogidos. Como veremos en los capítulos siguientes, el grupo FRA supo sacar partido a esta estructura conceptual en el análisis cognitivo de su tema.

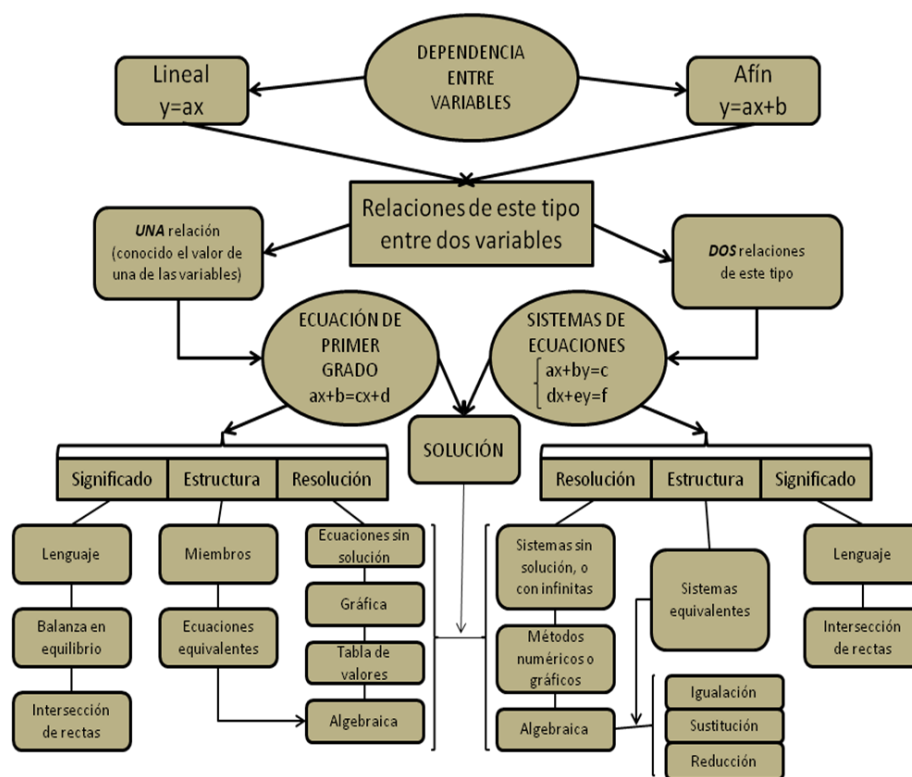


Figura 19. Mapa de la estructura conceptual del grupo ECU

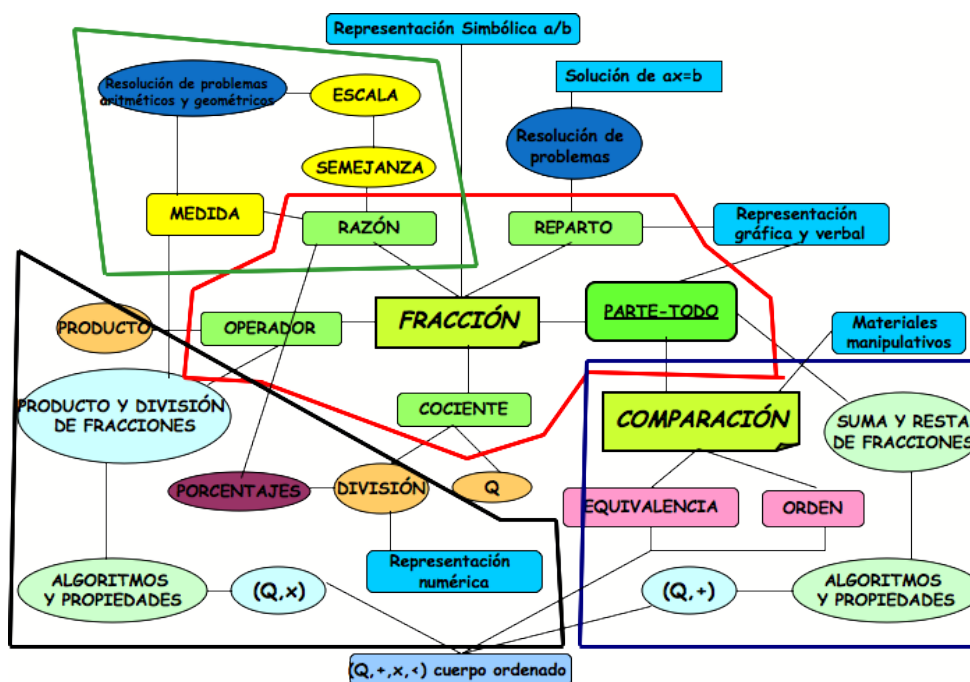


Figura 20. Mapa de la estructura conceptual del grupo FRA

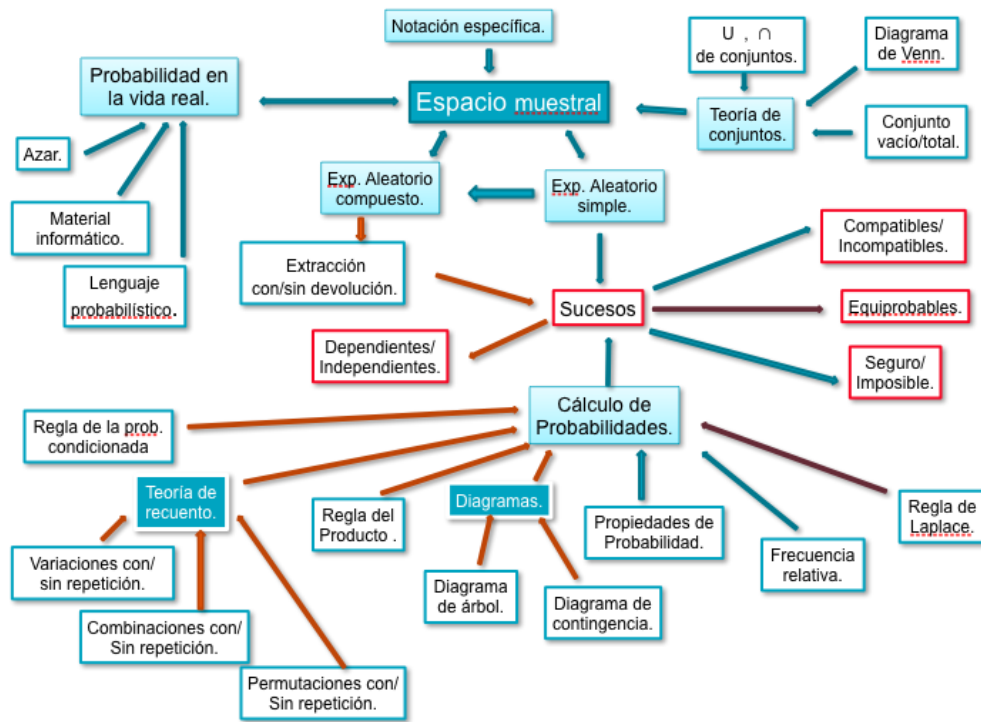


Figura 21. Mapa de la estructura conceptual del grupo PRO

La propuesta del grupo PRO también quedó delimitada con motivo de su balance del análisis de contenido. Como veremos en el capítulo 8, esta es una característica propia de este grupo, ya que suelen cerrar con prontitud sus diferentes análisis. De su estructura conceptual destacamos que incluye la totalidad de nociones básicas de su tema, si bien adolece de pocos vínculos establecidos entre los distintos conceptos y procedimientos.

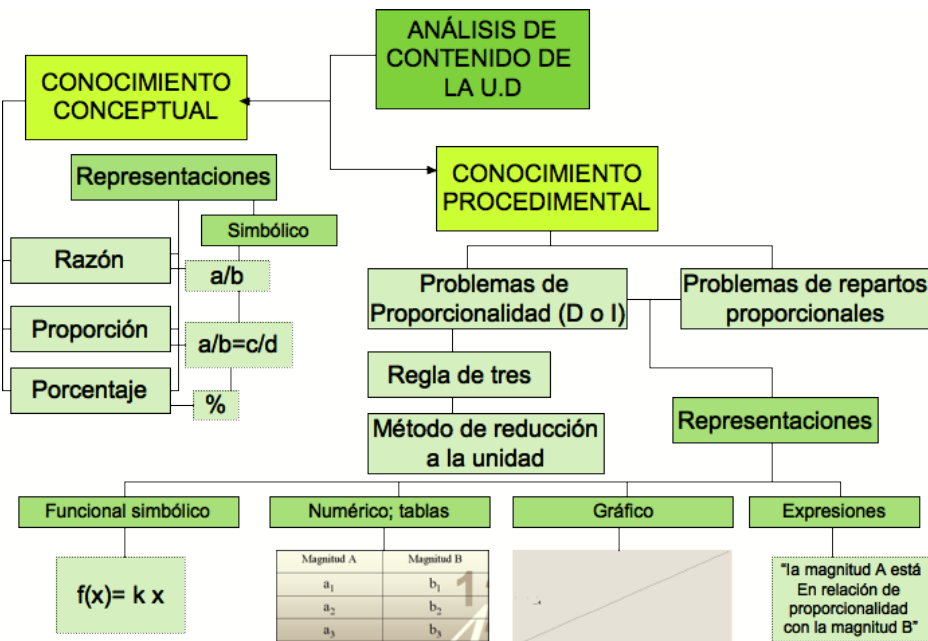


Figura 22. Mapa de la estructura conceptual del grupo RAZ

La propuesta del grupo RAZ incorpora todos los sistemas de representación considerados en producciones anteriores, si bien resultan aislados entre sí. De hecho, al separar conceptos y procedimientos se pierden muchas de las relaciones posibles entre ellos. Aunque de manera sucinta, la totalidad de las nociones centrales de su tema están recogidas en el mapa de la Figura 22.

Con estas presentaciones del balance del análisis de contenido, se cierra el trabajo sobre esa parte del análisis didáctico. No obstante, varios grupos fueron modificando y mejorando partes de él a medida que avanzaban en el análisis cognitivo.

6.2 Sesiones Sobre Análisis Cognitivo

El análisis cognitivo se introduce formalmente en la asignatura en la sesión 25, cuando se hace la presentación general del análisis didáctico [081112S25, 49'49'']:

JLL. El segundo análisis que incluye el análisis didáctico se llama cognitivo, porque tiene que ver con el aprendizaje, con la cognición de los alumnos. Así entran en el juego los escolares, que todavía no habíamos considerado. Es decir, estamos analizando la matemática desde el punto de vista de su aprendizaje. Ahora, ya en la parte cognitiva, el sujeto toma relevancia y vamos a tratar de establecer qué es lo que nosotros esperamos que aprendan los escolares sobre el tema matemático que estamos trabajando. Como ha dicho Luis, a principio de curso empezamos por ahí y ya hemos hablado de objetivos específicos y competencias. Ahora vamos a hacer un trabajo un poco más exhaustivo sobre cada uno de esos temas en ese apartado.

De lo que básicamente acabaremos hablando es: ¿qué es lo que esperamos que aprendan los niños sobre proporcionalidad, sobre fracciones, ecuaciones, et.? Y además como hipótesis, ¿qué errores y dificultades sospechamos que pueden tener en el trabajo en ese tema? Luego concretaremos de manera cerrada un nivel educativo (...). Ya se va un poco concretando esa idea de análisis para generar una planificación a corto plazo de un nivel y tema muy concretos.

(...) Retomaremos la parte de objetivos, competencias y añadiremos los errores y dificultades que sólo mencionamos brevemente al principio. De nuevo el elemento tarea es sumamente importante. Las tareas son lo que al profesor le permite movilizar, poner en juego el aprendizaje de los escolares, desarrollarlo y, además, ver luego en qué medida se ha logrado.

Por tanto la parte cognitiva son expectativas de aprendizaje, lo que puede frenar o limitar ese aprendizaje y lo que lo puede facilitar o contribuir, o sea, el tipo de tareas y actividades que el profesor diseña. Esas son las tres piezas del análisis cognitivo.

Además de los tres organizadores del análisis cognitivo, en esta parte de la asignatura también dedicamos algunas sesiones a introducir la noción y la complejidad del aprendizaje, ya que esta noción está en la base de esos tres

organizadores. Describimos cronológica y secuencialmente estas cuatro facetas con que abordamos las sesiones centradas en el análisis cognitivo.

Aprendizaje de las Matemáticas

En la sesión 26, introducimos la noción de aprendizaje y subrayamos su importancia en el contexto de la planificación del profesor [081113S26, 13'54'']:

JLL. La principal noción que entra en juego en este nuevo análisis es, como comentamos ayer, la de aprendizaje. Ahora vamos encaminados hacia enunciar y relacionar unos enunciados de objetivos de manera que expresen lo que esperamos que unos niños, del nivel que sea, aprendan sobre el tema matemático que estamos trabajando. Entonces, la noción de aprendizaje es importante y a ella le vamos a dedicar esta sesión y prácticamente la sesión del lunes (...).

En la parte del contenido ya hemos analizado todos los significados posibles que admiten los temas matemáticos que estáis trabajando y en un análisis puramente matemático. Nos hemos preocupado solamente de explorar las matemáticas. Ahora ya aparece el aprendizaje. Dado que nuestro objetivo es diseñar una unidad didáctica para alumnos de secundaria tenemos que preocuparnos de qué es lo que esperamos que aprendan, qué suponemos que deben saber previamente y hacia dónde vamos. Y además tener criterios que luego sean útiles de cara a la evaluación.

A continuación expusimos el gran número de interrogantes que surgen en relación al aprendizaje [081113S26, 15'57'']:

JLL. A partir de la pregunta “¿Qué es el aprendizaje?” surgen otros interrogantes como: ¿En qué consiste exactamente? ¿A qué se refiere? ¿Cómo se produce? ¿El aprendizaje es producto de la evolución, del desarrollo personal o la escuela es también importante? O sea, si una persona no asiste a la escuela ¿se va formando integralmente o requiere el apoyo escolar o educativo? Y cuando la psicología se acerca a la educación aparecen las llamadas teorías de aprendizaje. ¿Para qué sirve una teoría de aprendizaje? Esas son algunas de las cosas que vamos a afrontar.

Finalmente, concretamos esas cuestiones en el caso de las matemáticas y proponemos a los futuros profesores que, individualmente, propongan respuestas por escrito. Las cuestiones quedaron finalmente enunciadas como:

1. ¿Qué es aprender matemáticas?
2. ¿Cómo se produce el aprendizaje de las matemáticas?
3. ¿Cómo se facilita el aprendizaje?
4. ¿Qué dificulta el aprendizaje?
5. ¿Cómo se reconoce el aprendizaje?

Cuando los futuros profesores contestaron al cuestionario, dedicamos los últimos minutos de la sesión a poner en común algunas respuestas. También recordamos que los futuros profesores debían hacer una lectura del documento *La enseñanza*

y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica (Onrubia, Rochera y Barberá, 2001), ya que se discutirá al día siguiente.

En la sesión 27, comenzamos por mostrar y comentar los resultados de la anterior encuesta sobre aprendizaje, según volcado global de las respuestas⁹¹.

En relación a la primera pregunta, la respuesta más frecuente entre los futuros profesores fue que aprender matemáticas es *ser capaz de resolver problemas*. A continuación, pero a una gran distancia, relacionan aprender con *desarrollar capacidades y conocimientos*, con *aplicar conocimientos a la práctica*, con *afrentar e interpretar situaciones* y con *comprender y memorizar conceptos y procedimientos*. Estas respuestas hacen hincapié en una visión prioritariamente funcional de las matemáticas.

Las respuestas a cómo se produce el aprendizaje enfatizan dos aspectos. Por una parte, la *importancia del papel del profesor* que destaca por delante del papel del alumno y, por otra, que *el proceso se lleva a cabo de manera gradual*. El resto de opciones tienen mucha menor frecuencia: como *respuesta a necesidades*, como *actividad social* o *acumulando conocimientos* son citadas por pocos profesores en formación.

La tercera pregunta perseguía explorar las ideas de los futuros profesores acerca de qué aspectos pueden facilitar el aprendizaje de los escolares en matemáticas. La respuesta más frecuente, de nuevo, se focaliza en el docente: *mediante la planificación y las estrategias del profesor*. De cerca le siguen otras alternativas como *mediante la participación activa del alumno*, *mediante la motivación* o *mediante uso de ejemplos y de materiales y recursos*, entre otras.

De la misma manera que la planificación y las estrategias del profesor son esenciales para facilitar el aprendizaje de los escolares, los futuros profesores reconocen que eso mismo puede también dificultarlo. Además, la situación personal del alumno y su propia capacidad también son aspectos importantes que pueden limitar ese aprendizaje. Otros, como el uso inadecuado de ejemplos o la falta de motivación en el alumno o en el profesor, son factores que tuvieron menos aceptación entre los profesores en formación que realizaron el cuestionario.

La última pregunta reunió menor número de respuestas porque no todos los futuros profesores tuvieron tiempo de completarla. No obstante, en relación al modo en que se reconoce el logro del aprendizaje, la opción más destacada vuelve a ser mediante la resolución de problemas. Le siguen mediante la consecución de objetivos, mediante la resolución de ejercicios y por la superación personal.

Un aspecto que destaca al mostrar y comentar los resultados del cuestionario es que todos los que participaron ubican sus respuestas en un conjunto amplio de posibilidades que, en muchos casos, incluso comparten. De esta manera, pudimos poner de manifiesto la complejidad del proceso de aprendizaje de las

⁹¹ En el Anexo E incluimos el volcado completo de las respuestas de los futuros profesores junto con las frecuencias de aparición.

matemáticas. Después presentamos los descriptores generales de las principales teorías de aprendizaje, con ejemplos de propuestas didácticas.

Toda esta reflexión da entrada al documento de Onrubia, Rochera y Barberá (2001), que se analiza en la sesión 29. Los profesores en formación encuentran en este trabajo referencias a varias de las reflexiones realizadas por ellos hasta el momento, ya que, entre otros muchos aspectos, los autores destacan la importancia de analizar las propias matemáticas escolares en la planificación del aprendizaje de los escolares. Con la lectura de la parte de este trabajo que se centra en las expectativas de aprendizaje, se inicia el trabajo con este organizador del análisis cognitivo.

Expectativas de Aprendizaje

La última parte de la sesión 29 se empleó para presentar los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo y comenzamos el trabajo sobre expectativas recordando el significado y la relación entre objetivos específicos y competencias matemáticas. También describimos y ejemplificamos las ocho competencias PISA entre esa sesión y la siguiente.

Al acabar nuestra intervención, los formadores generamos un debate breve acerca de cuáles de esas competencias son más específicas a las matemáticas y cuáles son algo más genéricas. Después, recordamos las tres componentes de las expectativas, capacidad, contenido y contexto, para ejemplificar después el enunciado de objetivos específicos sobre los números naturales.

Iniciamos el trabajo a partir de la estructura conceptual elaborada para este tema (Figura 7, §2.3.7). Desde este esquema se delimitan cuatro focos de contenido que dan lugar a cuatro prioridades de aprendizaje. Para cada una de esas prioridades, proponemos un listado de objetivos que los futuros profesores valoran en términos de su concreción y significado. En los minutos finales de la sesión, los grupos de profesores en formación proponen enunciados de objetivos específicos a sus temas, como adelanto a su presentación para la sesión siguiente.

En la sesión 31, los grupos FRA, RAZ y parcialmente ECU, proponen su estructura de focos y prioridades y enuncian varios objetivos específicos. En la sesión 32, el grupo ECU finaliza su presentación y después la realiza el grupo PRO.

A modo de ejemplo, la Tabla 23 recoge los focos de contenido que propuso el grupo FRA en su primera aproximación, con sus correspondientes objetivos⁹². Después de cada presentación de los grupos, los formadores centrábamos nuestra reflexión y la del resto de grupos, en dos aspectos principales de las producciones. En primer lugar, si en el listado de objetivos se identificaban la totalidad de nociones y capacidades básicas de cada tema o si, por el contrario, se detectaba una carencia importante. Posteriormente, nos centrábamos en los propios enunciados, si estaban o no bien expresados y si transmitían un significado preciso o resultaban ambiguos o genéricos.

⁹² En el Anexo F recogemos todas las producciones sobre prioridades de aprendizaje (o focos de contenido) y el enunciado de objetivos específicos de cada uno de los grupos.

Tabla 23

Primera aproximación a los focos de contenido y a los objetivos específicos del grupo FRA

<i>Significado y usos de las fracciones</i>	
1	Comprender y utilizar los distintos conceptos de fracciones.
2	Escribir fracciones mayores que la unidad en forma de número mixto.
3	Reconocer numerador y denominador
4	Representar gráficamente una fracción.
5	Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales.
6	Utilizar fracciones en situaciones que expresan particiones de la unidad.
7	Hallar la fracción irreducible de una dada.
8	Simplificar fracciones.
<hr/>	
<i>Estructura de $(Q,+)$</i>	
9	Identificar y calcular fracciones equivalentes.
10	Comparar fracciones.
11	Ordenar fracciones.
12	Sumar y restar fracciones de igual y distinto denominador.
<hr/>	
<i>Estructura de (Q,x)</i>	
13	Calcular la fracción de una cantidad dada.
14	Multiplicar y dividir fracciones.
<hr/>	
<i>Medida y geometría</i>	
15	Saber interpretar una escala.
16	Resolver problemas geométricos en los que intervengan fracciones.
17	Uso de fracciones en situaciones de medida.
<hr/>	
Globales (enunciados por separado)	
18	Realizar cálculos mentales y con calculadora.
19	Resolver problemas.

En relación con la propuesta del grupo FRA de la Tabla 23, lo primero que destaca en este listado es que la resolución de problemas está poco presente, siendo un aspecto central en el tema de fracciones. En lo referente a nociones básicas, la propuesta recoge un buen número de ellas. No obstante, destaca el gran número de objetivos enunciados en términos muy globales y que incluyen capacidades demasiado genéricas.

Con motivo de estos comentarios y de otros similares para otros grupos, la mayor parte de ellos reformulan sus propuestas y entregan una nueva versión del listado

organizado de sus objetivos. Los formadores no solicitamos expresamente esta revisión, si bien resultó evidente después de las presentaciones, que debían revisar su trabajo. En el capítulo 8 analizamos con detalle las variaciones entre estas distintas producciones.

Cuando finalizan las presentaciones del primer listado en la sesión 32, los formadores continuamos presentando las tablas que ejemplifican la vinculación entre objetivos específicos y competencias (§3.4.1, Tablas 13, 14, 15 y 16). Mostramos un ejemplo de asignaciones con los objetivos de una de las prioridades de aprendizaje de los números naturales y pedimos que los futuros profesores valoren la asignación realizada. Con motivo de sus preguntas detectamos las primeras dificultades para manejar el significado de las ocho competencias matemáticas PISA. En primer lugar, la distinción entre *argumentar y justificar* y *comunicar* y entre *representar* y *utilizar el lenguaje simbólico* eran algo difusas, pero la mayor dificultad se situaba en la competencia de *modelizar*, ya que los grupos no disponen de criterios claros para vincularla justificadamente con los objetivos. Varias sesiones más adelante profundizamos en el significado de algunas de estas competencias.

En la sesión 33 realizamos una tarea para constatar las dificultades anteriores. Entregamos a cada futuro profesor una tabla con todos los objetivos relacionados con los números naturales que los formadores habíamos mostrado en clase. En la tabla, además, incluimos las columnas para hacer las asignaciones a las competencias y entregamos una descripción resumida de cada una de las ocho competencias PISA. Les pedimos que hicieran esas asignaciones y después, hicimos en la propia clase el volcado de los datos. Finalmente se repitieron esas dificultades entre las competencias señaladas anteriormente. También comprobamos que la de *pensar y razonar* es como un contenedor, en el que parecen caber todos los objetivos y que ninguna de las competencias restantes presentaban problemas singulares para realizar las asignaciones.

La sesión 34 tenía una doble finalidad. Por una parte, aclarar las dudas de los futuros profesores sobre el significado de las competencias y los criterios de asignación entre éstas y los objetivos. En la segunda parte de la sesión, los grupos de profesores en formación hacen un primer acercamiento para relacionar algunos de los objetivos de sus temas con las competencias PISA. A partir de ese trabajo pedimos que, para la siguiente sesión, hagan la asignación de los objetivos de, al menos, dos prioridades de aprendizaje (o dos focos de contenido). Pero en la sesión 35 no sólo realizan la asignación, sino que algunos grupos reformulan considerablemente su propuesta de objetivos específicos.

Algunos grupos mantuvieron la estructura de focos o prioridades y varios de los objetivos de las producciones anteriores, como PRO. Pero otros grupos, como ECU, llegaron a cambiar tanto la organización de focos como gran parte de sus enunciados de objetivos específicos.

La Tabla 24 ejemplifica esas asignaciones en el caso de uno de los focos propuestos por el grupo ECU⁹³.

Tabla 24

Contribución al desarrollo de competencias matemáticas de los objetivos específicos relativos al lenguaje algebraico del grupo ECU⁹⁴

Objetivos específicos	Competencias							
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
19 Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico.	✓						✓	✓
29 Distinguir y justificar si una expresión algebraica es monomio o no y estudiar su estructura coeficiente, parte literal y grado y agrupar monomios semejantes de una lista.	✓	✓					✓	
22 Identificar polinomios de grado 1 en una y dos incógnitas y justificar la respuesta.	✓	✓					✓	
30 Afianzar las operaciones básicas con monomios y polinomios.	✓						✓	

Tras la presentación de estas producciones, los formadores volvemos a analizar el enunciado de los objetivos según los dos aspectos que hemos descrito antes. Pero además, ahora introducimos otra doble reflexión. Por una parte, estudiamos si las asignaciones están justificadas por el enunciado de los objetivos y, por otra, si el balance de competencias seleccionadas es coherente con el foco o prioridad propuesto.

Por ejemplo, los objetivos 19 y 30 propuestos en la Tabla 24 por el grupo ECU son de tipo técnico o algorítmico y, por lo tanto, no están especialmente relacionados con la competencias de *pensar y razonar*. Por otro lado, algún objetivo centrado en la relación entre el lenguaje algebraico y el natural, permitiría la relación con otras competencias, como comunicar o modelizar.

⁹³ En el Anexo G, incluimos todas las asignaciones entre objetivos y competencias de los diferentes grupos a lo largo de toda la asignatura.

⁹⁴ Tal y como explicaremos en el capítulo 6, la numeración de los objetivos no sigue un orden creciente y es que, para nuestro análisis, mantenemos la numeración entre una producción y la siguiente, para así poder estudiar las modificaciones entre diferentes producciones.

Estas presentaciones cubren las sesiones 35 y 36. Los comentarios posteriores a cada intervención de un grupo fueron numerosos y se organizan tanto en torno al significado de los objetivos como a la asignación de éstos a las competencias. Los grupos ECU y FRA fueron los que, en este momento del análisis cognitivo, modifican considerablemente su listado de objetivos. RAZ sólo cambió el enunciado de un objetivo y PRO no aplicó ningún cambio.

La sesión 37 la dedicamos a profundizar en la competencia *modelizar*, tal y como habíamos previsto. Los futuros profesores trabajan varios problemas de modelización, en los que identifican distintas fases del proceso y diferentes niveles de complejidad en su resolución.

Finalmente, en la sesión 38 hicimos un cuestionario individual final sobre expectativas de aprendizaje⁹⁵. Este cuestionario lo empleamos sólo como un indicador individual que tuvimos en cuenta en la evaluación de los futuros profesores para la asignatura, por lo que no analizamos sus resultados en esta investigación.

Este cuestionario supuso el inicio del trabajo con el segundo organizador del análisis cognitivo, las limitaciones en el aprendizaje. No obstante, como veremos más adelante, cuando los grupos de profesores en formación realizan el balance del análisis cognitivo de sus temas en la sesión 47, vuelven a presentar su listado de objetivos con las asignaciones a las competencias. Comentaremos esas producciones más adelante.

Limitaciones en el Aprendizaje

En la sesión 39, introdujimos la segunda herramienta del análisis cognitivo, concretando las limitaciones de aprendizaje en términos de errores y dificultades y destacando su importancia en la planificación del profesor [081209S39, 26'36'']:

LR. Vamos a empezar ahora con otra componente del análisis cognitivo, que es el estudio de errores y dificultades. (...) De alguna manera, las expectativas de aprendizaje nos hablan de lo que nosotros llamaríamos buena salud intelectual de los escolares. Usando una metáfora biológica, nosotros pensamos que con los conceptos, con los hechos, los procedimientos y con toda la información que les damos, ellos consiguen crecer en un determinado sentido, en un sentido intelectual: mejoran sus competencias alcanzando objetivos. Pero al mismo tiempo que al profesor, al hacer la planificación, le interesa tener muy claro qué pretende que el niño consiga, también tiene que tener claro lo que no interesa que le pase, cuáles son las patologías posibles que conviene evitar. Si yo, como profesor, sé que ante estos conceptos de fracciones, de proporcionalidad o de probabilidad, los alumnos tienden a equivocarse, a confundirse o a interpretar erróneamente tal situación, debo de poner ejercicios que, de alguna manera, enfrenten al alumno a esas limitaciones, que le ayuden a superar esos errores. Esa es la idea clave del análisis de errores y dificultades.

⁹⁵ El contenido de esta evaluación individual se puede consultar en el Anexo C.

Después los formadores tratamos de que los futuros profesores reflexionen acerca de la importancia del error [081209S39, 32'58'']:

LR. ¿Cómo se debe tratar el error? ¿Tenemos que felicitar al alumno que se equivoca o no conviene?

PF1. Hay que subsanarlo... Buscar una solución para que no utilice ese error. Si es un error puntual y se salva, pues luego no se aplicará. Pero si no se da cuenta el profesor, puede tener ese error y utilizarlo y ya le costará más...

LR. ¿Es el error importante? ¿Por qué es importante?

PF2. Porque si hay algún concepto que lo va a usar más tarde para otra cosa y no lo entiende, o hace una cosa malamente, le va a perjudicar en los siguiente que haga.

LR. El error es importante porque se supone que algo se está interpretando mal, hay algún modo de concebir, de entender que no es adecuado, por lo que sea, entonces todo lo que sea inadecuación de nuestro conocimiento, de nuestra reflexión con respecto a datos, hechos, valoraciones, supone un desencuentro, una especie de acto fallido. Luego el error es importante por lo que supone de desencuentro entre la mente y la realidad, hay algo que no funciona. Bien, vamos a dejarlo para mañana y cada uno vais a traer para pasado, un pequeño mapa que estructure vuestra reflexión del error.

Finalmente, ejemplificamos varios errores tradicionales en el desarrollo histórico de la matemática, para poner de manifiesto que los errores están vinculados a la propia evolución y construcción de las diferentes disciplinas científicas.

El trabajo con limitaciones en el aprendizaje continúa en la sesión 42, ya que en las sesiones 40 y 41 los grupos de profesores en formación presentan sus trabajos sobre el desarrollo histórico de sus respectivos temas. En esa sesión 42, los formadores presentamos diferentes clasificaciones de errores según la literatura en Didáctica de la Matemática (§3.2.4), para después ejemplificar el estudio de limitaciones en el aprendizaje en el caso de los números naturales. Los grupos presentarán sus propuestas de estudio de errores y dificultades en sus temas en la sesión 44.

En esa sesión exponen todos los grupos salvo PRO, porque no dio tiempo. Ya que esta fue la última sesión antes de la vacaciones de Navidad, ellos entregan su presentación a los formadores y nosotros les enviamos por correo electrónico algunos comentarios a la misma. La Tabla 25 recoge esta propuesta del grupo PRO⁹⁶.

Después de estas presentaciones, los formadores insistimos, fundamentalmente, en clarificar los enunciados, si bien también destacamos algún error o dificultad importante. En la propuesta de PRO el enunciado 5 es una ausencia de

⁹⁶ El resto de propuestas de los otros grupos sobre limitaciones en el aprendizaje a lo largo de toda la asignatura, están en el Anexo H.

conocimiento más que un error o dificultad, mientras que el enunciado 14 es demasiado abierto o general.

Tabla 25

Primera propuesta de limitaciones en el aprendizaje del grupo PRO

Dominio del espacio muestral

- 1 Identificar sucesos con conjuntos de forma errónea
 - 2 Carencias en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado
 - 3 Dificultad al distinguir si dos sucesos son compatibles o incompatibles
-

Probabilidad con experimentos simples

- 4 La complejidad del concepto de límite.
 - 5 No asimilar que la función probabilidad adquiere valores entre 0 y 1.
 - 6 Aplicar sin discreción que la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.
 - 7 Dificultades a la hora de determinar los casos favorables de un suceso
 - 8 Considerar que todas las situaciones son de equiprobabilidad
 - 9 Dificultad al elaborar enunciados de problemas
-

Probabilidad condicionada

- 10 Confundir el suceso condicionante del condicionado.
 - 11 Creer que si un suceso es el suceso seguro, es todo el espacio muestral.
 - 12 Mezclar magnitudes probabilísticas y porcentuales.
 - 13 Confundir probabilidad condicionada con la probabilidad de la intersección.
 - 14 Dificultad en la comprensión del enunciado de un problema.
 - 15 Dificultad al formalizar en términos matemáticos, tablas y otras representaciones los datos de un problema.
-

En general, estas presentaciones pusieron de manifiesto que este análisis es complicado para los grupos de profesores en formación. Varios de ellos solicitaron documentación adicional durante las tutorías con los formadores. Como veremos en el capítulo 9, algunos grupos llegan a elaborar un propuesta coherente, mientras que otros ni siquiera llegan a quedar satisfechos con su propuesta en la unidad didáctica.

Con estas presentaciones se cierra el trabajo específico con limitaciones en el aprendizaje, si bien los grupos las retoman más adelante en el balance del análisis cognitivo, donde aplican los cambios que encuentran oportunos después de los comentarios recibidos en la sesión 44.

Oportunidades de Aprendizaje

En el capítulo 3, caracterizamos las oportunidades de aprendizaje como tareas en el marco del análisis didáctico (§3.3). Y la mayor parte del trabajo con tareas en la asignatura se realiza con motivo del análisis de instrucción. No obstante, dedicamos la sesión 43 a introducir el tercer y último organizador del análisis cognitivo.

En esta sesión, los formadores presentamos diferentes aspectos educativos que brindan oportunidad de aprender matemáticas a los escolares, como la organización curricular, la formación de los profesores, el equipamiento de los centros, el tiempo dedicado a las matemáticas, la selección y secuenciación de contenidos y, por supuesto, las tareas que el profesor plantea a los escolares.

A continuación, delimitamos algunas características de las tareas, como que son demandas que el profesor plantea a los escolares, que movilizan su conocimiento sobre un tema matemático determinado, que concretan los objetivos específicos de ese tema en términos de actuaciones, que implican que un escolar ponga en juego su conocimiento sobre conceptos y procedimientos, que activan sus competencias y contribuyen a su desarrollo y que pueden servir para la detección o tratamiento de errores.

Finalmente, tras destacar y ejemplificar el vínculo entre objetivos específicos, competencias y tareas, propusimos a los grupos de profesores en formación que diseñaran una o dos tareas a partir de algunos de sus objetivos específicos. En el caso del grupo ECU, por ejemplo, propusimos los siguientes objetivos.

1. Estudio de las ecuaciones mediante el uso de tablas de valores
2. Obtener la solución general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, previo a la resolución de sistemas
3. Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación

También les pedimos que indicaran al desarrollo de qué competencias podría contribuir ese tipo de tareas. Los grupos de futuros profesores trabajaron durante aproximadamente 10 minutos y la tarea propuesta por el grupo ECU es la siguiente.

Dada la ecuación $2x+5=3x+2$. Resolverla gráficamente, ayudándote de la tabla de valores asociadas a las funciones $y=2x+5$, $y=3x+2$ para la gráfica. Explica el significado de dicha técnica de resolución.

El grupo ECU relacionó su tarea con los objetivos 1 y 3 y la vinculó con las competencias de *comunicar*, *representar* y *utilizar el lenguaje simbólico*. Ciertamente, se acogieron casi literalmente al enunciado de los objetivos, si bien no pensaron en sacar la tarea de un contexto meramente matemático.

Como hemos dicho antes, el trabajo con tareas se centró ya en el análisis de instrucción que describiremos más adelante. Antes, resumimos la sesión 47 en la que los grupos hacen balance del trabajo realizado en el análisis cognitivo.

Balance del Análisis Cognitivo

En este balance, los grupos de profesores en formación deben presentar la última versión de su listado de objetivos específicos además de la vinculación de éstos con las competencias matemáticas PISA. Asimismo, también deben presentar sus avances en el enunciado de limitaciones en el aprendizaje y vincularlas con los objetivos específicos. Algunos grupos, como PRO, no aplican grandes modificaciones con respecto a sus propuestas previas, pero otros, como ECU, sí introducen varios cambios.

Todas las presentaciones se hacen en la misma sesión y, como en las presentaciones anteriores del análisis cognitivo, los comentarios de los formadores se centran en la precisión de los enunciados de objetivos y limitaciones y en el balance de competencias seleccionadas.

Con estas presentaciones se cierra el trabajo específico sobre análisis cognitivo en la asignatura. Dado que este es el análisis objeto de investigación por nuestra parte, a partir del capítulo 8 nos centraremos en describir, analizar e interpretar todas estas producciones en términos del aprendizaje de los grupos de futuros profesores. En el capítulo siguiente organizamos este estudio empírico.

6.3 Sesiones Sobre el Análisis de Instrucción

El análisis de instrucción se inicia en la sesión 45. En primer lugar, los formadores hicimos un breve balance de lo realizado hasta ese momento, para a continuación, presentar el marco general de este análisis destacando las tareas, su secuenciación y la organización de las sesiones de clase y la evaluación.

En esa misma sesión, presentamos un método de análisis de tareas según contenidos, sistemas de representación involucrados, situaciones y contextos, objetivos que desarrollan y competencias a las que contribuyen. Después de ejemplificar ese método de análisis con tareas centradas en los números naturales, los profesores en formación realizan ese análisis a partir de una propuesta de diez tareas también sobre los números naturales. Del debate posterior, que ocupó los minutos finales de esta sesión y la mayor parte de la sesión 46, surgen ideas importantes.

Una de ellas es que resulta razonable que una misma tarea active objetivos de diferentes focos de contenido. Por otro lado es importante que el conjunto de tareas de un tema cubra la totalidad de contenidos, representaciones y contextos considerados en la planificación previa. Asimismo, el análisis de expectativas brinda una lectura local de los objetivos específicos en los que el profesor se centra, así como una lectura global en términos de las competencias que más claramente promoverá en sus escolares. También supone un control para el profesor de las asignaciones entre objetivos y competencias que realizó en el análisis cognitivo.

Con este esquema de trabajo, organizado en torno a un ejemplo inicial de los formadores y una tarea en clase de todos los profesores en formación, en las sesiones siguientes avanzamos en otras dimensiones del análisis de instrucción. En la sesión 48 introdujimos los grados de complejidad de las tareas según el

marco del proyecto PISA y en la 49 mostramos y ejemplificamos algunos criterios de secuenciación de tareas. La sesión 50 se centró en el papel de la gestión del aula en el diseño de tareas y, con todos estos elementos, en las sesiones 51 y 52 los grupos de profesores en formación propusieron un diseño de una hora de clase sobre sus temas.

En estas presentaciones, los grupos enmarcan la sesión en el contexto de una unidad más amplia y describen las intenciones generales de la sesión. También detallan los contenidos a tratar y los objetivos específicos perseguidos. Finalmente, describen las tareas y cómo las secuencian.

En general, todos los grupos dan una respuesta satisfactoria, ya que pasan por todos los puntos especificados y, en conjunto, son coherentes en su propuesta con los análisis que cada grupo realizó previamente en la asignatura⁹⁷.

La segunda parte de la sesión 52 la dedicamos a presentar un guión de la unidad didáctica final y a introducir la última dimensión del análisis de instrucción: la evaluación. En la sesión 53 profundizamos en la descripción de diferentes criterios e instrumentos de evaluación, distinguiendo la evaluación sumativa de la formativa, los distintos agentes que intervienen en la evaluación escolar y algunos criterios de selección de tareas de evaluación. El resto de sesiones se centran ya en la unidad didáctica, por lo que los grupos de profesores en formación no elaboran una propuesta de evaluación previa a su planificación final. No obstante, hacen un trabajo que consiste en seleccionar tareas de una lista de once, para realizar una evaluación de cinco objetivos sobre los números naturales.

6.4 Sesiones de Presentación de las Unidades Didácticas

Después de presentar el guión básico de los contenidos de la unidad didáctica⁹⁸, en la sesión 54, los formadores presentamos brevemente algunos ejemplos de unidades didácticas de grupos de profesores en formación de años anteriores. Seleccionamos temas de los cuatro bloques básicos de contenido y en cada uno destacamos alguno de los cuatro análisis del análisis didáctico.

Las presentaciones finales de la unidad didáctica se realizan en un mismo día, tras el periodo de exámenes oficial. Cada grupo dispone de cuarenta y cinco minutos de tiempo para su exposición, más otros quince minutos de discusión con el resto de compañeros y con los formadores. Por esta razón, en la descripción de las sesiones de la Tabla 21, distinguimos cuatro sesiones para cada una de las cuatro presentaciones.

Por ilustrar las presentaciones realizadas, reproducimos a continuación algunas transparencias empleadas por varios grupos en su presentaciones (Figuras 23 a 28).

⁹⁷ En el Anexo L incluimos las propuestas de los cuatro grupos de futuros profesores.

⁹⁸ Puede consultarse en el Anexo C.

Los objetivos que presentamos son:

- ☞ Calcular **valores numéricos** de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico.
- ☞ Calcular **valores numéricos** de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico.
- ☞ Identificar **polinomios de grado 1** en una y dos incógnitas y justificar la respuesta.
- ☞ Afianzar las **operaciones básicas** con monomios y polinomios.
- ☞ Aplicar correctamente las **igualdades notables**
- ☞ Distinguir los **miembros de una ecuación** y conocer la **estructura de un sistema**.
- ☞ Determinar las ecuaciones que son de primer grado dada una lista de ellas y justificar la elección.
- ☞ Discutir si un valor dado es **solución** de una ecuación.
- ☞ Discutir si un par de valores es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas.
- ☞ Discutir si un par de valores es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Figura 23. Algunos de los objetivos específicos enunciados por el grupo ECU en su unidad didáctica

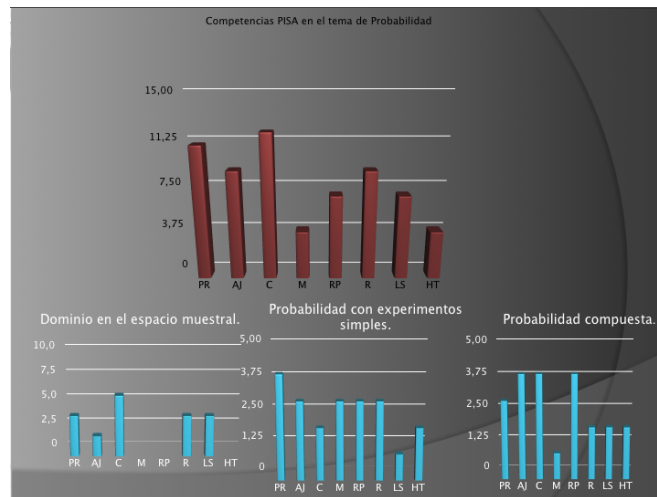


Figura 24. Balance de las competencias seleccionadas por el grupo PRO en su unidad didáctica

SESIÓN 2: PROPORCIONALIDAD DIRECTA

-Esta sesión tiene como objetivo recordar lo visto en el curso anterior en relación con la proporcionalidad directa.

Comenzaremos recordando los conceptos de razón y proporción, calcularemos el término desconocido de la misma y veremos el uso de la razón de proporcionalidad para obtener cantidades directamente proporcionales.

Para ello, plantearemos ejemplos sencillos para su fácil comprensión.

-Esta sesión se centra en el foco de las relaciones de proporcionalidad directa, cuyos objetivos principales son:

- Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad directa.
- Representación gráfica de una tabla de valores dada y saber interpretarla.
- Cálculo de la constante de proporcionalidad directa.
- Cálculo del cuarto término en una relación de proporcionalidad directa conocidos los otros tres.

A continuación se propondrán actividades para realizar en clase que contribuyan al desarrollo de estos objetivos.

Al finalizar la sesión se mandarán tareas para casa, como repaso de esta sesión.

Figura 25. Descripción global de la segunda sesión propuesta por el grupo RAZ en su unidad didáctica

Tarea voluntaria: Conejos en el laberinto.

En el siguiente laberinto está en juego la vida de un grupo de ratones que simularemos con fichas. Coloca una ficha-ratón en la entrada. Lanza una moneda y, según salga cara (C) o cruz (X), mueve la ficha siguiendo las flechas indicadas. Repite el proceso hasta que la ficha-ratón llegue ilesa al queso o sea devorado por el gato.

Contesta a las siguientes cuestiones:

- ¿Qué te parece más fácil: salvarte o ser devorado por el gato?
- ¿hay alguna casilla del laberinto en la que, si un ratón llega, ya se puede dar por muerto sin haber caído aún en la casilla del gato?
- ¿hay alguna casilla que no sea la del queso, en la que ya se sepa que el ratón se ha salvado?
- Esquematiza las opciones del ratón mediante un diagrama de árbol.
- Si colocas 16 ratones en la entrada ¿cuántos estimas que llegarán ilesos a comer queso? ¿Cuántos crees que serán comidos por el gato? ¿Y si colocas 80?

Figura 26. Ejemplo de tarea propuesta por el grupo PRO en su unidad didáctica

EXAMEN

6. Dado el siguiente rectángulo, responde si las afirmaciones son verdaderas o falsas justificando tu respuesta (las unidades están dadas en metros):

a) El área del rectángulo es mayor que 1.
b) El perímetro del rectángulo es menor que 4.

7. Un peregrino recorre en la primera semana $\frac{1}{6}$ del camino, en la segunda $\frac{1}{3}$ del camino, y en la tercera $\frac{2}{9}$ del camino. ¿Qué fracción del camino le queda por recorrer al principio de la cuarta semana?

Figura 27. Tareas de evaluación propuestas por el grupo FRA en su unidad didáctica

BALANCE DEL EXAMEN

Tarea	Objetivos	Competencias	Complejidad	Puntuación
1	6	C	Reproducción	1 punto
2	10,12,14	PR, AJ, C	Conexión	1 punto
3	1,6,17,18,19	RP	Conexión	1'5 puntos
4	11,14,17,18,20	LS	Reproducción	1'5 puntos
5	2	PR	Reproducción	1 punto
6	10,11,16,18	AJ, RP	Reflexión	1'5 puntos
7	11,14,16	PR, RP	Conexión	1 punto
8	1,3,4,7	PR, R	Reproducción	1'5 puntos

Figura 28. Análisis de las tareas de evaluación propuestas por el grupo FRA en su unidad didáctica

6.5 Evaluación de la asignatura

En la evaluación, pusimos en práctica los cinco criterios que enunciarnos cuando, en el cuarto apartado de este mismo capítulo, describimos la programación de la asignatura.

La asistencia fue regular en todos los profesores en formación, salvo en el caso de dos, que faltaron a varias sesiones. Su calificación final se vio algo mermada por esta razón.

En relación con los trabajos individuales, sólo llevamos a cabo dos evaluaciones individuales centradas en expectativas de aprendizaje⁹⁹. En la primera de ellas, en la sesión 11, los futuros profesores realizan un cuestionario sobre el significado de las expectativas de aprendizaje y la relación entre objetivos, competencias y tareas sobre los números naturales. Esta evaluación la realizan trece profesores en formación y cuatro de ellos no la superan. Los resultados, en general, no son muy satisfactorios ya que varios de los futuros profesores manifiestan dificultades para vincular esos dos niveles de expectativas con tareas. La segunda evaluación individual (sesión 38), pone de manifiesto una mejora considerable en el manejo de esas nociones. En este caso el tema considerado fue el Teorema de Pitágoras. Partiendo de un breve análisis de contenido del tema, con su ubicación en el currículo y con una propuesta de objetivos específicos, los futuros profesores debían hacer la asignación justificada entre objetivos y competencias. También debían reformular un objetivo para que tuviese sentido vincularlo con la competencias de modelización. De los diecisiete futuros profesores que la realizan, sólo tres de ellos no la superan. Del resto, diez obtienen una clasificación igual o superior a notable, con lo que se puso de manifiesto un notable control de la relación entre esos niveles de expectativas.

Los trabajos en grupo fueron muy numerosos en la asignatura y, de hecho, constituyen la mayor fuente de información para la calificación final. Todas las producciones de cualquiera de las componentes del análisis didáctico, contabilizan por igual para efectos de esa calificación. Pero dado que estas producciones constituyen el elemento principal de análisis del estudio empírico de nuestra investigación y que, además, las detallaremos en los capítulos 8 y 9, no entraremos aquí en describir resultados. De manera general podemos afirmar que las producciones muestran un tiempo y un esfuerzo en su elaboración y que, por lo tanto, son bien valoradas desde ese punto de vista.

Con respecto a las presentaciones y exposiciones individuales, queremos destacar la notable mejora que los futuros profesores, en general, experimentan a lo largo de la asignatura en su competencia comunicativa. Conforme avanza el curso, innovan en el contenido y la forma de sus presentaciones y, además, son capaces de sintetizar correctamente ideas y reflexiones que conducen sus intervenciones. Sin embargo, en lo que se refiere a las participaciones en discusiones en el aula, éstas no se producen de manera natural, en general, y sólo tienen lugar cuando expresamente lo indicamos los formadores.

⁹⁹ Los enunciados de ambas están incluidas en el Anexo C.

Finalmente, también destacamos las producciones finales de los cuatro grupos. Sus propuestas de unidades didácticas son elaboradas, complejas y coherentes, llegando a expresar un notable desarrollo de la competencia de planificación por parte de los grupos de profesores en formación.

Todos los grupos tuvieron información continua de su progreso en la asignatura y, en sus balances finales de la asignatura y en algunas tutorías, llegaron a valorar positivamente los contenidos, el propio desarrollo del curso y destacaron la importancia del trabajo en grupo. Señalaron también la conveniencia de este tipo de asignaturas en la titulación, si bien reconocieron lo complicado de su seguimiento y la gran cantidad de tiempo que les supone llevarla adelante. Nuestra experiencia formativa en años anteriores, constata este tipo de valoraciones.

Capítulo 6

DISEÑO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

El planteamiento de nuestra investigación contempla que la elaboración del marco teórico forma parte de sus resultados, es una de sus aportaciones. Así lo argumentamos en el capítulo 3, cuando elaboramos una respuesta para la primera de las preguntas que orientan esta investigación:

¿Cómo puede afrontar el profesor el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares acerca de un tema matemático específico?

La caracterización del análisis cognitivo, que presentamos en los capítulos 2 y 3, permite abordar el objetivo general de investigación que surge de esa pregunta: *conceptualizar el análisis cognitivo como procedimiento para la planificación sobre el aprendizaje escolar por parte del profesor de matemáticas en formación, en coherencia con el análisis didáctico.*

La segunda de nuestras preguntas de investigación, se centra el diseño y puesta en práctica de un programa de formación inicial:

¿Es posible diseñar e implementar el análisis cognitivo en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria desde una perspectiva funcional?

La descripción y reflexión realizada en el capítulo anterior ha mostrado un ejemplo de existencia de un programa de formación que pone de manifiesto la viabilidad de ese diseño e implementación, con lo que también hemos dado cumplimiento al segundo objetivo general de la investigación: *diseñar e implementar un programa de formación inicial que incorpore el análisis cognitivo desde una perspectiva funcional.*

Finalmente, la tercera pregunta de investigación se centra sobre un estudio empírico de los resultados de tal programa:

¿Cómo desarrollan su competencia de planificación para las matemáticas escolares los grupos de futuros profesores que cursan ese programa formativo?

Partiendo de esta pregunta, propusimos nuestro tercer objetivo general de investigación:

Identificar, describir y analizar el desarrollo de la competencia de planificación sobre aprendizaje escolar que muestran los participantes en el programa de formación inicial del curso 2008-2009.

Los dos objetivos específicos que enunciamos en el capítulo 1 en relación con este objetivo general son:

- 3.1 Identificar, describir y caracterizar el conocimiento y las capacidades que alcanzan los grupos de los futuros profesores acerca de las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje de los escolares, durante el programa de formación del curso 2008-2009.
- 3.2 Emplear la información anterior para establecer el nivel de desarrollo de la competencia de planificación de esos grupos de futuros profesores, en lo que al aprendizaje de las matemáticas escolares se refiere.

Para afrontar el logro del tercer objetivos general de nuestra investigación, nos aproximamos a una metodología observacional de tipo confirmatoria, en la que, partiendo de nuestras hipótesis, debemos concretar el contexto educativo en el que nos situamos, definir los informantes, los instrumentos de recogida de información y la propuesta de análisis de esa información (Evertson y Green, 1989). A esos aspectos dedicamos los diferentes apartados de este capítulo.

1. ALGUNAS CONCRECIONES METODOLÓGICAS

En este apartado abordamos la descripción del contexto, la orientación y los sujetos, futuros profesores en un programa de formación inicial, que serán los informantes en nuestro estudio empírico. También acotaremos las fuentes de información que emplearemos en el mismo.

1.1 Contexto e informantes

Cuando citamos los antecedentes de nuestra investigación en el capítulo 1, destacamos que este trabajo da continuidad y aporta avances a las investigaciones que, dentro del Grupo FQM193, se vienen realizando en los últimos años sobre formación inicial de profesores. Una de esas investigaciones, la de Gómez (2007), se llevó a cabo desde una aproximación *naturalista*, es decir, que los sujetos de la investigación son los grupos de participantes constituidos en el programa de formación y que, adicionalmente, la información empleada en la investigación es la que surge de manera natural en el contexto de la implementación de un programa de formación¹⁰⁰. Esa es también nuestra aproximación.

En el capítulo anterior hemos descrito la organización de los diecinueve profesores en formación (trece mujeres y seis hombres), que cursan la asignatura en el curso académico 2008-2009 y su distribución en cuatro grupos de trabajo. Esos grupos de estudiantes son nuestros sujetos de investigación. El criterio de

¹⁰⁰ Pedro Gómez concreta esta aproximación naturalista a partir de la propuesta de Erlandson, Harris, Skipper y Allen (1993).

selección ha sido intencional por razón de disponibilidad, debido a su participación voluntaria en la asignatura. En la Tabla 26 recordamos el número de estudiantes de cada uno de los grupos de profesores en formación y los temas de trabajo seleccionados.

Tabla 26
Organización de estudiantes por grupos y temas de trabajo en la asignatura

Temas de trabajo	Estudiantes
Ecuación de primer grado	5
Fracciones	5
Introducción a la probabilidad	5
Razón y proporción aritméticas	4

Los diecinueve participantes están cursando la Licenciatura de Matemáticas cuando formalizan su matrícula y, de ellos, tres están en la Universidad de Granada como estudiantes en un programa de intercambio con la Universidad de Valencia. Siete de ellos han cursado en años anteriores una asignatura denominada “Materiales y recursos en la enseñanza de las matemáticas” y una estudiante está cursando, al mismo tiempo, la asignatura “Laboratorio de Matemáticas”. Ambas materias están relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas¹⁰¹.

Dado que la investigación la hemos llevado a cabo en el contexto de la propia asignatura y que la mayor parte del tiempo los futuros profesores trabajan en grupos de cuatro o cinco personas, es por lo que hemos optado por estudiar el aprendizaje de los grupos de profesores. No obstante, en el análisis de las sesiones iniciales de la asignatura (capítulo 7), hablamos de aprendizaje individual de los futuros profesores, ya que aún no se habían formado los grupos de trabajo. Con esta salvedad, se puede considerar la parte empírica de nuestra investigación como un estudio de caso basado en un grupo natural pero organizado, a su vez, en pequeños grupos de trabajo. Partiendo de la reflexión de Gómez (2007, p. 142), caracterizamos este aprendizaje de los grupos de futuros profesores como un fenómeno social, que forma parte de la experiencia de participar activamente en situaciones prácticas.

En el contexto de nuestra investigación, esas actividades prácticas son las producciones, intervenciones y debates que tienen lugar durante del desarrollo de la asignatura y que constituyen nuestra fuente de información para la investigación.

¹⁰¹ Asignaturas de libre configuración específica, vinculadas a la Facultad de Ciencias de la Universidad de Granada. Desde su creación, los responsables de ambas materias han sido Pablo Flores y, quien suscribe, Jose Luis Lupiáñez.

1.2 Información Obtenida del Desarrollo de la Asignatura

En el primer apartado de este capítulo hemos evocado nuestro trabajo relativo a caracterizar el análisis cognitivo como un procedimiento para que el profesor planifique el aprendizaje de sus escolares en el marco del análisis didáctico. También hemos recordado que ha sido posible diseñar un programa de formación inicial de profesores con inclusión del análisis cognitivo y que, además, contribuye al desarrollo de la competencia de planificación en los profesores que lo cursan. En el capítulo anterior hemos descrito como en el curso académico 2008-2009 diseñamos y pusimos en práctica ese programa de formación en el contexto de la asignatura *Didáctica de la Matemática*.

Para afrontar el tercero de los objetivos generales de nuestra investigación, nos centramos en el aprendizaje que muestran los grupos de profesores en formación que cursan esa asignatura. Las fuentes de información que emplearemos, por lo tanto, son las que surgen con motivo del desarrollo de la asignatura: producciones, actividades e intervenciones de los grupos de profesores en formación, actuaciones e intervenciones de los formadores y debates y discusiones entre ambos.

En relación con las producciones de los grupos de futuros profesores, podemos distinguir tareas realizadas o cuestionarios satisfechos por ellos en alguna de las sesiones, las presentaciones en clase sobre algún organizador del currículo y la elaboración y presentación de la unidad didáctica final. Así, por ejemplo, en la sesión 2 los profesores en formación realizan la tarea de relacionar los objetivos generales del currículo con unas lecciones de libros de texto; en la sesión 4 responden a un cuestionario sobre expectativas de aprendizaje acerca de los números naturales y en las últimas sesiones de la asignatura cada grupo presenta su unidad didáctica final. Por lo general, los cuestionarios los realizan individualmente, mientras que las tareas pueden hacerse individual o colectivamente. Por el contrario, las presentaciones siempre se refieren al trabajo de cada uno de los cuatro grupos, si bien en la propia presentación no han de participar todos sus integrantes. En la sesión 19, por ejemplo, varios grupos presentan sus trabajos sobre sistemas de representación en cada uno de sus temas.

Las producciones de los grupos constituyen nuestra fuente de información y, por tanto, nuestro campo principal de análisis en la parte empírica de la investigación. Al analizar e interpretar esas producciones nos proponemos estudiar el conocimiento de los grupos de futuros profesores sobre análisis cognitivo y establecer el desarrollo de su competencia de planificación para el diseño de unidades didácticas. Desde ahora en adelante, en esta memoria nos referimos a esas producciones usando unos códigos que definiremos más adelante.

Las intervenciones de los futuros profesores se producen en debates que se generan normalmente con motivo de sus presentaciones y de los comentarios recibidos a las mismas. Los resultados del cuestionario de los números naturales, por ejemplo, dieron lugar a un debate en la sesión 5. También surgen discusiones cuando los formadores abrimos un turno de intervenciones sobre algún tema. Un

ejemplo de estas intervenciones se produce en la sesión 29, cuando los formadores pedimos a los futuros profesores que reflexionen sobre la validez de las teorías sociales del aprendizaje en el caso de las matemáticas escolares.

En el caso de los formadores, en algunas ocasiones realizamos presentaciones en clase, como en la sesión 24 en la que Luis Rico expone el papel de la historia para suministrar información sobre los temas de las matemáticas escolares. Pero también intervenimos con motivo de las dudas de los grupos de profesores, de sus respuestas y, sobre todo, con motivo de sus presentaciones en clase. En la sesión 25, por ejemplo, realizamos varias puntualizaciones y comentarios a los trabajos de los grupos sobre el análisis fenomenológico de sus temas.

En las tutorías también se producen intervenciones de los futuros profesores y de los formadores con motivo de preguntas, cuestiones y valoraciones acerca del trabajo realizado.

El audio de todas las sesiones se grabó digitalmente y hemos elaborado un registro organizado de todos esos archivos. Aquellas que se refieren a las sesiones centradas en el análisis cognitivo, se transcribieron y las hemos reunido en el Anexo J y también las hemos organizado en la base de datos que describimos en el capítulo anterior (§5.5.3). Como veremos en capítulos posteriores, su análisis ha sido importante para afrontar el estudio empírico de nuestra investigación, pues nos permite encontrar explicaciones y justificaciones a algunos de los resultados de las producciones, además de facilitar una interpretación relativa al conocimiento de los grupos sobre cada uno de los organizadores del análisis cognitivo.

Cuando en los capítulos siguientes nos refiramos a una parte de esas transcripciones, usaremos para citarla una referencia representada del siguiente modo: [nombre del archivo, contador de tiempo]. Así, por ejemplo, con la notación [090108S46, 2'06''], estamos citando la transcripción del día ocho de enero de 2009, donde tuvo lugar la sesión 46 e indicamos que nos interesa el pasaje que se inicia en el minuto dos y seis segundos de la grabación. Para el caso de las tutorías, las referencias son similares. La referencia [090121RAZ_TUT, 3'10''] indica que nos referimos a la tutoría que realizamos el día 21 de enero de 2009 con el grupo RAZ y que, además, nos centramos en el pasaje que se inicia en el minuto tres y diez segundos de la grabación.

2. PRODUCCIONES DE LOS GRUPOS DE PROFESORES

Cuando en el quinto apartado del capítulo anterior describimos el desarrollo de la asignatura en el curso 2008-2009, describimos cronológicamente las diferentes producciones de los grupos de futuros profesores. De aquí en adelante nos centramos en la parte de la asignatura que se relaciona con el análisis cognitivo. Por esta razón, detallamos con más profundidad las producciones que se centran en esa parte del análisis didáctico.

La Tabla 27 recoge esas producciones. Para cada una de ellas, indicamos las sesiones en las que tuvieron lugar y el tipo de producción que son, distinguiendo entre cuestionarios (C), tareas realizadas en clase (T) o presentaciones de trabajos (P).

Tabla 27

Producciones relacionadas con el análisis cognitivo en la asignatura “Didáctica de la Matemática” en el curso 2008-2009

Sesión	Producción	Tipo
2	Objetivos generales del currículo y libros de texto	T
4 y 7	Componentes de las expectativas de aprendizaje en los objetivos generales del currículo	T
4, 5, 6 y 7	Cuestionario sobre expectativas de aprendizaje para el tema de los números naturales	C
11	Cuestionario sobre expectativas de aprendizaje	C
20	Enunciado de objetivos específicos relacionados con sistemas de representación y ejemplos de tareas vinculados	T
26	Cuestionario sobre aprendizaje de las matemáticas	C
30	Enunciado de objetivos específicos de los temas	T
31-32	Primer y segundo enunciado de objetivos específicos	P
33	Asignación objetivos-competencias en el tema de los números naturales	T
34	Asignación entre objetivos y competencias	T
35-36	Asignación entre objetivos y competencias	P
38	Evaluación sobre expectativas de aprendizaje (relacionadas con el Teorema de Pitágoras)	C
44	Enunciado de limitaciones en el aprendizaje	P
47	Balance del análisis cognitivo y revisión del balance	P
55-58	Unidades didácticas	P

Para el análisis y seguimiento sistemático del conocimiento de los grupos de profesores no usaremos todas las producciones de manera sistemática y exhaustiva. Algunas de ellas sólo brindan una información puntual relativa a un momento muy concreto de la asignatura, que no permite extraer datos precisos del aprendizaje de los grupos de profesores en formación. Sin embargo, constatamos que todas ellas tienen un valor importante en ese proceso de aprendizaje y en el propio desarrollo de la asignatura.

El esquema metodológico que seguiremos para analizar estas producciones, se sustenta en el propuesto por Gómez (2007, p. 241). Siempre partimos de una fase previa en la que, partiendo del constructo teórico del análisis cognitivo,

identificamos los atributos más representativos de las producciones de los grupos. A continuación, definimos unas variables de análisis que se surgen de esos atributos y comprobamos si siguen o no patrones estables en el tiempo. Partiendo de esas variables, identificamos etapas en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores y, finalmente, describimos el desarrollo de su conocimiento didáctico y de su competencia de planificación partiendo de esas etapas de aprendizaje.

La identificación de atributos, fundamentada en la caracterización del análisis cognitivo y en las producciones de los grupos, dio lugar al listado de capacidades relacionadas con el análisis cognitivo que detallamos en el capítulo 4 (§4.4).

La selección final de variables ha sido un proceso dilatado en nuestra investigación, por la necesidad de comprobar su estabilidad a lo largo del tiempo y, de hecho, en ese proceso de selección descartamos cierto número de ellas. La variables de análisis dependen del tipo de producciones y por eso nos interesa distinguir dos grupos de producciones que han delimitado análisis diferentes.

En primer lugar, analizamos las producciones de las tareas que tienen lugar en las sesiones iniciales del curso (entre las sesiones 2 y 7). En segundo lugar, nos ocupamos de las producciones directamente relacionadas con los tres organizadores del currículo del análisis cognitivo (a partir de la sesión 31). Detallamos esos dos grupos de producciones a continuación.

A partir del capítulo 7, describiremos la aplicación de esas variables, los resultados obtenidos y su interpretación en términos del aprendizaje de los grupos de profesores en formación.

2.1 Diferentes Niveles de Expectativas en el Currículo

Durante las primeras sesiones de clase, los futuros profesores realizan diferentes tareas sobre tres niveles de expectativas de aprendizaje que recoge el currículo: objetivos específicos a los diferentes temas matemáticos, objetivos generales de área y competencias. En algunas de esas actividades, los futuros profesores relacionan los objetivos generales del currículo en unas propuestas didácticas concretas presentadas en libros de texto. También exploran las relaciones entre diferentes niveles de expectativas de aprendizaje de los escolares y el análisis del contenido matemático de los números naturales. Analizamos todas esas producciones en el capítulo 7.

Dado que durante esas sesiones aún no se habían conformado los grupos de trabajo, el análisis y la interpretación de esas actividades lo enfocamos como aprendizaje de los futuros profesores en formación y no de los grupos. Esto supone una diferencia básica entre estas producciones y las que se centran propiamente en el análisis cognitivo. Además, es importante contextualizar las conclusiones obtenidas en trabajo de las primeras sesiones de la asignatura, en donde los profesores en formación aún no se habían introducido en el análisis didáctico y sus herramientas; tampoco habían llegado a discutir en pequeños grupos de manera constante y con una intencionalidad bien definida.

2.2 Producciones Sobre los Organizadores del Análisis Cognitivo

La Tabla 28 recoge las diferentes producciones que cada grupo ha realizado en el curso académico 2008-2009, en relación con cada uno de los tres organizadores del análisis cognitivo y en el contexto del análisis didáctico: expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje. Las marcas en las celdas indican si un grupo las entregó o no.

Tabla 28

Producciones sobre los tres organizadores del análisis cognitivo de los grupos de futuros profesores

ECU	FRA	PRO	RAZ
1 ^{er} Enunciado de objetivos específicos (P ₁)			
✓	✓	✓	✓
2 ^o Enunciado de objetivos específicos (P ₂)			
✓		✓	✓
Asignación entre objetivos y competencias (P ₃)			
✓	✓	✓	✓
Enunciado de limitaciones en el aprendizaje (P ₄)			
✓	✓	✓	✓
Balance del análisis cognitivo (P ₅)			
✓	✓	✓	✓
Revisión del balance del análisis cognitivo (P ₆)			
			✓
Unidad didáctica (UD)			
✓	✓	✓	✓

La producción P₁, constituye el primer acercamiento de los grupos a la delimitación de prioridades de aprendizaje y el posterior enunciado de objetivos específicos sobre sus temas de trabajo. Su presentación se llevó a cabo entre las sesiones 31 y 32. Los debates posteriores a esas presentaciones, hacen que varios grupos reformulen su propuesta y que la entreguen a los formadores para su revisión. Ese nuevo listado organizado de objetivos específicos constituye P₂, que no se presentó en clase.

En P₃, los grupos, además de revisar sus prioridades y sus enunciados, se centran en vincular esos enunciados de objetivos con cada una de las ocho competencias matemáticas PISA. Los grupos presentan esta producción en las sesiones 35 y 36.

En la sesión 39 los formadores introducimos la reflexión sobre limitaciones en el aprendizaje y, en la sesión 44, los grupos presentan su primer acercamiento al enunciado de limitaciones en sus temas y su vínculo con los objetivos específicos. Esa es la producción P₄. Esa producción, junto a las de expectativas,

se revisan con motivo de la realización de un balance de todo el trabajo realizado en el análisis cognitivo hasta la fecha. Esa es la producción que hemos denominado P₅ y que se presentó en clase en la sesión 47. Antes de entrar de lleno en el trabajo con el análisis de instrucción (tercera componente del análisis didáctico), propusimos a los grupos que revisaran sus propuestas de P₅ y que, si querían, las revisaríamos. Esa revisión la hemos denominado P₆ y sólo la entregó un grupo.

Finalmente, entre las sesiones 55 y 58, los grupos entregan y presentan sus programaciones de unidades didácticas. Estas sesiones se realizan al inicio del segundo cuatrimestre del curso, tal y como hemos descrito en el capítulo anterior. En ellas vuelven a proponer un listado de objetivos, organizado en prioridades y vinculado con las competencias y un nuevo listado de limitaciones relacionadas con los objetivos. Entre otros aspectos, también ejemplifican tareas relacionadas con algunos de esos objetivos y con algunas de esas limitaciones y proponen tareas específicas de evaluación. Estas producciones las hemos denominado UD.

Por lo tanto, en relación con expectativas de aprendizaje, están las producciones P₁, P₂, P₃, P₅, P₆ y UD. En el contexto de la asignatura, de todas ellas fueron obligatorias P₁, P₃, P₅ y UD. En relación con las limitaciones en el aprendizaje, situamos las producciones P₄, P₅, P₆ y UD de las que todas, salvo P₆, fueron obligatorias. Finalmente, sobre oportunidades de aprendizaje consideramos únicamente la producción UD que, obviamente, han de entregar todos los grupos¹⁰².

Si algún grupo no presentó alguna de las producciones, entendemos que la propuesta inmediatamente anterior sigue siendo válida para el grupo y, por lo tanto, para nuestro análisis. La Tabla 28 tampoco señala si entre una producción y otra, aunque existan por separado, hay diferencias en todos sus aspectos. Por ejemplo, en el caso del grupo PRO, la producción P₂ la entregan al mismo tiempo que la P₃ con lo que, por ejemplo, el enunciado de objetivos específicos es el mismo.

Para el estudio y el análisis de estas producciones, interesa también considerar la transición entre ellas, de manera que definiremos una secuencia de cambios ente diferentes producciones, que no siempre son consecutivas. La Tabla 29 recoge la identificación de tales cambios entre producciones.

Tabla 29
Identificación de los momentos de cambio entre las producciones sobre el análisis cognitivo

Código	Cambio entre producciones
C ₁	Cambio entre P ₁ y P ₂

¹⁰² Durante el desarrollo del análisis de instrucción, los grupos de profesores en formación también realizan producciones relacionadas con el diseño y selección de tareas, pero en relación a varios criterios y no sólo aquellos relativos a otras dimensiones del análisis cognitivo. Por esta razón, el análisis de las oportunidades de análisis la centramos en diferentes secciones de la unidad didáctica (capítulo 10).

Tabla 29
Identificación de los momentos de cambio entre las producciones sobre el análisis cognitivo

Código	Cambio entre producciones
C ₂	Cambio entre P ₂ y P ₃
C ₃	Cambio entre P ₃ y P ₅
C ₄	Cambio entre P ₄ y P ₅
C ₅	Cambio entre P ₅ y P ₆
C ₆	Cambio entre P ₆ y UD

En la Figura 29 relacionamos las diferentes producciones con los correspondientes cambios o transiciones entre ellas.

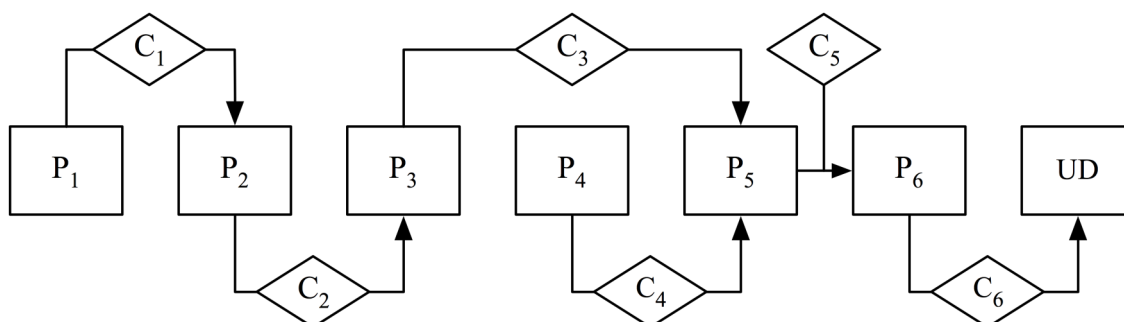


Figura 29. Producciones y cambios entre producciones relacionadas con el análisis cognitivo

Estas producciones y los momentos de cambio entre ellas brindan información del proceso de aprendizaje seguido por los grupos de futuros profesores. Su análisis mostrará los cambios detectados en relación con los conocimientos y capacidades manejados en el enunciado de expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, respecto a los errores y dificultades que pueden limitar ese aprendizaje y sobre la oportunidades que se pueden brindar para favorecerlo. Esta evolución en el aprendizaje de los profesores, con las mejoras que se van produciendo en cada caso, son el objeto de estudio de los capítulos que siguen.

3. ORGANIZACIÓN DEL ANÁLISIS DE LAS PRODUCCIONES

Coincidimos con Gómez (2007, p. 236), al considerar que el estudio empírico de nuestra investigación pretende afectar lo menos posible al desarrollo natural de la asignatura. La selección de los sujetos de investigación y de las fuentes de información siempre han ido en esa dirección y, por dar continuidad a esta posición, organizamos este estudio empírico, respetando la secuencia de trabajo desarrollada en el trabajo con los profesores en formación durante la propia asignatura. Por lo tanto, nuestras fuentes de información primaria son las

producciones de los grupos de futuros profesores en relación con el análisis cognitivo.

Vamos a identificar regularidades y singularidades en el proceso de aprendizaje de los grupos, mediante diferentes variables que describen y analizan sus producciones y detectan los cambios entre ellas. Estas variables proceden tanto de la caracterización y la ejemplificación del análisis cognitivo mostrada en los capítulos 2 y 3, como de la descripción de conocimientos y capacidades vinculados a la puesta en práctica del análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares (§4.4). Con motivo de los resultados obtenidos, los organizamos según distintos criterios que permiten describir y explicar el desarrollo de esos conocimientos y capacidades en los grupo de futuros profesores. Este balance final lo realizamos en el capítulo undécimo.

El primer análisis que describimos es el de las diferentes tareas realizadas por los futuros profesores en las sesiones iniciales del curso y lo abordamos en el capítulo séptimo. Ese capítulo lo hemos organizado de acuerdo a cada una de esas tareas: primero las analizamos individualmente y, después, interpretamos conjuntamente sus resultados en términos del aprendizaje de los futuros profesores sobre diferentes niveles de expectativas en el currículo. En este capítulo no nos centramos en el aprendizaje de los grupos, ya que en esas sesiones iniciales no se habían conformado. No obstante, los resultados nos permiten valorar, al menos parcialmente, el desarrollo de los siguientes conocimientos y capacidades en los grupos de futuros profesores (§4.4):

1. Describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo.
 2. Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico.
10. Ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos.

En el capítulo octavo describimos el análisis y la interpretación de las producciones del análisis cognitivo que se centran en expectativas de aprendizaje. Es decir, nos centramos en las producciones P_1 , P_2 , P_3 , P_5 , P_6 y UD y, por lo tanto, en los momentos de cambio C_1 , C_2 , C_3 , C_5 y C_6 . En esta parte del estudio, caracterizamos una serie de variables que empleamos para describir el aprendizaje de los grupos de futuros profesores acerca de este organizador del análisis cognitivo. Las etapas y estados con los que describimos el aprendizaje de los grupos de profesores en formación surgen inductivamente al interpretar los resultados de las producciones de los grupos en términos de estabilidad y cambio. A partir de estas ideas centrales tiene lugar un estudio detallado sobre el conocimiento alcanzado por los grupos de profesores en relación con las expectativas de aprendizaje matemático escolar y las fases de progreso en su consecución.

Los conocimientos y capacidades que en este caso exploramos son:

1. Describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo.
2. Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico.

3. Conocer la noción de competencia y su clasificación (en el marco de PISA).
7. Seleccionar las principales prioridades de aprendizaje o focos de contenido de un tema de las matemáticas escolares.
8. Enunciar objetivos específicos y organizarlos según prioridades o focos.
9. Describir y justificar la contribución de objetivos a competencias.
11. Analizar el desarrollo esperado de competencias y revisar el proceso.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Un estudio equivalente al anterior, pero en el caso de las limitaciones del aprendizaje, lo detallamos en el noveno capítulo. En esta ocasión, las producciones analizadas son P_4 , P_5 , P_6 y UD y los momentos de cambio C_4 , C_5 y C_6 . También en este caso, delimitamos una serie de variables específicas mediante las cuales describir el aprendizaje de los grupos de profesores en formación en términos de etapas y momentos, inductivamente generados sobre la base de los cambios e invariantes detectados. Estas herramientas permiten concluir, al menos parcialmente, el logro de los siguientes conocimientos y capacidades:

4. Delimitar y distinguir las nociones de error y dificultad y la relación entre ambas.
5. Reconocer y expresar el papel del error en la educación matemática.
6. Conocer y ejemplificar errores y dificultades según diferentes clasificaciones
12. Enunciar errores y dificultades según diferentes fuentes (incluyendo referentes teóricos).
13. Vincular posibles errores y dificultades con el desarrollo de determinados objetivos específicos.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

El análisis de la tercera y última dimensión del análisis cognitivo lo abordamos en el capítulo décimo. En primer lugar describimos las partes de las unidades didácticas en las que centramos nuestra reflexión sobre oportunidades de aprendizaje y, a partir de ahí, el proceso mantiene unas pautas similares a las de los capítulo octavo y noveno. Los conocimientos y capacidades que podemos estudiar en este caso son:

10. Ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos.
14. Ejemplificar tareas para detectar y corregir errores y dificultades.
15. Usar la descripción de objetivos específicos y competencias para diseñar y seleccionar tareas.
16. Aplicar la selección de errores y dificultades en el diseño y selección de tareas.

17. Emplear la información del análisis cognitivo para la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.
18. Aplicar el enunciado de los objetivos y la selección de competencias en el diseño de las tareas de evaluación.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Finalmente, en el capítulo undécimo elaboramos las conclusiones finales de la investigación, elaborando una reflexión acerca de la consecución de los tres objetivos de investigación que hemos considerado. También llevamos a cabo un balance estratégico del plan de formación evaluado a partir de los resultados obtenidos.

En resumen, aunque los tres organizadores del currículo para el análisis cognitivo tienen un fuerte hilo conductor que los relaciona, son diferentes tanto en su fundamento como en sus aplicaciones. Por ello, para el estudio de las producciones relativas a cada uno, definimos variables e indicadores singulares que permitan, en cada caso, registrar los momentos de cambio y de estabilidad en la integración progresiva de nuevos conocimientos, desempeño de habilidades y logro de capacidades específicas. No es trivial que las diversas producciones del correspondiente organizador sean de tipo y naturaleza diferentes y, además, se fundamenten en aspectos teóricos distintos. Esto tiene su reflejo en los estudios que se realizan en los capítulos octavo, noveno y décimo, respectivamente.

TRABAJO DE CAMPO: SESIONES INICIALES

Como ya describimos en el capítulo 5, las primeras sesiones de la asignatura en el curso 2008-2009 se dedican, fundamentalmente, a trabajar sobre tres niveles distintos de expectativas de aprendizaje: objetivos específicos a los diferentes temas matemáticos, objetivos generales de área que establece el currículo de Educación secundaria, y competencias, como expectativas de aprendizaje a largo plazo a las que también se refiere el currículo.

Durante esas sesiones de clase, que son parte de nuestro trabajo de campo, llevamos a cabo distintas tareas y un cuestionario encaminados a que los futuros profesores conozcan, manejen y relacionen esos tres niveles de expectativas. Estas sesiones suponen el primer acercamiento de los profesores en formación al primero de los organizadores del análisis cognitivo¹⁰³.

En este capítulo nos centramos en el trabajo de los profesores en formación durante el inicio de la asignatura¹⁰⁴. Para ello, comenzamos describiendo el contenido, la organización y el desarrollo de las diferentes sesiones. A continuación presentamos y analizamos los resultados de las diferentes tareas agrupadas en dos bloques, para después centrarnos en el cuestionario sobre expectativas de aprendizaje relativas al tema de los números naturales. Finalmente, interpretamos esos resultados en términos de los conocimientos y habilidades logrados por los profesores en formación acerca de los diferentes niveles de expectativas de aprendizaje que considera el currículo de Educación Secundaria, como expresión de su aprendizaje .

¹⁰³ Toda la documentación empleada por los formadores en estas sesiones iniciales las hemos incluido en el Anexo B.

¹⁰⁴ De hecho, es el único análisis de esta investigación en el que describiremos el aprendizaje individual de los profesores en formación. Hasta la sexta sesión, no se conforman los grupos de trabajo que ya trabajan conjuntamente el resto de la asignatura. En cualquier caso, todos los datos obtenidos en las diferentes tareas se presentan en clase con idea de compartir reflexiones y resultados. En el resto de capítulos, siempre nos ocupamos del aprendizaje de los grupos de futuros profesores.

1. DESARROLLO DE LAS SESIONES INICIALES

Después de la sesión inicial de presentación de la asignatura, en la sesión 2 presentamos brevemente la Orden ECI 2220/2007 (MEC, 2007b) en el área de matemáticas. En esa presentación dedicamos más tiempo a la parte en la que se presentan los objetivos generales del área, que son los siguientes:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos como en los distintos ámbitos de la actividad humana.

2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.

3. Cuantificar aquellos aspectos de la realidad que permitan interpretarla mejor: utilizar técnicas de recogida de la información y procedimientos de medida, realizar el análisis de los datos mediante el uso de distintas clases de números y la selección de los cálculos apropiados a cada situación.

4. Identificar los elementos matemáticos (datos estadísticos, geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes en los medios de comunicación, Internet, publicidad u otras fuentes de información, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes.

5. Identificar las formas y relaciones espaciales que se presentan en la vida cotidiana, analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.

6. Utilizar de forma adecuada los distintos medios tecnológicos (calculadoras, ordenadores, etc.) tanto para realizar cálculos como para buscar, tratar y representar informaciones de índole diversa y también como ayuda en el aprendizaje.

7. Actuar ante los problemas que se plantean en la vida cotidiana de acuerdo con modos propios de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la precisión en el lenguaje, la flexibilidad para modificar el punto de vista o la perseverancia en la búsqueda de soluciones.

8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.

9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.

10. *Integrar los conocimientos matemáticos en el conjunto de saberes que se van adquiriendo desde las distintas áreas de modo que puedan emplearse de forma creativa, analítica y crítica.*

11. *Valorar las matemáticas como parte integrante de nuestra cultura, tanto desde un punto de vista histórico como desde la perspectiva de su papel en la sociedad actual y aplicar las competencias matemáticas adquiridas para analizar y valorar fenómenos sociales como la diversidad cultural, el respeto al medio ambiente, la salud, el consumo, la igualdad de género o la convivencia pacífica (p. 31791).*

A continuación, iniciamos la primera tarea de análisis y comparación de tres propuestas de lecciones sobre funciones, en diferentes libros de texto y en relación al aprendizaje que pudiesen perseguir sus autores. Dividimos a los dieciocho asistentes a esa sesión, en tres grupos y, aunque cada uno de los futuros profesores recibió copia de las tres lecciones, cada grupo se encargó de analizar una propuesta.

La tarea consistió en señalar qué textos van en la línea o favorecen algunos de los objetivos generales anteriores. Los profesores en formación trabajan en clase durante, aproximadamente, diez minutos. En ese tiempo conversan entre ellos compartiendo información y después, tenemos más de veinte minutos de puesta en común.

Al acabar la sesión, dejamos planteada la segunda tarea para realizar fuera de la sesión de clase. En este caso, cada uno de los futuros profesores debía enunciar un objetivo específico relacionado con una actividad o sección del texto y, además, vincularlo con algunos de los once objetivos generales de área.

La tercera sesión la iniciamos con una intervención de los formadores en la que hicimos un pequeño balance de lo realizado hasta el momento. Después, dejamos unos cinco minutos para que los dieciséis asistentes organizaran y compartieran su propuesta y a continuación, enuncian sus objetivos específicos que fuimos anotando en la pizarra. Durante esas intervenciones se generó un prolongado debate de casi treinta minutos.

En la última parte de la sesión, los formadores iniciamos una presentación más detallada del documento de la Orden ECI 2220/2007 que continúa en el primer tercio de la cuarta sesión. En esa presentación caracterizamos y ejemplificamos las tres componentes de las expectativas de aprendizaje (capacidad, contenido y situación¹⁰⁵) y, además, propusimos la siguiente tarea. En ella, cada futuro profesor tenía que, individualmente, describir esas tres componentes en cada uno de los once objetivos generales de área. Esa tarea, que es una de las que

¹⁰⁵ Al analizar objetivos generales, la tercera componente de ese tipo de expectativa de aprendizaje la centramos en la situación en la que se enmarca el objetivo. No obstante, cuando más adelante presentamos en clase las propuestas de los futuros profesores sobre objetivos específicos, mantuvimos esa estructura porque no habíamos profundizado aún en la noción de contexto. En el capítulo 8, al analizar las producciones de los grupos sobre objetivos específicos, esa tercera componente la situamos en el contexto (en el sentido de uso o significado) del contenido tratado.

analizaremos más adelante, no se realizó durante las sesiones y, como también veremos, no todos los futuros profesores la entregan.

Después, en esa misma cuarta sesión, comenzamos el cuestionario con cuatro preguntas sobre expectativas de aprendizaje acerca de los números naturales. Comenzamos planteando las dos primeras preguntas del mismo a partir de la importancia del papel del profesor en el enunciado de los objetivos específicos a los temas de las matemáticas escolares [081002S04a, 28'46'']:

Como dice Luis, toda esta información (la normativa curricular), al profesor le viene dada, pero el trabajo con objetivos específicos lo tiene que manejar cada uno. A veces están en los libros de texto pero, lo dice Luis e insisto, la reflexión del profesor es importante porque un libro de texto no es más que la opción de una persona o de un colectivo. Vamos a hacer una actividad introductoria en la que vosotros vais a pensar sobre objetivos específicos de un tema concreto. (...) Vamos a tratar de ver cómo podemos organizar una discusión sobre objetivos específicos, en el tema de los números naturales.

En ese momento iniciamos el cuestionario y los futuros profesores trabajan el resto de la sesión sobre las dos primeras preguntas que se centran en describir conceptos y procedimientos relacionados con los naturales y proponer tareas para evaluar el dominio de esos conceptos y procedimientos. Al acabar, les proponemos que trabajen en casa la tercera, sobre análisis de tareas propuestas por los formadores.

Al inicio de la sesión 5, los formadores presentamos el volcado de los datos de las dos primeras preguntas y generamos un pequeño debate sobre los resultados. Después dejamos cinco minutos para que los profesores en formación organicen sus respuestas a la tercera pregunta del cuestionario y después, expongan sus resultados individualmente. Eso ocupó el resto de la sesión.

Partiendo de las respuestas de los futuros profesores a las tres primeras preguntas del cuestionario, en la sexta sesión los formadores conducimos una presentación hacia los cuatro tipos de situaciones PISA y a las ocho competencias matemáticas PISA¹⁰⁶. En esa sesión se conforman los cuatro grupos de trabajo.

En la séptima sesión realizamos la última pregunta del cuestionario, centrada en objetivos específicos sobre los números naturales. Después, los formadores presentamos nuestro propio análisis de los objetivos generales de área del currículo en términos de capacidades, contenidos y situaciones.

Después, hacemos una síntesis de los diferentes niveles de expectativas que hemos analizado hasta ahora según su complejidad y generalidad: objetivos operativos, objetivos específicos a los temas, objetivos generales de área y competencias. Señalamos que en la asignatura nos centraremos en el segundo y en el cuarto nivel.

¹⁰⁶ Descritas y ejemplificadas, respectivamente, en los capítulos 2 y 3.

En las sesiones 8 y 9 hacemos una descripción general del proyecto PISA, con la presentación detallada de las ocho competencias matemáticas. También ejemplificamos esas competencias con ítems de la evaluación PISA 2003 (Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo, 2005) y relacionamos el significado de esas competencias con el que propone la legislación curricular (MEC, 2007b).

En la sesión 10, los cuatro grupos exponen verbalmente enunciados de objetivos específicos a sus temas y algunas tareas que los ejemplifiquen, debatiendo cada una de las propuestas. Aunque fue un primer acercamiento de los grupos muy intuitivo, un aspecto que se puso de manifiesto era la necesidad de controlar el contenido matemático del tema considerado, para poder enunciar con precisión objetivos específicos.

En la undécima sesión, tras realizar una breve evaluación individual, los formadores presentamos el volcado de los datos de la cuarta pregunta del cuestionario sobre los números naturales: las propuestas de objetivos específicos de los futuros profesores acerca de los números naturales. Ese volcado se describe de acuerdo a las tres componentes señaladas de la noción de objetivo: capacidad, conocimiento y situación. La amplitud y variedad de contenidos permite, al igual que en la sesión anterior, introducir la necesidad de alguna nueva herramienta de análisis del contenido matemático. En la duodécima sesión iniciamos el trabajo con el análisis de contenido, a partir de la clasificación cognitiva del conocimiento.

En el resto de este capítulo describimos y analizamos los resultados de las diferentes tareas que realizan los futuros profesores en las sesiones que hemos descrito.

2. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE EN LIBROS DE TEXTO

La primera tarea realizada se centra en analizar la propuesta de diferentes autores de libros de texto desde el punto de vista de las expectativas de aprendizaje que promueven. Para ello se seleccionan algunas páginas de las lecciones de introducción al tema de funciones en tres libros de texto diferentes. Escogimos estos tres libros por presentar diferentes orientaciones sobre un mismo tema de introducción a las funciones. Los textos seleccionados son los que recogemos en la Tabla 30¹⁰⁷.

Esta tarea tiene dos partes. La primera se centra en los objetivos generales del currículo y la segunda introduce la noción de objetivo específico.

¹⁰⁷ Estos y otros documentos entregados en clase para el trabajo en las sesiones iniciales figuran en el Anexo C.

Tabla 30
Libros de texto usados en las sesiones iniciales

Título	Nivel
<i>Fractal 3 Matemáticas</i> ¹⁰⁸	3º de ESO
<i>Órbita 2000 Matemáticas 3</i> ¹⁰⁹	3º de ESO
<i>Funciones 1</i> ¹¹⁰	1º de BUP

2.1 Objetivos Generales de Área en Libros de Textos (Tarea 1.1)

La primera de las tareas se centra en analizar qué orientaciones de las que señalan los objetivos generales de área son visibles en diferentes propuestas de libros de texto. El enunciado preciso de la tarea es el siguiente:

Justifica cuáles de los once objetivos generales de Matemáticas para la Educación secundaria aparecen más claramente reflejados en cada uno de los textos.

Resultados de la Tarea 1.1

Las vinculaciones realizadas por los futuros profesores se basan en algún aspecto recogido por los objetivos generales citados y, por lo general, argumentan su vinculación con partes de los textos. Las vinculaciones realizadas por los futuros profesores las recogemos en la Tabla 31. En ella distinguimos, para cada texto, los objetivos generales citados, lo que destaca el texto de cada uno de ellos y, finalmente, la argumentación empleada para esa selección.

El objetivo 2 es el único relacionado con dos textos diferentes pero, sin embargo, del libro *Órbita 2000* se destacó que las tareas señalan a los escolares que expresen matemáticamente algunas situaciones. De los once objetivos posibles, los futuros profesores destacaron sólo seis.

La justificación más recurrente tiene que ver con las tareas que proponen los textos, ya que, obviamente, es lo más sencillo de localizar. No obstante, en otros casos los profesores destacaron los ejemplos y situaciones empleadas por los autores para presentar o introducir nociones. Por otro lado, el objetivo 2 es el único relacionado con dos textos diferentes pero, sin embargo, en el libro *Órbita 2000* se destacó que las tareas señalan a los escolares que expresen matemáticamente algunas situaciones. De los once objetivos posibles, los futuros profesores destacaron sólo seis.

La justificación más recurrente tiene que ver con las tareas que proponen los textos, ya que, obviamente, es la más sencilla de localizar. No obstante, en otros casos los profesores en formación destacan los ejemplos y situaciones

¹⁰⁸ Álvarez, Garrido y Ruiz (1996).

¹⁰⁹ Almodóvar et al. (1999).

¹¹⁰ Vizmanos, Anzola y Primo (1981).

empleadas por los autores para presentar o introducir nociones.

Tabla 31

Presencia de los objetivos generales del currículo en los libros de texto

Objetivo	Qué destaca del objetivo	Argumentos
<i>Fractal 3 Matemáticas</i>		
1	Pensar y relacionar	Por el tipo de actuaciones que se promueven
2	Reconocer situaciones susceptibles de formular en términos matemáticos	Ejemplos de la vida cotidiana en las tareas
7	Vida cotidiana y problemas	Tipo de tareas
<i>Órbita 2000 Matemáticas 3º</i>		
2	Reconocer situaciones susceptibles de formular en términos matemáticos y formularlas	Tipo de tareas
3	Identificar matemática en la realidad	Por el tipo de situaciones que se presentan
<i>Funciones 1</i>		
6	Uso de los recursos en el aprendizaje	Tarea con calculadora
10	Desarrollo de conceptos de forma creativa	

2.2 Objetivos Específicos Sobre Funciones (Tarea 1.2)

En esta ocasión, el enunciado de la tarea fue el siguiente:

Enuncia un objetivo específico que se relacione con uno de los objetivos generales y que represente lo que se persigue con una actividad concreta de los libros de texto.

Esta tarea la trabajan en casa 18 futuros profesores; a continuación describimos sus propuestas.

Resultados de la Tarea 1.2

Pocos profesores en formación enuncian objetivos específicos. En varias ocasiones se refieren de nuevo a los objetivos generales descritos en la tarea anterior, aún cuando en clase reconocen que no es complicado intuir el aprendizaje que se persigue con unas determinadas actividades o secciones de los libros de texto. No obstante, la justificación que dan a la vinculación que hacen es correcta. Dado que los ejemplos de libros de texto versan sobre funciones, el objetivo general del currículo más mencionado fue el tercero.

La mayor parte de los profesores en formación van a la descripción de contenidos por curso que también aparecen en el currículo para expresar

expectativas. Algunos de ellos, relacionan el libro *Órbita 2000 Matemáticas 3º* con el contenido de primer curso: “Organización de datos en tablas de valores. Elaboración de tablas a partir de conjuntos de datos obtenidos de situaciones próximas y cotidianas o de diferentes fuentes de información” (MEC, 2007b, p. 31792).

Otros, sobre ese mismo texto, destacan un contenido específico de tercer curso: “Formulación de conjeturas sobre el comportamiento del fenómeno que representa una gráfica y su expresión algebraica” (p. 31797).

Cuatro profesoras en formación que analizaron el texto *Fractal 3*, relacionan éste con contenidos de tercer curso en el bloque “Funciones y gráficas” (p. 31797). Una de ellas relaciona la actividad del crecimiento de un bebé, con el contenido “análisis y descripción cualitativa de gráficas que representan fenómenos del entorno cotidiano y de otras materias”. Otra relaciona el texto con “utilización de modelos lineales para estudiar situaciones provenientes de los diferentes ámbitos de conocimiento y de la vida cotidiana, mediante la confección de la tabla, la representación gráfica y la obtención de la expresión algebraica”. La tercera destaca parte de otro contenido: “análisis y comparación de situaciones de dependencia funcional dadas mediante tablas y enunciados”. La última cita otro diferente: “análisis de una situación a partir del estudio de las características locales y globales de la gráfica correspondiente: dominio, continuidad, monotonía, extremos y puntos de corte.”

En otros casos, la revisión de los criterios de evaluación por curso, también permite a algunos futuros profesores acercarse al enunciado de objetivos específicos, aunque la situación empleada en la tarea no favorezca el reconocimiento del objetivo. Una profesora en formación señala que en el libro *Órbita 2000 Matemáticas 3º* hay tareas de cálculo de áreas y perímetros, y señaló por lo tanto que un objetivo de los autores es que los escolares sean capaces de “estimar y calcular perímetros, áreas y ángulos de figuras planas, utilizando la unidad de medida adecuada” (p. 31793). Un compañero de otro grupo interviene, expresando que lo que el autor quería destacar era la relación entre variables y que, por tanto, habría que señalar que perímetro o área son fijos.

Aquellos futuros profesores que manejan el texto *Funciones 1*, mucho más técnico, argumentan que al no presentar tareas no pueden describir el aprendizaje perseguido por los autores.

De todas las respuestas a la tarea propuesta, hubo dos en las que sí se concretan objetivos específicos relacionados con lo propuesto en los libros de texto. Un futuro profesor propuso para el libro de *Funciones 1* el enunciado: “representar gráficamente una función que viene dada a partir de una expresión algebraica sencilla”. Otra profesora en formación señaló que, partiendo de las primeras actividades de *Fractal 3* (altura de líquido y crecimiento del bebé) y de los objetivos generales, revisó los contenidos y los criterios de evaluación para concretar el objetivo “identificar las variables que intervienen en una situación cotidiana y las relaciones de dependencia entre ellas”.

Para hacer balance de las respuestas obtenidas, en la Tabla 32 resumimos las diferentes propuestas y la frecuencia de cada una.

Tabla 32
Clasificación de respuestas a la tarea 1.2

Tipo de respuesta	Frecuencia
Referencia a objetivos generales	4
Descripción de contenidos	7
Uso de criterios de evaluación	1
Sin respuesta	4
Enunciado de objetivos específicos	2

La Tabla 32 muestra que las dos respuestas más frecuentes se centran, en primer lugar, en contenidos y, en segundo término, en referencias a los propios objetivos generales de área. Por otro lado, observamos que cuando un texto no muestra un listado evidente de tareas, los profesores en formación tienen dificultades para expresar las intenciones formativas de los autores.

En conjunto, ambas tareas ponen de manifiesto que, si bien la interpretación de los objetivos generales de área no es complicada para los futuros profesores, la concreción de éstas en objetivos específicos es una actividad mucho más elaborada.

3. OBJETIVOS GENERALES DEL CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

La segunda tarea se realiza después de la presentación del resto del currículo para Educación secundaria y después de introducir las tres componentes que caracterizan las expectativas de aprendizaje: capacidades, contenidos y situaciones. La tarea propone a los profesores en formación analizar los once objetivos generales anteriores según esas tres componentes.

Su enunciado es el siguiente:

Para cada uno de los objetivos generales, expresa las capacidades que describe, las situaciones en las que enmarca esas capacidades y los contenidos con los que las relaciona.

Esta actividad no se realizó durante las sesiones de clase, ni tampoco la entregan todos los futuros profesores (sólo siete). En la séptima sesión, los formadores presentamos nuestra propuesta a esta tarea que hemos incluido en el Anexo B.

Resultados de la Tarea 2

Lo que haremos a continuación es comparar el análisis de los objetivos

generales que realizan los futuros profesores con el nuestro.

Esta tarea la realizaron 7 futuros profesores y en la Tabla 33 presentamos los resultados de 6 de ellos, ya que en un caso, la profesora en formación no respondió a lo que se preguntaba. Usamos las sigas PF1, PF2,... para describir las respuestas de cada uno.

Para cada uno de los objetivos, indicamos los futuros profesores que coinciden en su análisis con el de los formadores en las tres componentes. También señalamos los que discrepan en, al menos, una de las componentes de las expectativas, los que dan respuestas que, aunque correctas, trasladan capacidades a contenidos y, finalmente, aquellos cuyas propuestas no recogen todas las componentes.

Tabla 33

Análisis de los futuros profesores sobre las componentes de los objetivos generales

Coincidencias	Discordancias	Capacidades como contenidos	Respuestas incompletas
<i>Objetivo 1</i>			
PF ₁ , PF ₃ , PF ₄	PF ₂		PF ₅ , PF ₆
<i>Objetivo 2</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₆		PF ₃ , PF ₄ , PF ₅	
<i>Objetivo 3</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₃ , PF ₆	PF ₄ , PF ₅		
<i>Objetivo 4</i>			
PF ₁ , PF ₆		PF ₃ , PF ₄ , PF ₅	PF ₂
<i>Objetivo 5</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₃ , PF ₄ , PF ₅ , PF ₆			
<i>Objetivo 6</i>			
	PF ₄ , PF ₆	PF ₃	PF ₁ , PF ₂ , PF ₅
<i>Objetivo 7</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₅ , PF ₆		PF ₃ , PF ₄	
<i>Objetivo 8</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₆		PF ₃ , PF ₄ , PF ₅	
<i>Objetivo 9</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₅ , PF ₆	PF ₃		PF ₄

Tabla 33

Análisis de los futuros profesores sobre las componentes de los objetivos generales

Coincidencias	Discordancias	Capacidades como contenidos	Respuestas incompletas
<i>Objetivo 10</i>			
PF ₅	PF ₁ , PF ₆	PF ₃ , PF ₄	PF ₂
<i>Objetivo 11</i>			
PF ₁ , PF ₂ , PF ₄	PF ₆	PF ₃ , PF ₅	

La Tabla 33 muestra que el objetivo 5 fue el más sencillo de analizar para los futuros profesores, ya que su enunciado delimita, literalmente, las tres componentes. Los objetivos 3, 7 y 9, quedan bien descritos por cuatro de los seis profesores en formación que hacen la tarea. El hecho de que los enunciados expliciten las situaciones de manera clara es determinante en ese resultado.

En el otro extremo están los objetivos 6 y 10. En el primero de ellos, ningún futuro profesor coincide con el análisis de los formadores, sobre todo por no completar las tres componentes, mientras que en el 10, sólo coincide uno. El resto se reparte entre discrepancias y traslaciones de contenidos.

En relación con los futuros profesores, uno de ellos tuvo más de un 81% de coincidencia con los formadores (PF₁), mientras que otros dos tuvieron alrededor de un 64% (PF₂ y PF₆); el resto no llega al 37%. Todos los que participan en la tarea tienen, al menos, una discrepancia. PF₄ tuvo dos y PF₆ tuvo tres. Las traslaciones de contenidos se concentran en tres profesores en formación. PF₃ reúne siete, PF₄ llega a cinco y PF₅ a cuatro. En cuanto a análisis incompletos, PF₂ es el que presentó más, con tres, mientras que PF₃ es la única persona que no presentó ninguno.

En general, si unimos las coincidencias con los análisis incompletos (ya que lo completado era correcto), podemos concluir que los profesores en formación entienden notablemente la estructura por componentes de las expectativas expresadas en los enunciados de los objetivos generales de área. No obstante, la componente relativa a las situaciones es la más compleja de manejar para futuros profesores y, por otro lado, también existe cierta confusión entre contenidos y capacidades.

4. EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE EN EL TEMA DE LOS NÚMEROS NATURALES

La tercera actividad se realiza a lo largo de diferentes sesiones, tal y como describimos en el primer apartado de este capítulo, que se intercalan entre las

tareas anteriores. Esta tarea consiste en responder a un cuestionario sobre expectativas de aprendizaje sobre el tema de los números naturales y persigue el enunciado de objetivos específicos sobre ese tema por parte de los futuros profesores. El cuestionario incluye cinco preguntas, si bien sólo las cuatro primeras se enfocan en las expectativas de aprendizaje, por lo cual son esas las que iremos analizando por separado. La estrategia para introducir una nueva pregunta del cuestionario se hace siempre mediante un balance previo de las respuestas aportadas por los profesores en formación a las preguntas anteriores.

En la presentación del cuestionario a los futuros profesores, se indica que su finalidad es trabajar con objetivos específicos y se describe el papel de los números naturales en el currículo [081002S04a, 29'45'']:

JLL. Desde esta nueva normativa educativa, se organizan los contenidos por temas, y podemos ver que casi todo el trabajo con números naturales se realiza en Educación primaria, de tal manera que cuando empieza la Educación secundaria, los primeros temas que se ven sobre números naturales ya son los que tienen que ver con divisibilidad: estudio de múltiplos y divisores, cálculo de números primos, etc. Toda la operatoria y todo el conocimiento básico de los números naturales se trabaja en primaria

Cuando un profesor va a trabajar con un grupo de primero de ESO, debe suponer que esos escolares ya tienen algunos conocimientos sobre los números naturales, que le permitan a él seguir avanzando en el aprendizaje e introducir los temas nuevos de divisibilidad. Ahí entráis vosotros; sois esos profesores de ESO.

La primera pregunta se centra en describir esos conocimientos matemáticos previos. La segunda y la tercera tienen que ver con tareas matemáticas y la cuarta se ocupa ya de los objetivos específicos.

4.1 Pregunta 1: Conceptos y Procedimientos Sobre los Números Naturales

El enunciado de la pregunta, tal y como se plantea a los futuros profesores, es el siguiente:

Imagina que tú eres responsable de impartir el primer curso de secundaria. Enumera cinco conceptos importantes que tú esperarías que supieran tus alumnos, y también cinco procedimientos que tú esperarías que fueran capaces de hacer en relación con los números naturales.

Cada uno de los 14 futuros profesores que asiste a la cuarta sesión, tuvo diez minutos para elaborar una lista abierta de conceptos y procedimientos sobre los números naturales. Dado que al principio muchos de ellos no saben por donde empezar, los formadores dimos algún ejemplo y les invitamos a intercambiar información entre ellos. Las respuestas se entregan por escrito y los resultados se muestran y comentan en clase en la sesión del día siguiente.

La Tabla 34 recoge la frecuencia de las diferentes respuestas que proponen los futuros profesores.

Tabla 34

Listado y frecuencia¹¹¹ de los conceptos y procedimientos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación

Conceptos	Procedimientos
Número natural (5)	Ordenar (4)
Orden (6)	Contar (1)
Suma, resta, multiplicación y división (9)	<p>Dominar el valor posicional de las cifras (1)</p> <p>Manejar los algoritmos de la suma, resta, multiplicación y división (11)</p>
Propiedades de las operaciones (2)	<p>Identificar la multiplicación como suma reiterada (1)</p> <p>Identificar la potencia como multiplicación reiterada (1)</p>
Tablas de multiplicar (1)	Dominar las tablas de multiplicar (1)
Números pares e impares (1)	<p>Aplicar la jerarquía de las operaciones (1)</p> <p>Resolver problemas usando las operaciones básicas (3)</p>
Múltiplo y divisor (6)	Resolver problemas relacionados con los números naturales (3)
Divisibilidad (1)	Identificar los usos de los números naturales (1)
Criterios de divisibilidad (1)	Identificar situaciones en las que se usen números naturales (3)
Números primos (5)	Manejar las unidades de medida y los cambios de unidades (1)
MCM y MCD (4)	Escribir sucesiones numéricas (1)
Potencia (4)	Factorizar un número (3)
Unidades de medida (1)	<p>Identificar y calcular números primos (4)</p> <p>Calcular múltiplos y divisores de números naturales (2)</p> <p>Hallar MCM y MCD (3)</p> <p>Manejar la notación de potencias (1)</p>

Los listados no son extensos (cuarenta y seis conceptos y cuarenta y dos procedimientos), ya que rara vez algún profesor en formación llega a enunciar cinco conceptos o cinco procedimientos. A pesar de esto, son destacables los veintinueve de ellos que están relacionados con el tema de divisibilidad (casi un 33% del total), a pesar de que explícitamente señalamos que el grueso de este tema se trabaja en Educación secundaria.

También es frecuente que un mismo profesor en formación señale un concepto

¹¹¹ Indicamos la frecuencia, entre paréntesis, junto a cada concepto y procedimiento.

y un procedimiento asociados. Esto se observa, por ejemplo, en el concepto de unidades de medida y en el procedimiento de manejar las unidades de medida y los cambios de unidades. En algunos casos se señalan aspectos teóricos, técnicos y prácticos de una misma noción. El caso más claro es el concepto de operaciones básicas, los algoritmos de esas operaciones y su aplicación en la resolución de problemas.

Los aspectos relacionados con las operaciones básicas son los más frecuentes tanto en el campo conceptual como en el procedimental. Juntos aglutinan casi el 30% de las propuestas. Entre las ausencias importantes están el concepto de medida y de unidad de medida, la propia actividad de medir, la capacidad de estimar, el análisis de las relaciones aritméticas para expresar un número en función de otros o establecer relaciones entre ellos y aspectos representacionales como el uso de la recta numérica o de las configuraciones puntuales.

Con todo, el barrido de conceptos y procedimientos relacionados con los números naturales fue bastante amplio; esto deja constancia para los futuros profesores de la complejidad que hay detrás de un tema de matemáticas, aparentemente, sencillo y básico. Sin duda alguna, el manejo previo de los objetivos generales de área del currículo en función de las tres componentes citadas, influyó en que surgieran nociones relacionadas con los usos y la identificación de los números naturales.

4.2 Pregunta 2: Propuesta de Tareas Sobre los Números Naturales

En esta segunda cuestión, proponemos a los futuros profesores que ideen tareas que les permitan, hipotéticamente, valorar si unos escolares realmente dominan los conceptos y procedimientos enumerados antes. El enunciado preciso de esta pregunta es el siguiente:

Enuncia tres tareas que podrías usar para valorar si realmente tus alumnos dominan los conocimientos sobre los números naturales que has enumerado.

Esta pregunta se realiza directamente después de la anterior en clase y con posterioridad a la presentación comentada del listado de la Tabla 34; los profesores en formación disponen en este caso de quince minutos para responderla. Cada uno de ellos propuso, en promedio, dos o tres tareas. La clasificación de las treinta y seis tareas que finalmente se recogen aparece en la Tabla 35, junto a sus frecuencias (F) y a una ejemplificación de las que proponen los futuros profesores.

Tabla 35

Tareas sobre números naturales propuestas por los profesores en formación

Tipos de tareas	F	Ejemplo
Operaciones básicas	7	$2137 + 8341$; $1894 : 26$
Operaciones jerárquicas	3	$3(2 + 7) - 5 + [3 - (1 + 7)] \cdot 2$

Tabla 35

Tareas sobre números naturales propuestas por los profesores en formación

Tipos de tareas	F	Ejemplo
Ordenar conjuntos numéricos	2	<i>Escoge cuatro números naturales y ordénalos de mayor a menor.</i>
Descomposición de números naturales en potencias de 10.	1	<i>Dado un número, señala las decenas y las unidades de millar, las centenas,...</i>
Completar o construir series numéricas	1	<i>Construye la serie “suma 5” comenzando en 3.</i>
Manejar las tablas de multiplicar	1	<i>“Examen sobre las tablas de multiplicar”</i>
Problemas aditivos de cambio	2	<i>Compramos 10 caramelos, pero mis hermanas me piden 4. ¿Cuántos me quedan?</i>
Problemas aditivos de comparación	2	<i>Juan tiene 150€, María tiene 163€,... ¿Quién tiene menos de todos?</i>
Problemas multiplicativos de comparación	2	<i>Tengo 36 lápices. Rocío tiene 5 veces más. ¿Cuántos tiene Rocío?</i>
Problema de reparto	1	<i>Tengo 6 caramelos y 3 niños. ¿Cuántos le corresponden a cada uno?</i>
Manejar el Sistema de Numeración Romano	1	<i>Expresa 57 en números romanos.</i>
Manejar cambios de unidades	1	<i>¿Cuántos gramos tiene un kilo?</i>
Propuesta de problemas	1	<i>Inventa un problema que se resuelva mediante operaciones entre números naturales.</i>
Cálculo de múltiplos y divisores	3	<i>Obtener los 6 primeros múltiplos de 7, 8 y 12.</i>
Cálculo de MCM y MCD	3	<i>Calcula el M.C.M. de 8 y 12.</i>
Identificar o hallar números primos	3	<i>Justifica si 7, 25 y 31 son primos ó no (usando la tabla de Eratóstenes).</i>
Expresar en forma de potencias	1	<i>Expresa en forma de potencias $3 \times 3 \times 3 \times 3$</i>
Operaciones con fracciones	1	<i>Sumar fracciones de igual denominador.</i>

Tabla 35

Tareas sobre números naturales propuestas por los profesores en formación

Tipos de tareas	F	Ejemplo
Otros, incompletos	2	

La coherencia de las tareas con los conceptos y procedimientos previos es evidente. Destacan las propuestas de operaciones aritméticas básicas y operaciones con paréntesis y corchetes (aproximadamente un 28% del total). Las tareas relacionadas con la divisibilidad son también frecuentes (25%). En relación con los problemas, de las seis referencias que hacen a ellos en el listado de procedimientos, enuncian un total de siete: cuatro aditivos, dos multiplicativos y uno de reparto. También proponen una tarea para que los escolares enuncien un problema.

Sin embargo, no aparece ninguna propuesta de tarea centrada en los usos o en la identificación de números naturales en algún tipo de situación. No aparece tampoco ninguna tarea específica relacionada con el conteo, que fue también destacado en la pregunta anterior.

El resultado de esta segunda pregunta pone de manifiesto el enfoque tradicional que, de manera intuitiva, asumen los profesores en formación inicial, ya que la mayor parte de las propuestas se quedan en un contexto matemático técnico, e incluso los problemas tienen una estructura muy sencilla y se refieren a usos técnicos muy habituales.

En la siguiente pregunta enfrentamos a los futuros profesores a un conjunto de tareas, la mayor parte no convencionales, relacionadas también con los números naturales.

4.3 Pregunta 3: Análisis de Tareas Sobre los Números Naturales

Esta tarea se deja planteada a los futuros profesores al acabar la cuarta sesión para que la entreguen en la clase siguiente. Lo que proponemos a cada uno es lo siguiente:

A continuación tienes 5 tareas matemáticas centradas en los números naturales. Explica, para cada una de ellas, qué actuaciones sobre los números naturales ponen en juego, y si sirven o no para valorar el conocimiento que sobre ese tema poseen los alumnos al término de primaria.

Tarea 1. *Realiza las sumas siguientes: $243 + 675$; $318 + 654$ y $154 + 782$.*

Tarea 2. *En una calculadora sólo funcionan las siguientes teclas: 2, 5, •, −, = . Escribe las secuencias de teclas necesarias para obtener en pantalla todos los números entre 10 y 20*

Tarea 3. *Elige cuál o cuáles de estos números*

2 3,5 35 21 100000 3,512 35126 21

pueden usarse para:

Aproximar el ancho de una estantería para libros medida en metros.

Dar el precio en euros de una casa nueva.

Estimar el número de caramelos que corresponde a cada niño en una fiesta de cumpleaños.

Decir un número de pie para comprar unas zapatillas de deporte.

Contar el número de asistentes a un concierto de rock.

Inventa ahora diferentes situaciones en las que puedan usarse cinco de los números anteriores. Explica qué números se usan más a menudo en un día corriente.

Tarea 4. La estación espacial Mir permaneció en órbita 15 años y durante este tiempo dio alrededor de 86.500 vueltas a la Tierra. La permanencia más larga de un astronauta en la Mir fue de 680 días. La Mir daba vueltas alrededor de la Tierra a una altura aproximada de 400 kilómetros.

El diámetro de la Tierra mide aproximadamente 12.700 Km. y su circunferencia es de alrededor de 40.000 Km. ($\pi \times 12.700$).

Calcula aproximadamente la distancia total recorrida por la Mir durante sus 86.500 vueltas mientras estuvo en órbita. Redondea el resultado a las decenas de millón.

Tarea 5. Traza las dos diagonales principales de la Tabla 100 ¿qué propiedad comparten todos los números que están en la misma diagonal? Busca y señala otras familias de números que compartan una propiedad, por ejemplo, marca todos los números cuyas dos cifras sumen 14. Describe esa propiedad.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 30. Tabla 100

Al inicio de la quinta sesión, los futuros profesores disponen de unos cinco minutos para compartir sus reflexiones y, después, van exponiéndolas durante una puesta en común.

Recogemos la síntesis de esas respuestas. El debate se centra sobre la primera

de las cuestiones de la tercera pregunta (actuaciones que promueven las tareas), pero también preguntamos acerca de la situación en la que están enmarcadas. En la Tabla 36 incluimos esos dos aspectos.

Tabla 36

Actuaciones y situaciones en las tareas sobre números naturales según los futuros profesores¹¹²

Actuaciones	Situaciones
	Tarea 1
Calcular	Matemática
	Tarea 2
Razonar, relacionar	Matemática
	Tarea 3
Plantear, comunicar, argumentar, estimar	Personal, pública
	Tarea 4
Resolver	Científica
	Tarea 5
Relacionar, razonar, representar	Matemática

El hecho de que no diera tiempo a explorar con más detalle las opiniones de todos los futuros profesores, hace que la información que podamos extraer de estos datos sea limitada.

La caracterización de las situaciones es correcta y, en lo que se refiere a las actuaciones, también se refieren las más importantes. Por ejemplo, en la tarea 4 hay que llevar a cabo un procedimiento de selección de las variables y los datos relevantes del problema y éste además pide un redondeo sobre cambio de unidades.

En cierto momento de la discusión, un profesor en formación intervino señalando lo improbable que le parecía que niños de primer curso de ESO fuesen capaces de hacer tareas de ese estilo. Varios de sus compañeros asienten a esta reflexión y a la de otro futuro profesor que indicó, además, el escaso tiempo del que dispone un docente para dedicarlo a tareas tan sofisticadas.

Después de presentar en clase el resumen de las respuestas de los profesores en formación a las tres primeras preguntas del cuestionario y de avanzar en otros

¹¹² No recogemos frecuencias porque no todos los profesores en formación participaron en el debate. Los formadores nombramos una tarea y ellos intervienen proponiendo una o varias actuaciones y la situación. De esta manera, los resultados de la Tabla 36 recogen una opinión generalizada de los futuros profesores.

aspectos, se introduce la cuarta pregunta en la séptima sesión.

4.4 Pregunta 4: Objetivos Específicos relativos a los Números Naturales

El enunciado de esta pregunta es el siguiente:

Resume en cinco enunciados cuáles serían tus expectativas como profesor de primer curso de ESO, de lo que deberían conocer y saber hacer tus alumnos sobre los números naturales.

Los futuros profesores trabajan en clase durante, aproximadamente, quince minutos y algunos comparten información entre ellos.

Para describir los resultados propuestos, empleamos las tres componentes que caracterizan las expectativas de aprendizaje: las capacidades o conductas que describen, los contenidos con los que se relacionan esas capacidades y las situaciones en que se movilizan.

En primer lugar, en la Tabla 37 recogemos y codificamos el listado de los sesenta y dos enunciados de objetivos específicos que enuncian los profesores en formación.

Tabla 37

Listado de objetivos específicos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación

-
- | | |
|-----|--|
| O1 | Resolver operaciones y aplicar dichas operaciones para resolver situaciones de la vida cotidiana. |
| O2 | Conocer el concepto de orden de los números naturales y aplicarlos a situaciones concretas. |
| O3 | Conocer las tablas de multiplicar como una herramienta para resolver problemas cotidianos. |
| O4 | Conocer y aplicar la jerarquía de las operaciones así como el uso de sus propiedades para situaciones matemáticas en las que se vean involucradas. |
| O5 | Utilizar las unidades de medida para situaciones o contextos y saber utilizar cambios de unidades o de escala. |
| O6 | Manejo de las operaciones aritméticas. |
| O7 | Ordenación. |
| O8 | Identificación del valor de cada cifra, clasificándola como unidades, decenas, centenas,... |
| O9 | El uso de los números naturales (para contar, ordenar, clasificar). |
| O10 | Obtener múltiplos de un número. |
| O11 | Manejar la suma, resta, multiplicación y división con fluidez, y sus propiedades. |
| O12 | Saber hacer el MCM y el MCD de dos o varios números. |
| O13 | Tener la noción de orden bien afianzada. |
| O14 | Manejar el cambio de unidades. |

Tabla 37

Listado de objetivos específicos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación

- O15 Identificar los números primos.
- O16 Conocer las diferencias entre un número natural y un no natural y argumentarlas.
- O17 Realizar con fluidez las operaciones básicas: suma, resta y multiplicación.
- O18 Conocer las propiedades básicas de dichas operaciones.
- O19 Resolver problemas con argumentos de tipo no matemático.
- O20 Manejar el lenguaje y formas de expresión matemáticas.
- O21 Realizar todo tipo de operaciones con los números naturales, incluyendo las operaciones jerárquicas
- O22 Saber resolver problemas donde aparezcan números naturales de los tipos: problemas aditivos de cambio, problemas aditivos de comparación, problemas multiplicativos de comparación.
- O23 Ordenar una serie de números naturales de mayor a menor o de menor a mayor.
- O24 Buscar las propiedades que pueda haber entre un conjunto de números naturales.
- O25 Elaborar situaciones de la vida cotidiana en la que aparezcan los números naturales.
- O26 Plantear y resolver problemas, los cuales se resuelvan con operaciones básicas entre números naturales.
- O27 Saber realizar cómodamente dichas operaciones (sumar, restar, multiplicar y dividir).
- O28 Identificar los números naturales como unidad de medida, proporción, etc.
- O29 Identificarlos en situaciones que se puedan presentar en la vida cotidiana en general.
- O30 Reconocer relaciones entre ellos (orden).
- O31 Utilizar de forma adecuada calculadores y ordenadores tanto como ayuda de aprendizaje como para calcular o resolver situaciones que se planteen.
- O32 Sentido de orden.
- O33 Tablas de multiplicar.
- O34 Calcular $(5 + 2) \cdot 3 \dots$
- O35 Saber identificar los números naturales a objetos, ver situaciones de la vida cotidiana en las que se usan esos números.
- O36 Poder resolver esas situaciones, razonándolas, y transcribiéndolas a un problema matemático.
- O37 Reconocer los naturales.

Tabla 37

Listado de objetivos específicos sobre los números naturales propuestos por los profesores en formación

-
- O38 Dominar el orden de los números.
 - O39 Suma, resta, multiplicación y división.
 - O40 Unidades de medida, manejo y resolución de problemas de cambios de unidades.
 - O41 Conceptos de múltiplos y divisor.
 - O42 Esperaría también que supieran calcular MCM, MCD (aunque no con mucha confianza).
 - O43 Manejar algoritmos de suma, resta, multiplicación y división.
 - O44 Resolver problemas usando las operaciones básicas.
 - O45 Identificar los usos de los números naturales.
 - O46 Dominar el valor posicional de las cifras.
 - O47 Estimar medidas.
 - O48 Realizar operaciones con números naturales.
 - O49 Saber resolver problemas de la vida cotidiana con números naturales.
 - O50 Saber relacionar números con $>$ o $<$.
 - O51 Descomponer en potencias de 10 (DM, UM, etc.).
 - O52 Tener soltura en el manejo de unidades de medida y los cambios de unidades, es decir de g a Kg., etc.
 - O53 Resolver problemas con las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división.
 - O54 Ordenar sucesiones de números naturales de menor a mayor y de mayor a menor.
 - O55 Saber mejorar las unidades de medida y los cambios de unidades.
 - O56 Analizar gráficas.
 - O57 Escribir y desarrollar la potencia de un número.
 - O58 Realizar operaciones con números naturales.
 - O59 Resolver problemas en los que aparezcan números naturales.
 - O60 Conocer las relaciones de orden de los números naturales.
 - O61 Manejar las tablas de multiplicar.
 - O62 Realizar cambios de unidades.
-

A continuación analizamos los enunciados anteriores desde tres perspectivas. Primero, los clasificamos de acuerdo a la capacidad o conducta que expresan, y para ello empleamos el tipo de actuaciones que caracterizan cada una de las ocho competencias PISA. En segundo lugar, clasificamos los objetivos de acuerdo al contenido matemático al que se refieren. Dado que todos se relacionan con los números naturales, empleamos el análisis del contenido de ese tema (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2007; capítulo 2), para identificar

qué aspectos de los números naturales tratan. Finalmente, para la clasificación según situaciones, empleamos las cuatro categorías de situaciones propuestas en PISA (OCDE, 2005), además de generar una categoría adicional relativa a la vida cotidiana. En cada una de las tres clasificaciones añadimos una categoría adicional en la que incluimos aquellos enunciados que no definen un valor concreto para la componente analizada.

En la tabla 38, mostramos el análisis de los objetivos según el tipo de capacidades que indican. Además de las capacidades correspondientes a las ocho competencias PISA, añadimos una novena categoría en la que incluimos aquellos enunciados que se expresan meros contenidos matemáticos, y una décima que incluye aquellos objetivos que no definen ninguna actuación observable, ya que se expresan simplemente en términos muy genéricos (como *conocer*).

Tabla 38

Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según las capacidades expresadas

Pensar y razonar	O8, O9, O15, O16, O24, O28, O30, O37, O45, O47 (10)
Comunicar	O20, O25 (2)
Argumentar y justificar	O16, O47 (2)
Modelizar	O29, O35, O36 (3)
Plantear y resolver problemas	O1, O2, O3, O4, O5, O19, O22, O25, O26, O36, O40, O44, O49, O53, O59 (15)
Representar	O56 (1)
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones	O1, O3, O4, O6, O10, O11, O12, O14, O17, O21, O23, O27, O34, O38, O42, O43, O46, O48, O50, O51, O52, O54, O55, O57, O58, O61, O62 (27)
Emplear soportes y herramientas tecnológicas	O31 (1)
No definidas	
<i>Descripción de contenidos</i>	<i>Generales</i>
O7, O32, O33, O39, O41 (5)	O13, O18, O60 (3)

El siguiente análisis se refiere a la clasificación de las expectativas de aprendizaje que enuncian los profesores en formación, desde el punto de vista del contenido sobre los números naturales a los que hacen referencia (Tabla 39).

Basándonos en el análisis de ese contenido que realizamos en Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez (2007) y que resumimos en el capítulo 2, consideraremos seis categorías posibles. La primera tiene que ver con los *significados y usos de los números naturales*, que en el caso de los objetivos analizados se reducen fundamentalmente a dos. El tema operacional lo separamos en una segunda categoría para aglutinar específicamente *operaciones aritméticas y sus propiedades*. La tercera se centra en el *orden entre números naturales*, la cuarta en el *sistema decimal de numeración* y la quinta en *divisibilidad*. La sexta categoría recoge aquellos enunciados que, por su nivel de generalidad, no se concretan en ningún contenido específico.

Tabla 39

Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según los contenidos de los números naturales considerados

Significados y usos de los números naturales	
<i>Unidades de medida y conversiones</i>	<i>Significados y usos en general</i>
O5, O14, O28, O40, O47, O52, O55, O62 (8)	O9, O24, O25, O29, O35, O36, O37, O45, O49, O59 (10)
Operaciones aritméticas y sus propiedades	
O1, O3, O4, O6, O11, O17, O18, O21, O22, O26, O27, O33, O34, O39, O43, O44, O48, O53, O58, O61 (20)	
Orden entre números naturales	
O2, O7, O13, O23, O30, O32, O38, O50, O54, O60 (10)	
Sistema decimal de numeración	
O8, O12, O46, O51, O57 (5)	
Divisibilidad	
O10, O15, O41, O42 (4)	
Contenidos no definidos	
O19, O20, O31, O56 (4)	

Para el análisis de los objetivos específicos desde la componente de situaciones, hemos usado la clasificación de situaciones que establece el Proyecto PISA, que las agrupa en personales, educativas o laborales, públicas o científicas (OCDE, 2005a) y que también describimos y ejemplificamos en el capítulo 2.

Pero en realidad, ninguno de los objetivos enunciados por los profesores en

formación puede relacionarse con ninguna de estas clases, salvo las situaciones puramente *matemáticas* como caso particular de las situaciones científicas.

Sin embargo, un nutrido número de objetivos se refieren en general a *situaciones de la vida cotidiana*, por lo que añadimos esa categoría en el análisis que muestra la Tabla 40. La existencia de varios objetivos que no se refieren a ninguna de estas situaciones, hace que incluyamos una tercera categoría de indefinición.

Tabla 40

Análisis de los objetivos específicos de los futuros profesores según las situaciones en las que se contextualizan

Situaciones científicas (matemáticas)

O4, O6, O8, O10, O11, O12, O15, O16, O17, O18, O20, O21, O23, O24, O27, O30, O31, O32, O33, O34, O39, O41, O42, O43, O46, O48, O50, O51, O54, O57, O58, O60, O61 (33)

Situaciones de la vida cotidiana

O1, O2, O3, O5, O25, O29, O35, O36, O49 (9)

Situaciones no definidas

O7, O9, O13, O14, O19, O22, O26, O28, O31, O37, O38, O40, O44, O45, O47, O52, O53, O55, O56, O59, O62 (21)

Este análisis, basado en las tres componentes de las expectativas de aprendizaje, pone de manifiesto varios aspectos. En primer lugar, constata la orientación hacia aspectos puramente matemáticos y técnicos de los objetivos propuestos por los futuros profesores. Los descriptores más frecuentes en los objetivos son los vinculados, con diferencia, en la competencias de *utilizar el lenguaje simbólico*, con un 39% del total. El segundo lugar lo ocupa la competencia *plantear y resolver problemas* (22%) y en tercer lugar se sitúa la de *pensar y razonar*, con un 14%. Estos datos hacen evidente el predominio de competencias estrechamente relacionadas con la propia naturaleza de las matemáticas. Aparte de esas tres, el resto quedan siempre por debajo del 5%, con lo que competencias importantes como las *comunicar, argumentar y justificar, modelizar o representar* reciben escasa consideración. El porcentaje de objetivos en los que hay indefinición en la capacidad expresada llega al 12%.

En segundo lugar, en relación a los contenidos contemplados, la Tabla 39 destaca el predominio de los aspectos operatorios (33%). Esto es coherente con las respuestas a las preguntas anteriores del cuestionario, ya que, en la selección inicial de contenidos, las operaciones y sus aplicaciones tenían mucho peso (ver Tabla 34). También las propuestas de tareas sobre operaciones básicas son frecuentes (ver Tabla 35). Sin embargo, los contenidos centrados en significados y usos de los números naturales también destacan en el análisis, con un 30% de los objetivos centrados en ellos. A pesar de que la variedad de

usos no sea muy amplia, lo cierto es que este resultado sorprende por el tratamiento que los profesores en formación dan a las preguntas anteriores. Nuestra hipótesis es que el tipo de tareas que presentamos en la pregunta 3 pudo ampliar el campo de visión de los futuros profesores.

El resto de bloques de contenido sigue siendo coherente con las preguntas previas: el orden tiene cierta presencia (10%) y la divisibilidad sigue apareciendo, aunque menos (7%). En este caso, el porcentaje de objetivos en los que hay indefinición en el contenido expresado, se queda en un 12%.

En tercer lugar, el análisis de las situaciones lleva a una clasificación más gruesa, en la que hay una preponderancia clara de las situaciones científicas matemáticas, con un 52% de los objetivos. De hecho, aquellos objetivos en los que no se define o expresa ninguna situación, son más frecuentes que aquellos en los que se alude a la vida cotidiana, 33% frente a un 14%. Este resultado también es coherente, por ejemplo, con las tareas propuestas por los futuros profesores en la segunda pregunta del cuestionario (ver Tabla 35).

5. CONOCIMIENTO GENÉRICO SOBRE DIFERENTES NIVELES DE EXPECTATIVAS

Con las tareas y actividades descritas se pone de manifiesto el nivel genérico y tipo de conocimiento que los profesores en formación tienen al comienzo de su proceso de formación respecto a las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares en matemáticas.

La tarea 1.1 ha puesto de manifiesto que, con los objetivos generales del área establecidos en el currículo, los profesores en formación pueden clasificar tareas matemáticas con soltura, si bien los resultados de la tarea 1.2 indican que, por lo general, lo hacen de manera intuitiva y no ven necesidad de mayor concreción en el enunciado de los objetivos.

A pesar de las limitaciones de esa vinculación, por la peculiaridad de las tareas, que sólo atienden parcialmente a algunos aspectos de los objetivos y que, por otra parte pueden dar información sobre varios de ellos, así como por la lógica generalidad con la que se presentan, los objetivos generales se han constituido en referencia importante para los profesores en formación de cara al análisis de propuestas educativas.

Uno de los libros seleccionados, *Funciones 1*, por ser un texto anterior a la LOGSE (Ministerio de Educación y Ciencia, 1990), es de difícil de analizar con las expectativas enunciadas en el marco de la LOE (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006a). Por esa razón, los profesores en formación que trabajan ese texto, tienen mayor dificultad que el resto en establecer la vinculación solicitada.

Otro aspecto destacable de los resultados de la tarea 1.2, es la dificultad que manifiestan gran parte de los profesores en formación para distinguir entre

objetivos específicos y contenidos. Aunque la revisión hecha de los contenidos por curso del currículo permitió concretar los objetivos generales en tareas determinadas, a menudo la descripción de objetivos específicos no es sino un listado de contenidos que no permiten reconocer lo que se espera que aprendan los escolares. En el análisis de los objetivos generales, en el 24% de los casos se produjo traslación de contenidos a capacidades. Esto se confirma también, como acabamos de ver, en las respuestas al cuestionario sobre los números naturales.

La tarea 2 profundiza en los objetivos generales de cara a desgarnar su significado, para que pueda conducir el enunciado de objetivos específicos sobre un tema concreto. Hemos constatado que, por otra parte, es frecuente en el análisis de los futuros profesores la traslación de capacidades a contenidos, de manera que cuando no se identifica de manera explícita ningún contenido en el objetivo, una o varias de las capacidades se ubican como contenidos. Eso se hace especialmente visible en los objetivos 1, 6, 8 y 9.

No obstante, la Tabla 33 muestra un alto grado de coincidencia con el análisis de referencia planteado por los formadores, que llega al 100% en el objetivo 5 (el promedio es del 50%). Otro aspecto a destacar es que tanto el número de discordancias (respuestas claramente distintas a las de referencia), como el de respuestas incompletas (en las que falta alguna componente que aparece de manera evidente en el objetivo), es pequeño: 14% y 12%, respectivamente.

Las cuatro preguntas que componen el cuestionario sobre números naturales, inciden en algunas de las consideraciones anteriores, pero también aportan información añadida.

En la primera pregunta, los futuros profesores llegan a elaborar un listado bastante exhaustivo de contenidos (Tabla 34). Cabe destacar que surgen la mayor parte de los usos de los números naturales y que, por lo general, detrás de la mención de un concepto central también se menciona la aplicación de ese concepto para resolver problemas o relacionarlo con otros. Es notable que, a pesar de que en varias ocasiones se indicó que el tema de divisibilidad se afronta en Educación secundaria, aparece con bastante frecuencia.

La segunda pregunta sirve para que los profesores en formación enuncien tareas, en general bastante coherentes con los contenidos previamente propuestos. Destacan actividades operatorias básicas, aunque surgen varias propuestas para plantear y, sobre todo, resolver problemas. Las ausencias coinciden con las anteriores y el peso de la divisibilidad sigue siendo apreciable pues centra la cuarta parte de las tareas propuestas.

La presentación de tareas no convencionales en la tercera pregunta del cuestionario, permite que los futuros profesores comprueben que es factible diseñar tareas sobre números naturales en las que se activan gran cantidad de capacidades y que se sitúan en una variedad de situaciones. Esto hace que en la última pregunta, por ejemplo, surjan con fuerza los diferentes significados y usos de los números naturales.

La estructuración de expectativas de aprendizaje en términos de capacidades, contenidos y situaciones permite a los futuros profesores profundizar en su significado y eso favorece que analicen propuestas educativas con mayor criterio en términos del aprendizaje que promueven.

Sin embargo, hemos constatado que la componente relativa al contexto y la situación es más compleja de manejar que las otras dos. En el análisis de la cuarta pregunta, en la categorización de objetivos por capacidades, la cantidad de enunciados indefinidos ha sido del 12%. En el caso del contenido, desciende hasta el 7%. Pero en el caso de las situaciones el 33% de los objetivos no se pudo clasificar en ninguna y el 52% se situó en el ámbito estrictamente matemático.

Como veremos en el capítulo siguiente, esta dificultad en el manejo de la componente *situación* de las expectativas de aprendizaje, también surge en el trabajo de los grupos de profesores en formación sobre el enunciado de objetivos específicos de sus temas.

Sintetizando los resultados obtenidos y a modo de diagnóstico general, podemos caracterizar el conocimiento y capacidades de los profesores en formación, al comienzo de la asignatura y en relación con los niveles, tipos y componentes de las expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, mediante varias caracterizaciones.

Los futuros profesores son capaces de interpretar y organizar correctamente los objetivos generales de matemáticas del currículo aunque manejan con dificultad la componente de las expectativas relativa a las situaciones. También pueden emplear correctamente esos objetivos generales como herramienta para clasificar o analizar tareas escolares si bien, intuitivamente, no perciben la necesidad de concretar más ese nivel de expectativa de aprendizaje. De hecho, si tiene que enunciar objetivos específicos relacionados con esos objetivos generales de área, tienden a proponer sobre todo contenidos matemáticos concretos. En cuanto al diseño de tareas, tienden de manera natural a proponer tareas técnicas, muy vinculadas a la operatoria básica.

Por lo tanto, en este momento inicial de aprendizaje, los futuros profesores han analizado con criterio un nivel de expectativa de aprendizaje aunque tienen dificultades para relacionarlo con un nivel más específico. También en este inicio de la asignatura y en relación a las tareas escolares, los profesores constatan un desempeño notable para analizar las que provienen de un libro de texto o de alguna otra propuesta didáctica, aunque no sean capaces aún de proponer ellos mismos tareas significativas en diferentes situaciones y contextos. Queda claro entonces que hemos recogido evidencias acerca del desarrollo de algunas de las capacidades señaladas en el capítulo cuarto: *describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo; delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico y ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos*, tal y como resumimos más adelante en el capítulo undécimo.

Un aspecto que han puesto de manifiesto estas sesiones, que sin duda alguna es un punto de partida importante del cara al desarrollo de su competencia de planificación, es que los profesores en formación perciben y expresan la complejidad del fenómeno del aprendizaje escolar en matemáticas.

APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

En este capítulo nos ocupamos del análisis y la interpretación de las producciones que los grupos de futuros profesores llevaron a cabo en el curso 2008-2009, en relación con el primero de los organizadores del análisis cognitivo: las expectativas de aprendizaje. Estas expectativas, referidas al diseño de una unidad didáctica, se concretan en objetivos y competencias. El conocimiento alcanzado por los grupos de profesores sobre este organizador del currículo se muestra mediante las producciones y actividades realizadas sobre objetivos y competencias. Algunas de esas producciones se realizaron en las primeras sesiones de la asignatura y son las que hemos estudiado en el capítulo anterior. Ahora nos centramos en el análisis del trabajo que los grupos de profesores en formación realizaron sobre expectativas, en el contexto particular del análisis cognitivo relativo a un tema matemático concreto.

En el capítulo 5 describimos cuáles fueron esas producciones:

- P_1 , primer enunciado de objetivos específicos;
- P_2 , segundo enunciado de objetivos específicos;
- P_3 , asignación entre objetivos y competencias;
- P_5 , balance del análisis cognitivo;
- P_6 , revisión del balance del análisis cognitivo; y
- UD, unidad didáctica final.

Nuestro análisis permite interpretar la evolución y los cambios que muestran estas producciones en términos del aprendizaje de los grupos de profesores en

formación y, para hacer esto, utilizamos distintos grupos de variables que iremos definiendo paulatinamente¹.

El análisis progresivo, que se realiza tanto a nivel global como local, lo llevamos a cabo en torno a cinco aspectos, que se corresponden con los cinco apartados en los que organizamos este capítulo. Comenzamos, a nivel global, con la caracterización y la organización de las prioridades de aprendizaje que estructuran los objetivos específicos. En segundo lugar, también globalmente, hacemos un estudio cuantitativo centrado en la estabilidad y los cambios que se producen en los enunciados de objetivos específicos propuestos por los grupos de futuros profesores. A continuación, desde una visión local, nos ocupamos del análisis particular de esos enunciados de objetivos, cuyo foco de interés principal son las tres componentes que los conforman: una capacidad, un contenido y un contexto de aplicación. En cuarto lugar, nos centramos en el análisis global de las competencias matemáticas seleccionadas por los grupos como más significativas en su planificación. Finalmente, en el último apartado abordamos un estudio local de las relaciones establecidas por los grupos entre estos dos niveles de expectativas de aprendizaje: objetivos específicos y competencias.

Para cada uno de esos cinco apartados, en primer lugar enumeramos cada una de las variables que usaremos en su análisis, proporcionando un código de identificación, describiendo su significado y estableciendo sus posibles valores. En segundo lugar, organizamos las producciones de cada uno de los grupos temáticos según las variables consideradas. Finalmente, en tercer lugar analizamos los resultados para hacer un balance conjunto de los trabajos de planificación producidos por los grupos de profesores en relación con sus expectativas sobre el aprendizaje de los escolares, de la evolución de estos enunciados considerando su complejidad y la riqueza cognitiva alcanzada, expresables mediante las variables consideradas.

1. FOCOS DE CONTENIDO Y PRIORIDADES DE APRENDIZAJE

En el capítulo 2, vimos cómo organizar las diferentes nociones que conforman un tema en torno a varios focos del contenido y en el capítulo 3, vimos cómo esos focos delimitan prioridades sobre el aprendizaje de los escolares respecto a ese tema, lo cual permite enunciar posteriormente los objetivos específicos a partir de ellos.

El primer aspecto que vamos a analizar en relación con las producciones sobre objetivos y competencias es el enunciado de las prioridades de aprendizaje, de acuerdo con la elección de los focos de contenidos que los diferentes grupos delimitaron. Como veremos, algunos grupos no llegaron a enunciar

¹ Los resultados de las diferentes variables consideradas provienen del análisis de las producciones. Pueden consultarse en los libros de cálculo de Excel que mostramos en el Anexo I.

explícitamente prioridades de aprendizaje sino que reiteraron la denominación de los focos. En nuestro análisis, nos referimos a unos casos y otros como corresponde.

La Tabla 41 recoge las variables que consideramos para analizar este primer aspecto sobre las expectativas de aprendizaje.

Tabla 41

Variables para el análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) consideradas para el enunciado de objetivos específicos

Variable	Cód	Significado	Valores posibles
Número de prioridades de aprendizaje o focos	Pr	Número de prioridades o focos considerados en cada producción	Numérico
Delimitación de las prioridades de aprendizaje o de los focos	Dp	Criterios de delimitación de las diferentes prioridades o focos	Estructura conceptual (EC) Sistemas de representación (SR) Contextos (C)
Integración entre prioridades de aprendizaje (o focos)	In	Existe integración o parcelación de diferentes aspectos del contenido matemático entre las prioridades (o focos)	Integración (I) Parcelación (P)

Los valores que toman esas variables en cada una de las producciones los describimos y analizamos conjuntamente, pero para cada grupo por separado.

1.1 Prioridades del Grupo Ecuaciones

Este es un ejemplo de grupo en el que las prioridades no se enuncian adecuadamente y se usan como tales los propios focos de contenido. La Tabla 42 recoge la descripción de los diferentes focos de contenido considerados por el grupo ECU, en las diferentes producciones en las que se presentaron listados de objetivos y teniendo en cuenta las variables consideradas. En la columna *Dp* emplearemos las siglas *EC* si el criterio empleado por el grupo correspondiente para delimitar las prioridades de aprendizaje o los focos se ha basado en la estructura conceptual del tema; *SR* si el criterio obedece a los sistemas de representación y *C* si el criterio se sustenta en los contextos descritos en el análisis de contenido. En la columna *In*, indicamos con *P* la existencia de parcelación entre diferentes aspectos conceptuales y procedimentales del contenido entre las prioridades de aprendizaje o los focos y con *I*, si existe integración entre ellos.

Tabla 42
*Análisis de las prioridades de
 aprendizaje (o focos) de ECU*

Pr	Dp	In
	P ₁	
3	EC	P
	P ₂	
4	EC	P
	P ₃	
6	EC	P
	P ₅	
5	EC	P
	P ₆	
5	EC	P
	UD	
5	EC	P

De la simple inspección de la Tabla 42, se observa que el criterio empleado para distinguir las prioridades se basa en la estructura conceptual del contenido; que la integración entre las distintas prioridades es parcial y que el número de prioridades se detalla y amplía a lo largo del trabajo, estabilizándose su número en cinco desde la producción P5 en adelante.

Como mostramos en el Anexo F y precisaremos en el segundo apartado de este capítulo, el grupo ECU modificó en numerosas ocasiones su listado de objetivos específicos. Estas modificaciones vienen acompañadas por avances y mejoras significativos en la precisión y control sobre la estructura conceptual del tema (§5.5.1). Dado que este grupo ha basado siempre su criterio para la delimitación de los focos de contenido en la estructura conceptual, los propios focos también se ven modificados reiteradas veces a lo largo de las diferentes producciones.

En su primera producción, los focos considerados fueron tres:

1. Introducción a las ecuaciones y sistemas
2. Equivalencia en ecuaciones y sistemas
3. Resolución de problemas

Estos focos surgen de tres grandes parcelas que el grupo considera que forman parte de la estructura conceptual (ver la Figura 19 en el capítulo 5). En la misma estructura esas parcelas se presentan inconexas y por esta razón, los objetivos de los diferentes focos abordan aspectos de cada una de esas parcelas de manera aislada. En consecuencia, en la primera producción con tres focos, el criterio de

delimitación de los focos es la propia estructura y no existe integración entre los focos (Tabla 42). Estas dos características: conexión con la EC y parcelación entre diferentes tipos de contenido y procedimientos, se mantienen en todas las producciones, aún cuando cambia el número y la delimitación de los focos.

En C_1 , el grupo ECU reformula sus focos y pasa a identificar en P_2 , los siguientes:

1. Lenguaje algebraico
2. Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura
3. Equivalencia en ecuaciones y sistemas
4. Técnicas de resolución de ecuaciones y sistemas. Clasificación de sistemas. Aplicación a la resolución de problemas

Esta nueva versión permite acotar mejor los objetivos específicos porque delimita, con más claridad que la anterior, las nociones involucradas. Pero, al mismo tiempo, favorece la parcelación entre ellas. En cualquier caso, los tres primeros focos se mantienen invariables en el resto de producciones.

En la tercera producción, P_3 , se produce una expansión en el número de focos ya que el cuarto foco anterior se subdivide en tres:

1. Lenguaje algebraico
2. Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura
3. Equivalencia en ecuaciones y sistemas
4. Resolución de ecuaciones
5. Resolución de sistemas. Tipos de sistemas
6. Técnicas de resolución de problemas

Cuando presentan P_3 , los integrantes del grupo ECU confirman que se guían por esa estructura de focos en función de los conceptos y procedimientos que involucran cada uno. Constatan que cada uno de esos focos también se relaciona estrechamente con determinadas competencias [081202S36, 30'29'']:

PF1. Lo hemos agrupado en ocho² focos dependiendo de las competencias... Aquí por ejemplo comunicar, modelizar, resolución problemas y representar las hemos agrupado en otros focos donde tienen más importancia.

LR. Lo habéis centrado casi en focos...

PF1. En conceptos... Hasta resolución de problemas son más bien pensar y razonar y algo de argumentar y justificar y lenguaje simbólico.

PF2. Hemos separado en los focos, va por separado lo que es la teoría y la aplicación de la teoría.

² Posiblemente se debiera a un error del profesor en formación que exponía o a una versión anterior que manejara el grupo, pues en realidad fueron seis focos.

Ese mismo criterio se mantuvo en el resto de producciones. El último cambio en la delimitación de los focos se llevó a cabo en la siguiente producción (P_5). Se seleccionaron finalmente cinco que se mantuvieron invariables hasta la unidad didáctica; el cambio consistió en unir el cuarto y el quinto focos de la versión anterior:

1. Lenguaje algebraico
2. Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura
3. Equivalencia en ecuaciones y sistemas
4. Resolución de ecuaciones y sistemas. Clasificación sistemas
5. Técnicas de resolución de problemas

Como veremos más adelante, estos cambios tuvieron varias implicaciones en el propio enunciado y organización de los objetivos específicos.

1.2 Prioridades del Grupo Fracciones

Este grupo usó en su primera producción enunciados propios de los focos, si bien a partir de P_3 ya introdujeron la terminología de las prioridades de aprendizaje. La Tabla 43 recoge el análisis de los focos y prioridades propuestos.

Tabla 43

Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de FRA

Pr	Dp	In
	P_1	
5	EC	P
	P_2	
5	EC	P
	P_3	
2^3	EC	I
	P_5	
4	EC	I
	P_6	
3	EC	I
	UD	
3	EC	I

³ Cuando en la asignatura se propuso la tarea de relacionar objetivos con competencias (P_3), los formadores indicamos que los grupos hicieran la asignación de los objetivos de al menos dos prioridades de aprendizaje. El grupo FRA lo hizo así, si bien sus producciones posteriores nos llevan a pensar que desde esa presentación ya tenían en mente las tres que presentaron en P_5 .

El criterio de delimitación de los focos y las prioridades del grupo FRA siempre ha sido su propia estructura conceptual (Figura 20 en el capítulo 5). Los diferentes significados de las fracciones y las estructuras aditiva y multiplicativa, siempre fueron conduciendo los focos y las prioridades. En su primera producción, el grupo FRA introdujo los siguientes focos:

1. Significado y usos de las fracciones
2. Estructura de $(Q,+)$
3. Estructura de (Q, x)
4. Medida y geometría
5. (Globales)

En este caso la parcelación de los focos es evidente. En cada uno de ellos pasaron por las nociones básicas de cada sección de la estructura conceptual de su tema. En esta primera producción incluyeron un quinto foco, aunque ni siquiera lo introdujeron en su presentación [081124S31, 4'59'']:

PF1. Pues nosotros hemos distinguido cuatro focos. El primero tiene que ver con las concepciones de las fracción, o sea los distintos significados: razón, reparto y eso...; el segundo tiene que ver con la estructura aditiva, la comparación, la coherencia y el orden; el tercero tiene que ver con la estructura multiplicativa y un cuarto foco que va más enfocado a lo que es la razón, la fracción como razón, lo que se puede hacer en resolución de problemas geométricos utilizando fracciones.

En ese último foco incluyen dos únicos objetivos: “18. Realizar cálculos mentales y con calculadora” y “19. Resolver problemas”. La gran dosis de generalidad de estos dos enunciados no les permitió asociarlos a ninguno de los focos anteriores.

En la tercera producción, los focos se convierten en prioridades de aprendizaje, si bien, como hemos dicho antes, sólo presentan dos de ellas. Éstas fueron:

1. Profundizar en el significado y uso de las fracciones
2. Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones

En la presentación P₅, sobre el balance del análisis cognitivo, el grupo mantiene las dos prioridades de aprendizaje anteriores y añade una nueva centrada en la estructura multiplicativa de las fracciones. Además, deja indicado un cuarto foco relacionado con la medida y la geometría y enuncia tres objetivos relacionados con él. La razón principal es que este grupo no delimita contenidos para la planificación de la unidad didáctica sino que mantiene toda la estructura matemática del análisis de contenido desde el inicio del análisis cognitivo. Pero no ejemplifica la relación de esos objetivos con las competencias ni los considera en el balance final, por lo cual no las contabilizamos en nuestro análisis [090112S47, 19'33'']:

PF1. Es porque se sale un poco de lo que es nuestro tema, lo pusimos como uno de los focos pero no lo vamos a desarrollar.

PF2. Decidimos que nos íbamos a centrar principalmente a los tres primeros focos porque lo otro era más del tema de razón y proporción. Entonces, aunque se nos quedara en el mapa conceptual a nosotros así un poco... Entonces por eso están ahí puestos, en el mapa salen pero ya está.

Después de esta discusión sobre el cuarto foco, la versión definitiva de las prioridades es, por lo tanto, la siguiente:

1. Profundizar en el significado y uso de las fracciones
2. Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones
3. Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones

Como señalamos en el capítulo 5, el grupo FRA alcanzó un nivel de profundidad y organización óptimos en la estructura conceptual de su tema, antes de iniciar el enunciado de objetivos. Queda por lo tanto patente la importancia de ese avance para delimitar focos y después establecer y acotar las prioridades sobre el aprendizaje.

1.3 Prioridades del Grupo Probabilidad

Este grupo manejó desde la primera producción prioridades de aprendizaje y en la Tabla 44 resumimos el análisis de las tres prioridades que delimitaron a lo largo del desarrollo de la asignatura.

Tabla 44
Análisis de las prioridades de aprendizaje de PRO

Pr	Dp	In
	P ₁	
3	EC/SR	P
	P ₂	
3	EC	I
	P ₃	
3	EC	I
	P ₅	
3	EC	I
	P ₆	
3	EC	I
	UD	
3	EC	I

En este caso la estabilidad en la caracterización de las prioridades queda patente desde la segunda producción. En C_1 se produce la única modificación que el grupo PRO realizó en lo que a prioridades de aprendizaje se refiere.

En P_1 , las tres prioridades que este grupo delimita son las siguientes:

1. Dominio del espacio muestral
2. Operar con probabilidades
3. Interpretar y representar probabilidades

Estas tres prioridades surgen de algunas de las principales nociones que organizaban el tema de probabilidad para este grupo [081125S32, 0'15'']:

PF1. Los objetivos específicos de nuestro tema, de la probabilidad, los hemos agrupado en tres grandes focos. Primero dominar el espacio muestral para sentar bien las bases, pues antes de calcular probabilidades tienes que saber bien donde te estás moviendo en cada experimento. Luego operar con probabilidades, saber qué reglas tienes que aplicar y cómo tienes que trabajar y también una parte de interpretar y representar probabilidades, todo lo que tenga que ver con sistemas de representación, saber cómo interpretar un resultado dado de probabilidad.

Sin embargo, aunque en esa misma presentación los miembros del grupo indican que la resolución de problemas está en todas las prioridades, realmente no aparece explícitamente en ninguna, por lo que entendemos que en esta propuesta existe una cierta parcelación entre aspectos teóricos y algorítmicos por una parte y aplicados por otra.

En la segunda producción se producen varias modificaciones. La resolución de problemas aparece en los enunciados de objetivos y, además, dos de las prioridades son reconfiguradas para abarcar, ahora sí, todas las nociones centrales del tema de probabilidad. En esta segunda producción las prioridades quedan como sigue:

1. Dominio del espacio muestral
2. Probabilidad con experimentos simples
3. Probabilidad compuesta

Esta opción de prioridades de aprendizaje se mantendrá hasta el final del trabajo, con la presentación de la unidad didáctica.

1.4 Prioridades del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ usó la delimitación de focos durante todo el desarrollo de la asignatura y sólo en la presentación de la unidad didáctica introduce prioridades de aprendizaje. En la Tabla 45 recogemos el análisis de esos focos y prioridades según las variables correspondientes.

Tabla 45
Análisis de las prioridades de aprendizaje (o focos) de RAZ

Pr	Dp	In
	P ₁	
4	C	P
	P ₂	
3	C	I
	P ₃	
3	C	I
	P ₅	
3	C	I
	P ₆	
3	C	I
	UD	
3	C	I

Los cambios que el grupo RAZ llevó a cabo en la delimitación de los focos, se sitúan en dos momentos del estudio sobre el análisis cognitivo. El primero a comienzos del proceso, durante C₁ y el segundo al finalizar el proceso, en C₆, con el diseño de la unidad didáctica. En su primera presentación sobre objetivos específicos, el grupo RAZ delimitó los siguientes focos de contenido:

1. Relaciones de proporcionalidad directa e inversa
2. Cálculo de porcentajes
3. Repartos proporcionales
4. Formas de representación

Estos cuatro focos se corresponden con los cuatro contextos que el grupo identificó en el análisis de contenido. Los tres primeros obedecen exactamente al mismo criterio, mientras que el cuarto foco profundiza en las relaciones entre diferentes sistemas de representación, lo cual es coherente con el cuarto contexto que define, ya que éste aborda el estudio de las relaciones de proporcionalidad desde un punto de vista gráfico según índices de variabilidad.

Sin embargo, el propio grupo reconoció que tenía dudas con ese cuarto foco y que correspondía más bien a la resolución de problemas [081124S31, 30'20'']:

PF1. Nosotros habíamos distinguido esos focos: las relaciones de proporcionalidad directa, las relaciones de proporcionalidad inversa, lo que se refiere al cálculo de porcentaje, los repartos y también hemos metido las formas de representación.

LR. El último, ¿por qué el último?

PF1. Porque no sabíamos muy bien si era uno de los focos, no sé, no lo teníamos muy claro eso.

LR. No tenéis puesto el mapa (conceptual) para que se vea ¿no?

PF1. No...

LR. Básicamente están todas las relaciones de proporcionalidad directa y el reconocimiento, supongo, ahora ya nos lo detallará, hasta la aplicación y la resolución de problemas todas las cuestiones de proporcionalidad inversa, del reconocimiento, cálculo de cantidades, etc., hasta la aplicación. El caso de los porcentajes, que es otro aspecto técnico, los repartos y... las formas de representación.

PF2. Lo de las formas de representación lo hemos puesto más enfocado a problemas tipo, utilizando una forma particular de representación

LR. Pero entonces es resolución de problemas y formas de representación

Los formadores insistimos en que esos dos aspectos pueden relacionarse con los focos anteriores [081124S31, 42'24'']:

LR. Yo creo que eso se podría ir a su apartado correspondiente. Si introducimos los problemas con los otros cuatro apartados, directos, inversos, porcentaje y reparto están cada uno en su sitio.

JLL. Y además lo que dice Luis os da pie para pensar luego en tareas, ...que no sean simplemente trabajo mecánico o técnico, sino que ya te abre el tipo de tareas que se pueden presentar cuando se introducen diferentes representaciones.

Finalmente, en su segunda producción, el grupo RAZ incorporó la resolución de problemas y los sistemas de representación en los tres primeros focos, dando así un carácter integrador entre ellos. En esa segunda producción se delimitan los focos que permanecerán inalterables hasta la presentación de la unidad didáctica:

1. Relaciones de proporcionalidad directa e inversa
2. Cálculo de porcentajes
3. Repartos proporcionales

Estos tres focos no cambiaron su denominación, si bien sí se modificaron varios de los objetivos que contenía cada uno. Cuando el grupo RAZ presentó su unidad didáctica, además de enunciar estos focos, los reformuló en términos de prioridades de aprendizaje:

1. Profundizar en el estudio de relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes
2. Dominar el cálculo de porcentajes para interpretar y resolver problemas cotidianos
3. Profundizar en el estudio de los repartos directa e inversamente proporcionales

1.5 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Prioridades en el Aprendizaje de los Escolares

Desde un punto de vista general, sólo el grupo PRO manejó desde el primer momento, y de manera técnica, las prioridades de aprendizaje, mientras que FRA lo hizo desde P₃. RAZ sólo las usó en la unidad didáctica y ECU nunca las empleó. Los momentos en que cada grupo considera la diferencia entre *focos de contenido* y *prioridades de aprendizaje* son diferentes. Se trata del primer aprendizaje sobre las expectativas que relaciona y fundamenta el análisis cognitivo con el análisis previo de contenido. No todos los grupos alcanzan a manejar esta distinción desde el principio pero, en todos los casos, su logro supone un momento de estabilidad que, sin duda, facilita el trabajo subsiguiente.

Precisamente el grupo ECU fue el que en más ocasiones modificó su elección de focos, tanto en número como en estructura. El resto de grupos alcanzó cierta estabilidad en la delimitación de los focos a partir de la producción P₃. Los grupos FRA, PRO y RAZ proporcionan ejemplos de cómo la información que suministra un análisis de contenido coherente, conduce a una delimitación estructurada e integradora de las prioridades de aprendizaje.

Del trabajo realizado por los grupos se desprende que, para establecer prioridades sobre el aprendizaje de un tema matemático concreto, parece requisito imprescindible organizar los contenidos del tema en cuestión en una estructura conceptual coherente. En nuestro estudio el número de prioridades no excede de tres al término del proceso de planificación de los distintos grupos, excepto el grupo ECU que muestra menor dominio y enuncia cinco prioridades.

El criterio para distinguir entre prioridades suele basarse en la estructura conceptual, con preferencia; en segundo lugar, en los contextos para aquellos temas con una orientación práctica y aplicada; y, en raras ocasiones, se basa en los sistemas de representación.

La integración entre prioridades es un dato que muestra el progreso por parte de los profesores en formación en la elección y expresión de las prioridades de aprendizaje. Todos los grupos concluyen la unidad didáctica mostrando integración entre prioridades lo cual coincide con un mayor dominio de la estructura conceptual y se expresa mediante una mayor riqueza de relaciones señaladas entre las distintas prioridades enunciadas.

2. ESTUDIO GLOBAL DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

La Tabla 46 recoge las distintas variables que consideramos para analizar, desde un punto de vista global, el conjunto de objetivos específicos enunciados por los grupos de futuros profesores en las diferentes producciones llevadas a cabo en la asignatura.

Como veremos a continuación, estas variables se pueden organizar en dos grupos principales.

Tabla 46

Variables para el análisis del conjunto de objetivos específicos

Variable	Cód	Significado	Valores posibles
Número de enunciados	N	Número de enunciados considerados en cada producción	Numérico
Número de enunciados nuevos	Nu	Número de enunciados que se incorporan por primera vez en una producción dada	Numérico
Número de enunciados estables	Ne	Número de enunciados que se mantienen en una producción sin modificaciones respecto a la producción anterior	Numérico
Número de enunciados que se modifican	Nm	Número de enunciados que se mantienen en una producción aunque con modificaciones en su texto	Numérico
Número de enunciados reconstruidos	Nr	Número de enunciados nuevos contruidos por agrupación o división de otros	Numérico
Número de enunciados innovadores	Ni	Son aquellos enunciados que presentan alguna innovación con respecto a la producción anterior	Numéricos (es resultado de sumar Nu, Nm y Nr)
Número final de enunciados	Nf	Número de enunciados que finalmente consideran en la unidad didáctica	Numérico (coincide con el valor de N en la unidad didáctica)
Número total de enunciados	Nt	Número de enunciados que han trabajado para llegar a acotar Nf	Numérico
Completitud	Cm	Inclusión de las nociones centrales del tema en el conjunto de enunciados	Sí Parcialmente No
Cognición	Cg	Reflejo de la clasificación cognitiva de los contenidos en el conjunto de enunciados	Preponderancia de lo conceptual Preponderancia de lo procedimental Equilibrio entre lo conceptual y lo procedimental

Las primeras ocho variables son de tipo cuantitativo. Contabilizan la cantidad de objetivos enunciados por los diferentes grupos desde distintos puntos de vista y se preocupan por interpretar sus variaciones. Las modificaciones de enunciados o la inclusión de algunos nuevos permiten analizar el papel que juegan las diferentes herramientas y actividades desarrolladas en la asignatura, como el análisis fenomenológico o la relación entre objetivos específicos y competencias. Por otro lado, el número total de objetivos enunciados por cada grupo (Nt) en relación con el listado final de objetivos que componen su unidad didáctica, suministra un indicador de la estabilidad de esos enunciados y de la importancia que para ese grupo tienen unas determinadas expectativas.

En cada uno de los cambios entre producciones, los grupos de profesores en formación pueden mantener estables algunos enunciados, sin modificarlos respecto a la producción anterior (lo que viene indicado por la variable Ne). También pueden introducir enunciados totalmente nuevos (Nu), otros con algunas modificaciones respecto a la producción anterior (Nm) o por agrupamiento o división de otros previos (Nr). Asimismo, denominaremos enunciados *innovadores* al conjunto de los objetivos que se presentan por primera vez, ya sean totalmente inéditos o que hayan surgido de modificaciones o reestructuraciones de otros enunciados previos. Según esta definición y las variables que hemos caracterizado para el análisis global de las expectativas de aprendizaje (Tabla 46), el número de objetivos estables coincide con el valor de la variable Ne , mientras que el número de objetivos innovadores (Ni), surge de la suma de las variables Nu , Nm y Nr .

La relación a lo largo de las distintas producciones entre el número de enunciados estables, Ne , y el número de enunciados innovadores o que cambian, Ni , va a permitir delimitar tres etapas en el aprendizaje de los grupos de profesores en formación que se muestran por los cambios que se producen en el enunciado de objetivos específicos.

En primer lugar, los grupos parten de un *estado inicial*, en el cual elaboran su primer listado de objetivos específicos, que muestran en P_1 . En ese momento elaboran una primera propuesta de objetivos específicos partiendo de la información que les suministra el análisis de contenido de su tema (al nivel de profundidad en que se encuentre), además de las explicaciones y ejemplos de los formadores en la propia asignatura. Una primera etapa es de *revisión crítica*, en la que una vez presentada o entregada una producción y una vez realizados comentarios y valoraciones a la misma por parte de los formadores y/o los compañeros, el grupo reelabora su propuesta de cara a obtener una versión mejorada de esa producción. En términos de las variables enunciadas, esta etapa se caracteriza por valores altos de Ni y valores bajos de Ne .

Este proceso puede repetirse varias ocasiones hasta llegar a la segunda etapa, la *consolidación*, en donde se establece una versión de la producción que no se someterá a grandes cambios o reformulaciones posteriores. En esta etapa los valores de Ne son altos mientras que los de Ni son bajos.

La consolidación es punto de inicio de la tercera etapa de aprendizaje de los grupos de profesores en formación, la *estabilidad*. La estabilidad indica que la propuesta de objetivos específicos varía en unos intervalos muy reducidos con respecto a los enunciados en el estado anterior. Es decir el valor de N_e se mantiene estable, mientras que el valor de N_i tiende a 0.

Por último, el *estado final* queda delimitado por la cuantificación del listado de objetivos específicos en la unidad didáctica, y muestra el conocimiento declarativo alcanzado por cada uno de los grupos de profesores en relación con los objetivos específicos.

La variable *completitud* muestra cómo cada grupo ha recogido en sus objetivos las nociones centrales del tema que le corresponde. Para ello, contrastamos las nociones que incluye la estructura conceptual de cada grupo con las que menciona en los objetivos. Finalmente, la variable *cognición* determina si existe un equilibrio en el tratamiento de los principales campos del conocimiento matemático: el conceptual y el procedimental. Consideremos como ejemplo dos objetivos del grupo RAZ. El objetivo “distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad” lo clasificamos como conceptual ya que pone en juego conocimiento sobre el significado de la noción de proporcionalidad entre magnitudes. Por otro lado, el objetivo “dada una cantidad, saber aplicarle un porcentaje”, lo clasificamos como procedimental, porque se basa en la puesta en práctica del algoritmo de calcular un porcentaje. Esta variable indica la preponderancia de objetivos centrados en aspectos conceptuales, procedimentales o el equilibrio entre ambos.

Para mostrar los resultados del volcado de los datos de las producciones sobre objetivos específicos con respecto a todas estas variables, en primer lugar exploramos conjuntamente los resultados de las primeras ocho variables de la Tabla 46. Después describimos los resultados de las variables *completitud* y *cognición*.

2.1 Innovación y Estabilidad en los Objetivos

En este caso analizamos los resultados para cada grupo por separado de las ocho primeras variables y, al final, extraemos algunas consecuencias globales de las mismas.

Producciones del Grupo Ecuaciones

La Tabla 47 recoge el resumen de los diferentes tipos de enunciados propuestos por el grupo ECU en las diferentes producciones en las que se presentaron listados de objetivos específicos.

El estado inicial del grupo ECU en su trabajo sobre expectativas de aprendizaje incluye diecisiete enunciados. Y aunque el estado final comprende veintidós objetivos específicos en su unidad didáctica, el grupo ECU necesita un total de cuarenta y tres enunciados para alcanzar el estado final. De hecho, llega a realizar numerosas modificaciones en varios cambios entre producciones, tal y como

indica la Figura 31, que muestra la relación entre la cantidad de enunciados estables y innovadores del grupo a lo largo de la asignatura.

Tabla 47

Clasificación de los objetivos propuestos por ECU

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₁					
17					
P ₂					
19	8	6	2	3	13
P ₃					
24	5	7	7	5	17
P ₅					
22	3	14	4	1	8
P ₆					
22	0	22	0	0	0
UD					
22	1	21	0	0	1
Número total de enunciados (Nt)					
43					

En primer lugar, en P₂ se sostienen, aproximadamente, el 35% de los enunciados propuestos en P₁, por lo que la mayor parte de los objetivos incluidos en la segunda producción fueron innovadores. Este aspecto destaca en P₃, ya que aumenta más el número de enunciados innovadores (más de un 70%) que el de estables. Esto indica una clara etapa de revisión crítica tanto en el cambio C₁, como en el cambio C₂.

En P₅, por primera vez en las producciones del grupo ECU, los objetivos estables (casi un 64%) son más numerosos que los innovadores. Es en el paso de P₃ a P₅ (cambio C₃), cuando el grupo muestra una etapa de consolidación. Desde ahí en adelante, la estabilidad es la característica primordial en las escasas modificaciones que muestran sus producciones, ya que sólo en la UD se elimina un enunciado anterior y se introduce uno nuevo, que computa como innovador. Por lo tanto, la etapa de estabilidad de este grupo se sitúa en los cambios C₅ y C₆, que vinculan las producciones P₅, P₆ y UD, para llegar al estado final de veintidós objetivos específicos enunciados.

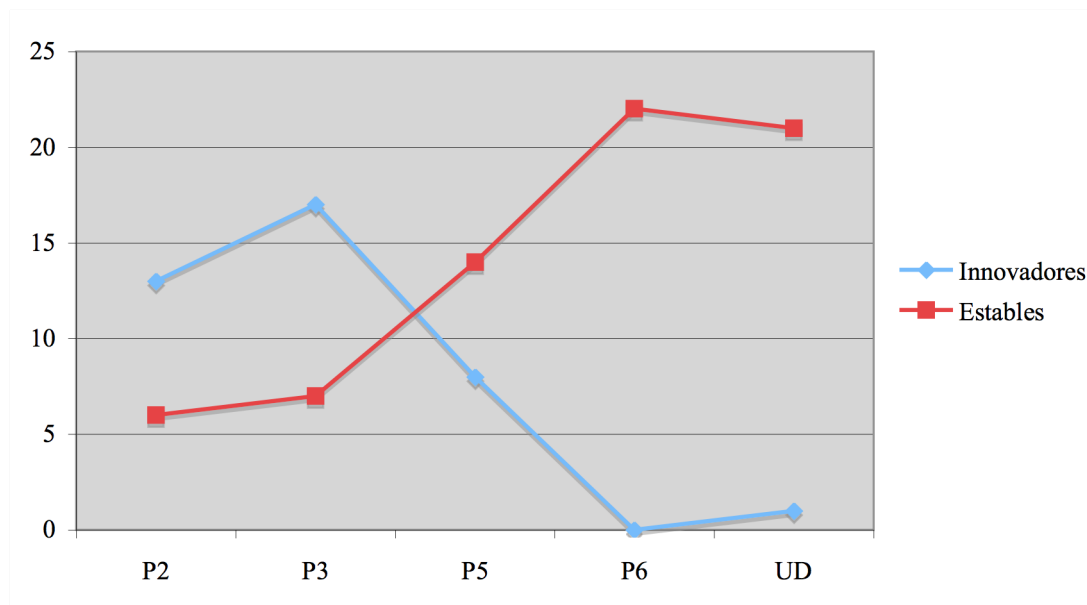


Figura 31. Relación entre enunciados innovadores y estables en las diferentes producciones del grupo ECU

Teniendo en cuenta que el estado inicial era de diecisiete enunciados y que se generaron cuarenta y tres enunciados distintos, el grupo ECU llegó a rechazar veintinueve enunciados de los propuestos. Dado que sus etapas de revisión crítica y consolidación se sitúan durante los cambios C_1 , C_2 y C_3 , existen por tanto, en promedio, siete enunciados rechazados o reelaborados en cada uno de esos cambios. Esa cantidad supone más del 33% de los objetivos enunciados (N), en promedio, por este grupo a lo largo de la asignatura (veintiuno). Esto pone de manifiesto la amplitud de la revisión realizada por el grupo durante su proceso de aprendizaje sobre enunciado de objetivos específicos. Muestra, además, la importancia del conocimiento desarrollado por los integrantes del grupo acerca del análisis de contenido para avanzar en ese conocimiento del análisis cognitivo.

Como vimos antes, las modificaciones del grupo ECU no sólo se limitaron al enunciado de los objetivos, sino que también llevó a cabo varias alteraciones en la estructura de los focos de contenido. La razón principal de unos y otros cambios parece estar en las dudas e imprecisiones del grupo para delimitar la estructura conceptual de su tema.

Antes de comenzar el análisis cognitivo ya se había cerrado en la asignatura el análisis de contenido. De hecho, el balance de ese análisis de contenido se realizó tres sesiones antes de que los diferentes grupos presentaran su primera propuesta con el enunciado de objetivos específicos de sus temas (producción P_1). Pero la estructura conceptual presentada por el grupo ECU en ese balance no era la definitiva, ya que, con posterioridad, ésta se modificó totalmente para la unidad didáctica (§5.5.1).

La delimitación de las nociones centrales del tema y de sus relaciones con el resto de conceptos y procedimientos del tema, se cerraron finalmente, durante el propio desarrollo del análisis cognitivo, alcanzando su versión definitiva junto con la producción P_5 . La Tabla 47 y la Figura 31, muestran que hasta ese

momento no se minimiza la introducción de objetivos nuevos (Nu) y la revisión de otros (Nr). Complementariamente, se incrementan los objetivos estables (Ne). En P_2 , sobre un total de diecinueve enunciados, el grupo introduce once objetivos nuevos y modifican otros dos; en P_3 , de veinticuatro enunciados propuestos, hay diez nuevos y siete modificados. Después, estos valores decrecen notablemente y tienden a cero.

A pesar de estas modificaciones, el grupo ECU introdujo tres objetivos en la producción P_1 que mantuvo hasta el diseño de la unidad didáctica, aunque con algunas modificaciones en su formulación. En su enunciado original, los objetivos eran los siguientes: “4. Distinguir los miembros de una ecuación”; “6. Saber distinguir tipos de sistemas según la existencia de soluciones y el número de éstas” y “9. Aplicar las reglas de equivalencia entre ecuaciones y sistemas (regla de suma y producto)”.

En P_2 reformulan y mejoran el objetivo 4, quedando finalmente así: “4. Distinguir los miembros de una ecuación y conocer la estructura de un sistema”.

Este objetivo se mantendría con este enunciado hasta la unidad didáctica, mientras que los objetivos 6 y 9 se modificaron en P_3 para acotar su enunciado definitivo: “6. Saber distinguir tipos de sistemas según la existencia de soluciones y el número de éstas justificadamente” y “9. Aplicar a una ecuación o sistema una regla arbitraria y analizar si la ecuación o sistema resultante es equivalente al anterior”.

El hecho de que estos tres enunciados se mantengan a lo largo de todas las producciones, pone de manifiesto una línea de continuidad de este grupo: la importancia que asigna este grupo de futuros profesores a los aspectos formales de su tema. Como veremos más adelante, en su propuesta de los objetivos destaca el predominio de los aspectos técnicos y formales del estudio y resolución de ecuaciones y sistemas en relación con otros aspectos más prácticos o de aplicación.

Producciones del Grupo Fracciones

La Tabla 48 recoge el resumen de los diferentes tipos de enunciados propuestos por el grupo FRA en las diferentes producciones.

Tabla 48

Clasificación de los objetivos propuestos por FRA

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P_1					
19					
P_2					
19	0	19	0	0	0
P_3					
16	5	0	7	4	16

Tabla 48

Clasificación de los objetivos propuestos por FRA

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₅					
21	2	19	0	0	2
P ₆					
21	0	21	0	0	0
UD					
21	0	21	0	0	0
Número total de enunciados (Nt)					
31					

En este caso, el grupo FRA partió de un estado inicial de diecinueve enunciados. Para alcanzar el estado final de veintiún objetivos en su propuesta de unidad didáctica, elaboraron un total de treinta y un enunciados. Como muestra la Figura 32, las modificaciones realizadas a lo largo de la asignatura fueron menos que en el caso del grupo anterior y se concentraron en un momento específico.

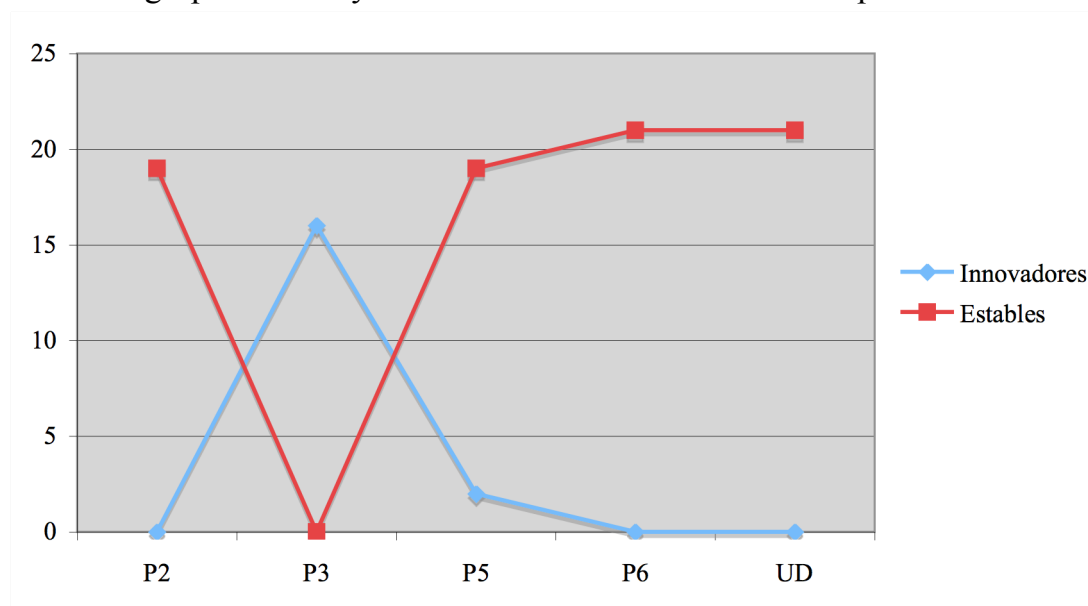


Figura 32. Relación entre enunciados innovadores y estables en las producciones del grupo FRA

El grupo FRA no realiza cambios en C_1 de su primer listado de objetivos, dado que P_2 es idéntica a P_1 . Para analizar la evolución de este grupo comenzamos por el cambio C_2 , que se refiere a las modificaciones realizadas entre P_2 y P_3 .

Precisamente en P_3 introduce el mayor número de modificaciones, ya que se renuevan el 100% de los objetivos enunciados en P_2 . Aunque sólo cinco de los dieciséis enunciados propuestos son totalmente nuevos, el grupo modifica siete y

crea cuatro por agrupamiento o división de otros. En este momento de la asignatura, el grupo FRA se encontraba en una evidente etapa de revisión crítica, ya que, también durante C_2 reformulan la organización de los objetivos en torno a tres prioridades de aprendizaje (§8.1.2)

A pesar de que en el cambio C_2 se introducen nuevos objetivos y que se alteran prácticamente todos los enunciados, nueve objetivos de la propuesta inicial continúan en su listado hasta la unidad didáctica, si bien con alguna modificación.

Pero en el cambio C_3 se invierte la situación de manera muy acentuada ya que los enunciados estables aumentan a diecinueve en P_5 (más del 90% de los objetivos enunciados). Es precisamente durante C_3 cuando este grupo entra en una etapa de consolidación. Por otra parte, en P_6 se mantienen estables los veintiún objetivos de P_5 y no se aporta ningún otro innovador. La etapa de estabilidad se produce en C_5 y en C_6 , ya que en estos cambios no hay variación apreciable en el listado de objetivos específicos.

En su estado final, el grupo FRA propone veintiún objetivos específicos. Para llegar a esa concreción necesita treinta y un enunciados, lo cual arroja diez enunciados desechados a lo largo de sus producciones. Las fases de revisión crítica y consolidación se sitúan en C_2 y C_3 , respectivamente, con lo que en cada una de ellas, en promedio, el grupo abandona cinco enunciados. Esto supone, aproximadamente, la cuarta parte de los objetivos enunciados en promedio en cada producción. Antes de iniciar el análisis cognitivo, el grupo FRA había acotado perfectamente toda la información suministrada por el análisis de contenido previo (§5.5.1). Este hecho contribuyó a que un enunciado correcto de los objetivos fuera más sencillo para el grupo desde el comienzo, concentrando los momentos de aprendizaje y reflexión en torno a sólo dos producciones.

Producciones del Grupo Probabilidad

La Tabla 49 sintetiza los diferentes tipos de enunciados de objetivos específicos propuestos por este grupo a lo largo del desarrollo de la asignatura.

Tabla 49

Clasificación de los objetivos propuestos por PRO

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P_1					
13					
P_2					
20	6	6	4	4	14
P_3					
20	0	20	0	0	0

Tabla 49

Clasificación de los objetivos propuestos por PRO

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₅					
20	0	20	0	0	0
P ₆					
20	0	20	0	0	0
UD					
21	1	20	0	0	1
Número total de enunciados (Nt)					
24					

El grupo PRO también optimiza con claridad el enunciado de objetivos, ya que con veinticuatro propuestas totales delimitan los veintiún objetivos específicos que forman parte de su unidad didáctica y que constituyen su estado final. Partieron de un estado inicial con 13 enunciados y salvando el hecho de que en la propuesta de unidad didáctica añadieron un objetivo nuevo, toda su lista de enunciados quedó establecida en P₂. La Figura 33 deja constancia de esa evolución.

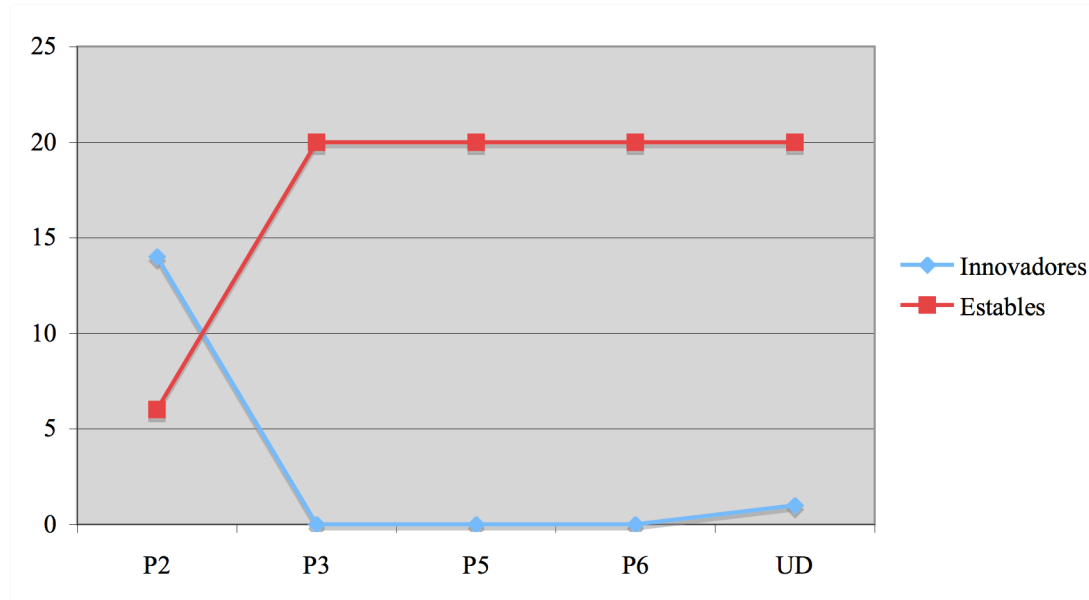


Figura 33. Relación entre enunciados innovadores y estables en las producciones del grupo PRO

En P₂, el grupo PRO modificó substancialmente su propuesta de P₁ introduciendo catorce objetivos innovadores (seis totalmente nuevos, otros cuatro nuevos provenientes de dividir algunos anteriores y modificando el enunciado de cuatro). En ese momento C₁ de cambio, el grupo se encuentra en una etapa de revisión crítica de su producción. Al presentar P₂, el grupo PRO dejó constancia de varias

de las razones para algunos de esos cambios. Por ejemplo, para la introducción de algunos enunciados nuevos [081201S35, 1'02'']:

PF1. Bueno, esta es nuestra tabla de las competencias y los objetivos específicos. Bueno, antes hay que decir que hemos cambiado un poco de la presentación anterior de los objetivos específicos, los tres focos que ahora iremos viendo... Este en principio es igual: “dominar el espacio muestral”.

LR. Lo leemos despacio y ahora vosotros vais comentando los criterios de asignación. En primer lugar me dan una información y digo si es determinista o no es determinista, esa sería el primer tipo de pregunta. (refiriéndose al objetivo “14. Distinguir entre experimentos deterministas y experimentos aleatorios”).

PF2. Sí, eso no estaba en nuestra presentación anterior, pero lo hemos querido poner pues es el principio de todo ¿no?

También justifica la reestructuración de otros enunciados. En la producción P₁ enuncia el objetivo: “4. Identificar los tipos de sucesos. Suceso seguro, suceso imposible, suceso contrario a uno dado, sucesos compatibles e incompatibles”. En la producción P₂ divide ese objetivo en tres diferentes: “15. Identificar los sucesos seguros e imposible de un experimento aleatorio”; “16. Construir el suceso contrario a uno dado”, y “17. Discernir entre sucesos compatibles e incompatibles”. Cuando presenta la producción P₂, argumenta esta decisión en los comentarios de los formadores a la presentación previa [081201S35, 2'34'']:

PF1. Sí, estos tres los teníamos agrupados en el mismo objetivo, si se acuerda, y nos dijeron que lo teníamos demasiado comprimido. Por eso los hemos separado.

A partir de ese momento, el grupo entra en una etapa de consolidación en P₃ al delimitar casi por completo su listado de objetivos específicos y mantener como estables el 100% de los enunciados propuestos en P₂. De P₃ en adelante se sitúa en una etapa de estabilidad, que únicamente se ve ligeramente alterada por un nuevo enunciado que introduce en la unidad didáctica.

Partiendo en su estado inicial de trece objetivos hasta llegar a los veintidós que incluye en su estado final, este grupo trabaja con veinticuatro enunciados en total. De esta manera, sólo descarta tres objetivos en los dos momentos de cambio en los que hace modificaciones importantes a su propuesta, en los cambios C₁ y C₂. El hecho de que la revisión de su primera propuesta de objetivos específicos se hiciera simultáneamente con la asignación de competencias, hizo que este grupo modificara sus enunciados desde el comienzo para justificar esa asignación, proponiendo enunciados precisos. No obstante, como veremos más adelante, esos avances no contribuyeron a depurar muchos enunciados de manera coherente con las competencias a las que se vinculaban.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

Finalmente, la Tabla 50 resume los diferentes tipos de enunciados propuestos por el grupo RAZ en sus diferentes producciones sobre objetivos específicos.

Tabla 50

Clasificación de los objetivos propuestos por RAZ

N	Nu	Ne	Nm	Nr	los
P ₁					
13					
P ₂					
19	6	10	3	0	
P ₃					
18	0	17	1	0	
P ₅					
18	0	12	6	0	
P ₆					
18	0	18	0	0	
UD					
18	0	17	1	0	
Número total de enunciados					
19					

El grupo RAZ es singular por su economía para elaborar nuevos enunciados. Partiendo de un estado inicial de trece objetivos y con sólo diecinueve enunciados diferentes, alcanza los dieciocho objetivos específicos que delimitan su estado final en su unidad didáctica. En ninguna de sus producciones propone enunciados nuevos por agrupamiento o división de otros (*Nr*). La Figura 34 muestra la evolución del grupo en términos de objetivos innovadores y estables a lo largo de la asignatura.

Este grupo tiene dos momentos distintos de revisión crítica lo cual le lleva a escalar más sus cambios en comparación con el resto de grupos. El primero de ellos se produce, al igual que en el caso del grupo PRO, en C₁. En ese momento de cambio, las modificaciones alteran un 50% la propuesta inicial añadiendo seis objetivos nuevos y modificando el enunciado de otros tres. Se equiparan así el número de objetivos innovadores y estables en esta fase de la asignatura.

Después de esa etapa, el grupo parece alcanzar una fase de consolidación: los enunciados innovadores prácticamente desaparecen, mientras que los estables llegan a constituir casi el 95% de su propuesta. El segundo momento de revisión crítica se produce en el cambio C₃, donde los enunciados innovadores aumentan a seis (33% de la propuesta) y los estables se reducen de diecisiete a doce al pasar de P₃ a P₅. El siguiente momento de cambio, C₅, es de consolidación ya que sólo aumenta el número de enunciados estables y no se introduce ningún objetivo

innovador. A partir de ahí, no se producen modificaciones significativas, entrando así en una etapa final de estabilidad en C_6 .

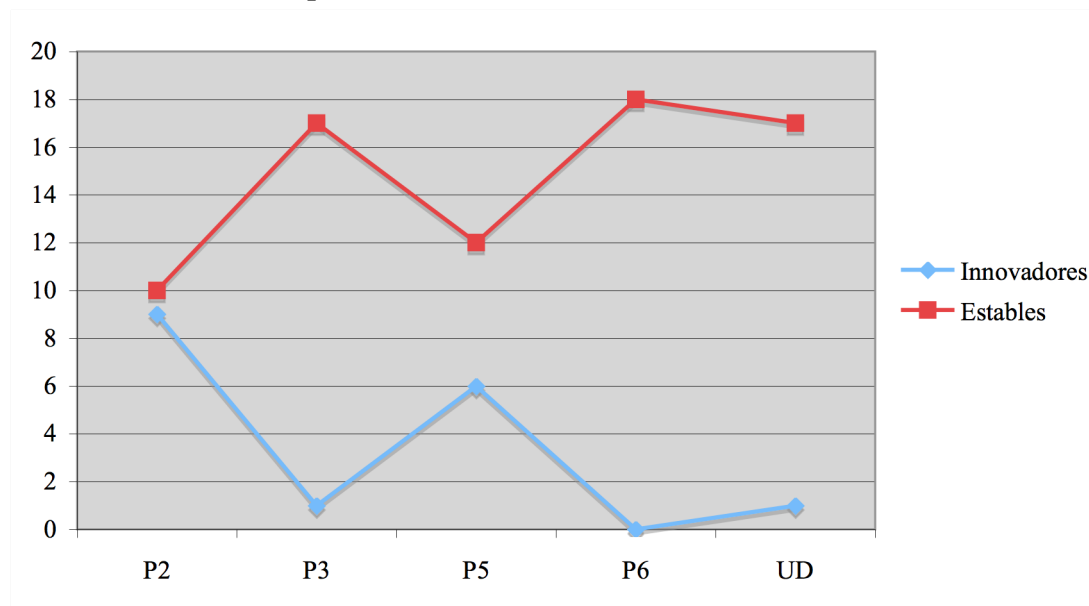


Figura 34. Relación entre enunciados innovadores y estables en las producciones del grupo RAZ

Las modificaciones realizadas en las etapas de revisión crítica, son especialmente llamativas en varios objetivos que en la unidad didáctica se reformulan a partir de enunciados de producciones anteriores. Así por ejemplo, el grupo RAZ incluye en su listado de la unidad didáctica un enunciado de P_2 que fue positivamente mejorado en P_3 y P_5 . Esto mismo pasa con otros cuatro objetivos reformulados en el balance del análisis cognitivo (P_5). En el listado final de la unidad didáctica, el grupo RAZ retoma los enunciados de P_3 de esos objetivos, desechando en muchos casos las provechosas modificaciones aplicadas en C_3 . Cuando presenta en clase la unidad didáctica, el grupo no hace mención explícita de estos cambios finales. En esa presentación aparecen, aunque con modificaciones, el 100% de los objetivos enunciados en su primera producción. A pesar de estas modificaciones, que sólo afectan a cinco objetivos, sostenemos la etapa de estabilidad del grupo en C_6 .

Ya hemos descrito antes la economía de este grupo para la elaboración de enunciados de objetivos específicos, pues sólo necesitó diecinueve propuestas diferentes para acotar los dieciocho enunciados que conformaron las expectativas de aprendizaje de su unidad didáctica. Sin embargo, hemos dejado constancia de la gran cantidad de reformulaciones que lleva a cabo con esos enunciados, sobre todo los retrocesos en la selección de objetivos específicos.

Balance del Trabajo de los Grupos Respecto a Innovación y Estabilidad en los Enunciados de Objetivos Específicos

En la Tabla 51 mostramos, de manera conjunta, el número de objetivos enunciados en los estados inicial y final por cada uno de los grupos de futuros profesores. También indicamos, según las modificaciones en las producciones,

los momentos en los que cada uno de ellos pasa por las etapas de revisión crítica, consolidación y estabilidad. Por último, señalamos el total de enunciados de objetivos específicos presentados durante todo ese proceso de aprendizaje.

Tabla 51

Evolución de los diferentes grupos a través de las etapas detectadas sobre enunciado de objetivos específicos

Estado inicial	Revisión crítica	Consolidación	Estabilidad	Estado final	Enunciados totales
			ECU		
17	C ₁ , C ₂	C ₃	C ₅ , C ₆	22	42
			FRA		
14	C ₂	C ₃	C ₅ , C ₆	21	31
			PRO		
13	C ₁	C ₂	C ₃ , C ₅ , C ₆	21	24
			RAZ		
13	C ₁ , C ₃	C ₂ , C ₅	C ₆	18	29

De la Tabla 51 se desprenden algunas regularidades, comunes a todos los grupos y, por otra parte, ciertas singularidades para algún grupo.

Destacamos que todos los grupos comienzan con un número bajo de enunciados de objetivos, por lo general cercano o inferior a quince (14,2 en promedio), y concluyen con un número más elevado, cercano o superior a veinte (20,5 en promedio), con un incremento medio de 6,3 enunciados por grupo. Hay diferencias apreciables entre los grupos si se atiende al total de enunciados de objetivos realizados a lo largo del proceso.

Todos los grupos realizan de inmediato una revisión crítica, que tiene lugar con el primer cambio que presentan. La revisión crítica puede extenderse para provocar un segundo cambio cuando no se alcanza una solución satisfactoria en el primer intento, como es el caso del grupo ECU.

Concluida esa etapa, todos los grupos pasan a otra de consolidación, que se produce con el siguiente cambio pero con distintas variantes. La consolidación se manifiesta, por lo general, mediante un solo paso, excepto en el grupo RAZ, donde se produce una revisión parcial.

Desde C₂, la evolución de los grupos ECU y FRA es igual: parten de una etapa de revisión crítica para pasar a la etapa de consolidación en C₃ y entrar en la de estabilidad en C₅ y C₆. Ambos grupos siguen un proceso de aprendizaje que se muestra por una progresiva estabilidad a lo largo de las diferentes producciones. Como veremos más adelante, esto permitió depurar los enunciados de sus objetivos para la unidad didáctica.

Los grupos PRO y RAZ tuvieron, cada uno de ellos, una evolución diferente. PRO fue el primer grupo en alcanzar la etapa estabilidad en sus enunciados. De hecho, antes sólo pasa por una etapa de revisión crítica en C_1 y por la de consolidación en C_2 . Su conocimiento sobre enunciado de objetivos específicos se concentró en sus dos primeras producciones, alcanzando pronto un grado de satisfacción suficiente aunque, como veremos más adelante, resultó prematuro: sus enunciados no logran total precisión y algunas modificaciones finales no responden a un manejo eficaz de los objetivos específicos.

El grupo RAZ fue el único que mantuvo, aunque con modificaciones, la totalidad de los objetivos propuestos en su primera producción. Pero dilató esas modificaciones a lo largo de prácticamente la totalidad de la asignatura. Su proceso de aprendizaje fue menos seguro que el resto de grupos, ya que necesitó dos etapas de consolidación, la segunda de ellas con cierta revisión crítica (C_2 y C_5). Alcanza su estabilidad en C_6 , si bien cambia algunos objetivos en la unidad didáctica.

Finalmente, todos los grupos alcanzan la fase estabilidad, que se aprecia al menos en los dos últimos cambios. Sólo el grupo PRO adelantó su etapa de estabilidad a C_3 .

A partir de los datos analizados, podemos afirmar que en su proceso de aprendizaje sobre el enunciado de objetivos específicos, todos los grupos de profesores en formación presentan regularidades, que quedan descritas del siguiente modo:

- Comienzan con un número bajo de enunciados, en torno a quince;
- concluyen su trabajo con un número mayor, en torno a veinte enunciados;
- pasan por una primera etapa de revisión crítica, con cambios importantes en una mayoría de enunciados;
- reafirman parte importante de sus enunciados y revisan algunos de ellos en una segunda etapa de consolidación, consecutiva a la anterior;
- finalmente, alcanzan una estabilidad apreciable en sus enunciados en la segunda mitad del proceso.

También se presentan singularidades como son:

- la ampliación de la etapa de revisión crítica a más de un cambio;
- la extensión de la etapa de consolidación por motivo de la revisión parcial de algunos enunciados, también durante más de un cambio; y
- el logro prematuro de la estabilidad.

El número de enunciados total que necesitaron para llevar a cabo este proceso, es variable entre grupos.

2.2 Estudio de la Variable Completitud (Cm)

Para evaluar esta variable, hemos contrastado las nociones que organizan la estructura conceptual de cada uno de los temas de los grupos de profesores en formación, con las nociones que consideran en el enunciado de sus objetivos. Ya

que, con motivo del análisis de contenido previo, cada grupo ha delimitado los conceptos y procedimientos centrales en su tema, es importante que esos conceptos y procedimientos queden recogidos en las expectativas de aprendizaje sobre ese tema.

En la Tabla 52 resumimos los resultados del análisis de esta variable a lo largo de la asignatura para cada uno de los grupos. Usamos las siglas *S* para señalar que sí recogen esas nociones centrales, *P* si lo hacen sólo parcialmente y *N* si no aparece la mayor parte esas nociones en su enunciado de objetivos.

Tabla 52

Evolución de la variable completitud a lo largo de las producciones

P ₁	P ₂	P ₃	P ₅	P ₆	UD
ECU					
P	P	P	P	P	P
FRA					
S	S	S	S	S	S
PRO					
P	S	S	S	S	S
RAZ					
P	S	S	S	S	S

Describimos ahora, para cada uno de los grupos, cuáles son las nociones que han destacado en el enunciado de los objetivos. Para ello partimos del mapa que representa la estructura conceptual de los diferentes temas de trabajo. Cada uno de los grupos cerró en diferentes momentos de la asignatura esta estructura conceptual, pero para nuestro análisis, consideraremos su versión más elaborada.

Producciones del Grupo Ecuaciones

En la Figura 19 (§5.5.1), mostramos el mapa con la estructura conceptual del tema *ecuaciones y sistemas de primer grado*.

El mapa muestra cómo la noción de *dependencia entre variables* organiza el tema y, también, cómo a partir del número de *relaciones entre variables*, se distinguen *ecuaciones y sistemas* (el número de relaciones condiciona los dos contextos planteados por este grupo) desarrollando ambas nociones de manera paralela. En ambos casos aparece el concepto de *solución* mientras que, cada uno de ellos, admite diferentes *significados*, ya que son diferentes *elementos y propiedades* los que lo estructuran y tienen sus propios *métodos de resolución*. Como podemos ver, existe un claro predominio del *sistema de representación* simbólico sobre el gráfico o el numérico y no se hace mención a la *resolución de problemas* en ningún tipo de situación. Todas estas nociones forman parte de la selección de contenidos para la unidad didáctica.

Por el contrario, en ninguna producción se enuncian objetivos que estudien la dependencia de variables ni las posibles relaciones de dependencia siendo esas nociones centrales en la estructura conceptual⁴. Al mismo tiempo, aspectos menores de esa estructura como la distinción de los elementos de las ecuaciones y sistemas o la relación entre sistemas de representación, sí tienen una preponderancia importante en los objetivos (conjuntamente y en promedio, ocupan más del 50% de los objetivos enunciados en cada producción).

Por otro lado, aunque tampoco se presenta en la estructura conceptual, la resolución de problemas se vislumbra en algunos objetivos enunciados a partir de P_3 . Como estas características se mantienen constantes a lo largo del resto de producciones, aún cuando realiza modificaciones en los enunciados de los objetivos, consideramos que la variable completitud tiene un valor constante de *parcialmente* en el grupo ECU.

Producciones del Grupo Fracciones

El grupo FRA presentó su última versión de la estructura conceptual junto con el balance del análisis de contenido y, por lo tanto, coincide con la incluida en la unidad didáctica. Esa estructura conceptual se muestra en la Figura 20 (§5.5.1).

El mapa conceptual del grupo FRA incluye los focos de contenido delimitados por el grupo (mostrado con líneas poligonales coloreadas). Las nociones centrales de esa estructura son los diferentes significados del concepto de fracción: *parte-todo*, *reparto*, *razón*, *operador* y *cociente*. El grupo destacó el significado parte-todo ya que la unidad didáctica elaborada para 1º de ESO se centraría en este significado. La noción de *comparación* de fracciones, de la que se deducen los conceptos de *equivalencia* y *orden*, toma especial relevancia dentro de este significado. Las *operaciones*, sus *algoritmos* y sus *propiedades* también constituyen nociones importantes en el mapa conceptual presentado por este grupo, junto con los *sistemas de representación* y la resolución de diferentes tipos de *problemas*.

Ciertamente, los diferentes enunciados de objetivos específicos incluidos en las distintas producciones de FRA, incluyen la mayor parte de las nociones que se muestran en el mapa conceptual, si bien ponen más énfasis en aquellas en las que se centra la unidad didáctica.

A diferencia del grupo ECU, la organización previa del análisis de contenido hizo que la caracterización de las prioridades de aprendizaje diera cobertura a la mayor parte de la estructura conceptual. Así, por ejemplo, en su mapa hay una serie de nociones relacionadas con la razón y la semejanza en las que el grupo señaló que no entraría. El resto del mapa se organiza en torno a los diferentes significados y a la estructura aditiva y multiplicativa de las fracciones. Esos tres aspectos son precisamente los que delimitan las tres prioridades de aprendizaje del grupo FRA, con lo que los objetivos abordan esas tres parcelas del contenido.

⁴ En P_1 enuncia el objetivo “3. Interpretar la dependencia de magnitudes”, si bien es un enunciado demasiado impreciso, que además no vuelve a mencionarse en el resto de producciones.

Pero además, dentro de cada una, existen objetivos centrados en las nociones que conforman cada una de ellas.

Por tanto, la variable completitud para este grupo alcanza un valor *sí* para todas sus producciones.

Producciones del Grupo Probabilidad

Como vimos en el análisis de las variables relacionadas con el número de objetivos, el grupo PRO alcanzó desde el primer cambio cierta estabilidad en el número y estructura de los enunciados. Al igual que el grupo FRA, la prontitud y precisión con la que delimitaron la información del análisis de contenido fue importante para ese logro. En la Figura 21 (§5.5.1), mostramos el mapa con la estructura conceptual que el grupo PRO elaboró para su unidad didáctica.

El núcleo de la estructura conceptual del grupo PRO lo constituyen las nociones de *espacio muestral*, *experimento aleatorio simple* y *experimento aleatorio compuesto* y las relaciones entre ellos. Vinculados a ambos tipos de experimentos, los *sucesos* y sus clasificaciones están en la base del *cálculo de probabilidades*. Este importante constructo del tema de probabilidad da pie a un nutrido número de *reglas*, *propiedades*, *algoritmos* y *representaciones* importantes en el tema. El grupo PRO añadió en su estructura conceptual varias nociones relacionadas con la *aplicación* de las nociones probabilísticas en la vida cotidiana.

Ya mostramos antes cómo la segunda producción del grupo PRO resultó importante en el avance del enunciado de sus objetivos. La inclusión de la totalidad de las nociones centrales de su tema en el listado de objetivos también se completó en esa segunda producción.

En la producción P_1 , como ya hemos visto, los focos que delimitaban los objetivos del grupo PRO eran “dominio del espacio muestral”, “operar con probabilidades” e “interpretar y representar las probabilidades”; un gran número de esos objetivos se siguieron empleando en posteriores producciones. En esta primera producción no se incluyó ningún objetivo centrado en las relaciones, características o diferencias de experimentos deterministas y aleatorios y tampoco en la distinción entre experimentos aleatorios simples y compuestos. Dado que esas nociones son centrales en su tema, para la primera producción asignamos un valor de completitud *parcial* al grupo PRO.

Sin embargo, la reformulación de focos y objetivos de la producción P_2 considera todas esas nociones y profundiza en ellas, razón por la cual, a partir de esa producción, asignamos a la variable completitud un valor *sí*; es decir, expresa que se recogen las principales nociones matemáticas del tema en el enunciado de los objetivos.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

Al describir su estructura conceptual, el grupo RAZ sólo se refirió a las nociones que conformarían su unidad didáctica, si bien antes acotaron las nociones centrales de todo su tema. Para nuestro análisis de la variable *completitud*, nos

referiremos a la estructura conceptual que muestra el mapa de la Figura 22 (§5.5.1).

En su estructura conceptual, el grupo RAZ explicita conceptos y procedimientos fundamentales para el diseño de su unidad didáctica. Entre los conceptos destacan los de *razón*, *proporción* y *porcentaje* y en los procedimientos la *regla de tres* y el *método de reducción a la unidad* junto a los *problemas de proporcionalidad directa o inversa* y los de *repartos proporcionales*. Destacan, asimismo, los diferentes *sistemas de representación* en los que pueden mostrarse estos conceptos y procedimientos.

Como hemos visto en el análisis de los focos, en P_1 el grupo RAZ centró uno de sus cuatro focos en las representaciones, con lo cual ese aspecto de la estructura conceptual queda cubierto. Aunque ese foco desaparece con motivo de C_1 , los objetivos que lo conformaban, aunque con modificaciones, se reparten entre los focos restantes. De hecho, las nociones relacionadas con el estudio de la proporcionalidad, los porcentajes y los repartos sí quedan recogidas en el resto de objetivos enunciados. Pero el estudio y la resolución de problemas sobre proporcionalidad directa o inversa no figura entre los enunciados propuestos, por lo que en esta primera producción a la variable completitud le asignamos un valor de *parcialmente* para el grupo RAZ.

Sin embargo, con motivo de los avances y las modificaciones que realizó este grupos de profesores en formación después de la presentación de P_1 , en su segunda versión del enunciado de objetivos específicos sí recogen ese aspecto que faltaba en la producción anterior. Las modificaciones posteriores de los objetivos no alteran esta característica, por lo que las nociones centrales del tema siguen presentes desde P_2 en adelante. Desde entonces, por lo tanto, esta variable toma el valor *sí* para el grupo RAZ.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Completitud

El comportamiento de los distintos grupos respecto de esta variable es desigual. De manera conjunta, sólo el grupo ECU no llega a recoger la mayor parte de relaciones básicas de su tema en ninguna de sus producciones sobre objetivos específicos. Como se ha dicho, las limitaciones de este grupo para delimitar sus prioridades sobre el aprendizaje repercuten en esta falta de integración entre las nociones que organizan la estructura conceptual del tema con las nociones que consideran en el enunciado de sus objetivos.

Por el contrario, el grupo FRA sí contempla y recoge estas relaciones desde la primera producción. A su vez, los grupos PRO y RAZ dejan fuera algunas nociones importantes en su primera producción aunque, en ambos casos, las incorporan en la segunda producción y las mantienen a lo largo de las diferentes propuestas de objetivos específicos que realizan posteriormente en la asignatura.

2.3 Estudio de la Variable Cognición (Cg)

Cuando en el capítulo 2 presentamos el análisis de contenido, describimos y ejemplificamos una vía para clasificar el contenido matemático desde un punto

de vista cognitivo. Esa clasificación distingue el campo conceptual del procedimental y, en cada uno de esos campos del contenido matemático, establece tres niveles diferentes de complejidad. Esta variable de análisis explora cómo los diferentes objetivos enunciados por los grupos de profesores en formación responden bien a aspectos conceptuales, bien a procedimentales, o bien a ambos. Un ejemplo de objetivo que clasificaremos como conceptual es “*comprender* los distintos conceptos de fracción”, mientras que clasificaremos como procedimental “*representar gráficamente* una fracción”. En contadas ocasiones algún objetivo tiene en cuenta ambas posibilidades, como por ejemplo “*identificar y calcular* fracciones equivalentes”.⁵

Ahora valoramos la preponderancia de objetivos que expresan bien un aprendizaje relativo a conocimientos conceptuales o bien a conocimientos procedimentales. En la Tabla 53 recogemos, para cada producción, si en el conjunto de objetivos específicos enunciados hay predominio de aspectos conceptuales o procedimentales (diferencia superior al 20% que notaremos, respectivamente, con *C* o *P*), o si existe equilibrio entre ellos (diferencia inferior al 20% que notaremos con *E*).

Tabla 53
Preponderancia o equilibrio entre los objetivos relativos a aspectos conceptuales o procedimentales

P ₁	P ₂	P ₃	P ₅	P ₆	UD
ECU					
E	P	P	P	P	P
FRA					
P	P	P	P	P	P
PRO					
P	P	P	P	P	P
RAZ					
P	P	P	P	P	E

Los resultados no dejan lugar a discusión. La preponderancia de los objetivos referidos a aspectos procedimentales es evidente en la práctica totalidad de producciones de los grupos de profesores en formación. Los únicos casos de

⁵ Es importante distinguir este análisis del que mostraremos más adelante para analizar la existencia y la clasificación de la componente contenido mirando los objetivos como expectativas de aprendizaje (ver capítulo 3). En ese caso, en el enunciado de los objetivos propuestos por los grupos de profesores en formación, distinguimos aquellos que en la componente del contenido matemático se refieren a aspectos conceptuales del tema considerado (e.g. definir el *concepto de fracción*) o a aspectos procedimentales (e.g. enunciar la *regla del producto de fracciones*).

equilibrio aparecen en la primera producción del grupo ECU y en la unidad didáctica del grupo RAZ.

Precisando un poco más, si bien la presencia de aspectos procedimentales prima en los objetivos específicos, la mayor parte de ellos se centran en aspectos técnicos con preferencia sobre los aspectos prácticos. Cuando en el apartado anterior analizamos la integración o parcelación de aspectos teóricos, técnicos y prácticos en las diferentes prioridades de aprendizaje delimitadas por los grupos, vimos como el planteamiento y resolución de problemas constituye el principal inconveniente que dificulta la aplicación en la práctica de los conocimientos teóricos y técnicos. Esa difícil vinculación ha tenido sus implicaciones en la orientación de los objetivos específicos, tal y como veremos a continuación.

3. ESTUDIO LOCAL DE LOS OBJETIVOS ESPECÍFICOS

En la Tabla 54 describimos las variables que hemos definido para el estudio de las expectativas sobre el aprendizaje escolar consideradas por cada uno de los grupos, es decir, las variables consideradas para analizar singularmente, desde diferentes puntos de vista, cada uno de los objetivos específicos enunciados.

Tabla 54

Variables para el análisis local de los objetivos específicos

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Capacidad	Ca	Capacidad cognitiva a la que hace mención el enunciado	No se menciona Capacidad genérica, no definida Capacidad cognitiva singular Hay más de una capacidad cognitiva
Contenido	Co	Tipo de contenido al que hace mención el enunciado	Contenidos conceptuales Contenidos procedimentales Ambos tipos
Contexto	Cx	Contexto al que se refiere el enunciado	Ninguno Alguno (depende de los contextos caracterizados por cada uno de los grupos)

Tabla 54

Variables para el análisis local de los objetivos específicos

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Especificidad	Ep	El enunciado se ciñe al tema de matemáticas considerado	Específico al tema Válido para varios temas
Léxico-semántico	Lx	Los enunciados contienen errores ortográficos, de vocabulario o de expresión que dificultan su entendimiento	Sí No

Las tres primeras variables se centran en las tres componentes estructurales que, en el marco de nuestro trabajo, hemos delimitado para las expectativas de aprendizaje y que describimos en el capítulo 3.

El enunciado de un objetivo puede no recoger ninguna capacidad (por ser un enunciado meramente matemático) o ésta puede ser demasiado genérica. En este caso denominaremos a ese objetivo *impreciso*. Cuando el enunciado recoge una capacidad cognitiva singular, denominaremos al objetivo *definido*, mientras que si involucra más de una de estas capacidades, lo denominaremos *elaborado*. En relación con la variable *Co*, un objetivo puede referirse a un contenido matemático conceptual, procedimental o a ambos, mientras que la variable *Cx*, recoge si el objetivo hace mención, o no, a algún contexto del tema considerado.

Estas tres componentes permiten analizar el conocimiento de los grupos de profesores en formación en cada una de sus producciones en relación a considerar sus diversas componentes en los enunciados de objetivos específicos. Para ello hablaremos de dos cualidades de las producciones: *precisión* y *riqueza*. Los cambios que se produzcan sobre la precisión y riqueza de los enunciados nos permitirán inferir el correspondiente aprendizaje de los grupos.

Reconocemos la *precisión* en un enunciado cuando la capacidad que en él se presenta pasa de ser imprecisa a estar definida adecuadamente. La precisión se refiere, por lo tanto, a la variable capacidad (*Ca*).

Señalamos la *riqueza* de un objetivo cuando se dan algunas de las condiciones siguientes:

- si el objetivo menciona dos o más capacidades cognitivas del escolar;
- si se refiere, conjuntamente, tanto a un contenido conceptual como procedimental en el mismo enunciado; o
- si se refiere a dos o más contextos diferentes de los relacionados con el tema.

La primera de estas condiciones se refiere a la variable capacidad (Ca), la segunda a la que hemos llamado contenido (Co) y la última a la variable contexto (Cx).

La variable Ep permite observar la coherencia de los enunciados de objetivos con las nociones matemáticas que conforman el tema considerado y, finalmente, la variable Lx se centra en aspectos gramaticales de los propios enunciados. Usaremos esas dos cualidades de las producciones vinculadas a las tres primeras variables y los resultados de las dos últimas para describir el aprendizaje de los grupos de profesores en formación.

3.1 Estudio de la Variable Capacidad (Ca)

El estudio de esta variable lo llevaremos a cabo por separado para cada uno de los grupos para, posteriormente, hacer un balance conjunto de sus producciones en términos de su precisión y riqueza. Usaremos la distinción de las diferentes etapas detectadas en el proceso de aprendizaje que se produce a lo largo de las seis producciones analizadas, que caracterizamos en el análisis global de los enunciados (apartado segundo de este mismo capítulo).

Producciones del Grupo Ecuaciones

En la Figura 35 mostramos la clasificación de los objetivos enunciados por el grupo ECU en las distintas producciones de la asignatura según los posibles valores de la variable Ca . Consideramos, según lo indicado antes, objetivos imprecisos aquellos que no incluyen ninguna capacidad o los que incluyen un término muy genérico.

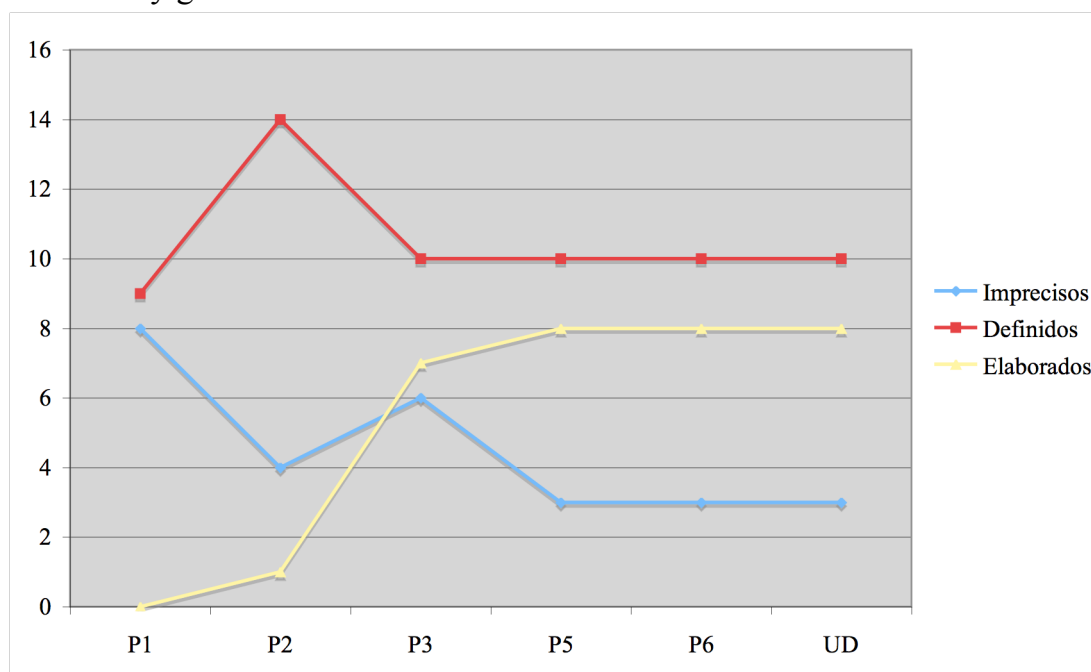


Figura 35. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo ECU a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca

Las dos etapas de revisión crítica del grupo ECU, C_1 y C_2 , se centran fundamentalmente en dos acciones. En C_1 , el grupo ECU aumenta los objetivos

definidos y disminuye los imprecisos (concretamente desaparecen los enunciados genéricos), lo que implica una mejora en la precisión de su producción. En este momento de cambio enuncia un solo objetivo elaborado, por lo que no hay todavía evidencia de riqueza. Sin embargo, en C_2 se invierte ese comportamiento. Ahí se acercan los objetivos imprecisos y los definidos, lo que repercute negativamente en la precisión, pero al mismo tiempo aumentan considerablemente los elaborados, mejorando así la riqueza global de la producción P_3 . Como dijimos antes, la consideración de las competencias fue crucial en ese enriquecimiento de los enunciados. Así, por ejemplo, el objetivo de P_2 “*determinar* qué ecuaciones son de primer grado dada una lista de ellas”, aparece enunciado en P_3 de la siguiente forma: “*determinar* las ecuaciones que son de primer grado dada una lista de ellas y *justificar* la elección”⁶. En la etapa de revisión crítica, se produce una mejora bien en la precisión o bien en la riqueza de los enunciados, pero no ambas.

En C_3 , etapa de consolidación en la producción de objetivos del grupo, aumenta ligeramente el número de objetivos elaborados (llegando a ser más de un 38% de los enunciados propuestos). También se mantienen los objetivos definidos y, sobre todo, disminuyen los imprecisos hasta representar menos de un 15% del total. Por lo tanto, se consolida la riqueza y se refuerza la precisión en su producción, simultáneamente. Cuando el grupo entra en la etapa de estabilidad (a partir de C_5), los enunciados no se alteran respecto de esta variable.

Como vimos en el análisis global de los enunciados, el grupo ECU modificó en numerosas ocasiones el enunciado de sus objetivos y la organización de éstos en focos de contenido. Sin duda estos cambios repercutieron positivamente en la precisión y en la riqueza de los objetivos enunciados.

El aprendizaje global realizado desde P_1 hasta la unidad didáctica muestra que el porcentaje de objetivos imprecisos disminuyó considerablemente desde un 46% hasta el 14%, mantuvo cierta estabilidad respecto a los objetivos bien definidos pasando del 54% al 47%, e incrementó muy positivamente los objetivos elaborados, que pasaron del 0% al 39%. El aprendizaje del grupo ECU respecto a la variable *capacidad* ha sido importante en términos porcentuales.

Producciones del Grupo Fracciones

Las variaciones en la clasificación de los objetivos del grupo FRA las mostramos en la Figura 36.

La situación de partida del grupo FRA, con un claro predominio de los objetivos definidos (más de un 73% del total), se mantiene hasta P_2 . Sin embargo, en C_2 , dentro de su única etapa de revisión crítica y donde se concentra el mayor cambio en el conocimiento del grupo, los objetivos definidos descienden a casi su quinta parte y se equiparan a los imprecisos. Pero a cambio, el número de objetivos elaborados asciende considerablemente, por la transformación y mejora de enunciados ya bien definidos desde el comienzo.

⁶ Introducimos las cursivas para destacar las capacidades enunciadas.

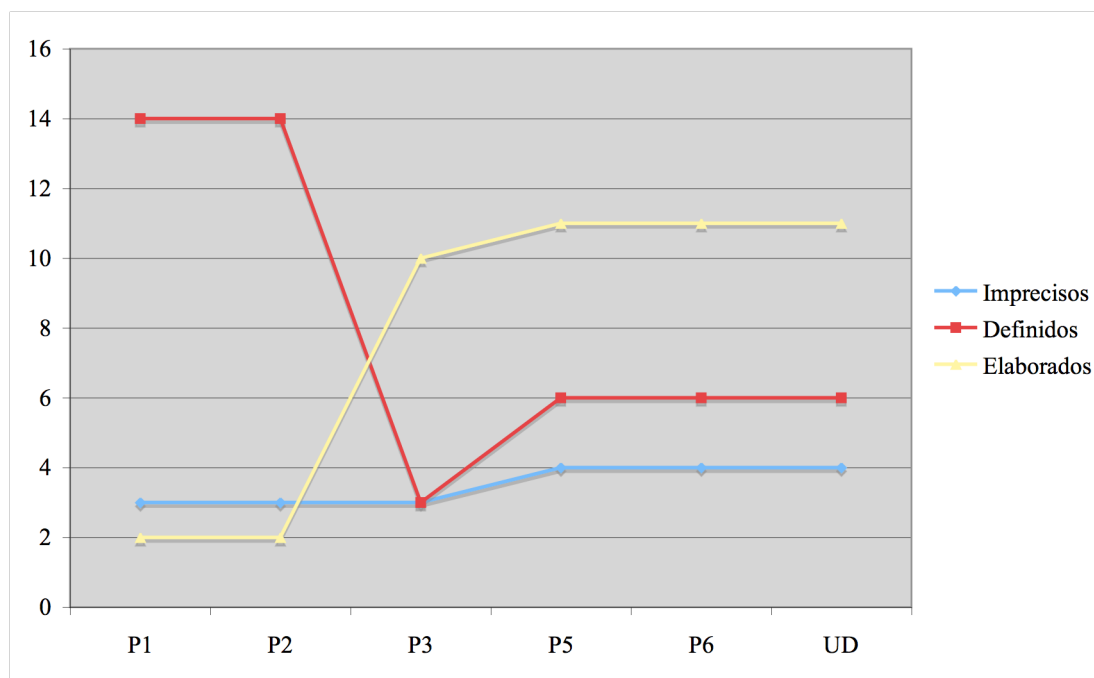


Figura 36. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca

Después de la presentación de P₁, los formadores insistimos en que el grupo explicitara el significado de varios de los objetivos propuestos [081124S31_8'27'']:

AM. En el primero, ¿qué queréis abarcar? Lo habéis metido en el apartado de significados y usos. En ese apartado prácticamente todos (los objetivos) son usos operativos, pero en el primero “comprender y utilizar los distintos tipos de fracciones”, ¿qué habéis pretendido?

PF. Que sepan cómo se utiliza, o sea, en qué situaciones se utiliza... Si yo tengo un problema de reparto, que sepas que la fracción se está usando como reparto, y que si aparece un operador, que sepa que es un operador y que no tiene otro significado... Qué sepan comprender en cada situación concreta, qué significado se está dando de la fracción y utilizarlo con arreglo a eso.

LR. Eso tendría dos ejercicios básicos. El primer enunciado es como el título del foco... estáis diciendo lo mismo. Y luego estáis diciendo que el desarrollo técnico (de ese foco) es éste (el listado de objetivos salvo el primero). El desarrollo técnico es de un nivel más bajo. Por ejemplo, yo pondría ahí una tarea que tuviera distintas expresiones: dado un operador, una pizza dividida en tantas partes, una división, una proporción... escribe en forma de fracción las nociones que están expresadas gráficamente, como división, como reparto, ... Otro, de un nivel de complejidad más alto, doy una fracción, e inventa un problema de proporcionalidad y que se resuelva con esta fracción, o inventa un problema de porcentaje que se resuelva con esta fracción, o inventa un problema de reparto y que se resuelva con esta fracción o en el que intervenga esta fracción. Y con todo y con eso queda un poco... Porque comprender es veo esto y como fracción se escribe de esta manera, al menos

en una comprensión básica. Tengo un operador y esto es una fracción, veo una proporcionalidad y digo qué se expresa con esta fracción. Y utilizar: tengo esta fracción, utilízala para...

En C₃, etapa de consolidación del grupo, hay un aumento generalizado, pero leve, de cada grupo de objetivos, con lo que acaba primando sensiblemente la riqueza (evidente en C₂) sobre la precisión de sus enunciados. Los objetivos permanecen inalterados durante la etapa de estabilidad que alcanza el grupo a partir de la producción P₅.

El aprendizaje final que ha realizado el grupo FRA desde los enunciado de P₁ hasta los de la UD muestran muy poca variación en el porcentaje de enunciados imprecisos, del 17% al 19%, disminución porcentual notable de los objetivos definidos, del 77% al 29%, y un aumento considerable en el porcentaje de objetivos elaborados, que pasa del 5% al 52%. Por lo que respecta a la variable Capacidad, el aprendizaje del grupo FRA parece concentrarse en mejorar la riqueza de enunciados bien definidos previamente, manteniendo un margen conjunto de enunciados imprecisos cercano al 20%.

Producciones del Grupo Probabilidad

La Figura 37 recoge la variación en los objetivos específicos propuestos en las diferentes producciones del grupo PRO.

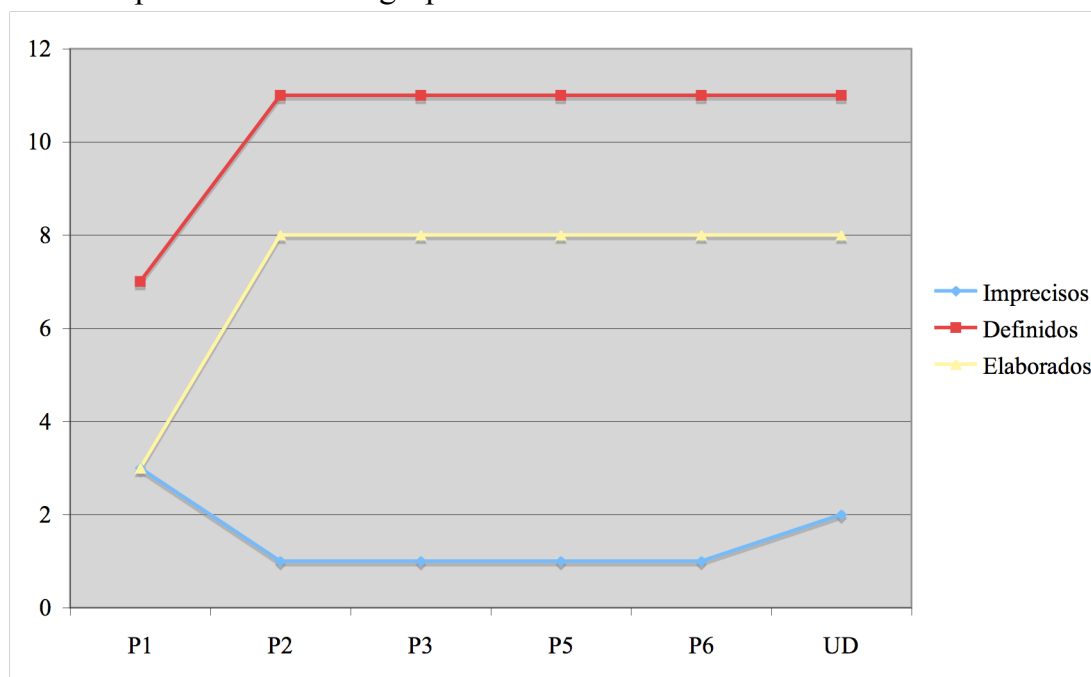


Figura 37. Clasificación de los objetivos enuncados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca

Como señalamos en el análisis global de las producciones sobre objetivos específicos, el cambio en el conocimiento del grupo PRO relativo a enunciados de objetivos operativos parece centrarse casi en exclusiva en C₁. Entre las dos primeras producciones concentran toda su reflexión y sus propuestas de cambio en torno a estas expectativas de aprendizaje. El aprendizaje total del grupo PRO

que se aprecia entre P_1 y la unidad didáctica, viene caracterizado por los siguientes datos: los objetivos imprecisos disminuyen desde un 23% a un 10% del total; se mantienen porcentualmente los enunciados definidos, que pasan del 54% al 52%; finalmente los objetivos elaborados propuestos, que incluyen más de una capacidad en su enunciado, pasan del 23% al 38%. Se produce un incremento de los objetivos bien enunciados y elaborados y, también, una disminución de los imprecisos.

En su unidad didáctica, el grupo PRO destacó cuatro objetivos que consideran especialmente relevantes. Esos cuatro enunciados provienen de P_1 y uno de ellos se modifica en C_1 ejemplificando la mejora que acabamos de mencionar. Estos objetivos, tal y como aparecen en la unidad didáctica⁷, son:

- 1. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.*
- 7. Comprender y usar la regla de Laplace.*
- 4. Distinción de sucesos dependientes e independientes*
- 13. Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana.*

El que cambia en C_1 fue el primero, que en P_1 aparecía, como: “1. Determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio”. Es evidente que la producción P_2 goza de una alta precisión y riqueza, pero después de esa etapa de revisión crítica, las modificaciones desaparecen.

El listado de objetivos propuesto en P_2 se mantiene inalterable hasta la unidad didáctica; es decir, en C_2 , donde se consolida la producción y en C_3 , C_5 y C_6 donde se alcanza la estabilidad y no se introducen modificaciones nuevas. Sin embargo, existe un indicador que pone de manifiesto que la precisión y riqueza alcanzadas en P_2 se relativiza, ya que en la unidad didáctica introducen un nuevo objetivo específico: “24. Dominar las propiedades básicas de la probabilidad” que resulta claramente impreciso por la generalidad con la que se enuncia. Las propiedades de la probabilidad son muchas y variadas y dominar, puede implicar desde definir o demostrar, a ejemplificar o aplicar.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

Finalmente, en la Figura 38 recogemos el análisis de la variable Ca en las diferentes producciones sobre objetivos específicos del grupo RAZ.

Inicialmente, existe una preponderancia evidente de los objetivos definidos (un 85% del total). En la primera etapa de revisión crítica del grupo, C_1 , hubo un claro aumento de objetivos y los nuevos enunciados se distribuyen en las tres categorías. Se incrementan casi uniformemente los objetivos imprecisos, definidos y elaborados. En la siguiente etapa de aparente consolidación de este

⁷ Si bien la numeración la hemos actualizado según el sistema que hemos empleado para analizar los diferentes enunciados.

grupo, C_2 , se mantienen los objetivos definidos y los elaborados y sólo disminuyen ligeramente los imprecisos equiparándose a los elaborados.

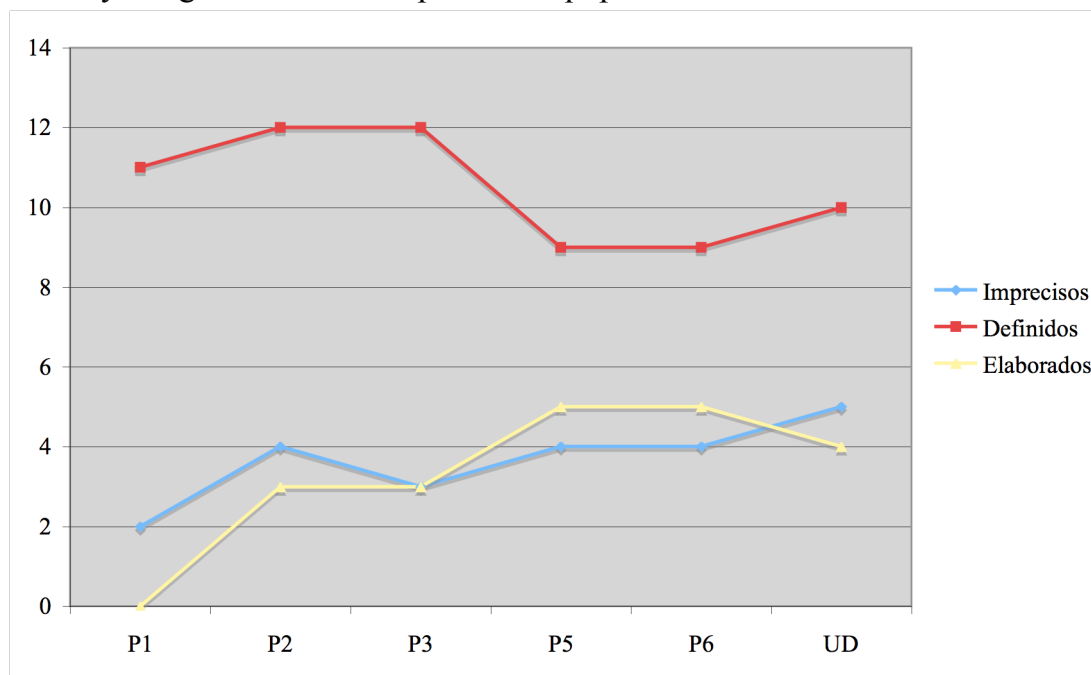


Figura 38. Clasificación de los objetivos enunciatos por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable Ca

En la segunda etapa de revisión crítica del grupo RAZ, C_3 , disminuyen los objetivos definidos más de lo que aumentan los elaborados. Aunque los objetivos imprecisos retoman el valor alcanzado en P_2 , podemos afirmar que el grupo avanza en su aprendizaje respecto de la variable Ca , en lo relativo a riqueza de los objetivos. Un ejemplo lo constituye el objetivo “4. Determinar la función asociada a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes”, que en C_3 pasa a ser “4. Determinar justificadamente la función asociada a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes”.

La etapa de consolidación en C_5 y de estabilidad en C_6 , no alteran la clasificación de los objetivos con respecto a la variable Ca . Además, muestran cierto retroceso en la cantidad de objetivos elaborados y un ligero aumento en el número de imprecisos en la unidad didáctica.

El aprendizaje final de este grupo muestra inseguridad en alcanzar dominio sobre la variable analizada: la precisión alcanzada por este grupo es sólo relativa mientras que la riqueza es notablemente escasa, muy inferior al resto de los grupos. Los valores comparados entre P_1 y la unidad didáctica muestran que: hay un incremento porcentual apreciable en los enunciados imprecisos, que va del 15% al 26%; se produce una disminución porcentual importante en los enunciados bien definidos, que va del 85% al 55%; el incremento final en los enunciados elaborados es escaso, pasando del 0% al 19%.

La inseguridad de este grupo para precisar sus enunciados de objetivos específicos para su tema de trabajo, se muestra en esta variable con nitidez.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Capacidad (Ca)

Los grupos FRA y PRO muestran un mismo patrón: esfuerzo por reducir la imprecisión de sus enunciados desde C_1 (desde C_2 en el caso de FRA) y, además, por considerar la riqueza en un número apreciable de enunciados desde las primeras producciones. Una vez consolidados unos enunciados correctos y aceptables (en porcentaje superior al 80%), estos objetivos se mantienen inalterables o con modificaciones muy puntuales.

En ambos casos se nota cierto descuido o despreocupación por controlar esta variable, lo que se muestra en el ligero incremento de enunciados imprecisos en las producciones finales, además de una persistencia de éstos a lo largo de la asignatura. No obstante, también en ambos casos el aprendizaje es intenso inicialmente, mostrando una considerable destreza para enunciar objetivos con precisión y riqueza. Estas dos cualidades son claras en las producciones de estos dos grupos.

El aprendizaje del grupo ECU es muy similar, desde P_3 , al de PRO. La principal diferencia entre ambos grupos radica en el cambio C_2 ya que, ahí, ECU manifiesta un incremento de enunciados imprecisos con una disminución de los definidos y un incremento importante de los elaborados. No obstante, en sus producciones finales alcanza una notable precisión y riqueza en sus enunciados, con resultados muy similares a los del grupo PRO.

En el caso del grupo RAZ, es evidente que su proceso de aprendizaje es más accidentado que el del resto. Este grupo pone de manifiesto cierto descuido en el control de los enunciados imprecisos, que se mantienen e incrementan a lo largo de la asignatura. El equilibrio y la estabilidad que muestran el resto de grupos en relación con los enunciados definidos y elaborados, no es evidente en las producciones de RAZ, como se constata en las oscilaciones de C_3 y C_6 .

En general, en la etapa de revisión crítica de cada uno de los grupos apreciamos un esfuerzo bien por mejorar la precisión o por mejorar la riqueza de los enunciados. Esto es así ya que las principales modificaciones a los enunciados de los objetivos específicos surgen en el cambio C_1 , con motivo de las intervenciones y debates realizados tras las presentaciones y también en el cambio C_2 , tras la reflexión sobre competencias y su vinculación con los objetivos enunciados. En este segundo momento, las modificaciones consisten, fundamentalmente, en un aumento de las capacidades incluidas en cada enunciado y la sustitución de algunas de ellas para referir capacidades vinculadas con las competencias matemáticas generales consideradas. Así lo vemos en los cambios C_1 y C_2 del grupo ECU, en el cambio C_2 del grupo FRA y en el cambio C_1 del grupo RAZ. El grupo PRO presenta su segunda producción después de haber recibido la información sobre vinculación entre objetivos y competencias, razón por la cual mejora su precisión y riqueza directamente en C_1 .

En la etapa de consolidación asistimos a una mejora simultánea de la riqueza y precisión de los enunciados presentados por los grupos. Así se comprueba en los grupos ECU y FRA en C_3 , mientras que en el grupo RAZ ocurre en C_2 y en C_3

sólo en relación a la riqueza de enunciados. En el caso del grupo PRO, hemos visto que la mejora de precisión y riqueza se adelanta una etapa.

Finalmente, todos los grupos presentan también una alta estabilidad respecto a la precisión y riqueza de sus enunciados durante las etapas de estabilidad establecidas con anterioridad, durante el estudio de la permanencia e innovación en el enunciado de objetivos.

Localmente, los enunciados de los objetivos mejoran al comienzo en los cuatro grupos, a lo largo de las distintas producciones, y se hacen estables respecto de las competencias consideradas.

Se aprecia en todos los grupos un alto porcentaje, 86%, 81%, 90% y 74% respectivamente, en objetivos cuyos enunciados incluyen una o varias capacidades específicas. En los grupos ECU, FRA y PRO, el porcentaje de enunciados con más de una capacidad es cercano o superior al 40%.

3.2 Estudio de la Variable Contenido (Co)

En el enunciado de los objetivos propuestos por los cuatro grupos de profesores en formación, distinguimos tres valores en esta variable: aquellos que en la componente del contenido matemático se refieren a aspectos conceptuales del tema considerado (“determinar la *constante de proporcionalidad*”), de aquellos que se refieren a aspectos procedimentales (“dominio en el uso de *la regla de tres*”) o bien de aquellos que se refieren a ambos aspectos (“inventar y resolver *problemas* en los que intervengan *relaciones de proporcionalidad*”).

En general, el número de objetivos distinguidos por esta característica se modificó a lo largo de las diferentes producciones, pero en ningún grupo cambió el predominio del campo conceptual o el procedimental. Característica común a todos los grupos es que, a lo largo de las producciones, se incrementan los objetivos que abordan aspectos conceptuales y procedimentales conjuntamente.

Las Figuras 39, 40, 41 y 42 representan la clasificación de objetivos según esta variable para cada uno de los grupos.

Los grupos ECU, FRA y PRO mantienen un patrón similar entre ellos. Dan prioridad desde el comienzo a uno de los tipos de contenidos y este predominio se mantiene hasta el final, pero disminuyendo paulatinamente la diferencia. En el caso de estos tres grupos, el número de enunciados que contemplan ambos tipos de contenidos a la vez se incrementa sensiblemente en los primeros momentos de cambio y se mantiene, en un valor intermedio, entre los otros dos tipos de contenidos. Las tres últimas sesiones denotan una gran estabilidad en estos aspectos.

Los grupos ECU y PRO dan prioridad al conocimiento conceptual sobre el procedimental; FRA, por el contrario, da prioridad al conocimiento procedimental sobre el conceptual. Retomando el análisis de la variable anterior, observamos que estos tres grupos mantenían igualmente un mismo patrón respecto a la precisión y riqueza de las capacidades enunciadas, aunque ECU y PRO destacaban por los enunciados definidos por encima de los elaborados.

Considerando las dos variables conjuntamente, el predominio de contenidos conceptuales parece que se ajusta mejor a objetivos enunciados con una sola capacidad, mientras que el predominio de los contenidos procedimentales facilita o conduce los enunciados de objetivos elaborados, con más de una capacidad.

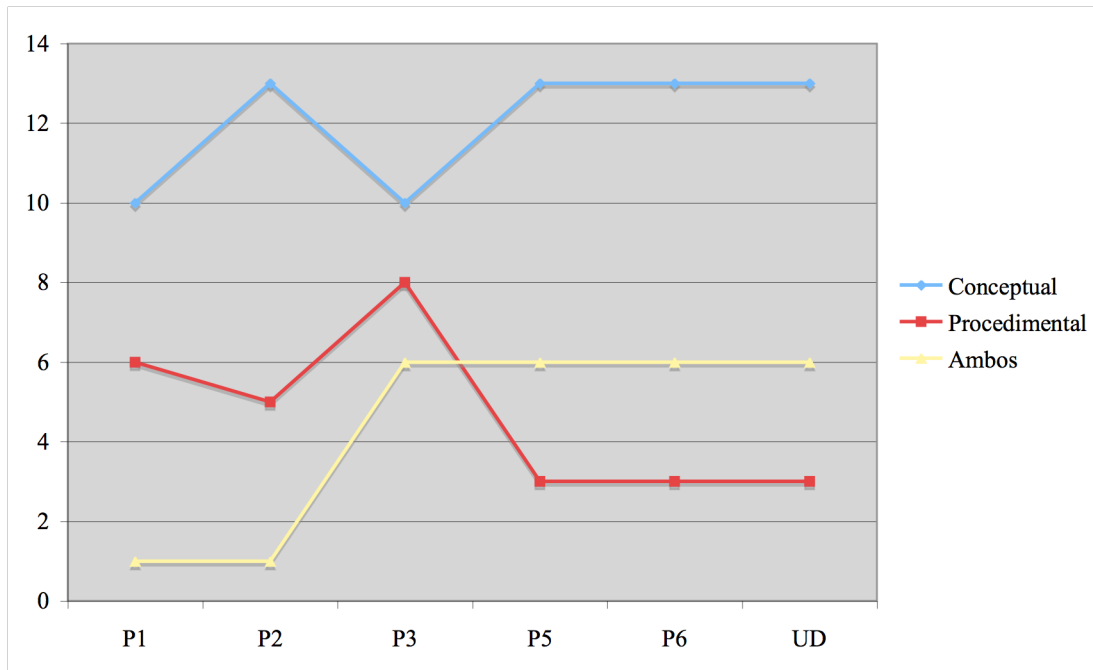


Figura 39. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo ECU a lo largo de sus distintas producciones según la variable *Co*

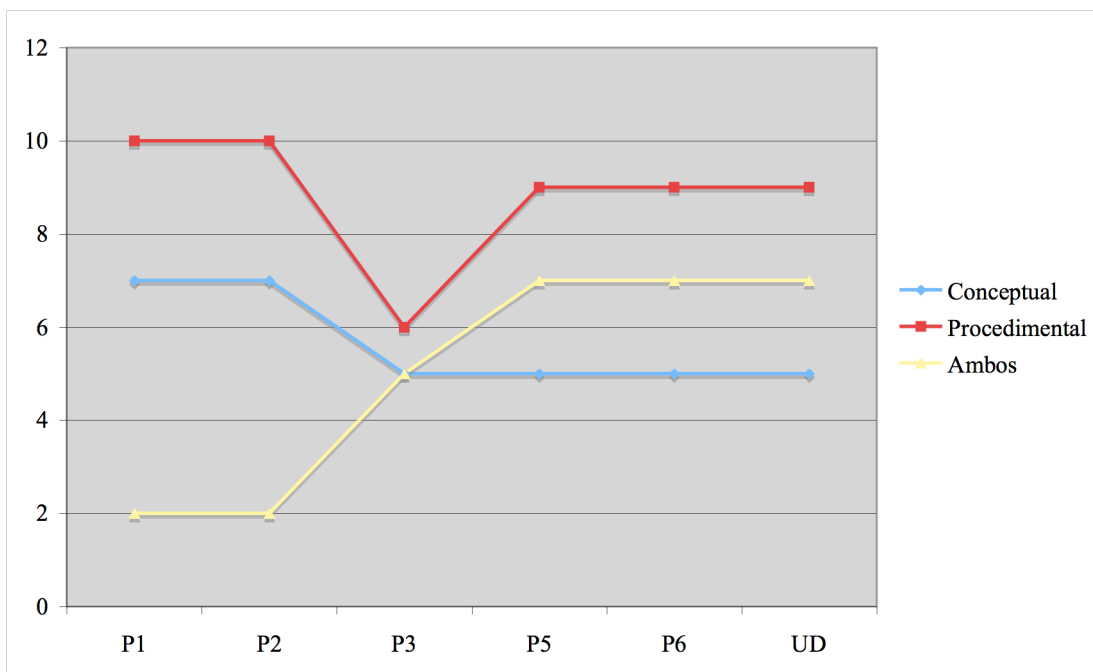


Figura 40. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable *Co*

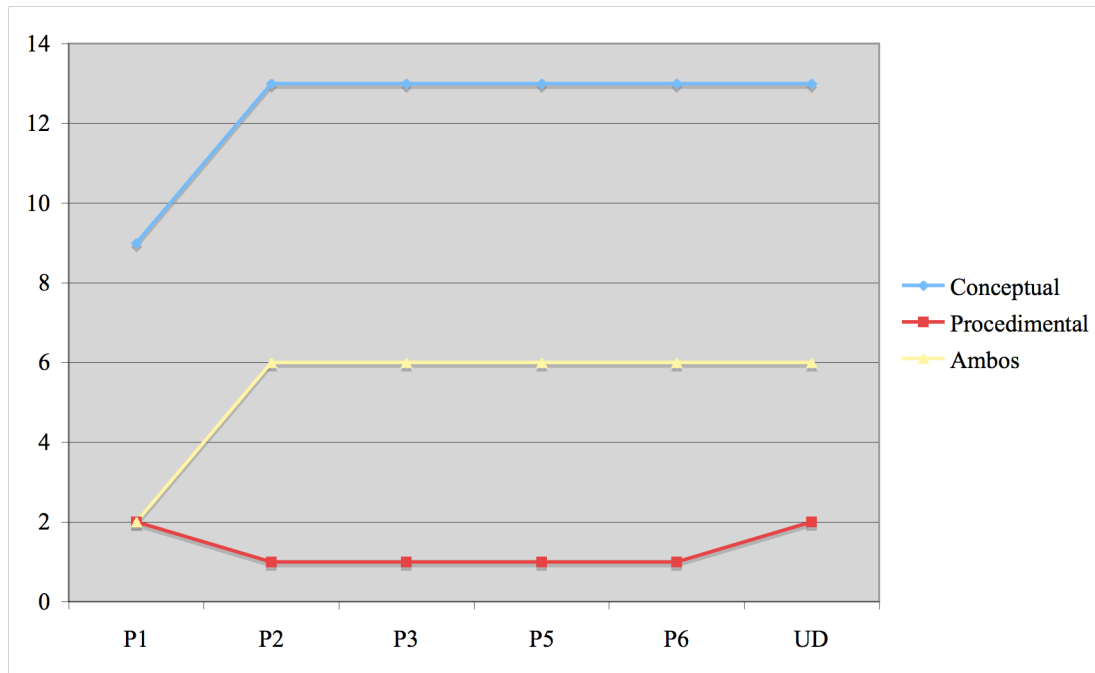


Figura 41. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable C_o

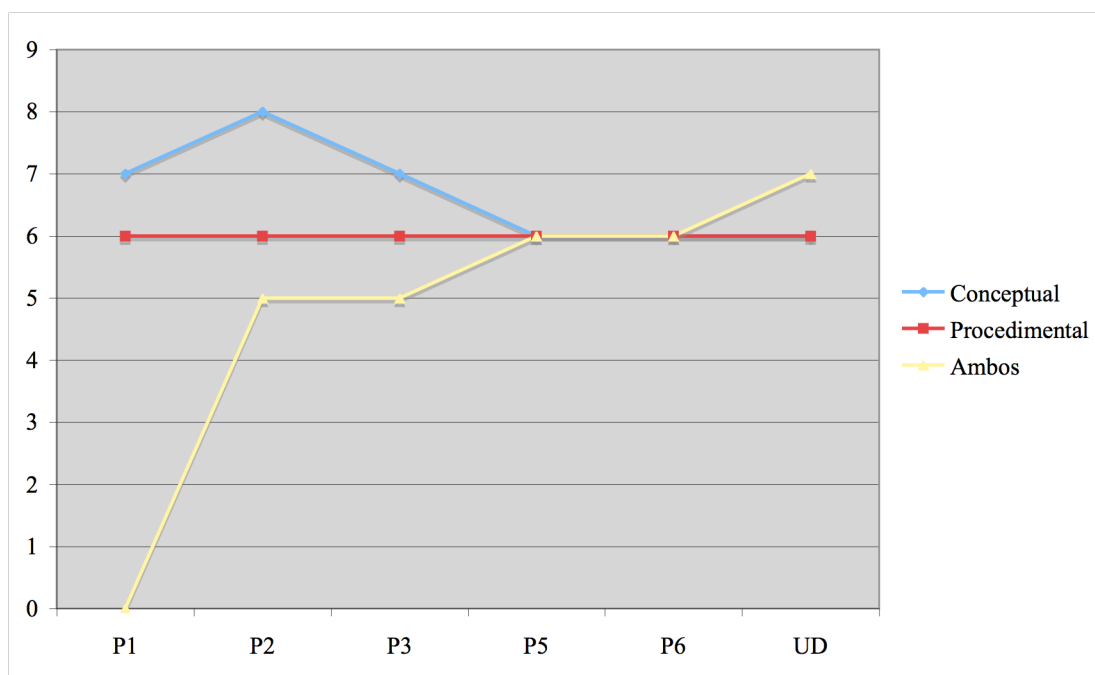


Figura 42. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable C_o

En estas etapas iniciales de revisión crítica y consolidación se detectan oscilaciones de los enunciados con prioridad conceptual y/o procedimental y un incremento sostenido de los enunciados que contemplan ambos tipos de conocimientos. El aprendizaje de estos grupos en relación a esta variable, se centra en el importante incremento que se produce en los cambios C_1 , C_2 y C_3 en relación con la consideración conjunta de contenidos conceptuales y

procedimentales. Las etapas de estabilidad también se detectan en esta variable, y para estos grupos por la ausencia práctica de cambios.

Por su parte, el grupo RAZ muestra un patrón distinto en el que hay un porcentaje muy similar de contenidos conceptuales y procedimentales; los enunciados que incluyen procedimientos se mantienen a lo largo de todas las producciones. Los enunciados que consideran ambos tipos de conocimientos, que no existían al inicio, van creciendo hasta igualar su porcentaje con los otros dos valores. De nuevo, este grupo sigue un esquema de aprendizaje diferente al resto, pues se caracteriza por la búsqueda de equilibrio mediante la presencia en sus enunciados de los diversos tipos de contenido.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Contenido

De manera conjunta, esta variable pone de manifiesto una mejora de la habilidad para enunciar objetivos específicos, es decir, un progreso en el proceso de aprendizaje de los profesores en formación. Durante la etapa de revisión crítica todos los grupos varían los enunciados relativos a contenidos conceptuales y procedimentales, aumentando su frecuencia en una de las categorías y disminuyendo la frecuencia de la otra. En esta misma etapa todos los grupos incrementan el número de enunciados que incluyen ambos tipos de conocimientos, frecuencia que aumenta también en la etapa de consolidación en algunos casos. En la etapa de estabilidad no se producen cambios de frecuencias apreciables en los enunciados de los objetivos de los distintos grupos respecto de esta variable

La riqueza de los objetivos específicos en relación con los conocimientos considerados va en aumento progresivo a lo largo del proceso de aprendizaje de los profesores en formación. Todos los grupos incrementan su frecuencia en la categoría de objetivos que consideran conjuntamente contenidos conceptuales y procedimentales, desde la primera producción. Al presentar la unidad didáctica el porcentaje de enunciados en esta categoría es similar para todos los grupos y próximo a un tercio del total. Así, el 27% de los objetivos enunciados por el grupo ECU, el 33% de los del grupo FRA, el 29% de los del grupo PRO y el 32% de los del grupo RAZ, consideran ambos tipos de contenidos.

3.3 Estudio de la Variable Contexto (Cx)

Para analizar los contextos que manejan los grupos de futuros profesores en el enunciado de objetivos, elegimos definir valores locales específicos de esta variable para cada uno de los grupos. El criterio para esta elección se sostiene en que cada uno de los grupos de trabajo se centra en temas matemáticos diferentes y, por lo tanto, sus respectivos conceptos y procedimientos dan respuesta a cuestiones y necesidades distintas, resuelven problemas diferentes.

El análisis del trabajo de cada uno de los grupos lo centramos en:

- el modo e intensidad en que consideran los contextos previamente propuestos,
y

- en la consideración de otros contextos no contemplados explícitamente en el análisis fenomenológico presentado.

Esto permite describir la riqueza de los enunciados propuestos desde la tercera componente de los objetivos, lo cual proporciona un nuevo punto de vista, complementario con las capacidades y contenidos ya considerados.

Producciones del Grupo Ecuaciones

Al desarrollar el análisis fenomenológico como parte del análisis de contenido, el grupo ECU identificó tres contextos a partir de tres cuestiones que, desde su punto de vista, se pueden afrontar mediante las nociones de su tema:

1. ¿Cuál es el dato desconocido conocida la igualdad entre dos combinaciones afines de ese dato?
2. ¿Cuáles son dos datos desconocidos conocidas dos relaciones entre ellos?
3. ¿Cuál es la intersección de dos rectas?

En su planteamiento original, el grupo ECU señala que la primera cuestión se limita a ecuaciones y que las dos segundas son dos maneras alternativas de describir la cuestión principal que puede abordarse con los sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas. Esta propuesta constituye una organización de los contextos en función de los sistemas de representación fundamentales en su tema: el simbólico y, subordinadamente, el gráfico.

Sin embargo, en los objetivos específicos que enuncia el grupo no llega a considerar explícitamente estos contextos ni sus posibles aplicaciones posteriores. El grupo se queda en un paso previo, refiriendo exclusivamente usos meramente técnicos del tema. Su acercamiento resulta tradicional en este sentido, ya que se basó en la adquisición de técnicas y destrezas sobre el manejo de símbolos y sobre operaciones básicas con polinomios, en utilizar fórmulas y en ejecutar algoritmos. Hay también un énfasis en el significado formal de la nomenclatura y la terminología matemática.

De los cuarenta y tres objetivos que enuncia en todas las producciones, sólo hay cinco de ellos que se salen de ese contexto técnico debido a que mencionan problemas o situaciones en los que aplicar su tema. En cualquier caso, no especifica usos de las nociones que se ponen en juego en los problemas, sino que los objetivos enunciados resultan demasiado abiertos. Las últimas versiones de estos enunciados son:

- “15. Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación o sistema que modele dicho enunciado y, posteriormente, comprobar si la/s solución/es se ajustan al contexto de problema”.
- “18. Construir expresiones algebraicas que representen una magnitud o una situación matemática”.
- “22. Inventar problemas en situaciones y contextos variados que se resuelvan con ecuaciones y sistemas”.

- “38. Dada una ecuación o sistema, inventar un problema que se resuelva con dicha estructura matemática”.
- “42. Detectar problemas mal planteados y discutir las razones”.

El objetivo 15 apareció en P₁, los objetivos 18 y 22 en P₂, el objetivo 38 en P₃ y por último el 42 en P₅. Todos ellos, salvo el 18, permanecen en su propuesta en la unidad didáctica final.

Producciones del Grupo Fracciones

En el análisis fenomenológico que llevó a cabo, el grupo FRA identificó cinco cuestiones básicas a las que puede responder el tema de fracciones, que le permitió delimitar cinco contextos diferentes. Aunque acotar estas cinco cuestiones les llevó cierto tiempo a los futuros profesores, el nivel de detalle alcanzado es notable. Estos contextos, tal y como el grupo los presentó en su unidad didáctica, son los siguientes:

1. *Reparto*, que aborda la pregunta: ¿cuánto corresponde a cada uno?
2. *Medida*, que aborda la pregunta: dada una unidad ¿cuántas partes caben?
3. *Operador*, que aborda la pregunta: ¿en qué se transforma?
4. *Razón y proporción*, que aborda la pregunta: ¿qué relación tienen?
5. *Solución de $ax = b$* , que aborda la pregunta: conocido un múltiplo ¿cuál es la cantidad?

Un ejemplo de objetivo enunciado por este grupo, que asociamos con el contexto de reparto, es: “6. Utilizar fracciones que expresan particiones de la unidad”. De un modo más literal, el objetivo “17. Uso de fracciones en situaciones de medida”, si bien está enunciado en términos algo genéricos, se refiere al contexto de medida. En el contexto de operador un ejemplo de objetivo es: “13. Calcular la fracción de una cantidad dada”.

En relación con los dos últimos contextos, el grupo reconoció en varias ocasiones que caían en parcelas de alguno de los otros grupos de la asignatura. De hecho, en la primera producción incluye algún enunciado relacionado con el contexto de razón y proporción, como: “15. Saber interpretar una escala”, mientras que en ningún momento aparece ninguno vinculado con el contexto de solución de una ecuación.

Con el objeto de clasificar los objetivos según los contextos mencionados, además de los cinco anteriores, consideramos una sexta categoría de tipo técnico o formal que no coincide con ninguna de las anteriores y que tiene que ver con el dominio de hechos y destrezas sobre fracciones y sus notaciones. Un ejemplo es “3. Reconocer numerador y denominador”. También consideramos una séptima categoría global, en la que incluimos aquellos enunciados que sintetizan dos o más de los contextos mencionados, como ocurre en el objetivo “22. Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas interpretaciones de las fracciones”.

La Figura 43 muestra gráficamente la frecuencia de objetivos enunciados por cada uno de esos contextos diferentes en las sucesivas producciones del grupo FRA. No mostramos en la Figura 13 la columna correspondiente al quinto contexto (solución de $ax = b$), por no tener presencia en ninguna de las producciones.

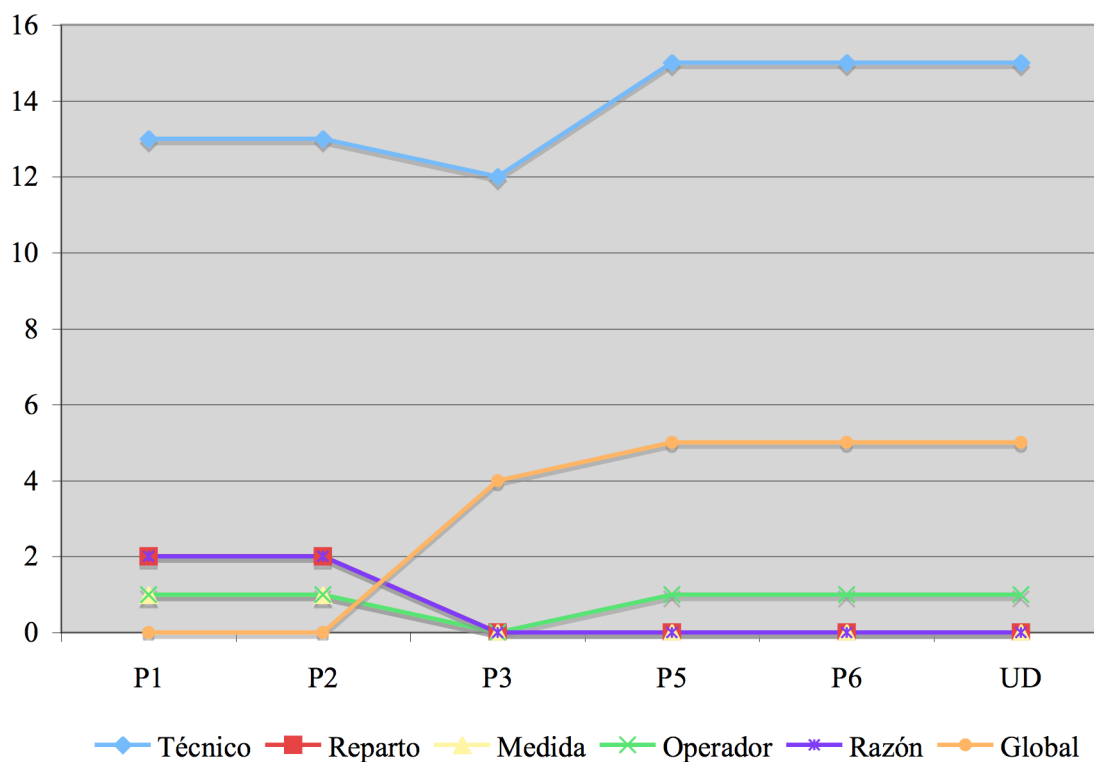


Figura 43. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo FRA a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx

Según lo que hemos visto hasta ahora, la única etapa de revisión crítica de este grupo se sitúa en C_2 , mientras que en C_3 entran en la etapa de consolidación

En las primeras producciones es evidente la preponderancia de usos técnicos básicos en el enunciado de objetivos del grupo, si bien nunca serán inferiores al 66% del total a lo largo del resto de la asignatura.

Sin embargo, en C_2 , esa mención a los diferentes contextos delimitados por el grupo desaparece pero, simultáneamente, aumentan los enunciados con referencia global a los contextos. Este aumento es coherente con otra importante modificación que realiza el grupo en ese momento de cambio: precisar algunos enunciados aumentando las capacidades involucradas. Esto podemos ejemplificarlo en el caso del enunciado de P_1 “19. Resolver problemas”. Cuando el grupo presenta P_3 , ese objetivo se transforma en otros dos, que son: “22. Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas interpretaciones de las fracciones” y “29. Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones”. En este caso, la modificación pasa de no precisar ningún contexto de aplicación a mencionar la conveniencia de considerar varios de ellos.

En C_3 , además de incrementar ligeramente el número de objetivos que mencionan varios contextos simultáneamente, el grupo también establece la mayor presencia de usos técnicos de las nociones relacionadas con las fracciones (71%). El único objetivo que alude a un contexto particular es “13. Calcular la fracción de una cantidad dada”, que se relaciona con el contexto de operador y es el único que con esa orientación se mantiene desde la primera producción.

En el resto de producciones de la asignatura, esta clasificación de los objetivos no se modifica ya que no se realizan modificaciones en sus enunciados. Por lo tanto, la riqueza de los enunciados del grupo FRA aumenta moderadamente en las primeras producciones, con motivo de la consideración de diferentes contextos en casi la cuarta parte de sus objetivos.

Producciones del Grupo Probabilidad

El grupo PRO fue el primero en acotar con gran precisión tres contextos en función de tres grandes cuestiones a las que da respuesta la probabilidad. Sin embargo, como veremos a continuación, no explota este avance en el enunciado de los objetivos. Los contextos y las cuestiones asociadas que identifica y enuncia son las siguientes:

1. *Medida de la incertidumbre*, que aborda la pregunta ¿cómo cuantificar lo incierto?
2. *Estudios de prevención*, que aborda la pregunta ¿qué puede ocurrir?
3. *Toma de decisiones*, que aborda la preguntas ¿qué conviene hacer? ¿He escogido correctamente?

De manera global, es posible leer esos contextos de manera secuencial: en primer lugar, es necesario tomar algunas mediciones o lecturas en términos probabilísticos y, después, usarlos para prevenir acontecimientos o para tomar decisiones con criterio. De esta manera, es prácticamente imposible distinguir en el enunciado de objetivos cuáles se centran en el segundo y cuáles en el tercer contexto. En nuestro análisis, distinguimos aquellos referidos al cálculo de probabilidades, que de una manera más genérica tiene que ver con la medida de la incertidumbre, de aquellos otros en los que usa esa información para justificar algunas acciones o decisiones.

Por ejemplo, el objetivo “1. Determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio” es un enunciado que asociamos con el primer contexto, mientras que “13. Interpretar con actitud crítica la información recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana” lo relacionamos con el segundo o el tercero.

Además de estas dos categorías, de nuevo incluimos otra relativa a aspectos técnicos y formales de matemáticas, que no entran de manera específica en ninguno de los casos anteriores. Un ejemplo de este tipo de objetivos es “2. Expresar sucesos como conjuntos y viceversa”.

La Figura 44 recoge la frecuencia de los diferentes contextos en las sucesivas producciones sobre objetivos del grupo PRO a lo largo de la asignatura.

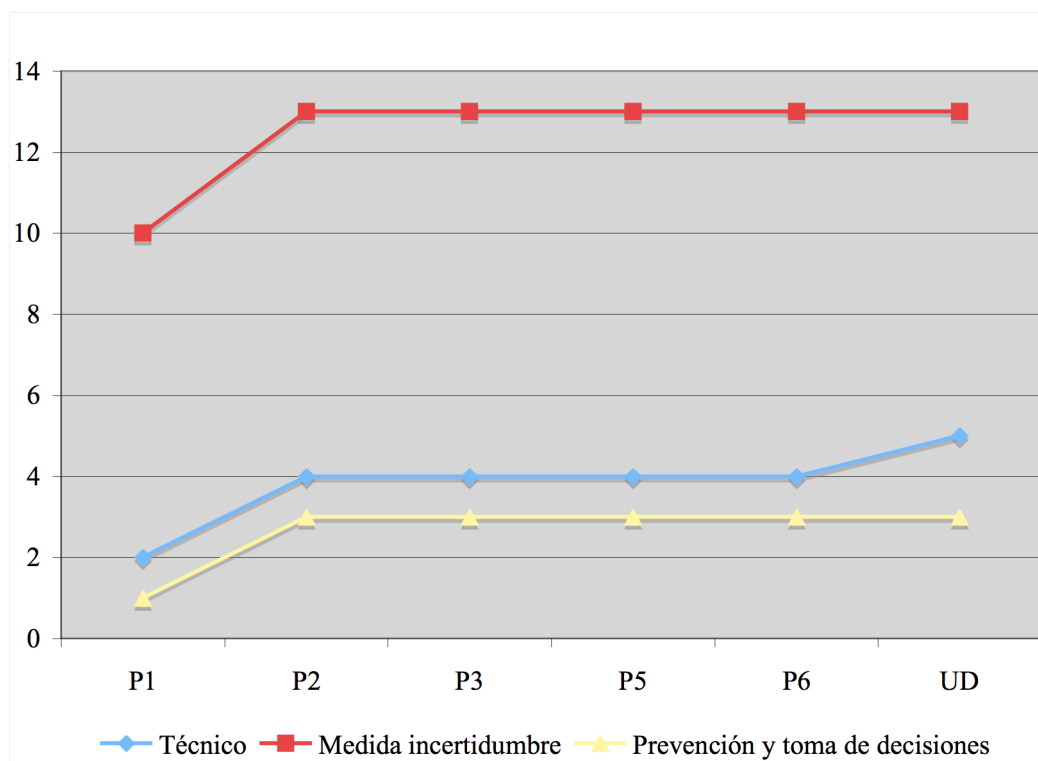


Figura 44. Clasificación de los contextos en los objetivos enunciados por el grupo PRO a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx

La misma estabilidad que presentan las producciones del grupo PRO con respecto a otras variables, tiene presencia en el análisis de los contextos. La preponderancia de los objetivos relacionados con el cálculo de probabilidades en todas las producciones es evidente (65% del total, en promedio), además de la relativa presencia de objetivos de tipo técnico y la escasa de enunciados que aluden simultáneamente a varios contextos. Con la revisión de ese listado de objetivos y con la relación entre objetivos y competencias (cambios C_1 y C_2), aumentan uniformemente tanto unos como otros.

A pesar de la correcta organización de los contextos de su tema, el grupo PRO hace un claro hincapié en el enunciado de objetivos que tienen que ver con el cálculo de probabilidades, muy por encima de los que se centran en usar esos cálculos para dar respuesta a otras cuestiones. Es un hecho que se centra de manera clara en un solo contexto y no revisa y profundiza los enunciados para dar cabida a otros. Desde el punto de vista de la variable contextos empleados, no hay mejora en la riqueza de los enunciados del grupo PRO.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

Como vimos en el análisis de las prioridades de aprendizaje realizadas por los grupos, el grupo RAZ empleó su categorización de contextos para delimitar esas prioridades, con lo cual el enunciado de los objetivos los considera de manera sistemática. Tres de los cuatro contextos que este grupo delimita en su unidad didáctica, los enuncian en forma de cuestiones y el cuarto desde un punto de vista matemático. Estos contextos son los siguientes:

1. ¿Qué relación hay entre dos magnitudes?
2. Calcular el cuarto proporcional de tres cantidades dadas
3. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno en un reparto proporcional?
4. ¿Cómo expresar la variabilidad en una relación de proporcionalidad?

Un ejemplo de objetivo relacionado con el primer contexto es “1. Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad”, mientras que “5. Dominio en el uso de la regla de tres” tiene que ver con el segundo. En el caso de los repartos, un objetivo que ejemplifica ese contexto es “10. Repartir una cantidad en partes inversamente proporcionales” y otro “11. Identificar a partir de una gráfica si dos magnitudes están en relación directa o inversa”, es un ejemplo de objetivo relacionado con el cuarto contexto.

Además de estos cuatro contextos, del mismo modo que con el resto de grupos, definimos otra categoría de tipo técnico en la que ubicamos dos objetivos: “12. Dada una tabla de valores, representarlos en una gráfica” y “13. Representar en figuras geométricas porcentajes dados”. También añadimos una categoría global o mixta en la que incluimos aquellos objetivos que hacen referencia a dos o más de esos cuatro contextos, si bien el único ejemplo de este tipo de objetivos enunciado por el grupo RAZ es “14. Inventar y resolver problemas en los que intervengan relaciones de proporcionalidad”.

La Figura 45 muestra la frecuencia de enunciados que consideran cada uno de estos contextos en las producciones del grupo RAZ.

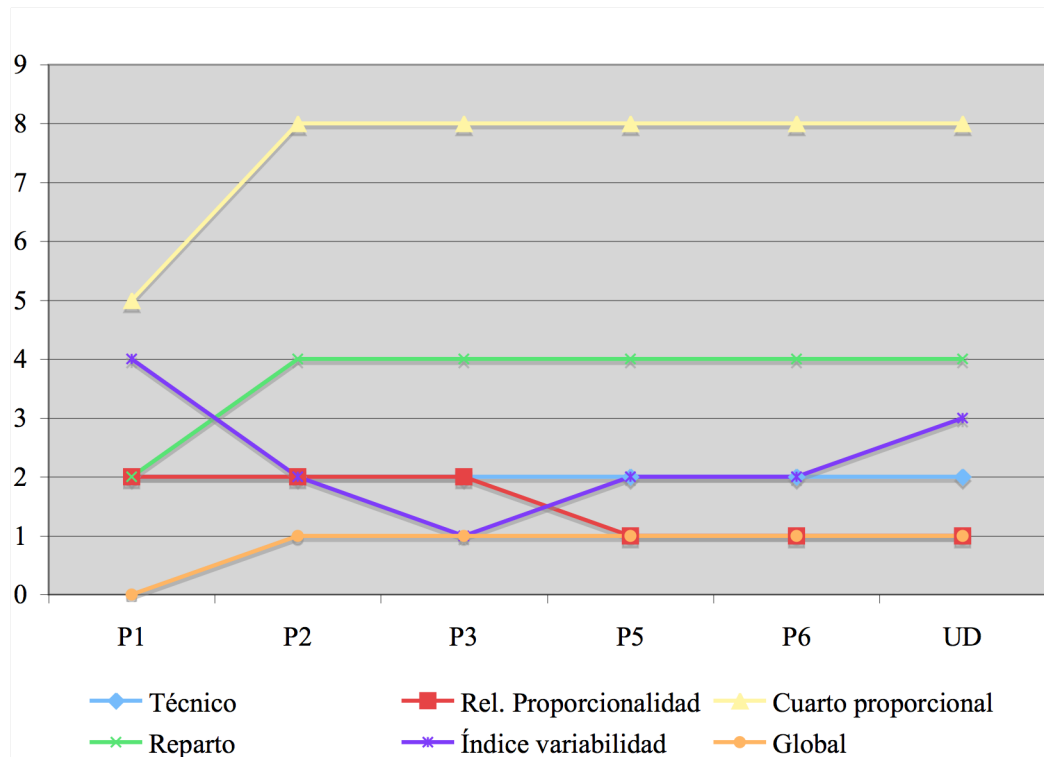


Figura 45. Clasificación de los objetivos enunciados por el grupo RAZ a lo largo de sus distintas producciones según la variable Cx

A pesar de la preponderancia de los objetivos relacionados con el contexto del cuarto proporcional en la mayor parte de las producciones, el grupo RAZ modificó en varias ocasiones esta variable a lo largo de su trabajo. En el estado inicial ese contexto, junto con el índice de variabilidad, es el más frecuente, mientras que el contexto global no aparece y el resto tienen una frecuencia igual, con dos enunciados en cada caso.

En la primera etapa de revisión crítica, C_1 , el grupo refuerza claramente el contexto de cálculo del cuarto proporcional sobre el cual mantiene una alta frecuencia de enunciados hasta el final. Al mismo tiempo, introduce un enunciado de tipo global, que también mantiene hasta el final, disminuye los enunciados relacionados con el índice de variabilidad e incrementa los que tienen que ver con repartos proporcionales. Estos últimos también estabilizan su valor desde C_1 en adelante.

En el resto de etapas de revisión crítica (C_3), de consolidación (C_2) y de estabilidad (C_5 y C_6), el grupo elimina un enunciado relativo al contexto de relaciones de proporcionalidad. Por otra parte, el índice de variabilidad es el contexto que más cambios soporta; en P_3 alcanza su mínimo, con un solo enunciado, aunque los demás cambios a partir de esta producción muestran un aumento sostenido hasta alcanzar tres objetivos en la unidad didáctica.

El contexto técnico, no presenta frecuencias muy altas en este grupo y se mantiene con dos enunciados a lo largo de todas las producciones.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Contexto

De la consideración conjunta del trabajo de los cuatro grupos respecto a esta variable, inferimos que todos ellos utilizan enunciados en los que no se contemplan los contextos establecidos sino un quinto tipo de contexto de carácter técnico y formal. También debe considerarse un contexto mixto, en donde se consideran dos o más de los contextos inicialmente establecidos. Los grupos ECU y FRA dan predominio al contexto técnico, con el 88% y el 71% del total de enunciados. Los grupos PRO y RAZ dan mayor importancia en los enunciados de los objetivos a contextos propios del tema y establecidos por el grupo. Así, en los enunciados del grupo PRO predominan aquellos vinculados al contexto *medida de la incertidumbre*, con el 62% del total de los enunciados, mientras que en el grupo RAZ predominan enunciados que se relacionan con el contexto *cálculo del cuarto proporcional de tres cantidades*, con el 42%.

En las dos primeras etapas de revisión crítica y consolidación de los grupos FRA, PRO y ECU, se producen cambios en las frecuencias sobre consideración de los distintos contextos en los enunciados de los objetivos específicos. A partir de la etapa de estabilidad las frecuencias de las tres últimas producciones se estabilizan para cada tipo y grupo.

Parece inferirse que la variable contexto no actúa como tal valor de variabilidad en ninguno de los cuatro grupos ya que en cada uno de ellos se establece un tipo de contexto prioritario, que predomina en cada grupo, siendo los contextos

restantes consideraciones singulares, excepto en el grupo RAZ donde se aprecia mayor diversificación entre las distintas opciones.

De manera global, es evidente que la tercera componente de las expectativas de aprendizaje es compleja de manejar para los grupos de profesores en formación, de manera análoga a la complejidad que encuentran para llevar a cabo el análisis fenomenológico como parte del análisis de contenido.

3.4 Estudio de la Variable Especificidad (Ep)

El número de objetivos enunciados en las diferentes producciones de los grupos que no eran específicos a los temas de trabajo, tuvieron más presencia en las primeras producciones que en las últimas. La Tabla 55 recoge el número de estos enunciados de cada grupo en cada una de sus producciones.

Tabla 55

Número de objetivos no específicos a los temas de trabajo de los grupos

P ₁	P ₂	P ₃	P ₅	P ₆	UD
ECU					
4	0	0	1	1	1
FRA					
2	2	0	1	1	1
PRO					
0	0	0	0	0	0
RAZ					
1	1	1	1	1	1

En su primera producción, ECU introdujo los objetivos “1. Capacidad de reconocer igualdades de expresiones numéricas”; “2. Familiarizarse con el manejo de incógnitas”; “3. Interpretar la dependencia entre magnitudes” y “7. Acercamiento intuitivo a la equivalencia”. Ninguno de ellos puede considerarse específico al tema de la ecuación de primer grado y así se lo señalamos cuando presentaron su trabajo [081124S31_47’58”]:

LR. En el primer enunciado, “capacidad de reconocer igualdades de expresiones numéricas”, ¿qué tarea hay ahí? Un ejemplo de tarea. ¿Que tres más cinco es igual que cinco más tres? ¿Es de eso de lo que estamos hablando?

PF1 (distinto al que presentaba el trabajo). No, no... expresiones complejas

LR. Expresiones numéricas...

PF1. Sí, poner operaciones combinadas, operar y ver que coinciden.

LR. Ponme un ejemplo.

PF1. Pues... (risas nerviosas)

LR. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + 100 = 5050$. ¿Es ese tipo de cosas? ¿Es eso lo que queréis decir?

PF1. Sí..., de ese estilo

LR. No veo qué tiene que ver eso con la resolución de ecuaciones y sistemas. Eso es interesante, pero no creo que tenga que ver...

PF2. El manejo de igualdades...

LR. Pero ponedme un ejemplo. ¿Hay algún ejemplo?

Finalmente ningún integrante del grupo supo ejemplificar la actuación señalada por el objetivo en una tarea y la discusión siguió con otros enunciados. En sus siguientes producciones sobre objetivos, ECU eliminó esos cuatro enunciados que se habían señalado como no específicos a su tema.

No obstante, cuando presentaron su balance del análisis cognitivo (P_5) introdujeron un nuevo objetivo: “39. Aplicar correctamente las igualdades notables”. Aunque el razonamiento es similar al del ejemplo anterior, en el sentido de que esa expectativa es más cercana al estudio de relaciones y propiedades aritméticas, aunque obviamente se use en otros temas, ECU mantuvo ese objetivo después de su presentación hasta la unidad didáctica.

El grupo FRA introdujo en su primera producción sobre objetivos los siguientes enunciados: “18. Realizar cálculos mentales y con calculadora” y “19. Resolver problemas”. Es obvio que, aunque pueden tener relación con las fracciones, no son objetivos con un grado de concreción que los vincule específicamente a ese tema. De hecho, cuando el grupo FRA presentó su propuesta, estos dos objetivos estaban fuera de los cuatro focos de contenido que habían delimitado. Cuando algunas sesiones después este grupo presentó su nuevo listado de objetivos y su vinculación con las competencias PISA (P_3), los enunciados de esos dos objetivos desaparecieron. No obstante, aparecieron nuevos enunciados de objetivos relacionados con la resolución de problemas pero concretados en problemas aditivos o multiplicativos con fracciones. Sin embargo, al presentar el balance del análisis cognitivo (P_5), apareció de nuevo el enunciado del objetivo 18 anterior y se mantuvo su propuesta hasta la unidad didáctica.

El grupo PRO concretó todos sus objetivos en el tema de introducción a la probabilidad desde su primera producción. Ninguno de los cambios que aplicaron después modificó este hecho.

Finalmente, el grupo RAZ fue el más constante en sus propuestas. En su primer listado de objetivos incluyeron el siguiente enunciado: “12. Dada una tabla de valores representarlos en una gráfica”. Este objetivo, que tiene significado y lógica en temas de funciones y estadística, apareció en todas las producciones del grupo incluyendo la unidad didáctica final.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Especificidad

Como hemos visto esta variable, de algún modo, denota cierta imprecisión en las prioridades o bien una contaminación de ideas, cercanas al tópico que se estudia

pero distintas. De manera conjunta, constatamos que existe cierta dificultad para los grupos a la hora de centrar el enunciado de los objetivos específicos de modo preciso en el núcleo de contenidos del tema que se está planificando. No obstante, en la transcripción del grupo ECU hemos visto como el ejercicio de pensar tareas que ejemplifican un objetivo, puede ayudar a dotar de significado o precisar el propio enunciado del objetivo.

Detectamos asimismo cierta tendencia a ampliar estos enunciados con propuestas relativas a contenidos previos o relacionados con el tema, que no están en los focos o prioridades de aprendizaje sobre el tema en cuestión. Desde este punto de vista, la variable *especificidad* se refiere a la componente “contenido” del enunciado de un objetivo como expectativa de aprendizaje. Muestra una tendencia a desviar el foco de los contenidos a otros contenidos relacionados con cada tema y, aunque esta tendencia sea corregible, hay que prever que se presenta de manera permanente.

3.5 Estudio de la Variable Léxico-semántica (Lx)

Esta variable la introdujimos inicialmente por la experiencia de años anteriores, en los que algunos grupos de profesores en formación incurrían en errores de expresión, vocabulario o sintaxis en el enunciado de los objetivos lo cual hacía difícil su comprensión.

Sin embargo, en las diferentes producciones de los grupos del curso académico 2008-2009 no han tenido incidencia estos errores. Sólo el grupo ECU incluyó uno de tipo menor que mantuvo desde la P₅ (balance del análisis cognitivo) hasta la unidad didáctica.

4. ANÁLISIS DE LAS COMPETENCIAS SELECCIONADAS

Después de enunciar y revisar objetivos específicos a los temas de trabajo durante las producciones P₁ y P₂, en coherencia con el procedimiento del análisis cognitivo que presentamos y ejemplificamos en los capítulos 2 y 3, los grupos de futuros profesores proceden a relacionar cada uno de esos objetivos con las ocho competencias matemáticas PISA. Esas asignaciones de objetivos a competencias se realizan, por lo tanto, en las producciones P₃, P₅ y P₆, concluyendo con la unidad didáctica.

Para analizar las competencias en las que han centrado las producciones de los grupos, usaremos las tres variables que incluimos en la Tabla 56.

Tabla 56
Variables para el análisis de la asignación de competencias

Variable	Cód	Significado	Valores posibles
Frecuencia	Fr	Frecuencia de las ocho competencias matemáticas de manera global	Numéricos (porcentuales)
Frecuencia por prioridad de aprendizaje	Fp	Frecuencia de las ocho competencias matemáticas en cada prioridad (o foco)	Numéricos
Orientación	Or	Predominio de competencias básicas (R, C y RP), de las relacionadas con la naturaleza de las matemáticas (PR, AJ, LS) o de aplicación/funcionales (M, RP, HT)	Competencias básicas Competencias que responden a la naturaleza de las matemáticas Competencias de aplicación

Las dos primeras variables, que analizaremos conjuntamente, son valores numéricos que describen la frecuencia con la cual cada una de las competencias son consideradas y referenciadas por los grupos de profesores en formación en sus diferentes producciones sobre objetivos específicos. Los resultados obtenidos los usaremos para analizar la siguiente variable.

La variable *Or* hace un balance del grupo de competencias más frecuentes a partir de los datos de la variable anterior. En este caso, delimitamos la orientación de las expectativas de aprendizaje de cada grupo atendiendo al tipo de competencias más frecuentes con las que vinculan tales expectativas.

4.1 Estudio de las Variables Frecuencia (Fr) y Frecuencia por Prioridad de Aprendizaje (Fp)

Analizamos estas dos variables de manera conjunta, separando los datos de cada uno de los cuatro grupos de profesores en formación. No se incluyen los resultados de aquellas producciones en las que no hubo modificaciones para las asignaciones de objetivos a competencias respecto a la producción anterior.

Producciones del Grupo Ecuaciones

Como ya describimos en los apartados anteriores de este mismo capítulo, el grupo ECU modificó en numerosas ocasiones la delimitación de sus focos, no llegó a enunciar prioridades de aprendizaje en ninguna de sus producciones y modificó varias veces el enunciado de sus objetivos específicos. Las

asignaciones de objetivos a competencias sólo se modificaron en el cambio C_3 , ya que en la unidad didáctica estas asignaciones fueron las mismas que en P_5 .

La Tabla 57 recoge las frecuencias de las asignaciones del grupo ECU en P_3 .

Tabla 57

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P_3 del grupo ECU

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Lenguaje algebraico							
4	2	0	0	0	0	4	1
Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura							
5	1	0	0	0	0	4	3
Equivalencia en ecuaciones y sistemas							
2	2	0	0	0	0	3	1
Resolución de ecuaciones							
0	2	1	0	0	2	4	2
Resolución de sistemas. Tipos de sistemas							
0	1	2	0	0	3	4	3
Técnicas de resolución de problemas							
0	0	3	3	3	1	2	0
Total (Fr)							
16%	12%	9%	4,5%	4,5%	9%	31%	14%

Como el propio grupo argumentó, su criterio fue destacar determinadas competencias en cada uno de sus focos, y esto es fácilmente observable en la Tabla 57. Competencias como *pensar y razonar* se asocian sólo con los focos más teóricos, mientras que en los vinculados con aspectos de resolución de ecuaciones y sistemas y de problemas, esa competencia no aparece. Por su parte, la competencia de *representar* aparece en los focos de resolución de ecuaciones y resolución de sistemas.

Por el contrario, las competencias de *modelizar y plantear* y *resolver problemas* aparecen sólo en el último foco. Las únicas dos competencias que mantienen cierta presencia en todos los focos son *utilizar el lenguaje simbólico* y *emplear herramientas tecnológicas*. Finalmente, estas dos competencias, junto a *pensar y razonar* son, globalmente, las más frecuentes en esta producción, aunque como veremos en la siguiente producción esto cambia.

Tabla 58

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P₅ del grupo ECU

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Lenguaje algebraico							
5	2	0	0	0	0	5	1
Ecuaciones y sistemas: concepto y estructura							
5	1	3	0	0	0	4	3
Equivalencia en ecuaciones y sistemas							
2	2	0	0	0	0	3	1
Resolución de ecuaciones y sistemas. Clasificación sistemas							
0	3	1	0	0	2	5	3
Técnicas de resolución de problemas							
1	1	4	3	4	1	2	0
Total (Fr)							
20%	13%	12%	4%	6%	4%	29%	12%

En este caso vemos que, aunque se mantienen los énfasis de la producción anterior disminuyen las asignaciones nulas, es decir, los valores 0 en las frecuencias que recoge la tabla, pasando de un 43,7% de casillas con valor 0 en P3 a un 35% en P5. Mejora así la distribución de asignaciones a través de todos los focos. La unión de los focos cuarto y quinto de la producción anterior, contribuye a mejorar, la presencia de algunas competencias, como *argumentar y justificar*, *comunicar* y *resolución de problemas*, si bien disminuyen otras como *representar*, *utilizar el lenguaje simbólico* y *emplear herramientas tecnológicas*.

De nuevo la competencia *utilizar el lenguaje simbólico* es aquella con mayor frecuencia de asignaciones en el conjunto de focos, seguida de *pensar y razonar* y, ahora, de *argumentar y justificar*. Las competencias de *modelizar* y *representar* son, a nivel global, las menos frecuentes. Estos resultados son coherentes con el tratamiento brindado al enunciado de objetivos por parte del grupo ECU.

Si bien la variable capacidad (*Ca*) ha mostrado un aumento paulatino en la precisión y riqueza de objetivos enunciados, el análisis de los contextos (*Cx*), ha puesto de manifiesto que los rudimentos técnicos y la aplicación de fórmulas ocupan un papel predominante en esos enunciados para gran parte de las producciones. Las alusiones a la resolución de problemas o a la modelización son prácticamente nulas en las propuestas de objetivos específicos de este grupo y, en relación a los sistemas de representación, la hegemonía del sistema simbólico

formal es evidente. En el análisis de la variable contenido (*Co*), hemos constatado el peso de los aspectos conceptuales por encima de los procedimentales. La reflexión realizada sobre las tres componentes de la estructura de los objetivos específicos se corrobora así en las asignaciones de competencias realizadas por el grupo ECU.

Producciones del Grupo Fracciones

Como ya hemos mencionado anteriormente, este grupo solo enunció los objetivos de dos prioridades de aprendizaje en P_3 , reconociendo que había una tercera sobre la que no habían trabajado aún. Dado que estas dos prioridades se mantuvieron sin ningún cambio en P_5 , limitamos el análisis de las variables *Fp* y *Fr* a esta producción (Tabla 59) y a la unidad didáctica (Tabla 60).

Tabla 59

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P_5 del grupo FRA

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Profundizar en significado y uso de las fracciones							
4	1	1	2	1	4	3	2
Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones							
6	2	2	1	3	1	3	2
Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones							
2	1	2	1	2	1	3	3
Total (Fr)							
23%	8%	9%	8%	11%	11%	17%	13%

Aquí podemos observar cómo la distribución de las competencias es equilibrada en todas las prioridades de aprendizaje, ya que tienen presencia en todas ellas cada una de las competencias matemáticas PISA. En la primera prioridad destacan las competencias de *pensar y razonar* y *representar* sobre el resto, mientras que en la segunda prioridad *pensar y razonar* sobresale con claridad de las demás. En la tercera prioridad, la distribución de asignaciones es más regular.

En conjunto, *pensar y razonar* es la competencia con mayor presencia en la producción total, seguida de las de *utilizar el lenguaje simbólico* y *emplear herramientas tecnológicas*. Las menos frecuentes son las de *argumentar* y *justificar* y *modelizar*, tal y como le hicimos ver, a éste y al resto de grupos, al finalizar la presentación de P_5 [090112S47, 24'22'']:

LR. Le habéis dado poco peso a las competencias de comunicar y de argumentar y justificar. Si os dais cuenta cada uno de vosotros en vuestro tema, no sólo en el tema de las fracciones, sino en todos los demás, las

competencias de comunicar, argumentar y justificar no es difícil vincularlas, lo que pasa es que explícitamente hay que tenerlas en cuenta en los objetivos, hay que ir teniendo en cuenta que en determinados objetivos añadir la capacidad de comunicar o de expresar es algo que parece obvio, pero que si no se explicita luego no lo reconocemos en las competencias. Y finalmente parece que el diálogo es solo profesor-alumno, el profesor el único que habla y explica, y el alumno que memoriza y repite... Si eso no lo tenemos en cuenta en la planificación, si no está en el guión de las expectativas de aprendizaje, difícilmente ese aprendizaje se va a producir de manera fluida...

JLL. El balance que habéis puesto que las competencias más valoradas son las de pensar y razonar y lenguaje simbólico, es una perspectiva demasiado tradicional o vinculada a un trabajo muy simbólico, en las operaciones... Si recordáis cuando vimos la fenomenología, vimos que es una noción que se usa, es fácil encontrar las fracciones en la vida diaria y ese tipo de situaciones y esquemas permite desarrollar otro tipo de competencias. Quizás la reformulación de algunos objetivos o la inclusión de algún otro...

LR. Hay cosas muy simples como traducir del lenguaje verbal al lenguaje simbólico el enunciado de un problema. O al revés. Inventar una situación que se resuelva con la suma $3/4$ más $1/5$. Es un tipo de actividades que nos parecen muy elementales, pero para el alumno son clarificadoras. Si se bloquea aquí, difícilmente entenderá el resto de cuestiones.

Los resultados del grupo FRA cambiaron notablemente en la unidad didáctica.

Tabla 60

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo FRA

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Profundizar en significado y uso de las fracciones							
4	2	5	4	1	4	4	3
Trabajar con la estructura aditiva de las fracciones							
6	2	2	2	3	1	3	2
Trabajar con la estructura multiplicativa de las fracciones							
1	2	2	1	1	1	3	2
Total (Fr)							
18%	10%	15%	11%	9%	10%	16%	11%

Como muestra la Tabla 60, los principales cambios se producen en la primera de las prioridades de aprendizaje, ya que en las dos siguientes sólo una de las ocho competencias modifica su frecuencia. Pero los cambios en la primera modifican

considerablemente el balance final. De este modo aumenta del 9% al 15% del total de asignaciones la frecuencia de la competencia *comunicar*; pasa del 8% al 11% la de *modelizar*; se incrementa del 8% al 10% la competencia *argumentar y justificar*. Se mantienen iguales *pensar y razonar* y *plantear y resolver problemas*, y disminuye un punto *emplear herramientas tecnológicas*. Los incrementos señalados, aunque pequeños, son importantes ya que no resulta sencillo para los grupos de profesores en formación vincular objetivos específicos con las competencias *argumentar y justificar*, *comunicar* y *modelizar*.

Para este grupo, las competencias más frecuentes siguen siendo *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico*, aunque seguidas ahora por *comunicar*. La competencia *modelizar* es la que tiene mayor incremento en el proceso.

La Tabla 60 también indica que las diferencias no son grandes entre las diferentes competencias. El aumento de la precisión de las producciones según las capacidades referidas en los objetivos y la riqueza de éstos, por el énfasis en aspectos procedimentales, son condicionantes importantes en la selección de competencias del grupo FRA.

Producciones del Grupo Probabilidad

El grupo PRO no modificó su enunciado de objetivos ni la asignación de éstos a las competencias matemáticas PISA en el balance del análisis cognitivo (P₅), por lo que las únicas modificaciones en esa asignaciones se producen en P₃ y en UD. En esas dos producciones centramos nuestro análisis.

Tabla 61

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P₃ del grupo PRO

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Dominio del espacio muestral							
5	2	6	0	3	4	0	0
Probabilidad con experimentos simples							
4	3	2	3	3	3	1	2
Probabilidad compuesta							
3	4	4	1	4	2	2	2
Total (Fr)							
19%	14%	19%	6%	17%	14%	5%	6%

La prioridad de aprendizaje más dispar en cuanto a la distribución de frecuencias de las distintas competencias es la primera, ya que en los otros dos focos se mueven entre los valores uno y cuatro. En la primera destacan *comunicar* y *pensar y razonar*, mientras que hay tres que no aparecen: *modelizar*, *utilizar el*

lenguaje simbólico y emplear herramientas tecnológicas, tienen valor cero. En el segundo foco sobresale *pensar y razonar* y en el tercero lo hacen *comunicar y plantear y resolver problemas*. Las menos frecuentes son *utilizar el lenguaje simbólico* en el segundo foco y *modelizar* en el tercero.

Globalmente, las competencias más frecuentes son *pensar y razonar* y *comunicar*, igualadas entre sí, seguidas de *plantear y resolver problemas* y en tercer lugar *argumentar y justificar* y *representar*. La menos frecuente es *utilizar el lenguaje simbólico* seguida de *modelizar* y *emplear herramientas tecnológicas*, que son también las no contempladas para el primer foco.

En su presentación del balance del análisis cognitivo (P₅), los miembros de este grupo justifican el predominio de algunas de esas competencias [090112S47, 9'24'']:

PF3. En cuanto a las competencias lo que hicimos fue hacer un diagrama separando los tres focos y viendo la correspondencia que tendría cada uno de ellos con las competencias vistas. En el primer foco que es dominar el espacio muestral básicamente son las definiciones y las herramientas que vamos a usar en los otros dos focos posteriores, por eso las que tienen más importancia son pensar y razonar y comunicar, porque realmente es un foco orientado a la asimilación de conceptos que deben estar ahí fijados para luego aplicarlos en los focos siguientes. Tenemos algunas competencias que no aplicamos como modelizar o resolver problemas porque el primer foco es simplemente conceptos. En el segundo, la cosa está algo más nivelada, aunque sigue la importancia de pensar y razonar, ya empiezan a surgir los primeros problemas, y además son conceptos totalmente nuevos para el alumno, es el primer curso en el que estudian probabilidad, por lo que no es algo que pueda deducir de cosas anteriores. En el tercer foco, probabilidad compuesta, lo mismo, aunque ya tendríamos menos dificultad, como os ha dicho Rocío. La conclusión general si sumamos los tres focos sería que nuestra clase sería bastante comunicativa, en el sentido que siempre se dice que cuando has entendido algo bien puedes explicárselo a otra persona y que ella lo entienda. Así que es básicamente lo que intentamos, que el alumno entienda estos conceptos también en base a sus compañeros.

En la unidad didáctica sólo se producen pequeños cambios en las asignaciones del segundo foco, tal y como muestra la Tabla 62.

Los cambios son menores con respecto a la producción anterior. Aumenta en un punto la frecuencia de las competencias *pensar y razonar*, *plantear y resolver problemas* y *utilizar el lenguaje simbólico*.

A nivel global no hay modificaciones significativas, ya que el orden de las tres más frecuentes y el de las tres menos frecuentes sigue siendo el mismo. Se confirman las diferencias entre determinados grupos de competencias, ya que las tres menos valoradas, suponen cada una un 6% del total, mientras que las siguientes suponen un 14%, con una diferencia de ocho puntos porcentuales.

Tabla 62

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo PRO

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Dominio del espacio muestral							
5	2	6	0	3	4	0	0
Probabilidad con experimentos simples							
5	3	2	3	4	3	2	2
Probabilidad compuesta							
3	4	4	1	4	2	2	2
Total (Fr)							
20%	14%	18%	6%	16%	14%	6%	6%

Como hemos visto anteriormente, el grupo PRO centra sus modificaciones en los enunciados de sus objetivos específicos en C_2 . Como veremos en el siguiente apartado, esas modificaciones obedecen, fundamentalmente, a la asignación de esos objetivos a competencias, con la introducción de descriptores que justifican tales asignaciones. Esto hace que, a pesar del que el grupo centra sus objetivos en contenidos de tipo conceptual y que no logra mucha riqueza en el manejo de diferentes contextos, el balance de las competencias resulta positivo por los descriptores introducidos en los enunciados. El fuerte peso de competencias como *comunicar* o *plantear y resolver problemas* se apoya en esa característica y también en la filosofía general del grupo con respecto a lo que debería ser la enseñanza, lo cual brinda coherencia a su propuesta. Esto puede comprobarse en la última parte de la transcripción hecha, cuando el grupo se refiere a los procesos de comunicación en el aula.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

Este grupo modificó sus asignaciones en P_5 y en la unidad didáctica, por lo que analizaremos los datos desde P_3 .

En este caso podemos observar que, prácticamente, todas las competencias tienen presencia en todos los focos. Sólo hay tres frecuencias con valor cero: para los dos primeros focos en *emplear herramientas tecnológicas*, y para el tercer foco en *argumentar y justificar*. En todos los focos destaca *plantear y resolver problemas*. El segundo foco es el menos equilibrado en su vinculación a las distintas competencias. El barrido de diferentes contextos que realizan en el enunciado de sus objetivos facilita, sin duda, la variedad de competencias destacadas.

Tabla 63

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P₃ del grupo RAZ

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Relaciones de proporcionalidad directa e inversa							
5	3	1	3	5	2	4	1
Cálculo de porcentajes							
3	1	1	1	6	2	4	0
Repartos							
2	0	1	3	4	3	4	0
Total (Fr)							
17%	7%	5%	12%	25%	12%	20%	2%

En conjunto, como hemos señalado antes, la competencia *plantear y resolver problemas* es la más frecuente, 25% del total de asignaciones, y mantiene una distancia de veintitrés puntos porcentuales con la de menor presencia, *emplear herramientas tecnológicas*, que supone el 2% del total de asignaciones. Esto pone de manifiesto un desnivel importante de la vinculación con las diferentes competencias. Destaca en segundo lugar de mayor frecuencia *utilizar el lenguaje simbólico* seguida de *pensar y razonar*. Después siguen *modelizar y representar*, igualadas entre sí, que tienen un valor porcentual notablemente menor.

El análisis de la producción P₅ lo recoge la Tabla 64.

Tabla 64

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en P₅ del grupo RAZ

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Relaciones de proporcionalidad directa e inversa							
5	3	1	3	5	2	4	1
Cálculo de porcentajes							
3	0	1	4	5	2	3	0
Repartos							
2	1	1	2	4	3	4	0
Total (Fr)							
17%	7%	5%	15%	25%	12%	18%	1%

Los cambios en las asignaciones de objetivos a competencias en P_5 se concentran en los focos segundo y tercero, ya que el primer foco mantiene las mismas que en P_3 . Entre esos cambios destaca un aumento de la frecuencia de la competencia *modelizar* en el segundo foco, ya que el resto son pequeñas variaciones.

En el total predomina la competencia *plantear y resolver problemas*, aumenta la frecuencia de *modelizar* y el resto de valores se mantienen en el mismo orden.

En la unidad didáctica, tal y como muestra la Tabla 65, no destacan grandes diferencias.

Tabla 65

Frecuencias de las competencias matemáticas PISA según prioridades de aprendizaje (o focos) y frecuencia total en UD del grupo RAZ

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Profundizar en el estudio de relaciones de proporcionalidad directa e inversa entre magnitudes							
6	4	1	2	5	3	3	1
Dominar el cálculo de porcentajes para interpretar y resolver problemas cotidianos							
3	1	1	1	6	2	4	0
Profundizar en el estudio de los repartos directa e inversamente proporcionales							
2	0	0	4	4	3	4	0
Total (Fr)							
18%	8%	4%	12%	25%	13%	18%	2%

Es llamativo el retroceso en la competencia *modelizar* en la segunda prioridad de aprendizaje, volviendo al valor de P_3 y la desaparición de la competencia *comunicar* en la tercera prioridad. Se aprecia un cierto descuido en la vinculación de objetivos a competencias en el trabajo final de la unidad didáctica. Tal y como mostramos anteriormente, en la unidad didáctica se consideraron versiones anteriores de los objetivos y de sus asignaciones. Por eso muchas de las asignaciones vuelven a valores similares a la primera producción sobre objetivos y competencias.

Es una peculiaridad de este grupo el valor predominante de las asignaciones a la competencia *resolución de problemas*, que se sostiene a partir de P_2 , cuando en cada uno de los focos introducían al menos un objetivo relacionado con esa competencia. De hecho, como hemos visto en el análisis global de los objetivos (§8.2), algunos de estos objetivos se repetían en diferentes focos. En cualquier caso, la riqueza que consigue el grupo RAZ reuniendo diferentes tipos de contextos es crucial para conseguir equilibrio entre competencias cercanas a aspectos técnicos como el uso del *lenguaje simbólico* y otras vinculadas a la

aplicación de nociones, como *resolución de problemas*. Asimismo, el equilibrio entre los contenidos conceptuales y los procedimentales contribuye también a la variedad de competencias destacadas.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre las Variables Frecuencia (Fr) y Frecuencia por Prioridad de Aprendizaje (Fp)

En el balance de esta reflexión sobre las vinculaciones establecidas por los grupos entre los objetivos y las competencias, según las distintas prioridades de aprendizaje enumeradas, hemos considerado el trabajo de todos los grupos para dos producciones P₃ y P₅ (o UD, según el momento en que se haya alcanzado la última versión para estas asignaciones). En P₃, el total de vinculaciones establecidas ha oscilado entre cincuenta y tres y sesenta y ocho, mientras que en P₅ y en UD las asignaciones han oscilado entre cincuenta y ocho y sesenta y siete. No hay pues grandes variaciones entre los grupos y todos ellos muestran un trabajo intenso de vinculación de los enunciados de los objetivos con las competencias matemáticas finales consideradas.

Sí se producen diferencias en el total de casillas con valor cero, que muestran que hay prioridades de aprendizaje que no se han vinculado en ningún caso con determinadas competencias. Sólo el grupo ECU tiene un alto porcentaje de casillas con frecuencia cero, el 42% del total en P₃ y el 37% en P₅. En el resto de los grupos o bien no hay ninguna casilla con cero, como en el caso del grupo FRA, o bien su número es muy pequeño, siempre inferior a cuatro.

Analizando conjuntamente las frecuencias totales de las producciones finales de todos los grupos de profesores en formación, la competencia más frecuente es *pensar y razonar*, seguida de cerca por *utilizar el lenguaje simbólico*, con el 18% y 17%, respectivamente, del total de asignaciones hechas por los cuatro grupos. Algo más distanciada, con un 13% del total, esta la competencia *plantear y resolver problemas*. Las restantes alcanzan los siguientes porcentajes: *argumentar y justificar* el 11%, *comunicar* el 12%, *modelizar* el 8%, *representar* el 10%, y *emplear herramientas tecnológicas* el 7%.

En la unidad didáctica, la distribución de frecuencias según las diferentes competencias es muy desigual en los grupos ECU y RAZ, con una oscilación entre un 4% y un 20% y entre un 2% y un 25%, respectivamente. La distribución es algo más equilibrada en el grupo PRO, cuya frecuencia oscila entre un 6% y un 20%, mientras que en FRA es notablemente más homogénea, pues todas las competencias oscilan entre un 9% y un 18%.

Durante la presentación de la producción P₅, se subrayaron en clase las lagunas detectadas en las competencias *modelizar* y *plantear y resolver problemas*, que en ese momento tenían menos asignaciones [090112S47, 54'58'']:

LR. Como reflexión general para los cuatro grupos, falta todavía más rodaje en modelización y en resolución de problemas. Quizás estamos entrando ahora en el análisis de instrucción en el tema de las tareas y al entrar en las tareas se está viendo que enfatizáis algo más la resolución de problemas y la modelización. Pero si os dais cuenta os habéis centrado mayoritaria y

prioritariamente en el lenguaje simbólico, pensar y razonar, y en representación porque es casi obvio y habéis hecho un esfuerzo, en algunos casos más intenso, en otros casos menos intenso por comunicar y argumentar y justificar; herramientas tecnológicas ha entrado, pero solución de problemas y modelización todavía quedan con menor peso en todas. Independientemente de las correcciones y los comentarios que se han hecho a cada uno. Esa es la parte a mejorar.

Pero, finalmente, fueron las competencias de *modelizar, emplear herramientas tecnológicas y representar* las menos frecuentes. Este resultado contrasta con algunos resultados ya comentados en los que se puso de manifiesto que el significado de la competencia *representar* estaba claro para todos los grupos mientras que *modelizar* era más impreciso. Ambas competencias tienen presencia inferior en las asignaciones de objetivos de los diferentes grupos.

Debido a que las prioridades de aprendizaje establecidas por cada grupo están determinadas por los focos que surgen de la estructura conceptual del tema que en cada caso se está planificando, es natural que los contenidos y sus tipos destaquen en los enunciados de tales prioridades. No obstante, algunos grupos han destacado entre las prioridades los contextos, como el grupo RAZ, otros han destacado los significados, como el grupo FRA y, en algún caso, los sistemas de representación, como el grupo ECU, pero siempre intervienen y destacan los contenidos. Es por esto que la consideración de los grupos sobre las prioridades se suele centrar en el dominio de los contenidos y, de ahí, que los contenidos conceptuales tomen peso en la planificación junto con aquellos procedimentales que consisten en rudimentos técnicos y aplicación de reglas. Por esta razón surgen de manera natural en todos los grupos, como hemos comprobado, las competencias *pensar y razonar y utilizar el lenguaje simbólico*. Simultáneamente, por los motivos antes apuntados, hay grupos que tienen como prioritarias competencias como *modelizar o plantear y resolver problemas* que, en general, reciben menos atención. Así es el caso del grupo PRO para *resolver problemas*, el grupo RAZ para *modelizar* y el grupo ECU para *dominio de herramientas técnicas*. También se aprecia una mejora en las frecuencias de las competencias *argumentar y justificar y comunicar* entre las dos producciones consideradas para todos los grupos.

La asignación de competencias por prioridades permite controlar una cierta desviación que consiste en enfocar el aprendizaje hacia los contenidos en exclusiva, con abandono de los significados, la comunicación, sistemas de representación, aplicaciones y resolución de problemas

4.2 Estudio de la Variable Orientación (Or)

Cuando introdujimos las ocho competencias matemáticas PISA (§3.1.6), describimos un criterio para clasificarlas no exhaustivamente de acuerdo a su carácter básico, específico y centrado en la propia naturaleza de las matemáticas o bien de aplicación. Las competencias, *comunicar, plantear y resolver problemas* y *representar* serían del primer tipo, *pensar y razonar, argumentar y justificar y utilizar el lenguaje simbólico* serían del segundo y, finalmente,

modelizar, plantear y resolver problemas y emplear herramientas tecnológicas serían del tercero.

Lo que hacemos para estudiar esta variable, es hacer un recuento del peso de cada una de esos conjuntos de competencias en las diferentes producciones de los cuatro grupos de futuros profesores.

Lo primero que encontramos al analizar los datos mostrados en el apartado anterior, es que el resultado no cambia entre diferentes producciones del mismo grupo. Como hemos visto, no se dan cambios excesivamente grandes en las asignaciones entre diferentes producciones, por lo que el recuento global no se modifica.

Lo segundo que encontramos es que ningún grupo se centra en las competencias de carácter aplicado, ya que la orientación de las competencias destacadas por los grupos ECU, FRA y RAZ, se focaliza en la naturaleza de las matemáticas, sobre todo por el gran peso de *pensar y razonar y utilizar el lenguaje simbólico*. Sólo el grupo PRO se sale de esa orientación para dirigirse hacia competencias básicas, ya que en sus producciones fomentan especialmente el desarrollo de competencias como *comunicar y plantear y resolver problemas*.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Orientación

Al concluir el trabajo, los diferentes grupos consiguen un cierto equilibrio en sus asignaciones a los tres tipos de competencias consideradas: básicas, de dominio conceptual específico y aplicadas. En todos los grupos hay cierto predominio de las competencias específicas, seguidas por las básicas, excepto en el grupo Probabilidad, que invierte esa prioridad. El grupo Ecuaciones presenta las mayores diferencias de orientación de sus objetivos a las distintas competencias, mientras que el grupo Razón y Proporción muestra un equilibrio entre las tres orientaciones en las asignaciones realizadas de sus objetivos a las competencias.

La Tabla 66 muestra un resumen del porcentaje de asignaciones de cada uno de los grupos a los tipos de competencias, según la propuesta hecha en la unidad didáctica.

Tabla 66
Porcentaje de asignación de los grupos a los distintos tipos de competencias

Básicas	Específicas	Aplicadas
ECU		
22%	62%	22%
FRA		
34%	44%	31%
PRO		
48%	40%	28%

Tabla 66
Porcentaje de asignación de los grupos a los distintos tipos de competencias

Básicas	Específicas	Aplicadas
RAZ		
42%	44%	39%

Desde un punto de vista más general, constatamos lo complejo que resulta para los grupos de profesores en formación, abandonar una visión tradicional de la matemática, vinculada al formalismo y al simbolismo, en el que competencias como *utilizar el lenguaje simbólico* y una lectura sesgada de *pensar y razonar* son consideradas con preferencia sobre el resto.

5. RELACIÓN ENTRE OBJETIVOS ESPECÍFICOS Y COMPETENCIAS

El último de los análisis que realizaremos en relación con las producciones sobre expectativas de aprendizaje se centra en las relaciones entre los objetivos específicos establecidos por cada uno de los grupos y las competencias matemáticas. En esta ocasión, nos centraremos en considerar en qué medida están justificadas las asignaciones a las ocho competencias matemáticas PISA que hacen los grupos de profesores en formación a partir de los objetivos específicos enunciados.

En la Tabla 67 describimos las dos variables que empleamos para dicho análisis.

Tabla 67
Variables para el análisis de la asignación de objetivos específicos a las competencias matemáticas PISA

Variable	Cód	Significado	Valores posibles
Descriptores	De	Aparecen o no algunos descriptores de la competencias en los enunciados (que justifiquen la asignación realizada)	Sí No
Estructura de las competencias	Es	En el conjunto de objetivos relacionados con cada competencia, ¿se reconoce la estructura completa de esa competencia?	Sí Parcialmente No

Como describimos y ejemplificamos en el capítulo 3, una faceta importante en el análisis cognitivo es la relación entre expectativas de aprendizaje específicas a un contenido particular y las expectativas a largo plazo que establecen las competencias. A partir de P₃, los grupos de profesores en formación hicieron esa asignación en cada una de sus presentaciones, las cuales analizamos usando las dos variables que recoge la Tabla 67.

La primera variable explora si cada uno de los enunciados incluye o no los descriptores de las competencias matemáticas PISA, que ya presentamos en el capítulo 3 y que revisamos a continuación. Estos descriptores justifican la asignación realizada por cada grupo y, además, brindan información acerca de cuál o cuáles competencias generan más dificultad o confusión por su significado.

La segunda variable se centra en comprobar si en el conjunto de objetivos que se relacionan con una misma competencia, se puede reconocer la estructura básica de esa competencia en función de los mismos descriptores que hemos citado antes.

En la Tabla 68 resumimos los descriptores de cada competencia que empleamos para el análisis de estas dos variables.

Tabla 68

Descriptores de las competencias matemáticas PISA

Competencias	Descriptores
Pensar y razonar	Formular y responder preguntas Distinguir afirmaciones, definiciones, teoremas, conjeturas, ... Comprender y emplear conceptos y procedimientos
Argumentar y justificar	Crear o encadenar argumentos Distinguir diferentes tipos de justificaciones Justificar propiedades o resultados
Comunicar	Expresar ideas o nociones matemáticas
Modelizar	Expresar matemáticamente un problema Aplicar y valorar un modelo Interpretar resultados
Plantear y resolver problemas	Plantear y enunciar problemas Resolver problemas
Representar	Crear representaciones Transitar entre diferentes sistemas de representación

Tabla 68

Descriptorios de las competencias matemáticas PISA

Competencias	Descriptorios
Utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico y operaciones	Relacionar el lenguaje simbólico con el cotidiano Manejar algoritmos, rutinas y fórmulas
Emplear soportes y herramientas tecnológicas	Emplear esos soportes de manera explícita

5.1 Estudio de la Variable Descriptorios (De)

El análisis de esta variable lo haremos por separado, para cada uno de los grupos de futuros profesores.

Producciones del Grupo Ecuaciones

En los estudios y reflexiones que sobre otras variables hemos realizado hasta el momento, se ha puesto de manifiesto cómo el grupo ECU modificó en numerosas ocasiones su delimitación de los focos y el enunciado de sus objetivos. Como también hemos dicho, ambos hechos están relacionados con el retraso en la elaboración final de la estructura conceptual. También hemos visto cómo esos cambios redundaron en una propuesta de objetivos de gran precisión, con una riqueza notable en cuanto a la expresión de capacidades, si bien con una diversidad moderada en cuanto a contenidos y referencias inexistentes sobre contextos. Como veremos a continuación, esos mismos cambios sirvieron para depurar el enunciado de los objetivos de manera que lograron bastante coherencia con las competencias a las que los relacionaron.

La Figura 46 muestra tres parrillas correspondientes a las tres producciones del grupo ECU en las que presentó la asignación de cada objetivo específico a las ocho competencias matemáticas de PISA. En este caso hemos considerado las producciones P₃, P₅ y UD. En cada una de las tres parrillas, aparecen por columnas, en primer lugar, la numeración de los objetivos enunciados en cada producción con distintos sombreados.

Como es fácil observar, la numeración de los objetivos no es creciente y es que, para nuestro análisis, mantenemos la misma numeración para los mismos enunciados entre una producción y la siguiente, para así poder hacer un seguimiento efectivo de los enunciados que se han modificado de alguna manera o de aquellos que se han introducido nuevos⁸.

Esas modificaciones las indicamos con el sombreado de las celdas en las que figura la propia numeración de objetivos. Esa indicación tiene que ver con la

⁸ Supongamos hipotéticamente que en P₃ un grupo presenta únicamente un objetivo O1 seguido de otro objetivo O2. Supongamos también que en P₅, el grupo pone el objetivo O2 en primer lugar y lo numera con 1, luego añade un nuevo objetivo que numera como 2 y finalmente pone el primer objetivo O1 numerado como 3. En nuestro listado, el orden es: O2, O3, O1.

variación o no de cada enunciado en relación con la producción anterior, pero no necesariamente con cambios en la asignación a las competencias⁹. El fondo blanco se refiere a que ese objetivo se introduce por vez primera; si es gris, significa que el objetivo se mantiene con el mismo enunciado que en la producción inmediatamente anterior; si es rojo significa que su enunciado se ha modificado; finalmente, si es amarillo significa que es un objetivo nuevo, pero que ha surgido por división o agrupamiento de objetivos existentes en la producción anterior.

Las siguientes columnas recogen las ocho competencias PISA, que denotamos usando las mismas abreviaturas que presentamos en el capítulo 3 y venimos empleando en este capítulo.

Cada una de las filas muestra, para cada objetivo, las competencias con las que, el grupo de futuros profesores, relacionan ese objetivo. Usando un 0 y con fondo blanco, destacamos una competencia señalada por el grupo, pero no justificada en virtud de los descriptores correspondientes de esa competencia (Tabla 68). Cuando aparece un 1 sobre fondo rojo, mostramos que esa competencia fue señalada por el grupo y que, además, su presencia está justificada usando alguno de los descriptores anteriores.

P3								
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
19	0						1	1
29	1	1					1	
22	0	1					1	
30	0						1	
4	1							
23	0	1					1	
24	0						1	0
25	0						1	0
26	0						1	0
27	0						1	1
9		0						
31	0	1					1	
28		1					1	0
32							1	0
33		0					1	
34			1				1	0
16							1	
35			1				1	0
36							1	
6		1					1	0
17			1				1	0
37			1	0	1		1	
15			0	1	1	1	1	
38			1	0	1		1	

P5								
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
19	0						1	1
29	1	1					1	
22	0	1					1	
30	0						1	
39	1						1	
4	1							
23	0	1					1	
24	0		1				1	0
25	0		1				1	0
26	0		1				1	0
40	0						1	0
9		1						
31	0	1					1	
41		1					1	0
13							1	1
33		0					1	
6		1					1	0
34			1				1	0
37			1	0	1		1	
15			0	1	1	1	1	
38			1	0	1		1	
42	1	0	1	1	1			

UD								
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
19	0						1	1
29	1	1					1	
22	0	1					1	
30	0						1	
39	1						1	
4	1							
43	0	1					1	
24	0		1				1	0
25	0		1				1	0
26	0		1				1	0
40	0						1	0
9		1						
31	0	1					1	
41		1					1	0
13							1	1
33		0					1	
6		1					1	0
34			1				1	0
37			1	0	1		1	
15			0	1	1	1	1	
38			1	0	1		1	
42	1	0	1	1	1			

Figura 46. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo ECU

Las parrillas muestran que existen pocas variaciones en las asignaciones entre las tres producciones del grupo ECU. Las diferencias en la distribución de las celdas rojas obedece por lo general más a cambios en el orden de los objetivos, que a cambios en las asignaciones de esos objetivos a las competencias. No obstante, el trabajo del grupo ECU posee unas características interesantes.

⁹ Los códigos de colores los usamos para analizar las variables del análisis individual de los objetivos que hemos realizado y descrito previamente en este capítulo. En el Anexo I mostramos los libros de Excel en los que figuran esas parrillas con esas codificaciones.

Este grupo hizo un gran número de cambios en el enunciado de objetivos en C2, ya que P_3 fue la primera producción en la que se introdujeron las asignaciones a competencias (ver coloreado de objetivos en la primera columna de la parrilla P_3 de la Figura 46). En comparación con P_2 , introdujeron varios descriptores nuevos, que justifican la asignación a las competencias.

En P_3 hicieron un total de 68 asignaciones, de las cuales el 38% las marcamos como no justificadas mientras que el 62% están bien justificadas. Esto supone un porcentaje considerable de asignaciones bien hechas, pero en las producciones siguientes depuraron algo más su producción. En P_5 , con sesenta y siete asignaciones, el 67% de ellas están bien justificadas, mientras que en la unidad didáctica vuelven a hacer sesenta y ocho asignaciones de las cuales un 66% son acertadas, lo que supone prácticamente dos tercios del total.

Por competencias, las asignaciones a *plantear y resolver problemas* y *representar* (competencias básicas) están totalmente justificadas, mientras que las asignaciones hechas a *argumentar y justificar*, *comunicar* y *utilizar lenguaje simbólico* (dos específicas y un básica) lo están en un porcentaje muy estimable. Precisamente, está última destaca por una mejoría considerable en su reconocimiento a lo largo de las distintas producciones del grupo ECU.

Por el contrario, *pensar y razonar*, *modelizar* y *emplear herramientas tecnológicas* (la primera específica y las otras dos aplicadas) tienen un porcentaje bajo de aciertos, lo que muestra que son las competencias cuya asignaciones más dificultades han generado a este grupo. Con respecto a *pensar y razonar* y *emplear herramientas tecnológicas* destacamos como significativo el número de asignaciones realizadas sin que apareciera ningún descriptor de la competencia en el enunciado de los objetivos que lo justificara. Además, es relevante como en un tema que tiene especial implicación en la construcción de modelos para la resolución de problemas, la competencia de *modelizar* tenga pocas asignaciones y la mayor parte de ellas sin justificar. Vinculamos esta carencia con el escaso número de contextos considerados por este grupo en los enunciados de los objetivos, salvo el específicamente técnico y formal y la preponderancia de contenidos conceptuales, tal y como hemos visto anteriormente en este mismo capítulo.

Para determinadas competencias, este grupo basa sus asignaciones en que se hace mención expresa a la competencia, como muestra el siguiente momento de la presentación de P_3 [081202S36, 28'46'']:

PF1. En cuanto al foco del lenguaje algebraico, hemos puesto estos objetivos principales: calcular valores numéricos de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico, donde desarrollamos la capacidad de pensar y razonar, el concepto de expresión algebraica, y el lenguaje simbólico y, por mención expresa, las herramientas tecnológicas. En el segundo, distinguir y justificar si una expresión algebraica es un monomio o no, estudiar su estructura coeficiente, parte literal y grado y agrupar monomios semejantes de una lista, pues también pensar y razonar, argumentar y justificar, porque se menciona, y lenguaje simbólico.

En otros casos los criterios no son explícitos, ya que en muchos casos se destacó la competencia de *emplear herramientas tecnológicas* pero sólo se citó expresamente en algunos de ellos.

Si observamos la última parrilla por filas, vemos que sólo cinco objetivos de los veintidós enunciados finales, presentan una asignación a las competencias bien justificadas.

Producciones del Grupo Fracciones

De manera análoga al grupo anterior, la Figura 47 muestra tres parrillas de análisis de la vinculación entre objetivos específicos y competencias en tres producciones del grupo FRA.

P3		P5		UD																								
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT		
1	1								1	1									1	1								
3	0		1						1	1									1	1								
4		1							1	1									1	1								
5	1								1	1									1	1								
20					0																							
21									1	1																		
2									1	1																		
22	0				0	1																						
23								0																				
24	1								1	1																		
12								0																				
25	0					0																						
26	1		1																									
27	1	0	0			0																						
28	1	0																										
29	0					0			1	1																		
13									0	1	0															0		
14																												
30	0		1	0	1																							
31		0				0																						
18	1		1																									

Figura 47. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo FRA

El grupo FRA también realizó numerosos cambios en el enunciado de sus objetivos con respecto en C_2 , tal y como muestra la parrilla P_3 de la Figura 10. En P_5 sólo añadieron dos objetivos nuevos, pero no cambiaron ninguna de las asignaciones a las competencias con respecto a P_3 . Sin embargo, en la unidad didáctica, modificaron las asignaciones de los objetivos 1, 4, 5, 20, 21, 23 y 28 con respecto a P_5 , aunque en ningún momento el grupo comentó o explicó esos cambios, ni en su presentación ni en el documento escrito de la unidad didáctica.

A pesar de estas modificaciones, en muchos casos las asignaciones carecen de justificación. En P_3 , con treinta y ocho asignaciones, el 63% de ellas sí están justificadas. Pero en P_5 , con cincuenta y tres asignaciones, ese porcentaje baja al 60% y finalmente se establece en un 57% en la unidad didáctica, donde hicieron sesenta y una asignaciones. Este grupo, aunque pareció percibir la importancia de ampliar la asignación a las competencias, no afinó los criterios para justificar estas relaciones.

En este caso, la ausencia de justificación se reparte bastante equitativamente en seis de las ocho competencias. *Utilizar el lenguaje simbólico* es la única que, en todas las producciones, queda totalmente justificada. *Emplear herramientas*

tecnológicas también está completamente justificada en P_3 y parcialmente en P_5 y en la unidad didáctica. El resto de competencias muestra un similar reparto de asignaciones no justificadas, aunque *modelizar* destaca por encima del resto en las tres producciones. Cuando en el capítulo siguiente analicemos las producciones sobre limitaciones en el aprendizaje, veremos cómo de nuevo la modelización pasa desapercibida en el trabajo de este grupo.

Estos resultados en las asignaciones contrastan con la precisión y riqueza alcanzada en los listados de objetivos en lo que se refiere a capacidades y contenidos. El hecho de que el contexto más citado sea el meramente técnico, ha tenido una notable importancia en esas asignaciones ya que, por ejemplo, contextos como los de reparto, medida u operador, permiten elaborar objetivos muy vinculados a competencias como *argumentar* y *justificar*, *modelizar*, *plantear* y *resolver problemas* y *representar*.

Finalmente, señalamos que de los veintiún objetivos enunciados en la propuesta final, hay sólo seis que muestran una total asignación correcta a las diversas competencias.

Producciones del Grupo Probabilidad

El grupo PRO no modificó en P_5 y P_6 ni el enunciado de objetivos ni la asignación de éstos a las competencias matemáticas PISA, por lo que la Figura 48 sólo recoge las parrillas relativas a P_3 y UD.

		P3							
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
14		1	0	0					
1		0	1	1					
2				0			1		
15		1		0		0	0		
16		0		0		0	0		
17		1		0		0	0		
18					0		0		0
19		0	0			1			
20		0			0		0		
7		1	0			1			
12				1			1		0
21		0				1			0
22			0	0	0				
4		0		0					0
10						0	1	0	0
8		1	0			1			
9		1	0			1			
11				1		0	1		
13			1	1					0
23			0	0	0				

		UD							
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
14		1	0	0					
1		0	1	1					
2				0			1		
15		1		0		0	0		
16		0		0		0	0		
17		1		0		0	0		
18					0		0		0
19		0	0			1			
20		0			0		0		
24		0				1		1	
7		1	0			1			
12				1			1		0
21		0				1			0
22			0	0	0				
4		0		0					1
10						0	1	0	0
8		1	0			1			
9		1	0			1			
11				1		0	1		
13			1	1					0
23			0	0	0				

Figura 48. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo PRO

Además, en la unidad didáctica, con respecto a P_3 , únicamente se introduce un objetivo nuevo y en ningún caso se modifican las asignaciones. En P_3 el grupo PRO tiene un total de sesenta y tres asignaciones, estando el 35% de ellas bien justificadas, mientras que en la unidad didáctica suman sesenta y seis asignaciones con un 36% de ellas justificadas. Es un porcentaje bastante bajo y una de las razones posibles de este resultado es el escaso número de revisiones que este grupo hizo de su listado de objetivos. El grupo se preocupó de enunciar

inicialmente unos objetivos coherentes con el contenido matemático, con una notable precisión y riqueza en las capacidades de su tema pero no vieron necesidad de reformular algunos de esos enunciados con motivo de la asignación a competencias. Esto, unido al predominio de un único contexto en esos objetivos, hacen que la vinculación de los objetivos con las competencias terminales no haya servido como criterio de mejora de los enunciados para este grupo.

No obstante, en su presentación de P₃ hicieron un esfuerzo por justificar sus asignaciones [081201S35, 2'53'']:

PF1. El primero, por ejemplo: distinguir entre experimento determinista o aleatorio, en primer lugar. Hemos pensado que es claramente de pensar y razonar, porque el alumno tiene que dominar bien estos conceptos, debe saber separar entre una cosa y otra, que lo diga de una forma argumentada, y bueno, también fomenta la comunicación si le preguntas por qué este experimento es determinista o por qué es aleatorio. El segundo objetivo, determinar el espacio muestral de un experimento aleatorio, pensamos que también es de argumentar y justificar y comunicar, ya que puedes proponer una tarea de decir porqué dado este experimento aleatorio éste es su espacio muestral y porqué has elegido éste y no otro.

PF2. El alumno tiene que darnos un espacio muestral. Para mañana tenéis que decirme varios contextos, varios espacios muestrales y entonces tienen que comunicar.

Como observamos en esa transcripción, varias asignaciones procedían de ejemplos de tareas posibles que podrían plantear, más que debido a que la propia expectativa recogiera esas intenciones educativas.

Por competencias, *modelizar, utilizar el lenguaje simbólico y emplear herramientas tecnológicas* son las menos justificadas en las propuestas del grupo PRO, mientras que en el resto es equitativo el número de asignaciones justificadas. El hecho de que destaquen aspectos puntuales como *comunicación*, contrasta con la baja proporción de asignaciones justificadas.

Por otra parte este grupo no logró justificar la totalidad de asignaciones realizadas para ninguno de los veintiún objetivos enunciados. Esto pone de manifiesto cierto descuido y falta de criterio, así como escasa reflexión sobre las relaciones entre objetivos y competencias.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

La Figura 49 recoge las tres parrillas que usamos para analizar las asignaciones de objetivos a competencias del grupo RAZ. Este grupo modificó el enunciado de sus objetivos durante los cambios C₂, C₅ y C₆ y también modificó algunas de las asignaciones.

P3		P5		UD				
	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0
14	0	1	0	1	0	0	0	0
11	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	1	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0
6	0	0	0	0	0	0	1	0
7	0	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	1	0
16	0	0	0	0	1	0	0	0
13	0	0	0	0	0	1	0	0
17	0	1	0	1	0	1	0	0
9	0	0	0	0	0	0	1	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0
18	0	0	0	0	0	0	1	0
19	0	1	0	1	0	1	0	1

Figura 49. Indicadores de relación entre objetivos específicos y competencias en diferentes producciones del grupo RAZ

En P₅, el grupo RAZ modifica el enunciado de seis objetivos, si bien sólo en los objetivos 16 y 19 cambian también las asignaciones. El objetivo 16 en P₃ era “Comprender y resolver problemas en los que aparezcan composiciones sucesivas de porcentajes” y aparecía vinculado con las competencias *pensar y razonar*, *argumentar y justificar* y *plantear y resolver problemas*. En P₅ el enunciado pasa a ser “Problemas, de aplicaciones sucesivas de aumentos y descuentos porcentuales” y eliminan la competencia *argumentar y justificar*. En este caso, se eliminan los verbos de acción del enunciado con lo cual no cabe pensar que esas modificaciones obedezcan a un cambio en la orientación del objetivo hacia determinadas competencias. Consideramos irrelevante la eliminación de la competencia en este caso.

En P₃, el objetivo 19 era “Inventar y resolver problemas en los que intervengan repartos proporcionales, tanto directos como inversos” y se vinculaba con *pensar y razonar*, *comunicar*, *plantear y resolver problemas*, *representar y utilizar el lenguaje simbólico*. En P₅ el enunciado se cambia a “Inventar y resolver problemas en los que intervengan repartos” y se añaden las competencias *argumentar y justificar* y *modelizar*. Aquí tampoco se justifican los cambios en las asignaciones con motivo de la modificación en el enunciado, ya que la asignación parece arbitraria en P₅. El hecho de relacionar un mismo objetivo con siete de las ocho competencias, trivializa su significado y no muestran la orientación o la intención del objetivo.

En cuanto a las asignaciones realizadas, en P₃ fueron cincuenta y nueve con un 39% de ellas bien justificadas. En P₅ también fueron cincuenta y nueve asignaciones pero en este caso el porcentaje de las justificadas bajó al 27%. En la unidad didáctica, el número de asignaciones bajó a cincuenta y cinco y el porcentaje de éstas que están justificadas se establece finalmente en un 36%. Estos resultados refuerzan los anteriores que fijaban una precisión relativa en el enunciados de los objetivos y una riqueza limitada a los contenidos y a los contextos. Pero las capacidades no recogieron variedad de descriptores que se relacionasen con las diferentes competencias.

Por competencias, las de *argumentar y justificar*, *modelizar y plantear y resolver problemas* son las que recogen un mayor número de asignaciones sin justificar. En el otro extremo están las de *comunicar y utilizar el lenguaje simbólico*, que quedan prácticamente justificadas en todas las producciones. Las otras tres tienen un balance similar entre ellas con una preponderancia de asignaciones no justificadas.

Igualmente, este grupo no ha logrado justificar la totalidad de asignaciones realizadas para ninguno de los diecinueve objetivos enunciados. Esto muestra cierto descuido y falta de criterio, así como escasa valoración a las relaciones entre objetivos y competencias.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Descriptores

Haciendo una valoración conjunta de los cuatro grupos, en general se detectan pocas variaciones entre diferentes producciones de un mismo grupo en lo relativo a las asignaciones realizadas, aún cuando se produzcan cambios en el enunciado de los propios objetivos.

El reflejo de las competencias en las producciones de los grupos se muestra fundamentalmente en la reformulación de gran parte de los enunciados de P₃ con respecto a producciones anteriores, ya que esa fue la primera producción en que los grupos hicieron asignaciones a competencias.

No obstante, sí existen diferencias notables en las asignaciones justificadas por cada uno de los grupos de futuros profesores. La Figura 50 muestra la variación en el porcentaje de asignaciones justificadas a lo largo de las diferentes producciones.

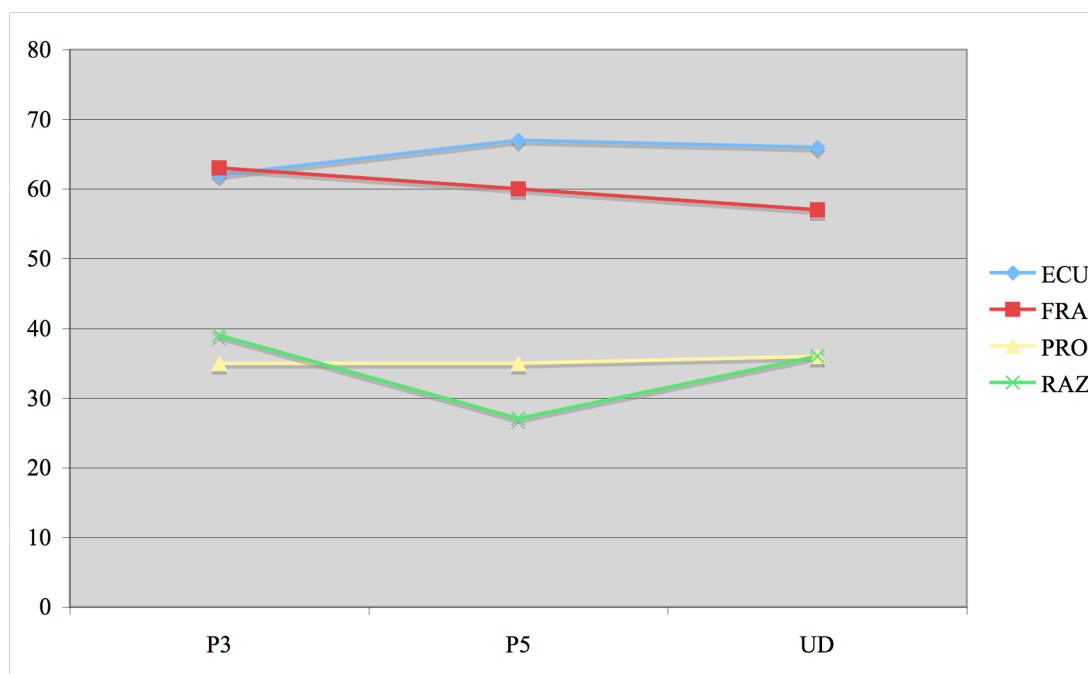


Figura 50. Comparativa por grupos del porcentaje de asignaciones justificadas entre objetivos y competencias

Las variaciones de los cuatro grupos que muestra la gráfica de la Figura 50, nos permiten observar dos patrones distintos: los grupos ECU y FRA, que parecen considerar con interés y constancia la vinculación de los objetivos con las competencias desde el comienzo y alcanzan un porcentaje de asignaciones correctas siempre cercanas o superiores al 60% (63% en promedio). Por otra parte, están los grupos PRO y RAZ, que no alcanzan un 40% de asignaciones correctas en ninguna producción (34% en promedio). Es decir, PRO y RAZ vinculan objetivos con competencias sin contar muchas veces con un criterio claro para establecer la asignación; parecen no haber dado importancia suficiente a las competencias como criterio para la revisión y mejora en el enunciado de los objetivos, por lo cual tampoco les sirve para reducir el número de asignaciones no justificadas.

Dado que los grupos ECU y FRA no destacan por la riqueza de sus objetivos en cuanto a los tipos de contenido ni a los contextos que mencionan, la bondad de las asignaciones realizadas se debe a las detalladas y continuas revisiones de los enunciados de los objetivos. En el otro lado, el grupo PRO se caracteriza, por una gran estabilidad y escasos cambios en sus enunciados, mientras que el grupo el grupo RAZ se reconoce por sus avances y retrocesos continuos en la redacción de los enunciados de los objetivo. Ambos ponen de manifiesto que una excesiva rigidez en el mantenimiento de los enunciados o una revisión permanente, no facilitan necesariamente unas asignaciones bien realizadas.

Mientras que los grupos ECU y FRA tienen, aproximadamente, un 25%, de sus objetivos con asignaciones bien justificadas, los grupos PRO y RAZ por razones distintas no alcanzan a justificar adecuadamente las asignaciones de uno sólo de sus objetivos. Esta diferencia entre los grupos muestra que estos últimos no aprovecharon este trabajo de vinculación de objetivos con competencias matemáticas para mejorar sus enunciados y profundizar sobre los mismos.

Algo parecido ocurre con las competencias: sólo los grupos ECU y FRA consiguen justificar todas las asignaciones de sus objetivos a determinadas competencias.

En general, la competencia *modelizar* es la que genera más asignaciones no justificadas, lo que da muestra de su complejidad y de las dificultades de los grupos de profesores en formación para asignarle un significado bien determinado y preciso.

La competencia *pensar y razonar* también aglutina un gran número de asignaciones no justificadas. Entendemos en este caso que la razón es debida a que se trata de una competencia que parece que pueda vincularse con cualquier capacidad matemática, es decir, en la que prácticamente cabe todo. El propio nombre de la competencia induce a confusión ya que alude a procesos básicos y comunes en matemáticas, con lo que es frecuente que los grupos de profesores en formación suelen vincularla con gran parte de los objetivos, sin detenerse a buscar justificación. Aunque entre los diferentes grupos hay diferencias estructurales evidentes, queda claro que en general, no prestan suficiente atención a los descriptores de esta competencia cuando hacen las asignaciones.

5.2 Estudio de la Variable Estructura de las Competencias (Es)

Cada uno de los grupos, a partir de P_3 , vinculó cada uno de los objetivos específicos enunciados con aquellas competencias para las cuales encontraba algún criterio de asignación. Si consideramos el conjunto de objetivos que se relacionan con una misma competencia, podemos usar la Tabla 67 para determinar en qué medida esos objetivos contemplan la estructura completa de los descriptores de esa competencia.

En ocasiones, la asignación de un objetivo a una competencia se realiza porque ese objetivo aborda alguno de los aspectos o capacidades parciales que abarca la competencia. Lo que ahora interesa es analizar si la mayor parte de sus descriptores se contemplan entre los diferentes objetivos que se vinculan con ella. Se trata de comprobar, por lo tanto, si las expectativas de aprendizaje sobre un tema de matemáticas comprenden en su totalidad, o no, cada una de las competencias contempladas.

Para estudiar el alcance de la vinculación establecida tomamos como variable la aparición de los diferentes descriptores de cada competencia (Tabla 68) y comprobamos su presencia como criterios de vinculación para el conjunto de objetivos vinculados. Lo hacemos por separado para cada uno de los cuatro grupos de futuros profesores.

Producciones del Grupo Ecuaciones

La Tabla 69 recoge el análisis del conjunto de objetivos que se vinculan con una misma competencia para todas las producciones del grupo ECU en las que se hicieron esas asignaciones (P_3 , P_5 y UD^{10}). Para cada competencia y para cada producción, señalamos con N si el conjunto de objetivos vinculados con una competencia no recoge suficientemente la estructura de la competencia, con P si al menos recoge varios aspectos parciales de la competencia y finalmente, con S si los diferentes objetivos sí cubren los principales descriptores de la competencia.

Lo primero que observamos es que a lo largo del desarrollo de la asignatura, sólo en C3 el grupo ECU llevó a cabo modificaciones en el enunciado de los objetivos, que permiten alterar el reconocimiento de la estructura de determinadas competencias. En P_5 , el grupo ECU incluyó en sus objetivos, de manera explícita y frecuente, actuaciones como *discutir*, *inventar* o *interpretar*, que caracterizan la competencia de *comunicar*, que pasa así de una ausencia total en P_3 a una presencia evidente en P_5 . Por otro lado, en P_3 se mencionan comprobaciones de resultados o propiedades básicas, mientras que en P_5 , ya se exigen justificaciones y explicaciones más elaboradas. Esto implica el paso de una presencia parcial a total en el caso de la competencia *argumentar y justificar*.

¹⁰ En realidad en P_6 también se hicieron esas asignaciones, pero esa producción sólo la realizó el grupo RAZ y en ella no aplicaron ningún cambio ni en el enunciado de objetivos ni en la vinculación de éstos a las competencias matemáticas PISA. Por estas razones no incluimos esa producción en este análisis.

Tabla 69
Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo ECU

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
P ₃							
P	P	N	P	S	S	S	P
P ₅							
P	S	S	P	S	S	S	P
UD							
P	S	S	P	S	S	S	P

Sin embargo, los objetivos que se vinculan con la competencia *pensar y razonar* se centran exclusivamente en la comprensión de conceptos básicos, mientras que los que se relacionan con *modelizar*, sólo abordan la traducción de enunciados a verbales al sistema simbólico. Finalmente, los que se vinculan con la competencia *emplear herramientas tecnológicas* sólo mencionan ese tipo de recursos para comprobar resultados. Por eso sólo reconocemos parcialmente la estructura de esas tres competencias. Con respecto al resto de competencias, la mayor parte de ellas sí se recogen en su totalidad.

En cualquier caso, el conjunto de los objetivos propuestos por el grupo ECU, cubren correctamente cinco de las ocho competencias matemáticas PISA y, al menos parcialmente, la estructura de las otras tres. El balance de este grupo respecto a la consideración de las competencias en el enunciado de los objetivos es muy positivo, si bien mejorable.

Producciones del Grupo Fracciones

De manera análoga al caso del grupo ECU, la Tabla 70 muestra el análisis de los objetivos según si cubren o no la estructura de las competencias con las que se vinculan, usando los mismos códigos.

En el caso del grupo FRA, el único cambio entre producciones se produce en la transición C₃ en la competencia *comunicar*. En P₃ aparecen descriptores de esta competencia como *escribir* y *explicar*, pero es realmente en P₅, donde se cubre mejor la estructura de esta competencia con actuaciones como *inventar* y *enunciar* y que ya siguen en el listado de objetivos hasta la unidad didáctica.

El resto de competencias se mantiene igual en las diferentes producciones y la mayor parte de ellas se recogen por completo. Destaca especialmente *pensar y razonar*, ya que *comprender*, *reconocer*, *utilizar*, *identificar*, *clasificar* o *relacionar* son actuaciones fundamentales de esta competencia matemática. Únicamente la competencia *argumentar y justificar* se recoge sólo de manera parcial, porque en las producciones simplemente refieren la justificación de una transición entre diferentes representaciones. La competencia *modelizar* no

aparece en absoluto representada en ninguna de las producciones, a pesar de tener, por ejemplo, siete asignaciones de objetivos en la unidad didáctica.

Tabla 70

Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo FRA

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
P ₃							
S	P	P	N	S	S	S	S
P ₅							
S	P	S	N	S	S	S	S
UD							
S	P	S	N	S	S	S	S

Estos resultados nos llevan a hacer un balance muy positivo de las producciones de este grupo con respecto a esta variable. Un aspecto claramente mejorable es el de la competencia *modelizar*, si bien esto muestra coherencia con los resultados de la variable anterior, ya que precisamente esa competencia fue una de las que recogieron mayor número de asignaciones no justificadas.

Producciones del Grupo Probabilidad

El análisis de la variable *Es* para las producciones del grupo PRO lo recoge la Tabla 71 que mostramos a continuación.

Tabla 71

Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo PRO

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
P ₃							
S	P	S	N	P	S	N	N
P ₅							
S	P	S	N	P	S	N	N
UD							
S	P	S	N	P	S	N	N

El grupo PRO, como vimos antes, no modificó las asignaciones iniciales de P₃ en ninguna producción posterior. Lo único que cambió fue que en el listado de objetivos de la unidad didáctica, introdujeron un objetivo nuevo que vincularon con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico*. Ya que ese objetivo tenía que

ver con manejar propiedades básicas de la probabilidad, tiene sentido esa asignación y así lo recogemos en la Tabla 71.

El resto de competencias tienen un balance diferente. *Pensar y razonar, comunicar y representar* están perfectamente recogidas en el conjunto de objetivos, mientras que la estructura de *argumentar y justificar, comunicar, plantear y resolver problemas*, al igual que la ya comentada *utilizar el lenguaje simbólico*, quedan sólo parcialmente recogidas. En el caso de *argumentar y justificar*, el grupo PRO sólo menciona de manera explícita la justificación de un procedimiento, mientras que en lo que se refiere a *resolución de problemas*, sólo se introducen aspectos de enunciar problemas pero no de resolver. Finalmente, los descriptores de las competencias *modelizar y emplear herramientas tecnológicas* no aparecen en el conjunto de objetivos vinculados a ellas.

Los resultados del análisis de la variable *descriptores* en este grupo justifican, de manera evidente, los resultados de esta otra. Existe un alto porcentaje de asignaciones no justificadas en las distintas producciones (66% en promedio). Las que más carecen de justificación son *modelizar, utilizar el lenguaje simbólico y emplear herramientas tecnológica* y son también esas las que no quedan reconocidas en las producciones del grupo. Además tampoco las de *plantear y resolver problemas y argumentar y justificar* quedan recogidas en el conjunto de objetivos. Este grupo muestra deficiencias en los descriptores que considera para los tres tipos de competencias. Con respecto a esta variable, el balance de las producciones de este grupo es bastante pobre.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

El análisis de la presencia de los descriptores de las competencias matemáticas PISA en las producciones del grupo RAZ aparecen en la Tabla 72 siguiente.

Tabla 72

Reconocimiento de la estructura de las competencias matemáticas PISA en algunas producciones del grupo RAZ

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
P ₃							
P	N	P	N	S	S	S	N
P ₅							
P	N	P	N	S	S	S	N
UD							
P	N	P	N	S	S	S	N

En este caso, no hay cambios en las asignaciones iniciales de objetivos a competencias que permitan establecer diferencias en los valores de esta variable. Esto es coherente con las escasas modificaciones que se realizaron en las asignaciones y que hemos analizado con la variable *De*.

En conjunto, las competencias *argumentar y justificar, modelizar y emplear herramientas tecnológicas* no están suficientemente representadas en el conjunto de objetivos vinculados a ellas. *Pensar y razonar* lo está parcialmente, porque las únicas actuaciones vinculadas a ellas tienen que ver con el manejo técnico de conceptos y dejan de lado facetas importantes como relacionar e interpretar esos conceptos. En lo que a *comunicar* se refiere, sólo se cita en relación con la invención de problemas. Finalmente las competencias *plantear y resolver problemas, representar y emplear herramientas tecnológicas* sí están representadas suficientemente en el conjunto de objetivos.

Con estos resultados, el balance de las producciones del grupo RAZ sobre esta variable es muy pobre. Sólo tres competencias están completamente recogidas, estando dos de ellas relacionadas con los sistemas de representación, mientras que otras tantas no aparecen recogidas en las producciones. El resto lo hacen sólo parcialmente.

Balance del Trabajo de los Grupos Respecto de la Variable Estructura de las Competencias

Desde un punto de vista general, podemos agrupar las frecuencias obtenidas en el análisis de las ocho competencias entre las producciones de los diferentes grupos. De esta manera, obtenemos una clasificación de las competencias que indica cuáles de ellas no han sido reconocidas en la propuesta de objetivos de los grupos, cuáles sólo parcialmente y cuáles sí.

Estos datos, que provienen de los análisis previos de cada uno de los grupos, los mostramos en la Tabla 73.

Tabla 73

Frecuencias de los valores de la variable estructura de las competencias en las diferentes producciones de los cuatro grupos

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Estructura no reconocida (N)							
0	3	2	9	0	0	2	6
Estructura parcialmente reconocida (P)							
6	7	3	3	3	0	1	3
Estructura sí reconocida (S)							
6	2	7	0	9	12	9	3

Estos datos confirman lo expuesto antes acerca de la dificultad que, para los grupos de profesores en formación tiene la competencia *modelizar*. Ha sido la más frecuente de la categoría de estructura no reconocida y nunca ha llegado a ser reconocida completamente, en ninguna producción de ningún grupo. Sólo el grupo ECU se aproximó parcialmente a ella en sus tres producciones, ya que el resto no tuvo en cuenta sus descriptores. También la competencia *emplear*

herramientas tecnológicas presenta importantes lagunas. El hecho de presentar específicamente recursos tecnológicos en la asignatura (sesión 18) y de mostrar ejemplos en sesiones alternas, no implica que los grupos de profesores en formación vean la importancia que puede extraerse de ese tipo de recursos para las expectativas de aprendizaje.

En el extremo opuesto están las competencias de *representar*, que quedó perfectamente establecida para todos los grupos y *plantear y resolver problemas* y *utilizar el lenguaje simbólico*, con un alto índice de representación. Es fácil para los grupos elaborar enunciados que se centren en la resolución de problemas y prácticamente todos lo hacen. Por otro lado, el sistema simbólico de representación y las fórmulas y algoritmos ocupan un lugar preponderante en la planificación de los diferentes grupos, por lo que reconoce perfectamente la estructura de la competencia *utilizar el lenguaje simbólico*.

Entre ambos grupos de competencias se sitúan *pensar y razonar* y *comunicar*, con una presencia considerable de sus descriptores y *argumentar* y *justificar*, con un reconocimiento menor. El fuerte peso de los contenidos conceptuales y el poco aprovechamiento del análisis de contextos para el enunciado de objetivos, hacen que esta competencia, junto a *modelizar*, pasen desapercibidas. Sólo el grupo ECU consigue recoger la estructura completa de la competencia *argumentar* y *justificar* y ninguno lo hace con *modelizar*.

6. APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE FUTUROS PROFESORES SOBRE OBJETIVOS Y COMPETENCIAS

En este capítulo hemos centrado nuestro análisis en los conocimientos y capacidades requeridos para establecer objetivos matemáticos específicos, con claridad y precisión, por parte de los cuatro grupos de profesores en formación inicial con los que trabajamos. Estos conocimientos y capacidades contribuyen, progresivamente, al dominio en la acotación de los objetivos específicos de un tema matemático. También hemos explorado el modo en que estos grupos vinculan los objetivos específicos por ellos establecidos con expectativas de aprendizaje a largo plazo: las competencias matemáticas. El incremento y evolución de esos conocimientos y capacidades profesionales, en el transcurso de varias sesiones de trabajo, muestra la complejidad del proceso de aprendizaje relativo al enunciado de objetivos específicos y de la relación entre dos niveles de expectativas: objetivos específicos y competencias.

Para llevar a cabo este análisis, hemos abordado dos estudios globales y dos locales acerca de los objetivos específicos enunciados por los cuatro grupos de profesores en formación. Así mismo, hemos realizado otros dos estudios, uno global y otro local, sobre la vinculación entre objetivos y competencias considerada por cada uno de los grupos. En total han sido seis estudios, que se han presentado a lo largo de este capítulo. Los datos obtenidos de las distintas producciones y la interpretación que sobre ellos hemos realizado, han mostrado distintas facetas del proceso mediante el cual los grupos de futuros profesores

alcanzan un dominio técnico y práctico de las expectativas sobre el aprendizaje escolar de las matemáticas .

La caracterización del proceso general de aprendizaje de los grupos de futuros profesores sobre objetivos y competencias la hemos articulado en cinco momentos: un estado inicial, tres etapas de cambio y transformación y un estado final. Estos cinco momentos permiten describir los procesos de aprendizaje de los distintos grupos, dentro de un marco interpretativo común. El marco muestra regularidades y diferencias, contribuye a identificar indicadores con los cuales marcar avances, estancamientos y retrocesos; en definitiva, expresa la complejidad de este proceso y su naturaleza dinámica.

Para sintetizar e interpretar toda la información obtenida, en este apartado organizamos y presentamos nuestro balance en torno a tres puntos. En primer lugar, sintetizamos la propuesta de objetivos por parte de los cuatro grupos de futuros profesores. Hemos seleccionado un enunciado de cada uno de los grupos en su estado inicial y mostramos su variación a lo largo de las diferentes producciones. La evolución de esos objetivos permite evocar el proceso de aprendizaje de cada uno de los grupos a lo largo de la asignatura. En segundo lugar, resumimos los principales datos obtenidos del conjunto de producciones de los grupos. Una visión conjunta de toda esa información permite afrontar el tercer y último punto de este apartado. En él, resumimos la complejidad del proceso de aprendizaje de los diferentes grupos de profesores en formación, acerca de las expectativas sobre aprendizaje de los escolares.

6.1 Ejemplificación del Proceso Mediante un Objetivo

Como resumen de la caracterización del proceso de aprendizaje de cada uno de los grupos de futuros profesores sobre el enunciado de objetivos específicos, hemos elegido ejemplificar ese proceso de aprendizaje mostrando la evolución singular de uno de esos enunciados a lo largo de diferentes producciones de cada grupo.

En su primera propuesta el grupo ECU enuncia el siguiente objetivo : “5. Comprobar si un/os valor/es dado/s es/son solución/es de una ecuación/sistema”. En la siguiente producción, fragmenta ese enunciado en otros tres: “24. Comprobar si un valor dado es solución de una ecuación”, “25. Comprobar si un par de valores dados es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas” y “26. Comprobar si un par de valores dado es solución de un sistema”. Finalmente, en el balance del análisis cognitivo, el grupo modifica esos enunciados expresándolos como: “24. Discutir si un valor dado es solución de una ecuación”, “25. Discutir si un par de valores es solución de una ecuación de primer grado con dos incógnitas” y “26. Discutir si un par de valores es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas”. Este grupo muestra como, a partir de un enunciado genérico, mediante un primer cambio concretan mejor un enunciado singularizando la casuística y, en un segundo paso, reformulan la capacidad otorgándole un significado más rico.

En su primer acertamiento al enunciado de objetivos, el grupo FRA propone el siguiente enunciado: “19. Resolver problemas”, muy abierto y no vinculado con

ningún foco de contenido. En la siguiente producción, ese objetivo desaparece como tal, pero la resolución de problemas toma peso en su nueva propuesta con los enunciados: “22. Inventar y resolver problemas donde se vean involucradas las distintas interpretaciones de las fracciones” y “29. Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones”. En la siguiente revisión añaden, además, un tercer enunciado complementario: “30. Enunciar y resolver problemas multiplicativos con fracciones en diferentes situaciones”. En resumen, el grupo produce mejoras notables tanto en precisión como en riqueza en sus enunciados, hasta obtener una propuesta coherente con el análisis de contenido y bien formulada.

El proceso de aprendizaje del grupo PRO, como veremos más adelante, destaca por su concentración en un periodo muy corto de tiempo. Con apenas una modificación importante, el grupo delimita su propuesta final de manera eficiente. Por ejemplo, en su segundo acercamiento, reformula, el enunciado original “9. Cálculo de probabilidad condicionada”, en términos de “9. Comprender y aplicar la fórmula de la probabilidad condicionada”. Los cambios desde entonces, son escasos y sin incidencia.

El proceso de aprendizaje del grupo RAZ, con continuos altibajos, puede ejemplificarse con un objetivo concreto. En su segunda propuesta, el grupo propone el enunciado siguiente: “16. Comprender problemas en los que aparezcan composiciones sucesivas de porcentajes (¿Qué aumenta más una cantidad, sumando porcentajes o multiplicando? ¿Qué es mejor, aplicar primero un descuento y luego un aumento o viceversa?, etc.)”. En la siguiente producción, ese objetivo pasó a ser más preciso y rico en su enunciado: “16. Comprender y resolver problemas en los que aparezcan composiciones sucesivas de porcentajes”. Sin embargo, en el balance del análisis cognitivo, pierde ambas características al quedar propuesto como: “16. Problemas, de aplicaciones sucesivas de aumentos y descuentos porcentuales”. Curiosamente, en la unidad didáctica final, el enunciado vuelve a su forma original, restando precisión, con un enunciado largo y ejemplificaciones generales de tareas.

Es decir, podemos observar regularidades y singularidades en los tiempos y momentos de aprendizaje de los grupos de futuros profesores. Resumimos a continuación resultados que avalan este hecho, a partir de los análisis que hemos descrito en este capítulo.

6.2 Balance de las Producciones de los Grupos

Para llevar a cabo la descripción de los resultados obtenidos en nuestro análisis, nos centramos en primer lugar en el acercamiento de los grupos al enunciado de objetivos específicos. En segundo lugar nos ocupamos de las vinculaciones entre esos objetivos y las competencias matemáticas.

Aprendizaje Acerca del Enunciado de Objetivos

El estudio global de los objetivos ha permitido delimitar diferentes momentos en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores caracterizados por etapas (ver Tabla 51). En el estudio local de los objetivos, hemos definido los cambios y

hemos valorado el progreso y los resultados del aprendizaje de los grupos en términos de precisión y riqueza, en relación con el enunciado de objetivos.

La Tabla 74 muestra un balance de esos dos aspectos del aprendizaje: etapas y resultados en términos de precisión y riqueza de los objetivos específicos propuestos a lo largo de la asignatura. La primera fila recoge los momentos inicial y final en la primera y última columna, respectivamente, quedando entre ellos los diferentes momentos de cambio. En los estados inicial y final distinguimos el número de enunciados propuestos y si la precisión (P) y la riqueza (R) de éstos es positiva (+) o negativa (-). En las columnas de los cambios, señalamos la etapa de aprendizaje (Et), que puede referirse a revisión crítica (RC), consolidación (C) o estabilidad (E). En las columnas de precisión y riqueza señalamos con una flecha hacia arriba si se ha producido una mejora en ese aspecto en esa etapa, con una flecha hacia abajo si se produce un retroceso y con una flecha circular si permanece estable.

Tabla 74

Estados y etapas de aprendizaje de los grupos en relación al enunciado de objetivos y a la precisión y riqueza de esos enunciados

Inicial			C ₁			C ₂			C ₃			C ₅			C ₆			Final		
N	P	R	Et	P	R	Et	P	R	Et	P	R	Et	P	R	Et	P	R	N	P	R
<i>ECU</i>																				
17	-	-	RC	↑	↻	RC	↓	↑	C	↑	↑	E	↻	↻	E	↻	↻	22	+	-
<i>FRA</i>																				
19	+	-				RC	↓	↑	C	↑	↑	E	↻	↻	E	↻	↻	21	+	+
<i>PRO</i>																				
13	+	+	RC	↑	↑	C	↻	↻	E	↻	↻	E	↻	↻	E	↻	↻	21	+	+
<i>RAZ</i>																				
13	-	+	RC	↑	↓	C	↑	↑	RC	↓	↑	C	↻	↓	E	↻	↻	19	-	+

Los cuatro grupos de futuros profesores parten de un estado inicial similar en relación al número de objetivos propuestos. En relación a la precisión y riqueza de los mismos, hay diferencias que destacan el buen punto de partida de PRO, la bondad intermedia de las propuestas de FRA y RAZ y la baja calidad de la propuesta de ECU.

Todos los grupos, salvo FRA, pasaron una etapa de revisión crítica en el cambio C₁. Esa etapa arrojó diferentes resultados ya que aunque todos mejoran la precisión de sus enunciados, sólo PRO mejora también la riqueza de los mismos. Pero a partir de C₂, encontramos diferencias entre algunos grupos. ECU y FRA, que se encuentran también en una etapa de revisión crítica, disminuyen la precisión de sus enunciados pero aumentan su riqueza. PRO y RAZ entran en una fase de consolidación, en la que el primero no altera su propuesta y en la que el segundo refuerza la precisión. C₃ arroja de nuevo diferencias, ya que PRO entra en una etapa de estabilidad que ya no abandona, mientras que el resto,

desde una etapa de consolidación en la que todos aumentan la riqueza de sus enunciados, alguno refuerza además la precisión (ECU) y otro la hace disminuir (RAZ). Desde C₅ todos los grupos se encuentran ya en una etapa de estabilidad hasta el final.

El grupo ECU elabora una propuesta notable de objetivos específicos, si bien deja constancia de un buen número de modificaciones y de objetivos desechados entre diferentes producciones. El retraso en la delimitación final de la estructura conceptual, explica sus cambios en la organización de los focos y en el propio enunciado de objetivos. Pero ese proceso dilatado de aprendizaje les reportó al final buenos resultados en cuanto a precisión pero no así en riqueza, ya que un peso importante de los objetivos se referían, exclusivamente, a aspectos puramente técnicos.

El grupo FRA partió de un análisis de contenido bien estructurado (§5.5.1) y en su primer listado, aunque la riqueza de sus objetivos no era alta, sí lo era la precisión. Su proceso de aprendizaje, con menos etapas de cambio que el resto, les reportó mejoras notables tanto en precisión como en riqueza hasta obtener una propuesta coherente con el análisis de contenido y bien formulada.

A pesar de la eficacia del grupo PRO para delimitar su propuesta, destaca, no obstante, que el único cambio que propusieron en sus últimas producciones, fue la introducción en la unidad didáctica de un nuevo objetivo carente totalmente de precisión y riqueza: “24. Dominar las propiedades básicas de la probabilidad”. Como veremos más adelante, este proceso de aprendizaje tan condensado no les reportó buenos resultados, por ejemplo, en la relación entre objetivos y competencias.

El grupo RAZ, en el análisis de contenido, elaboró una estructura conceptual menos rica en relaciones que el resto de grupos en donde los sistemas de representación sí destacaban pero no así los contextos (§5.5.1). Singularmente, en su propuesta de objetivos, los sistemas de representación pasan desapercibidos mientras que los diferentes contextos sí están bien recogidos en los enunciados. La precisión de sus objetivos no destaca en ninguna de sus producciones pues, de hecho, es frecuente que repitan un mismo objetivo en diferentes prioridades de aprendizaje que se refieren a nociones que, aunque obviamente están relacionadas, son claramente distintas. Destaca especialmente la riqueza de sus enunciados, ya que supieron sacar partido al trabajo realizado en el análisis fenomenológico.

Aprendizaje Acerca de la Selección y Asignación de Competencias

En el estudio global de las competencias, hemos estudiado las competencias de mayor y menor frecuencia en la selección de los grupos de futuros profesores, mientras que en el estudio local, nos hemos preocupado de analizar la bondad de las asignaciones realizadas de objetivos a competencias, por cada uno de los cuatro grupos. Entre las cuatro producciones en las que se señalan competencias, no hemos encontrado, en conjunto, diferencias especialmente significativas en la frecuencia de las competencias o en la asignación entre objetivos y

competencias. Por esa razón, destacamos aquí sólo los resultados finales de ambos aspectos del análisis cognitivo.

Las Tablas 75 y 76 recogen esos resultados.

Tabla 75

Porcentaje de presencia de las diferentes competencias matemáticas en las unidades didácticas

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
ECU							
19,4%	13,4%	11,9%	4,5%	6%	4,5%	28,4%	11,9%
FRA							
18%	9,8%	14,8%	11,5%	8,2%	9,8%	16,4%	11,5%
PRO							
19,7%	13,6%	18,2%	6,1%	16,6%	13,6%	6,1%	6,1%
RAZ							
19,6%	8,9%	3,6%	5,4%	26,8%	14,3%	19,6%	1,8%
Total							
19,2%	11,6%	12,4%	6,8%	14%	10,4%	17,6%	8%

Tabla 76

Porcentaje de asignaciones bien justificadas de las diferentes competencias matemáticas en las unidades didácticas

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
ECU							
30,8%	77,8%	100%	33,3%	100%	100%	94,7%	11%
FRA							
63,6%	16,6%	62,5%	14,3%	60%	50%	100%	100%
PRO							
46,2%	22,2%	33,3%	0%	54,5%	44,4%	25%	0%
RAZ							
36,4%	0%	100%	0%	20%	25%	100%	0%
Total							
43,8%	34,5%	62%	9,5%	45,7%	34,3%	91%	31,6%

En la primera, señalamos la presencia de cada una de las ocho competencias matemáticas PISA en la propuesta de unidad didáctica de cada grupo y el

cómputo total. En la Tabla 76, indicamos el porcentaje de asignaciones correctamente justificadas entre objetivos a cada una de las ocho competencias. También mostramos el resultado total en el conjunto de unidades didácticas.

Como ya hemos indicado en este capítulo, la evolución en el enunciado de objetivos del grupo ECU tuvo un efecto muy positivo en la bondad de las asignaciones realizadas entre esos objetivos y las competencias. De hecho, es el grupo con mayor cantidad de competencias completamente justificadas. En conjunto sostuvo correctamente el 67,2% de las asignaciones realizadas. Sin embargo, la orientación de sus objetivos hacia rudimentos básicos en álgebra y hacia la aplicación de algoritmos, hace que en su propuesta destaquen fundamentalmente las competencias de *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico*, mientras que las competencias de carácter funcional pasan casi desapercibidas.

En el caso del grupo FRA, en su unidad didáctica consigue dejar una representación notablemente homogénea de las diferentes competencias. Aunque, al igual que el grupo ECU, las competencias de *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico* son las más frecuentes, destaca también la de *comunicar* y la de *emplear herramientas tecnológicas*. En relación con las asignaciones a objetivos, sólo dos competencias no llegan a un 50% de bondad en las justificaciones: *argumentar y justificar* y *modelizar*. Estos resultados reafirman la calidad en el enunciado de objetivos, ya que recogen un importante número de descriptores de la mayor parte de competencias, alcanzando además un 60,3% de asignaciones bien justificadas en total.

El grupo PRO distingue dos grupos de competencias. El primero, con una presencia uniforme y notable incluye las competencias de *pensar y razonar*, *argumentar y justificar*, *comunicar*, *plantear y resolver problemas* y *representar*. El segundo la presencia es bastante menor y en él se encuentran las de *modelizar*, *utilizar el lenguaje simbólico* y *emplear herramientas tecnológicas*. Pero en la relación con los objetivos, sólo la de *plantear y resolver problemas* supera el 50% de asignaciones bien justificadas (54,5%). El resto se mueve, en su gran mayoría, entre un 22% y un 47%, aproximadamente; pero hay dos competencias cuyas asignaciones no están justificadas. Una única revisión de los objetivos realizada por el grupo, no le permitió depurar los enunciados para reforzar los vínculos con las competencias.

Finalmente, el grupo RAZ tiene resultados dispares. Por una parte, sobresale en considerar en primer lugar *plantear y resolver problemas*, pero con apenas un 20% de asignaciones bien justificadas. Por detrás destacan las competencias de *representar*, *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico*. En este último caso la bondad de la asignación es total. En otro extremo, el resto de las competencias, con poca presencia y una correcta asignación casi nula. El esfuerzo de este grupo por introducir los diferentes contextos de su tema en el enunciado de objetivos, no repercutió especialmente en la bondad de las asignaciones realizadas a las competencias.

Toda esta información, acerca del análisis de las producciones de los distintos grupos de futuros profesores sobre expectativas de aprendizaje, permite caracterizar su proceso de aprendizaje en relación con el primero de los organizadores del currículo del análisis cognitivo.

6.3 Proceso de Aprendizaje de los Grupos Sobre Objetivos y Competencias

Los cinco momentos que hemos caracterizado para describir el proceso de aprendizaje de los distintos grupos, ponen de manifiesto tanto la propia complejidad de ese proceso, como su carácter dinámico.

El estado inicial lo marca el dominio sobre el tema en cuyo diseño se trabaja. Este conocimiento se delimita mediante el análisis de contenido y tiene su expresión en el mapa conceptual que sobre el tema en estudio haya realizado cada grupo de trabajo (§5.5.1). En el comienzo del trabajo sistemático sobre objetivos relativos a un tema concreto, el dominio sobre el contenido del tema es el conocimiento necesario de partida.

La estructura conceptual, sistemas de representación y contextos que delimitan cada tema muestran unos focos prioritarios del contenido en estudio. Son esos focos los que permiten establecer unas prioridades generales para el aprendizaje de los escolares sobre el tema. El primer aprendizaje de los grupos de futuros profesores, consiste en relacionar y fundamentar el análisis cognitivo sobre el análisis de contenido que le precede (§8.1.5).

La delimitación certera de las prioridades de aprendizaje proporciona los cimientos para el inicio del proceso. Esta delimitación inicial no es inmediata, puede experimentar cambios, mostrar variantes o sufrir retrocesos. En cada paso del proceso del enunciado de objetivos, las propuestas se sustentan sobre unas prioridades; el proceso no se asienta hasta que tales prioridades no queden perfiladas con nitidez. Una primera capacidad de los grupos de profesores en formación viene dada, pues, por la precisión y habilidad con que escoge y expresa las prioridades de aprendizaje sobre un tema. Seleccionar un número bajo de prioridades a partir de la estructura conceptual de un tema y establecer un criterio que permita distinguir entre ellas, son indicadores de esta capacidad.

Conviene no descuidar el trabajo de los grupos sobre este punto de partida y volver al mapa conceptual del tema de trabajo tantas veces como sea necesario para destacar aquellos de sus aspectos que parezcan prioritarios. Hasta que no se alcanza una cierta maestría para establecer las prioridades de aprendizaje de un tema, el proceso no se asienta (§8.1). Para algunos grupos que han trabajado intensamente sobre diversas facetas del enunciado de objetivos, la falta de dominio en este primer aspecto puede suponer una rémora a lo largo del proceso. Hemos subrayado dos criterios, completitud y cognición, para controlar a partir de los primeros listados de enunciados de objetivos la amplitud y rango de esos enunciados en relación con la estructura conceptual elaborada en el análisis de contenido (§8.2.2 y §8.2.3).

La primera relación de enunciados de objetivos es un indicador preciso del dominio de los grupos de futuros profesores sobre los conocimientos que

conforman el tema y sobre los focos que en el mismo destacan. En este momento, las reflexiones y recomendaciones que se puedan hacer a los grupos se deben orientar a precisar los focos y prioridades de aprendizaje para el tema, su consideración en los enunciados elaborados y los tipos de contenidos que predominan en esos enunciados.

El trabajo sobre esta componente del análisis cognitivo continúa con la revisión crítica de los enunciados de los objetivos propuestos. Esta revisión se debe centrar en mejorar la precisión sobre las tres componentes de los objetivos: capacidades, conocimientos y contextos.

En relación con la capacidad que aparece en el enunciado de cada objetivo cuenta, en primer lugar, la precisión (§8.3.1). Una capacidad enunciada en término vagos e imprecisos muestra escaso dominio y falta de criterio sobre las expectativas de aprendizaje escolar enunciadas. La mejora en la precisión es un resultado de la primera fase de revisión crítica.

En relación con el contenido, que aparece en el enunciado de cada objetivo, cuenta el predominio de uno de los dos tipos –conceptual o procedimental- o bien el equilibrio entre ambos tipos de conocimientos. Resultado de la fase de revisión crítica debe ser el incremento de aquellos enunciados que incluyen, a la vez, conocimientos conceptuales y procedimentales, sin que ello suponga la presencia de algunos objetivos centrados sólo sobre uno de estos dos tipos (§8.3.2).

En relación con los contextos hay que cuidar que se contemplen en los enunciados aquellos contextos considerados previamente en la estructura conceptual por los grupos de profesores en formación. Un exceso de enunciados “técnicos”, es decir, puramente formales y matemáticos, muestran escasa o nula consideración de la visión funcional de las matemáticas escolares. En la fase de revisión crítica de los enunciados de objetivos, se debe reforzar la consideración de los contextos previamente establecidos por los grupos de profesores en formación, al llevar a cabo el análisis de contenido del tema cuyo análisis cognitivo se está realizando (§8.3.3). Un último criterio de control sobre los enunciados de los objetivos en la fase de revisión crítica, es el de la especificidad (§8.3.4).

Por lo tanto, precisión en las capacidades esperadas de los escolares, consideración conjunta de conceptos y procedimientos en los contenidos, atención a los contextos y especificidad al tópico que se estudia, son criterios de mejora para desarrollar la capacidad en el enunciado de objetivos específicos sobre un tema de matemáticas. Los conocimientos requeridos en este segundo momento son los establecidos en el análisis de contenido del tema de matemáticas sobre el que se está trabajando.

Puntos fuertes en esta fase son la mejora en la precisión de las capacidades y el incremento de enunciados que contemplan conceptos y procedimientos conjuntamente. Puntos débiles en los grupos de profesores que hemos venido estudiando, han sido las limitaciones en la elección y delimitación de focos y

prioridades de aprendizaje escolar para el tema en estudio y la inclusión de los contextos establecidos en los enunciados de los objetivos.

El tercer momento viene dado por la fase que hemos denominado de consolidación. Este momento se inicia con la aportación de las competencias matemáticas del currículo escolar y la búsqueda de criterios para vincular objetivos con competencias, de manera que cada objetivo específico, puede caracterizarse por las competencias a cuyo logro parece contribuir de manera prioritaria. Este estudio de las competencias matemáticas, centradas en nuestro caso en las competencias PISA (§3.1.6) y los criterios para la vinculación entre objetivos y competencias (§3.4.1), es el conocimiento requerido con el que se inicia la fase de consolidación. Un aprendizaje contrastado en los distintos grupos en este momento es el incremento de la riqueza en las capacidades y los conocimientos que aparecen en cada enunciado. A partir de esta reflexión, los enunciados incluyen más de una capacidad y más de un conocimiento, bien por integración de dos o más enunciados anteriores, bien por ampliación de los existentes. La consideración de las distintas capacidades y los vínculos que se puedan establecer de los objetivos con cada una de ellas, constituyen un mecanismo de control para el inevitable sesgo que se suele producir en los enunciados de objetivos. Ampliar las capacidades que se consideran en un enunciado o bien el rango y contenido de los conocimientos planteados, es consecuencia necesaria de este proceso.

Una vez depurados los enunciados de los objetivos en la fase de revisión crítica, se produce un trabajo más fino que trata de marcar para cada objetivo una o varias expectativas de aprendizaje terminales –competencias- a las cuales el objetivo debe contribuir. Esta fase de consolidación es fundamental para que el conjunto de los objetivos específicos trascienda el localismo del tema que se trabaja y se proyecte en las competencias terminales que caracterizan el aprendizaje matemático escolar al término del periodo de Educación obligatoria. Precisar el criterio mediante el cual un determinado objetivo está vinculado con una competencia determinada, así como buscar un equilibrio entre los vínculos de los objetivos enunciados con las distintas competencias, son dos importantes habilidades que se desarrollan en esta etapa y que contribuyen a la capacidad de los grupos de profesores en formación para el enunciado de las expectativas sobre el aprendizaje escolar relativo a un tema matemático.

Estas habilidades no son fáciles de alcanzar o, al menos, no son destrezas sencillas y de aplicación mecánica (§8.4). Necesitan de un dominio sobre el marco de competencias PISA y de un reconocimiento cuidadoso de los descriptores de cada una de ellas, para que su aplicación no sea superficial, arbitraria o induzca a confusión.

El control de las relaciones entre objetivos y competencias, analizado en el quinto apartado, muestra la complejidad y dificultad de este proceso y los limitados logros alcanzados por los distintos grupos de profesores en formación, respecto a esta fase del análisis cognitivo. Un excesivo apresuramiento por cerrar los enunciados de los objetivos específicos de un tema puede hacer perder la perspectiva de que los aprendizajes establecidos para ese tema en concreto son

sólo elementos mediadores para un aprendizaje terminal más complejo, al cual contribuyen y viene establecido en términos de competencias. Un alto porcentaje de asignaciones correctas, es indicador de la proyección a largo plazo sobre las expectativas de aprendizaje matemático escolar. Un bajo porcentaje de asignaciones correctas viene a expresar, por el contrario, cierto descuido sobre los aprendizajes a medio y largo plazo.

El cuarto momento de estabilización corresponde a la tercera fase en el proceso de aprendizaje. Con sus aciertos y con sus limitaciones, cada uno de los grupos alcanza unos conocimientos y muestra unas capacidades en el enunciado de los objetivos de su correspondiente tema. En este momento, cada grupo ha debido acotar las prioridades de aprendizaje a partir de la estructura conceptual, al menos así lo han logrado con mayor o menor acierto los cuatro grupos con los que hemos trabajado. También la mayoría de los enunciados están expresados con claridad y precisión, muestran un equilibrio entre conceptos y procedimientos y, algunos, alcanzan a considerar los contextos establecidos teóricamente. Hay escasos enunciados ajenos al tema que se contempla y las distintas prioridades del tema reciben la atención adecuada. Los grupos de profesores en formación han logrado establecer la vinculación de los objetivos enunciados con las competencias matemáticas terminales, si bien en algunos casos los criterios de asignación no quedan adecuadamente justificados. Aún con las limitaciones apuntadas, el trabajo realizado ha resultado intenso y sistemático; la mayor parte de los grupos entienden que han alcanzado un techo y se sienten satisfechos con el aprendizaje logrado. En este momento, mantienen estables sus enunciados aún cuando dispongan de evidencias que les muestren que el trabajo puede mejorarse.

Alcanzado este punto de equilibrio, los profesores en formación sólo se muestran dispuestos a corregir errores o contradicciones muy evidentes. Es un momento de saturación en el que no resulta conveniente reiniciar, total o parcialmente, el trayecto ya recorrido. No, al menos, en un primer aprendizaje; habrá que esperar a la programación de un nuevo tema, o bien a utilizar los criterios que se han ido planteando para evaluar las propuestas hechas por otros grupos. Un criterio de trabajo para esta fase, viene dado por el análisis de la estructura de las competencias contempladas en cada propuesta de enunciados (§8.5.3).

Como muestra el balance del trabajo de los distintos grupos, el enunciado de las expectativas de aprendizaje es un conocimiento profesional complejo. Lograr enunciados adecuados y técnicamente precisos muestra un primer nivel de dominio de ese conocimiento. Determinar la vinculación y alcance de esos enunciados respecto de las competencias terminales exige un conocimiento más profundo y sistemático, de cuyas limitaciones hemos dejado constancia en este capítulo (§8.4 y §8.5).

El proceso de aprendizaje de cada uno de los grupos, concluye en una serie de conocimientos y capacidades adquiridos, que se pueden describir mediante unos indicadores y que establecen un momento o estado final. Concretamente, y como veremos en el capítulo undécimo, hemos obtenido información sobre el logro y nivel de consecución de los siguientes conocimientos y capacidades (§4.4):

1. Describir y analizar principios y expectativas sobre el aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo.
2. Delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico.
3. Conocer la noción de competencia y su clasificación (en el marco de PISA).
7. Seleccionar las principales prioridades de aprendizaje o focos de contenido de un tema de las matemáticas escolares.
8. Enunciar objetivos específicos y organizarlos según prioridades o focos.
9. Describir y justificar la contribución de objetivos a competencias.
11. Analizar el desarrollo esperado de competencias y revisar el proceso.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Concluido el estudio de las limitaciones y de las oportunidades para el aprendizaje de los escolares, destacaremos como interrelacionan los rasgos de este momento con estas otras dos componentes del análisis cognitivo: limitaciones y oportunidades de aprendizaje.

APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE ERRORES Y DIFICULTADES

Como hemos visto en los capítulos 2 y 3, el segundo organizador del análisis cognitivo aborda el estudio de las limitaciones que pueden surgir en el proceso de aprendizaje de los escolares, acerca de un tema de matemáticas determinado. Los dos tipos o niveles que considera el análisis cognitivo para ese análisis son los errores y las dificultades¹. En el capítulo 6 hemos descrito las diferentes producciones de los grupos de profesores en formación en la asignatura, que se centran en la descripción y organización de limitaciones en el aprendizaje escolar. Estas producciones son:

- P₄, enunciado de limitaciones en el aprendizaje;
- P₅, balance del análisis cognitivo;
- P₆, revisión del balance del análisis cognitivo; y
- UD, unidad didáctica final.

Por lo tanto, los cambios entre producciones que consideramos aquí son C₄, C₅ y C₆.

En este capítulo, partimos de esas producciones y cambios para describir y analizar el trabajo que realizan y el conocimiento que alcanzan los grupos de profesores en formación sobre este organizador del análisis cognitivo². Para ello, de una manera similar a lo que hemos realizado en el capítulo anterior sobre expectativas de aprendizaje, primero llevamos a cabo un análisis global de las limitaciones enunciadas. En él exploramos los criterios organizativos de las limitaciones en el aprendizaje escolar enunciadas y, a continuación realizamos un análisis cuantitativo de esos enunciados. Esos estudios se detallan en los dos

¹ Aunque como veremos más adelante, la noción de *obstáculo* que introdujimos en el capítulo 3, también servirá para analizar las producciones de los grupos.

² Las diferentes propuestas de los grupos sobre limitaciones del aprendizaje en esas producciones están incluidas en el Anexo H. Los resultados de las diferentes variables consideradas provienen del análisis de las producciones pueden consultarse en los libros de cálculo que mostramos en el Anexo I.

primeros apartado del capítulo. A continuación, en el tercer apartado, hacemos un análisis local, considerando cada uno de los enunciados de limitaciones del aprendizaje escolar propuestos en esas producciones. Finalmente, en el cuarto y último apartado, extraemos algunas conclusiones de ambos estudios desde el punto de vista del aprendizaje de los grupos de profesores en formación.

1. LIMITACIONES EN EL APRENDIZAJE ESCOLAR

Para afrontar el estudio global de las limitaciones en el aprendizaje escolar enunciadas por los grupos de profesores en formación, empleamos las siguientes variables.

Tabla 77

Variables para análisis del conjunto de limitaciones del aprendizaje escolar

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Criterio de organización	Cr	Con qué criterio se organiza el listado de limitaciones en el aprendizaje	Focos/prioridades Focos/prioridades parcialmente Clasificaciones teóricas
Número de enunciados	N	Número de limitaciones enunciadas en cada producción	Numérico
Número de enunciados nuevos	Nu	Número de limitaciones enunciadas que se incorporan por primera vez en una producción dada	Numérico
Número de enunciados estables	Ne	Número de limitaciones enunciadas que se mantienen en una producción sin modificaciones respecto a la producción anterior	Numérico
Número de enunciados que se modifican	Nm	Número de limitaciones enunciadas que se mantienen en una producción aunque con modificaciones en su texto	Numérico
Número de enunciados reconstruidos	Nr	Número de limitaciones enunciadas nuevos construidos por agrupación o división de otros	Numérico

Tabla 77

Variables para análisis del conjunto de limitaciones del aprendizaje escolar

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Número de enunciados innovadores	Ni	Son aquellos enunciados de limitaciones que presentan alguna innovación con respecto a la producción anterior	Numérico (es resultado de sumar Nu, Nm y Nr)
Número final de enunciados	Nf	Número de limitaciones que finalmente consideran en la unidad didáctica	Numérico (coincide con el valor de N en la unidad didáctica)
Número total de enunciados	Nt	Número de limitaciones que han trabajado para llegar a acotar Nf	Numérico

La primera variable explora el criterio empleado por los grupos para organizar su listado de limitaciones en el aprendizaje. Aunque la mayor parte de las veces ese criterio consiste en seguir la estructura de focos o prioridades de aprendizaje, en ocasiones sólo se seleccionan algunos de ellos o bien siguen clasificaciones teóricas.

Las ocho siguientes variables son de tipo cuantitativo y, de manera análoga al estudio de objetivos, se centran en describir la frecuencia de las producciones sobre limitaciones en el aprendizaje escolar realizadas por los cuatro grupos de futuros profesores que hemos mencionado antes. También nos proponemos aquí comparar los enunciados innovadores y los estables para caracterizar los estados inicial y final y las fases en el aprendizaje de los grupos sobre este organizador: revisión crítica, consolidación y estabilidad.

Para mostrar los resultados de los datos de las producciones con respecto a estas variables, en primer lugar describimos los resultados de la variable *criterio de organización* para cada uno de los grupos. A continuación, a partir en el apartado 2, exploramos conjuntamente los resultados de las otras ocho variables de la Tabla 77.

1.1 Estudio de la Variable Criterio de Organización (Cr)

Cuando establecimos esta variable, consideramos dos criterios posibles de organización. El primero es la propia estructura de focos de contenido o prioridades de aprendizaje delimitados por los grupos, mientras que el segundo se apoya en las clasificaciones teóricas sobre limitaciones extraídas de la literatura y que presentamos en clase. Pero con motivo de la primera presentación sobre limitaciones en el aprendizaje (P_4), incluimos una tercera opción que se presenta cuando consideran sólo algunos de los focos o de las prioridades.

La Tabla 78 resume los criterios empleados por los grupos de profesores en formación para organizar su listado de limitaciones del aprendizaje a lo largo de las diferentes producciones. Notamos con *FP* si el criterio seguido es el de los focos de contenido o las prioridades de aprendizaje, con *PFP* si el grupo empleó sólo algunos de esos focos o prioridades y con *CT*, para señalar si emplearon una clasificación teórica.

Tabla 78
Criterios de organización de las limitaciones del aprendizaje enunciadas en las distintas producciones por los grupos

P ₄	P ₅	P ₆	UD
ECU			
PFP/CT	PFP	PFP	PFP
FRA			
FP	FP	FP	FP
PRO			
FP	FP	FP	FP/CT
RAZ			
CT	FP	FP	FP

Los resultados muestran que el criterio organizador de los focos de contenido o las prioridades de aprendizaje es el más empleado por los grupos, si bien existen alternativas.

1.2 Criterios de Organización del Grupo Ecuaciones

Como vimos en el capítulo 8, el grupo ECU modificó en numerosas ocasiones los focos de contenido que empleaba para organizar su listado de objetivos específicos (§8.1.1). Tres de los focos, que se mantuvieron constantes a lo largo de sus diferentes producciones, fueron aquéllos que este grupo emplea para organizar las limitaciones en el aprendizaje escolar [081217S44, 21'41'']:

PF1. Pues... hemos clasificado los errores también dentro de tres de los focos que teníamos: lenguaje algebraico primero, el concepto de equivalencia en ecuaciones y sistemas y técnicas de resolución.

LR. Ecuaciones y sistemas... y los problemas ¿dónde los tenéis?

PF2. En técnicas de resolución hay algo...

En esta parte de la transcripción de su presentación de P₄, el grupo ECU señala los tres focos empleados. Incluye también errores y dificultades relacionados con objetivos que, en principio, no tendrían porqué estar en esos focos, como es el

caso de la resolución de problemas. Esta estructura no se modificó aunque este grupo sí hizo cambios en el enunciado de las limitaciones.

Por otra parte, el grupo ECU finalmente empleó las dos clasificaciones teóricas que introducimos en clase³, para hacer balance del tipo de errores que habían considerado en su primera propuesta, si bien no volvió a usar este análisis posteriormente [081217S44, 31'15'']:

PF2. Lo que hemos hecho es clasificaciones de errores... Interpretación incorrecta del lenguaje en el caso de traducción, inferencias no validadas lógicamente... pues el caso que hemos visto de $2+2=2^2$ por lo tanto $x+x=x^2$. Falta de verificación de solución y errores técnicos en cuanto a operaciones: aplicación de la regla de la suma, la regla del producto, fallos en... Y según Radatz dificultades en el lenguaje y aprendizaje deficiente de conceptos y procedimientos previos que puede arrastrar el alumno. Asociaciones incorrectas y rigidez del pensamiento... pues en el caso paralelamente a inferencias no validadas lógicamente y aplicación de reglas y estrategias irrelevantes, vamos...

En la unidad didáctica, el grupo emplea únicamente tres focos para organizar su listado de limitaciones en el aprendizaje [UD_ECU, 44]:

Enumeramos a continuación los que, creemos, son los errores más comunes en los que pueden un alumno incurrir durante el aprendizaje del tema que nos ocupa. Los dividiremos en tres partes: en la primera se encuentran los relacionados con las expresiones algebraicas, en la segunda parte los que atienden al concepto de equivalencia y en la tercera los relacionados con la resolución de sistemas y ecuaciones. En la mayoría de los errores que se nombran en las dos últimas partes son derivados de un mal uso de las reglas aritméticas básicas.

Después de enunciarlos, el grupo valora cuál o cuáles de su cinco focos aglutinan más errores [UD_ECU, 50]:

En la siguiente tabla podemos ver la distribución de errores por focos de contenido. (...) Destacamos de este esquema la gran acumulación de errores en el foco relacionado con las expresiones algebraicas. En principio, en nuestra U.D., las expresiones algebraicas no ocupan el tiempo que consideramos necesario para aprender bien este tema, y es que suponemos que en temas anteriores ya se hayan introducido. Esta base de conocimientos algebraicos es muy importante ya que, como deducimos del gráfico, hay numerosos errores relacionados, por ello se debe intentar comprobar el nivel del alumnado en estos conocimientos antes de intentar enseñar las ecuaciones de primer grado o los sistemas.

³ Que resumimos en el capítulo 3.

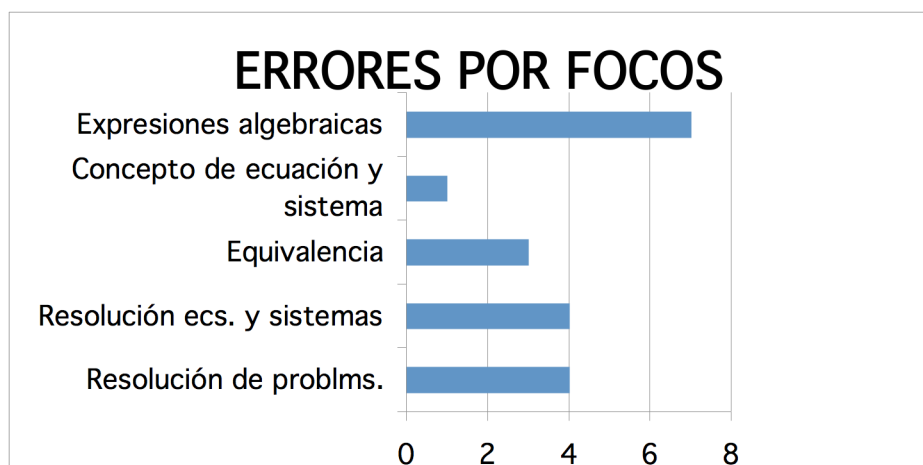


Figura 51. Distribución de errores por focos de contenido del grupo ECU

A pesar de esa reflexión, ya constatamos en el capítulo anterior cómo este grupo centra gran parte de sus expectativas en aspectos técnicos de su tema relacionados con el manejo y reconocimiento de expresiones algebraicas. Por eso es razonable que también delimiten varias limitaciones del aprendizaje sobre ese tipo de contenidos.

La Tabla 78 también muestra que tanto el grupo FRA como PRO siguen, por esta razón, la estructura de sus prioridades de aprendizaje para organizar sus respectivos listados de limitaciones en todas sus producciones.

1.3 Criterios de Organización del Grupo Fracciones

Cuando el grupo FRA presenta su primera aproximación al enunciado de limitaciones del aprendizaje (P_4), señala explícitamente que gran parte de los errores pueden surgir con motivo de la transición de los naturales a las fracciones [081217S44, 1'00'']:

PF1. Bueno, nosotros pensamos que el paso de los números naturales a las fracciones no es fácil para los niños, por lo cual van a tener errores tanto en conceptos como en algoritmos.

Partiendo de esa premisa inicial, en todas sus producciones el grupo usa las tres prioridades de aprendizaje que delimitó al inicio del análisis cognitivo para organizar los errores y dificultades del aprendizaje escolar. No obstante, en la unidad didáctica, sostiene que las limitaciones también admiten otra organización distinta a la de los focos, aunque menos exhaustiva o práctica [UD_FRA, 38]:

Nuestra clasificación de los errores y dificultades están organizadas en base a los focos prioritarios, aunque podríamos establecer una clasificación más general en torno dos bloques: errores básicos, tales como aplicar reglas inadecuadas en las operaciones o representar fracciones incorrectamente y errores “sofisticados” como el mal uso de la jerarquía de operaciones.

1.4 Criterios de Organización del Grupo Probabilidad

El grupo PRO también fue fiel a su delimitación de tres focos para el enunciado de limitaciones del aprendizaje escolar. A lo largo de sus producciones, incluso

en la presentación de su unidad didáctica, el grupo enuncia errores y dificultades relativos al dominio del espacio muestral, probabilidad con experimentos simples y probabilidad compuesta. De hecho, cuando el grupo presenta P₅, hace y justifica un balance de la distribución de su propuesta de limitaciones en el aprendizaje escolar según los distintos focos [090112S47, 7'54'']:

PF1. Con respecto a los errores en el resumen lo que hemos hecho es ponderar los errores con respecto a los focos y lo que podemos observar aquí es la cantidad de dificultades que hemos visto en cada foco. De una forma general hemos visto a la hora de dar la clase, el tiempo que podemos dedicar a cada foco para hacer que el alumno lo entienda mejor, entonces vemos que en el dominio del espacio muestral no hay mucha dificultad, está claro porque sirve más bien para definir los conceptos, que los entiendan, es una dificultad media.

La probabilidad simple tiene muchísimas dificultades, y la compuesta tiene un poco menos. ¿por qué? Pues porque a la hora de abordar las probabilidades simples es cuando se tiene que dar el salto entre los conceptos y la probabilidad. Tenemos que dedicarle mucho más tiempo para tener una buena base, y a partir de ahí, a la hora de pasar de la probabilidad simple a la probabilidad compuesta el alumno ya tiene que dar un pasito más pequeño. Y una vez hemos dedicado el tiempo necesario a probabilidad simple para que el alumno tenga muy claro todo lo que tenga que ver con la probabilidad, el análisis y todo eso y cuando llegue a la probabilidad compuesta se le dedique un poco menos de tiempo.

Sin embargo, en el documento escrito de la unidad didáctica, el grupo adopta un nuevo criterio organizativo centrado en la noción de obstáculo de los trabajos de Brousseau (1983) y Bachelard (1988). En esa noción de obstáculo incluye a las de error y dificultad [UD_PRO, 23]:

En cuanto al análisis de los obstáculos que pueden encontrarse en el desarrollo de la materia, podemos distinguirlos en errores y dificultades. Haremos una distinción entre ellos de la siguiente forma:

- *Hablamos de error cuando el alumno realiza un hábito que no es válido desde un punto de vista matemático.*
- *La dificultad indica el mayor o menor grado de éxito de los alumnos ante una tarea o tema de estudio.*

El planteamiento correcto es identificar dichos obstáculos, determinar sus causas y organizar la enseñanza teniendo en cuenta esa información obtenida. Podemos clasificar los errores de una forma clara según el pensamiento de Brousseau, quien a su vez tomó las bases de sus ideas en el estudio de Bachelard. Este proponía tres tipos de obstáculos: ontogénicos, didácticos y epistemológicos. Los obstáculos ontogénicos tienen su origen en el desarrollo mental del alumno, los didácticos se relacionan con la metodología usada y los epistemológicos, unidos a la dificultad de los conceptos que se muestran.

A continuación, de nuevo sólo en el documento escrito de la unidad didáctica (no

en su presentación), el grupo enuncia los errores y dificultades según esa clasificación, tal y como veremos más adelante.

1.5 Criterios de Organización del Grupo Razón y Proporción

Finalmente, el grupo RAZ usó la clasificación de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) para organizar su listado de limitaciones del aprendizaje en su primera producción. Este grupo ejemplifica cada una de las categorías enunciadas en esa investigación con errores y dificultades de su tema. Pero más que ayudar, esa clasificación constriñe su listado ya que en varias ocasiones a los integrantes del grupo les resulta forzado encontrar ejemplos concretos de su tema para algunas categorías y, en varias ocasiones, formulan enunciados muy genéricos [081217S44, 40'44'']:

LR. Vamos a ver. Si nos fijamos en el enunciado vamos a entrar en la lógica de lo que han querido decir... La lógica de lo que han querido decir es: nosotros tenemos una clasificación de errores y dificultades, que es la de Movshovitz, la de Radatz, la que sea... que dicen que son uno, dos, tres, cuatro y cinco. Los vamos a revisar y como tenemos cuatro focos, que uno es relación entre magnitudes y variables, el segundo es porcentajes, el tercero es resolución de problemas y el cuarto es escala, pues vamos a ir cruzando... Esa es la lógica que habéis usado, si yo no entiendo mal ¿no?

PF3: Sí...

LR. Vamos a ir cruzando qué significan datos mal utilizados en relación entre magnitudes, qué significa datos mal utilizados en porcentajes, qué significa datos mal utilizados en resolución de problemas de proporciones. Pero quedan unos enunciados excesivamente genéricos. No queda claro... Por ejemplo, cuándo se utilizan mal los datos en un porcentaje.

PF3. Bueno, eso... también hay errores...

LR. En una relación de tanto por ciento aplicar siempre el porcentaje directo. Dada una relación de porcentaje, aplicar siempre la relación directa que es multiplicar por x , dividir por 100 cualquier cantidad que queráis. Pero si me dicen ¿de qué cantidad es el 80%, 75? Pues calcular el 80% de 75... ¿Me explico? Eso sería un ejemplo de dato mal utilizado. Otro ejemplo de dato mal utilizado en resolución de problemas, pues sería aplicar en un reparto proporcional siempre el porcentaje directo también, como si conociésemos el total y un porcentaje y luego las relaciones de proporcionalidad... De alguna manera hace falta especificarlo más. ¿Qué problema tuvisteis con esto?

PF4. No sé... También es que, yo qué sé, tampoco queríamos poner...

PF3. Hay otros errores que son más concretos, pero es que también en este tema ocurren errores de estos y en realidad, son generales. Tampoco puedes especificar... Tenemos también una gama de errores más concretos del tema, de proporción y de reparto, pero no sé... Hay problemas concretos de proporcionalidad donde ocurren estos errores...

Discusiones como esta llevaron al grupo a reformular su listado de limitaciones

y, en su nueva propuesta, usó su organización de focos para estructurar sus enunciados. Esa nueva estructura se mantuvo hasta la unidad didáctica, si bien, como veremos con las siguientes variables de análisis, el grupo RAZ reformuló en numerosas ocasiones su listado de errores y dificultades.

1.6 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Criterios de Organización

El criterio más empleado para organizar las limitaciones del aprendizaje escolar por los grupos de futuros profesores, es el de los focos de contenido o prioridades de aprendizaje. El grupo ECU es el único que sólo emplea algunos de sus focos en todas sus producciones y, en su caso, las limitaciones propuestas quedan muy vinculadas a sólo una parcela de su tema.

Los grupos FRA y PRO consiguen una clasificación notablemente exhaustiva de limitaciones en base a sus respectivas prioridades de aprendizaje. Este criterio organizador resulta acertado y fructífero para estos dos grupos y, como veremos después, facilita también la relación entre limitaciones y expectativas de aprendizaje. En el caso concreto del grupo PRO, la clasificación teórica empleada en la unidad didáctica sirve como un elemento de control de las limitaciones propuestas.

El grupo RAZ intenta usar una clasificación teórica para organizar inicialmente su listado de limitaciones pero, al tener que ceñirse a las categorías propuestas por los autores, tiene que forzar varios de sus enunciados. En P₅ utiliza su estructura de focos como criterio organizador y eso hace que el grupo avance en su propuesta pero, como veremos a continuación, el trabajo con limitaciones se convierte en piedra de choque para este grupo.

2. INNOVACIÓN Y ESTABILIDAD EN LAS LIMITACIONES DEL APRENDIZAJE ESCOLAR

En esta parte del estudio global seguimos el marco trazado en el segundo apartado sobre expectativas del capítulo anterior.

Usamos las últimas ocho variables de la Tabla 77, que se centran en las frecuencias de las variaciones en los enunciados de las limitaciones del aprendizaje. Todas tienen el mismo significado que asignamos en el capítulo anterior. Continuando con el paralelismo, el contraste entre el número de enunciados estables y el número de enunciados innovadores, permite acotar cinco momentos diferentes (dos estados y tres etapas de cambio) en el conocimiento teórico y técnico que muestran los grupos de futuros profesores; pero en este caso tienen que ver con el enunciado de limitaciones en el aprendizaje escolar. Hay un estado *inicial* y otro *final* y las etapas de cambio las denominamos, igualmente, *revisión crítica*, *consolidación* y *estabilidad*. Las caracterizaciones de cada uno de estos momentos son similares a las presentadas en el capítulo anterior (§8.2.1).

En este apartado, analizamos los resultados para cada grupo por separado y, al final, extraemos algunas reflexiones generales.

2.1 Producciones del Grupo Ecuaciones

La Tabla 79 recoge los valores de las diferentes variables que analizan las producciones sobre limitaciones del aprendizaje escolar del grupo ECU.

Tabla 79

Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo ECU

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₄					
9					
P ₅					
16	7	5	4	0	11
P ₆					
16	0	16	0	0	0
UD					
18	0	12	2	4	6
Total (Nt)					
20					

El grupo ECU sólo necesitó elaborar veinte enunciados para acotar su listado de limitaciones en el aprendizaje, alcanzando su estado final en la unidad didáctica con dieciocho enunciados de errores y dificultades. En su estado inicial, comienza con la propuesta de nueve limitaciones.

Esta precisión contrasta con la gran cantidad de enunciados de objetivos específicos que este grupo necesita para delimitar su propuesta final de expectativas de aprendizaje. No obstante, para la unidad didáctica modifica más su listado de limitaciones de aprendizaje escolar que el de objetivos específicos. Los cambios C₄ y C₆ son dos momentos importantes en la elección de las limitaciones del aprendizaje escolar del grupo ECU. La Figura 52 destaca esos momentos, comparando los enunciados innovadores con los estables.

En C₄, el grupo ECU mantiene cinco enunciados estables con respecto a P₄, mientras que introduce un total de once enunciados innovadores (un 69% del total), de los cuales siete son totalmente nuevos. En este momento, por lo tanto, el grupo se encuentra en una clara etapa de revisión crítica en la que reformula gran parte de su listado de limitaciones. Esta propuesta no sufrió ninguna modificación durante C₅, ya que los dieciséis enunciados fueron los mismos que en P₅, por lo que el grupo entra en una fase de consolidación.

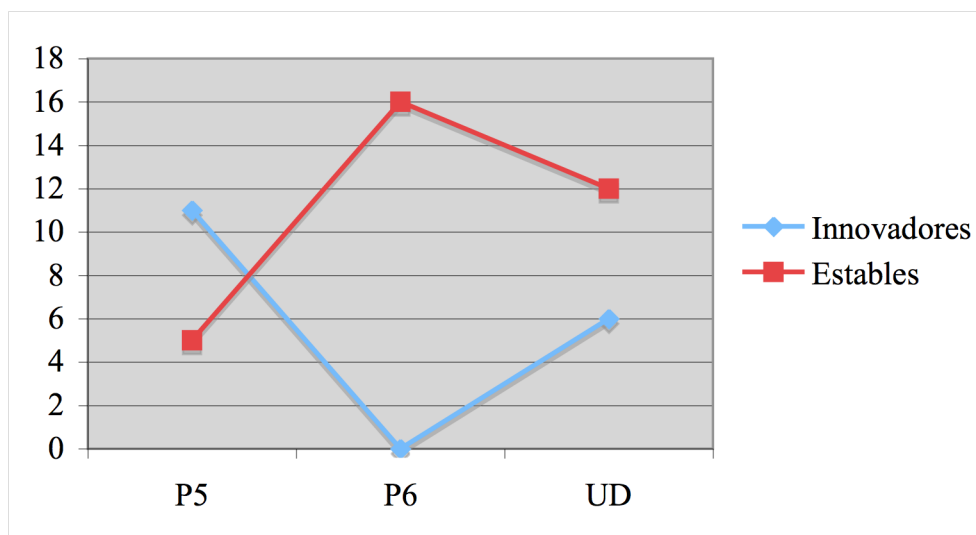


Figura 52. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo ECU acerca de limitaciones del aprendizaje

Con motivo de la realización de la unidad didáctica, el grupo muestra de nuevo una etapa de revisión crítica en C_6 , aunque menos acentuada que la detectada en C_4 . En este caso presentan otros seis enunciados innovadores aunque ninguno de ellos sea totalmente nuevo. Esto contrasta con el proceso seguido con los enunciados sobre expectativas de aprendizaje ya que, tanto en C_5 como en C_6 , en esa componente del análisis cognitivo este grupo mantiene una etapa de estabilidad. Es evidente que durante estos momentos de cambio, el grupo está en etapas diferentes respecto a su conocimiento sobre cada una de esas dos componentes del análisis cognitivo.

Como veremos a continuación, los cambios en que se detecta una etapa de revisión crítica sobre limitaciones del aprendizaje escolar, estuvieron fuertemente condicionadas por las discusiones y comentarios posteriores a sus presentaciones y al apoyo en fuentes documentales.

Cuando presentó P_4 , el grupo ECU enunció nueve limitaciones del aprendizaje escolar organizadas en tres de sus focos de contenido. En algunos de esos enunciados se identifican errores fundamentales relacionados con las expresiones algebraicas [081217S44, 22'08'']:

PF1. Primero, que en el concepto de variable, como es un concepto nuevo para el alumno, puede haber errores. Por ejemplo no sacar bien... no relacionar bien las operaciones aritméticas o arrastrar las operaciones aritméticas básicas y generalizar y cometer errores por ejemplo ese ¿no? $3x + 4 = 7x$... en el que todavía no reconoce bien lo que es la variable y no... puede sumar los números y... También el nuevo uso del signo igual. Antes se utilizaba siempre como una identidad, como una verdad universal ¿no? Y ahora al introducir variables puede haber errores (...).

LR. El orden quizá sería al contrario. El signo igual es más básico. Está bien. Da lo mismo que esté uno primero y otro después. Son dos errores básicos, pero son errores importantes.

Sin embargo, otros enunciados se quedan en un nivel demasiado concreto, sin identificar cuáles reglas son las inadecuadas y provocan los errores [081217S44, 23'23'']:

PF3. En cuanto a equivalencia en ecuaciones y sistemas, pues el alumno puede cometer errores en la aplicación de las reglas. Pues en el caso de la regla de la suma, puede pasar de la ecuación $x + 2 = 3x + 5$ a $x + 3x = 2 + 5$ que equivale a intercambiar dos términos de los miembros. Entonces... pues comete un error, ahí. Del mismo modo también puede errar en la regla del producto, como por ejemplo pasar de $x + 2 = 3$, a $x - 2 = 3$.

LR. Igual a -3 sería ¿no?

PF3. Sí,... Bueno se supone que tiene que multiplicar por “menos” y sólo multiplica por “menos” el primer miembro

LR. Pero es que ahí no multiplica...

PF3. Se equivoca porque no aplica bien la propiedad distributiva del producto.

PF1. El fallo es que nos ha faltado el signo del “menos equis” de arriba...

LR. Menos equis: ese sería un error, pero otro sería multiplicar por “menos” afecta sólo a dos números: $x - 2 = - 3$. Podría...

PF3. También estos errores, pues se inducen a los sistemas... Pues a la hora de buscar sistemas equivalentes, puede pasar del sistema $x + y = 3$, $- x + y = 2$ a $x = 3 + y$, $x + y = 2$. Multiplicar por “menos”... pues de ahí se olvidan y el 2 también. En el segundo también se ve un fallo derivado del mal uso de la propiedad distributiva.

LR. No se entiende...

PF3. Puede fallar en el signo... Que si la capacidad de operar la tiene bien asignada a operaciones básicas, pues también las puede inducir a tener errores...

LR. Pero lo que tenemos que pensar es que los errores son aplicación sistemática de reglas inadecuadas. Y yo lo que no veo ahí cuál es la regla que se está aplicando.

PF1. En la primera ha aplicado mal la regla de la suma, igual que el fallo de arriba, se ha intercambiado. Y el segundo, digamos que ha multiplicado por -1 el primer miembro, pero se ha olvidado también de, o sea..., ha hecho mal la multiplicación, en el segundo no y a parte se ha olvidado de multiplicar también la “y”. O sea ha aplicado mal la propiedad distributiva.

LR. Pero yo no me fijo en lo que se ha equivocado el alumno. Yo lo que no visualizo ahí es cuál es la regla que el alumno aplica mal. Son dos cosas diferentes ¿me seguís?

PF3. Pues quiere aplicar el método de sustitución. Quiere despejar la incógnita, la “x”, y la despeja mal y... pues posteriormente la podría sustituir en la otra.

LR. Pero es que aplica mal dos cosas. La segunda ecuación ¿por qué la ha modificado?

PF3. Es la propiedad distributiva ¿no? Multiplica por “menos” pero sólo multiplica por “menos”...

LR. Pero si es que no multiplica nada por “menos”. Cambia un signo pero no multiplica por “menos” nada.

PF3. Nada más la “x”, pero del segundo se olvida. Multiplica por “menos”...

LR. Si de eso podemos encontrar muchos ejemplos... Nuestra situación no es cuántos errores puedo yo escribir, puedo escribir muchos errores al principio. Cuántas reglas inadecuadas puedo pensar que me den lugar a errores... no se visualiza.

Sin embargo, a pesar de este debate que tuvo lugar durante la presentación de P4, los errores mencionados permanecen en el listado de este grupo, sin cambios significativos a lo largo de todas sus producciones. Los cambios que se producen en C₄ se centran en la modificación de cuatro enunciados (dándoles una mayor concreción) y en la introducción de siete enunciados nuevos que, en su mayoría, se ubican en el foco de lenguaje algebraico. Varios de esos cambios provienen de la lectura del trabajo de Socas (1997). En general la nueva propuesta del grupo mejoró bastante respecto a la anterior, elaborando un listado de errores muy exhaustivo. Sobre ese aspecto, recibe varios comentarios tras su presentación, si bien no fueron aceptados destacadamente con posterioridad [090112S47, 42'05'']:

JLL. Es una clasificación, como ha dicho Luis, bastante extensa. Que luego tampoco se os convierta eso en una carga si hay que buscar tareas o situaciones en las que se presenten todos. De hecho, seguramente, seréis capaces de, al ver que es tan amplio, destacar cuáles son los más importantes, los más frecuentes,... Aunque probablemente surjan con motivo de las actividades que diseñéis...

PF1. Sí... Cuando diseñemos las tareas, extraemos los errores principales y ya vemos cómo se puede...

Su propuesta ya se mantuvo hasta el final prácticamente sin cambios. En la unidad didáctica surgen cuatro objetivos nuevos por la disgregación de uno previo en casos separados y modifican ligeramente el enunciado de otros dos. Todos los enunciados originales de P₄ se mantienen en la unidad didáctica con sólo cambios menores. Esto indica que el número de enunciados que llegan a desecharse es realmente bajo.

La producción final del grupo recoge, sin duda, errores importantes relacionados con el lenguaje algebraico y el manejo de variables e incógnitas. Sin embargo, la consideración de otros aspectos importantes como son las relaciones entre diferentes sistemas de representación o la resolución de problemas, es sólo tangencial.

2.2 Producciones del Grupo Fracciones

La Tabla 80 recoge los valores de las diferentes variables cuantitativas, que analizan las producciones sobre limitaciones del aprendizaje escolar del grupo FRA.

Tabla 80

Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo FRA

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₄					
9					
P ₅					
10	1	7	2	0	3
P ₆					
10	0	10	0	0	0
UD					
10	0	8	1	1	2
Total (Nt)					
11					

Al igual que el grupo ECU, el grupo FRA comienza su listado de limitaciones del aprendizaje con nueve enunciados, organizados en torno a las tres prioridades de aprendizaje que seleccionaron, lo cual constituye su estado inicial. Para concretar los diez enunciados que en la unidad didáctica determinan su estado final este grupo sólo necesita once propuestas, lo cual indica una alta eficacia en la elección de las limitaciones del aprendizaje escolar. El enunciado undécimo es unión de otros dos anteriores, con lo cual desde la producción P₄ este grupo sólo enuncia una limitación del aprendizaje escolar totalmente nueva a lo largo de la asignatura.

La gráfica de la Figura 53, muestra la relación entre enunciados estables e innovadores para este grupo.

En este caso, observamos que en P₅ los enunciados innovadores constituyen la tercera parte de los estables, por lo que podemos hablar de una etapa de revisión crítica moderada del grupo en C₄, en la que introduce una limitación nueva y modifica el enunciado de otras dos. En C₅, por el contrario, el 100% de los enunciados son estables, por lo que se confirma la propuesta anterior y el grupo se encuentra en una etapa de consolidación.

Para la unidad didáctica, se produce una nueva etapa de revisión crítica aunque también moderada, ya que sólo se ve afectada la quinta parte del total de enunciados. En C₆, el grupo introduce dos limitaciones innovadoras y las otras

ocho permanecen estables. En cualquier caso, en todos esos momentos de cambio, las reflexiones se centran en un conjunto muy reducido de enunciados.

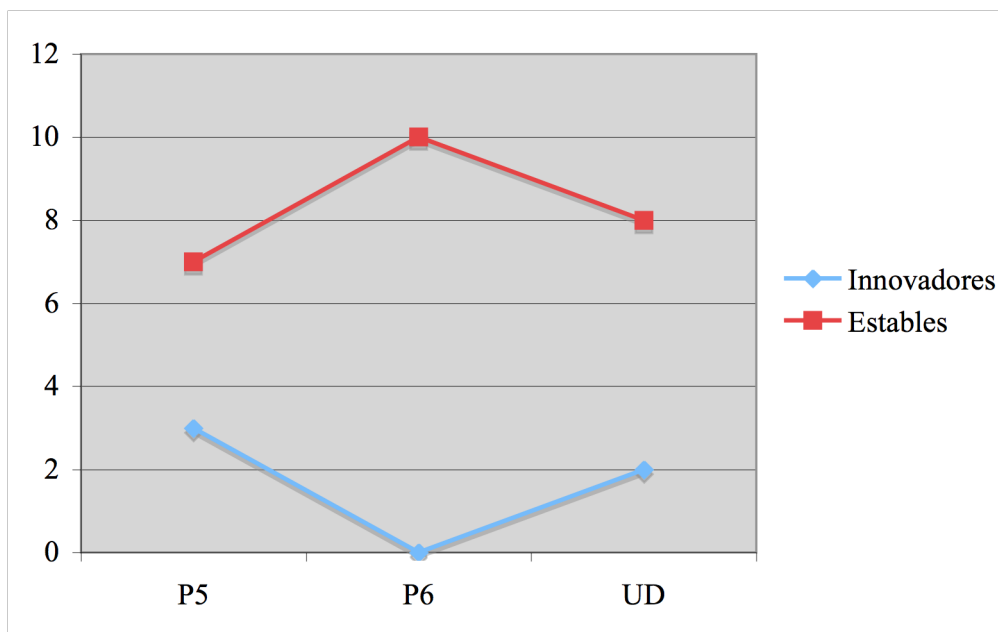


Figura 53. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo FRA acerca de limitaciones del aprendizaje

Cuando este grupo presenta su primer listado de enunciados en P₄, se puso de manifiesto la necesidad de depurar algunos de ellos para darles mayor significado y concreción [081217S44, 1'12'']:

PF1. En el bloque de profundizar en el significado y uso de las fracciones, pues hemos encontrado tres errores que serían: la existencia de defectos en la comprensión del concepto...

LR. Como por ejemplo...

PF1. Pues si los niños, por ejemplo, trabajan mucho el concepto de parte todo y no trabajan a lo mejor diagramas, pues pueden tener dificultad al pensar que $1/3$ puede estar entre 0 y 1...

LR. Podríaís detallarlo un poco más... (...) La tabla se supone que tiene que desarrollar las dificultades, no para decir que hay dificultades ¿vale? Seguimos.

Este comentario tiene una incidencia relativa en la producción del grupo FRA, ya que en C₄ hace modificaciones que incluyen una lectura general del ejemplo señalado en la presentación de P₄. En P₅ el enunciado queda expresado como "1. Existencia de defectos en la comprensión del concepto. Si se trabaja sólo un significado, el alumno no sabrá aplicar los demás significados de las fracciones". La generalidad de esta limitación proviene de la generalidad del objetivo específico del que surgió esa propuesta de error: "1. Comprender los distintos conceptos de fracciones".

En C_4 también introduce una nueva limitación del aprendizaje: “10. Dificultad en la comprensión de la densidad de Q ”, con motivo de un comentario a la presentación de P_4 [081217S44, 14'18'']:

LR. Hay una idea importante que no habéis puesto en el tema. Se ha dicho pero... Hay una idea que es la densidad de Q que no tiene que ver, pero una aproximación a la densidad de Q , un paso previo, sería que entre cada dos racionales siempre hay un intermedio.

Pero en la unidad didáctica, el primer enunciado general y el que se refiere al problema de la densidad de Q se unen, quedando finalmente una única limitación: “11. Existencia de defectos en la comprensión del concepto. Densidad de Q ”, con lo que acabó desvirtuando más su significado. El grupo no llega a enunciar propiamente ningún tipo de error ni de objetivo específicos relacionados con la densidad del conjunto de los números racionales. El hecho de que ese contenido matemático no quede recogido con precisión en las expectativas de aprendizaje enunciadas por el grupo, muy probablemente origine esas imprecisiones en la consideración de errores y dificultades asociados.

Otros comentarios que hicimos los formadores sobre las presentaciones del grupo, se centran en aspectos importantes que habían quedado fuera de su consideración, posiblemente por no incluirlos siquiera en los objetivos [090112S47, 23'08'']:

LR. Hay un aspecto de las fracciones que tiene que ver con la comparación de fracciones, con el orden, que formalmente está en la estructura aditiva... Pero sin embargo no lo habéis incluido expresamente. Y en los errores y dificultades que haya por ejemplo en las fracciones comparando denominadores, invertir el orden de comparación... Se nota bastante la ausencia del tema del orden. Si pasáis al cuadro inicial, comparación, equivalencia y orden; esa parte no la habéis tratado bien, ni en los objetivos ni en los errores, que son además errores muy básicos. También hay dificultades cuando se comparan fracciones con distintas notaciones, la notación decimal o la notación fraccionaria. ¿Qué tanto por ciento es una notación fraccionaria? Yo tampoco entiendo las representaciones de eso. Se echa de menos un cierto desarrollo de los objetivos.

La importancia de las expectativas para la elección de las limitaciones, se pone de manifiesto en otro momento del debate [090112S47, 27'05'']:

AM. He observado también que cuando estáis trabajando con errores y dificultades, los que se refieren al desarrollo de objetivos que tienen que ver con competencias de proceso, de solución de problemas, de modelización, prácticamente no habéis puesto ningún error ni dificultad.

PF3. Claro, porque tampoco hemos puesto muchos objetivos que desarrollen esa competencia.

Pero los cambios que hemos señalado antes en el primer enunciado y la introducción de ese aspecto de Q en P_5 , son todas las modificaciones del grupo FRA en su listado de limitaciones en el aprendizaje. Los nueve enunciados

originales de P_4 permanecen en sus producciones a lo largo de toda la asignatura. Eso habla de la estabilidad del grupo en relación a la cantidad de enunciados elaborados y del aprovechamiento de éstos en producciones posteriores.

El grupo FRA muestra dos etapas de revisión crítica sobre limitaciones del aprendizaje escolar mientras se encuentra, respectivamente, en una de consolidación y en otra de estabilidad en relación con su conocimiento teórico y práctico sobre la selección y enunciado de las expectativas de aprendizaje. Esto lleva a diferenciar los momentos en que se inician, revisan, retocan, confirman o consolidan sus conocimientos y habilidades sobre estas dos componentes del análisis cognitivo. El tratamiento teórico y práctico sobre limitaciones del aprendizaje escolar, se inicia con posterioridad a que se haya iniciado y desarrollado la reflexión sobre objetivos y competencias, De ahí el desfase entre los procesos de desarrollo y aprendizaje de ambos organizadores.

2.3 Producciones del Grupo Probabilidad

El grupo PRO también fue muy estable en cuanto a las modificaciones realizadas en sus producciones sobre limitaciones del aprendizaje, tal y como muestra la Tabla 81.

Tabla 81

Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo PRO

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P_4					
15					
P_5					
15	2	8	5	0	7
P_6					
15	0	15	0	0	0
UD					
15	0	15	0	0	0
Total (Nt)					
17					

En este caso, el grupo necesitó diecisiete enunciados para delimitar el estado final de quince limitaciones del aprendizaje que consideran en su unidad didáctica. En su estado inicial también partió de quince limitaciones. La Figura 54, muestra la relación de enunciados estables e innovadores entre distintas producciones.

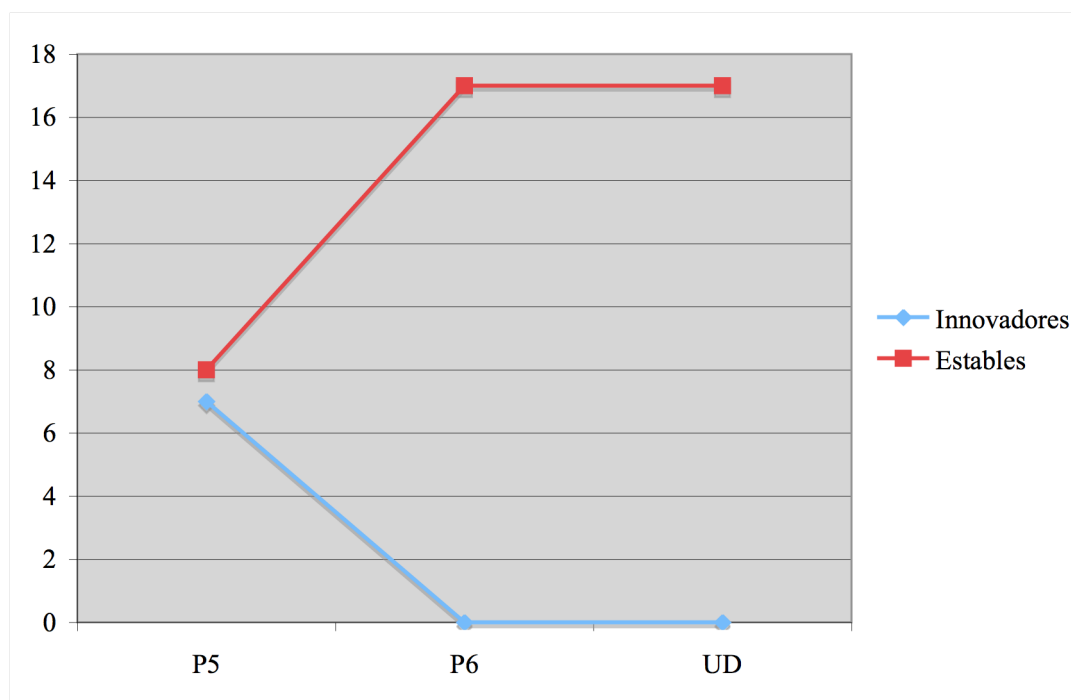


Figura 54. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo PRO acerca de limitaciones del aprendizaje

Partiendo de los quince enunciados de su estado inicial, el grupo PRO entró en una etapa de revisión crítica importante en C_4 , ya que casi el 50% de los enunciados introducidos en P_5 fueron innovadores.

El inicio de la etapa de modificaciones no se efectúa con motivo de la presentación de P_4 ya que esa producción no se expuso en clase. Las presentaciones de las primeras producciones sobre limitaciones en el aprendizaje, se realizan en el último día de clase antes de las vacaciones de Navidad y el tiempo disponible se cubre con los otros tres grupos. El grupo PRO entrega a los formadores su propuesta y, por correo electrónico, se les hacen llegar algunas sugerencias.

En esa primera propuesta, el grupo parte de la estructura de los focos de contenido para organizar sus limitaciones, haciendo además, un barrido bastante exhaustivo de las principales nociones de su tema. Un balance general de las limitaciones propuestas señala que, en muchos casos, los enunciados se reducen a la negación simple de algunos objetivos. Algunos ejemplos son “2. Carencias en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado” y “5. No asimilar que la función probabilidad adquiere valores entre 0 y 1”. Este tipo de enunciados, no favorece que las limitaciones se conviertan en una herramienta potente desde el punto de vista de la planificación.

Otros enunciados tienen una redacción confusa que no permite vislumbrar los que el grupo quiere destacar (“1. Identificar sucesos con conjuntos de forma errónea”; “4. La complejidad del concepto de límite”), mientras que otros son demasiado genéricos y no concretan limitaciones específicas al tema de probabilidad (“9. Dificultad al elaborar enunciados de problemas”; “14.

Dificultad en la comprensión del enunciado de un problema”). Pero al mismo tiempo, identifican aspectos importantes en los que los escolares suelen mostrar algunas limitaciones. Las distinciones entre sucesos compatibles e incompatibles y entre casos favorables y posibles en un experimento o, por otro lado, la consideración de que todas las situaciones son de equiprobabilidad, son algunos de ellos.

Pero en general, el grupo consigue una propuesta equilibrada, coherente con el contenido matemático y muy vinculada, en lo positivo y lo negativo, con su propuesta de objetivos. Estos son los comentarios que hicimos llegar a los integrantes del grupo, quienes, en su siguiente presentación, consideran todos ellos para mejorar su propuesta.

De hecho, el grupo PRO atendió tan formalmente esas reflexiones, que los cambios que realiza en C_4 se limitan a aquellos enunciados señalados como mal expresados, genéricos o imprecisos. No altera aquellos que, en principio, los formadores dimos por buenos. En la presentación de P_5 el grupo puso de manifiesto una mejora considerable en su propuesta y, además, explicó de dónde surgieron los cambios aplicados [090112S47, 11'22'’]:

LR. Un par de preguntas, ¿qué fuentes de información aparte de vuestras discusiones y debates, habéis utilizado?

PF1. Nuestra experiencia, clases particulares, viendo los ejercicios hemos pensado las dificultades que podrían tener.

LR. Pero no habéis retomado ningún artículo ni habéis mirado ningún libro ¿no?... La dificultad de la identificación del porcentaje con la probabilidad ¿cómo lo habéis apreciado? ¿Es usual?

PF2. Le pasaba mucho a una alumna mía de 4º de la ESO, que decía, y qué probabilidad hay de comprar esto, y decía una probabilidad del 50%.

LR. Coloquialmente se utiliza así, tienes la probabilidad del 50%, es decir que la probabilidad es 0.5, pero pasar de la notación porcentaje a la notación no es incorrecto. La identificación, por lo menos en el lenguaje coloquial, no es incorrecto. Pero desde luego puede prestarse a esa confusión de que diga que la probabilidad es 50.

JLL. Pero en cualquier caso habéis cambiado cosas porque ya pasasteis un filtro. Me dejasteis vuestra presentación anterior y yo os mandé algunos comentarios.

PF1. Sí. Había muchas dificultades que eran simplemente negación de una competencia y hemos pensado que puede tener dificultades en algo pero tendremos que ver por qué tiene dificultades en es ese algo, que es lo que realmente sirve para abordar el tema de una manera más... Y sí que estuvimos hablando un buen rato y dijimos ¡ostras! Con eso no podemos hacer nada. Tenemos que ir más allá de esto...y lo hemos cambiado.

Desde ese momento, el grupo no modifica este planteamiento, y su propuesta sobre limitaciones en el aprendizaje escolar en la unidad didáctica es

exactamente igual que en la producción P₅. De esta manera, identificamos una etapa de consolidación en C₅ y una de estabilidad en C₆. Ambas etapas coinciden, exactamente, con las etapas de aprendizaje acerca del enunciado de expectativas.

2.4 Producciones del Grupo Razón y Proporción

Para el grupo RAZ, el trabajo con las limitaciones del aprendizaje fue uno de los aspectos que más le costó sacar adelante. Las alumnas integrantes del grupo lo reconocen en las conclusiones finales de su unidad didáctica [UD_RAZ, 68]:

En lo que se refiere al trabajo, hemos tenido mayor dificultad en el apartado de “a que preguntas responde” en el análisis fenomenológico y en el de los “errores” en el análisis de instrucción, como hemos dicho anteriormente, pero a excepción de esos, ha sido llevadero.

Esta dificultad se constata con los datos que muestra la Tabla 82, en donde recogemos los valores de las diferentes variables que analizan, cuantitativamente, las producciones sobre limitaciones del aprendizaje escolar de este grupo.

Tabla 82
Clasificación de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas en las distintas producciones del grupo RAZ

N	Nu	Ne	Nm	Nr	Ni
P ₄					
17	17	0	0	0	
P ₅					
15 ⁴	8	0	3	0	11
P ₆					
21	16	1	2	0	17
UD					
21	0	21	0	0	0
Total (Nt)					
41					

El hecho de que el grupo necesite cuarenta y un enunciados para delimitar veintiún limitaciones en el aprendizaje en sólo dos producciones, pone de manifiesto sus dificultades con esta organizador del análisis cognitivo. Parte de un estado inicial de 17 enunciados y realiza todas sus modificaciones en C₄ y C₅, tal y como muestra la Figura 55.

⁴ El total no coincide con la suma de innovadores y estables porque, además de esas once limitaciones, repitieron dos veces una de los nuevas y otras dos veces una de las modificadas.

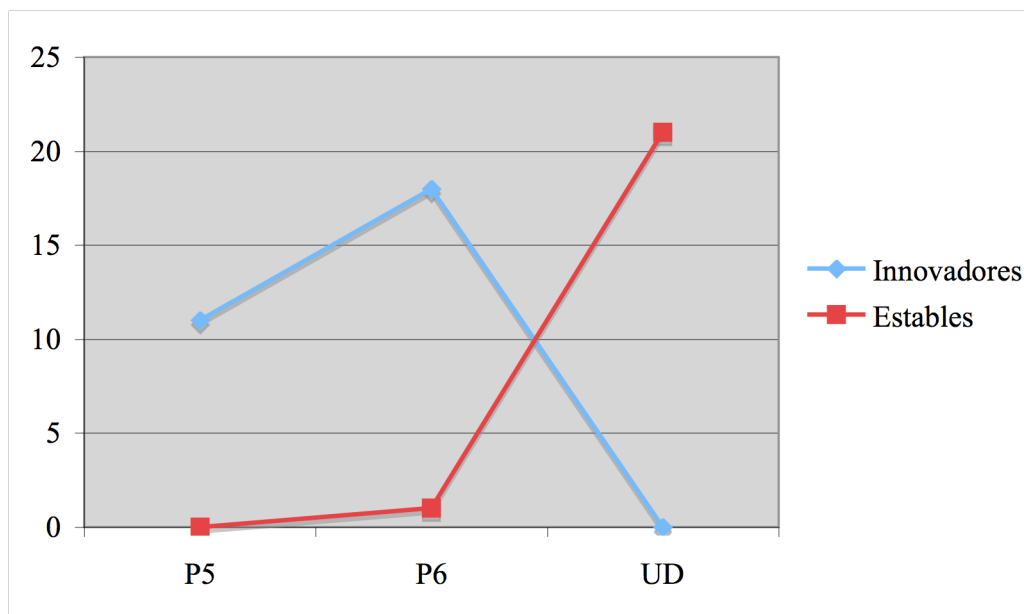


Figura 55. Enunciados innovadores y estables en los momentos de cambio entre producciones del grupo PRO acerca de limitaciones del aprendizaje

Cuando el grupo RAZ entregó una segunda versión del balance del análisis cognitivo (P_6), únicamente propuso cambios en la elección de las limitaciones en el aprendizaje escolar, no en el listado de objetivos. El único momento en que este grupo no plantea innovaciones fue en el paso de P_6 a UD, es decir en C_6 .

Detectamos por tanto dos etapas consecutivas de revisión crítica, en C_4 y C_5 , siendo la segunda más pronunciada que la primera, ya que se contabilizan más enunciados innovadores que estables. En C_6 , se aprecia una etapa de consolidación en la propuesta de enunciados de limitaciones del aprendizaje escolar de este grupo.

Ya hemos visto en el análisis global de las limitaciones que, cuando el grupo RAZ presenta su primera versión del listado de errores y dificultades en P_4 , usa la clasificación de errores de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) para organizarlos. Al analizar la variable *criterio de organización*, dejamos constancia de que esta decisión lleva al grupo a generar muchos enunciados imprecisos y ambiguos.

En C_4 , este grupo utiliza los focos de contenido para organizar su listado de limitaciones del aprendizaje, genera ocho nuevos enunciados y modifica el de otros tres. Aquí también introduce una variante curiosa y es que repite una pareja de limitaciones del aprendizaje tres veces en la misma producción, una vez en cada foco. Estas limitaciones son: “20. Uso de datos erróneos en el planteamiento de un problema” y “12. Dar una respuesta, ya sea correcta o no, sin una justificación”.

Al ser enunciados genéricos, que no son específicos a ningún tema de matemáticas, el grupo RAZ los usa indistintamente en la proporcionalidad, en el cálculo de porcentajes y en los repartos. Pero durante su presentación de P_5 , no da tiempo a discutir esas reiteraciones ya que, en torno a las primeras

limitaciones enunciadas, surge una discusión sobre las dificultades del grupo con este trabajo [090112S47, 44'34'']:

PF1. Nosotros hemos cogido los focos y hemos puesto los objetivos que no son los mismos que teníamos, lo hemos modificado un poquillo, y las competencias que tenían asociadas. Y luego dentro de cada objetivo su error. Ahí están los errores de ese foco. Y con los otros focos lo mismo: hemos puesto los objetivos, las competencias que tenían y los errores, así que nos falta lo del valor que se le da a las competencias, que no lo hemos hecho...

LR. Antes han hecho una observación en el tema de probabilidad que es igualmente aplicable... Es decir, enuncias errores de 'no saber qué', sin especificar cuál es el error: no saber interpretar un porcentaje, básicamente en qué sentido no se sabe interpretar. No interpretar correctamente una escala, no saber establecer la regla de tres asociada a un reparto, ... Para eso no necesitamos errores. No lograr los objetivos es el conjunto de errores. No se trata de poner en negativo los objetivos que están enunciados en positivo, sino decir cuáles son los casos más frecuentes de posibilidades de respuesta incorrecta, pero mencionando lo casos de respuesta incorrecta. ¿Qué quiere decir no saber interpretar un porcentaje?

PF1. Si te dicen 30%, pues qué significa el 30%. Pues que de la cantidad que te dicen, divides en cien partes ¿no? Y son 30...

LR. En este caso sería algo de comunicar, o de justificar... No lograr el significado, ausencia de significado, ... Sigue sin gustarme la lectura negativa, es un poco superficial.

PF2. Es que si no, no sabemos cómo lo vamos a hacer. Es que, por ejemplo, de documentación yo no he encontrado nada. Vamos de lo que es por Internet... yo no tengo tiempo para leerme un libro de esos.

LR. Hay dos o tres documentos de proporcionalidad bastante...

PF2. Yo sólo he encontrando un estudio aplicando un problema concreto a un grupo de alumnos y de ahí salen errores...

LR. En una situación de porcentaje, dificultad para reconocer la cantidad total, dificultad para reconocer la cantidad porcentual y dificultad para interpretar el porcentaje como relación entre dos cantidades. ¿A cuál de esas nos estamos refiriendo? ¿A las tres? Entonces no decimos nada... Claro, así no tenemos ninguno, con decir cuáles son los objetivos ya tengo los errores y dificultades, así no tenemos orientación y así el profesor no sabe dónde debe comenzar.

No hemos pedido un grado de minuciosidad, que también se puede pedir, lo hemos visto en el grupo de ecuaciones: aquí hay esta dificultad de tipo técnico, aquí esta otra, el menos delante del paréntesis, ... Ese nivel de detalle o algo parecido. Y hay muchas cosas que decir, no sólo en este, sino incluso en el anterior. Creo que los enunciados son tan genéricos, que puede haber todo o puede no haber nada... Si el objetivo es dominar la proporcionalidad, cualquier cosa que no sea dominio de la proporcionalidad ya es un error,

porque no se ha conseguido el objetivo. Estamos confundiendo el análisis de errores y objetivos con lo que podríamos llamar incumplimiento de las expectativas a realizar. No le habéis echado a esto mucho tiempo ¿no? Y hay que echarle un poquito de tiempo.

PF2. Entonces ¿lo que quieren es que hagamos algo como ellos? (refiriéndose al grupo ECU). Pero es que nuestro tema no se presta tanto...

LR. Pues lo que se preste, es que ahí no sabemos si se presta o no...

Después de explicar otras dificultades, el grupo RAZ se puso a trabajar y ese mismo día entrega una nueva versión del balance del análisis cognitivo en el que reestructuran la parte de limitaciones del aprendizaje. De hecho, en C₅ prácticamente hace una nueva propuesta de errores y dificultades. De los veintinueve enunciados, dieciséis fueron nuevos y modifica el enunciado de otros dos, incluyendo otra vez reiteraciones. En ese momento, el grupo se encuentra en una etapa de revisión crítica profunda.

Los enunciados “29. Abuso del uso de la regla de tres además de su incorrecta aplicación” y “31. Falsa creencia de *a más le corresponde más* establece una relación de proporcionalidad directa”, aparecen tanto en el foco de relaciones de proporcionalidad como en el de repartos.

Uno de los grandes avances de este grupo en el momento de cambio C₅, fue la ejemplificación de las limitaciones mediante tareas y las hipotéticas respuestas de los escolares a las mismas. En cualquier caso, en una tutoría posterior, las alumnas integrantes del grupo reconocen que no están del todo satisfechas con su producción [090121RAZ_TUT, 3'40'']:

PF1. A nosotras eso no ha pasado. Para estas actividades que habéis mandado, hemos encontrado muchas cosas y las hemos hecho muy fácil.

PF2. No nos ha costado mucho problema hacerlas, pero el análisis de los errores sí que nos costó...

PF3. No, y que ¿sabes cuál es todavía un problema? Que estamos ahí diciendo ¡Ay! Pues esto no está bien y queremos cambiarla pero... Si quieres te enseñamos cómo va porque la tengo en el correo...

Pero el grupo no realiza más cambios y en la unidad didáctica su propuesta de limitaciones fue la misma que en P₆. En C₆, por lo tanto, se encuentra en una etapa de consolidación en lo referente a limitaciones en el aprendizaje, que coincide con una de revisión crítica en relación a expectativas de aprendizaje.

2.5 Balance del Trabajo de los Grupos Sobre Innovación y Estabilidad de las Limitaciones

Los cuatro grupos alcanzan en una de sus producciones un número nulo de enunciados innovadores, después de haber presentado valores altos. ECU, FRA y PRO lo alcanzan en P₆ y RAZ en la UD. Este momento lo caracterizamos como de consolidación. Ahora bien, ECU y FRA vuelven a examinar sus enunciados, regresando a una etapa de revisión crítica, PRO mantiene los enunciados, mostrando una clara estabilidad, mientras que RAZ no tiene oportunidad de

mostrar su evolución posterior. Esto con independencia de la mayor o menor bondad, precisión y calidad de los enunciados planteados.

Estas reflexiones se resumen en la Tabla 83, en donde recogemos un balance conjunto de las etapas de aprendizaje de cada uno de los cuatro grupos en relación con el segundo organizador del análisis cognitivo.

Tabla 83

Frecuencias y etapas relativas al enunciado de limitaciones del aprendizaje de los escolares recorridas por los diferentes grupos

Estado inicial	Revisión crítica	Consolidación	Estabilidad	Estado final	Enunciados totales
			ECU		
9	C ₄ , C ₆	C ₅		18	20
			FRA		
9	C ₄ , C ₆	C ₅		10	11
			PRO		
15	C ₄	C ₅	C ₆	15	17
			RAZ		
17	C ₄ , C ₅	C ₆		21	41

De los datos de la Tabla 82 podemos extraer ciertas regularidades pero, sobre todo, inferimos varias singularidades en el proceso de aprendizaje de los diferentes grupos.

Los grupos ECU y FRA siguen un mismo patrón en su elección y mejora de las limitaciones del aprendizaje escolar. En C₄ inician una etapa de revisión crítica que les lleva a producir un listado de limitaciones que mantienen sin cambios en C₅, donde consolidan su propuesta anterior. Pero, después de esa etapa de asentamiento, vuelven a revisar sus propuestas en una segunda fase de revisión crítica, aunque de una manera menos acentuada que en C₄.

Los otros dos grupos siguen patrones diferentes a éste y también entre sí. Todos los grupos comienzan por una etapa de revisión crítica pero, desde ese momento, el grupo PRO consolida su elección de limitaciones del aprendizaje escolar en C₅ para entrar en una fase de estabilidad en C₆. Se constata cómo este grupo concentra su trabajo y reflexión sobre limitaciones en el aprendizaje escolar en un momento preciso para, a partir de ahí, mantener sin cambios sus enunciados. Este proceso es similar al que mantuvo en el caso de las expectativas.

Por su parte, el grupo RAZ también parte de una etapa de revisión crítica en C₄ pero continúa en ella durante C₅ ya que, como hemos visto antes, modifica por completo su propuesta de limitaciones en ese momento de la asignatura. Ese listado lo consolida en C₆, donde no hace ninguna modificación a su propuesta de P₅.

Un aspecto a destacar es que sólo el grupo PRO parece alcanzar una etapa de estabilidad en C₆. El resto consigue simplemente consolidar su propuesta. Este hecho contrasta con el proceso de aprendizaje relativo a los objetivos específicos (§8.2.1, Tabla 51), ya que todos los grupos alcanzan en algún momento esa etapa de estabilidad: ECU y FRA en C₅, PRO en C₃ y RAZ en C₆.

A diferencia de la evolución detectada en los grupos en el proceso de enunciado de objetivos específicos, en este caso la brevedad en el tiempo y el número mas reducido de producciones respecto a las limitaciones del aprendizaje escolar, no permiten establecer un ciclo cerrado en el proceso de dominio técnico y práctico de los conocimientos y habilidades asociadas.

Es obvio que el grupo RAZ fue el que más dificultades tuvo para delimitar su elección de limitaciones del aprendizaje, mientras que el grupo PRO delimitó el suyo rápidamente. Las propuestas finales incluyen diferente número de enunciados de limitaciones, que van desde las diez del grupo FRA hasta las veintiuna de RAZ, pasando por las quince de PRO y por las dieciocho que propone ECU.

Sin embargo, todos los grupos, salvo RAZ, optimizan los enunciados propuestos en sus diferentes producciones para concretar su listado final, ya que ECU y PRO desechan dos enunciados y FRA sólo uno. RAZ, por el contrario, llega a descartar la mitad de los enunciados propuestos, pues desecha veintiún enunciados.

Salvo el grupo RAZ, en su primera producción, todos los demás parten de su listado de objetivos para enunciar los errores y dificultades de sus temas. Otra coincidencia es que la mayor parte de las modificaciones a las propuestas de limitaciones se producen en el momento de cambio C₄.

Todos los grupos, reconocen que sobre errores encuentran menos información a través de sus propias búsquedas que para otros organizadores del análisis cognitivo. De hecho, ECU, FRA y RAZ necesitaron documentación adicional brindada por los formadores.

El tratamiento teórico y técnico sobre limitaciones del aprendizaje escolar, se inicia con posterioridad a que se haya iniciado y desarrollado la reflexión sobre objetivos y competencias. De ahí el considerable desfase entre los procesos de desarrollo y aprendizaje de los grupos de futuros profesores, sobre ambos organizadores del análisis cognitivo.

3. ESTUDIO LOCAL DE LAS LIMITACIONES DEL APRENDIZAJE ESCOLAR

El segundo estudio que realizamos en este capítulo, es un análisis local acerca del propio enunciado de las limitaciones del aprendizaje escolar, propuestas por los cuatro grupos de futuros profesores. Para llevarlo a cabo, hemos seleccionado seis variables que son las que recogemos en la Tabla 84.

Tabla 84
Variables para el análisis individual de las limitaciones del aprendizaje escolar

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Tipo de limitación	Li	A qué tipo de limitación del aprendizaje corresponde el enunciado	No es una limitación (no aplica) Error Dificultad Obstáculo Ausencia o falta de conocimiento
Tipo de dificultad	Di	Si el enunciado es una dificultad, cómo puede clasificarse según la propuesta de Socas (1997)	Asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. Asociada a los procesos propios de la actividad matemática. Asociada a los procesos de enseñanza. Asociada a los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos. Asociada a actitudes afectivas y emocionales hacia las matemáticas.
Tipo de error	Er	Si el enunciado es un error, cómo puede clasificarse según la propuesta de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)	Datos mal utilizados Interpretación incorrecta del lenguaje. Inferencias no validadas lógicamente. Teoremas o definiciones deformados. Falta de la verificación de la solución. Errores técnicos.

Tabla 84

Variables para el análisis individual de las limitaciones del aprendizaje escolar

Variable	Cód.	Significado	Valores posibles
Especificidad	Ep	El enunciado se ciñe al tema de matemáticas considerado	Específico al tema Válido para varios temas
Léxico-semántica	Lx	Los enunciados contienen equivocaciones ortográficas, de vocabulario o de expresión que dificultan su entendimiento	Sí No
Descriptorios	De	Aparecen o no algunos descriptorios de los objetivos específicos en los enunciados (que justifiquen la asignación realizada)	Sí No

La primera variable, *tipo de limitación*, explora si el enunciado corresponde a un error, a una dificultad, a un obstáculo o a una ausencia de conocimiento. También hemos incluido una categoría en la que recogemos aquellos enunciados que no reflejan ninguno de los casos anteriores. Dependiendo del valor de esta variable, cobran sentido las dos siguientes, *tipo de dificultad* y *tipo de error*. Si el enunciado es una dificultad, lo clasificamos de acuerdo a las categorías acotadas por Socas (1997) (§3.2). Si el enunciado propuesto es, por el contrario, un error entonces lo clasificamos de acuerdo a las categorías definidas por Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987). Seleccionamos esa clasificación, porque sus fundamentos empíricos parecen adecuados para analizar las producciones de los grupos de profesores en formación.

Empleamos las variables *especificidad* y *léxico-semántica* con la misma orientación que cuando analizamos los objetivos específicos enunciados por los grupos de profesores en formación. En el primer caso, exploramos si las limitaciones del aprendizaje son específicas al tema de trabajo considerado o si, por el contrario, su enunciado es lo suficientemente genérico como para que tenga sentido en otros temas de matemáticas. En el segundo, señalamos si los enunciados incluyen erratas ortográficas, de vocabulario, sintácticas o de expresión que dificulten su entendimiento o difuminen el significado del propio enunciado.

Finalmente, la variable *descriptorios* analiza la vinculación realizada por los grupos de profesores en formación entre las limitaciones del aprendizaje escolar y los objetivos específicos con las que aquéllas se relacionan. El propósito es valorar de cuál modo y en qué medida se justifican esas relaciones, pero también

servirá para señalar el rango de objetivos que cubre el listado de limitaciones del aprendizaje escolar elaborado.

3.1 Estudio de la Variable Tipo de Limitación (Li)

Esta variable la analizamos independientemente para cada uno de los cuatro grupos de futuros profesores.

Producciones del Grupo Ecuaciones

La Tabla 85 recoge el número de enunciados sobre los diferentes tipos de limitaciones propuestas por el grupo ECU, en las diferentes producciones realizadas en la asignatura. Distinguimos, por columnas, los cinco valores posibles que hemos definido en la Tabla 84 para esta variable.

Tabla 85

Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo ECU en sus diferentes producciones

No aplica	Error	Dificultad	Obstáculo	Ausencia
P ₄				
1	4	2	2	0
P ₅				
2	8	3	3	0
P ₆				
2	8	3	3	0
UD				
2	10	3	3	0

El grupo ECU no llega a enunciar ninguna limitación en el aprendizaje en términos de ausencia de conocimiento, por lo que siempre se refiere a errores, dificultades, obstáculos y algunos enunciados no clasificables como ninguno de los anteriores.

Como vimos antes, al analizar el conjunto de limitaciones del aprendizaje enunciadas por este grupo, en P₄ propuso enunciados imprecisos que generaron debate durante su presentación y que este hecho lo llevó a modificar considerablemente su propuesta en C₄. También en P₄ introdujo un enunciado demasiado general que no puede considerarse una limitación del aprendizaje: “9. Por último, el alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una **falta de verificación** de éstas”⁵.

En C₄ este enunciado se modifica a “9. El alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una **falta de verificación** de éstas, o bien, puede ser que se verifiquen las soluciones en pasos intermedios en lugar de

⁵ En negrita en el original.

hacerlo en el sistema inicial”. El enunciado sigue siendo demasiado general para incluirlo como limitación del aprendizaje escolar. En C_4 , se añade otro de similares características: “16. Por último, el grupo encuentra **dificultades a la hora de criticar problemas mal planteados**”. Ambos enunciados permanecen en su propuesta hasta la unidad didáctica.

En términos generales, el número de errores enunciados por el grupo ECU va en aumento a lo largo de las diferentes producciones y constituye, con claridad, el grueso de su listado de limitaciones del aprendizaje escolar. La mayor parte de esos errores provienen, como el propio grupo señala, “de un mal uso de las reglas aritméticas básicas” [UD_ECU, 44], por que se refieren continuamente al manejo de operaciones con expresiones algebraicas. Eso se mantiene constante a lo largo de todas las producciones del grupo, con lo cual logra hacer un barrido bastante exhaustivo de ese tipo de errores.

En estas producciones, encontramos tres enunciados que clasificamos como dificultades, ya que se centran en problemas con diferentes sistemas de representación o en la confusión de la estructura aditiva con la multiplicativa y van más allá de errores puntuales.

Finalmente, identificamos también tres obstáculos. Dos de ellos los enuncian en P_4 y el tercero aparece en P_5 , si bien todos se mantienen hasta la unidad didáctica. Uno tiene que ver con la extensión de la linealidad a expresiones y funciones no apropiadas, otro relativo a la generalización de propiedades aritméticas válidas para los números naturales y, el último, se centra en el diferente significado del signo igual en comparación también con los naturales. Estos tres aspectos son, sin duda, importantes en el aprendizaje del álgebra y en el manejo de expresiones algebraicas.

El hecho de que en el listado de expectativas de aprendizaje de este grupo, un buen número de éstas se centren en aspectos de tipo técnico y formal, relacionadas fundamentalmente con el manejo y las operaciones de expresiones algebraicas, tiene una implicación importante en el enunciado de limitaciones.

Producciones del Grupo Fracciones

La clasificación de las limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo FRA, en sus diferentes producciones, la recogemos en la Tabla 86.

Ya describimos, en el apartado anterior, la estabilidad del grupo FRA en relación a las modificaciones realizadas en su listado de limitaciones del aprendizaje a lo largo de la asignatura. Esto también se constata en la Tabla 86, ya que esas modificaciones no alteran la clasificación de las limitaciones.

Los enunciados relativos a la densidad de Q no los consideramos limitaciones del aprendizaje, tal y como señalamos en el análisis global de los enunciados. Ese aspecto, que fue sugerido por Luis Rico como uno que podría provocar la aparición de errores, no fue enunciado apropiadamente por el grupo FRA ya que se limitó a enunciarlo directamente como “densidad de Q ”.

Tabla 86

Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo FRA en sus diferentes producciones

No aplica	Error	Dificultad	Obstáculo	Ausencia
P ₄				
1	6	0	2	0
P ₅				
2	6	0	2	0
P ₆				
2	6	0	2	0
UD				
2	6	0	2	0

Al contrario de lo que el grupo hace en los enunciados de expectativas, los enunciados seleccionados sobre las limitaciones del aprendizaje escolar se reducen a sólo algunas parcelas del contenido de las fracciones. Todos los errores que el grupo enuncia tienen que ver con algoritmos de operaciones, sin que expresen errores vinculados con el reconocimiento o la ejemplificación de fracciones y de situaciones en las que se presenten o bien con el planteamiento o la resolución de problemas. Los enunciados que hemos clasificado como obstáculos se refieren a la aplicación directa con fracciones de propiedades y algoritmos válidos para los naturales que resultan inapropiados en el trabajo con los racionales.

Producciones del Grupo Probabilidad

La Tabla 87 recoge la clasificación de las limitaciones del aprendizaje enunciadas por el grupo PRO a lo largo de la asignatura.

En P₄, el grupo PRO enuncia gran parte de sus limitaciones del aprendizaje escolar como negación de los objetivos y, aunque en C₄ modifica varios enunciados, esa fue la tónica general en sus producciones. Esto hizo que, en algunos casos, llegara a enunciados no clasificables como limitaciones en el aprendizaje. En P₄ incluye el enunciado “4. La complejidad del concepto de límite”, mientras que en C₄ lo modifica por “4. La complejidad del concepto de probabilidad como límite de frecuencias relativas”. En ningún caso hace mención a un error, dificultad o obstáculo ya que, simplemente, niega la consecución de un objetivo también demasiado impreciso: “18. Comprender la noción de probabilidad como límite de las frecuencias relativas”. Ni siquiera cuando el grupo presenta en clase su listado de P₅, puede entrar con profundidad en la descripción de esa limitación [090112S47, 2’10’’]:

Habíamos visto la complejidad del concepto de probabilidad como límite de frecuencias relativas. El alumno tiene el problema de intuir el concepto del

límite y habrá que hacer un esfuerzo mayor a la hora de explicar que el resultado de una probabilidad está dado por un límite. Ese concepto es un poco difícil a la hora de que el alumno lo entienda...

Tabla 87

Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo PRO en sus diferentes producciones

No aplica	Error	Dificultad	Obstáculo	Ausencia
P ₄				
1	10	2	0	2
P ₅				
1	10	3	0	1
P ₆				
1	10	3	0	1
UD				
1	10	3	0	1

Su listado de errores en P₄ y en P₅ (que es básicamente el mismo), sigue un esquema de negación o bien de expresar la dificultad de consecución de un objetivo. Sin embargo, como vimos anteriormente, el grupo destaca algunos errores importantes como: “6. Aplicar sin discreción que la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades” y “8. Considerar que todas las situaciones son de equiprobabilidad”.

También el grupo identifica en su tema tres dificultades tradicionales en matemáticas que tienen que ver con la descripción de situaciones de la vida cotidiana (relacionadas con datos probabilísticos), con entender y analizar enunciados de problemas (probabilísticos) y con organizar y clasificar información (probabilística), según diferentes modos de representación.

El único enunciado estable en las producciones de este grupo que clasificamos como ausencia de conocimiento, se expresa en términos de “dificultad para dominar conceptos”.

El hecho de que el listado de limitaciones del aprendizaje escolar de este grupo se relacione tan claramente con el listado previo de expectativas, proporciona coherencia a los contenidos considerados por ambos organizadores del análisis cognitivo.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

La Tabla 88 resume los tipos de limitaciones sobre aprendizaje escolar enunciadas por el grupo RAZ a lo largo de sus producciones.

Tabla 88

Tipos de limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas por el grupo RAZ en sus diferentes producciones

No aplica	Error	Dificultad	Obstáculo	Ausencia
P ₄				
4	9	2	0	2
P ₅				
8	5	1	0	1
P ₆				
2	16	3	0	0
UD				
2	16	3	0	0

Ya hemos dejado constancia antes de las dificultades que tuvo el grupo RAZ para delimitar su propuesta de limitaciones del aprendizaje escolar. Son muchos los cambios que el grupo hace entre diferentes producciones, como queda también patente en la Tabla 87. Las variaciones entre las frecuencias mostradas son grandes en C₄ y C₅, ya que en C₆ no modifica nada. Es importante señalar que ningún enunciado de P₄ se mantiene en P₅, ni en ninguna otra producción posterior.

Los enunciados no clasificables como limitaciones en el aprendizaje son más frecuentes en P₅, llegando a ocho. Algunos de ellos no expresan ningún tipo de óbice al aprendizaje (“uso exclusivo de la regla de tres”, “dar una respuesta, ya sea correcta o no, sin una justificación”). Otros están enunciados en términos demasiado genéricos (“uso de forma incorrecta de la calculadora en el cálculo de porcentajes”, “uso de datos erróneos en el planteamiento de un problema”). Precisamente dos de esos enunciados, los relacionados con no justificar una respuesta y con usar datos erróneos, se repiten en cada uno de los tres focos en los que el grupo RAZ clasifica sus limitaciones en el aprendizaje en P₅.

Tal y como vimos anteriormente, en el análisis global de las limitaciones, tanto en P₄ como en P₅, los errores destacados por este grupo son imprecisos y, en muchos casos, provienen de expresar la no consecución de objetivos [081217S44, 46’46’]:

JLL. Un objetivo de los que enunciasteis fue “entender el concepto de proporcionalidad”, y ya vimos que como en ese enunciado caben tantas cosas, es difícil establecerlo como objetivo porque uno lo puede afrontar de muchas maneras. Lo mismo de genérico es cuando se pone la parte negativa: “no se entiende”. Porque tal y como está puesto ahí, eso puede tener implicaciones de que no se saben resolver problemas, no son capaces de definir el concepto, no saben o no son capaces de poner ejemplos en los que se usa...

Sin embargo, en P_6 el grupo consigue reformular prácticamente su propuesta, logrando un listado bastante exhaustivo de errores específicos a su tema, ejemplificándolo con tareas e hipotéticas respuestas de escolares.

Las dos limitaciones que hemos marcado como dificultades (ya que una de ellas se repite), se centran en dar preferencia a las estructuras aditivas sobre las multiplicativas y en incoherencias en la transición del lenguaje verbal al simbólico.

Finalmente, los dos enunciados que responden a ausencia de conocimiento en P_4 , se diluyen paulatinamente hasta desaparecer en las producciones finales.

Balance del Trabajo de los Grupos Respecto al Tipo de Limitaciones Enunciadas

En todos los grupos de futuros profesores, los errores son siempre el tipo de limitación más frecuente. En el grupo ECU suponen el 50,8% de sus propuestas, en FRA suponen el 61,5%, en PRO el 66,7% y, finalmente, el 62,2% de las limitaciones enunciadas por RAZ son errores. Esto hace que, considerando de manera conjunta las producciones de los cuatro grupos, los errores supongan el 60,3% de las limitaciones. A distancia siguen los enunciados no clasificables (14,7%), después las dificultades (13,4%), a continuación los obstáculos (8,2%) y, en último lugar, las ausencias de conocimiento (3,4%).

Los tipos de limitaciones del aprendizaje escolar de consideración común por todos los grupos son los errores, a pesar de que todos los grupos, en algún momento e incluso en la unidad didáctica, proponen un enunciado no clasificable. ECU nunca propuso ninguna ausencia de conocimiento como limitación, FRA no propuso ni dificultades ni ausencias de conocimiento y PRO y RAZ nunca consideran obstáculos.

Los enunciados que podemos considerar errores provienen, por lo general, de los enunciados de los objetivos y eso hace que un enunciado de objetivo demasiado impreciso redunde en un error demasiado genérico, tal y como hemos ejemplificado en las producciones del grupo PRO. Por el contrario, cuando en los objetivos se han precisado expectativas, las limitaciones que se relacionan con ellas también abordan un amplio abanico de aspectos, como hemos visto en las producciones del grupo ECU.

Los enunciados de dificultades son más escasos que los enunciados de errores, si bien se centran en aspectos importantes de cada uno de los temas. Sobre los obstáculos, sólo los grupos ECU y FRA enuncian algunos que describen, con distinta caracterización, cómo los números naturales y la aritmética pueden dificultar, respectivamente, el paso a las fracciones y al álgebra.

3.2 Estudio de las Variables Tipo de Dificultad (Di) y Tipo de Error (Er)

De las dificultades enunciadas por los grupos de profesores en formación (trece en total, ya que FRA no incluye ninguna) todas, salvo dos, se clasifican en la segunda categoría de las propuestas por Socas (1997): dificultades asociadas a los *procesos propios de la actividad matemática*. Con diferentes descripciones y

ejemplos, la mayoría de ellas se centran en la aplicación y puesta en práctica de distintos algoritmos y procedimientos.

Una de las dificultades enunciadas por el grupo ECU, “13. Confusión de la estructura aditiva con la multiplicativa, por ejemplo: $n \cdot x = x^n$ ” y otra de las propuestas por el grupo RAZ, “32. Uso de estructuras aditivas para resolver problemas en los que interviene la proporcionalidad”, las clasificamos dentro de la categoría asociada a la *complejidad de los objetos matemáticos*.

En cuanto a los errores, la Tabla 88 muestra, por columnas, las distintas categorías consideradas y sus frecuencias por grupos. Las categorías seguidas han sido: *datos mal utilizados* (datos), *interpretación incorrecta del lenguaje* (lenguaje), *inferencias no validadas lógicamente* (inferencias), *teoremas o definiciones deformados* (teoremas), *falta de la verificación de la solución* (verificación) y *errores técnicos* (técnicos).

La Tabla 89 muestra que predominan los errores de tipo técnico, algo más del 52% del total, seguidos por aquellos debidos a teoremas o definiciones deformadas con, aproximadamente, el 32% de los enunciados de los grupos.

Tabla 89

Clasificación de los diferentes errores enunciados por los grupos de profesores en formación según las categorías de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987)

<i>Datos</i>	<i>Lenguaje</i>	<i>Inferencias</i>	<i>Teoremas</i>	<i>Verificación</i>	<i>Técnicos</i>
ECU					
0	0	0	3	0	9
FRA					
0	0	0	1	1	4
PRO					
1	0	2	5	0	2
RAZ					
4	1	1	12	0	13
Total					
7,8%	1,5%	4,6%	32,3%	1,5%	52,3%

Dentro de las restantes categorías, tienen cierta presencia los errores relativos a datos mal utilizados y los debidos a inferencias no validadas lógicamente. Sólo el grupo RAZ, enuncia un error vinculado con interpretar incorrectamente el lenguaje en P₄: “7. Interpretación errónea de los enunciados de problemas porcentuales y de repartos proporcionales” aunque después lo elimina definitivamente en P₅. Asimismo, sólo el grupo FRA enuncia un error vinculado a la quinta categoría, falta de la verificación de la solución, cuando propone en P₄ el error “2. Operar llegando a resultados absurdos (tales como fracciones con

ceros en el denominador)”. En P₅ lo cambia a “2. Operar llegando a resultados absurdos (tales como fracciones con ceros en el denominador, representación de fracciones utilizando convenios inadecuados,...)” y en la unidad didáctica, queda finalmente recogido como “2. Operar llegando a resultados absurdos (tales como fracciones con ceros en el denominador, simbolización no adecuada, convenios inadecuados...)”.

El grupo RAZ ejemplifica el mayor número de categorías, ya que enuncia errores relacionados con cinco de las seis consideradas. El grupo PRO ejemplifica cuatro categorías, FRA tres y ECU sólo dos de ellas.

Balance del Trabajo de los Grupos Respecto al Tipo de Dificultades y Errores

Todos los grupos llegan a enunciar al menos una dificultad. En conjunto, los ejemplos propuestos son importantes y, al mismo tiempo, se agrupan en las categorías específicas al contenido de los temas de matemáticas. Las otras tres categorías, se centran en los procesos de enseñanza, de aprendizaje y en actitudes afectivas hacia las matemáticas.

En relación con los errores, las únicas dos categorías que ejemplifican todos los grupos son, al mismo tiempo, las más frecuentes. El predominio de los errores asociados con la deformación de teoremas, algoritmos y fórmulas y, sobre todo, de los errores técnicos, es abrumador con respecto a todos los demás. Más del 84% de los errores enunciados por los grupos de profesores en formación, caen dentro de alguna de esas dos categorías.

En el capítulo anterior constatamos el gran número de objetivos específicos centrados en rutinas y en la aplicación de algoritmos y fórmulas. Esto da fuerte peso, en el conjunto de propuestas, a la competencias de *utilizar el lenguaje simbólico*. Dado que, como hemos detallado en el apartado anterior, casi todos los enunciados de errores surgen de los objetivos específicos, es inteligible que esas dos categorías sean las más reiteradas en las propuestas de los grupos de profesores en formación.

3.3 Estudio de la Variable Especificidad (Ep)

En la Tabla 90 recogemos, para cada producción, el número de limitaciones en el aprendizaje que cada grupo enuncia de manera lo suficientemente genérica, como para que tengan sentido en más de un tema de matemáticas.

Lo primero que se pone de manifiesto, es la estabilidad en el número de enunciados genéricos de todos los grupos salvo RAZ, ya que en el resto de casos se mantiene un número similar de ellos a lo largo de las distintas producciones. En el caso del grupo RAZ existe una gran disparidad con el resto, ya que en P₄ llegaron a delimitar ocho limitaciones muy genéricas dentro de su listado de diecisiete enunciados. En el otro extremo está el grupo FRA, que no enunció ninguna.

El grupo ECU enunció en P₄ una única limitación genérica: “9. Por último, el alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una falta de verificación de éstas”. Este enunciado se transformó en P₅ en “9. El

alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una falta de verificación de éstas, o bien, puede ser que se verifiquen las soluciones en pasos intermedios en lugar de el sistema inicial” y este enunciado permanece en su listado hasta la unidad didáctica. Este grupo en C₄ introduce también un segundo enunciado genérico que mantiene en lo sucesivo: “16. Por último, se encuentran dificultades a la hora de criticar problemas mal planteados”.

Tabla 90

Número de limitaciones no específicas a los temas en las distintas producciones por los grupos

P ₄	P ₅	P ₆	UD
ECU			
1	2	2	2
FRA			
0	0	0	0
PRO			
3	1	1	1
RAZ			
8	2 ⁶	4	4

El grupo PRO, introduce en P₄ tres limitaciones que consideramos genéricas: “4. La complejidad del concepto de límite”, “14. Dificultad en la comprensión del enunciado de un problema” y “15. Dificultad al formalizar en términos matemáticos, tablas y otras representaciones los datos de un problema”. En C₄ modifica el enunciado de las limitaciones 4 y 14 y les da mayor concreción. La primera la centra en la definición de probabilidad como límite y la segunda la ciñe a problemas probabilísticos. También reformula la limitación 15 y la enuncia como: “15. Dificultad al analizar, simplificar y ordenar los datos de un problema para estructurarlos en forma de tablas y otras representaciones”, aunque sigue siendo demasiado genérica. Ese enunciado permanece sin cambios hasta la unidad didáctica.

Finalmente, el grupo RAZ ha sido el que más enunciados genérico propuso. Ya hemos comentado antes que modifica varias veces su propuesta, tanto en los enunciados propuestos como en su organización. En su primera propuesta, organizada de acuerdo a una de las clasificaciones teóricas consideradas, el grupo fuerza varios de sus enunciados para obtener ejemplos en cada una de las categorías de esta clasificación. Esto lleva al grupo a proponer limitaciones muy

⁶ En realidad son seis enunciados, ya que en su propuesta repitieron esas dos limitaciones en cada uno de los tres focos que consideraron. Pero en conjunto, hay sólo dos enunciados genéricos distintos en su listado.

genéricas como: “3. Uso de datos irrelevantes en un problema para su resolución”, “14. No saber realizar un análisis crítico acerca de la solución de un problema” o “Errores en tablas ó gráficos realizados por ordenador”. En P₅ reconstruye casi por completo su propuesta, y sólo permanecen modificaciones en tres de sus limitaciones. Una de ellas era muy genérica: “12. Dar una respuesta, ya sea correcta o no, sin una justificación” y la repiten tres veces en diferentes focos. Además, introduce un enunciado nuevo que también repite en cada foco: “20. Uso de datos erróneos en el planteamiento de un problema”, si bien no lo incluye en P₆. En esa revisión del balance del análisis cognitivo la única limitación genérica que mantiene con respecto a producciones anteriores fue la 12, pero añade otras tres diferentes que mantiene en la unidad didáctica: “30. Uso de datos superfluos en el planteamiento de un problema”, “40. Inventar problemas en los que faltan datos” y “41. Dificultad para seleccionar los datos relevantes del problema para su resolución”.

En general, vemos que el mayor número de limitaciones enunciadas con poca precisión se aglutinan en P₄, con doce. En P₅ disminuyen a cinco, pero en P₆ aumentan de nuevo a siete, donde se estabilizan hasta la unidad didáctica final.

El análisis que hemos llevado a cabo también destaca que la resolución de problemas aglutina la mayor parte de imprecisiones y, de nuevo, constata la estrecha relación entre objetivos específicos y errores y dificultades. Precisamente sobre resolución de problemas (y sobre modelización), los grupos de profesores en formación también tuvieron dificultades para enunciar objetivos, tal y como hemos mostrado en el capítulo anterior.

3.4 Estudio de la Variable Léxico-Semántica (Lx)

Con el mismo argumento que en el análisis de las producciones sobre expectativas de aprendizaje, aquí incluimos esta variable porque en años anteriores, varias producciones de los grupos incluían errores de expresión, vocabulario o sintaxis en los enunciados.

Sin embargo, en las diferentes producciones de los grupos del curso académico 2008-2009 sobre limitaciones del aprendizaje, no ha se ha dado ni un solo caso de enunciado con algún error relevante de alguno de esos tipos.

3.5 Estudio de la Variable Descriptores (De)

La última variable que consideramos aquí se refiere a la asignación que los grupos hacen entre limitaciones y expectativas de aprendizaje. A pesar de que los formadores señalamos expresamente la importancia de esta asignación y de que, además, mostramos un ejemplo con los números naturales (en la sesión 42), no todos los grupos incluyen de manera sistemática esta vinculación en sus presentaciones. El grupo ECU sólo la hace en la unidad didáctica, FRA y PRO la realizan en todas las producciones y el grupo RAZ sólo en P₄.

Producciones del Grupo Ecuaciones

Cuando el grupo ECU presentó su unidad didáctica, relacionó cada una de las dieciocho limitaciones del aprendizaje escolar enunciadas con los objetivos

específicos seleccionados en su última producción. Esa asignación aparece en la parrilla de la Figura 56, en donde seguimos el mismo criterio de sombreado de las celdas ya utilizado cuando analizamos las expectativas de aprendizaje en el capítulo anterior (§8.5.1).

En esa parrilla, la primera columna corresponde a la numeración de las limitaciones del aprendizaje enunciadas. Las celdas de esa primera columna pueden tener un sombreado blanco si el enunciado es nuevo; rojo si es una modificación de un enunciado previo; amarillo si es un nuevo enunciado que proviene de la división o el agrupamiento de otros enunciados o gris, si es exactamente igual que en la producción anterior. El resto de columnas contienen la numeración de los objetivos con los que el grupo vinculó cada una de las limitaciones del aprendizaje enunciadas. El sombreado de estas celdas es blanco si la vinculación no está justificada a partir de los enunciados o rojo, si esa vinculación sí está justificada.

UD		Obj	
1	30		
10	30	39	
11	30	39	
12	30		
13	30		
2	43		
14	19	29	
3	40	9	31
4	40	9	31
5	40	9	31
17	41		
18	41		
19	41		
20	41		
7	6	34	
8	15		
9	15		
16	42		

Figura 56. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción UD del grupo ECU

Lo primero que observamos es que de las veintiocho asignaciones realizadas, sólo cuatro (menos de un 15%) no están justificadas. Las limitaciones del aprendizaje que tienen asignaciones no justificadas son [UD_ECU, 45]:

11. Errores al tomar inversos y operar, tales como:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{2}{(x+y)}, \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{xy}$$

13. Confusión de la estructura aditiva con la multiplicativa, por ejemplo:
 $n \cdot x = x^n$.

14. Errores debidos a la nueva notación del producto, en la que se debe omitir la "x" del signo de multiplicación, por ejemplo, en la expresión $4x = 46$, deducir, $x = 6$.

El objetivo 39 tiene que ver con el manejo de las igualdades notables, por lo que no parece bien relacionado con el cálculo de inversos en expresiones algebraicas que propone el error 11. El objetivo 30 se centra en afianzar operaciones básicas con monomios y polinomios y, sin duda, la dificultad 13 expresa una limitación que va mucho más allá de ese aspecto técnico. Finalmente, el error 14, centrado en el manejo y el significado de la simbología algebraica, es más nimio que lo que expresan los objetivos con los que se relaciona: “19. Calcular valores numéricos de expresiones algebraicas con o sin ayuda de soporte tecnológico” y “29. Distinguir y justificar si una expresión algebraica es monomio o no y estudiar su estructura coeficiente, parte literal y grado y agrupar monomios semejantes de una lista”.

Cuando el grupo ECU presenta su unidad didáctica, en su listado de objetivos específicos hay veintidós enunciados. De ellos, sólo trece aparecen relacionados con las limitaciones del aprendizaje y, entre ellos, destacan dos especialmente por su gran número de apariciones. El objetivo “30. Afianzar las operaciones básicas con monomios y polinomios” aparece vinculado con cinco limitaciones, mientras que el objetivo “41. Dominar resolución algebraica de ecuaciones y sistemas (igualación, reducción, sustitución) argumentando cada paso” se relaciona con cuatro limitaciones. También los tres objetivos relacionados con la equivalencia de ecuaciones se relacionan con tres limitaciones cada uno de ellos, lo que constata la importancia que, para este grupo, tienen las rutinas algebraicas dentro de su planificación. Sin embargo, no incluyen errores o dificultades relacionados con objetivos importantes en este tema, como los que tienen que ver con la relación entre diferentes formas de representación: “13. Estudio de las ecuaciones y sistemas mediante el uso de tablas de valores”; o bien con la resolución de problemas: “37. Inventar problemas en situaciones y contextos variados que se resuelvan con ecuaciones y sistemas” o “38. Dada una ecuación o sistema inventar un problema que se resuelva con dicha estructura matemática”.

Producciones del Grupo Fracciones

El grupo FRA realiza la asignaciones de limitaciones a objetivos específicos en todas sus producciones. La Figura 57 recoge las parrillas en las que registramos esas asignaciones, usando la misma organización y significado de los colores de las celdas que la que hemos descrito anteriormente.

P4						
Objetivos						
1	1	3	4	5	22	
2	1	3				
3	2	5				
4	12	26	29	14		
5	24	12	29			
6	21	29				
7	13					
8	13	14	30			
9	27	31				

P5						
Objetivos						
1	1	3	4	5	22	
2	1	3				
3	2	5				
10	1	5				
4	12	26	29	14		
5	24	12	29			
6	21	29				
7	13					
8	13	14	30			
9	27	31				

P6						
Objetivos						
1	1	3	4	5	22	
2	1	3				
3	2	5				
10	1	5				
4	12	26	29	14		
5	24	12	29			
6	21	29				
7	13					
8	13	14	30			
9	27	31				

UD						
Objetivos						
11	1	3	4	5	22	
2	1	3				
3	2	5				
10	1	5				
4	12	26	29	14		
5	24	12	29			
6	21	29				
7	13					
8	13	14	30			
9	27	31				

Figura 57. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en las producciones del grupo FRA

Lo primero que muestra la Figura 57 es la poca variación de las asignaciones a lo largo de las diferentes producciones. Como vimos antes, este grupo no llega a hacer grandes modificaciones en los enunciados de sus limitaciones durante la asignatura, ya que éstas se reducen, por una parte, a la introducción de un nuevo enunciado y a la modificación de otros dos en P_5 y por otra, a la modificación de un enunciado y a la reconstrucción de otro en la unidad didáctica. Pero ninguna de esas alteraciones tuvo implicaciones en las asignaciones.

En P_4 , el 75% de las veinticuatro asignaciones realizadas las consideramos bien justificadas. Las seis restantes se reparten en cinco objetivos, coincidiendo dos de ellas en el mismo. El primer objetivo “1. Existencia de defectos en la comprensión del concepto” tiene un enunciado tan general, que es complejo discriminar con qué objetivos se relaciona. De hecho, el objetivo “3. Reconocer numerador y denominador” es muy concreto y simple para relacionarlo con esa limitación, mientras que el objetivo “5. Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales” está más orientado al trabajo con diferentes sistemas de representación que a profundizar en el concepto de fracción. Aunque este objetivo se reformula en sucesivas producciones, las asignaciones del grupo son las mismas y nuestro criterio sigue vigente en todos los casos.

Inversamente, cuando es un objetivo el que está enunciado en términos genéricos, también ocasiona problemas su asignación a alguna limitación del aprendizaje. El objetivo que enuncia el grupo FRA en P_1 : “1. Comprender y utilizar los distintos conceptos de fracciones” es de esas características. De hecho, no encontramos justificación coherente a su relación con el error de P_4 “2. Operar llegando a resultados absurdos (tales como fracciones con ceros en el denominador)”. De nuevo, aunque el enunciado de esa limitación cambia en producciones posteriores, no lo hace de modo suficiente para modificar su asignación ni nuestra valoración.

El objetivo “29. Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones” se vincula con los errores “5. Olvidar o modificar algún paso del algoritmo (aditivo, comparación o equivalencia)” y “6. Aplicar la simplificación del producto a la suma de fracciones”. Sin embargo, el enunciado y la resolución de problemas se refiere a procedimientos mucho más complejos que la aplicación de algoritmos, que es en lo que se centran esos dos errores. Esto mismo ocurre entre el error número 8 y el objetivo 30, pero con respecto a problemas multiplicativos y los algoritmos correspondientes.

A partir de C_4 , sólo cuatro de los veintiún objetivos específicos propuestos por el grupo FRA quedan sin relacionarse con alguna de las limitaciones propuestas. Estos objetivos tienen que ver con el reconocimiento de fracciones en la vida cotidiana, con el uso de materiales manipulativos, con el empleo de calculadora y con el cálculo mental. El resto tienen un reparto homogéneo ya que cada uno se vincula con entre una y tres limitaciones.

Producciones del Grupo Probabilidad

Las asignaciones del grupo PRO son similares a las del grupo FRA, ya que no varían a lo largo de las diferentes producciones aún cuando se modifique el

enunciado de las limitaciones. Esto se puede comprobar en la Figura 58, donde recogemos estas asignaciones.

P4				P5				P6				UD			
Objetivos				Objetivos				Objetivos				Objetivos			
1	1	2		16	1	2		16	1	2		16	1	2	
2	15	16		2	15	16		2	15	16		2	15	16	
3	17			3	17			3	17			3	17		
4	18			4	18			4	18			4	18		
5	20			5	20			5	20			5	20		
6	17	20		6	17	20		6	17	20		6	17	20	
7	20	7		7	20	7		7	20	7		7	20	7	
8	19	7	12	8	19	7	12	8	19	7	12	8	19	7	12
9	21			17	21			17	21			17	21		
10	4	9		10	4	9		10	4	9		10	4	9	
11	20			11	20			11	20			11	24		
12	13			12	13			12	13			12	13		
13	8	9		13	8	9		13	8	9		13	8	9	
14	22	13	23	14	22	13	23	14	22	13	23	14	22	13	23
15	12	10	11	15	12	10	11	15	12	10	11	15	12	10	11

Figura 58. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en las producciones del grupo PRO

Únicamente en C_4 fue cuando el grupo PRO alteró varios de los enunciados de limitaciones y también ahí introdujo dos enunciados nuevos. Pero ni en un caso ni en otro, modifica substancialmente las asignaciones ni el número de éstas. Por ejemplo, cuando en C_6 el grupo introduce un nuevo objetivo (el número 24), cambia en algunas asignaciones el objetivo 20 por este nuevo, pero éstas ni aumentan ni disminuyen. Por lo tanto, la descripción es prácticamente similar para todas las producciones.

De las veintisiete asignaciones realizadas, cinco (casi un 21%), las hemos considerado no justificadas. La primera discrepancia aparece en la primera limitación enunciada: “1. Identificar sucesos con conjuntos de forma errónea” es un error de tipo técnico que no tiene necesariamente relación con el objetivo “1. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio”. Cuando en C_5 ese enunciado de limitación se transforma en “16. Dificultad al traducir del lenguaje verbal a la simbología conjuntista” realmente expresa mejor la limitación, pero la relación con el objetivo sigue siendo débil.

El grupo vincula el error “12. Mezclar magnitudes probabilísticas y porcentuales” con el objetivo “13. Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana”, si bien esa relación es muy difusa. Ese mismo objetivo, junto con otros dos, se vincula también con el error “14. Dificultad en la comprensión del enunciado de un problema” con el mismo resultado. La poca precisión del enunciado de la limitación no facilita la justificación de esas vinculaciones. Los otros dos objetivos propuestos tienen que ver con la clasificación de experimentos simples o compuestos en diferentes contextos.

Prácticamente la totalidad de los objetivos específicos considerados están vinculados con al menos una limitación. Sólo el objetivo “14. Distinguir entre

experimentos deterministas y experimentos aleatorios”, que está en todas las producciones del grupo desde P₃, no aparece relacionado con ninguna limitación. El objetivo con más asignaciones en P₄, P₅ y P₆, es “20. Identificar los casos favorables y casos posibles en un experimento”, ya que se vincula con cuatro de las limitaciones enunciadas; pero en la unidad didáctica es “24. Dominar las propiedades básicas de la probabilidad” el objetivo más frecuente con tres asignaciones.

Producciones del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ, sólo hizo las asignaciones entre limitaciones y objetivos en P₄. Como hemos dicho antes, esta producción fue organizada en torno a la clasificación de errores de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987), lo cual genera gran cantidad de enunciados muy genéricos e imprecisos. Este hecho tiene implicaciones en las asignaciones realizadas, tal y como muestra la Figura 59.

		P4					
		Objetivos					
1	1	2	3	6	7	8	
2	16	17					
3	14	9					
4	5	2					
5	1	14	11	9	10	18	
6	12	13					
7	14	16	17	18	19		
8	14	4	16	17	19		
9	1	14	19				
10	14	12					
11	14	3	19				
12	1						
13	5	14	16	17	18	19	
14	16	9	10	18			
15	6	7	8				
16	14	3	6	17	19		
17	12	13					

Figura 59. Indicadores de relación entre limitaciones del aprendizaje y objetivos específicos en la producción P4 del grupo RAZ

La gran cantidad de asignaciones realizadas, cincuenta y nueve en total, pone de manifiesto la amplitud de algunas de las limitaciones enunciadas. Relacionar un error o dificultad con hasta seis objetivos, desvirtúa bastante la asignación de cara al diseño de tareas para detectar o corregir esas limitaciones. Además, en la propuesta del grupo RAZ, hay veinticinco asignaciones no justificadas, lo cual supone un porcentaje superior al 42%.

Estos enunciados de limitaciones se desechan prácticamente por completo en sucesivas producciones, ya que sólo subsisten los números 4, 11 y 12 hasta C₄ y únicamente se mantiene hasta la unidad didáctica la limitación “12. Dar una respuesta, ya sea correcta o no, sin una justificación”. Pero todos ellos son modificados, por lo que no entramos en un análisis más detallado de las

asignaciones de este grupo en su primera producción sobre limitaciones del aprendizaje.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre la Variable Descriptores

El principal invariante, común a los cuatro grupos, muestra que con los listados de limitaciones y las asignaciones realizadas se da cobertura a la mayor parte de los objetivos específicos enunciados. Pero resulta difícil ir más allá en un análisis conjunto de las producciones de los cuatro grupos; dos de ellos, FRA y PRO, hacen asignaciones en todas las producciones, ECU hace la asignación en la unidad didáctica y RAZ la hace en la producción P₄, pero la descarta completamente en la producción siguiente.

El grupo ECU en la unidad didáctica, es el que alcanza un mayor porcentaje de asignaciones justificadas, con más de un 85%. El grupo FRA ronda el 77% y PRO supera el 79%. Estos datos dejan constancia de que esta asignación es más sencilla que la de objetivos a competencias, donde vimos en el capítulo anterior que los grupos tuvieron más dificultades. Esto se justifica porque en la mayor parte de las producciones de los grupos, éstos usan el propio enunciado de expectativas para producir el de limitaciones.

No obstante, aunque este hecho facilita la bondad de la asignación, también puede redundar en enunciados de limitaciones muy poco precisas dependiendo de la concreción de las expectativas. Esto lo hemos observado en algunos enunciados de los grupos FRA y PRO.

4. APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE FUTUROS PROFESORES SOBRE ERRORES Y DIFICULTADES

La orientación y el desarrollo de este capítulo coinciden en varios aspectos con los mostrados en el anterior. En el capítulo 8, nos preocupamos del análisis sobre el conocimiento y las capacidades de los grupos de futuros profesores, para organizar y establecer objetivos específicos y para vincular esos enunciados con las competencias matemáticas. Ese estudio está centrado en el primero de los organizadores del análisis cognitivo: expectativas sobre el aprendizaje escolar.

Ahora, en este capítulo, hemos puesto nuestro foco de interés en el segundo organizador del análisis cognitivo: las limitaciones del aprendizaje escolar. En el capítulo 3, constatamos cómo el análisis de las limitaciones con las que puede encontrarse un escolar durante su aprendizaje en matemáticas es un aspecto central en la actividad profesional del profesor. Este análisis, por lo tanto, debe formar parte de la planificación que hace el profesor de su labor docente.

En este segundo momento de la parte empírica de nuestra investigación, nos hemos preocupado del proceso de aprendizaje seguido por los grupos de profesores en formación, a lo largo de la asignatura, acerca de cómo organizan, seleccionan y enuncian limitaciones del aprendizaje escolar en sus temas de

matemáticas y, además, con qué criterios organizan esas limitaciones y las vinculan con los objetivos específicos.

La evolución de los conocimientos y capacidades que los grupos de futuros profesores han ido desarrollando durante varias sesiones de la asignatura, han puesto de manifiesto que ese proceso es complejo y que, al mismo tiempo, tiene una notable implicación en el desarrollo, por parte de esos grupos, de su competencia de planificación para el diseño de unidades didácticas.

En primer lugar, hemos realizado un estudio global de los datos aportados por los grupos de profesores en formación que, fundamentalmente, ha permitido caracterizar el proceso de aprendizaje de esos grupos en términos de dos estados y tres etapas, de manera similar a la que hemos descrito en el capítulo anterior. A continuación, ya sobre esa caracterización del proceso, hemos abordado un estudio local de las limitaciones seleccionadas, que nos ha permitido valorar la precisión y variedad de los enunciados propuestos por cada uno de los grupos.

Con objeto de hacer un interpretación global de los resultados obtenidos en estos estudios, primero resumimos brevemente los principales datos recabados del análisis conjunto de las producciones de los grupos. Después, empleamos los cinco momentos del proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores para describir los conocimientos y capacidades adquiridas en dicho proceso.

4.1 Balance de las Producciones de los Grupos

Las cuatro producciones que, durante el desarrollo de la asignatura, los grupos de futuros profesores realizaron acerca de limitaciones del aprendizaje, se concretan en dos aspectos fundamentales: la organización y el enunciado de limitaciones específicas a un tema de las matemáticas escolares y, posteriormente, la vinculación de éstas con los objetivos específicos sobre ese tema.

En la Tabla 91, mostramos la síntesis del análisis realizado sobre el primero de esos dos aspectos en relación con las limitaciones del aprendizaje escolar. En la primera y en la última columna nos referimos, respectivamente, al estado inicial del que parten los grupos de futuros profesores y al estado final que alcanzan al término de la asignatura. En cada una de ellas señalamos el número de enunciados propuestos (N) y una valoración (V) de la cantidad y calidad de éstos, en función de la precisión de los enunciados y de los tipos de errores y dificultades propuestos. Distinguimos valoraciones positivas (+), negativas (-) o sin cambios significativos (\cup). Para cada uno de los momentos intermedios de cambio, señalamos la etapa de aprendizaje en la que se encuentra cada grupo (Et) e, igualmente, indicamos el número de limitaciones propuestas y la valoración del conjunto de las mismas.

En relación al número de limitaciones propuestas en el estado inicial, ECU y FRA proponen nueve cada uno, mientras que PRO y RAZ llegan a quince y diecisiete, respectivamente. Al ser la primera aproximación de los grupos, se presentan varios enunciados imprecisos, demasiado abiertos o que aluden a ausencia de conocimientos más que a limitaciones propiamente dichas. Esto hace que la primera valoración de todos los grupos sea negativa.

Tabla 91

Estados y etapas de aprendizaje de los grupos en relación al enunciado de limitaciones del aprendizaje

Inicial			C ₄			C ₅			C ₆			Final	
N	V	Et	N	V	Et	N	V	Et	N	V	N	V	
ECU													
9	-	RC	16	+	C	16	∪	RC	18	+	18	+	
FRA													
9	-	RC	10	-	C	10	∪	RC	10	∪	10	-	
PRO													
15	-	RC	15	+	C	15	∪	E	15	∪	15	+	
RAZ													
17	-	RC	15	-	RC	21	+	C	21	∪	21	+	

En C₄ todos los grupos se ven inmersos en una etapa de revisión crítica. Alguno de ellos, como RAZ, llega a reformular por completo su propuesta, aunque con resultados también imprecisos y confusos. Otros, como PRO, se preocupan de examinar, pero con buen criterio, sólo los enunciados que fueron objeto de discusión en la producción anterior. ECU logra depurar varios de sus enunciados, mientras que FRA no supera las deficiencias de su producción previa. En C₅, el grupo RAZ vuelve a revisar su listado de limitaciones por completo, llegando finalmente a una propuesta coherente y notablemente fundamentada y ejemplificada. El resto de grupos consolida su propuesta y, por lo tanto, no aportan modificaciones significativas.

En C₆, los grupos ECU y FRA entran de nuevo en una etapa de revisión crítica, aunque mucho más moderada que la primera. De cara a la unidad didáctica, introducen algunos objetivos nuevos como mejora o sustitución de otros. El grupo RAZ consolida su propuesta anterior y, finalmente, el grupo PRO es el único que alcanza una etapa de estabilidad.

En el estado final, los grupos PRO y RAZ han incrementado notablemente la calidad de sus enunciados mientras que ECU, además, aumenta ostensiblemente su listado de limitaciones. El grupo FRA, por el contrario, no avanza significativamente en ninguna de estas dos facetas desde su estado inicial.

En general, la mayoría de los grupos genera enunciados de errores muy por encima de dificultades u obstáculos. Por otra parte, en diversas ocasiones confunden limitaciones con la no consecución de un objetivo o una capacidad (3,4% del conjunto total de limitaciones propuestas), o bien las enuncian como nociones meramente matemáticas (14,7%). Cuando enuncian dificultades u obstáculos, aunque no ocurre frecuentemente (13,4% y 8,2%, respectivamente),

alcanzan a identificar limitaciones importantes y ampliamente reconocidas en Didáctica de la Matemática.

En el caso de los errores, la mayor parte (más del 52%), son errores de tipo técnico, vinculados a capacidades algorítmicas y rutinarias. A continuación, con casi un 33%, se sitúan los errores relacionados con aplicar incorrectamente teoremas, propiedades y fórmulas. Estos resultados son coherentes con los objetivos predominantes en las producciones y con las competencias más frecuentes en las planificaciones de los grupos.

Con respecto a las asignaciones entre limitaciones y expectativas, son pocos los grupos que las llevan a cabo en todas las producciones, si bien, las asignaciones justificadas nunca bajan del 77% del total.

En comparación con el proceso de aprendizaje de los grupos de futuros profesores acerca del primer organizador del análisis cognitivo, observamos un proceso también complejo en este segundo organizador de limitaciones, si bien mucho menos dilatado en el tiempo. A continuación, describimos con detalle ese proceso, a partir de los resultados mostrados en este capítulo y que hemos resumido en este epígrafe.

4.2 Proceso de Aprendizaje de los Grupos de Futuros Profesores Sobre Errores y Dificultades

En el estado inicial, los grupos de profesores parten, fundamentalmente, de la información suministrada por el análisis de contenido, por su trabajo sobre expectativas de aprendizaje en el propio análisis cognitivo y por el apoyo teórico de algunas fuentes documentales. Los focos de contenido y las prioridades de aprendizaje, constituyen el principal punto de partida para organizar las limitaciones enunciadas por los grupos (§9.1). Las clasificaciones teóricas sobre errores que manejan los grupos, resultan operativas para ellos cuando las consideran un instrumento de control de la variedad y de la profundidad de su propuesta; usarlas como criterio organizador previo a los enunciados, les puede llevar a limitar y forzar esos enunciados. Esto nos lleva a constatar que, aunque el proceso de delimitación de las prioridades de aprendizaje, no es inmediato para los grupos y que requiere un conocimiento y un manejo exhaustivo de la estructura conceptual de un tema, una vez que se establecen, brindan un marco que organiza, estructuralmente, la reflexión cognitiva sobre ese tema. Lo vimos en el enunciado de los objetivos específicos (§8.1) y lo hemos vuelto a constatar ahora con las limitaciones del aprendizaje escolar.

En ese estado inicial, los propios objetivos específicos constituyen la piedra angular para enunciar las limitaciones del aprendizaje propias de cada tema. La precisión y la riqueza alcanzada en los objetivos seleccionados condiciona, tanto positiva como negativamente, la calidad de los enunciados de limitaciones del aprendizaje escolar. Un enunciado de objetivo impreciso o general, redundante en una limitación también genérica, mientras que si los objetivos son precisos y poseen riqueza de conocimientos o contextos, las limitaciones que surgen en relación a ellos también abordan un amplio abanico de aspectos (§9.2).

En este momento de su proceso de aprendizaje, de nuevo la información previa del análisis cognitivo, sustenta el trabajo de los grupos de futuros profesores. Dado que el tratamiento teórico y técnico sobre limitaciones del aprendizaje escolar se inicia con posterioridad al desarrollo del trabajo sobre objetivos y competencias, los grupos disponen de una información suficientemente elaborada y revisada para proponer su primer listado de limitaciones. De hecho, cuando se realiza la presentación de esa primera aproximación, un grupo ya se encuentra en una etapa de estabilidad en torno al enunciado de expectativas, dos grupos están en una etapa de consolidación y sólo uno está en plena revisión crítica de su propuesta. Una consecuencia de esta relación, es que las asignaciones entre objetivos y errores, surgen por lo general, de un modo más directo y natural que la vinculación entre objetivos y competencias que describimos en el capítulo anterior (§8.5.1).

Los enunciados propuestos en la primera producción son, en su gran mayoría, ejemplos de errores de tipo técnico, lo cual es razonable por su fuerte vinculación con objetivos específicos y por los ejemplos consultados por los grupos en algunas fuentes documentales (§9.3.1 y §9.3.2). No obstante, entre las limitaciones enunciadas, también aparecen dificultades y, en menor medida, obstáculos. En este estado inicial, algunos grupos de futuros profesores tienden también, de manera natural, a enunciar errores como negación de objetivos, en cuyo caso no se refieren de manera explícita a un tipo de limitación del aprendizaje. En este caso, las indicaciones de los formadores deben enfocarse en la concreción de esos enunciados y en el conjunto de aspectos que debiera abarcar la propuesta, para no dejar por fuera del análisis ningún elemento central del tema.

El trabajo prosigue con una revisión de esta primera propuesta de errores y dificultades, que coincide, además, con la presentación del balance del análisis cognitivo. Este avance implica una fase de revisión crítica generalizada, ya que todos los grupos reformulan su propuesta a partir, fundamentalmente, de los comentarios recibidos durante su presentación anterior. Los principales puntos de mejora en esta revisión son, para la mayoría de los grupos, el descenso notable de los enunciados que refieren ausencia de algún conocimiento y el aumento de la cantidad de limitaciones enunciadas. Es decir, en esta etapa del aprendizaje de los grupos, la mayor parte de ellos profundizan en su conocimiento teórico sobre el organizador *limitaciones* al identificar enunciados que expresan literalmente algún tipo de error o dificultad y, al mismo tiempo, asientan su conocimiento técnico, pues reconocen mayor cantidad y variedad de errores relativos a temas específicos.

Sin embargo, en los listados de limitaciones se mantienen enunciados genéricos que incluso, se relacionan sólo tangencialmente con los temas (§9.3.3). El grupo más prolífico a lo largo de toda la asignatura en este tipo de enunciados es el único que, en esta fase del trabajo en la asignatura, no consigue definir con claridad aún su propuesta. De hecho, es el único que en la fase siguiente, vuelve a reconsiderar por completo su listado de limitaciones en una nueva etapa de revisión crítica. El resto de grupos, consolida su posición y mantiene inalterable

su propuesta. Los formadores insistimos en la importancia de hacer explícita la relación entre errores/ dificultades y objetivos específicos. Pero como ya hemos señalado, pocos son los grupos que realizan esa asignación, a pesar de que todos los que la abordan obtienen resultados satisfactorios (§9.3.5). Este logro se justifica porque la mayor parte de los enunciados propuestos por los grupos, provienen de sus propios enunciados de objetivos.

Desde el último momento de cambio en la asignatura, la actividad y el trabajo de los grupos se distingue más claramente entre ellos. En el proceso de elaboración de la unidad didáctica, dos grupos vuelven a revisar su propuesta, aunque sólo atienden algunos aspectos muy concretos. Su nivel de satisfacción con la propuesta es notable, aunque en ese momento llevan a cabo modificaciones puntuales. Los otros dos grupos mantienen sus propuestas sin cambios, pero por razones diferentes. Uno de ellos cerró su propuesta tiempo atrás y nunca se vio en la necesidad de añadir, eliminar o modificar nada. El otro, apenas consolidó su último avance y, además, sus integrantes reconocieron explícitamente su insatisfacción con la propuesta que presentaron.

En conjunto, el proceso de aprendizaje de los grupos en relación al organizador errores y dificultades de los escolares, si bien no tan complejo y extenso como el relativo a expectativas, también pone de manifiesto varios aspectos. En primer lugar, el conocimiento teórico de los distintos tipos de limitaciones y de las clasificaciones existentes en cada uno de esos tipos, es un conocimiento amplio y elaborado. Los grupos de profesores en formación llegan a dominar parcialmente algunos aspectos de ese conocimiento pero, al mismo tiempo, evidencian algunas lagunas y confusiones. Sin embargo, en relación con el conocimiento técnico, los profesores desarrollan una serie de habilidades que les permiten organizar y enunciar errores y dificultades, revisar y depurar esos enunciados, identificar parcelas de un tema de matemáticas específico en las que esas limitaciones se pueden presentar a los escolares; también son capaces de vincular, justificadamente, la relación entre unas determinadas limitaciones y algunos objetivos específicos. Por lo tanto, hemos obtenido evidencias sobre el logro de algunos conocimientos y capacidades que señalamos en el cuarto capítulo:

4. Delimitar y distinguir las nociones de error y dificultad y la relación entre ambas.
5. Reconocer y expresar el papel del error en la educación matemática.
6. Conocer y ejemplificar errores y dificultades según diferentes clasificaciones
12. Enunciar errores y dificultades según diferentes fuentes (incluyendo referentes teóricos).
13. Vincular posibles errores y dificultades con el desarrollo de determinados objetivos específicos.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

En segundo lugar, somos conscientes de que el tiempo dedicado en la asignatura al trabajo sobre el organizador limitaciones, no fue tan extenso como el que

dedicamos al de las expectativas. Esto hace, por ejemplo, que sólo un grupo alcance la etapa de estabilidad y, que otro, ni siquiera llegue a estar satisfecho con su propuesta.

A pesar de que para muchas de las actuaciones realizadas han necesitado apoyo documental y sugerencias de los formadores, sostenemos que el conocimiento desarrollado por los grupos de futuros profesores en torno al significado, a la importancia curricular y al uso de limitaciones en el aprendizaje escolar, contribuye, sin duda, al desarrollo de su competencia profesional de planificación mediante el análisis cognitivo.

APRENDIZAJE DE LOS GRUPOS DE PROFESORES EN FORMACIÓN SOBRE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Cuando en el capítulo 3 introducimos la noción de oportunidad de aprendizaje, pusimos de manifiesto la variedad de significados que esta noción admite y el nutrido número de dimensiones con las que conecta desde el punto de vista educativo. El tiempo de clase, la formación del profesorado, los materiales de aprendizaje, el equipamiento de los centros o el propio currículo, entre otras, contribuyen a la oportunidad de aprender de los escolares. Entre los organizadores que abarca esta noción están las tareas matemáticas que el profesor propone a sus escolares. Las tareas matemáticas escolares, vistas como demandas cognitivas, tienen especial importancia para nuestro estudio. En el contexto de nuestra investigación, hemos caracterizado las tareas matemáticas como oportunidades de aprendizaje para los escolares (§3.3.2).

También hemos destacado cómo las tareas matemáticas escolares, vistas como oportunidades de aprendizaje, se relacionan con los otros organizadores del análisis cognitivo. Para el profesor de matemáticas, las tareas constituyen un importante instrumento para lograr las expectativas de aprendizaje de sus escolares, ya que expresan un requerimiento concreto de actuación, una demanda cognitiva, que se vincula con uno o varios objetivos específicos. Mediante un conjunto estructurado de tareas escolares se ejemplifica y hace explícita la diversidad de actividades¹²⁹ que abarca el enunciado de un objetivo específico. Se ejemplifican así distintas demandas que contribuyen a mostrar el logro de las expectativas expresadas por el objetivo.

Al mismo tiempo, las secuencias y redes de tareas contribuyen al desarrollo paulatino de las competencias matemáticas en los escolares. Por otro lado, también constituyen indicadores para diagnosticar la existencia de errores y dificultades en las actuaciones de los escolares y suministrar posibles vías para su

¹²⁹ En el capítulo 2, distinguimos las nociones de tarea y actividad (§2.5.1).

tratamiento y superación.

El estudio que llevamos a cabo, se centra en una determinada faceta del análisis de tareas. Otros trabajos, como el de Gómez y González (2009), abordan el problema que debe afrontar un profesor para concretar tareas que hagan que sus escolares recorran un determinado *camino de aprendizaje*. En Lupiáñez, Marín, Gómez y Rico (2007), analizamos el impacto del uso de herramientas tecnológicas en el diseño de tareas escolares y, por ejemplo, Bergqvist, Lithner y Sumpter (2008), explorar cómo diferentes tipos de tareas activan diferentes aspectos del razonamiento de los escolares de Educación secundaria.

En nuestro análisis, nos hemos propuesto explorar el modo en el que los grupos de futuros profesores concretan su propuesta de expectativas y limitaciones en un conjunto estructurado de tareas, brindando así a los escolares diversas oportunidades de aprender las matemáticas escolares. Para llevar a cabo este estudio, en primer lugar describimos los diferentes trabajos que han realizado los grupos en la asignatura sobre diseño y selección de tareas. Eso permite acotar nuestros elementos de análisis. A continuación describimos esos diferentes análisis y, finalmente, interpretamos los resultados obtenidos en términos del conocimiento didáctico declarativo de los grupos de futuros profesores.

1. TRABAJOS DE LOS GRUPOS SOBRE DISEÑO Y SELECCIÓN DE TAREAS

En el capítulo 5 hemos descrito el desarrollo del análisis de instrucción y hemos visto que los grupos de futuros profesores llevan a cabo diferentes trabajos en la asignatura, relacionados con el diseño y la selección de tareas matemáticas. Estos trabajos se centran en distintos criterios de clasificación de tareas que un profesor puede emplear: atendiendo al contenido que manejan, a los objetivos que persiguen, a las competencias que promueven, a los errores que pueden detectar o corregir, a la complejidad que poseen o a la función que cada tarea puede desempeñar en una unidad didáctica, entre otros.

Entre esos trabajos realizados por los grupos de profesores en formación, se encuentran, por lo tanto, varios que relacionan los tres organizadores del análisis cognitivo o, al menos, relacionan dos de ellos: tareas por un lado y expectativas o limitaciones por el otro. También hemos señalado en el capítulo 5 que en el diseño y selección de tareas del análisis de instrucción se ponen en juego más criterios y no sólo aquellos relativos a los organizadores del análisis cognitivo. Por esta razón, precisamos que este capítulo se dedica sólo a analizar la relación entre expectativas, limitaciones y oportunidades para el aprendizaje (tareas), en diferentes secciones de las unidades didácticas diseñadas por los grupos de futuros profesores.

Esto hace que el análisis del tercer y último organizador del análisis cognitivo, sea diferente a los estudios previos sobre expectativas y limitaciones (capítulos 8 y 9, respectivamente). En primer lugar, no planteamos un estudio de tipo

evolutivo en el que caracterizar diferentes estados y etapas de aprendizaje. Ahora nos centramos en describir y analizar el conocimiento didáctico declarativo que los grupos de profesores han desarrollado al término de la asignatura en relación con el diseño y la selección de tareas, atendiendo a las expectativas o limitaciones con las que las relacionan. En segundo lugar, como consecuencia de lo anterior, el estudio del que dejamos constancia en este capítulo es similar al mostrado en el capítulo 7. Vamos pasando por las distintas secciones de las unidades didácticas que analizamos y finalmente, en conjunto, interpretamos los resultados en término del conocimiento de los grupos de profesores en formación. Antes, describimos la estructura de las unidades didácticas, para después detallar en qué secciones de las mismas focalizamos nuestro estudio.

1.1 Estructura de la Unidad Didáctica

En la sesión 52, los formadores presentamos un guión básico de la estructura de la unidad didáctica final¹³⁰. En ese guión destacamos los puntos necesarios que debe contener el documento escrito y, también, damos algunas indicaciones para las presentaciones finales de los grupos de futuros profesores.

El documento escrito de la unidad didáctica tiene tres partes fundamentales. En la primera, los grupos han de presentar sus últimas versiones de las diferentes componentes del análisis didáctico. En el análisis de contenido, además de describir el desarrollo histórico, los sistemas de representación, el análisis fenomenológico y la estructura conceptual de sus temas, también concretan cuáles serán los contenidos específicos que incluirán en las sesiones que conforman la unidad didáctica. En relación con el análisis cognitivo, describen su propuesta de objetivos y su contribución a las competencias matemáticas y también enumeran las posibles limitaciones que pueden presentar los escolares en el logro de esas expectativas¹³¹. Asimismo, ejemplifican algunos de esos objetivos y algunas de esas limitaciones con una propuesta de tareas. Finalmente, en la parte relativa al análisis de instrucción, los grupos proponen tareas según distintos grados de complejidad, describen materiales y recursos que pueden emplear en las sesiones y, finalmente describen la secuenciación y la organización general de las diferentes sesiones que conforman su diseño de unidad didáctica.

La segunda parte del documento es la propia secuencia de sesiones. Por lo general, las unidades incluyen entre seis y siete sesiones de clase y, para cada una de estas sesiones, cada grupo incluye la siguiente información: finalidad general, los contenidos y objetivos en los que se centra, las intenciones que orientan la planificación de tareas, el encuadre de la sesión en relación con la anterior y la posterior, y la secuencia y descripción de tareas. Finalmente, los grupos proponen y justifican unos criterios y unos instrumentos de evaluación del aprendizaje de los escolares.

¹³⁰ Este guión está incluido en el Anexo C.

¹³¹ En los capítulos 8 y 9, hemos usado esta versión final del análisis cognitivo para analizar el aprendizaje de los grupos de profesores en formación sobre expectativas y limitaciones. La denominamos producción UD.

La tercera y última parte incluye la valoración final del grupo, en la que hace balance del trabajo realizado en la asignatura y de lo que ha supuesto para sus integrantes ese trabajo. También incluye un listado de referencias y páginas Web empleadas y, finalmente, un anexo en el que se detallan todas las tareas propuestas en la unidad, clasificadas de acuerdo con descriptores como contenidos tratados, sistemas de representación destacados, situaciones mostradas, objetivos y competencias relacionadas y grado de complejidad¹³².

De estas tres partes, para el análisis que realizamos en este capítulo nos centramos en dos de ellas, tal y como indicamos a continuación.

1.2 Momentos de Análisis de Tareas Matemáticas Escolares

El análisis del trabajo de los grupos de futuros profesores sobre el diseño y selección de tareas matemáticas escolares, lo vamos a concretar en tres perspectivas, que tienen lugar en momentos diferentes, y cuyas fuentes de información se encuentran en distintas secciones de la unidad didáctica.

Nuestra primera perspectiva asume como fuente de información para el análisis que realiza el conjunto de tareas propuesto por los grupos, para concretar y ejemplificar algunos de los objetivos enunciados en el análisis cognitivo previo y su relación con las competencias matemáticas. Este análisis se completa con otra actividad de clase que los grupos realizan en la sesión 43, centrada también en la relación entre objetivos y tareas. Este primer momento de análisis lo denominamos *análisis del diseño y selección de tareas escolares vinculadas a expectativas*.

La fuente de información en la segunda perspectiva de análisis la constituye el conjunto de tareas relacionadas con una o varias de las limitaciones del aprendizaje propuestas por los grupos, efectuada también durante el análisis cognitivo. Este segundo momento de análisis lo denominamos *análisis del diseño y selección de tareas escolares vinculadas a limitaciones*.

Por último, en un tercera perspectiva, analizamos como fuente de información el anexo de tareas propuestas por los grupos en sus documentos. Interesa realizar un estudio cuantitativo de los objetivos y competencias más frecuentes en cada propuesta. Nos referimos a este tercer momento de análisis como *análisis de la propuesta final de tareas*.

Estas tres perspectivas de nuestro análisis permiten describir el conocimiento desarrollado por los grupos de futuros profesores acerca del diseño y selección de tareas, desde el punto de vista del análisis cognitivo. Asimismo, posibilitan valorar el papel de los organizadores del análisis cognitivo en el diseño de unidades didácticas.

¹³² Hemos reunido esa colección de tareas de los grupos en el Anexo M. Cada tarea, junto con su análisis, la hemos incluido tal cual fue presentada por los grupos en sus documentos. Únicamente asignamos una numeración a cada una, que nos permita contabilizarlas, organizarlas y analizarlas; esa numeración es la que usamos en este capítulo.

2. DISEÑO Y SELECCIÓN DE TAREAS VINCULADAS A EXPECTATIVAS

En las sesiones iniciales del curso¹³³, los futuros profesores trabajan la relación entre tareas y objetivos, pero esa relación no se hace explícita hasta que no se introduce el análisis cognitivo en la asignatura y se describe con detalle. Y hasta que no se presenta su tercer organizador, el relativo a oportunidades para el aprendizaje, los grupos no comienzan a ejemplificar esa relación en sus temas de trabajo.

Desde el inicio del análisis cognitivo, los grupos sólo hacen dos acercamientos puntuales al diseño o selección de tareas, para dar concreción y significado a algunos de los objetivos enunciados por ellos. El primero fue una tarea de clase que realizan en la sesión 43¹³⁴, en el marco del análisis de instrucción. El segundo lo llevan a cabo precisamente en la primera parte de la unidad didáctica, dentro de la descripción del análisis cognitivo. Estos dos acercamientos proporcionan las fuentes de información para un primer momento de análisis sobre tareas matemáticas escolares, al cual dedicamos el resto de este apartado.

2.1 Una Aproximación Intuitiva

En la sesión 43, los formadores cerramos la intervención sobre el papel del error en el aprendizaje de las matemáticas y ejemplificamos una organización de errores y dificultades relacionados con los números naturales. A continuación, introducimos el tercer organizador curricular: las oportunidades de aprendizaje, destacando la relación de las tareas con los objetivos específicos que delimita el profesor.

En la sesión, mostramos tres objetivos enunciados de cada uno de los cuatro temas, extraídos de la última presentación sobre expectativas que realizaron los grupos (P3). A continuación, planteamos la siguiente cuestión:

Considerad los siguientes objetivos específicos de vuestros temas. Diseñad una o dos tareas que contribuyan al desarrollo de alguno(s) de ellos, y señalad en la línea de qué competencias están esas tareas.

Los objetivos que propusimos son los que recoge la Tabla 92.

Los grupos de futuros profesores trabajan en clase durante aproximadamente diez minutos. Dado que la sesión acaba en ese momento, no hay tiempo para comentar los resultados. Los formadores recogen las propuestas de los grupos, que mostramos y analizamos a continuación. Aunque todos los grupos proponen una tarea, sólo ECU y FRA especifican explícitamente objetivos y sólo ECU, además, competencias relacionadas.

¹³³ Esas sesiones están descritas y analizadas en el capítulo 7.

¹³⁴ Su descripción detallada figura en el Anexo D.

Tabla 92
Objetivos propuestos a los grupos en la sesión 43

ECU

1. *Estudio de las ecuaciones mediante el uso de tablas de valores*
 2. *Obtener la solución general de una ecuación de primer grado con dos incógnitas, previo a la resolución de sistemas*
 3. *Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación*
-

FRA

4. *Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y denominador de una fracción*
 5. *Identificar, clasificar y relacionar las fracciones y los decimales. Usando distintos métodos, formas de representación y materiales o herramientas tecnológicas*
 6. *Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana*
-

PRO

7. *Comprender y usar la regla del producto*
 8. *Interpretar con actitud crítica la información probabilística recibida a través de los medios de comunicación y en la vida cotidiana*
 9. *Clasificar un experimento compuesto en los contextos a los que corresponda*
-

RAZ

10. *Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad*
 11. *Identificar a partir de una gráfica si dos magnitudes están en relación directa o inversa*
 12. *Determinar la función asociada a una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes*
-

Propuesta del Grupo Ecuaciones

El grupo ECU enuncia la siguiente tarea:

Dada la ecuación $2x+5=3x+2$. Resolverla gráficamente, ayudándote de la tabla de valores asociadas a las funciones $y=2x+5$, $y=3x+2$ para la gráfica. Explica el significado de dicha técnica de resolución.

Relaciona esta tarea con los objetivos 1 y 3 de la Tabla 92, además de vincularla con las competencias de *representar*, *comunicar* y *utilizar el lenguaje simbólico*.

La tarea tiene un enunciado complejo, en la que se pide al escolar que siga un método de resolución específico y que luego explique “el significado” de ese procedimiento. Está claramente vinculada con el objetivo 3, pero su relación con el 1 es imprecisa. Las tablas de valores son un paso intermedio para la

representación ya que, evaluando sólo una pareja de valores, es posible obtener las rectas correspondientes. En cuanto a las competencias, parece evidente destacar *representar* y, dado que la tarea pide una explicación de un procedimiento seguido, también surge *comunicar*. Pero no es evidente lo que el escolar debe explicar, para que ese vínculo sea fuerte. La relación con *utilizar el lenguaje simbólico* es inapropiada, ya que el grueso del trabajo se centra en el sistema de representación gráfico.

Propuesta del Grupo Fracciones

El grupo FRA enuncia la siguiente tarea:

Sigue el camino relacionando las diferentes nociones (partiendo de la flecha)

$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{5}$
0.5		un medio
$\frac{1}{3}$	0.75	
	$\frac{3}{2} + 1$	$\frac{3}{2} - 1$

El grupo FRA relaciona su tarea con los objetivos 4 y 5 de la Tabla 92, pero no señala ninguna competencia vinculada. De esos dos objetivos, la asignación parece razonable para el 5, pero no para el 4. El objetivo 5 se centra en relaciones entre fracciones y decimales usando distintos métodos y, aunque sólo aparecen dos decimales en el tablero, realmente se trata de que los escolares relacionen diferentes formas de representar la fracción $\frac{1}{2}$ (forma fraccionaria, parte de un todo, decimal, forma geométrica, verbal, parte de un conjunto discreto y como resultado de operaciones). Sin embargo, la tarea no parece acertada para que los escolares exploren diferentes interpretaciones del numerador y denominador de una fracción. Como veremos más adelante, este objetivo fue central en la planificación de la unidad didáctica del grupo FRA, por lo que generó un considerable número de tareas vinculadas a él.

Propuesta del Grupo Probabilidad

La tarea que propuso el grupo PRO tenía un enunciado confuso:

n alumnos

Se reparten 3n papeletas, a 1€

Se da un premio de $n/2$ € al que gane

Calcular la probabilidad de ganar de cada alumno.

La “lotería” es siempre rentable a partir de n papeletas vendidas.

Si n es muy grande bajo el precio de las papeletas, así que me sale rentable con mucho menos.

Da la impresión que el grupo estaba planteando una tarea elaborada y que, con las últimas sentencias, simplemente indicaba posibles desarrollos de ésta. En realidad, no se vincula directamente con ninguno de los tres objetivos señalados, si bien es posible que la idea del grupo fuera ir en dirección del octavo.

Propuesta del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ tampoco vincula explícitamente su tarea con los objetivos listados, ni con las competencias matemáticas. Su enunciado es el siguiente:

Identifica si las siguientes magnitudes están en relación de proporcionalidad y di si es directa o inversa:

- *Nº de litros que echa un grifo por minuto y tiempo que tarda en llenarse una bañera.*
- *Nº de dientes y edad de una persona.*
- *Nº de kilos de naranjas y precio.*

La tarea tiene dos partes (decidir si existe relación de proporcionalidad y comprobar de qué tipo es). La primera de ellas la relaciona de manera evidente con el objetivo 10 y, en cierta medida, la segunda lo hace parcialmente con el objetivo 12. Añadiendo un cuarto punto en los ejemplos, en los que la relación entre magnitudes se mostrara gráficamente, la tarea también contribuiría al objetivo 11.

Si valoramos las respuestas de una manera conjunta, podemos comprobar que los grupos ECU, FRA y RAZ dan una respuesta satisfactoria al establecer alguna relación entre tareas y objetivos, aún cuando RAZ no la hace explícita. Interpretamos que el grupo PRO no finaliza su propuesta, por lo que es difícil hacer una valoración objetiva de su tarea. En cuanto a la vinculación con las competencias, sólo ECU la menciona pero, como hemos visto, no muy acertadamente. De este primer acercamiento podemos concluir, de manera general, que los grupos relacionan bien objetivos con tareas y que, en los enunciados de éstas, varios de ellos ponen de manifiesto un esfuerzo por considerar distintas representaciones de las nociones involucradas e introducir diferentes tipos de situaciones distintas de las puramente matemáticas.

En la unidad didáctica, todos los grupos hacen una nueva aproximación al diseño y selección de tareas según las expectativas que éstas pueden promover. Para abordar el análisis de las respuestas de los grupos, primero nos centramos en el vínculo de las tareas con los objetivos y, a continuación, exploramos la asignación hecha a las competencias. A esos dos aspectos dedicamos los siguientes dos apartados.

2.2 Tareas Vinculadas a Objetivos Específicos

En la primera parte de la unidad didáctica, después de presentar los objetivos específicos y su vinculación con las competencias matemáticas, los grupos abordan la siguiente cuestión:

Elegir 2 o 3 objetivos especialmente significativos en la unidad didáctica y enunciar contenidos y tareas adecuados para su desarrollo. Se justificará la selección de las tareas mediante su relación con los objetivos (y competencias).

Describimos y analizamos las respuestas de los grupos por separado y al final, hacemos un balance conjunto de las mismas.

Objetivos y Tareas del Grupo Ecuaciones

El grupo ECU seleccionó dos objetivos y propuso una tarea para cada uno de ellos. Ninguna de las dos tareas fue posteriormente usada en las sesiones de la unidad didáctica. Los objetivos seleccionados fueron¹³⁵:

43. Diferenciar ecuación e identidad dada una lista de ellas, y argumentar qué ecuaciones son de primer grado.

15. Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado, y posteriormente, comprobar si la/s solución/s se ajustan al contexto del problema.

El grupo seleccionó como objetivos significativos dos enunciados singulares, ya que el primero no fue introducido hasta la unidad didáctica, mientras que el segundo lo mantuvo en su propuesta desde la primera producción sobre expectativas (P1).

La tarea propuesta para desarrollar el primero de los objetivos, el número 43, es la siguiente [UD_ECU, 43]:

Tarea 23

Dada las siguientes igualdades decidir justificadamente cuáles son identidades y cuáles no.

$$\begin{array}{lll} a) 3x - 4 = -1, & b) 2(x + 3) = 2x + 6, & c) 2x + 5x = 7x, \\ d) 4x + 5 - 3x + 2 = x + 7, & e) 3x - 6 + 15 = 2x + 25. \end{array}$$

El grupo no argumentó la vinculación entre el objetivo 43 y la tarea 23, ni en el documento escrito de la unidad didáctica, ni en su presentación de la misma en clase. En cualquier caso, la concreción del objetivo es tal que la tarea es ejemplo de lo que expresa. Es difícil pensar en una tarea, significativamente distinta de ésta, que esté en relación con lo enunciado por el objetivo.

La segunda tarea propuesta por el grupo, se basa en los enunciados clásicos que relacionan edades de diferentes personas (Loc. cit.):

¹³⁵ La numeración de los objetivos proviene del sistema de organización de objetivos que presentamos en el capítulo 8 y que figura en el Anexo F.

Tarea 24

Un padre tiene el triple de edad que su hijo. Dentro de 10 años la edad del padre será doble de la del hijo ¿Cuál es la edad de ambos?

Esta tarea responde, también de manera evidente, al objetivo 15. Este objetivo, como ya hemos dicho, es uno de los pocos que el grupo mantuvo en todas sus producciones. Siempre lo valoró con importancia y, como muestra este ejemplo y veremos más adelante, dispone de un nutrido número de ejemplos de este tipo de tareas.

El enunciado de tareas por este grupo para los objetivos elegidos es correcta, pero no se justifica explícitamente los criterios en que se basa su elección.

Objetivos y Tareas del Grupo Fracciones

El caso del grupo FRA es diferente al de ECU y al resto, ya que es el único que describe los criterios de selección que siguen.

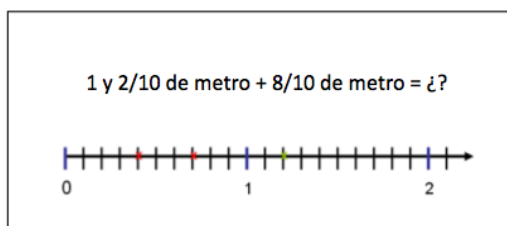
Comienza seleccionando dos objetivos específicos:

1. Comprender los distintos conceptos de fracciones.
29. Enunciar y resolver problemas aditivos con fracciones en diferentes situaciones.

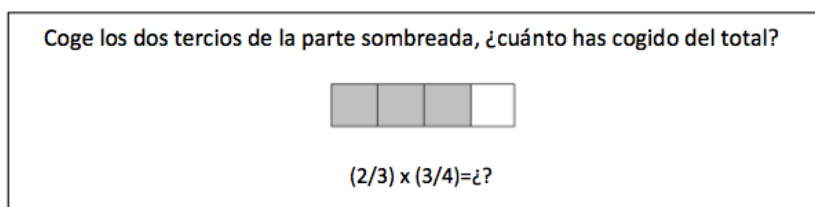
Para cada uno de ellos propone dos tareas. Las dos primeras, relacionadas con el objetivo 1, no las emplea posteriormente en la unidad didáctica, mientras que las dos relacionadas con el enunciado 29, sí aparecen en el listado de tareas para casa, posteriores a la quinta sesión de la unidad.

Las tareas relacionadas con el primero de los objetivos, son las siguientes [UD_FRA, 44]:

Tarea 43



Tarea 44



El grupo FRA justifica la elección de las tareas 43 y 44 en que, según muestran en su análisis de contenido, algunos de los significados (interpretaciones) del concepto de fracción pueden “conducir, de una forma más natural, al concepto de determinadas operaciones” (Loc. cit.). De esta manera, argumenta el interés de

ambas tareas:

Así, en el aspecto medida caracterizado a través de la relación parte-todo, los conceptos de suma y resta de fracciones, encuentran su interpretación más natural. Podemos utilizar el modelo de la Recta Numérica para vincular las interpretaciones parte-todo, medida y fracción como número.

(...) Por otra parte el concepto de multiplicación y división de fracciones viene vinculado con más naturalidad a la interpretación operador. El carácter funcional de la multiplicación/división, hace que la interpretación de las fracciones más estructuralista (algebraica) les proporcione el contexto adecuado. (Loc. cit.)

Esta justificación, aunque se fundamenta en la estructura matemática del tema, refleja sobre todo una orientación metodológica, que sostiene que determinados significados y representaciones del concepto de fracción facilitan o conducen el aprendizaje de determinadas operaciones. Las tareas, por lo tanto, no persiguen que el alumno comprenda esos diferentes significados, sino que comience a aplicar los algoritmos de las operaciones básicas en diferentes situaciones.

En el capítulo 8 hemos descrito que este fue un objetivo muy comentado en clase, por el gran número de actuaciones que tienen cabida en su enunciado (§8.2). A pesar de eso, el grupo lo mantuvo en su propuesta como primer objetivo desde la primera producción hasta la unidad didáctica. El hecho de que lo consideren significativo dice mucho acerca de la importancia asignada por el grupo a los diferentes significados del concepto de fracción¹³⁶; como veremos más adelante, es un objetivo que se menciona en casi la totalidad de sesiones diseñadas por el grupo. No obstante, lo amplio de su significado puede llevar a relacionarlo con un gran número de tareas.

Las dos tareas propuestas para el segundo objetivo, son problemas que se resuelven con operaciones aditivas entre fracciones [UD_FRA, 37]:

Tarea 30

Para elaborar una tarta Cristina ha utilizado dos paquetes de harina completos y $\frac{1}{4}$ de otro, y Elena ha utilizado tres paquetes completos y $\frac{2}{3}$ de otro. ¿Cuántos paquetes de harina han gastado en total entre ambas?

Tarea 32

Un paseante recorre en la primera hora $\frac{3}{7}$ del camino; en la segunda, $\frac{1}{4}$ del camino, y en la tercera hora, el resto. ¿En cuál de las tres horas ha caminado más deprisa?

También en esta ocasión, la justificación del grupo se centra en consideraciones metodológicas del profesor sobre la conveniencia de diferentes tipos de tareas para promover el aprendizaje de los escolares:

En estos ejemplos se justifican los algoritmos de suma y resta a través de una

¹³⁶ Como vimos en el capítulo 5, estos significados organizan la estructura conceptual del tema, tal y como la desarrolló el grupo en el análisis de contenido (Figura 20).

situación concreta. La realización de ejercicios pretende que los niños cojan práctica en realizar cuentas. Mientras que en estas situaciones se proporcionan problemas verbales con posterioridad como aplicación.

Llegado este momento, el planteamiento resulta claro y puede inducir a pensar: “Si los niños identifican la cuenta necesaria para resolver el problema, como ya tienen práctica en el manejo del algoritmo, entonces no habrá ninguna dificultad”.

Desde nuestra perspectiva, la utilización de problemas proporciona los contextos necesarios para conceptualizar los procedimientos en el cálculo con las fracciones. (Loc. Cit.)

A pesar de que en la tarea 32 se introduce también el concepto de orden, la relación de ambas tareas con el objetivo es evidente, ya que en el mismo se detalla el proceso de resolución por parte del escolar. Sin embargo, el argumento del vínculo hubiera sido más acertado si se hubiera centrado en que los escolares conceptualizaran los procedimientos algorítmicos.

Objetivos y Tareas del Grupo Probabilidad

En el caso del grupo PRO, no aporta ningún argumento a la vinculación entre los objetivos elegidos y las tareas enunciadas. Elige tres objetivos, uno por cada uno de los focos de contenido delimitados, que son los siguientes:

1. Determinar y proponer de forma argumentada el espacio muestral de un experimento aleatorio.
7. Comprender y usar la regla de Laplace.
4. Distinción de sucesos dependientes e independientes.

Las tareas, una para cada objetivo, son las siguientes [UD_PRO, 21-22]:

Tarea 2. Espacio muestral. Sucesos

Describe experimentos aleatorios cuyos espacios muestrales se correspondan con los apartados siguientes:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$\Omega = \{1, X, 2\}$$

$$\Omega = \{(cara, oros), (cara, copas), (cara, espadas), (cara, bastos), (cruz, oros), (cruz, copas), (cruz, espadas), (cruz, bastos)\}.$$

Tarea 38

Dos amigos están jugando a las cartas. Jaime dice: “la próxima carta que extraiga será un rey” y Alfredo dice: “será figura”. ¿Cuál de los dos tiene mayor probabilidad de acertar?

Tarea 30. Dado un dado...

En el experimento aleatorio “lanzar un dado de 6 caras”, considera los sucesos: $A = \{\text{sacar } 6\}$ y $B = \{\text{sacar par}\}$.

- a) *Explica con tus palabras si crees que se trata de sucesos dependientes o*

independientes.

b) Comprueba tu respuesta calculando las probabilidades $P(A\setminus B)$ y $P(B\setminus A)$ y comparándolas con $P(A)$ y $P(B)$.

De las tres tareas propuestas, la primera y la tercera aparecen en el desarrollo de las sesiones del grupo (la tarea 2, con un apartado más, en la primera sesión; la tarea 30, en la quinta), mientras que la número 38 no la emplea.

La primera tarea está claramente relacionada con el objetivo 1, pero con un matiz interesante. La tarea propone describir experimentos aleatorios dados algunos ejemplos de espacios muestrales y el objetivo señala el proceso inverso: dado un experimento, obtener el espacio muestral asociado. La tarea es innovadora en ese sentido, ya que no es muy habitual en el inicio del tema de probabilidad.

El vínculo entre la tarea 38 y el objetivo 7, también es evidente. Aunque con un lenguaje algo sofisticado para ir dirigida a escolares, el enunciado conduce a la aplicación de la regla de Laplace. Algo similar ocurre entre el segundo apartado de la tarea 30 y el objetivo 4. La relación es también clara, pero en este último ejemplo, la tarea va más allá y plantea el cálculo explícito de algunas probabilidades concretas.

Las tareas enunciadas para los objetivos elegidos son correctas y acertadas, mas en ninguno de los casos se justifica el criterio de elección.

Objetivos y Tareas del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ propuso, al igual que ECU y FRA, también dos objetivos pero, en su caso, ejemplificó cada uno de ellos con cuatro y dos tareas, respectivamente. Los objetivos son los siguientes:

1. Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad.
10. Dadas dos cantidades, determinar el porcentaje aplicado a una de ellas para obtener la otra.

Los enunciados de las tareas vinculadas con el objetivo 1 son los siguientes [UD_RAZ, 26-27]:

Tarea 5

Justificar si existe relación de proporcionalidad entre las magnitudes que se expresan, y en tal caso, determinar la constante de proporcionalidad y completar el dato que se pide.

MAGNITUDES

La distancia entre dos pueblos en un mapa es 5cm y en la realidad 12km

El peso de un niño de 8 años es 35kg

Marta cobra 18€ por trabajar 3 horas.

Cuatro amigos van al cine y pagan 22€ en total

La altura de una planta con 7 meses es 20cm.

Cte COMPLETAR

¿Cómo hay que representar en el mapa dos pueblos que distan 26km?

¿Cuánto pesará el niño cuando tenga 20 años?

¿Cuánto cobraría si trabajase 5 horas?

¿Cuánto les habría costado si hubiesen ido 6 amigos?

¿Cuánto medirá la planta a los 2 años?

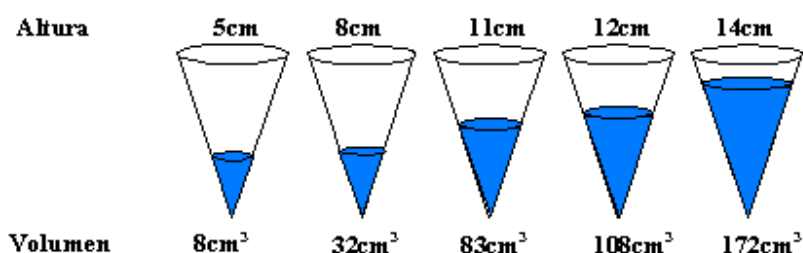
Tarea 47

De las siguientes tablas de valores, di cuáles corresponden a una proporcionalidad directa:

2	7	3	3	4	-7	4	12	10
3	10'5	2	6	-8	14	3	9	7'5
2	7	3	-3	4	-7	-3	4	-7
7	12	8	15	-20	35	-5'5	1'5	-9'5

Tarea 48

Vertemos diferentes cantidades de agua en un vaso cónico. En cada vertido medimos la altura del agua y su volumen:



¿Es el volumen directamente proporcional a la altura?

Tarea 58

- a) La ración individual de un cuartel (de provisión fija) y el número de soldados. ¿Son inversamente proporcionales?
- b) El número de vestidos que se puede cortar de una tela y la cantidad de tela por vestido. ¿Es rigurosamente cierta esta proporcionalidad?
- c) El tiempo que tarda en llenarse un depósito depende del ancho, del alto y del largo del mismo, de la sección del caño que lo llena y de la

velocidad del líquido que pasa por este caño. Indica las magnitudes que son directamente proporcionales y las que son inversamente proporcionales al tiempo.

De estas cuatro tareas, sólo una de ellas es usada por el grupo en sus sesiones de clase. Es la tarea 5 y la emplea en la segunda sesión. Las otras tres y las dos vinculadas con el objetivo 10, no las utiliza en la unidad didáctica.

Es obvio que las tareas contribuyen al logro del objetivo 1 e incluso van más allá, ya que introducen varias situaciones (personales, públicas y científicas) y diferentes sistemas de representación (verbal, numérico). Además, en el caso de la primera propuesta (tarea 5), el escolar debe hallar también la constante de proporcionalidad y en la mayor parte de ellas se pide algún tipo de justificación a las respuestas. Como veremos en el cuarto apartado de este mismo capítulo, este grupo fue con diferencia, el que más tareas diseñó y seleccionó y, por esta razón, es normal que encuentre muchos ejemplos de tareas para objetivos significativos de su unidad didáctica.

El segundo objetivo, por el contrario, es mucho menos ambicioso y se centra en un aspecto técnico con porcentajes. El grupo en este caso propone dos tareas, que finalmente no emplea en el desarrollo de las sesiones [UD_RAZ, 27]:

Tarea 63

¿Qué porcentaje de descuento me ha hecho si por un artículo que costaba 200€ he pagado 160€?

Tarea 64

De 3,54 gramos de pirita se obtienen 1,2 gramos de hierro. Halla el porcentaje de hierro presente en la pirita.

Ambas tareas están totalmente vinculadas con el objetivo 10, proponiendo cada una de ellas el cálculo de un porcentaje específico y distinto en cada caso. Son problemas sencillos de los que, como hemos dicho antes, el grupo tiene un amplio repertorio (ver apartado 4 del Anexo M).

Balance del Trabajo de los Grupos sobre Tareas y Objetivos en la Unidad Didáctica

La selección o el diseño de tareas de acuerdo a unos objetivos específicos es, en general, acertada para cada uno de los grupos de futuros profesores. El grupo ECU propone dos tareas que claramente pueden contribuir al desarrollo de los dos objetivos marcados. En el caso del primero de ellos, su excesiva concreción hace que el rango de tareas posibles sea muy restringido. Los grupos PRO y RAZ seleccionan, respectivamente, dos y tres objetivos mientras que proponen también, respectivamente, tres y seis tareas vinculadas a ellos. Todas las tareas están bien relacionadas con los objetivos correspondientes, si bien la primera tarea del grupo PRO destaca una acción inversa respecto a lo que señala el primero de sus objetivos.

El grupo FRA, es el único que propuso dos tareas que no están relacionadas con el objetivo señalado de manera directa. Aunque justifican su decisión en la conveniencia de emplear determinados significados de las fracciones para introducir algunas operaciones, las tareas no persiguen que los escolares “comprendan” esos significados; se centran, fundamentalmente, en el significado de las operaciones. Es el único de los cuatro grupos que aporta argumentos fundados que justifican su selección de tareas.

En varias tutorías, los grupos reconocen que no les resulta complicado localizar o seleccionar tareas vinculadas a objetivos, ya que los libros de texto e Internet suministran un abanico amplio. Siempre destacan que es más complejo delimitar y enunciar los objetivos, que la selección posterior de tareas.

A continuación analizamos el vínculo que establecen entre estas mismas tareas y las diferentes competencias matemáticas PISA.

2.3 Vinculación de las Tareas a las Competencias Matemáticas

Salvo el grupo de Probabilidad, los otros tres grupos, indican, junto a su propuesta de tareas, cuál o cuáles de las ocho competencias PISA se pueden promover con cada una de ellas. La consideración de los grupos a la vinculación previamente establecida entre objetivos y competencias es dispar. En algunos casos, aluden a las competencias que tiene asignadas el objetivo correspondiente pero, en otros, esa asignación es independiente.

Vinculaciones Consideradas por el Grupo Ecuaciones

En la Tabla 93 recogemos las vinculaciones realizadas por el grupo ECU entre objetivos, competencias y tareas. En la primera columna, señalamos los objetivos de la unidad didáctica seleccionados por el grupo y, en la segunda, las competencias con las que vincula esos objetivos¹³⁷. La siguiente columna indica numéricamente las tareas enunciadas en el epígrafe anterior y, en la última, mostramos las competencias con las que el grupo relaciona expresamente cada una de ellas.

Tabla 93

Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo ECU

Objetivos	Competencias vinculadas al objetivo	Tareas	Competencias vinculadas a la tarea
43	PR, AJ, LS	23	AJ
15	C, M, RP, R, LS	24	M, RP, LS

El grupo ECU, vinculó de manera justificada el objetivo 43 con las competencias *argumentar y justificar* y *utilizar el lenguaje simbólico*; la presencia de *pensar* y

¹³⁷ La justificación de las asignaciones entre objetivos y competencias que empleamos aquí, las analizamos y describimos en el capítulo 8 (§8.5.1). Esas asignaciones las fundamentamos en los descriptores de cada competencia, que recogemos en la Tabla 68 de ese mismo capítulo.

razonar, por el contrario, no es evidente. Una tarea como la número 23, realmente promueve actuaciones cercanas a las dos primeras competencias, si bien el grupo sólo destaca una de ellas.

El objetivo 15, mucho más ambicioso y complejo, fue asociado por el grupo con cinco competencias y, salvo *comunicar*, el resto se relacionan con acierto con ese enunciado. Pero la tarea 24 no está especialmente elaborada. El vínculo con la competencia *plantear y resolver problemas* es claro, sobre todo porque la tarea admite varias vías de resolución posibles. La competencia *modelizar* es mucho más compleja que lo que propone el problema y la presencia de *utilizar el lenguaje simbólico*, está subordinada a un método de resolución algebraico.

Vinculaciones Consideradas por el Grupo Fracciones

Los datos de las cuatro tareas propuestas por el grupo FRA, están recogidos en la Tabla 94.

Tabla 94

Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo FRA

Objetivos	Competencias vinculadas al objetivo	Tareas	Competencias vinculadas a la tarea
1	PR, C	43	PR, R, LS
		44	PR, R, LS
29	PR, M, RP	30	PR, M, RP
		32	PR, M, RP

Las asignaciones del objetivo 1 están justificadas en el caso de la competencia *pensar y razonar*, pero el enunciado no recoge ninguno de los descriptores de *comunicar*. Sin embargo, cuando el grupo propone la tareas 43 y 44 para ejemplificar ese objetivo, las relaciona con las competencias *pensar y razonar*, *representar y utilizar el lenguaje simbólico*.

Esta discordancia proviene, desde nuestro punto de vista, de la generalidad con la que el grupo enuncia el objetivo. Detrás de una actividad mental como “comprender”, tienen cabida muchas actuaciones que pueden realizar los escolares y es fácil ejemplificar tareas que, partiendo de tales actuaciones, contribuyan al desarrollo de prácticamente cualquiera de las ocho competencias matemáticas. En el caso de las tareas 43 y 44, su relación con las competencias *pensar y razonar* y *representar* es más acertada que con *utilizar el lenguaje simbólico*.

El objetivo 29 tiene más precisión y riqueza que el anterior, pero la justificación acertada de sus vínculos con las diferentes competencias se limita al caso de *plantear y resolver problemas*. Las tareas asociadas a ese objetivo, numeradas como 30 y 32, están correctamente vinculadas a esa última competencia, ya que la organización de datos, la selección de la operación que lo resuelve o su

ejecución, son fases claras en la resolución de problemas. Las competencias *pensar y razonar* y *modelizar* no responden a criterio justificado.

Vinculaciones Consideradas por el Grupo Probabilidad

El grupo PRO propuso tres tareas, una para cada uno de los tres objetivos señalados. Pero no vinculó esas tareas con las competencias matemáticas, por lo que en la Tabla 95 sólo señalamos las asignaciones realizadas entre objetivos y competencias en su unidad didáctica.

Tabla 95

Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo PRO

Objetivos	Competencias vinculadas al objetivo	Tareas	Competencias vinculadas a la tarea
1	PR, AJ, C	2	
7	PR, AJ, RP	38	
4	PR, C, LS	30	

En el capítulo 8 (§8.5.1), analizamos la bondad de las asignaciones entre objetivos y competencias realizadas por el grupo PRO, poniendo de manifiesto cómo estaba justificada la relación del objetivo 1 con las competencias *argumentar y justificar* y *comunicar*; el objetivo 7 con *pensar y razonar* y *plantear y resolver problemas*, mientras que sólo la asignación de la competencia *utilizar el lenguaje simbólico* al objetivo 4, estaba suficientemente justificada.

Desde nuestra propia reflexión, la tarea 2, está estrechamente vinculada con los descriptores de la competencia *comunicar*; la tarea 38 se acerca, aunque de manera aproximada, a *plantear y resolver problemas*, mientras que la tarea 30, la vinculamos con las competencias *comunicar* y *utilizar el lenguaje simbólico*. Aunque este análisis es nuestro, inferimos que la selección de tareas es coherente con la asignación que el grupo hizo entre objetivos y competencias.

Vinculaciones Consideradas por el Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ propuso cuatro tareas relacionadas con el primero de los objetivos seleccionados y dos con el segundo. Los diferentes vínculos los recogemos en la Tabla 96.

En la relación con el primer objetivo, es llamativo el hecho de que cuando lo relacionan con las competencias, no consideran *utilizar el lenguaje simbólico* como una de ellas, cuando sí lo destacan posteriormente en tres de las cuatro tareas que el propio grupo elige para mostrar el objetivo. Además, desde nuestro análisis, su vinculación con las tareas 5 y 47 es acertada, ya que esa competencia se relaciona con el hecho de aplicar fórmulas y rutinas numéricas, lo cual es patente en ambas.

Este ejemplo sirve como muestra de que, al establecer vínculos entre objetivos y competencias, se pueden producir carencias cuya detección y corrección resulta

fácil al concretar en una o varias tareas el desarrollo del objetivo. El enunciado de tareas contribuye a precisar los criterios y mejorar los vínculos entre objetivos específicos y competencias.

Tabla 96

Vinculaciones entre objetivos específicos, competencias y tareas del grupo RAZ

Objetivos	Competencias vinculadas al objetivo	Tareas	Competencias vinculadas a la tarea
1	PR, AJ, RP	5	PR, AJ, C, RP, LS
		47	PR, AJ, LS
		48	PR, RP, LS
		58	PR, AJ
10	RP, LS	63	PR, M, RP
		64	PR, M, RP

Siguiendo con la tarea 5, el profuso listado de competencias propuesto por el grupo, puede llegar a desvirtuar la actuación del escolar que un profesor desea promover con esta tarea. Además de la competencia ya citada, el vínculo con *argumentar y justificar* es también evidente pues el propio enunciado lo indica. El resto tiene una relación sólo tangencial (*plantear y resolver problemas*) o nula (*pensar y razonar, comunicar*). La misma reflexión sirve para la tarea 47, en la cual sólo destaca la competencia *utilizar el lenguaje simbólico*, ya que no hay evidencias que la vinculen con otras.

Las tareas 48 y 58 también adolecen de criterio que justifique su relación con la competencia *pensar y razonar*. La primera de ellas parece evidente que puede contribuir al desarrollo de la competencia *plantear y resolver problemas*, mientras que la segunda es cercana a *argumentar y justificar*.

La propuesta de tareas para el objetivo 10, proporciona ejemplos de ejercicios sencillos de aplicación directa de porcentajes, por lo que el vínculo más claro vuelve a darse con la competencia *utilizar el lenguaje simbólico*. De hecho, esa es la única asignación justificada entre este objetivo y las competencias enumeradas. Hablar de *plantear y resolver problemas* e incluso de *modelizar*, resulta improbable para ese tipo de tareas.

Balance del Trabajo de los Grupos sobre Vinculaciones consideradas entre Tareas y Competencias en la Unidad Didáctica

En la Tabla 97 recogemos, para cada una de las competencias matemáticas, el total de asignaciones vinculadas por los grupos ECU, FRA y RAZ con las doce tareas propuestas en la unidad didáctica, así como el número de estas asignaciones que quedan justificadas según los descriptores de las competencias.

La competencia *pensar y razonar* es aquella que tiene mayor frecuencia de asignaciones, seguida de *plantear y resolver problemas* y *utilizar el lenguaje*

simbólico. Las menos citadas son *representar*, *comunicar* y *emplear herramientas tecnológicas*, competencia ésta que no es mencionada por ninguno de los grupos. En el apartado cuarto de este mismo capítulo, analizamos la presencia de las diferentes competencias, en el conjunto de todas las tareas propuestas por los cuatro grupos en sus unidades didácticas.

Tabla 97

Asignaciones totales y asignaciones justificadas de las tareas a las competencias

PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Asignaciones totales							
10	4	1	5	7	2	6	0
Asignaciones justificadas							
2	3	0	0	4	2	2	0

Pero el número de asignaciones justificadas, en el caso de *pensar y razonar*, sólo llega a un 20% del total, lo que pone de manifiesto algo que ya detectamos y describimos anteriormente (§8.5.2). Esta competencia parece considerada por los grupos de futuros profesores como un comodín válido para todo tipo de objetivos y ahora, también, para cualquier tipo de tareas. Su significado resulta impreciso, pero no tanto como el de *modelizar*. Esta competencia no genera ni una sola asignación bien justificada; los grupos tienden a confundir la modelización con la resolución de problemas y carecen de criterios para distinguir ambas. Eso se constata ya que, en muchas ocasiones, los grupos citan las dos simultáneamente junto a un mismo objetivo o a una misma tarea. *Comunicar* tampoco queda justificada en la sola asignación recibida.

La competencia *utilizar el lenguaje simbólico* obtiene un bajo porcentaje de asignaciones justificadas (algo más de un 33%), a pesar de que es una de las más referidas por los grupos en todas sus producciones (§8.5.2). En otro extremo están *plantear y resolver problemas* (más de un 57%), *argumentar y justificar* (75%) y *representar* (100%) con dos asignaciones bien justificadas.

3. DISEÑO Y SELECCIÓN DE TAREAS VINCULADAS A LIMITACIONES DEL APRENDIZAJE ESCOLAR

Tras la ejemplificación de tareas según expectativas, en la unidad didáctica los grupos también describen limitaciones en el aprendizaje relacionadas con los temas de trabajo¹³⁸. A continuación, seleccionan algunas de esas limitaciones y proponen algunas tareas para detectar o tratar esas limitaciones.

¹³⁸ La descripción y el análisis de esas limitaciones los hemos realizado en el capítulo 9.

En este apartado abordamos el análisis de esas tareas y, para ello, estudiamos las propuestas de cada grupo de manera individual, para realizar por último un balance conjunto.

3.1 Tareas Propuestas por los Grupos

Esta sección de la unidad didáctica, centrada en ejemplificar tareas desde algunas de las limitaciones en el aprendizaje enunciadas, presenta distintos tipos de respuestas por parte de los grupos. Veamos por separado cada uno de estos acercamientos.

Limitaciones y Tareas del Grupo Ecuaciones

El grupo ECU siguió inversamente las instrucciones del guión de la unidad didáctica. Seleccionó dos tareas y, para cada una de ellas, señaló las limitaciones que podrían detectarse en los escolares mientras abordasen su resolución. A continuación, indica algunas sugerencias para tratar ese tipo de limitaciones en el aprendizaje, pero ninguna de las dos tareas forma parte de la secuenciación de la unidad didáctica. El enunciado de la primera tarea es el siguiente [UD_ECU, 50]:

Tarea 25

Resolver el siguiente sistema con el método que estimes oportuno:

$$\begin{cases} x + y = -3 \\ -2x + 3y = -1 \end{cases}$$

Esta primera tarea la relaciona con cinco de sus limitaciones, que son las siguientes¹³⁹:

3. Aplicar incorrectamente la regla de la suma.
4. Del mismo modo, se puede errar en la regla del producto.
5. Estos errores influyen también en los sistemas de ecuaciones a la hora de buscar sistemas equivalentes.
17. Quitar paréntesis multiplicando sólo el primer término. También cuando aparece un signo “-” delante de un paréntesis.
9. El alumno puede encontrar soluciones carentes de sentido, en las que se vislumbra una falta de verificación de éstas, o bien, puede ser que se verifiquen las soluciones en pasos intermedios en lugar de el sistema inicial.

En el capítulo 9, hemos clasificado las tres primeras limitaciones como errores relacionados con la aplicación incorrecta de algoritmos y fórmulas; la limitación 17 como error de tipo técnico y el enunciado 9 no lo hemos considerado propiamente como limitación.

La especificidad de los cuatro errores, vinculados a aspectos algorítmicos y técnicos sobre el manejo de expresiones algebraicas, el grupo los relaciona de

¹³⁹ La numeración corresponde con la que hemos introducido en el capítulo 9, para llevar a cabo el análisis de las limitaciones enunciadas por el grupo. Hemos suprimido los ejemplos mostrados junto a cada enunciado; la versión completa se puede consultar en el Anexo H.

manera directa con cualquier tarea en la que ese manejo sea necesario. El caso de la resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones, como el ejemplo de la tarea 25, es uno de ellos. Consideramos, por lo tanto, que la vinculación es correcta, salvo por la introducción del enunciado de la limitación número 9, que no aporta información significativa.

La segunda tarea propuesta es un problema con un enunciado verbal (Loc. cit.):

Tarea 26

En una vasija hay una cantidad desconocida de agua, sacamos 15 litros, y se los añadimos a otra vasija que tiene la misma cantidad de agua. Entonces la segunda pasa a tener tres veces la cantidad de agua que tiene la primera. ¿Cuántos litros había al principio en las vasijas?

En este caso, la limitación relacionada es “8. En la traducción al lenguaje simbólico de enunciados verbales”, y el propio grupo ejemplifica cómo puede presentarse un error de ese tipo en la tarea propuesta [UD_ECU, 50]:

Si el alumno llama “x” a la cantidad de agua que tienen las vasijas al principio, puede interpretar más la expresión “tres veces”, y llegar a la ecuación $x - 15 = 3(x + 15)$, en lugar de, $3(x - 15) = x + 15$.

Tanto en una tarea como en otra, el grupo propone que un modo para que el alumno supere ese tipo de errores, es la práctica continua de tareas similares. En el caso de la tarea 26, el grupo recomienda comenzar con enunciados sencillos y, en ambos casos, destaca que el alumno justifique sus respuestas y defiende el papel del profesor en el seguimiento de los resultados.

Limitaciones y Tareas del Grupo Fracciones

La propuesta del grupo FRA es diferente al resto ya que, en su caso, junto a cada una de las diecinueve limitaciones enunciadas en la unidad didáctica, aporta un ejemplo de cómo puede presentarse, una breve explicación de las causas o una propuesta de tratamiento. Pero en casi ningún enunciado recoge esos tres puntos y en ninguno propone una tarea específica para detectar o tratar la limitación.

Lo único aproximado aparece con motivo de la limitación “11. Existencia de defectos en la comprensión del concepto. Densidad de Q”, en donde proponen dos “cuestiones” para detectar esa limitación [UD_FRA, 39]:

- *Dados 2 racionales, averiguar uno que esté en medio.*
- *Dado 1 racional, encontrar un intervalo de extremos racionales que lo contenga.*

Estos ejemplos de “cuestiones”, provienen literalmente de un comentario de los formadores a la primera propuesta del grupo sobre limitaciones en el aprendizaje [081217S44, 14’25’]:

LR. Una aproximación a la densidad de Q, un paso previo, sería que entre cada dos racionales siempre hay un intermedio. Sería, dados dos racionales, decidme uno que este en medio, sería un objetivo, o dado un racional,

establecer un intervalo, uno mayor y otro menor. Ese podría ser un objetivo que también da lugar a errores.

En ninguna de las sesiones planificadas, enuncian o proponen una tarea dirigida explícitamente a la detección o tratamiento de algún error, dificultad u obstáculo.

Limitaciones y Tareas del Grupo Probabilidad

El grupo PRO sigue dos procedimientos diferentes de organización de su listado de limitaciones al final de la asignatura: uno en la presentación de la unidad didáctica y otro en la documentación escrita sobre la misma. Dado que la ejemplificación de tareas según limitaciones no la muestran en la presentación, restringimos nuestro análisis al documento escrito de la unidad.

En ese documento, las limitaciones se organizan en torno a tres tipos de obstáculos: ontogénicos, epistemológicos y didácticos. Para cada uno de ellos, el grupo realiza una breve descripción de su papel e importancia, así como de la posibilidad de su tratamiento. En el caso de los epistemológicos, además señala un ejemplo específico de tarea y en los didácticos propone una de manera global [UD_PRO, 24]:

En cuanto a los obstáculos ontogénicos (...) una estrategia para subsanarlos podría ser proponer situaciones de contraejemplo, en las que el razonamiento utilizado por el alumno no se cumpla. Por ejemplo, en la “dificultad al describir situaciones en la vida real que se ajusten a unos datos probabilísticos dados”, podemos ir reformando la situación errónea dada por el alumno hasta obtener una que cumpla todos los datos. Así el alumno vería el error como algo usual incluido en el proceso de aprendizaje y no como algo que se debe castigar (...).

Al enfrentarnos a un obstáculo epistemológico, es la dificultad del propio concepto la que hace que el alumno yerre. La introducción a la probabilidad es un tema rico en nuevas definiciones para el alumno y por ello es una fuente de este tipo de errores.

Por ejemplo, en el error “dificultad a nivel intuitivo y deductivo en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado”, podemos proponer tareas como:

Dado el experimento aleatorio “lanzar dos monedas¹⁴⁰”, hallar:

- a) Espacio muestral.*
- b) Dos sucesos seguros y dos sucesos imposibles.*
- c) El suceso contrario a “salir un número menor que dos”.*

Si nos encontramos con un obstáculo didáctico, en primer lugar deberíamos intentar explicar de nuevo la práctica relacionada con ese error de forma distinta a la que explicamos en su momento. A continuación, podemos proponer tareas relacionadas con la vida real que hagan erróneo el proceder

¹⁴⁰ Según lo que el grupo propone en el tercer apartado de la tarea, parece que se refiere a un experimento centrado en el lanzamiento de dados y no de monedas.

del niño. Así, al ser una situación que el alumno domina, se dará cuenta de su error.

En la dificultad “considerar que todas las situaciones son de equiprobabilidad” podemos proponer una tarea relacionada con la meteorología, ya que el alumno está familiarizado con este concepto. Así verá que los sucesos “hacer sol” y “llover” no tienen la misma probabilidad en Asturias, por lo que la situación no es de equiprobabilidad y no podemos aplicar la regla de Laplace.

Esta reflexión del grupo PRO, relaciona las limitaciones con expectativas de aprendizaje de los escolares y con actuaciones del profesor, si bien, como dijimos antes, sólo hay una propuesta de tarea. Esta tarea no se usa en ninguna de las sesiones de clase planificadas y, en el marco de nuestro trabajo, la denominaremos como tarea 39.

En el listado de limitaciones del grupo, la que se relaciona con la tarea 39 (2. dificultad a nivel intuitivo y deductivo en el dominio de los conceptos de suceso seguro, imposible y contrario a uno dado), está desde su primera propuesta y, aunque modificó su enunciado a lo largo de las diferentes producciones, siempre tuvo la misma orientación. En el capítulo 9, clasificamos ese enunciado como una ausencia de conocimiento más que como un error, dificultad u obstáculo. Por tanto, la propuesta de tarea, si bien recoge las nociones sobre probabilidad a las que alude el enunciado de la limitación, no trata de superar una carencia, sino que el escolar ponga en juego un conocimiento adquirido previamente.

Sin embargo, su esbozo de tarea en relación con la limitación “8. considerar que todas las situaciones son de equiprobabilidad”, sí apunta un tipo de actividad del escolar que lo enfrenta a una situación en la que una falsa creencia se pone en entredicho. Ese tipo de tareas son significativas desde el punto de vista del aprendizaje por, precisamente, situar al escolar ante un conflicto cognitivo (Zaslavsky, 2005).

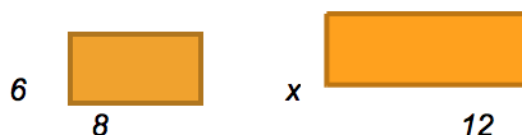
Limitaciones y Tareas del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ sigue un procedimiento similar al del grupo FRA, para presentar sus ejemplos de tareas vinculados a limitaciones del aprendizaje. Cuando en la unidad didáctica presenta su listado de limitaciones, acompaña cada una de ellas “junto a algunos ejemplos en los que se pueden detectar” [UD_RAZ, 28].

De esta manera, para la mayor parte de las veintiuna limitaciones enunciadas, el grupo propone un ejemplo de tarea, junto a su hipotética resolución errónea, que ejemplifica la limitación. Ninguna de las tareas forman parte de las sesiones de clase planificadas en la unidad didáctica. Seleccionamos uno de estos ejemplos para mostrar la relación que expresa el grupo.

Tarea 65

Ejemplo: Estos dos rectángulos guardan la misma forma, pero uno de sus lados es más grande. ¿Cuál es el valor de x ?



$8 + 4 = 12$, luego $x = 6 + 4 = 10$.

El grupo RAZ vincula la tarea 65 con la limitación “32. Uso de estructuras aditivas para resolver problemas en los que interviene la proporcionalidad que, por tanto, requieren un pensamiento multiplicativo”. La hipotética respuesta ilustra muy bien la dificultad enunciada, que en el capítulo 9 clasificamos como asociada a la complejidad de los objetos matemáticos. En algunas otras vinculaciones el criterio no es tan claro, o bien el ejemplo de tarea no se ajusta adecuadamente a la limitación considerada

3.2 Balance del Trabajo de los Grupos sobre Tareas Vinculadas a Expectativas y Limitaciones

En el análisis realizado en este apartado constatamos, por una parte, algunas regularidades comunes a todos los grupos y, por otra, determinadas singularidades para alguno de ellos.

En el capítulo 9, pusimos de manifiesto que las capacidades para organizar y enunciar limitaciones del aprendizaje no son, en general, sencillas para los grupos de profesores en formación. El grupo RAZ fue el que puso de manifiesto estas dificultades más explícitamente; en dos ocasiones, llegó a modificar completamente su propuesta entre dos producciones consecutivas. Sin embargo, el análisis realizado muestra que, una vez que acotan su listado de limitaciones, a los grupos no les resulta complicado localizar tareas que se relacionen con esas limitaciones. Tres de los cuatro grupos seleccionan o diseñan tareas que pueden poner de manifiesto las limitaciones de los escolares.

Por otro lado, el procedimiento para ejemplificar tareas desde las limitaciones, ha sido diferente entre los cuatro grupos de futuros profesores. El grupo ECU parte de las tareas y, a continuación, señala las limitaciones con las que se relaciona; después reflexiona acerca de la posible actuación del profesor para ayudar al escolar a superar esas limitaciones. El grupo FRA enuncia sus limitaciones y justifica, la mayor parte de ellas, en términos de la complejidad del contenido matemático. Este grupo no llega a enunciar propiamente tareas específicas a algunas de esas limitaciones, si bien las analiza con el suficiente detalle como para poder hacerlo. El grupo PRO parte de una reflexión sobre la complejidad de las nociones matemáticas y las ejemplifica en posibles dificultades de los escolares. A continuación, en un caso, ejemplifica una tarea concreta que ilustra esa dificultad y en otro simplemente hace un esbozo de actividad. Finalmente, el grupo RAZ, de modo similar a FRA, propone su listado de limitaciones y, para cada una de ellas, propone una tarea con la hipotética resolución de un escolar, que muestra la limitación a la que se refiere el enunciado.

Las estrategias seguidas por los grupos muestran ciclos diferentes, que podemos resumir en tres pasos en la Tabla 98.

Tabla 98
Pasos en las estrategias seguidas por los grupos para relacionar tareas con limitaciones del aprendizaje

Primer paso	Segundo paso	Tercer paso
ECU		
Listado tareas	Limitaciones asociadas	Actuación del profesor
FRA		
Listado de limitaciones	Complejidad contenido	Criterios para las tareas
PRO		
Complejidad contenido	Ejemplificación de limitaciones	Ejemplo de tarea
RAZ		
Listado de limitaciones	Tarea resuelta por un escolar	Relación de tarea y limitación

Los ciclos muestran que, en todos los casos, la relación entre limitaciones y tareas necesita de un vínculo. En el grupo ECU el vínculo que destaca es el papel del profesor para ayudar al alumno. En el caso de FRA, PRO y RAZ, el vínculo viene dado por la complejidad del contenido matemático que bien se analiza expresamente, o bien se detecta por el trabajo hipotético de un escolar frente a la dificultad establecida. Comenzar por las limitaciones supone una reflexión sobre complejidad del conocimiento matemático que luego se ejemplifica en las tareas. Comenzar por las tareas lleva a una reflexión sobre el trabajo del profesor en el aula.

Por lo general, todos los grupos seleccionan y diseñan tareas dirigidas a detectar errores en los escolares, mientras que el nivel de las justificaciones y las reflexiones sobre las actuaciones del profesor, difiere entre diferentes grupos. FRA y PRO destacan en ese aspecto, seguidos de ECU; el análisis del grupo RAZ es más superficial.

Otro aspecto que muestra diferencias entre los grupos es el uso del enunciado de limitaciones en la planificación de sesiones de la unidad didáctica. En principio, ninguno de los grupos usa las tareas mostradas en los ejemplos anteriores en las sesiones, pero algunos de ellos sí toman en cuenta las limitaciones en momentos concretos de manera expresa.

El grupo ECU incluye una tarea en la primera sesión que se relaciona con la limitación usada antes: “8. En la traducción al lenguaje simbólico de enunciados verbales”. En la primera sesión, proponen a los escolares varios enunciados sencillos en forma verbal para que los expresen algebraicamente (tarea 2 en el Anexo M). El grupo FRA es el único que no hace ninguna mención al

tratamiento de los errores en su unidad didáctica. Ni proponen tareas para la detección o el tratamiento de errores, ni destacan que alguna sesión o actividad del profesor tenga esa orientación. El grupo PRO no cita tareas específicas, pero sí explicita que algunas sesiones tienen como intención que los escolares comprueben sus errores y saquen provecho de ellos para su aprendizaje. Finalmente, el grupo RAZ propone dos tareas en sesiones distintas para el tratamiento de dos errores específicos [UD_RAZ, 36]:

Por ejemplo en la segunda sesión, la actividad número 2.3, se pide identificar si existe relación de proporcionalidad entre varias parejas de magnitudes, con esta tareas podemos detectar y corregir el error de establecer una relación de proporcionalidad entre dos magnitudes no proporcionales.

En la sesión de porcentajes, en los ejercicios del tipo “determinar el porcentaje que se le ha aplicado a una cantidad para obtener la otra” se puede detectar el error de no identificar correctamente la cantidad inicial y la final.

Como hemos visto, a pesar de que a los grupos, en conjunto, no les resulta difícil ejemplificar tareas vinculadas a limitaciones, no es un aspecto que potencien o destaquen en la programación de las sesiones de sus unidades didácticas.

4. PROPUESTA FINAL DE TAREAS

En el conjunto de la unidad didáctica, los grupos de futuros profesores emplean un considerable número de tareas, tanto para ejemplificar algunas componentes del análisis didáctico, como para describir el contenido y la estructura de las sesiones de clase planificadas. En ese conjunto de tareas vamos a centrar ahora nuestro análisis.

En la tercera parte del documento escrito de la unidad didáctica (§10.1.1), los grupos, entre otros aspectos, listan todas esas tareas y las clasifican de acuerdo a una serie de indicadores¹⁴¹. Dos de estos indicadores son los objetivos específicos que aborda cada una de las tareas y las competencias matemáticas a cuyo desarrollo pueden contribuir. En ese listado tenemos, por lo tanto, una nueva fuente de información acerca de las relaciones que establecen los grupos de futuros profesores, entre expectativas y oportunidades de aprendizaje.

Para llevar a cabo la descripción de este estudio, pasamos por tres momentos de análisis. En primer lugar, identificamos, para cada grupo, en qué objetivos de los enunciados en el análisis cognitivo se centran las diferentes sesiones de clase que han planificado. Este aspecto es importante porque da coherencia al siguiente momento de análisis: la vinculación entre tareas y objetivos. La coherencia se cuestiona cuando un grupo que no destaca en ninguna sesión unos determinados objetivos a lograr en los escolares, después, en la descripción de las tareas que conforman las sesiones, vinculen algunas de ellas con esos objetivos. Inversamente, tampoco resulta coherente que no se propongan tareas dirigidas a

¹⁴¹ Ver Anexo M.

promover el logro de objetivos que forman parte de las expectativas de aprendizaje para algunas sesiones. Además, esta primera perspectiva permite hacer balance de cómo la información suministrada por el análisis cognitivo es usada por los grupos en el diseño de las sesiones de clase de sus unidades didácticas.

La segunda perspectiva de análisis, como ya hemos descrito, se centra en identificar y describir cuáles son los objetivos en los que se focaliza el conjunto de tareas propuestas por los grupos. De esta manera, podemos establecer cuáles son las prioridades de aprendizaje de cada grupo, en términos de las demandas de actuación que proponen a los escolares. La tercera y última perspectiva de análisis es similar al anterior, pero centrada en las competencias. Ya que al término del análisis cognitivo los grupos de futuros profesores hacen un balance de las competencias matemáticas que promueven en su programación, es importante contrastar ese resultado con los obtenidos de los vínculos entre tareas y competencias.

Estas tres perspectivas de análisis se corresponden con los tres epígrafes en los que dividimos este apartado.

4.1 Objetivos Específicos de las Sesiones Programadas por los Grupos

Los mayor parte de los grupos de futuros profesores planifican el mismo número de sesiones en sus unidades didácticas: seis, más otra en la que se lleva a cabo el examen final del tema. Sólo el grupo FRA diseña siete sesiones, más la de evaluación. En este epígrafe, nos centramos en identificar los objetivos propuestos en cada una de esas sesiones de clase, por parte de cada uno de los grupos.

Objetivos de las Sesiones del Grupo Ecuaciones

Como hemos visto en el capítulo 8, el grupo ECU lleva a cabo un proceso de aprendizaje dilatado en relación al enunciado de objetivos específicos. También hemos comprobado que llegan a elaborar un propuesta de enunciados con notable precisión, con una moderada riqueza y, sobre todo, muy coherentes con el análisis de contenido previo (§8.2.1). Sin embargo, en la planificación de las sesiones de la unidad didáctica, se produce un hecho muy significativo. El grupo introduce varios objetivos nuevos para caracterizar las expectativas de aprendizaje de las diferentes sesiones y, en algunos casos, retoma enunciados de objetivos de producciones anterior de la asignatura, que ya habían sido desechados o modificados por el propio grupo. Algunos de esos nuevos enunciados son poco precisos y pueden llegar a debilitar la coherencia de la propia unidad didáctica, entre la información mostrada en relación al análisis cognitivo y el diseño de las sesiones posteriores.

La temática general de las seis sesiones del grupo, en cuanto al contenido tratado, es la siguiente [UD_ECU, 55]:

1. *Expresiones algebraicas*
2. *Ecuación de primer grado*

3. Reglas de equivalencia
4. Sistemas de ecuaciones. Método de igualación
5. Método de reducción y método de sustitución
6. Resolución de problemas de ecuaciones y sistemas

Para cada una de estas sesiones, y siguiendo el guión de la unidad didáctica, los grupos indican, entre otros aspectos¹⁴², objetivos específicos a desarrollar y competencias matemáticas que pueden promoverse. Además, para cada una de las tareas programadas, los grupos señalan asimismo que objetivos y competencias pueden vincularse con esas tareas.

En el caso del grupo ECU, al delimitar los objetivos específicos de cada una de las sesiones, es cuando introduce enunciados nuevos o versiones anteriores de otros. Así, por ejemplo, en la sesión 4 retoman versiones previas del enunciado “26. Discutir si un par de valores es solución de un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas”, en las que la capacidad se limitaba a “comprobar” en lugar de “discutir”. Ese tipo de variaciones nos permite relacionar el objetivo con las sesiones correspondientes pero, en otros casos, la relación es inviable, tal y como detallamos a continuación.

La Figura 60 muestra la presencia de los objetivos propuestos por el grupo ECU en el contexto del análisis cognitivo, en cada una de las sesiones de clase que planificó. Las celdas sombreadas indican que el grupo señaló, explícitamente, que el objetivo correspondiente forma parte de las expectativas de aprendizaje para la sesión señalada.

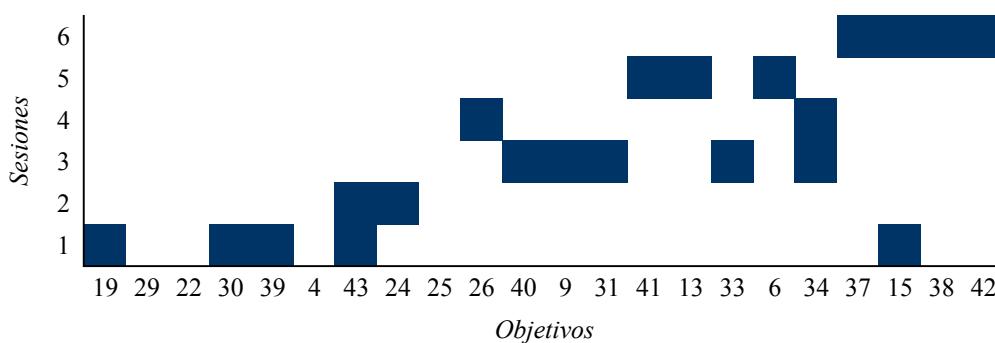


Figura 60. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo ECU

Además de los objetivos señalados en la Figura 1, entre los que se encuentran las aproximaciones que hemos realizado, el grupo propuso los siguientes enunciados: En la sesión 2, “comprender el concepto de ecuación” y en la 4, “comprender el concepto de sistema de ecuaciones”, ambos inéditos en sus producciones. En las sesiones 2 y 4 incluyen el enunciado “acercamiento

¹⁴² Contenidos principales tratados, contextos y situaciones empleados, sistemas de representación utilizados, intenciones que orientan la planificación, relación de la sesión con la anterior y posterior y secuencia de tareas, además de los ya citados sobre expectativas, son todos los aspectos considerados.

intuitivo al concepto de equivalencia”, que únicamente aparece en la primera producción del grupo sobre expectativas en la asignatura.

Podemos observar cómo existen varios enunciados que no consideran en ninguna de las sesiones y, en algunos casos, se trata de enunciados que el grupo mantiene con interés en varias de sus producciones. Un ejemplo es “4. Distinguir los miembros de una ecuación y conocer la estructura de un sistema”, que se introduce también en la primera producción sobre expectativas.

Por otro lado, además de la repeticiones del enunciado no clasificado sobre equivalencia que hemos descrito anteriormente, sólo tres objetivos son incluidos en dos sesiones (31,8% del total). Estos enunciados son: “43. Diferenciar ecuación e identidad dada una lista de ellas, y argumentar qué ecuaciones son de primer grado”, “34. Interpretación y resolución gráfica de una ecuación explicando el significado de dicha forma de representación” y “15. Traducir al lenguaje simbólico el enunciado verbal de un problema para obtener una ecuación/sistema que modele dicho enunciado y, posteriormente, comprobar si la/s solución/s se ajustan al contexto del problema”. Este último es el que tiene presencia en sesiones más alejadas entre sí, ya que el grupo lo destaca en la primera sesión sobre lenguaje algebraico y en la sexta, que se centra en resolución de problemas. Incluyendo los objetivos propuestos por el grupo que no recoge la Figura 60 este grupo, en promedio, propuso cuatro objetivos específicos para cada sesión.

Como veremos más adelante en la descripción de tareas, este grupo de nuevo introduce objetivos que no están en su propuesta de expectativas, ni tampoco en el listado que acabamos de describir.

Objetivos de las Sesiones del Grupo Fracciones

A pesar de que el grupo FRA planifica una séptima sesión, no detalla objetivos generales para la misma. Sólo indica que es una sesión de ampliación que se realiza en un aula de informática. El grupo tampoco delimita tareas específicas, ya que éstas surgen de algunas páginas Web. Por tanto, a efectos de este apartado del estudio, contabilizamos seis sesiones de clase en la organización que el grupo FRA hace para la unidad didáctica sobre fracciones, sobre los siguientes contenidos [UD_FRA, 61-93]:

1. Introducción y conceptos de fracción como parte-todo y reparto. Representación de fracciones
2. Conceptos de fracción como cociente y como operador
3. Equivalencia de fracciones
4. Comparación de fracciones
5. Suma y resta de fracciones
6. Multiplicación y cociente de fracciones

Para cada una de estas sesiones, destacan los objetivos específicos que se recogen en la Figura 61.

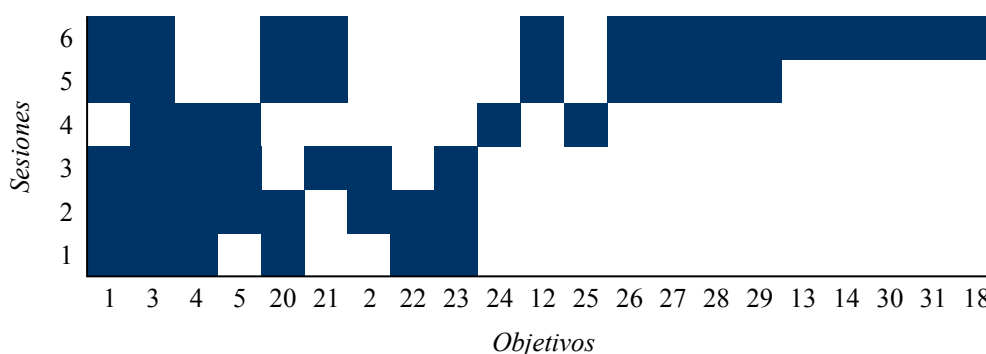


Figura 61. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo FRA

El grupo FRA considera todos los objetivos enunciados en el análisis cognitivo en el diseño de las sesiones; en promedio, en cada sesión introduce ocho de ellos. La mayor parte de los objetivos (66,7%), se menciona en dos o más sesiones. En este aspecto destacan, especialmente, enunciados como “1. Comprender los distintos conceptos de fracciones”, “3. Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y denominador de una fracción” o “20. Reconocer fracciones en situaciones de la vida cotidiana”, que se mencionan, al menos, en cuatro de las seis sesiones. Los objetivos que sólo intervienen en una sesión son el 24, que tiene que ver con ordenar y comparar fracciones, el 25, que se relaciona con el manejo de la calculadora y los cinco últimos, que se centran en la estructura multiplicativa de las fracciones. Observando el patrón que muestra la Figura 61, aunque parece razonable que los objetivos 24 y 25 se aborden en una única sesión, el hecho de que la estructura multiplicativa ocupe menos espacio puede ser debido a que el grupo dispone de pocas sesiones.

La acumulación de objetivos en muchas sesiones puede llevar consigo cierta dispersión de las finalidades que el grupo de futuros profesores persigue en cada una de ellas. En algunos casos, como en el objetivo 1, la generalidad de su enunciado hace que tenga sentido citarlo en varias sesiones ya que en cada una se puede afrontar parcialmente su consecución.

Analizando globalmente la distribución de las sesiones del grupo FRA, percibimos que los aspectos operacionales (prioridades de aprendizaje segunda y tercera), tienen menos peso en la unidad didáctica que aquellas expectativas centradas en reconocer y manejar diferentes significados y formas de representación de las fracciones (primera prioridad de aprendizaje delimitada por el grupo).

Objetivos de las Sesiones del Grupo Probabilidad

La organización de las seis sesiones programadas por el grupo PRO, gira en torno a los siguientes contenidos [UD_PRO, 33-64]:

1. Introducción al espacio muestral. La probabilidad como límite
2. Regla de Laplace. Probabilidad de la unión

3. Probabilidad del suceso contrario. Algunas representaciones gráficas: probabilidad como área y diagramas de Venn
4. Probabilidad compuesta. Diagramas de árbol
5. Probabilidad condicionada. Tablas de contingencia
6. Repaso. Corrección del examen guiado

El grupo PRO también emplea su listado de objetivos para describir las finalidades de cada una de las sesiones que incluye en su unidad didáctica. La Figura 62 recoge la distribución de los objetivos a lo largo de las seis sesiones que propuso el grupo.

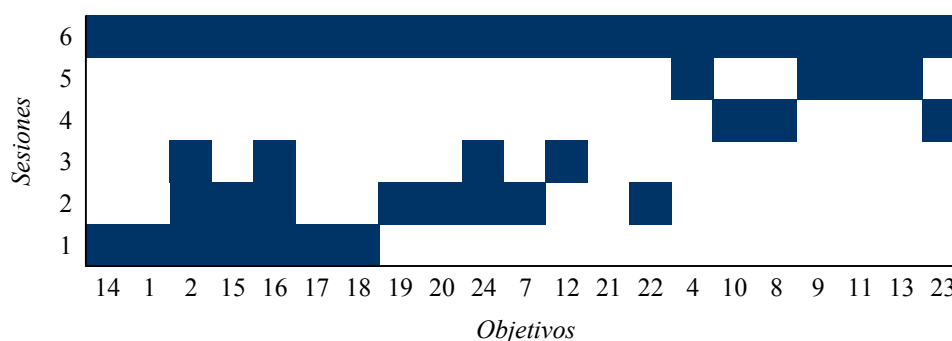


Figura 62. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo PRO

Lo primero que destaca la Figura 62 es el vínculo de todos los objetivos con la sexta sesión. En su programación, el grupo PRO propone entregar un listado de tareas a los escolares en la primera sesión, para que las realizaran a lo largo del desarrollo de la unidad didáctica. En la sesión 6, esas tareas se corregían en la pizarra y, por tratarse de un repaso de lo trabajado en la unidad, destacan todos los objetivos. Pero como veremos, al analizar las tareas propuestas, no ponen en juego todos ellos, por lo que no consideramos relevante esos vínculos para la reflexión que hacemos aquí.

Como muestra la Figura 62, el grupo sólo deja un objetivo sin citar en las sesiones. Es el enunciado “21. Elaborar enunciados de problemas acorde con unos datos probabilísticos” pero, como veremos más adelante, en la sesión 4 sí introducen una tarea relacionada con él. El resto de los objetivos tienen una presencia explícita en las sesiones, si bien entre todos destacan dos que son los únicos que se citan en tres sesiones, sin contar la última. Estos objetivos son “2. Expresar sucesos como conjuntos y viceversa” y “16. Construir el suceso contrario a uno dado”, siendo llamativo que dos enunciados de corte fundamentalmente técnico, sean recurrentes en las sesiones. En promedio, y sin contabilizar la última sesión, el grupo PRO aborda la consecución de cinco objetivos en cada sesión.

Por tanto, aunque prácticamente la totalidad de los objetivos enunciados (95,2%) tienen presencia en las diferentes sesiones, la mayor parte de ellos (76,2%) se vinculan con una sola sesión.

Objetivos de las Sesiones del Grupo Razón y Proporción

Las seis sesiones que el grupo RAZ programa en su unidad didáctica, siguen el esquema siguiente [UD_RAZ, 37-64]:

1. Conocimientos previos. Importancia de la proporcionalidad en la vida
2. Proporcionalidad directa
3. Relación de proporcionalidad inversa. Regla de tres simple inversa
4. Porcentajes. Resolución de problemas y representación gráfica de porcentajes
5. Repartos proporcionales
6. Repaso

En la Figura 63, mostramos la distribución de los diecinueve objetivos específicos acotados por el grupo RAZ a lo largo de las sesiones programadas.

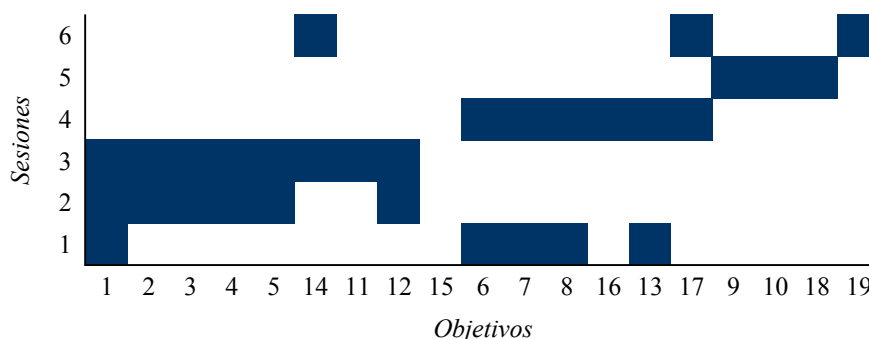


Figura 63. Presencia de los objetivos específicos en las sesiones de la unidad didáctica del grupo RAZ

Para la última sesión, el grupo RAZ no explicita objetivos a lograr, pero sí indica la orientación del trabajo de aula [UD_RAZ, 61]:

Esta sesión la vamos a dedicar a hacer un repaso de algunos conceptos del tema, mediante actividades que trataremos de resolver de forma interactiva en clase.

En concreto trataremos de repasar algo de la relación de proporcionalidad directa e inversa, un poco de porcentajes y, si es posible, algo de repartos.

Las actividades a las que se refiere, son problemas que abordan las tres prioridades de aprendizaje que delimitó el grupo: relaciones de proporcionalidad, porcentajes y repartos. Por esa razón, en la Figura 63 hemos indicado que la sexta sesión se centra en los tres objetivos propuestos por el grupo, sobre la resolución de problemas sobre esas tres prioridades

El 57,9% de los objetivos tienen presencia en dos sesiones y, además, el primero de ellos (1. Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad), se menciona en las tres primeras. Este hecho es razonable, teniendo en cuenta que es uno de los objetivos destacados por el propio grupo.

La tercera sesión es la que más objetivos trabaja, con ocho, pero en promedio, cada sesión aborda la consecución de cinco objetivos.

Balance de los Objetivos Propuestos por los Grupos para las Sesiones de la Unidad Didáctica

Los datos anteriores ponen de manifiesto que todos los grupos, salvo ECU, emplean los enunciados de objetivos elaborados durante el estudio del primer organizador del análisis cognitivo. El grupo ECU, por el contrario, reformula algunos de los enunciados e introduce otros nuevos. Además, es el grupo que deja más objetivos sin presencia en las sesiones de la unidad didáctica (cuatro). FRA pone en juego todos, mientras que PRO y RAZ dejan sin considerar sólo uno de sus objetivos.

Sólo el 23,8% de los objetivos propuestos por el grupo PRO se abordan en al menos dos sesiones; los objetivos del grupo ECU llegan al 31,8%. Los grupos FRA y RAZ se mueven en cantidades similares; el 66,7% de los objetivos de FRA y el 63,2% de los de RAZ. Estos datos muestran que la práctica totalidad de objetivos enunciados se han considerado a lo largo de la unidad didáctica.

El grupo FRA es el único que llega a considerar algún objetivo en cinco o seis de las sesiones programadas. En general, parece complejo que un objetivo se alcance con el trabajo de los escolares en una sola sesión, incluso cuando éste se refiere a un aspecto meramente rutinario o técnico. La realización de varias tareas que hagan que los escolares adquieran y consoliden ese manejo, implica un trabajo que suele ir más allá de una sesión de clase.

El promedio de objetivos que consideran los grupos en cada sesión, oscila entre los cuatro de ECU y los ocho de FRA, que puede resultar demasiado ambicioso. PRO y RAZ promedian cinco objetivos para cada una de las sesiones. Estos datos muestran cierta dispersión en los objetivos considerados por sesión. Insistir en varias prioridades de aprendizaje de modo casi simultáneo, puede llegar a producir dispersión y atención de baja intensidad.

Conviene subrayar que, desde un punto de vista práctico, la consideración de varios objetivos en distintas tareas de una misma sesión no garantiza su logro efectivo. Cada objetivo deberá ser contemplado en varias sesiones de la unidad didáctica, al menos en 3 de ellas. Por ello, si el número de objetivos a considerar por sesión no debiera exceder a 4, en promedio, y el número de sesiones es de 6, entonces cada unidad didáctica debe abarcar un máximo de 8 o 9 objetivos específicos. Los trabajos realizados por los grupos duplican este valor, ya que oscilan entre 19 y 22 objetivos específicos propuestos por unidad didáctica.

Desde esta perspectiva, el trabajo realizado por los distintos grupos en la planificación de sus unidades didácticas es una propuesta que necesitaría, al menos, 12 sesiones de trabajo por la extensión y diversidad de los objetivos propuestos, y con independencia del tipo y número de tareas. Esto reitera el carácter hipotético del trabajo de planificación llevado a cabo por los grupos, que debemos tener en cuenta para la valoración de este estudio.

Finalmente, queremos destacar otro resultado que se desprende de los análisis anteriores. Salvando la singularidad del grupo ECU, que considera varios enunciados no acotados previamente, las finalidades de las unidades didácticas de los grupos, provienen del listado de objetivos específicos delimitados en el

trabajo con expectativas de aprendizaje. Como hemos visto, este hecho da consistencia y coherencia entre ese organizador del análisis cognitivo y el diseño de las sesiones que conforman la programación. Pero, además, el propio orden en el que los grupos de futuros profesores listan sus objetivos (en función de prioridades de aprendizaje o focos de contenido), tiene una notable repercusión en la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.

Si consideramos los objetivos enumerados en el orden propuesto por los grupos, e identificamos la primera de las seis sesiones en la que se menciona explícitamente cada uno de ellos, obtenemos, para los cuatro grupos, un gráfico como el que muestra la Figura 64.

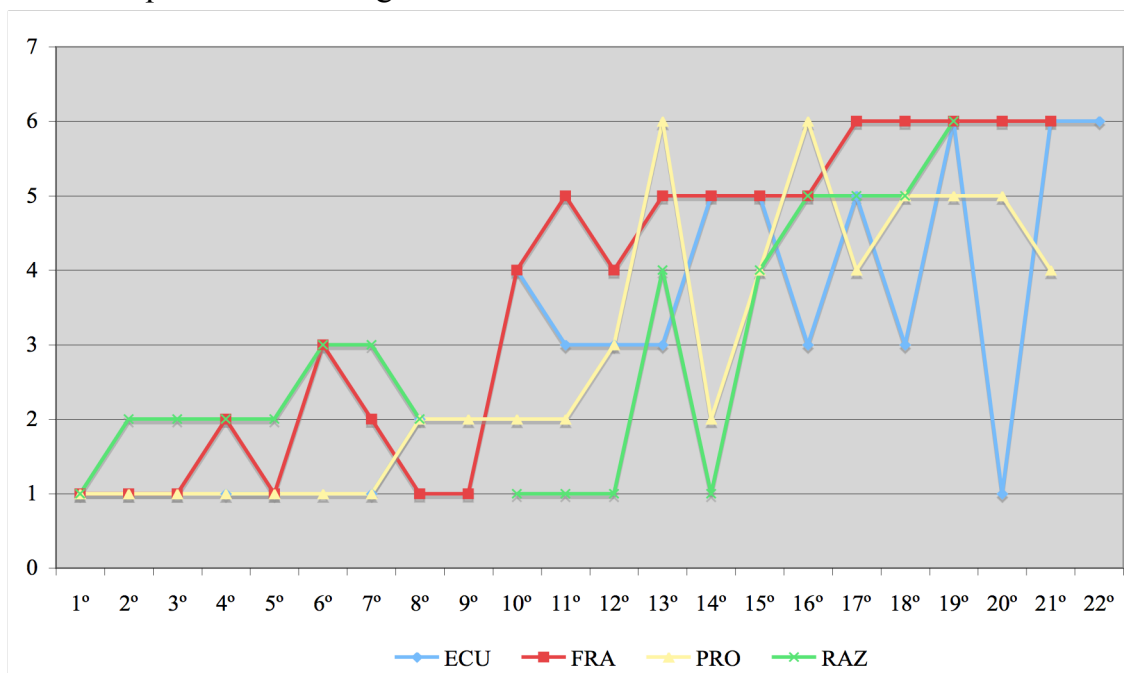


Figura 64. Primera sesión en la que se hace mención expresa a cada uno de los objetivos enunciados por los grupos de futuros profesores

A pesar de que la Figura 64 muestra algunas oscilaciones producidas por la consideración de objetivos de distintas prioridades en una misma sesión, hay una tendencia evidente en todos los grupos. Por lo general, los primeros objetivos enunciados en el listado de expectativas, se abordan en las primeras sesiones de la unidad didáctica, mientras que los últimos del listado tienen presencia, fundamentalmente, en las últimas sesiones.

Por tanto, la organización y el enunciado de expectativas de aprendizaje que sobre un tema concreto realizan los grupos de profesores en formación, tiene implicaciones en la programación y en la secuenciación de las sesiones en las unidades didácticas. Lo que hacemos a continuación, es analizar el papel de las expectativas, en el diseño y la selección de las tareas que conforman cada una de esas sesiones.

4.2 Objetivos Específicos en las Tareas de la Unidad Didáctica

En el primer apartado de este capítulo, indicamos que en las unidades didácticas, cada uno de los grupos de profesores en formación anexó un listado con todas las

tareas seleccionadas o diseñadas para la unidad didáctica. Cada una de las tareas viene clasificada con una serie de indicadores, entre los cuales están los objetivos que promueve cada tarea y las competencias matemáticas de los escolares a cuyo desarrollo contribuyen.

En este epígrafe abordamos la caracterización de esos bancos de tareas, de acuerdo a los objetivos y competencias con las que los grupos las vinculan. Analizamos los datos de cada uno de los grupos por separado y, por último, extraemos algunas conclusiones finales.

Tareas del Grupo Ecuaciones

Para describir los vínculos que el grupo estableció entre las propuestas tareas y los objetivos específicos de su tema, usamos una parrilla como la que muestra la Figura 65.

Cada celda roja de la parrilla, indica que la tarea señalada en la fila, fue seleccionada o diseñada por el grupo para el logro del objetivo correspondiente en la columna. Las líneas horizontales, delimitan las tareas incluidas en cada una de las seis sesiones, mientras que las verticales, hacen lo propio con los objetivos relacionados con cada una de las prioridades de aprendizaje acotadas por el grupo.

		OBJETIVOS																						
		19	29	22	30	39	4	43	24	25	26	40	9	31	41	13	33	6	34	37	15	38	42	
TAREAS	1	■	■	■																				
	2																					■		
	3	■																						
	4																							
	5																							
	6																							
	7																							
	8																							
	9	■																						
	10																							
	11																							
	12																							
	13																							
	14																							
	15																							
	16																							
	17																							
	18																							
	19																							
	20																							
	21																							
	22																							

Figura 65. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo ECU

En el desarrollo de las seis sesiones de su unidad didáctica, el grupo ECU propuso veintidós tareas. Esto hace que, en promedio, cada sesión incluya entre tres y cuatro. Lo primero que destaca en la Figura 65 es que hay cuatro tareas (12, 16, 20 y 22), que el grupo no vinculó con ningún objetivo, a pesar de que su enunciado es similar a otras sí analizadas. En promedio, cada tarea se relaciona prácticamente con un sólo objetivo (1,09).

Desde el punto de vista de los objetivos, hay ocho a los que no contribuye ninguna tarea. Dos de ellos, los números 22 y 4, no forman parte de las finalidades de las sesiones. Pero los seis restantes, sí se mencionan una vez en diferentes sesiones, con lo que resulta incoherente que no se promuevan con

ninguna de las tareas propuestas. A pesar de este dato, el grupo ECU vincula cada objetivo, en promedio, con una tarea. La cuarta prioridad propuesta por el grupo, relacionada con la resolución y clasificación de ecuaciones y sistemas, es la que más vínculos reúne (36% del total). En ella, el objetivo destacado es “41. Dominar resolución algebraica de ecuaciones y sistemas (igualación, reducción, sustitución) argumentando cada paso”, ya que se vincula con cuatro tareas en dos sesiones diferentes.

Entre los objetivos detallados en las tareas que no se incluyen en el listado original de expectativas al inicio de análisis cognitivo, algunos tampoco fueron presentados en las finalidades de las sesiones. Algunos de ellos son: “operar con números enteros con soltura”; “interpretar gráficamente alguna de las fórmulas notables”; “representar gráficamente polinomios”; “resolución de problemas sencillos sin usar expresamente la herramienta de la ecuación” o “aprender a manipular sistemas informáticos como herramienta para la resolución de sistemas de ecuaciones por igualación”.

Este análisis pone de manifiesto una notable desconexión entre las expectativas de aprendizaje delimitadas por el grupo y el diseño y selección de tareas para la unidad didáctica. Al inicio del análisis cognitivo el grupo expresó, en los enunciados de sus objetivos, un marcado énfasis en aspectos y rudimentos técnicos y en el manejo de expresiones algebraicas (§8.3). Sin embargo, varios de los nuevos objetivos enunciados, se centran en el manejo de varios sistemas de representación o en la resolución no formal de ecuaciones y sistemas, pudiendo ser ésta la razón de su introducción. Pero también es posible que cierta descoordinación entre los integrantes del grupo a la hora de elaborar el documento final, hiciera que surgieran esas discrepancias entre sus diferentes partes.

Tareas del Grupo Fracciones

El grupo FRA seleccionó o diseñó cuarenta y dos tareas para su unidad didáctica y empleó todas a lo largo de las seis sesiones que programó. Esto hace que de media, cada sesión incluya siete tareas. También en promedio, cada tarea está vinculada con tres objetivos, aunque algunas llegan a relacionarse con siete y ocho objetivos. Estos vínculos los recoge la Figura 66.

Desde el punto de vista de los objetivos, cada uno de ellos tiene presencia, también en promedio, en siete tareas. En la Figura 66, se constata el peso que el grupo FRA asigna a algunos de los objetivos relacionados con los significados y las representaciones de las fracciones. Entre los ocho objetivos que cubren la primera prioridad de aprendizaje, reúnen casi el 73% de los vínculos con las tareas y sólo los objetivos 1, 3 y 4, aglutinan aproximadamente un 48% de ellos. Es decir, casi la mitad de las tareas propuestas por el grupo FRA, abordan la consecución de los objetivos: “1. Comprender los distintos conceptos de fracciones”, “3. Reconocer y explicar según las distintas interpretaciones el significado del numerador y denominador de una fracción” y “4. Representar una misma fracción de distinta forma y justificarlo”. Como vimos en el epígrafe anterior, estos fueron los tres enunciados que tenían presencia en cinco o seis de

		OBJETIVOS																						
		14	1	2	15	16	17	18	19	20	24	7	12	21	22	4	10	8	9	11	13	23		
TAREAS	1	■																						
	2		■	■	■	■	■																	
	3																							
	4	■																						
	5		■	■	■	■	■																	
	6																							
	7			■																				
	8								■			■												
	9											■												
	10																					■		
	11											■	■											
	12																							
	13			■			■																	
	14											■	■	■	■									
	15			■	■		■																	
	16																							
	17														■									
	18																							
	19																							
	20																							
	21																							
	22																							
	23																					■		
	24																							
	25																							
	26																							
	27																							
	28																							
	29																							
	30																							
	31																							
	32																							
	33			■			■																	
	34																							
	35																							
	36																							
	37																							

Figura 67. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo PRO

Sólo dos de los veintiún objetivos enunciados no se vinculan con ninguna tarea, a pesar de que sí son citados por el grupo en las finalidades de dos sesiones distintas. Ambos tienen que ver con clasificar un experimento en los contextos que corresponda; el objetivo 22 se refiere a experimentos simples y el 23, a experimentos compuestos. El resto de enunciados sí son recogidos por las tareas, con un promedio de cinco de ellas por cada uno de los objetivos. Entre todos los enunciados destacan dos: “10. Escribir cadenas de sucesos en diagramas de árbol e interpretarlos cuando éstos se den” y “8. Comprender y usar la regla de Laplace”, ya que cada uno de ellos se vincula con nueve de las tareas propuestas¹⁴³. Esto hace que seis de los siete objetivos que conforman el foco de contenido *probabilidad compuesta*, aglutinen el 42% de las asignaciones a tareas.

El grupo PRO delimita para la unidad didáctica, un conjunto de objetivos precisos y con riqueza en sus enunciados (§8.3). La concreción de estas expectativas en tareas es coherente y fundamentada, ya que el banco de tareas propuesto, cubre de modo notablemente uniforme la mayor parte de los objetivos enunciados.

Tareas del Grupo Razón y Proporción

El grupo RAZ selecciona o diseña sesenta y dos tareas para su unidad didáctica, si bien en el desarrollo de las sesiones, sólo emplea treinta y dos de ellas. El resto, simplemente las enuncia en el anexo de su unidad y las analiza con los

¹⁴³ Esas tareas se reparten entre las sesiones cuarta, quinta y sexta, aunque esos objetivos sólo aparecieron en las finalidades de la primera y la última de esas (ver Figura 60).

mismos indicadores¹⁴⁴. En la Figura 68, recogemos la parrilla de vínculos entre todas esas tareas y los diecinueve objetivos específicos propuestos finalmente por el grupo.

Aunque en la parrilla, marcamos con una línea horizontal más gruesa la separación entre las tareas empleadas finalmente en la unidad didáctica y el resto, en el análisis de los vínculos consideramos el conjunto de todas. En lo que se refiere a las sesiones, en cada una de ellas, en promedio, el grupo introduce entre cuatro y cinco. También en promedio, cada tarea se vincula con dos de los objetivos, si bien hay dos (la primera y la séptima) que el grupo no las relaciona con ninguno.

Más de un 15% de los objetivos propuestos, no se relacionan con ninguna tarea de las introducidas en las sesiones, a pesar de que algunos de ellos los menciona expresamente el grupo como finalidades para dos de ellas. En particular, para dos objetivos no hay vínculos con ninguna de las sesenta y dos tareas. Estos enunciados son “15. Identificar en una gráfica en la que aparecen distintos tipos de proporcionalidad según intervalos, que tipo de proporcionalidad aparece en cada uno, constante de proporcionalidad, etc.” y “18. Otros repartos, por ejemplo aquellos en los que primero se reparte una cantidad fija, entre los miembros que intervienen en el reparto, y luego se le añade una cantidad repartida de forma proporcional a cada uno, según un reparto directo o un reparto inverso”. Ambos enunciados provienen de producciones anteriores a la unidad didáctica y, tal y como señalamos en el capítulo 8, el grupo llega a depurar algunos de ellos antes de volver a versiones primitivas para incluirlos en la unidad didáctica (§8.2).

Por otro lado, casi un 48% de las asignaciones entre tareas y objetivos se concentran en tres enunciados: “1. Distinguir si dos magnitudes están en relación de proporcionalidad”, “2. Encontrar el cuarto término en una relación de proporcionalidad; tercera y media proporcional” y “3. Determinar la constante de proporcionalidad”. El primero de ellos se cita en tres sesiones de la unidad didáctica y los otros, en dos de ellas. Esto evidencia la importancia para el grupo de los objetivos que conforman la primera prioridad de aprendizaje: “Profundizar en el estudio de relaciones de proporcionalidad directa en inversa”. Los objetivos vinculados con los porcentajes y con los repartos tienen mucha menos presencia en las tareas (20% y 11%, respectivamente).

El grupo RAZ hace un considerable esfuerzo por reunir un gran número de tareas, si bien, la Figura 9 hace visibles más patrones verticales que horizontales. Esto significa que muchas de esas tareas se relacionan con los mismos objetivos, lo que redundará en que no existan grandes diferencias entre ellas, como constata el hecho de que más de un 15% de los objetivos no se relacionan con ninguna de ellas.

¹⁴⁴ En el resto del capítulo, consideramos el total de las tareas para llevar a cabo su análisis y clasificación, si bien nos referiremos sólo a las empleadas en las sesiones de la unidad didáctica cuando analizamos la organización o las finalidades de las propias sesiones.

		OBJETIVOS																		
		1	2	3	4	5	14	11	12	15	6	7	8	16	13	17	9	10	18	19
TAREAS	1																			
	2	■									■	■	■	■	■					
	3																			
	4				■															
	5	■	■	■	■															
	6																			
	7																			
	8		■	■	■															
	9		■	■	■															
	10		■	■	■															
	11	■	■	■	■					■										
	12	■	■	■	■															
	13	■	■	■	■					■										
	14	■	■	■	■															
	15	■	■	■	■															
	16	■	■	■	■					■										
	17											■	■	■	■					
	18											■	■	■	■					
	19																■			
	20																			
	21											■	■	■	■					
	22											■	■	■	■					
	23																■			
	24																■			
	25																■	■		
	26																■	■		
	27																■	■		
	28																■	■		
	29	■	■	■	■					■										
	30	■	■	■	■					■										
	31	■	■	■	■							■	■	■	■					
	32	■	■	■	■							■	■	■	■		■			■
	33																			
	34		■	■	■															
	35		■	■	■															
	36		■	■	■															
	37		■	■	■															
	38		■	■	■															
	39		■	■	■															
	40																	■		
	41																			
	42									■										
	43																	■		
	44											■	■	■	■					
	45											■	■	■	■					
	46											■	■	■	■					
	47	■	■	■	■															
	48	■	■	■	■															
	49	■	■	■	■															
	50																	■		
	51																	■		
	52	■	■	■	■															
	53	■	■	■	■															
	54	■	■	■	■															
	55	■	■	■	■														■	■
	56	■	■	■	■															
	57	■	■	■	■															
	58	■	■	■	■															
	59	■	■	■	■															
	60	■	■	■	■															
	61	■	■	■	■															
	62	■	■	■	■															■

Figura 68. Parrilla de vínculos entre las tareas seleccionadas y diseñadas en la unidad didáctica y los objetivos específicos del grupo RAZ

Balance del Trabajo de los Grupos Sobre Vinculación Entre Tareas y Objetivos Específicos

La aproximación de cada uno de los grupos, a la concreción de los objetivos específicos en tareas matemáticas escolares, pone de manifiesto diferencias y singularidades entre el conocimiento y el manejo desarrollado entre ellos, en este aspecto del análisis cognitivo.

En la Tabla 69 sintetizamos los principales resultados de los análisis previos. En esta tabla se resumen los cruces de tareas con objetivos de cada uno de los grupos, según se ha presentado en las parrillas anteriores. El total de vinculaciones propuesto por cada uno de los grupos y los criterios utilizados para hacer esas vinculaciones, que veremos a continuación, establecen el modo en que

los grupos de profesores encauzan sus propuesta de tareas para el logro de los objetivos específicos en el diseño de la unidad didáctica. Esto nos permite interpretar este dominio técnico de los grupos para proponer oportunidades de aprendizaje sobre un tema, orientadas por unas expectativas determinadas.

Para cada uno de los grupos, indicamos el número total de objetivos y de tareas consideradas para la unidad didáctica y la proporción entre ambos. También incluimos el promedio de tareas incluidas en cada sesión, el número total de vinculaciones consideradas entre tareas y objetivos, las correspondientes vinculaciones por tareas y por objetivos, Finalmente, recogemos el porcentaje de los objetivos a los que no se asocia ninguna tarea y, también el número de tareas no vinculadas a ningún objetivo.

Tabla 99

Balance de los vínculos entre tareas y objetivos en las unidades didácticas de los cuatro grupos

ECU	FRA	PRO	RAZ
Número total de objetivos específicos considerados			
22	21	21	19
Número total de tareas diseñadas o seleccionadas			
22	42	37	62
Proporción entre tareas y objetivos			
1:1	2:1	1,8:1	3,3:1
Promedio de tareas incluidas en cada sesión			
3,7	7	6,2	4,6
Vinculaciones totales establecidas entre tareas y objetivos			
24	144	101	113
Promedio de vinculaciones por tarea			
1,1	3,4	2,7	2,1
Promedio de vinculaciones por objetivo			
1	6,9	4,8	5,9
Tareas no vinculadas a los objetivos			
7	0	0	3
Porcentaje de objetivos no vinculados a ninguna tarea ¹⁴⁵			
30%	19,05%	9,52%	11,11%

¹⁴⁵ Del total, contabilizando sólo aquellos considerados al menos en alguna de las seis sesiones de clase (§10.4.1).

Las diferencias entre grupos acerca del número de tareas consideradas, son notables, pues se mueven en un rango amplio. El grupo ECU fue, considerablemente, el que menos tareas propuso, mientras que RAZ fue el más prolífico, tal y como muestran las proporciones correspondientes.

El número promedio de tareas incluidas, en cada una de las seis sesiones programadas, oscila entre las tres del grupo ECU y las siete de RAZ, pero este dato es evidente a la luz del banco de tareas de estos dos grupos. Para nuestro análisis, hemos reunido tanto las tareas para realizar en clase, como aquellas dirigidas a trabajo en casa de los escolares, ya que todos los grupos propusieron de unas y otras y siempre proponían corregirlas en la sesión siguiente. En este aspecto destaca el grupo RAZ porque, a pesar de un nutrido número de tareas disponibles, algunos objetivos destacados en sus sesiones no se promueven con ninguna de ellas. Los grupos FRA y PRO, por el contrario, enfatizan ese aspecto.

El número total de vinculaciones realizados entre tareas y objetivos, también contrasta con el número de tareas diseñadas o seleccionadas por los grupos. En este aspecto destaca por encima del resto el grupo FRA, que hizo un esfuerzo considerable por analizar con detalle todas sus tareas. En el otro extremo, el grupo ECU realizó muy pocas vinculaciones en función de las tareas que propuso. Esto hace que el número promedio de vinculaciones con tareas que corresponden a cada objetivo, en todos los grupos, salvo ECU, oscile entre dos y cuatro. Lo mismo ocurre con el promedio de vinculaciones con objetivos que corresponden a cada tarea. En ese caso, ECU establece sólo un vínculo, en promedio, por los valores entre cinco y siete que establecen el resto de grupos.

Vincular tareas con objetivos de una forma biunívoca, redundante en una mayor precisión tanto para unas como para otros. Una tarea matemática escolar, relativa a un tema específico, por lo general moviliza y pone en juego varias actuaciones de los escolares que raramente quedan recogidas en el enunciado de una única expectativa. Por otro lado, la consecución o el logro de un objetivo no se consigue cuando los escolares abordan una sola demanda cognitiva; es natural que requieran trabajar en varias tareas, en distintas situaciones y con distinta complejidad, para desarrollar y afianzar su dominio en esa expectativa.

Todos los grupos dejan algunos de los objetivos seleccionados para las sesiones sin vinculación con las tareas propuestas; el caso del grupo ECU, con un 30% y el de FRA, con un 19%, son notables. Este aspecto denota cierto grado de inconsistencia en la unidad didáctica, entre las expectativas de aprendizaje establecidas por los grupos de futuros profesores y las oportunidades que éstos proponen a sus escolares para lograrlas. Finalmente, sólo ECU y RAZ, dejan algunas tareas sin analizar que, en el caso del grupo de ecuaciones, llega casi a la quinta parte de todas las propuestas.

Resumiendo toda esta información, hemos observado que la distribución de tareas por cada sesión de la unidad didáctica es, en conjunto, razonable. Además, la mayor parte de los grupos elabora un análisis acertado de sus tareas según las expectativas de aprendizaje que persiguen. Sin embargo, también existen lagunas en torno a cubrir la totalidad de los objetivos propuestos con tareas para los

escolares y, también es significativo que los grupos propongan tareas que no aparecen vinculadas a ninguno de los objetivos enunciados.

4.3 Competencias que Promueven las Tareas de la Unidad Didáctica

En el capítulo 2, hemos caracterizado las tareas como demandas cognitivas que el profesor puede plantear a los escolares, ya que contribuyen a movilizar y modificar su conocimiento acerca de un tema matemático determinado (§2.5.1). En el capítulo 3, caracterizamos las competencias como un nivel de expectativas de aprendizaje a largo plazo, que se alcanza con motivo del trabajo del escolar en diferentes temas y durante diferentes cursos (§3.1.3). Aunque ambas nociones, tareas y competencias, provienen de organizadores curriculares diferentes, el hecho de que las competencias matemáticas se puedan caracterizar mediante descriptores y que, al mismo tiempo, las tareas se propongan activar algunas capacidades en los escolares, permite reconocer justificadamente si una determinada tarea puede estar en línea con una o varias competencias; es decir, si promueve algún o algunos aspectos de determinadas competencias.

Los grupos de profesores en formación llevan a cabo la detección de estos vínculos con cada una de las tareas incluidas en el anexo al documento final de la unidad didáctica, caracterizando cada tarea en relación con las competencias a las que pueda estar asociadas. Este indicador permite hacer un cómputo global de las competencias que destaca cada uno de los grupos, a partir de las tareas que selecciona o diseña; es decir, informa de la orientación de su unidad didáctica en términos de las competencias que pretende promover en los escolares.

Por otro lado, en sus producciones sobre el primer organizador del análisis cognitivo, los grupos también delimitan algunas competencias, con motivo de vincularlas con los objetivos específicos enunciados. Como hemos visto en el epígrafe 2.3 de este mismo capítulo, el vínculo entre competencias y tareas, no procede, necesariamente, de las asignaciones intermedias con los objetivos. Por lo tanto, en este epígrafe, nuestro análisis se centra en comparar ambos acercamientos al establecimiento de las competencias por parte de los grupos de profesores en formación: a partir de la información del análisis cognitivo y desde las tareas seleccionadas y diseñadas para la unidad didáctica.

Competencias Promovidas con las Tareas del Grupo Ecuaciones

De las veintidós tareas seleccionadas o diseñadas por el grupo ECU, cuatro de ellas no las relacionó con ninguna de las competencias, de la misma manera que tampoco se vinculan con objetivos específicos. La Figura 70 muestra esos vínculos entre tareas y competencias, usando el mismo sistema de parrillas que empleamos en el epígrafe anterior.

En promedio, cada tarea se vincula con dos de las ocho competencias matemáticas y, recíprocamente, cada competencia se vincula, también en promedio, con entre cinco o seis tareas. Aunque, como muestra la Figura 10, no existe un marcado patrón entre las asignaciones de diferentes tareas, sí se observa que es frecuente algunas se relacionen simultáneamente con *pensar y razonar* y

utilizar el lenguaje simbólico. Este hecho se constata en el análisis conjunto de todas las tareas.

		COMPETENCIAS							
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TAREAS	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								
	8								
	9								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
	17								
	18								
	19								
	20								
	21								
	22								

Figura 69. Parrilla de vínculos del grupo ECU entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas

El balance de las competencias más frecuentes según las tareas propuestas por el grupo del grupo ECU, lo recogemos en la Figura 70. En ella, mostramos en dos gráficos de sectores circulares, el peso porcentual de cada competencia. El primero se refiere al balance realizado al finalizar la delimitación de expectativas en el análisis cognitivo; el segundo surge de contabilizar las tareas y los vínculos propuestos en el anexo de la unidad didáctica.

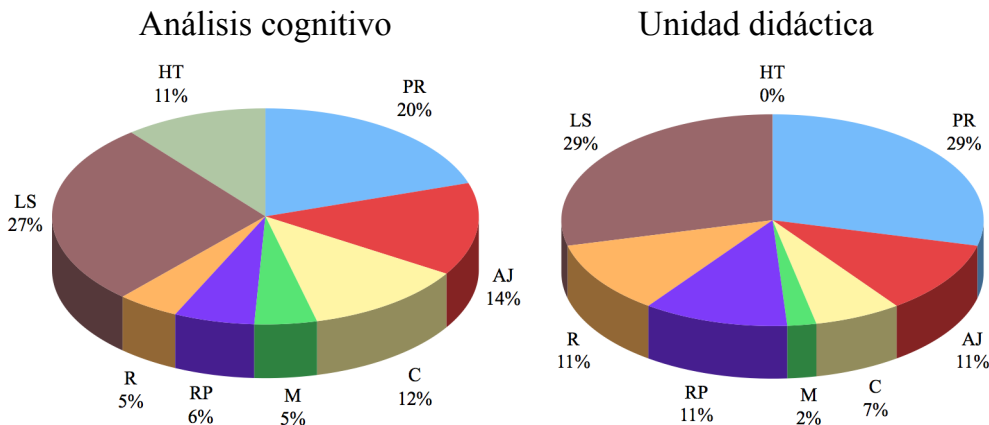


Figura 70. Competencias destacadas por el grupo ECU en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica

El cambio más acusado en la propuesta del grupo ECU es el relativo a la competencia *emplear herramientas tecnológicas* la cual, a pesar de incluir tareas relacionadas con nuevas tecnologías, desaparece por completo de su programación práctica. El grupo refuerza y acentúa el peso de las dos competencias más frecuentes: *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico*; al mismo tiempo, aumenta el peso de *representar y plantear* y *resolver problemas*. En otro extremo, en las tareas disminuye el énfasis en las competencias *argumentar y justificar*, *comunicar* y *modelizar*.

Comparando la orientación por grupos de competencias, en el capítulo 8 hemos señalado que el grupo ECU destaca las competencias específicas en su análisis cognitivo (62%)¹⁴⁶. Los datos de la unidad didáctica refuerzan esa preponderancia, ya que se incrementan hasta el 69%. En el resto de competencias, destacan las básicas, 29%, que superan en nueve puntos porcentuales a las de aplicación, mientras que en el análisis cognitivo están equiparadas (ambas con un 22% del total).

En resumen, la programación de tareas destaca la orientación específica, técnica y algorítmica de la programación del grupo ECU, en donde el manejo de expresiones simbólicas y la resolución algebraicas de ecuaciones y sistemas, constituyen el núcleo de sus expectativas de y de las tareas que las concretan.

Competencias Promovidas con las Tareas del Grupo Fracciones

El grupo FRA propuso cuarenta y dos tareas para programa su unidad didáctica y todas fueron descritas en términos de las competencias más afines. La media de competencias vinculadas a cada una de ellas es tres, aunque en varios casos, el grupo FRA relaciona una misma tarea con hasta cinco competencias. En la parrilla de la Figura 71, mostramos todas las vinculaciones establecidas.

		COMPETENCIAS							
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TAREAS	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								
	8								
	9								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
	17								
	18								
	19								
	20								
	21								
	22								
	23								
	24								
	25								
	26								
	27								
	28								
	29								
	30								
	31								
	32								
	33								
	34								
	35								
	36								
	37								
	38								
	39								
	40								
	41								
	42								

Figura 71. Parrilla de vínculos del grupo FRA entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas

¹⁴⁶ Distinguimos tres grupos de competencias al analizar la variable “orientación” en el estudio sobre expectativas (§8.4.2): competencias *básicas* o comunes a varias disciplinas (C, RP, R), *específicas* y centradas en la propia naturaleza de las matemáticas (PR, AJ y LS) y, finalmente, de *aplicación* (M, RP, HT).

Cada una de las ocho competencias se ve reflejada, en promedio, con diecisiete tareas. En varias ocasiones, es frecuente que el grupo relacione, simultáneamente, una misma tarea con las competencias *modelizar* y *plantear y resolver problemas*, lo cual difumina considerablemente la finalidad de la propia tarea. En cualquier caso, el tándem *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico* es el más empleado y, como veremos a continuación, determina la orientación del conjunto de tareas propuesto por el grupo FRA.

En la Figura 72 mostramos un balance conjunto, en comparación con el realizado anteriormente por el grupo en el estudio sobre expectativas de aprendizaje del análisis cognitivo.

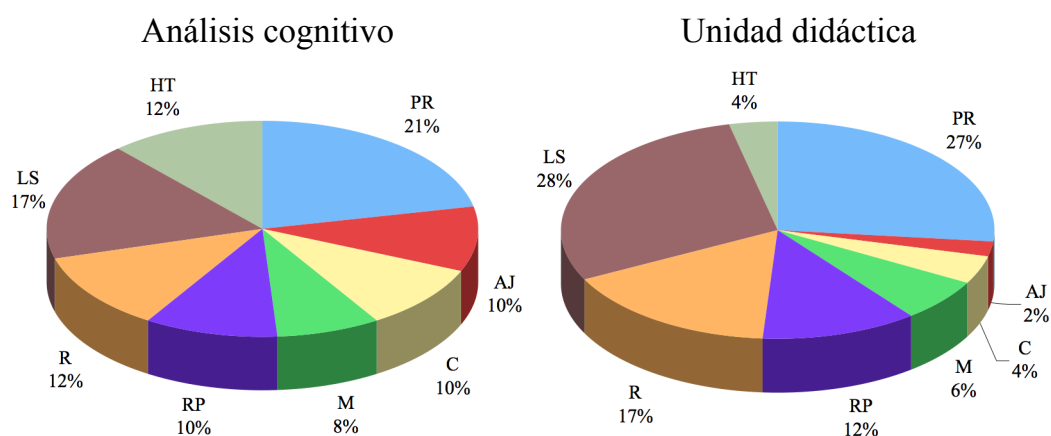


Figura 72. Competencias destacadas por el grupo FRA en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica

De manera similar al grupo ECU, el grupo FRA destaca en su análisis cognitivo sobre las competencias *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico*. Con motivo de su propuesta de tareas, estas dos competencias refuerzan su predominio, llegando a representar el 55% de la programación del grupo. No obstante, estas dos competencias invierten su posición, pasando *utilizar el lenguaje simbólico* a ser la más frecuente. Las otras dos competencias que incrementan su presencia son *representar* y, más moderadamente, *plantear y resolver problemas*.

El resto de competencias disminuye su ponderación en la propuesta del grupo, destacando entre ellas *argumentar y justificar* y *emplear herramientas tecnológicas*, con un descenso de ocho puntos porcentuales cada una.

El análisis de los grupos de competencias, sigue destacando la orientación señalada por el grupo en el análisis cognitivo. El predominio de las competencias específicas a las matemáticas se refuerza, pasando de un 48% a un 57%. Este aumento se produce en detrimento, sobre todo, de las competencias de aplicación, que pasan de un 31% en el análisis cognitivo a un 22% según las tareas de la unidad didáctica.

Competencias Promovidas con las Tareas del Grupo Probabilidad

Como describimos anteriormente, el grupo PRO selecciona o diseña treinta y siete tareas para programar las seis sesiones de clase de su unidad didáctica.

Todas las tareas están analizadas en términos de las competencias a las que pueden contribuir, promediando entre tres y cuatro vínculos por cada una de ellas. No obstante, cuatro de esas tareas se relacionan con seis de las ocho competencias matemáticas.

En la Figura 73, mostramos todas las asignaciones realizadas por el grupo PRO.

		COMPETENCIAS							
		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
TAREAS	1								
	2								
	3								
	4								
	5								
	6								
	7								
	8								
	9								
	10								
	11								
	12								
	13								
	14								
	15								
	16								
	17								
	18								
	19								
	20								
	21								
	22								
	23								
	24								
	25								
	26								
	27								
	28								
	29								
	30								
	31								
	32								
	33								
	34								
	35								
	36								
	37								

Figura 73. Parrilla de vínculos del grupo PRO entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas

El promedio de tareas relacionadas con cada una de las competencias está entre 17 y 18 asignaciones. Este grupo vincula, a su vez, todas las tareas con la competencia *pensar y razonar*, sistemáticamente. Esta evidencia, constata el significado abierto e impreciso que los grupos de futuros profesores asignan a esta competencia.

Al igual que en el caso del grupo FRA, también destacan las competencias *modelizar* y *plantear y resolver problemas*, que aparecen vinculadas conjuntamente, a quince tareas.

En los gráficos de la Figura 74, mostramos la variación en la delimitación de competencias que realizó el grupo PRO al concretar sus objetivos específicos en tareas, desde su propuesta final en el análisis cognitivo.

En este caso, sólo tres competencias aumentan su presencia y dos de ellas son, al mismo tiempo, las más frecuentes. *Pensar y razonar* aumenta su frecuencia en diez puntos porcentuales, mientras que *plantear y resolver problemas*, lo hace en cinco. Entre ambas, representan el 45% de la selección de competencias del grupo PRO en su unidad didáctica. *Modelizar* también aumenta su presencia en ocho puntos porcentuales.

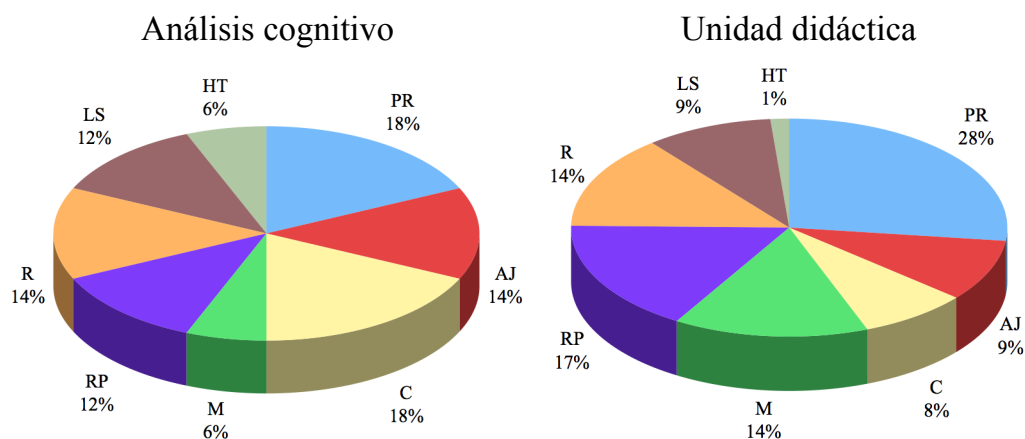


Figura 74. Competencias destacadas por el grupo PRO en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica

El descenso más notable se produce en la competencia *comunicar*, que disminuye su frecuencia en diez puntos porcentuales, si bien el grupo PRO sostiene que, en su programación, esta competencia es fundamental. *Argumentar y justificar* y *emplear herramientas tecnológicas*, disminuyen cinco puntos cada una de ellas.

Estas modificaciones tienen una importante implicación en el balance conjunto de las competencias, ya que PRO es el único grupo que en el estudio de expectativas del análisis cognitivo, destaca las competencias básicas (48%) sobre el resto (40% las específicas y 28% las de aplicación). Pero según las tareas programadas para la unidad didáctica, el grupo destaca ahora las competencias específicas (46%), aunque más equilibradamente en relación con las básicas (39%) y las de aplicación (32%). El descenso de *comunicar* es la razón primordial de este cambio de orientación en las competencias.

Competencias Promovidas con las Tareas del Grupo Razón y Proporción

Como hemos visto anteriormente, el banco de tareas del grupo RAZ contiene sesenta y dos ítems, si bien sólo treinta y dos de esas tareas se emplean en las diferentes sesiones de la unidad didáctica. Las asignaciones de ambos grupos de tareas a las competencias matemáticas, a diferencia de caso de la vinculación entre tareas y objetivos, arrojan resultados bastante diferentes entre sí. Como se puede comprobar en el Anexo M, casi todas las tareas que el grupo no usó en la unidad didáctica, son problemas sencillos de enunciado verbal. El grupo vinculó estas tareas, fundamentalmente, con tres competencias: *pensar y razonar* (35%), *modelizar* (26%) y *plantear y resolver problemas* (27%).

Por esta razón, aunque en la Figura 75 mostramos una parrilla para cada uno de esos grupos de tareas, en nuestro análisis nos centraremos en las treinta y dos tareas que el grupo introdujo en las seis sesiones de su unidad didáctica, que se muestran en la parte izquierda de la parrilla.

La distribución de las asignaciones es prácticamente uniforme en el caso de las tareas no empleadas en la unidad, mientras que en las que el grupo sí utiliza en las sesiones, las asignaciones se distribuyen más ampliamente entre las diferentes

competencias. En ese caso, el promedio de competencias con las que el grupo vinculó cada tarea, es tres.

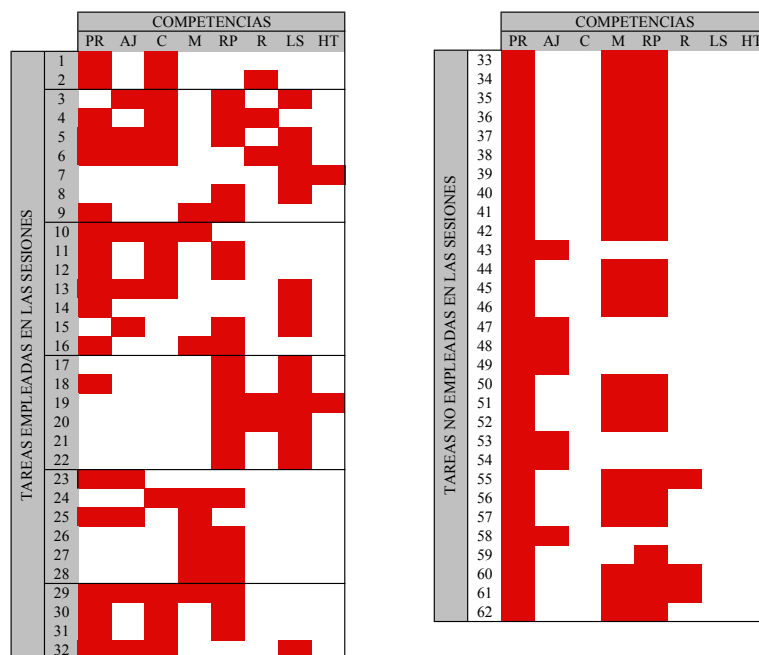


Figura 75. Parrillas de vínculos del grupo RAZ entre tareas incluidas en la unidad didáctica y las competencias matemáticas

El número de tareas con las que el grupo relaciona cada una de las competencias, también en promedio, es doce y, como veremos en los gráficos de la Figura 76, el reparto es, globalmente, más regular que en otros grupos.

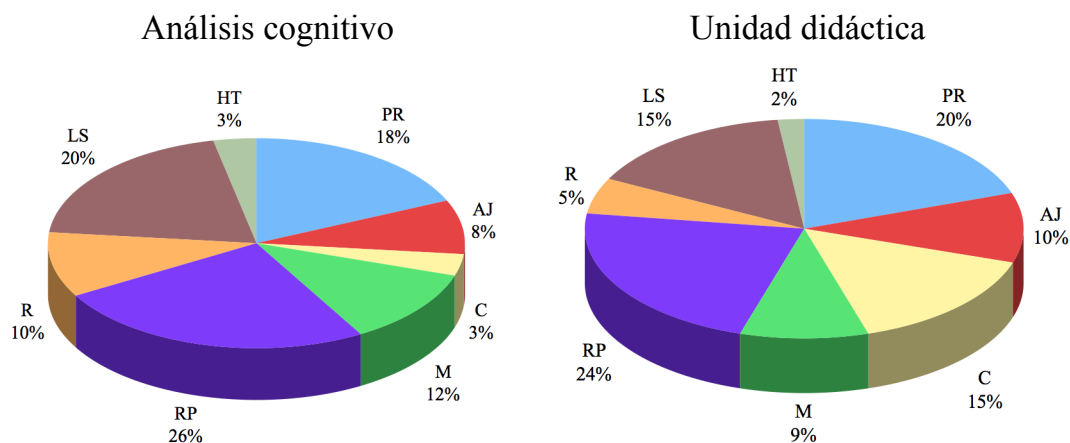


Figura 76. Competencias destacadas por el grupo RAZ en el análisis cognitivo y en las tareas de la unidad didáctica

Tanto en un caso como en otro, la competencia *plantear y resolver problemas* es la que tiene mayor presencia porcentual, si bien el porcentaje disminuye tan moderadamente como aumenta *pensar y razonar*. El cambio más significativo se produce en la competencia *comunicar*, que pasa de un 3% a un 15%. *Argumentar y justificar* se incrementa sensiblemente, para situarse con una presencia moderada en la unidad didáctica.

El resto de competencias ven disminuida su presencia entre la propuesta realizada por el grupo en el análisis cognitivo y la que se deriva de la selección y diseño de tareas para la unidad didáctica. Los descensos más notables se dan en *utilizar el lenguaje simbólico y representar*, con cinco puntos porcentuales menos en cada una de ellas. Los cambios más moderados están en *modelizar y emplear herramientas tecnológicas*. Esta última es la que tiene menor presencia en la programación del grupo.

Desde el punto de vista de la orientación de las competencias, no existe cambio significativo ya que, tanto en un caso como en otro, las competencias más frecuentes son las específicas de las matemáticas (44% en el análisis cognitivo y 45% en la unidad didáctica), seguidas de cerca por las básicas (42% y 44%, respectivamente). A mayor distancia se sitúan las de aplicación, con un 39% en el análisis cognitivo y un 35%, según las tareas propuestas por el grupo para las sesiones de la unidad didáctica.

Balance del Trabajo de los Grupos Sobre Competencias en la Unidad Didáctica

En conjunto, todos los grupos establecen, en promedio, entre dos y cuatro asignaciones de cada tarea a las competencias. ECU promedia dos, FRA y RAZ tienden a hacer tres asignaciones y, finalmente PRO hace casi cuatro de media para cada tarea. Como ya hemos comentado antes, la relación entre una tarea específica a un tema de matemáticas determinado y una competencia como expectativa de aprendizaje a largo plazo, se debilita y pierde fuerza si esa tarea se vincula con muchas de las competencias. Ese argumento lo destacan los formadores varias veces durante la asignatura, si bien no es inusual que en la propuesta de tareas de los grupos, propongan cuatro, cinco y hasta seis asignaciones para una sola tarea.

Otra característica común a todos los grupos es que, al relacionar las tareas con las competencias, con respecto a las preferencias señaladas en el análisis cognitivo, siempre aumenta la competencia *pensar y razonar* y siempre disminuye *emplear herramientas tecnológicas*. En todos los grupos detectamos preponderancia de dos competencias sobre el resto. Así, el peso conjunto de *pensar y razonar* y *utilizar el lenguaje simbólico* supone el 58% de las asignaciones del grupo ECU y el 55% de las de FRA. Asimismo, la consideración conjunta de *pensar y razonar* y *plantear y resolver problemas*, supone el 45% de las asignaciones de PRO y el 53% de las del grupo RAZ. En los grupos ECU, FRA y PRO la competencia más frecuente es *pensar y razonar*, mientras que para RAZ es *plantear y resolver problemas*.

Sólo el grupo PRO modifica la orientación general de su programación según los tipos de competencias que promueve. En el contexto del análisis cognitivo, es el único grupo que enfatiza las competencias básicas pero, con motivo de la selección de tareas, son las específicas o centradas en la naturaleza de las matemáticas las más frecuentes. Únicamente RAZ mantiene un estrecho margen entre ese grupo de competencias y las básicas.

El balance final refuerza algunas de las conclusiones que hemos extraído con motivo del análisis que hemos descrito en el capítulo 8. El significado de la

competencia *pensar y razonar* no está claro para los grupos de futuros profesores que llegan a vincular, sin demasiado criterio, gran parte de sus tareas con ella. Por otro lado, los grupos no manejan descriptores para distinguir las competencias *modelizar y plantear y resolver problemas* y, finalmente, las competencias básicas relacionadas con habilidades sociales como la comunicación, no suelen ser consideradas con frecuencia por los grupos para caracterizar las expectativas de aprendizaje a largo plazo que promueven con sus tareas.

5. CONOCIMIENTO DE LOS GRUPOS ACERCA DEL DISEÑO Y SELECCIÓN DE TAREAS

En los capítulos precedentes hemos descrito el proceso de aprendizaje seguido por los grupos de futuros profesores y el conocimiento y las capacidades que, finalmente, lograron en relación al enunciado de expectativas y limitaciones en el aprendizaje escolar (capítulos 8 y 9, respectivamente). Hemos dejado constancia de lo intenso y sistemático de ese proceso, de su dilatación temporal a lo largo de diferentes fases de la asignatura y, asimismo, de la complejidad y profundidad del conocimiento y las capacidades involucradas. Con motivo de la conclusión del estudio sobre el análisis cognitivo llevado a cabo durante el proceso de formación, los grupos de profesores produjeron un listado de objetivos específicos sobre cada uno de sus temas, organizados en torno a prioridades del aprendizaje escolar y vinculados con las competencias matemáticas escolares. También organizaron y acotaron un listado de posibles limitaciones del aprendizaje y su relación con los objetivos anteriores.

Cuando los grupos abordan el diseño de la unidad didáctica, toda la información sobre estos dos organizadores del análisis cognitivo, ya está concluida. Como describimos en los capítulos anteriores, al analizar las producciones sobre expectativas en la unidad didáctica, hemos constatado que todos los grupos se encuentran en una etapa de estabilidad en el enunciado de objetivos y en la vinculación que establecen de éstos con las competencias. En relación a la organización y enunciado de limitaciones, los grupos se encuentran en una etapa de consolidación o de estabilidad. Es decir, al iniciar la programación de la unidad didáctica, los grupos poseen, con determinados aciertos y carencias, un conocimiento y unas capacidades definidas, en relación con ambos organizadores del análisis cognitivo. Según caracterizamos en el capítulo 4, los grupos de profesores en formación poseen y manejan, por lo tanto, un conocimiento a nivel *teórico y técnico* de esos organizadores (§4.3.2).

Lo que analizamos en este capítulo es el conocimiento didáctico *práctico* que, sobre esos dos organizadores, ponen de manifiesto los grupos de futuros profesores. Es decir, nos preocupa interpretar el modo en que los grupos ponen en juego todo su conocimiento y sus capacidades de nivel teórico y técnico, para concretar sus expectativas y limitaciones del aprendizaje en un conjunto organizado de tareas, que encaucen el trabajo de los escolares y les brinden la

oportunidad de alcanzar tales expectativas elegidas y superar las limitaciones posibles detectadas.

Para estudiar este conocimiento hemos delimitado, en primer lugar, las fuentes de información que podíamos emplear en nuestro estudio (§10.1). Esto ha dejado constancia de un aspecto importante relativo al propio programa de formación. El tiempo del que dispusimos en el curso 2008-2009 dedicado al diseño y selección de tareas fue considerablemente inferior al empleado en el resto de dimensiones del análisis didáctico (sólo seis sesiones). Pero, además, el número de producciones de los grupos en las que proponen y justifican tareas para concretar objetivos y limitaciones se redujo, prácticamente, a lo presentado en la unidad didáctica final. Es decir, no hubo presentaciones previas de los grupos, sobre las que los formadores pudiéramos realizar valoraciones y críticas, que sirvieran a su vez a los grupos para reformular su propuesta y progresar en una nueva producción. Como hemos visto en los capítulos anteriores, estos comentarios y debates entre formadores y grupos de futuros profesores resultan fundamentales para que éstos últimos avancen en sus conocimientos y mejoren sus habilidades correspondientes.

El primer control acerca del modo en el que los grupos diseñan tareas vinculadas a objetivos específicos, lo tuvimos en una actividad realizada en clase durante la sesión 43 (§10.2.1). Los resultados hacen vislumbrar que los grupos, desde un punto de vista general, no encuentran excesivas dificultades para proponer una tarea relacionada con algunos objetivos específicos de sus temas. Tres de los cuatro grupos ejemplifican correctamente; el cuarto grupo, si bien no cierra su propuesta, expresa directrices que relacionan correctamente su tarea con los objetivos señalados. Sin embargo, en ese momento ninguno de los grupos indica acertadamente qué competencias podrían promoverse con ese tipo de tareas. Es decir, en una determinada fase del desarrollo de la asignatura, los grupos de profesores en formación son capaces de ejemplificar de manera espontánea, tareas vinculadas a objetivos, pero tienen dificultades para después relacionarlas con las competencias matemáticas.

El siguiente momento en el que los grupos se enfrentan a este tercer organizador del análisis cognitivo es ya en la unidad didáctica. En esos documentos finales hemos identificado partes que, si bien no reflejan necesariamente la secuencia de actuaciones que los grupos siguen para su elaboración, sí permiten disponer de indicadores para valorar el modo en que llevan a cabo y justifican la ejemplificación de tareas vinculadas a objetivos. De esta manera hemos analizado, inicialmente, la primera parte de la unidad didáctica, donde los grupos llevan a cabo esa ejemplificación (§10.2.2). Todas las asignaciones entre tareas y objetivos son correctas, salvo las de un grupo que dirige sus ejemplos hacia otros objetivos distintos, en vez de hacia aquellos que él mismo había propuesto. Sin embargo, la justificación esgrimida por el grupo, pone de manifiesto un notable control de argumentos que justifican la selección de una tarea para lograr un objetivo.

Después de ejemplificar las tareas, los grupos también las vinculan con una o varias de las competencias matemáticas escolares. En este punto se confirma lo

supuesto en la actividad de clase: esta asignación no resulta sencilla a los grupos. Para justificar acertada y adecuadamente un vínculo entre una tarea y algunas competencias matemáticas, se necesita tener un conocimiento detallado del significado de cada una de ellas, de las actuaciones de los escolares que enfatizan y, sobre todo, haber desarrollado criterios que sirvan para discriminar entre ellas. Como vimos en el capítulo 8, algunas de las ocho competencias matemáticas PISA tienen un significado impreciso para los grupos (*pensar y razonar*), otras no son claramente identificables (*emplear herramientas tecnológicas*) y algunas otras tienden a confundirse (*argumentar y justificar* y *comunicar*; *modelizar y plantear* y *resolver problemas*). Muchas de estas limitaciones también surgen durante el análisis de las unidades didácticas.

Es curioso observar cómo los grupos de profesores en formación no ponen en juego, en ningún momento, un procedimiento sencillo, de corte transitivo, que les hubiera ahorrado tiempo y esfuerzo. Partamos, por ejemplo, de un objetivo específico. En nuestra propuesta de expectativas, hemos vinculado ese objetivo con unas determinadas competencias matemáticas. Si ahora seleccionamos una tarea que lo promueve, esa tarea favorecerá, por lo tanto, el desarrollo de aquellas competencias vinculadas al propio objetivo. Pero ese proceso no fue seguido por ninguno de los grupos, lo cual muestra la debilidad del conocimiento alcanzado sobre vínculos entre objetivos específicos y competencias.

Cada uno de los grupos, después de proponer una tarea, la analiza según las competencias a las que puede contribuir y, en la mayor parte de los casos, el resultado no coincide con la asignación hecha para el objetivo. En cualquier caso, en el análisis de las propuestas incluidas en la primera parte de la unidad didáctica, los grupos muestran distintas dificultades y lagunas sobre cómo proyectar a largo plazo el aprendizaje que se puede promover mediante un determinado conjunto de tareas.

De la misma manera que los grupos de futuros profesores disponen de criterios para concretar los objetivos específicos sobre sus temas en una serie de tareas, tampoco presentan dificultades para seleccionar tareas relacionadas con limitaciones concretas en el aprendizaje escolar. Aunque esa relación casi siempre se concreta en tareas para la detección de errores, hemos observado que, entre los cuatro grupos, emplean un ciclo diferente de pasos para describir esa relación (§10.3.2). Esas diferencias enfatizan diferentes argumentos en los criterios de selección de las tareas pero, en todos los casos, resultan bien elaborados. También hemos constatado que el papel que juegan esas tareas en el desarrollo de las sesiones de la unidad didáctica, es poco relevante. Sólo dos grupos introducen una y dos propuestas, respectivamente, vinculadas con sendos errores y dificultades. Otro de los grupos, sólo indica que el reconocimiento por parte de los escolares de errores previos, puede conducir un determinado aprendizaje y, finalmente, el cuarto grupo no cita limitaciones en ningún momento de su programación.

Finalmente, hemos centrado nuestro análisis en las sesiones de clase programadas por los grupos en sus unidades didácticas (§10.4), poniendo el foco de interés en dos aspectos. En primer lugar, hemos analizado el papel de los

objetivos específicos enunciados por los grupos en la delimitación de las expectativas de aprendizaje de las sesiones. En segundo lugar, nos hemos centrado en las tareas que conforman cada una de esas sesiones y en su relación con los objetivos específicos y las competencias.

Hemos constatado que tres de los cuatro grupos, utilizan los objetivos específicos propuestos en su estudio de las expectativas de aprendizaje, para programar las finalidades de cada sesión (§10.4.1). Sólo uno de los grupos añade objetivos nuevos y modifica, además, el enunciado de otros. En promedio, los grupos de futuros profesores proponen entre cinco y seis objetivos para cada una de las sesiones, si bien dos de ellos señalan en varias ocasiones que una sola sesión es suficiente para lograr la consecución de un objetivo. Por lo tanto, el estudio de expectativas que los grupos realizan en el análisis cognitivo adquiere un papel organizador importante en la programación de las sesiones de clase ya que no sólo estructura las finalidades de cada sesión, como acabamos de expresar, sino que también suministra indicaciones sobre la secuencia que pueden seguir las propias sesiones. Hemos mostrado cómo la secuencia de prioridades y el enunciados de objetivos, se ven reflejados en la secuencia de las sesiones de las unidades didácticas.

Después de acotar las expectativas de aprendizaje de los escolares para las sesiones, los grupos seleccionan o diseñan las diferentes tareas que introducirán en cada una de ellas (§10.4.2). Los cuatro grupos reúnen un total de ciento sesenta y tres tareas para programar las seis sesiones de cada una de sus unidades didácticas. Gran parte de estas tareas son diseñadas por los propios grupos, tal y como ellos mismos afirman, si bien también seleccionan otras de diferentes fuentes documentales. En total, en los cuatro documentos de las unidades didácticas, los grupos citan explícitamente veintinueve referencias de libros, en su mayoría de texto y, además, dieciséis páginas Web relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta es una realidad en la labor docente del profesor ya que, hoy en día, es posible acceder fácilmente a un nutrido número de recursos para la enseñanza, entre los que se encuentran multitud de tareas. La labor del profesor, en este caso, es disponer de herramientas y criterios para seleccionar aquellas tareas que son adecuadas o acertadas para lograr las expectativas propuestas.

La necesidad de acotar el número de objetivos a atender en la planificación de una unidad didáctica, refuerza la consideración ya realizada en el capítulo 8, relativa a la necesaria riqueza y complejidad a alcanzar en los enunciados de los objetivos específicos. Una elección de un número limitado de objetivos específicos, bien enunciados y con vinculaciones claras a las competencias matemáticas, contribuye a la determinación de una cantidad razonable de expectativas de aprendizaje, que pueden ser vinculadas con más tareas, o con tareas más complejas y diversificadas porque planteen demandas cognitivas de cierto nivel y riqueza. Pero este requerimiento por profundizar en la calidad de los objetivos específicos, no debe ocultar que una organización de las tareas en sesiones de trabajo dentro de una unidad didáctica, no debe plantearse sobre la base de una dispersión de las expectativas de aprendizaje que sustentan. Esa

dispersión entorpecería el trabajo del profesor, que tendría que atender a un número excesivo de requerimientos y dificultaría el trabajo de los alumnos.

Cada uno de los grupos de futuros profesores analiza todas las tareas seleccionadas y diseñadas usando, entre otros indicadores, los objetivos específicos que promueven y las competencias a las que contribuyen. Los grupos también delimitan cuántas y cuáles de esas tareas emplearán después en las diferentes sesiones de las unidades didácticas (§10.4.3). Esos son los últimos análisis que hemos llevado a cabo.

El análisis de los grupos sobre sus tareas es, en conjunto, satisfactorio. En promedio, los grupos vinculan cada tarea con entre dos y tres objetivos específicos, lo cual es coherente con el tipo de tareas propuestas. La bondad de esta asignación reside, parcialmente, en la precisión del enunciado del objetivo. Si el enunciado es muy general o abierto, las tareas posibles son incontables (ver ejemplo del grupo FRA con el objetivo 1 [§10.2.2]). Si, por el contrario, el objetivo está expresado en términos excesivamente concretos, casi operativos, la tarea está prácticamente delimitada por el propio enunciado del objetivo (ver ejemplo del grupo ECU [§10.2.1], con el objetivo 3 de la Tabla 92).

Por otro lado, tres de los cuatro grupos señalan que para el logro de cada objetivo es necesario, en promedio, que los escolares trabajen entre cinco y seis tareas. El análisis de uno de los grupos indica que, desde su punto de vista, entre una y dos tareas son suficientes. Sin embargo, algunos objetivos incluidos en las sesiones de las unidades didácticas, no quedan vinculados con ninguna tarea. Esta aparente incoherencia se hace claramente explícita en el caso del grupo de ecuaciones, que no propuso tareas para promover el 30% de sus objetivos y, además, casi el 20% de las tareas consideradas, no están vinculadas a ninguno de ellos. El resto de grupos explicitó los objetivos perseguidos por, prácticamente, todas sus tareas y, además, dejaron sólo algunos objetivos sin tareas asociadas. En este caso, resalta la necesidad de dedicar más tiempo de trabajo a los vínculos entre objetivos y tareas, pues otros organizadores del análisis cognitivo han puesto de manifiesto la importancia de la revisión de las producciones de los grupos como parte del propio proceso de aprendizaje.

Sólo un grupo de futuros profesores presentó y analizó más tareas de las empleadas en la unidad didáctica. Consideramos en este caso únicamente las empleadas en las sesiones programadas, con lo cual los grupos incluyen entre veintidós y cuarenta y dos tareas en las sesiones, teniendo un promedio en los cuatro grupos, de entre tres y cuatro tareas en cada una de las sesiones.

La valoración de las asignaciones realizadas por los grupos entre las tareas propuestas y las competencias a la que éstas podrían contribuir, han permitido hacer un balance de las competencias que, en el conjunto de tareas, claramente favorece la planificación de cada uno de los grupos. Además, este balance lo hemos comparado con el que se realiza en el estudio de expectativas al inicio del análisis cognitivo. Hemos observado que no existen grandes diferencias entre las competencias más destacadas en uno y otro momento. En todos los grupos, se produce un incremento, más o menos moderado, de la presencia de la

competencia *pensar y razonar* y, al mismo tiempo, también todos los grupos disminuyen su frecuencia en *emplear herramientas tecnológicas*. Las competencias *utilizar el lenguaje simbólico* y *plantear y resolver problemas* tienen también una notable presencia en varios grupos y, de nuevo, la débil distinción de ésta última con *modelizar* se sigue poniendo de manifiesto en el análisis realizado por los grupos. En conjunto, siguen predominando las competencias específicas, vinculadas a la propia naturaleza de las matemáticas. No obstante, uno de los grupos las equipara a las de aplicación y otro a las básicas. Aunque no hemos entrado en la justificación de las asignaciones realizadas por los grupos hemos constatado, también en el análisis realizado por ellos, ciertas lagunas en relación con las competencias asignadas a las diferentes tareas. El abuso de la competencia *pensar y razonar* que se relaciona con cualquier tipo de tarea, la escasa presencia de otras competencias importantes como *argumentar y justificar* y *comunicar* y la confusión entre *modelizar* y *plantear y resolver problemas*, son algunas de las limitaciones de los grupos de profesores en su conocimiento y capacidad de manejo de expectativas de aprendizaje escolar a largo plazo.

En resumen, hemos constatado el importante papel que la organización y el enunciado de objetivos específicos juegan en el diseño y selección de tareas y en el establecimiento de la finalidad de sesiones de clase de la unidad didáctica. Esto constituye un claro indicador de que ese conocimiento y esas capacidades de los grupos de profesores en formación, contribuyen al desarrollo de su competencia de planificación. Las expectativas de aprendizaje a largo plazo, las competencias, generan sólo resultados parciales. Los grupos de futuros profesores reconocen y explicitan su importancia, si bien adolecen de algunas carencias en su caracterización. Finalmente, y en relación con las limitaciones en el aprendizaje, los grupos de futuros profesores son capaces de planificar tareas que permitan la detección de determinados errores y dificultades, pero sacan poco partido a la inclusión de ese tipo de tareas en la unidad didáctica. Por lo tanto, hemos recabado información y hemos obtenido resultados que nos permiten valorar el desarrollo de los siguientes contenidos y capacidades:

10. Ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos.
14. Ejemplificar tareas para detectar y corregir errores y dificultades.
15. Usar la descripción de objetivos específicos y competencias para diseñar y seleccionar tareas.
16. Aplicar la selección de errores y dificultades en el diseño y selección de tareas.
17. Emplear la información del análisis cognitivo para la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.
18. Aplicar el enunciado de los objetivos y la selección de competencias en el diseño de las tareas de evaluación.
19. Utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Somos conscientes de que en este estudio que hemos realizado sobre oportunidades de aprendizaje, sólo nos hemos centrado en unas determinadas facetas de las tareas matemáticas escolares. Hemos dejado al margen otros análisis posibles, como los que hemos ejemplificado en la introducción. Nuestro objetivo ha sido relacionar de manera específica los tres organizadores del análisis cognitivo y el conocimiento y las capacidades que sobre ellos desarrollan los grupos de profesores en formación.

CONCLUSIONES

En el primer capítulo, delimitamos y acotamos las tres preguntas que han orientado nuestra investigación. Estas preguntas son las siguientes:

¿Cómo puede afrontar el profesor el estudio y la planificación del aprendizaje de los escolares acerca de un tema matemático específico?

¿Es posible diseñar e implementar el análisis cognitivo en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de Educación secundaria desde una perspectiva funcional?

¿Cómo desarrollan su competencia de planificación para las matemáticas escolares los grupos de futuros profesores que cursan ese programa formativo?

Nuestra conjetura respecto a la primera pregunta considera el análisis cognitivo como procedimiento que permite al profesor abordar la problemática del aprendizaje para el diseño de unidades didácticas. Por lo tanto, el diseño y la organización del análisis cognitivo acotan el primero de los objetivos generales de nuestra investigación:

1. Conceptualizar el análisis cognitivo como procedimiento para la planificación sobre el aprendizaje escolar por parte del profesor de matemáticas en formación, en coherencia con el análisis didáctico.

Este objetivo se desglosa, a su vez, en tres objetivos específicos. Los dos primeros tienen que ver con la estructura del análisis cognitivo y con sus relaciones con el resto de componentes del análisis didáctico. El tercero proporciona un carácter funcional a esa estructura para el trabajo de los profesores en formación. Estos tres objetivos específicos son los siguientes:

- 1.1 Delimitar por medio de los organizadores del currículo una estructura para el análisis cognitivo que permita planificar el aprendizaje de las matemáticas escolares desde una perspectiva funcional.
- 1.2 Enmarcar el análisis cognitivo dentro del análisis didáctico de manera coherente con el análisis de contenido y con el de instrucción.
- 1.3 Proporcionar una serie de conocimientos y capacidades a los profesores en formación basados en el análisis cognitivo y que contribuyan al desarrollo de su competencia de planificación sobre el aprendizaje escolar en matemáticas.

La segunda pregunta de investigación, se centra en el diseño e implementación del análisis cognitivo, en coherencia con el análisis didáctico, en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. En este caso sostenemos como hipótesis que la respuesta a esa segunda cuestión es afirmativa y consideramos que la asignatura Didáctica de la Matemática satisface esos requerimientos. El segundo objetivo general de nuestra investigación, por lo tanto, surge de manera natural:

2. Diseñar e implementar un programa de formación inicial que incorpore el análisis cognitivo desde una perspectiva funcional.

Y en consonancia con este enunciado, hemos concretado dos objetivos específicos vinculados con él:

- 2.1 Fundamentar un programa de formación inicial desde una perspectiva funcional que contemple el análisis cognitivo, en coherencia con el análisis didáctico, como procedimiento que contribuye a desarrollar la competencia de planificación por parte de los futuros profesores.
- 2.2 Implementar ese programa de formación y dar oportunidad a la recogida de información sobre el desarrollo de la competencia de planificación en los futuros profesores que lo cursen.

Finalmente, la última pregunta de investigación nos lleva a conjeturar que es posible describir y caracterizar el proceso de aprendizaje que siguen los grupos de futuros profesores que cursan la asignatura, mediante los conocimientos y capacidades que ponen en juego en un ambiente natural. Esta conjetura nos conduce al enunciado del tercer objetivo de investigación, centrado en evaluar una parte del diseño e implementación del programa de formación inicial, a partir del trabajo realizado por los grupos de profesores que cursan la asignatura en el curso 2008-2009:

3. Identificar, describir y analizar el desarrollo de la competencia de planificación sobre aprendizaje escolar que muestran los participantes en el programa de formación inicial del curso 2008-2009.

Este objetivo delimita el estudio empírico en nuestro trabajo. Concretamos un curso académico y un grupo de futuros profesores con los que exploramos el desarrollo de la competencia de planificación en relación al análisis cognitivo. Los objetivos específicos, en este caso, son los siguientes:

- 3.1 Identificar, describir y caracterizar el conocimiento y las capacidades que alcanzan los grupos de los futuros profesores acerca de las expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje de los escolares, durante el programa de formación del curso 2008-2009.
- 3.2 Emplear la información anterior para establecer el nivel de desarrollo de la competencia de planificación de esos grupos de futuros profesores, en lo que al aprendizaje de las matemáticas escolares se refiere.

Para dar respuesta a estos objetivos y contrastar nuestras conjeturas, en este capítulo empleamos los datos, análisis e interpretaciones realizadas a lo largo de

todos los capítulos previos. Más concretamente, dedicamos cada uno de los tres apartados siguientes a cada uno de esos tres objetivos generales y sus correspondientes objetivos específicos. Finalmente, elaboramos un balance estratégico a partir de los resultados obtenidos y señalamos algunas líneas de continuidad para la investigación.

1. ANÁLISIS COGNITIVO Y PLANIFICACIÓN DEL APRENDIZAJE ESCOLAR

En el capítulo 2 describimos el análisis didáctico como un procedimiento para diseñar, implementar y evaluar unidades didácticas sobre un tema determinado de matemáticas (§2.2). El análisis didáctico se sostiene en un marco curricular y da expresión a un enfoque funcional de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares. El análisis didáctico está compuesto a su vez por cuatro tipos análisis, según las diferentes dimensiones de currículo: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. Cada uno de los diferentes análisis se articula en torno a los organizadores del currículo. También en el capítulo 2 constatamos que el análisis didáctico constituye una herramienta central para el desarrollo de la competencia de planificación por parte del profesor.

El análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, brinda también herramientas básicas al profesor para la planificación de las matemáticas escolares. En los capítulos 2 y 3 hemos descrito con detalle los fundamentos y la estructura del análisis cognitivo, caracterizándolo como un procedimiento para que los profesores aborden la problemática de la planificación del aprendizaje matemático de los escolares, como parte del diseño de una unidad didáctica. Esa estructura se articula en torno a tres organizadores del currículo: expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje. En el capítulo 3 justificamos que estos tres organizadores constituyen herramientas potentes para planificar el aprendizaje escolar, que son relevantes en la investigación en Didáctica de la Matemática y que además tienen vigencia y actualidad en Educación.

Las expectativas de aprendizaje explicitan, desde diferentes niveles, los conocimientos que se espera que alcancen los escolares, las habilidades y capacidades que se pretende desarrollen a través de su educación y las actitudes y valores que deben lograr. En el caso de las matemáticas estas expectativas expresan usos reconocibles y deseados del conocimiento matemático, que se pueden desarrollar, observar o inferir a partir de las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas.

De entre los posibles niveles en los que se expresan expectativas de aprendizaje, en el contexto del análisis cognitivo nos hemos centrado en dos de ellos. Los objetivos específicos se refieren a las expectativas de aprendizaje que el profesor selecciona para los escolares acerca de un tema específico de matemáticas para un curso concreto, a corto plazo. Las competencias, por el contrario, expresan finalidades educativas a largo plazo, socialmente establecidas, que han de

desarrollarse paulatinamente a lo largo de varios cursos y etapas. En ambos casos, las actuaciones de los escolares ante determinadas tareas permiten observar el grado de consecución de esas expectativas. Pero, mientras en el caso de los objetivos específicos esas tareas están vinculadas a un contenido matemático concreto, en el caso de las competencias las tareas son más abiertas, abarcan conocimientos de distintos temas y deben referirse a diferentes situaciones y contextos.

A lo largo de los primeros capítulos, hemos destacado el importante papel que la noción de competencia está ocupando en la organización de las finalidades educativas que realizan gobiernos e instituciones dentro y fuera de España. Y precisamente ese papel preponderante hace necesario clarificar su significado sobre todo de cara a su puesta en juego en el aula. Hemos relacionado la noción de competencia con las dimensiones del currículo y la hemos vinculado con un enfoque funcional del aprendizaje mediante su caracterización en torno a tres componentes (Rico y Lupiáñez, 2008a):

Sostenemos que las competencias, como expectativas de aprendizaje, se presentan contextualizadas, hacen uso de herramientas cognoscitivas y los sujetos las muestran mediante la puesta en práctica de una serie de actuaciones, decisiones y actitudes con las que dan respuesta a las demandas y problemas planteados. (p. 158)

Esta estructura ha permitido acotar un significado para la competencia matemática (§3.1.5). También hemos destacado el esfuerzo de diferentes organismos nacionales e internacionales por clarificar conceptualmente nociones vinculadas al marco de competencias. Hemos usado la caracterización que en el marco del Proyecto PISA se hace de la competencia matemática básica desglosada en ocho competencias matemáticas (§3.1.6). Estas ocho competencias describen, en conjunto, los conocimientos, capacidades, habilidades y actitudes necesarias para usar las matemáticas dentro y fuera del ámbito escolar. También permiten analizar el desarrollo y evaluar el logro de la competencia matemática básica.

Esta caracterización de la competencia matemática, unida a la de los objetivos específicos configuran dos niveles de expectativas de aprendizaje de gran presencia curricular y, sobre todo, de gran importancia para la labor del profesor.

Su relación con las limitaciones de aprendizaje en forma de errores y dificultades y la importancia de las tareas que brindan oportunidad de aprendizaje a los escolares, estructuran el análisis cognitivo como un procedimiento interrelacionado, coherente y de gran importancia para el desarrollo de la competencia de planificación de los profesores en formación. Esto es lo que perseguíamos con el objetivo específico 1.1.

Otro aspecto que pusimos de manifiesto en los capítulos 2 y 3 fue la relación de estrecha dependencia entre el análisis cognitivo y otros procedimientos del análisis didáctico, como el análisis de contenido y el análisis de instrucción.

En el análisis de contenido, el profesor identifica, selecciona y organiza los conceptos y procedimientos que conforman un tema de matemáticas, el modo en

que esos conceptos y procedimientos pueden representarse y los fenómenos y problemas a los que pueden dar respuesta en una variedad de situaciones y contextos. Estos tres organizadores curriculares: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología configuran el análisis de contenido. La información que proporciona el análisis de contenido es fundamental para el análisis cognitivo. Por una parte, la selección y organización de los conceptos y procedimientos permite distinguir focos de contenido que establecen prioridades de aprendizaje, y que contribuyen, después, al enunciado de los objetivos específicos. Por otra, facilita localizar aquellas nociones que, por su complejidad, pueden ser causa de errores de los escolares. Además, ese análisis del contenido expone la naturaleza y los ámbitos de aplicación del tema, lo cual es central para concretar en cuáles de las ocho competencias matemáticas puede poner énfasis el profesor.

Por otro lado, en la caracterización del análisis cognitivo que hemos realizado, hemos constatado la importancia de las tareas como uno de los elementos de los que dispone el profesor para dar la oportunidad de aprender a sus escolares. Con el ejemplo del sistema de los números naturales, hemos visto que es posible seleccionar tareas para fomentar el logro de determinados objetivos específicos y para promover el desarrollo de determinadas competencias matemáticas. El análisis de instrucción aborda el diseño, la selección y la secuenciación de las tareas, para lo cual es fundamental el enunciado de objetivos específicos y su contribución al desarrollo previo de competencias. Además, los objetivos específicos orientan los criterios de evaluación, cuya concreción y la de los instrumentos de evaluación, se realizan también en el análisis de instrucción.

Esto nos lleva a afirmar que los fundamentos y la estructura del análisis cognitivo que hemos descrito permiten avanzar y mejorar el desarrollo conceptual del análisis didáctico, ya que pone de manifiesto los vínculos entre diferentes elementos que lo constituyen y refuerza, asimismo, su estructura cíclica. Además, el estudio de expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje se integra en el conjunto de organizadores del currículo que conforman el análisis didáctico. Este desarrollo conceptual incide, a su vez, en el programa de formación inicial para profesores de matemáticas de Educación secundaria, pues lo hace más coherente y potencia su carácter relacional, en el cual las diferentes herramientas conceptuales y metodológicas que lo desarrollan adquieren fuerza y validez en su conjunto. Con el objetivo 1.2 de nuestra investigación nos proponíamos lograr esto.

También en capítulo 3, describimos cómo un profesor puede llevar a cabo de manera ideal el análisis cognitivo, y lo ejemplificamos considerando el tema *sistema de los números naturales* (§3.4). En esa ejemplificación pusimos de manifiesto gran parte de la complejidad y de las relaciones que se establecen entre las expectativas, las limitaciones y las oportunidades de aprendizaje. Eso nos conduce, por diversas razones, a la consecución del objetivo 1.3 de nuestra investigación, tal y como describimos a continuación.

La descripción de objetivos específicos y su contribución al desarrollo de competencias que pueden realizar los profesores en formación al llevar a cabo el

análisis cognitivo, pone de manifiesto algunas potencialidades de este procedimiento cuando éstos planifican sus clases y las actividades que pueden implementar en ellas.

En primer lugar, partiendo de las directrices sobre objetivos, contenidos y evaluación que se expresan en el currículo general de un nivel educativo, los profesores pueden determinar focos de interés para el aprendizaje de un tema concreto. Estos focos permiten a continuación delimitar una serie de prioridades de aprendizaje para este tema que, como hemos visto, organizan y acotan el enunciado de objetivos específicos. Estas prioridades de aprendizaje, que se fundamentan y sostienen en la propia estructura conceptual del tema de matemáticas, también orientan el tipo de competencias a las que, desde el trabajo en ese tema, se contribuye más intensamente.

En segundo lugar, los profesores enuncian y seleccionan qué objetivos específicos deben desarrollar los escolares, de un nivel educativo determinado, para el aprendizaje de un tema concreto. Con la descripción de objetivos específicos, los temas de matemáticas se concretan en una serie de conocimientos y actuaciones, que se espera que los estudiantes alcancen, dominen y apliquen al finalizar el aprendizaje de la unidad didáctica correspondiente. El enunciado de estos objetivos se establece en términos de conocimientos, capacidades y contextos. Es decir, los objetivos han de expresar con precisión qué contenidos de un tema deben conocer y dominar los escolares; qué deben poder hacer con esos contenidos, qué actuaciones han de llevar a cabo y, finalmente, cuál deberá ser el uso de esos conocimientos, en qué contextos y situaciones hay que ponerlos en juego. Los objetivos específicos enfatizan la naturaleza funcional de las matemáticas que se propugna en las directrices curriculares actuales, dando una nueva lectura de las expectativas de aprendizaje en matemáticas.

En tercer lugar, los profesores describen en qué medida cada uno de esos objetivos específicos contribuye al desarrollo cognitivo general de los escolares, a cada una de las competencias matemáticas. Las competencias, como expectativas de aprendizaje a largo plazo, permiten a los profesores establecer una relación operativa entre el currículo global de todo un nivel educativo, con el nivel local relativo a un tema específico. Esta relación es fundamental desde el punto de vista de la planificación docente porque trata con dos niveles de expectativas que forman parte de la estructura curricular actual, fomenta el aprendizaje funcional pues incide en aspectos prácticos y observables de la matemática y, además, da coherencia al propio proceso de planificación porque contribuye a la formación integral de los escolares a lo largo de toda la Educación obligatoria. Asumir que el logro de los objetivos contribuye al desarrollo de las competencias matemáticas, permite una aproximación al enfoque funcional sin rupturas, ni tributo a modas. El desarrollo de las distintas competencias matemáticas se va logrando progresivamente, a medida que se van trabajando diferentes temas matemáticos y se alcanzan objetivos específicos que contribuyen a esas competencias.

Por otra parte, al analizar las limitaciones de aprendizaje, los profesores reflexionan acerca de los errores en los que pueden incurrir los escolares al

realizar tareas y las dificultades en las que estos errores pueden estar fundados (§3.2.5). Este análisis permite anticipar algunas situaciones que pudieran darse en el aula mediante tareas complementarias y alternativas o intervenciones metodológicas específicas. Como hemos constatado, es importante asignar un valor positivo y útil al error en el aula de matemáticas y resulta fundamental una reflexión detallada acerca de ellos y de posibles estrategias de intervención para preparar a los profesores en su formación inicial.

El trabajo del profesor sobre las oportunidades de aprendizaje centra su reflexión en el diseño y la selección de tareas matemáticas escolares (§3.3). Para ello es prioritario, entre otros aspectos, relacionar las tareas con un contenido matemático concreto, con unos objetivos específicos claramente definidos y analizar qué competencias se promueven. Las tareas constituyen demandas cognitivas que se hacen a los escolares para que activen determinadas actuaciones mediante diferentes conceptos y procedimientos en una variedad de situaciones. El proceso de selección y diseño de tareas del profesor debe atender todas esas componentes a partir de los contenidos que quiere trabajar y los objetivos que desea lograr sobre esos contenidos. Además, dado que los objetivos han de contribuir al desarrollo paulatino de las competencias matemáticas, las tareas escolares constituyen un importante indicador del tipo de competencias que el profesor enfatiza con las tareas propuestas y el modo en que esas tareas contribuyen a su desarrollo.

La actuación de los escolares ante estas tareas permitirá observar el grado de consecución de los objetivos enunciados, lo cual brinda información valiosa de cara a la evaluación del nivel de desarrollo de la competencia matemática. Recíprocamente, las competencias brindan orientaciones para el diseño y selección de nuevas tareas, pues expresan unas prioridades y expectativas de aprendizaje para las matemáticas. El desarrollo de competencias como *comunicar, argumentar y justificar* o *representar*, necesita tareas que movilicen en los escolares determinadas capacidades como, por ejemplo, expresar los procesos que siguen, justificar la utilidad de los procedimientos empleados para alcanzar unos determinados resultados o bien relacionar e interpretar diferentes representaciones.

Como hemos constatado, el análisis cognitivo se sostiene sobre la noción de currículo y sobre un cuidadoso análisis de los contenidos matemáticos de un tema. Expresa unas prioridades y diferentes niveles de expectativas sobre el aprendizaje escolar de ese tema. También indica qué limitaciones pueden surgir durante el proceso de aprendizaje escolar y sienta las bases del diseño y la selección de tareas para el logro de las expectativas y la superación de las limitaciones. Todos los argumentos expuestos nos han permitido acotar el listado de diecinueve conocimientos y capacidades que un profesor debe poner en juego para llevar a cabo el análisis cognitivo de un tema de las matemáticas escolares (§4.4). Estos avances nos permiten confirmar la consecución del objetivo 1.3 de nuestra investigación.

En resumen, constatamos la certeza de nuestra conjetura en la primera pregunta de esta investigación, que se verifica mediante la respuesta dada al primero de los objetivos generales que perseguíamos:

Conceptualizar el análisis cognitivo como procedimiento para la planificación sobre el aprendizaje escolar por parte del profesor de matemáticas en formación, en coherencia con el análisis didáctico.

2. DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

En el capítulo 5 articulamos dos reflexiones centrales. La primera está relacionada con el contexto y el diseño de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas. Nuestra segunda reflexión detalla el desarrollo de ese programa formativo en un curso académico concreto. Como veremos a continuación, estas aportaciones y argumentos conducen a la consecución del segundo de los objetivos generales de investigación que establecimos en el primer capítulo.

Nuestra visión de la formación inicial de profesores atiende a los intereses y se enmarca en las prioridades de la investigación actual en Educación Matemática (§1.3.1). Por una parte, el establecimiento de las competencias profesionales que debe desarrollar un profesor para el desempeño de su labor docente es una línea de investigación abierta en el panorama actual (§4.2). La competencia de planificación se reconoce como una de las competencias básicas de los profesores pero, por otra parte, todavía es objeto de estudio la complejidad y amplitud de los conocimientos y las capacidades que conforman esa competencia. En este trabajo hemos abordado la caracterización de parte de esos conocimientos y capacidades en relación con la planificación del aprendizaje escolar por parte de los profesores (§4.4). Esta caracterización también se sostiene en los trabajos de investigación previos del grupo FQM193, que han ido desarrollando y afianzando las bases teóricas de las nociones centrales de nuestra visión sobre la formación inicial: currículo, organizadores del currículo y análisis didáctico (§1.3.2).

Esta visión de la formación inicial de profesores se concreta en un programa formativo que llevamos a la práctica en el contexto de la asignatura *Didáctica de la Matemática* en la Universidad de Granada (§5.1). La finalidad principal de esta materia es, precisamente, el desarrollo de la competencia de planificación de los futuros profesores para el diseño de unidades didácticas sobre temas de las matemáticas escolares. La experiencia acumulada a lo largo de más de veinte años de trabajo en la asignatura, sus progresivas actualizaciones y mejoras, junto con las obligadas reformas por razón de los diferentes planes de estudios o por los acusados cambios en el número de estudiantes matriculados, han permitido a los diferentes formadores que hemos participado en ella, avanzar y consolidar su

estructura y su diseño curricular en relación a sus objetivos, contenidos, metodología y evaluación (§5.4). Estos avances se han constatado a través de distintas investigaciones que han proporcionado evidencias sobre sus logros y han contribuido a evaluar, desde diferentes perspectivas, el diseño de ese programa de formación y su implementación (§1.3.4).

Todo esta experiencia docente e investigadora la sintetizamos e incorporamos en la programación de la asignatura en el curso académico 2008-2009. En este curso el análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, ha ocupado un lugar primordial. Por una parte, consideramos conveniente iniciar el trabajo de los futuros profesores con la problemática de la cognición escolar desde un punto de vista curricular. Por otra, logramos reforzar las relaciones de ese análisis con el resto de componentes del análisis didáctico, siguiendo la caracterización del análisis cognitivo que presentamos en los capítulos 2 y 3. Además, en el diseño metodológico enfatizamos una visión funcional del aprendizaje de los profesores, para lo cual presentamos el análisis didáctico y los propios organizadores del currículo desde la necesidad práctica de diseñar unidades didácticas. También fomentamos sesiones y espacios para el trabajo de los grupos de futuros profesores y para la discusión y el debate conjuntos. La puesta en práctica del ciclo metodológico que establecimos (§2.2) constata todos estos aspectos.

Esta primera reflexión, que se fundamenta y sostiene en lo descrito en los cinco primeros capítulos de esta memoria, permite confirmar la consecución del objetivo específico 2.1 de nuestra investigación.

La segunda reflexión que realizamos en el capítulo 5 se centra en la implementación del programa de formación al que nos acabamos de referir. Es decir, tiene que ver con la descripción del desarrollo de la asignatura en el primer cuatrimestre del curso académico 2008-2009 (§5.5).

Del total de sesiones se clase que tuvimos en el desarrollo de la asignatura (58), diecisiete se centraron en el análisis cognitivo y otras diez ocuparon las sesiones iniciales centradas en expectativas de aprendizaje en el currículo. Esto hace que casi un 47% de las sesiones, tuvieran que ver con alguno de los tres organizadores del análisis cognitivo. Por lo tanto, la presencia de este análisis en la implementación de la asignatura es evidente y manifiesta.

Por otro lado, llevamos a la práctica una visión funcional del aprendizaje de los grupos de futuros profesores (ver introducción del capítulo 4). Igualamos su actividad y presencia en la asignatura al de los formadores: 35% del tiempo de la asignatura se centró en actividad de los grupos, uniendo sus presentaciones y el trabajo en clase, 36% en intervenciones de los formadores y 29% en debates y discusiones conjuntos. Durante nuestras intervenciones como formadores, nos propusimos introducir y destacar reflexiones teóricas (Tsamir, 2008), ejemplificar cada nueva noción o procedimiento con un tema de las matemáticas escolares (Zazkis, 2008) y presentar y analizar algunas propuestas didácticas concretas (Peras y Prestage, 2008). También conseguimos que cada nueva herramienta de análisis surgiera con motivo de una necesidad concreta. Esas herramientas se ponen en juego directamente para dar respuesta a una cuestión o

interrogante y todas van dirigidas al diseño de unidades didácticas. En consonancia con lo presentado en los capítulos 2 y 4, estas actuaciones contribuyen al desarrollo de la competencia de planificación por parte de los grupos de profesores en formación.

En el capítulo 6 describimos las producciones de los grupos de futuros profesores que surgen de manera natural en el desarrollo de la asignatura (§6.2). Después de un primer proceso de selección, delimitamos las dieciséis producciones de los grupos en las que concentramos nuestro análisis. La mayor parte tiene que ver con los niveles de expectativas de aprendizaje escolar, con algo más del 55% (capítulos 7 y 8). Además hemos analizado tres producciones relacionadas con limitaciones del aprendizaje (capítulo 9) y otras tantas en relación con las oportunidades de aprendizaje (capítulo 10). También hemos estudiado un cuestionario que realizan los futuros profesores, acerca del significado del aprendizaje escolar en matemáticas (§5.6.2). En resumen, el propio desarrollo de la asignatura, ha permitido recoger información para afrontar el estudio empírico de nuestra investigación.

Esta reflexión, que se sostiene fundamentalmente en lo descrito en el capítulo 5 y 6, permiten lograr el objetivo específico 2.2. En conjunto, por lo tanto, hemos dado respuesta a la segunda pregunta de investigación mediante la consecución del segundo objetivo general:

Diseñar e implementar un programa de formación inicial que incorpore el análisis cognitivo desde una perspectiva funcional.

3. DESARROLLO DE LA COMPETENCIA DE PLANIFICACIÓN EN LOS GRUPOS DE FUTUROS PROFESORES

La respuesta a la tercera pregunta de investigación delimitada y, por lo tanto, la consecución del tercer objetivo general que hemos propuesto, han conducido el diseño del estudio empírico que presentamos en el capítulo 6 y a su ejecución que hemos descrito en los capítulos 7, 8, 9 y 10.

En cada uno de estos capítulos hemos abordado el análisis y la interpretación de las diferentes producciones de los grupos de profesores en formación en relación con el análisis cognitivo. En el capítulo 7, nos ocupamos del trabajo individual de los futuros profesores en las sesiones iniciales de la asignatura, centradas en los diferentes niveles de expectativas que recoge el currículo de Educación secundaria. En cada uno de los tres capítulos siguientes hemos estudiado las producciones de los grupos en relación con cada uno de los tres organizadores del currículo que estructuran el análisis cognitivo: expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje, respectivamente. En cada uno de esos capítulos, hemos hecho un balance final acerca del conocimiento y las capacidades que desarrollan los grupos de futuros profesores sobre cada una de esas herramientas.

Eso ha permitido identificar las diferentes fases en el aprendizaje de los grupos de profesores en formación, mediante las cuales se describe y establece el desarrollo progresivo de la competencia de planificación.

El tercer objetivo general de nuestra investigación se concreta en dos objetivos específicos. Con el primero de ellos proponemos identificar y caracterizar el aprendizaje alcanzado por los grupos de futuros profesores en relación con las tres dimensiones del análisis cognitivo. Con el segundo proponemos emplear esa información para describir el grado de desarrollo de la competencia de planificación en esos grupos de profesores. En la Figura 77 representamos una secuencia que ubica el foco de interés de estos objetivos específicos que abordamos simultáneamente.

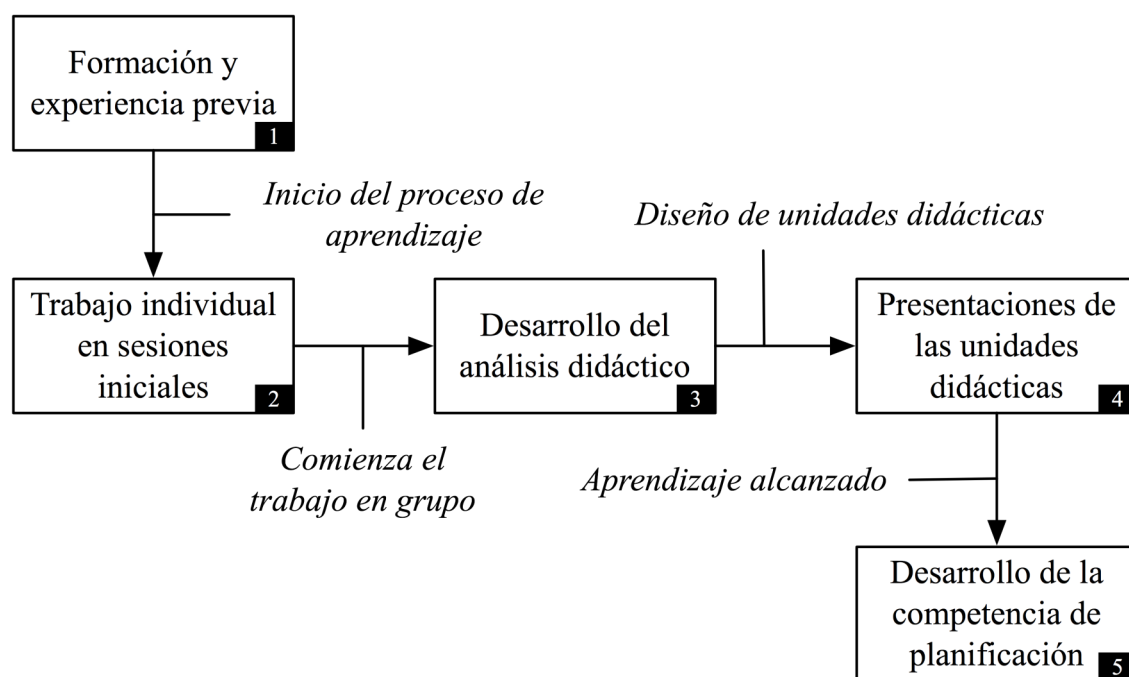


Figura 77. Secuencia de aprendizaje de los futuros profesores

Los diecinueve participantes que cursan la asignatura son estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas y ocho de ellos, además, cursan o habían cursado otra asignatura relacionada con la enseñanza de las matemáticas. La experiencia profesional de la mayor parte de ellos se limita a clases particulares a escolares (cuadro 1 de la Figura 77). El proceso de aprendizaje de estos futuros profesores se inicia con el comienzo de la asignatura. En las sesiones iniciales todo el trabajo que se hace es, prácticamente, individual o bien por pequeños grupos formados para alguna actividad concreta en clase (cuadro 2). Antes de iniciar el análisis de contenido, se conforman los cuatro grupos y se asignan los temas de trabajo. Desde ese momento y durante todo el desarrollo en clase del análisis didáctico (cuadro 3), todas las producciones realizadas por los futuros profesores se hacen por grupos. El análisis didáctico finaliza junto con las sesiones de clase; a partir de este momento, los grupos trabajan en el diseño de las unidades didácticas sobre los temas de trabajo asignados a cada uno. El final de la asignatura coincide con las presentaciones finales de esas unidades (cuadro 4),

cuando los grupos han alcanzado unos conocimientos y unas capacidades que les han permitido mejorar y desarrollar, a su vez, la competencia de planificación (cuadro 5). En lo que resta de capítulo, nos centramos en el aprendizaje alcanzado en relación con el análisis cognitivo y en el desarrollo de esa competencia.

En el capítulo 4, presentamos el conocimiento didáctico, en sus niveles teórico, técnico y práctico, como el conjunto de conocimientos y capacidades que permiten a un profesor llevar a cabo el análisis didáctico de un tema de las matemáticas escolares (§4.3).

El análisis cognitivo, estructurado en torno a tres organizadores del currículo (expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje), forma parte del análisis didáctico; en el capítulo 4 detallamos también los conocimientos y capacidades del conocimiento didáctico necesarios para llevar a cabo ese análisis (§4.4). Estos conocimientos y capacidades permiten definir el aprendizaje deseable para los grupos de futuros profesores al término de la asignatura con motivo de todo el trabajo realizado durante la misma.

Por lo tanto, con la finalidad de dar respuesta al tercer objetivo de investigación, a continuación valoramos el desarrollo de cada uno de esos conocimientos y capacidades por parte de los cuatro grupos de futuros profesores que cursan la asignatura en el curso académico 2008-2009, a partir de los análisis realizados y descritos en los capítulos previos.

3.1 Nivel Teórico del Conocimiento Didáctico

En relación con este primer nivel del conocimiento didáctico de los grupos de futuros profesores, identificamos seis conocimientos o capacidades que pasamos a valorar a continuación.

1. Describir y Analizar Principios y Expectativas sobre el Aprendizaje de las Matemáticas Según los Diferentes Niveles que Propone el Currículo

Como vimos en el capítulo 3, el currículo de matemáticas de Educación secundaria introduce dos niveles de objetivos (generales de área y de curso o vinculados a criterios de evaluación), además de la noción de competencia matemática como una de las competencias básicas y como expectativa a largo plazo (§3.1.2 y §3.1.4).

En las sesiones iniciales de la asignatura introducimos esos niveles de expectativas y los futuros profesores llevan a cabo varias actividades que hemos descrito en el capítulo 7. En ese momento de la asignatura, donde se inicia su proceso de aprendizaje, los estudiantes para profesor muestran una precisión notable para analizar e interpretar los objetivos generales de área en términos de las tres componentes de la noción de expectativa (§7.3). De esas tres componentes, la relativa a situaciones resulta la más compleja. Por otro lado, son capaces de describir y comparar tareas y propuestas didácticas usando como referencia, esos objetivos de área. Sin embargo, tienen bastantes dificultades para concretar esos enunciados generales mediante objetivos específicos. En varios

casos, la especificidad se reduce a descripciones de contenidos matemáticos (§7.2).

Con motivo de la introducción del análisis cognitivo en la asignatura, se enfatiza el papel de los objetivos específicos y las competencias. En el capítulo 8 describimos el proceso de aprendizaje seguido por los grupos de profesores en formación acerca de estos dos niveles de expectativas y sus relaciones (§8.6). El análisis y la interpretación de las diferentes producciones de los grupos, constatan que los grupos son capaces de distinguir y describir ambos niveles, analizando con detalle cada uno de sus temas desde el punto de vista del aprendizaje perseguido y su expresión en objetivos específicos y establecen las competencias como referentes a largo plazo de ese aprendizaje.

En base a estos argumentos, consideramos que los grupos de futuros profesores logran desarrollar esta capacidad.

2. Delimitar y Ejemplificar la Noción de Objetivo Específico

Esta capacidad subyace, en cierta manera, bajo la capacidad 8 del bloque siguiente. Hemos mostrado evidencias de que los grupos son capaces de enunciar objetivos específicos a sus temas (capítulo 8), además de que en determinadas actividades de clase estos grupos han puesto de manifiesto su capacidad para interpretar objetivos de otros temas (ver ejemplo en la sesión 38). Esta capacidad, por lo tanto, ha sido claramente desarrollada por los grupos de profesores en formación.

3. Conocer la Noción de Competencia y su Clasificación (en el Marco de PISA)

Como hemos argumentado en la reflexión en torno a la primera capacidad, los grupos consideran las competencias como un nivel general de expectativas. Así, por ejemplo, en las unidades didácticas hacen un balance global de su planificación, analizan aquellas competencias que más promueven y elaboran argumentos que justifican esos balances (ver ejemplos en §8.4.1). Diferentes debates y discusiones en la asignatura acerca de la noción de competencia en el currículo y su relación con el tratamiento por parte de otros organismos, como por ejemplo la OCDE, permiten a los grupos de futuros profesores reflexionar sobre este nivel de expectativa.

Sin embargo, también disponemos de numerosas evidencias que ponen de manifiesto dificultades y carencias de los grupos en relación al significado de cada una de las ocho competencias matemáticas PISA. Así como algunas de ellas han sido claramente identificadas y bien interpretadas por los grupos (*plantear y resolver problemas, representar y utilizar el lenguaje simbólico*), otras se manejan con significados correctos pero parciales (*argumentar y justificar, comunicar y emplear herramientas tecnológicas*), también hay otras que han aglutinado un gran número de interpretaciones erróneas (*pensar y razonar y modelizar*) (§8.5, §10.2.3 y §10.4.3). En las tres primeras, los grupos han llegado a manejar y relacionar bien sus descriptores con objetivos, limitaciones y tareas. En las tres siguientes, las dudas entre *argumentar y justificar* y *comunicar* han sido frecuentes y en muchos casos, sólo se ha referido aspectos parciales de ellas.

El caso de la competencia *emplear herramientas tecnológicas* ha sido especialmente llamativo porque apenas ha tenido repercusión, a pesar de que varios de los futuros profesores parecen defender el uso de recursos tecnológicos en el aula.

Finalmente, las competencias *pensar y razonar* y *modelizar* han planteado dificultades apreciables en su comprensión a los grupos. La primera, por la imprecisión en su definición, lo cual deriva en una ausencia de criterios para su reconocimiento cuando hay que vincularla con objetivos y tareas. En cuanto a la segunda, la complejidad del proceso de modelización redundaba en una interpretación arbitraria de los grupos, que vinculan esa competencia con tareas totalmente rutinarias.

Por lo tanto, consideramos que los grupos de profesores en formación alcanzan este conocimiento sólo parcialmente.

4. Delimitar y Distinguir las Nociones de Error y Dificultad y la Relación Entre Ambas

Este es un ejemplo de conocimiento que no ha sido adquirido por ningún grupo. Esas dos nociones se han manejado en ocasiones como sinónimos, en ocasiones con algún criterio de inclusión de una en otra y en la unidad didáctica de uno de los grupos, y, finalmente, se han caracterizado como dos tipos diferentes de obstáculos. La información transmitida por los formadores no ha sido suficiente para que los grupos distingan y relacionen ambas nociones.

5. Reconocer y Expresar el Papel del Error en la Educación Matemática

Durante el desarrollo del análisis cognitivo en la asignatura, algunas de las sesiones se centran en el papel del error en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (sesiones 39 y 42), pero en ninguna de las producciones de los grupos sobre limitaciones en el aprendizaje los grupos elaboran reflexión propia alguna al respecto.

Sin embargo, en las unidades didácticas, tres de los cuatro grupos de futuros profesores introducen una valoración propia acerca de la importancia del error en la enseñanza y el aprendizaje. Algunos ejemplos son los siguientes:

Creemos que es importante tener en cuenta los errores en el aprendizaje de las matemáticas, ya que:

Primero: Puede ser que un alumno tenga problemas a la hora de asimilar un concepto, o que arrastre algún error de cursos o temas anteriores. Pero en ambos casos, si se ayuda a que el alumno tome conciencia de su error, se potenciará su actitud crítica, y se podrá enmendar ese error.

Segundo: Es posible también que el profesor haya metido la pata y transmitido por equivocación un resultado falso, o bien, que esté enseñando algún concepto de forma que éste no llega al alumno. En este caso, el error será un indicativo para el profesor de que debe intentar enseñar este resultado o concepto de otra manera, con otro método, otros ejemplos... Esto hace que se depure el proceso de enseñanza.

Tercero: La propia dificultad de un contenido puede originar errores, lo que, como antes, será seña para el profesor de qué parte del contenido necesita más esfuerzos a la hora de ser transmitido al alumno. Lo que queda claro es que un error puede ser fácilmente aprovechable. [UD_ECU, 44]

Muchas veces al proponer a los estudiantes una determinada tarea matemática, nos encontramos con que la forma resolverla por parte de los niños no se ajusta a aquella que nosotros habíamos esperado.

A veces estos procedimientos dan respuestas correctas, aunque el camino seguido no sea el que nosotros, desde una mentalidad de adultos, pensamos sería lógico. Creemos superadas la fase en la que un planteamiento no ortodoxo, en desacuerdo con las normas dictadas por el profesor, suponían un rechazo de todo trabajo planteado por el alumno.

Otras, por el contrario, el proceso o el resultado no son los correctos, y tradicionalmente, este fallo es considerado como un error.

Hoy en día, consideramos el estudio de estos errores como una parte muy importante en el desarrollo del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que aceptamos la idea de que los niños combinan las nociones nuevas que se les presentan en un momento determinado en la escuela con sus experiencias previas. [UD_FRA, 38]

Estos argumentos indican posibles causas de errores, las implicaciones de éstos en otros aprendizajes, la responsabilidad del profesor, o el partido educativo que éste puede obtener de ellos. Este tipo de argumentos y otros similares en otro grupo, nos llevan a considerar que la mayor parte de los grupos han desarrollado esta capacidad, junto con una actitud positiva hacia la presencia de errores en el trabajo de los escolares en matemáticas.

6. Conocer y Ejemplificar Errores y Dificultades Según Diferentes Clasificaciones

En el capítulo 9, analizamos el criterio organizador de las limitaciones en el aprendizaje enunciadas por los grupos y constatamos que las clasificaciones teóricas introducidas en clase por los formadores sólo se emplean por dos grupos en una sola producción (§9.1.1)¹⁴⁷. El grupo de ecuaciones empleó esas clasificaciones a posteriori, para hacer balance de su primera propuesta de limitaciones, si bien no la volvió a emplear en el resto de sus producciones (§9.1.2). El otro caso es diferente, pues el grupo de razón y proporción emplea la clasificación de Movshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987) para organizar de partida su listado. Pero ya constatamos los problemas que eso le genera al grupo, pues sus integrantes se ven forzadas a localizar ejemplos concretos de su tema para algunas categorías y, en varias ocasiones, formulan enunciados muy genéricos y abiertos (§9.1.5).

En consecuencia, este es un conocimiento que los grupos no adquieren a lo largo de su trabajo en la asignatura.

¹⁴⁷ Esas clasificaciones las describimos en el capítulo 3 (§3.2.4).

3.2 Nivel Técnico (Relativo a un Tema Específico de Matemáticas)

En este nivel técnico, identificamos seis conocimientos o capacidades que estructuran el conocimiento didáctico sobre el análisis cognitivo.

7. Seleccionar las Principales Prioridades de Aprendizaje o Focos de Contenido de un Tema de las Matemáticas Escolares.

La selección de focos de contenido y la posterior delimitación de las prioridades de aprendizaje, es el primer paso de cara al enunciado de objetivos específicos (§3.4.1). En el capítulo 8 aportamos evidencias basadas en las producciones de los grupos, de que esa delimitación no es inmediata, ni sencilla pues involucra una notable conjunto de habilidades, pero sí que es básica para organizar los objetivos. Además, ese proceso se sustenta de manera directa en la información que suministra el análisis de contenido del tema. También hemos constatado que los grupos que tienen avanzado ese análisis, acotan los focos y las prioridades de una manera más eficaz y precisa que los que no (§8.1).

Aunque en las primeras producciones varios grupos tienen dificultades para delimitar los focos, con motivo de sucesivas revisiones consiguen delimitarlos de una manera aceptable. Sin embargo, no todos los grupos llegan a elaborar prioridades a partir de los focos seleccionados. Igualmente, no todos los grupos alcanzan a manejar esta distinción desde el principio pero, en todos los casos, su logro produce un momento de estabilidad que, sin duda, facilita el trabajo subsiguiente para el enunciado de objetivos específicos.

Estas evidencias nos llevan a considerar que todos los grupos desarrollan esta capacidad de manera notable.

8. Enunciar Objetivos Específicos y Organizarlos Según Prioridades o Focos

En el capítulo 8 describimos un estudio global y otro local sobre el enunciado de objetivos específicos. El primer estudio nos ha permitido delimitar diferentes momentos en el aprendizaje de los grupos de futuros profesores caracterizados por estados y etapas (§8.2.1, Tabla 51). En el estudio local, hemos caracterizado el progreso y los resultados del aprendizaje de los grupos en términos de la precisión y riqueza de los objetivos enunciados (§8.3). Los datos conjuntos de ambos estudios los hemos sintetizado en la Tabla 74 (§8.6.2).

En conjunto, hemos constatado cómo, a lo largo de las sucesivas producciones, los grupos han ido precisando y enriqueciendo sus objetivos mediante la concreción e incremento de las capacidades enunciadas y de la consideración de aspectos conceptuales y procedimentales de las nociones matemáticas involucradas. La consideración de diferentes contextos no ha tenido tanta relevancia en la mejora de los enunciados.

A pesar de la complejidad manifiesta del proceso de aprendizaje seguido y las constantes modificaciones en los listados de objetivos de los grupos, finalmente todos llegan en la unidad didáctica a una propuesta coherente y bien estructurada. Sólo uno de los grupos considera varios enunciados imprecisos, pero compensa esa carencia con una riqueza notable en los mismos. Aunque a lo largo del

capítulo 8 también hemos destacado la preponderancia de objetivos referidos a aspectos técnicos de los temas y la baja presencia de enunciados relacionados con la modelización y la resolución de problemas, en general hemos aportado un buen número de evidencias que constatan el hecho de que esta capacidad sí ha sido desarrollada por los cuatro grupos de futuros profesores.

9. Describir y Justificar la Contribución de Objetivos a Competencias

Como describimos con detalle en el capítulo 3, una fase importante en el análisis cognitivo es que el conjunto de objetivos específicos trascienda el localismo del tema que se trabaja y se proyecte en las competencias terminales que caracterizan el aprendizaje matemático escolar al término del periodo de la Educación obligatoria. Precisar el criterio mediante el cual un objetivo concreto está vinculado con una competencia determinada, así como buscar un equilibrio entre los vínculos de los objetivos enunciados con las distintas competencias, son dos habilidades fundamentales en esta capacidad.

Pero estas habilidades no son fáciles de alcanzar por parte de los grupos de futuros profesores o, al menos, no son actuaciones sencillas y de aplicación mecánica (§8.4). Necesitan de un dominio sobre el marco de competencias PISA y de un reconocimiento cuidadoso de los descriptores de cada una de ellas, para que su aplicación no sea superficial, arbitraria o induzca a confusión. Y como vimos en el balance de la capacidad 3, la imprecisión en la definición y distinción de esas competencias matemáticas es notable en los grupos.

En el análisis exhaustivo que describimos con detalle en el capítulo 8, hemos dejado constancia de la complejidad y dificultad del proceso de relacionar objetivos y competencias, mostrando, en consecuencia, los limitados logros alcanzados por los distintos grupos de profesores en formación, respecto a esta fase del análisis cognitivo (§8.5). Consideramos, por lo tanto, sólo un desarrollo parcial de esta capacidad.

10. Ejemplificar Tareas que Contribuyan al Desarrollo de Objetivos Específicos

En el capítulo 10 describimos el análisis de los dos momentos en los que, específicamente, los grupos ejemplifican algunas tareas escolares, vinculadas a determinados objetivos de sus temas de trabajo (§10.1). Los resultados muestran que los grupos, desde un punto de vista conjunto, no encuentran excesivas dificultades para llevar a cabo esa ejemplificación. En una primera toma de contacto en una sesión de clase, los grupos son capaces de ejemplificar de manera espontánea, tareas vinculadas a objetivos, pero tienen dificultades para después relacionarlas con las competencias matemáticas.

El siguiente momento en el que los grupos se enfrentan a este tercer organizador del análisis cognitivo es en una sección concreta de la unidad didáctica (§10.2.2). En este caso, la selección o el diseño de tareas de acuerdo a unos objetivos específicos es, por lo general, acertada para cada uno de los grupos de futuros profesores. Todas las asignaciones entre tareas y objetivos son correctas, salvo las de un grupo que dirige sus ejemplos hacia otros objetivos distintos, en vez de hacia aquellos que él mismo había propuesto. Sin embargo, la justificación

esgrimida por el grupo, pone de manifiesto un notable control de argumentos que justifican la selección de una tarea para lograr un objetivo. De hecho, explícitamente argumentan en tutorías con los formadores que es un proceso relativamente sencillo para ellos.

Por lo tanto, constatamos el desarrollo de esta capacidad en los grupos de futuros profesores.

11. Analizar el Desarrollo Esperado de Competencias y Revisar el Proceso

Ninguno de los grupos de profesores ha llevado a cabo un análisis de este tipo de manera natural. El estudio sobre las competencias matemáticas que llevan a cabo los grupos en el contexto del análisis cognitivo, les permite a cada uno de ellos identificar las competencias que promueven de manera primordial en su planificación. Al comparar ese balance con el que hemos realizado en el conjunto de tareas propuestas por cada grupo para la unidad didáctica, hemos constatado que no existen grandes diferencias entre las competencias más visibles en uno y otro momento (§10.4.3).

El predominio de las competencias específicas es notable, incluso en algunos casos no se vislumbra la presencia en las tareas de determinadas competencias que son especialmente destacadas por los grupos. Por lo tanto, concluimos que no disponemos de evidencias que justifiquen el desarrollo de esta capacidad por parte de los grupos de futuros profesores.

12. Enunciar Errores y Dificultades Según Diferentes Fuentes (Incluyendo Referentes Teóricos)

De nuevo las prioridades de aprendizaje (o los focos de contenido), constituyen el principal punto de partida para organizar las limitaciones enunciadas por los grupos (§9.1). Las clasificaciones teóricas sobre errores son útiles para los grupos cuando las consideran un instrumento de control de la variedad y de la profundidad de su propuesta; usarlas como criterio organizador previo a los enunciados, les puede llevar a limitar y forzar esos enunciados (§9.1.6).

Los objetivos específicos constituyen la principal fuente para enunciar las limitaciones del aprendizaje de cada tema, condicionando la precisión y la riqueza de los primeros, la calidad de los enunciados de las segundas. Un enunciado de objetivo impreciso o general, redundante en una limitación también genérica, mientras que si los objetivos son precisos y poseen riqueza de conocimientos o contextos, las limitaciones que surgen en relación a ellos también abordan un amplio abanico de aspectos (§9.2).

En los enunciados propuestos predominan con gran diferencia los errores sobre las dificultades y los obstáculos. Además, los errores más frecuentes a lo largo de las diferentes producciones son los de tipo técnico.

Aunque el proceso de aprendizaje de los grupos sobre limitaciones en el aprendizaje no es tan complejo y dilatado como el de expectativas, hemos puesto de manifiesto una evolución que destaca aspectos importantes. Así como el conocimiento teórico de los grupos de futuros profesores sobre limitaciones

evidencia considerables carencias (capacidad 4), con respecto a su conocimiento técnico los grupos desarrollan una serie de habilidades que les permiten organizar y enunciar errores y dificultades, revisar y depurar esos enunciados e identificar parcelas de un tema de matemáticas específico, en las que pueden presentarse esas limitaciones a los escolares (§9.4).

Basándonos en las evidencias aportadas, consideramos que los grupos de profesores en formación han desarrollado esta capacidad.

13. Vincular Posibles Errores y Dificultades con el Desarrollo de Determinados Objetivos Específicos

Como señalamos en el capítulo 9, en varios momentos de la asignatura los formadores insistimos en la importancia de hacer explícita la relación entre limitaciones y expectativas, pero también hemos indicado que pocos grupos hacen esa asignación. Sin embargo, todos esos acercamientos producen resultados satisfactorios (§9.3.5).

La razón principal es que la mayor parte de los enunciados propuestos por los grupos, provienen de sus propios enunciados de objetivos, con lo que la vinculación es clara.

A pesar de ser escasas, encontramos que estas evidencias constatan que los grupos de futuros profesores son capaces de vincular justificadamente errores y dificultades con objetivos específicos.

14. Ejemplificar Tareas para Detectar y Corregir Errores y Dificultades

De la misma manera que los grupos de futuros profesores disponen de criterios para concretar los objetivos específicos sobre sus temas en una serie de tareas, tampoco presentan dificultades para seleccionar tareas relacionadas con algunas limitaciones concretas del aprendizaje escolar.

Aunque esa relación casi siempre se concreta en tareas para la detección de errores, hemos observado que, entre los cuatro grupos, emplean un ciclo diferente de pasos para describir esa relación (§10.3.2). Esas diferencias enfatizan diferentes argumentos en los criterios de selección de las tareas pero, en todos los casos, resultan bien elaborados.

Los grupos de futuros profesores son, por lo tanto, capaces de ejemplificar tareas que sirvan para detectar errores pero no lo son tanto para diseñar o seleccionar tareas dirigidas a corregirlos. Constatamos entonces un desarrollo parcial de esta capacidad.

3.3 Nivel Práctico del Conocimiento Didáctico

El conocimiento didáctico en relación con el análisis cognitivo y en su nivel práctico, los hemos caracterizado alrededor de cinco conocimientos o capacidades. Analizamos cada una de ellas por separado.

15. Usar la Descripción de Objetivos Específicos y Competencias para Diseñar y Seleccionar Tareas

Cuando los grupos presentan sus unidades didácticas finales, también entregan un documento escrito en que incluyen un anexo de todas las tareas empleadas en la unidad, analizadas desde diferentes puntos de vista (§5.6.4). Algunas conversaciones con los grupos de futuros profesores, han puesto de manifiesto que no todas esas tareas fueron seleccionadas de libros de texto o de otras fuentes documentales. Es decir, los grupos se enfrentan al diseño de tareas y, aunque no tenemos evidencias del proceso de diseño seguido, si hemos presentado y analizado determinados indicadores para valorar el modo en que llevan a cabo y justifican la ejemplificación de tareas vinculadas a objetivos (§10.4.2 y §10.4.3).

Las diferencias entre grupos acerca del número de tareas consideradas y en el número promedio de tareas incluidas en cada una de las seis sesiones programadas, son significativas entre los grupos. Además, dos de los grupos no promueven algunos de los objetivos destacados en sus sesiones con ninguna tarea, mientras que los dos restantes satisfacen totalmente ese aspecto.

Por otro lado, no todos los grupos describen todas las tareas en términos de objetivos o competencias y en algunos casos, esas relaciones son débiles. Recíprocamente, todos los grupos dejan varios objetivos perseguidos en las sesiones sin vincular con algunas de las tareas propuestas. En el caso del grupo de ecuaciones, enuncian nuevos objetivos específicos con motivo de las tareas propuestas, sin vincular éstas con los enunciados que ya habían delimitado en el análisis cognitivo.

En conjunto, la mayor parte de los grupos elabora un análisis acertado de sus tareas según las expectativas de aprendizaje que persiguen. Sin embargo, existen lagunas para cubrir la totalidad de los objetivos propuestos con tareas para los escolares y, también es significativo que los grupos propongan tareas que no aparecen vinculadas a ninguno de los objetivos enunciados. Las competencias juegan un papel secundario en el diseño y la selección de tareas.

Estas evidencias nos llevan a constatar un desarrollo parcial de esta capacidad.

16. Aplicar la Selección de Errores y Dificultades en el Diseño y Selección de Tareas

En el balance que hemos hecho de la quinta capacidad, constatamos que la mayor parte de los grupos de profesores en formación reconocen el importante papel que el error juega en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Asimismo, al valorar el desarrollo de la capacidad 14, hemos destacado que todos los grupos llegan a desarrollar la capacidad de ejemplificar tareas en relación a determinadas limitaciones en el aprendizaje escolar. Sin embargo, sólo dos grupos toman en cuenta las limitaciones en momentos concretos, de manera expresa, para diseñar una y dos tareas de detección de errores, respectivamente. Pero no siempre para diseñar o seleccionar tareas. Otro grupo, simplemente, indica que algunas sesiones tienen como intención que los escolares comprueben

sus errores y saquen provecho de ellos para su aprendizaje, pero no citan tareas específicas.

Por lo tanto, no disponemos de evidencias que permitan constatar el logro de esta capacidad por los grupos de futuros profesores.

17. Emplear la Información del Análisis Cognitivo para la Secuenciación de las Sesiones de la Unidad Didáctica

Salvando la singularidad de uno de los grupos de futuros profesores, que añade o modifica algunos objetivos a la propuesta del análisis cognitivo, las finalidades de las unidades didácticas de los grupos provienen del listado de objetivos específicos delimitados en el trabajo con expectativas de aprendizaje. En promedio, cada grupo propone entre cinco y seis objetivos para cada una de las sesiones. Como hemos constatado, este hecho da consistencia y coherencia entre esa dimensión del análisis cognitivo y el diseño de las sesiones que conforman la programación (§10.4.1).

Por otro lado, el propio orden en el que los grupos de futuros profesores listan sus objetivos (en función de prioridades de aprendizaje o focos de contenido), tiene una notable repercusión en la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica. Los primeros objetivos enunciados en el listado de expectativas, se abordan, por lo general, en las primeras sesiones de la unidad didáctica, mientras que los últimos del listado tienen presencia, fundamentalmente, en las últimas sesiones (ver Figura 64 en ese mismo epígrafe).

En consecuencia, hemos mostrado cómo la secuencia de prioridades y el enunciados de objetivos, se ven reflejados en la secuencia de las sesiones de las unidades didácticas. Por el contrario, como señalamos en el balance de la capacidad 16, las limitaciones en el aprendizaje tienen una presencia casi imperceptible. Estas evidencias nos llevan a considerar que los grupos de profesores en formación han desarrollado notablemente esta capacidad, aunque no de manera completa.

18. Aplicar el Enunciado de los Objetivos y la Selección de Competencias en el Diseño de las Tareas de Evaluación

El trabajo de los grupos sobre evaluación apenas se desarrolló en las sesiones de clase centradas en el análisis de instrucción. De hecho, las propuestas de los grupos sólo se presentan en clase con motivo de las exposiciones de las unidades didácticas finales. En esos documentos, tres grupos vinculan explícitamente las tareas de evaluación con objetivos algunos de los objetivos propuestos en el análisis cognitivo y uno de ellos destaca, además, las competencias que promueven las tareas propuestas en el examen final.

Pero en ningún caso se destacan los objetivos que los grupos señalan como significativos ni aquellos que mayor presencia tienen en las sesiones. Tampoco hay concordancia con las competencias promovidas y el balance del análisis cognitivo en que los grupos destacan una serie de competencias.

Por lo tanto, no disponemos de evidencias para constatar el desarrollo de esta capacidad en los grupos de profesores en formación.

19. Utilizar la Información del Análisis Cognitivo Para Reformular, Ampliar o Eliminar Aspectos del Análisis de Contenido

Aunque en diferentes secciones de esta memoria hemos insistido en la importancia de las relaciones mutuas entre las diferentes componentes del análisis didáctico (§2.2, Figura 1), lo cierto es que las evidencias muestran que los grupos de futuros profesores establecen una secuencia natural en la que el análisis de contenido queda casi totalmente establecido antes de finalizar o poco después de iniciar su trabajo en el análisis cognitivo.

La estructura conceptual que, constituye el producto final del análisis de contenido, queda delimitada, para tres de los cuatro grupos, con motivo del balance de ese análisis que se presenta en la asignatura antes de iniciar el trabajo con objetivos específicos (§5.6.1). Después de esa presentación, sólo el grupo de ecuaciones hizo algunas modificaciones organizativas, pero no estructurales.

Por tanto, no tenemos ninguna evidencia de que los grupos de futuros profesores hayan aplicado cambios significativos en alguno de los organizadores del análisis de contenido con motivo de los resultados obtenidos en el análisis cognitivo.

Este análisis que hemos llevado a cabo, nos permite dar respuesta al objetivo específico de investigación 3.1.

3.4 La Competencia de Planificación en los Grupos de Futuros Profesores

Las diecinueve capacidades que hemos analizado constituyen el conocimiento didáctico en sus tres niveles (teórico, técnico y práctico), necesario para llevar a cabo el análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico. Asimismo, en el capítulo 2 justificamos la estructura, organización y funcionamiento del análisis didáctico, como un procedimiento para el diseño de unidades didácticas (§2.2). Estas tres componentes configuran la noción de competencia de planificación, que retomamos en la Figura 78.

Por lo tanto, con el balance realizado en el epígrafe anterior y con el soporte de los análisis e interpretaciones realizados y descritos en los capítulos previos, hemos señalado qué parcelas del conocimiento didáctico, han desarrollado los grupos de profesores en formación en relación al análisis cognitivo a lo largo de la asignatura. Es decir, en qué medida han desarrollado su competencia de planificación en relación con el análisis cognitivo.

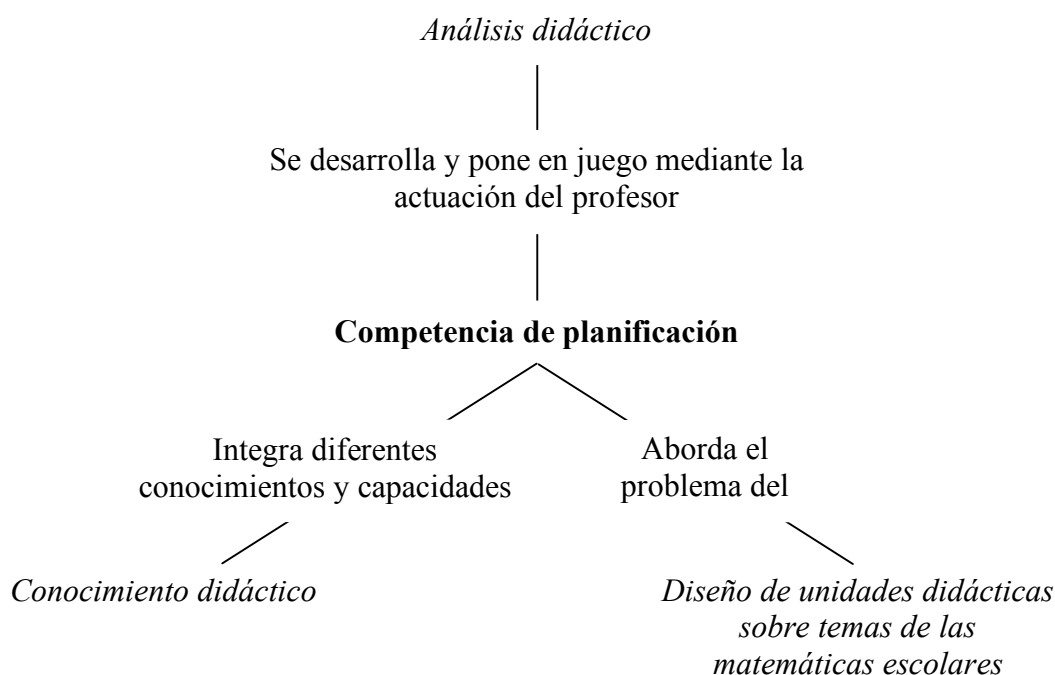


Figura 78. Componentes de la noción de competencia de planificación del profesor de matemáticas

Los grupos de futuros profesores que cursaron la asignatura Didáctica de la Matemática en el curso 2008-2009, en relación con el análisis cognitivo, han desarrollado satisfactoriamente los siguientes conocimientos o capacidades:

- Describir y analizar principios y expectativas del aprendizaje de las matemáticas según los diferentes niveles que propone el currículo;
- delimitar y ejemplificar la noción de objetivo específico;
- reconocer y expresar el papel del error en la educación matemática;
- seleccionar las principales prioridades de aprendizaje o focos de contenido de un tema de las matemáticas escolares;
- enunciar objetivos específicos y organizarlos según prioridades o focos;
- ejemplificar tareas que contribuyan al desarrollo de objetivos específicos;
- enunciar errores y dificultades según diferentes fuentes (incluyendo referentes teóricos); y
- vincular posibles errores y dificultades con el desarrollo de determinados objetivos específicos.

Los conocimientos y capacidades que estos grupos han desarrollado parcialmente, son:

- Conocer la noción de competencia y su clasificación (en el marco de PISA);
- describir y justificar la contribución de objetivos a competencias;
- ejemplificar tareas para detectar y corregir errores y dificultades;

- usar la descripción de objetivos específicos y competencias para diseñar y seleccionar tareas; y
- emplear la información del análisis cognitivo para la secuenciación de las sesiones de la unidad didáctica.

Finalmente, los conocimientos y capacidades que los grupos de profesores en formación no han logrado desarrollar en la asignatura, son los siguientes:

- Delimitar las nociones de error y dificultad y la relación entre ambas;
- conocer y ejemplificar errores y dificultades según diferentes clasificaciones;
- analizar el desarrollo esperado de competencias y revisar el proceso;
- aplicar la selección de errores y dificultades en el diseño y selección de tareas;
- aplicar el enunciado de los objetivos y la selección de competencias en el diseño de las tareas de evaluación; y
- utilizar la información del análisis cognitivo para reformular, ampliar o eliminar aspectos del análisis de contenido.

Con este análisis, damos respuesta al segundo objetivo específico vinculado con el tercer objetivo general de investigación (objetivo 3.2). En consecuencia, hemos conseguido dar respuesta el tercer objetivo de investigación:

Identificar, describir y analizar el desarrollo de la competencia de planificación sobre aprendizaje escolar que muestran los participantes en el programa de formación inicial del curso 2008-2009.

3.5 Otro Resultado de la Investigación

Más allá de la consecución o no de los objetivos que nos propusimos para nuestra investigación, hemos reconocido y constatado un hallazgo que, aunque no estaba contemplado originalmente, lo encontramos relevante.

Como hemos destacado en esta memoria, toda nuestra investigación gira en torno a la competencia de planificación de los profesores que cursan la asignatura Didáctica de la Matemática. Pero el propio desarrollo de la asignatura, nos ha hecho constatar que los futuros profesores, desarrollan otras competencias relacionadas también estrechamente con la actividad docente del profesor. Entre ellas destacamos dos que, como vimos en el capítulo 4, también forman parte de la formación básica de los profesores (ANECA, 2005b; Niss, 2006; Ministerio de Educación y Ciencia, 2007d; Moreno et al., 2007). Son competencias relacionadas con *comunicar* y con el *trabajo en grupo*.

Las numerosas presentaciones que los futuros profesores realizan a lo largo de la asignatura, además de las discusiones y debates en los que intervienen, van desarrollando en ellos capacidades como sintetizar y transmitir información de manera clara y ordenada, destacar ideas centrales o elaborar argumentos que justifiquen sus reflexiones. Por otro lado, a pesar de que muchos de los

estudiantes que se matriculan en la asignatura nunca han manejado un ordenador con ese propósito, al final del curso son capaces de elaborar presentaciones informatizadas bastante sofisticadas y con buenos criterios técnicos. Todas esas capacidades, contribuyen sin duda al desarrollo de la competencia profesional de comunicación y expresión de los futuros profesores.

Otra actividad a la que no están habituados los estudiantes de la Licenciatura de Matemáticas es al trabajo en grupo y, aunque en las sesiones iniciales casi todo el trabajo se realiza de manera individual, durante la mayor parte de la asignatura los futuros profesores trabajan en equipos estables. En el transcurso de la asignatura desarrollan capacidades y habilidades como la asignación de roles, el reparto de tareas o la puesta en común de ideas o propuestas, aunque en ocasiones, también surgen diferencias en el seno de un grupo que pueden llegar a distorsionar los resultados de sus trabajos. En cualquier caso, consideramos que es importante que los futuros profesores incorporen este tipo de experiencias en su formación inicial como profesionales de la educación.

4. BALANCE ESTRATÉGICO DE UN PROGRAMA DE FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

En este apartado hacemos un balance estratégico del programa de formación inicial que hemos diseñado y llevado a la práctica partiendo de los datos considerados en la consecución de los tres objetivos de investigación planteados y basándonos en conceptos y trabajos sobre evaluación estratégica (Juran y Godfrey; 2001). Este balance se estructura en torno a cuatro componentes: debilidades, amenazas, fortalezas y oportunidades¹⁴⁸. Cada una de esas componentes la describimos atendiendo a dos aspectos centrales de nuestra investigación: la caracterización del análisis cognitivo y el diseño de un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.

4.1 Debilidades

Algunas debilidades del programa de formación que hemos diseñado se sitúan en los organizadores que estructuran el análisis cognitivo y en las relaciones que se establecen entre ellos. Debemos seguir indagando, por ejemplo, en los criterios que relacionan diferentes niveles de expectativas, pues hemos constatado que los grupos de profesores en formación tienen dificultades para justificar esas relaciones. En ocasiones, esas dificultades se producen por no delimitar claramente el significado de algunas de las competencias matemáticas PISA, como es el caso de *pensar y razonar* y *modelizar* (capítulo 8). El soporte teórico en estos casos está poco desarrollado aún.

También hemos comprobado que el trabajo con las limitaciones del aprendizaje de los grupos de futuros profesores apenas tienen repercusión en el diseño y

¹⁴⁸ Las siglas de las cuatro componentes, DAFO, es otro modo de referirse a este tipo de evaluaciones.

selección de tareas para la unidad didáctica. En general, la relación del análisis cognitivo con el análisis de instrucción es, todavía, un tema pendiente en nuestro trabajo a pesar de que se están produciendo avances (Marín, 2009).

Una debilidad clara del programa de formación que impartimos es su duración. Llevar a cabo la introducción de un grupos de futuros profesores en toda la problemática que involucra la planificación de las matemáticas escolares, requiere un tiempo del que todavía no se dispone.

Finalmente, el hecho de que la producción final de la asignatura se limite a una propuesta hipotética que no se lleva a la práctica con escolares de algún centro educativo, es una debilidad del programa de formación, ya que no permite que los grupos pongan en juego mediante la práctica sus conocimientos ni que podamos reflexionar sobre la planificación programada a partir de los resultados de su aplicación.

4.2 Amenazas

Desde el punto de vista de la conceptualización del análisis cognitivo encontramos una amenaza en la noción de competencia.

Es evidente que, a pesar del auge que recientemente ha experimentado la noción de competencia para establecer las expectativas de aprendizaje a término en todas las etapas del sistema educativo (capítulos 1, 3 y 4), aún surgen dudas en torno a su empleo práctico y a su potencialidad en el aula de matemáticas. Parte de estas dudas provienen de los diferentes acercamientos que se realizan a esa noción. Aun cuando hay establecidos descriptores compartidos de su significado teórico, existen diferentes modos de aproximar propuestas para el desarrollo y la evaluación de competencias, que hacen surgir dificultades e imprecisiones, las cuales acaban generando controversia (Lupiáñez, 2008). Aceptar una indefinición conceptual que derive, por ejemplo, en un uso arbitrario de este concepto, es una seria amenaza para el actual marco curricular, que debilitaría la estructura del análisis cognitivo.

Por otro lado, en los capítulos 1 y 4 hemos descrito la importante actividad que, con motivo de la implantación del Espacio Europeo de Educación Superior, existe en torno a la organización de las nuevas titulaciones de Grado. El hecho de que en las propuestas de nuevas titulaciones de Grado se eliminen materias que se dirigen explícitamente a la formación inicial de profesores, supone una seria amenaza a la propuesta formativa de este ciclo y una rémora para el desarrollo profesional de los docentes de Educación secundaria.

4.3 Fortalezas

La principal fortaleza de la estructura que hemos conceptualizado para el análisis cognitivo también está en la noción de competencia, ya que hemos constatado que existe un marco conceptual teóricamente bien fundado, con amplia difusión internacional, avalado institucionalmente por la OCDE y la Unión Europea. Las competencias no son una simple *moda* en Educación, sino que reciben la cobertura y el apoyo de gobiernos e instituciones educativas autonómicas,

nacionales, europeas e internacionales. El estudio PISA (OCDE, 2005a) y el informe DeSeCo (OCDE, 2005b) son dos ejemplos bien conocidos de esta solidez teórica y de su base política, (capítulos 1 y 3).

Esta fortaleza da pie a otros puntos fuertes de nuestra propuesta de análisis cognitivo. Es relevante destacar que el actual currículo español para Educación obligatoria recibe soporte teórico de la noción de competencia como expectativa de aprendizaje a largo plazo. Igualmente, la reforma en cursos de las titulaciones universitarias de Grado, Máster y Doctorado se sustentan en este concepto (capítulo 3). Asimismo, son cada vez más frecuentes las publicaciones relacionadas con el empleo de esta noción de competencia en relación con la actividad del profesor.

Por otro lado, la estructura global diseñada para el análisis cognitivo contribuye al desarrollo conceptual del propio análisis didáctico como procedimiento para que el profesor planifique, lleve a la práctica y evalúe unidades didácticas. Refuerza sus conexiones, contribuye a fundamentar su aplicación en el análisis de las matemáticas escolares y potencia su estructura cíclica.

En cuanto al programa de formación, la principal fortaleza que destacamos es la riqueza de experiencias acumuladas en el estudio e investigación de este tipo de actividades formativas, que inciden en una revisión y mejora constantes de todos los factores y condicionantes involucrados (capítulo 5).

4.4 Oportunidades

La revisión de la literatura de investigación actual, que realizamos en el contexto de este trabajo, puso de manifiesto que este trabajo realiza aportes significativos y valiosos, que brindan una interesante oportunidad de avance.

En primer lugar y en relación con la caracterización del análisis cognitivo, consideramos que aporta una herramienta operativa y unos criterios objetivos para que el profesor pueda planificar el proceso de aprendizaje de sus escolares acerca de las matemáticas escolares (§2.4 y capítulo 3). También hemos definido un procedimiento para llevar a cabo el análisis cognitivo que pone de manifiesto la funcionalidad de los organizadores de currículo que lo conforman (§3.4). En el contexto de los programas de formación inicial, hemos constatado que suministra una herramienta de análisis coherente y estructurada de las matemáticas escolares para los futuros profesores que se enmarca en una propuesta formativa elaborada (capítulo 5). Todas estas características muestran oportunidades para renovar el trabajo del profesor de matemáticas en ejercicio y, en definitiva, la innovación y mejora de la práctica docente.

En segundo lugar, hemos contribuido a profundizar sobre la competencia de planificación del profesor precisando las nociones de conocimiento didáctico y análisis didáctico en el contexto del diseño de unidades didácticas (§4.2). Esto ha llevado a detallar el conjunto de conocimientos y capacidades que, como parte del conocimiento didáctico, permiten al profesor llevar a cabo el análisis cognitivo de las matemáticas escolares (§4.4). Esta descripción nos ha brindado la oportunidad de llevar a cabo una exploración del aprendizaje desarrollado por

varios grupos de futuros profesores en relación al análisis cognitivo (capítulos 8, 9 y 10).

También desde el punto de vista del programa de formación, contamos con la oportunidad de trabajar con estudiantes que tienen un marcado interés formativo como futuros profesores, que demandan más asignaturas con esta orientación y que se implican con seriedad y constancia en su desarrollo.

La creación de espacios de debate y discusión, también brindan la oportunidad de compartir y contrastar esta propuesta para formar profesores tanto en formación inicial como permanente.

5. LÍNEAS ABIERTAS DE INVESTIGACIÓN

En relación con la conceptualización del análisis cognitivo, como parte del análisis didáctico, tal y como hemos señalado antes, tenemos que avanzar en la determinación de criterios de asignación entre diferentes niveles de expectativas, en la delimitación y concreción del significado de algunas competencias matemáticas, en el papel de las limitaciones del aprendizaje escolar en el diseño de tareas y en la organización y finalidades de las sesiones de la unidad didáctica. También existen estudios en curso que exploran el papel de otros organizadores para el análisis cognitivo, como las *trayectorias hipotéticas de aprendizaje* (Gómez y Lupiáñez, 2007) o los *camino de aprendizaje* (Gómez y González, 2009). En relación con otros componentes del análisis didáctico, la conceptualización del análisis de instrucción como continuidad del análisis cognitivo es un tema en el que ya estamos trabajando.

Nos proponemos seguir avanzando e innovando con estas ideas tanto a nivel teórico y conceptual como a nivel práctico, en el contexto del programa de formación inicial que se lleva a cabo en la asignatura Didáctica de la Matemática que se imparte en la Universidad de Granada. Los resultados encontrados en nuestra investigación permiten reformular y modificar intervenciones, actividades o contenidos para superar algunas de las limitaciones encontradas y para enfatizar las oportunidades que se presenten.

Finalmente, sigue siendo objeto de estudio e investigación el conocimiento de los profesores y los procesos de aprendizaje que desarrollan en los programas de formación inicial. El establecimiento de las competencias que sería deseable que desarrollasen en esos programas formativos, sigue señalando una prometedora dirección sobre la que explorar.

AGRADECIMIENTOS

Mi relación con Luis Rico comenzó en 1998, cuando fui alumno suyo en la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato*, la que tantas veces he referido en este trabajo. Desde entonces, hemos compartido varias actividades y colaboraciones pero, sin duda alguna, esta investigación ha sido la más elaborada, compleja y dilatada en el tiempo. Sin su sapiencia y paciencia, no me habría sido posible culminarlo con el grado de satisfacción que lo he hecho. Espero que el fin de esta etapa sea el inicio de otra.

Al Dr. Gómez le agradezco las numerosas conversaciones y discusiones que han acompañado el análisis cognitivo desde que se ideó y los enriquecedores comentarios recibidos a la primera versión esta memoria. Modestamente espero que mi trabajo sea una digna continuación del suyo. A mi amigo Pedro Gómez le debo muchos buenos ratos de los que siempre he sacado provecho. Pero mi revés es el que más ha ganado.

Mi agradecimiento también al *Departamento de Didáctica de la Matemática*. Todos sus integrantes siempre me han hecho sentir parte de él y eso me enorgullece. Especialmente me quedo con las palabras de aliento y ánimo que durante mucho tiempo he recibido de Encarnación Castro, Rafael Roa, Angustias Vallecillos y, sobre todo, de Marta Molina, Pablo Flores y Consuelo Cañadas.

Isidoro Segovia, Francisco Ruiz y Francisco Fernández siempre han estado a mi lado y han gastado parte de su tiempo y esfuerzo en ayudarme. Y además de buenos compañeros, son mis amigos.

María José González me acompañó en el inicio de mi carrera docente y desde entonces me ha ayudado en todo lo que he necesitado. Santander sólo me trae buenos recuerdos y espero que, desde ahora, también nuevos proyectos.

Antonio Marín ha leído gran parte del borrador de esta memoria y me ha hecho importantes sugerencias. Siempre aprendo de su experiencia profesional y de su saber estar. Ahora *toca* el análisis de instrucción...

Manuel Fernández Cruz, José Álvarez, Pilar Núñez y Tomás Recio estarán encantados de recibir un ejemplar de este documento. Y yo feliz de poder entregárselo.

Mari Carmen y Antonio también me han ayudado. Muchas gracias a ellos y a su hija, Mari Carmen, que además de hablar sabe escuchar.

Maribel e Inma han colaborado en la edición de breves, pero importantes partes de este documento. Aquí han dejado su impronta y se lo agradezco mucho.

Mis padres siempre me han apoyado en todo lo que he iniciado y gran parte de lo alcanzado se lo debo a ellos. Espero que también sepan que en toda etapa nueva que empiezo, los llevo conmigo siempre. Gracias por todo.

Y por último, sólo hay una persona que podría tener más deseos que yo de finalizar este trabajo. Además, no ha pasado ni un instante en que no me hiciera sentir que los momentos difíciles se suavizan si se comparten. Qué te puedo decir. Ya lo sabes, *ily*...

Capítulo 12

REFERENCIAS

- Abbott, I. y Huddleston, P. (2000). Standards, Competence and Knowledge: Initial Teacher Training and Business. *International Journal of Value-Based Management*, 13, 215–227.
- Abrantes, P. (2001). Mathematical competence for all: options, implications and obstacles. *Educational Studies in Mathematics*, 47, 125-143.
- Achtenhagen, F., Oser F. y Renold, U. (2006). *Epilogue*. En F. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold. (Eds.), *Competence Oriented Teacher Training*. (pp. 297-304). Rotterdam: Sense Publisher.
- Adler, J., Ball, D., Krainer, K., Lin, F.-L. y Novotná, J. (2005). Mirror images of an emerging field: Researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.
- Adler, J. y Huillet, D. (2008). The social production of mathematics for teaching. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 195-221). Rotterdam: Sense Publishers.
- Allegre, C., Berlinguer, L., Blackstone, T. y Rüttgers, J. (1998). *Sorbonne Joint declaration. Joint declaration on harmonisation of the architecture of the European higher education system*. Descargado el 17/4/2009, de http://www.eees.es/pdf/Sorbona_EN.pdf
- Allsopp, D., Lovin, L., Green G. y Savage-Davis, E. (2003). Why students with special needs have difficulty learning mathematics and what teachers can do to help. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 8(6), 308-314.
- Almodóvar, J. A., García, P., Gil, J., Vázquez, C., Santos, D. y Checa, N. (1999). *Órbita 2000 Matemáticas 3º*. Madrid: Santillana.
- Álvarez, F., Garrido, L. M. y Ruiz, A. (1996). *Fractal 3*. Barcelona: Vicens Vives.
- American Association for the Advancement of Science (1999). *Middle grades mathematics textbooks: A benchmarks-based evaluation*. Washington, DC: Autor.
- Ames, C. y J. Archer. (1988). Achievement goals in the classroom: Student learning strategies and motivational processes. *Journal of Educational*

- Psychology*, 80(3), 260-267.
- Anderson, L. W., Krathwohl, D. R., Airasian, P. W., Cruishank, K. A., Mayer, R. E., Pintrich, et al. (Eds.) (2001). *A Taxonomy for Learning, Teaching and Assessing. A Revision of Bloom's Taxonomy of Educational Objectives*. New York: Longman.
- ANECA (2005a). *Libro blanco. Título de Grado en Magisterio (volumen 1)*. Descargado el 26/3/2008, de http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_jun05_magisterio1.pdf/
- ANECA (2005b). *Libro blanco. Título de Grado en Matemáticas*. Descargado el 26/3/2008, de http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_jun05_matematicas.pdf/
- ANECA (2005c). *Libro blanco. Título de Grado en Pedagogía y Educación Social (volumen 1)*. Descargado el 26/3/2008, de http://www.aneca.es/activin/docs/libroblanco_pedagogia1_0305.pdf/
- Bachelard G. (1978). *La filosofía del no*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Bachelard G. (1988). *La formación del espíritu científico*. Mexico: Siglo XXI.
- Baethge, M., Achtenhagen, F., Arends, L., Babic, E., Baethge-Kinsky, V. y Weber, S. (2006). *PISA-VET: A Feasibility-Study*. Stuttgart: Franz Steiner Verlag.
- Bagni, G. T. (2005). The historical roots of the limit notion: cognitive development and the development of representation registers. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 5(4), 453-468.
- Bajo, M. T., Maldonado, A., Moreno, S., Moya, M. y Tudela, P. (2003). *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Granada: Universidad de Granada.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: una empresa docente.
- Balacheff, N. y Kaput, J. (1996). Computer-Based Learning Environments in Mathematics, en A. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 469-501). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Ball, D. L. (2002). What do we believe about teacher learning and how can we learn with and from our beliefs? En D. S. Mewborn, D. Y. White, H. G. Wiegel, R. L. Bryant y K. Nooney (Eds.), *Proceedings of the twenty-fourth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3) (pp. 3-19). Columbia, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Ball, D. L., Bass, H. y Hill, H. C. (2004). *Knowing and using mathematical knowledge in teaching: Learning what matters*. Trabajo presentado en

- Southern African Association for Research in Mathematics, Science and Technology, Cape Town.
- Ball, D. L., Lubienski, S. T. y Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4 ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- Beck, C., Hart, D. y Kosnik, C. (2002). The teaching standards movement and current teaching practices. *Canadian Journal of Education*, 27(2&3), 175-194.
- Bedoya, E. (2002). *Formación inicial de profesores de matemáticas: enseñanza de funciones, sistemas de representación y calculadoras gráficas*. Universidad de Granada.
- Bell, A. (1987). Diseño de enseñanza diagnóstica en matemáticas. En A. Alvarez (Coord.), *Psicología y Educación: realizaciones y tendencias actuales en la investigación y en la práctica: Actas de las II Jornadas Internacionales de Psicología y Educación* (pp. 73-93). Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Bell, A., Burkhardt, H. y Swan, M. (1992). Assessment of extended tasks. En R. Lesh y S. Lamon (Eds.), *Assessment of authentic performance in school mathematics* (pp. 145-176). Washington: American Association for the Advancement of Science.
- Bell, A. Costello, J y Küchemann, D. (1985). *A review of research in mathematical education. Research on learning and teaching*. Windsor: NFER- NELSON.
- Benavides, M. J. (2008). *Caracterización de sujetos con talento en resolución de problemas de estructura multiplicativa*. Universidad de Granada.
- Beneitone, P., Esquetini, C., González, J., Maletá, M. M., Siufi, G. y Wagenaar, R. (Eds.). (2007). *Reflexiones y perspectivas de la educación superior en América Latina. Informe final Proyecto Tuning América Latina 2004-2007*. Bilbao: Universidad de Deusto, Universidad de Groningen.
- Bergqvist, T., Lithner, J. y Sumpter, L. (2008). Upper secondary students' task reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 39(1), 1-12.
- Berinderjeet, K. (1997). Difficulties with problem solving in mathematics. *Mathematics Educator*, 2(1), 93-112.
- Bloom, B., Engelhart, M.; Furst, E.; Hill, W. y Krathwohl, D. (1971). *Taxonomía de los objetivos de la educación: clasificación de las metas educativas. Tomo I: Ámbito del conocimiento*. Alcoy: Editorial Marfil.
- Boero, P. y Guala, E. (2008). Development of mathematical knowledge and beliefs of teachers. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 223-244). Rotterdam: Sense Publishers.

- Borassi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7, 2-9.
- Borba, M. C. y Gadanidis, G. (2008). Virtual communities and networks of practicing mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in Mathematics Teacher Education* (pp. 181-206). Rotterdam: Sense Publishers.
- Boscardin, C. K., Aguirre-Muñoz, Z., Stoker, G., Kim, J., Kim, M. y Lee, J. (2005). Relationship between opportunity to learn and student performance on english and algebra assessments. *Educational Assessment*, 10(4), 307-332.
- Bowden, J. A. (1997). *Competency-based education: Neither a panacea nor a pariah*. Trabajo presentado en Technological Education and National Development 97 Conference, Abu Dhabi.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Bujland, R. (1999). Problem solving processes in geometry. Teacher students' cooperation in small groups: a dialogical approach. En O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 121-128). Columbia, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Buxton, L. (1981). *Do you panic about maths?* Londres: Heinemann.
- Calzadilla, D. M. (2006). *Limitación en el aprendizaje de origen social, en los estudiantes universitarios de la SUM de Minas (Cuba)*. Descargado el 25/1/09, de <http://www.monografias.com/trabajos45/limitacion-aprendizaje/limitacion-aprendizaje.shtml/>
- Campillo, A. (2004). *Título de Grado en Matemáticas*. Madrid: Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación.
- Canale, M. (1983). From communicative competence to communicative language pedagogy. En J. C. Richards y R. W. Schmidt (Eds.), *Language and communication* (pp. 2-27). Londres: Longman.
- Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de Educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Universidad de Granada.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.
- Carrillo, J. y Marín, A. (1994). Análisis didáctico de contenidos en el área de matemáticas. En L. Rico y J. Gutiérrez (Eds.), *Formación científico-*

- didáctica del profesor de matemáticas de secundaria* (pp. 44-50). Granada: Instituto de Ciencias de la Educación.
- Carrión, V. (2007). Análisis de errores de estudiantes y profesores en expresiones combinadas con números naturales. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 11, 19-57.
- Carroll, J. B. (1963). A model of school learning. *Teachers Collage Records*, 64(1), 723-733.
- Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada: Comares.
- Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Granada: Comares.
- Castro, E. (Ed.) (2001a). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.
- Castro, E. (2001b). Multiplicación y división. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 203-230). Madrid: Síntesis.
- Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: ice - Horsori.
- Castro, E., Rico, L. y Castro, E. (1988). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.
- Cecilia, L. M. (2007). *Estudio de un programa de prácticas de matemáticas para maestros*. Trabajo de Investigación Tutelada, Universidad de Granada.
- Cho, S. y Hwang, D. J. (2006). Math creative problem solving ability test for identification of the mathematically gifted. *Journal of the Korea Society of Mathematical Education. Series D*, 10(1), 55-70.
- Chomsky, N. (1957). *Syntactic Structures*. New York: Mouton.
- Chomsky, N. (1965). *Aspects of the Theory of Syntax*. Cambridge, MA: MIT Press.
- Chomsky, N. (1980). Rules and representations. *The Behavioral and Brain Sciences*, 3, 1-61.
- Christiansen, B. y Walther, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen y A. G. Howson (Eds.), *Perspectives on mathematics education* (pp. 243-307). Dordrecht: Kluwer.
- Clarke, D. (2008). The mathematics teacher as curriculum maker. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.), *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 133-151). Rotterdam: Sense Publishers.
- Clarke, M. y Gregory, K. (2003). Projects: tracking practices, opportunities to learn, and achievement in mathematics: An international perspective from TIMSS. *Journal of Mathematics Teacher*, 96(7), 526.

- Cochran-Smith, M. (2004). The problem of teacher education. *Journal of Teacher Education*, 55(4), 295-299.
- Coll, C. (2002). Constructivismo y educación: la concepción constructivista de la enseñanza y el aprendizaje. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comp.), *Desarrollo Psicológico y Educación. 2. Psicología de la Educación Escolar* (pp. 157-186). Madrid: Alianza.
- Coll, C. y Martín, E. (2003). La educación escolar y el desarrollo de capacidades. En E. Martín y C. Coll (Eds.), *Aprender contenidos, desarrollar capacidades* (pp. 13-57). Barcelona: Edebé.
- Collie-Patterson, J. M. (2000). *The effects of four components of opportunity to learn on mathematics achievement of Grade 12 students in New Providence, Bahamas*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the Mid-South Educational Research Association, Bowling Green, KY.
- Comisión de las Comunidades Europeas (2005). *Propuesta de recomendación del Parlamento Europeo y del Consejo sobre las competencias clave para el aprendizaje permanente*. 2005/0221 (COD). Bruselas: Autor.
- Consejo de Coordinación Universitaria (2006). *Propuesta de título universitario oficial de máster según Real Decreto de 21 de enero. Denominación del título: Máster en formación del profesorado de Educación Secundaria*. Descargado el 10/10/2007, de http://www.mec.es/educa/ccuniv/html/GRADO_POSGRADO/Documentos/Master%20Prof.%20Secundaria.pdf
- Contreras, L. C., Carrillo, J., Climent, N. y Sierra, M. (Eds.). (2000). *Cuarto simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. Huelva: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Huelva.
- Coolahan, J. (1996). Compétences et connaissances. En Conseil de la Coopération Culturelle, *Compétences clés pour l'Europe. Un enseignement secondaire pour l'Europe* (p. 27). Strasbourg: Conseil de la Coopération Culturelle.
- Coriat, M. (1997). Materiales, Recursos y Actividades: Un panorama. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, (pp. 155-178). Barcelona: Horsori.
- Coriat, M. y Sanz, R. (2005). Acción en orientación y tutoría. En M. Coriat y R. Sanz (Eds.), *Orientación y tutoría en la Universidad de Granada* (pp. 27-39). Editorial Universidad de Granada.
- Damerow, P. (1996). *Abstraction and representation*. Amsterdam: Kluwer Academic Publishers.
- De Castro, C., Castro, E. y Segovia, I. E. (2008). Errores en el ajuste del valor posicional en tareas de estimación: un estudio con maestros en formación. *PNA*, 2(4), 191-205.
- DeLong, M. y Winter, D. (2001). An objective approach to student-centered instruction. *PRIMUS*, 11(1), 27-52.

- Delors, J. (Coord.) (1996). *La educación encierra un tesoro. Informe a la UNESCO de la Comisión Internacional sobre la educación para el siglo XXI*. Madrid: Santillana.
- Delval, J. (1990). *Los fines de la educación*. Madrid: Siglo XXI de España.
- Denyer, M., Furnémont, J., Poulain, R. y Vanloubreeck, G. (2007). *Las competencias en la educación. Un balance*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Department of Education. (2001). *Teacher competencies and professional standards discussion paper*. East Perth: Autor.
- Department of Education and Training. (2004). *Competency framework for teachers*. East Perth: Autor.
- Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. En M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 392-431). New York: Macmillan.
- Drake, B. M. y Amspaugh, L. B. (1994). What writing reveals in mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(3), 43-50.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Berna: Peter Lang.
- Duval, R. (1999). *Explicar, Argumentar, Demostrar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Einem, C., Schmit, G., Ade, J., Totomanova, A. M., Zeman, E., Vestager, M. et al. (1999). *El espacio europeo de la enseñanza superior. Declaración conjunta de los ministros europeos de educación reunidos en Bolonia el 19 de junio de 1999*. Descargado el 17/4/2009, de http://www.eees.es/pdf/Bolonia_ES.pdf/
- El País (2007, 4 de Diciembre). *Mates: necesita mejorar*. Descargado el 5/12/2007, de http://www.elpais.com/articulo/sociedad/Mates/necesita/mejorar/elpepusoc/20071204elpepusoc_1/Tes/
- English, L. (2009). Setting an agenda for international research in mathematics education. En L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 3-19). New York: Routledge.
- Epper, M. A. y Harju, B. L. (1997). Achievement motivation goals in relation to academic performance in traditional and nontraditional college students. *Research in Higher Education*, 38(5), 557-573.
- Erlandson, D. A., Harris, E. L., Skipper, B. L. y Allen, S. D. (1993). *Doing naturalistic inquiry. A guide to methods*. Thousand Oaks: Sage.
- Espinosa, E. (2005). *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Universidad de Granada.
- Evertson, C. M. y Green, J. L. (1989). La observación como indagación y como

- método. En M. C. Wittrock (comp.), *La investigación en la enseñanza, II. Métodos cualitativos y de observación* (pp. 304-421). Barcelona: Paidós.
- Feinberg, W. y Soltis, J. (1985). *School and society*. New York: Teachers College Press.
- Fernández, A. (2006). Metodologías activas para la formación de competencias. *Educatio siglo XXI*, 24, 35-56.
- Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Universidad de Granada.
- Fernández, F. D. (2007). *La tutoría entre compañeros en la Universidad*. Universidad de Granada.
- Floden, R. (2002). The measurement of opportunity to learn. En A. C. Porter y A. Gamoran (Eds.), *Methodological Advances in Cross-National Surveys of Educational Achievement* (pp. 231-266). Washington, DC: National Academy Press.
- Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Granada: Comares.
- Freudenthal, H. (1975). Pupils' Achievements Internationally Compared - The IEA. *Educational Studies in Mathematics*, 6, 127-186.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 66(2), 131-143.
- Gagné R. M. y Briggs, L. J. (1976). *La planificación de la enseñanza: sus principios*. México: Trillas.
- Gairín, J. M. (1999). *Sistemas de representación de números racionales Positivos. Un estudio con maestros en formación*. Universidad de Zaragoza.
- Garuti, R., Boero, P. y Lemus, E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME International Conference Volume 2* (pp. 345-352). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.
- Geier, R. (1998). Error analyses of geometry problems in secondary schools. The Pythagorean Theorem. *Mathematische Unterrichtspraxis* 19(4), 37-46
- Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre la evaluación en matemáticas*. Universidad de Granada.
- Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas: una integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.
- von Glasersfeld, E. (1984). An introduction to radical constructivism. En Watzlawick, P. (Ed.), *The invented reality* (pp. 17-40). New York: Norton.
- Gómez, B. (1993). *Numeración y cálculo*. Madrid: Síntesis.

- Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, 7(3), 251-293.
- Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno, J. L. Lupiáñez (Eds.) *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*. (pp. 73-95). Granada: SAEM "THALES" y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.
- Gómez, P. y González, M. J. (2008). *Mathematics knowledge for teaching within a functional perspective of preservice teacher training*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 27, Monterrey.
- Gómez, P. y González, M. J. (2009). Analyzing and selecting tasks for mathematics teaching: A heuristic. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies inspired by John Mason*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Gómez, P., González, M. J., Gil, F., Lupiáñez, J. L. Moreno, F., Rico, L. et al. (2007). Assessing the relevance of higher education courses. *Evaluation and Program Planning*, 30, 149–160
- Gómez, P., González, M. J. y Lupiáñez, J. L. (2007). Adapting the hypothetical learning trajectory notion to secondary preservice teacher training. En D. Pitta-Pantazi y G. Philippou (Eds.), *Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1876-1885). Chipre: University of Cyprus.
- Gómez, P., González, M. J., Rico, L., Gil, F., Lupiáñez, J. L., Marín, A., et al. (2008). *Future Secondary Mathematics Teachers Training From a Functional Perspective*. Trabajo presentado en ICME 11 Topic Study Group 29, Monterrey.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *PNA* 1(2), 79-98.
- Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2005). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en V Congreso Ibero-americano de Educação Matemática, Oporto.
- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Rico, L., et al. (2006). Caracterización y evaluación de diseños de planes de formación inicial de profesores de matemáticas en el marco del espacio europeo de educación superior. En J. L. Benítez y A. B. García (Eds.), *La universidad ante el reto del espacio europeo de educación superior: Investigaciones recientes* (pp. 257-278). Granada: Universidad de Granada.

- Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. y Marín, A. (2007). *Capacidades que contribuyen a la competencia de planificación del profesor de matemáticas de secundaria*. Trabajo presentado en III Congreso Internacional de Formación del Profesorado, Granada.
- Gómez, P. y Rico, L. (2007). Learning within communities of practice in preservice secondary school teachers education. *PNA* 2(1), 17-28.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2003). *Tuning educational structures in Europe. Informe final. Fase uno*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- González, J. y Wagenaar, R. (Eds.). (2006). *Tuning educational structures in Europe. Informe final. Fase dos*. Bilbao: Universidad de Deusto y Universidad de Groningen.
- González, J. L. (1992). *Pensamiento relativo. Análisis de errores en tareas de traducción-interacción entre sistemas de representación*. Documento no publicado: Universidad de Málaga.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Universidad de Granada.
- González, M. J. (2002). *Proyecto docente*. Santander: Universidad de Cantabria.
- González, M. J. (2004). *Contribución de la opción educativa a las competencias del licenciado en Matemáticas*. Trabajo presentado en Seminario Itermat, organizado por ICMI-E y Universidad de Granada. Descargado el 7/1/2005, de http://www.ugr.es/~vic_plan/formacion/itermat/Program/221S3.htm/
- González, M. J., Gil, F., Moreno, M. F., Romero, I., Gómez, P., Lupiáñez, J. L. et al. (2004). Generic and specific competences as a framework to evaluate the relevance of prospective Mathematics teachers training syllabuses. En M. J. Hoines (Ed.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. Vol I 305). Bergen: Bergen University College.
- González, M. J. y Lupiáñez, J. L. (2005). ¿Qué valor social tiene el conocimiento matemático? *PMADRES: Revista de la Confederación Estatal de Asociaciones de Padres y Madres de Alumnos*, 82, 29-33.
- González, M. J., Moreno, M. F., Gil, F., Gómez, P., Lupiáñez, J. L., Rico, L. et al. (2006). Relevancia de Planes de Formación Inicial de Profesores de Matemáticas. *PNA*, 1(1), 3-20.
- Gouvernement du Québec (2002). *A guide to customized literacy training. The functional learning process: description of the process, behavioural indicators and exercises for developing the basic competences*. Québec: Autor.
- Gravemeijer, K. (2008). RME theory and mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds), *Tools and Processes in Mathematics Teacher Education* (pp. 283-302). Rotterdam: Sense Publishers.

- Green J. L. (1983). Research on teaching as a linguistic process: a state of the art. *Review of Research Education*, 10, 151-252.
- Gronlund, N. E. (2000). *How to Write and Use Instructional Objectives*. Upper Saddle River NJ: Prentice-Hall.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: an overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5-23.
- Hannula, M. S., Kaasila, R., Pehkonen, E. y Laine, A. (2005). Structure and typical profiles of elementary teacher students' view of mathematics. En H. L. Chick et al. (Eds.), *Proceedings of the 29th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 89-96) Melbourne: University of Melbourne y Department of Science and Mathematics Education.
- Harackiewicz J. M., Barron, K. E. y Elliot, A. J. (1998). Rethinking achievement goals: When are they adaptive for college students and why? *Educational Psychologist*, 33(1), 1-21.
- Herbst, P. (2003). Using novel tasks in teaching mathematics: Three tensions affecting the work of the teacher. *American Educational Research Journal*, 40(1), 197-238.
- Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406.
- Hitt, F. (1998a). Difficulties in the articulation of different representations linked to the concept of function. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(1), 123-134.
- Hitt, F. (1998b). Systèmes sémiotiques de représentation liés au concept de fonction. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 6, 7-26.
- Hitt, F. (2003). El concepto de infinito: obstáculo en el aprendizaje de límite y continuidad de funciones. En E. Filloy, F. Hitt F., C. Imaz C., F. Rivera F. y S. Ursini (Eds.), *Matemática Educativa. Aspectos de la investigación actual* (pp. 91-111). México, D. F.: Fondo de Cultura Económica y Maison Editoriale.
- Hitt, F. y Santos, M. (Eds.) (1999). *Proceedings of the Twenty First Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Columbia, OH: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.
- Hornberger, N. H. (1989). Tramites and transportes: The acquisition of second language communicative competence for one speech event in Puno, Peru. *Applied Linguistics*, 10, 214-230.
- Horoks, J. y Robert, A. (2007). Tasks Designed to Highlight Task-Activity Relationships. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 10(4-6), 279-287.

- Hymes, D. (1971). Competence and performance in linguistic theory. En R. Huxley y E. Ingram (Eds.), *Acquisition of languages: Models and methods* (pp. 3-23). New York: Academic Press.
- Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE) (Ed.) (2005). *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas*. Madrid: Editor.
- Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Jaworski, B. (2008). Development of the mathematics teacher educator and its relation to teaching development. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (pp. 335-361). Rotterdam: Sense Publishers.
- Jaworski, B. (2002). Layers of Learning in Initial Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(2), 89-92.
- Jaworski, B. y Wood, T. (Eds.) (2008). *The mathematics teacher educator as a developing professional*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Jiménez, J. E. (1999). *Psicología de las dificultades de aprendizaje*. Madrid: Síntesis.
- Junta de Andalucía (2006). *Evaluación de diagnóstico. Informe preliminar. Avance de resultados. Curso 2006-2007*. Sevilla: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.
- Junta de Andalucía (2007). Ley 17/2007, de 10 de diciembre, de Educación de Andalucía. *BOJA*, 252, 5-36.
- Junta de Andalucía (2008). *Prueba de la evaluación de diagnóstico. Competencias básicas en matemáticas. Segundo cuadernillo. 2º Educación Secundaria Obligatoria*. Sevilla: Consejería de Educación y Dirección General de Ordenación y Evaluación Educativa de la Junta de Andalucía.
- Juran, J. y Godfrey, A. (2001). *Manual de calidad. Volumen I*. Madrid: McGraw Hill
- Kilpatrick, J. (2003). Promoting the proficiency of U.S. mathematics teachers through centers of learning and teaching. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 143-157). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. O. y Findell, B. (2001). *Adding it up: helping children learn mathematics*. Washington: National Academy Press.
- Kosc, L. (1974). Developmental dyscalculia. *Journal of Learning Disabilities*, 7, 164-177.
- Kosc, L. (1981). Neuropsychological implications of diagnosis and treatment of mathematical learning disabilities. *Topics in Learning and Learning Disabilities*, 1, 19-30.

- Krainer, K. (2003). Teams, communities and networks. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 93-105.
- Krainer, K. (2004). On giving priority to learners' prior knowledge and our need to understand their thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 7(2), 87-90.
- Krainer, K. (2008). Individuals, teams, communities and networks: participants and ways of participation in mathematics teacher education. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 1-10). Rotterdam: Sense Publishers.
- Krainer, K. y Wood, T. (Eds.) (2008). *Participants in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Kulm, G. (2008). Teachers' mathematics knowledge. *School, Science and Mathematics*, 108(1), 2-3.
- Kulm, G., y Grier, L. (1998). *Mathematics curriculum materials reliability study*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.
- Lakatos I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Universidad.
- Le Boterf (2002). De quel concept de compétence avons-nous besoin? *Soins Cadres*, 41, 20-22.
- Leikin, R. (2008). Teams of prospective teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 63-88). Rotterdam: Sense Publishers.
- Leikin, R y Levav-Waynberg, A. (2007). Exploring mathematics teacher knowledge to explain the gap between theory-based recommendations and school practice in the use of connecting tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 66(3), 349-371.
- Lerman, S. (2001). A review of research perspectives on mathematics teacher education. En F. L. Lin y T. J. Coney (Eds.), *Making sense of mathematics teacher education* (pp. 33-52). Dordrecht: Kluwer Academia Publishers.
- Lerman, S. y Zehetmeier, S. (2008). Face-to-face communities and networks of practising mathematics teachers: Studies on their professional growth. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 133-153). Rotterdam: Sense Publishers.
- Lever-Duffy, J. y McDonald, J. B. (2007). *Teaching and Learning with Technology*. New York: Pearson.
- Li, X. y Li, Y. (2008). Research on students' misconceptions to improve teaching and learning in school mathematics and science. *School Science and Mathematics*, 108(1), 4-7.
- Lin, F. L. y Ponte, J. P. (2008). Face-to-face learning communities of prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 111-129). Rotterdam: Sense Publishers.

- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 151-175). Madrid: Síntesis.
- Llinares, S. (2004). *La actividad de enseñar matemáticas como organizador de la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Adecuación al itinerario educativo del Grado de Matemáticas*. Trabajo presentado en Itinerario Educativo de la Licenciatura de Matemáticas, Granada.
- Llinares, S. y Krainer, K. (2003). Mathematics (student) teachers and teacher educators as learners. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llinares, S. y Olivero, F. (2008). Virtual communities and networks of prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 155-179). Rotterdam: Sense Publishers.
- Llobera, M. (1995). Una perspectiva sobre la competencia comunicativa y la didáctica de las lenguas extranjeras. En M. Llobera (Coord.), *Competencia comunicativa : documentos básicos en la enseñanza de lenguas extranjeras* (pp. 5-26). Madrid: Edelsa.
- Lo, J., y Wheatley, G. H. (1994). Learning opportunities and negotiating social norms in mathematics class discussion. *Educational Studies in Mathematics* 27(2), 145-164.
- Lomas, C. (1999). Alfabetización mediática y educación crítica: los medios de comunicación de masas y la construcción social del conocimiento. En J. Ramos y F. Carvajal (Coord.), *¿Enseñar o aprender a escribir y leer? Vol. 1: Aspectos teóricos del proceso de construcción significativa, funcional y compartida del código escrito* (pp. 157-168). Madrid: Movimiento Cooperativo de Escuela Popular.
- Loughran, J. J. (Ed.) (2006). *Understanding and developing science teachers' pedagogical content knowledge*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Luengo, J., Luzón, A. y Torres, M. (2008). El enfoque por competencias en el desarrollo de políticas de formación del profesorado. Entrevista a Claude Lessard. *Profesorado. Revista de curriculum y formación del profesorado*, 12(3), 1-16.
- Lupiáñez, J. L. (2000). *Nuevos acercamientos a la historia de la matemática a través de la calculadora TI-92*. Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. (2005). *Objetivos y fines de la educación matemática. Capacidades y competencias matemáticas*. En Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática. Málaga.
- Lupiáñez, J. L. (2007). *El aprendizaje de las matemáticas*. Documento no publicado: Universidad de Granada.

- Lupiáñez, J. L. (2008). ¿Soy competente en matemáticas? En M. Molina, P. Pérez y M. A. Fresno (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Competencias matemáticas* (pp. 39-57). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Lupiáñez, J. L y Codina, A. (2001). Calculadores y sensores. La matemática en movimiento. En M. Peñas, A. Moreno y J. L. Lupiáñez (Eds.) *Investigación en el Aula de Matemáticas. Tecnologías de la Información y la Comunicación* (pp. 143-149). Granada: SAEM Thales y Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2003). Intuiciones de futuros profesores de matemáticas de secundaria sobre el aprendizaje de las matemáticas. En J. Gutiérrez, A. Romero y M. Coriat (Eds.), *El practicum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 151-158). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L., Marín, A., Gómez, P. y Rico, L. (2007). *Una actividad de modelización con calculadora*. Trabajo presentado en las XIII Jornadas sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, Granada.
- Lupiáñez, J. L., Molina, M., Flores, P. y Segovia I. (2007). Mathematics primary teacher training in the context of the European Higher Education Area. *The International Journal of Interdisciplinary Social Sciences* 2(4), 223-232.
- Lupiáñez, J. L. y Moreno, L. (2001). Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 291-300). Granada: Editorial Universidad de Granada.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: organización de competencias y capacidades de los escolares en el caso de los números decimales. *INDIVISA, Monografía IV*, 47-58.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA* 3(1), 35-48.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2009a). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Investigaciones en pensamiento numérico. *Revista de Investigación Psicoeducativa*, 7(1), 3-5.
- Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2009b). Research in mathematics education: Numerical thinking. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 239-242.
- Lupiáñez, J. L., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). *Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Trabajo

- presentado en V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática, Oporto.
- Mager, R. F. (1997). *Preparing instructional objectives. A critical tool in the development of effective instruction*. Atlanta GA: CEP Press.
- Manga, D. y Fournier, C. (1997). *Neuropsicología clínica infantil. Estudio de casos en edad escolar*. Madrid: Editorial Universitas.
- Manga, D. y Ramos, F. (2001). Evaluación de los síndromes neuropsicológicos infantiles. *Revista de Neurología*, 32(7), 664-675.
- Marín, A. (1997). Programación de unidades didácticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 195-228). Barcelona: ice - Horsori.
- Marín, A. (2005). *Tareas para el aprendizaje de las matemáticas: organización y secuenciación*. Trabajo presentado en Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática, Málaga.
- Marín, A. (2009). *Informe-memoria sobre el contenido y las expectativas de la sección del análisis didáctico dedicada al análisis de instrucción en la materia Didáctica de la Matemática de la Licenciatura de Matemáticas*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Marrades, R. y Gutiérrez, A. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 87-125.
- Martín, E. (2008). Un aprendizaje eficaz de la numeración. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 13, 51-60.
- Mason, J. (2008). PCK and beyond. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development* (pp. 301-322). Rotterdam: Sense Publishers.
- Mason, J. y Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. Exeter: Tarquin.
- Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX*. Universidad de Granada.
- McDonnell, L. M. (1995). Opportunity to learn as a research concept and a policy instrument. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17(3), 305-322.
- McDougal, M. y Nason, R. (2005). Growth of teacher knowledge within an on-line collaborative learning environment. En P. Clarkson et al. (Eds.), *Building connections: Theory, research and practice: proceedings of the annual conference (MERGA 28)* (Vol. 2, pp. 529-536). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.
- McLaughlin, M. W. y Shepard, L. A. (1995). *Improving education through*

- standards-based reform*. Stanford: The National Academy of Education.
- McLeod, D. B. y Adams, V. M. (Eds.) (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Nueva York: Springer-Verlag.
- Mesa, C., García, E., González, C., González, Y., Peñalver, M., Iniesta, M. A. et al. (2007) *II Jornadas de trabajo sobre experiencias piloto EEES en las universidades andaluzas*. Granada: Comisión EEES de Universidades Andaluzas.
- Michavila, F. y García, J. (Eds.) (2003). *La tutoría y los nuevos modos de aprendizaje en la Universidad*. Madrid: Consejería de Educación de la Comunidad de Madrid.
- Ministerio de Educación de Ontario (2005). *The ontario curriculum in secondary mathematics*. Descargado el 23/3/2006, de <http://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/secondary/math.html/>
- Ministerio de Educación de Perú (2001). Marco Curricular de Bachillerato. Descargado el 27/5/2003, de http://www.minedu.gob.pe/gestion_pedagogica/of_bachillerato/xtras/marco_curricular_2001.pdf/
- Ministerio de Educación y Ciencia (1989). *Diseño curricular básico. Educación Secundaria Obligatoria*. Madrid: Servicio Publicaciones MEC.
- Ministerio de Educación y Ciencia (1990). Ley Orgánica 1/1990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo. *BOE*, 238, 36705-36715.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2000). Resolución de 23 de octubre de 2000, de la Universidad de Granada, por la que se ordena la publicación, del Plan de Estudios de Licenciado en Matemáticas, de acuerdo con el Real Decreto 1416/1990, de 26 de octubre, que se impartira en la Facultad de Ciencias. *BOE*, 273, 39817-39824.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2001). Ley Orgánica 6/2001, de 21 de diciembre, de Universidades. *BOE*, 307, 49400-49425.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2005). Real Decreto 55/2005, de 21 de enero, por el que se establecen la estructura de las enseñanzas universitarias. *BOE*, 21, 2842-2846.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006a). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE*, 106, 17158-17207.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006b). Real Decreto 1513/2006 de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación primaria. *BOE*, 293, 43053-43102.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2006c). Real Decreto 1631/2006 de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. *BOE*, 5, 677-773.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007a). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación primaria. *BOE*, 173, 31487-31566.

- Ministerio de Educación y Ciencia (2007b). ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE*, 174, 31680-31828.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007c). *PISA 2006. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia, Secretaría General de Educación.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007d). ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. *BOE*, 312, 53751-53753.
- Ministerio de Educación y Ciencia (2007e). Real Decreto 1393/2007, de 29 de octubre, por el que se establece la ordenación de las enseñanzas universitarias oficiales. *BOE*, 260, 44037- 44048.
- Ministry of Education, Science and Culture of Iceland (2006). *Education & Training 2010. The dof Education policy in iceland in the context of europe*. Descargado el 26/5/2008, de http://bella.mrn.stjr.is/utgafur/education-training_2010.pdf/
- Ministry of National Education of Poland (2007). *Report of the implementation of the Education and Training 2010 work programme in Poland between May 2005 and May 2007*. Descargado el 26/5/08, de http://www.ihep.org/assets/files/gcfp-files/Lisbon_Poland_2007.pdf7
- Molina, M. (2007). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de Educación primaria*. Universidad de Granada
- Moreno, M. F. (1998). *Didáctica de la matemática en la educación secundaria. Manual para la formación inicial del profesorado de secundaria*. Universidad de Almería.
- Moreno, M. F. (2007). De la matemática formal a la matemática escolar. *PNA* 3(1), 99-111.
- Moreno, S., Bajo, M. T., Moya, M., Maldonado A. y Tudela, P. (2007). *Las competencias en el nuevo paradigma educativo para Europa*. Granada: Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente de la Universidad de Granada.
- Mousley, J., Lambdin, D. y Koc, Y. (2003). Mathematics teacher education and technology. En A. Bishop et al. (Eds.), *Second international handbook of mathematics education* (pp. 395-432). Dordrecht: Kluwer.
- Movshovitz-Hadar N., Zaslavsky O. e Inbar S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3-14.
- Miyakazy, M. (2000) Levels of proof in lower secondary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics* 41, 47-68.

- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- NCTM (2006). *Curriculum Focal Points for Prekindergarten through Grade 8 Mathematics. A Quest for Coherence*. Reston, Va: Autor.
- Niss, M. (1995). Why do we teach Mathematics in school? En L. Puig y J. Calderón (Eds.) *Seminario de Investigación y Didáctica de la Matemática*. (pp. 7-16). Madrid: CIDE.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM Project. En A. Gagatsis & S. Papastavrides (Eds.) *3rd Mediterranean Conference on Mathematical Education*. (pp. 115-124). Athens: Hellenic Mathematical Society.
- Niss, M. (2004a). NCTM Research Catalyst Conference. Trabajo presentado en NCTM Research Catalyst Conference, Reston, VA.
- Niss, M. (2004b). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), *Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education* (pp. 179-192). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciences.
- Niss, M. (2006). What does it mean to be a competent mathematics teacher? A general problem illustrated by examples from Denmark. En *Praktika, 23^o Panellenio Synedrio Matematikis Paideias*, (pp. 39-47). Patras, Greece: Elleniki Mathematiki Etaireia.
- OCDE (2003). *The PISA 2003 Assessment Framework. Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills*. París: OCDE.
- OCDE (2004). *Learning for Tomorrow's World: First results from PISA 2003*. París: OECD.
- OCDE (2005a). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.
- OCDE (2005b). *The Definition and Selection of Key Competencies. Executive Summary*. Descargado el 25/01/2003 de <http://www.oecd.org/dataoecd/47/61/35070367.pdf>.
- Oliveira, H. y Hannula, M. S. (2008). Individual prospective mathematics teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 13-34). Rotterdam: Sense Publishers.
- Onrubia, J., Rochera, M. J. y Barberá, E. (2001). La enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva psicológica. En C. Coll, J. Palacios y A. Marchesi (Comp), *Desarrollo psicológico y educación. Volumen 2: Psicología de la educación escolar*. (pp. 487-508). Madrid: Alianza.
- Ortiz, A. (1997). *Razonamiento inductivo numérico. Un estudio en Educación primaria*. Universidad de Granada.
- Ortiz, J. (2002). *Modelización y calculadora gráfica en la enseñanza del*

- álgebra. Estudio evaluativo de un programa de formación.* Universidad de Granada.
- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2001). Attitudes of preservice mathematics teachers towards modeling and the graphic calculator. En M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the Twenty Fith Conference of the Internacional Group Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (p. 351). Utrecht: Freudenthal Institute.
- Ortiz, J., Rico, L. y Castro, E. (2008). La enseñanza del álgebra lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.
- Oser, F., Achtenhagen, F. y Renold, U. (2006b). *Competence oriented teacher training: Old research demands and new pathways*. En F. Oser, F. Achtenhagen y U. Renold. (Eds.). *Competence oriented teacher training*. (pp. 1-7). Rotterdam: Sense Publisher.
- Oser, F., Achtenhagen, F. y Renold, U. (Eds.) (2006a). *Competence Oriented Teacher Training*. Rotterdam: Sense Publisher.
- Otte, M. (2003). Proof-analysis and the development of geometrical thought. (Análise de prova e o desenvolvimento do pensamento geométrico.) *Educação Matemática Pesquisa*, 5(1), 13-55.
- Parcerisa, A. (1996). *Materiales curriculares*. Barcelona: Grao.
- Patry, J. (1999). *The Functional Learning Process (FLP). Description of the process, behavioural indicators and exercises for developing the basic competencies*. Québec: Ministère de l'Éducation, Direction de la Formation Gènèrale des Adultes.
- Perks, P. y Prestage, S. (2008). Tools for learning about teaching and learning. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 265-280). Rotterdam: Sense Publishers.
- Popper, K. (1979). *El desarrollo del conocimiento científico*. México: Siglo XXI.
- Puig, L. (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2(3), 87-107.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.
- Raizen, S. A y Jones, L. V. (1985). *Indicators of precollege education in science and mathematics: A preliminary review*. Washington DC: National Academy Press.
- Recio, T. (2004). Seminario: Itinerario educativo de la Licenciatura de Matemáticas. Documento de conclusiones y propuestas. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 7(1), 33-36.
- Recio, T. (2008). Prólogo. En *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular* (pp. 13-20). Madrid: Alianza.

- Recio, T. y Rico, L. (2005). El Informe PISA 2003 y las matemáticas. *El PAIS*, lunes 24 de enero de 2005, p. 33.
- Rico, L. (1990). Diseño curricular en educación matemática. En S. Llinares y V. Sánchez (Eds.), *Teoría y práctica en educación matemática* (pp. 17-61). Sevilla: Alfar.
- Rico, L. (1992). *Proyecto docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. (1995a). Consideraciones sobre el Currículo Escolar de Matemáticas. *Revista EMA*, 1(1), 4-24.
- Rico, L. (1995b). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L., Gómez, P. (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá: una empresa docente.
- Rico, L. (Ed.) (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997b). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (1997c). Dimensiones y componentes de la noción de currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 377-414). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997d). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de Secundaria. *Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado*, 8(1), 1-15.
- Rico, L. (2007a). *Herramientas matemáticas y competencias escolares*. Trabajo presentado en XIII Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas, Granada.
- Rico, L. (2007b). La competencia matemática en PISA. *PNA*, 1(2), 47-66.
- Rico, L. (2008). *Capacitación de profesores de matemáticas de Educación secundaria en España*. Trabajo presentado en Conferencia Internacional sobre la Enseñanza de las Matemáticas, México D. F.
- Rico, L. y Castro, E. (1994). Difficulties and errors in number reasoning development. En N. Malara y L. Rico (Eds.), *Proceedings of the first Italian-Spanish research symposium in mathematics education* (pp. 123-130). Modena: Universita di Modena.

- Rico, L. (Coord), Castro, E., Castro, E., Coriat, M., Marín, A., Puig, L., et al. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Barcelona: ice - Horsori.
- Rico, L., Gómez, P., Moreno, M., Romero, I., Lupiáñez, J. L., Gil, F. et al. (2003). Indicadores de calidad para la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. En E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en educación matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (S.E.I.E.M.)* (pp. 289-297). Granada: Universidad de Granada.
- Rico, L. y Gutiérrez, J. (Eds.) (1994). *Formación científico-didáctica del profesor de matemáticas de secundaria*. Granada: Instituto de Ciencias de la Educación.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2005). *Programa de la asignatura Didáctica de la Matemática. Curso 2005-2006*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008a). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008b). *Programa de la asignatura Didáctica de la Matemática. Curso 2008-2009*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Rico, L., Lupiáñez, J. L., Marín, A. y Gómez, P. (2007). Matemáticas escolares y análisis de contenido con profesores de secundaria en formación. *INDIVISA, Monografía IX*, 115-135.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*, 58, 7-23.
- Rico, L., Mallavibarrena, R. y Deulofeu J. (2009). Seminario sobre el Prácticum del Máster de profesor de Secundaria en la especialidad de Matemáticas. Informe final. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 12(2), 265- 274.
- Rico, L., Sánchez, V. y Llinares, S. (1997). Concepto de currículo desde la educación matemática. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria* (pp. 211-263). Madrid: Síntesis.
- Rico, L. y Segovia, I. (1999). *Programa de la asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato*. Documento no publicado: Universidad de Granada.
- Robert, A. y Hache, C. (2000). Connecting Research to French Mathematics Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3(3), 281-290.
- Romberg, T. (1991). Características problemáticas del currículo escolar de matemáticas. *Revista de Educación*, 294, 323- 406.

- Romero, I. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción*. Granada: Comares.
- Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA* 2(2), 61-74.
- Ruiz, E. F. y Lupiáñez, J. L. (2009). Detecting psychological obstacles in teaching and learning the topics of reason and proportion in sixth grade primary pupils. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 397-424.
- Ruiz, E. F., Lupiáñez, J. L. y Valdemoros, M. (2002). Didactical reflections on proportionality in the Cabri environment based on a previous experience with basic education students. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4* (pp. 153-160). Londres: University of East Anglia.
- Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Universidad de Granada.
- Ruiz, F., Molina, M., Lupiáñez, J. L., Segovia, I. y Flores, P. (2009). Mathematics primary teacher training at the University of Granada: an adaptation to the EHEA. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17, 425-454.
- Ryan, J. y McCrae, B. (2005). Assessing pre-service teachers' mathematics subject knowledge. *Mathematics Teacher Education and Development*, 7, 72-89.
- Rychen, D. S. y Salganick, L. H. (Comps.) (2004). *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida*. México: Fondo de Cultura Económica.
- San Martín, V. (2004) La formación en competencias: el desafío de la educación superior en Iberoamérica. Descargado el 12/5/2008, de <http://www.rieoei.org/deloslectores/280SanMartin.PDF/>
- Sánchez, V. y Llinares, S. (2003). Tour student teachers' pedagogical reasoning on functions. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 6, 5-25.
- Scaglia, S. (2000). *Dos conflictos al representar números reales en la recta real*. Universidad de Granada.
- Scallon, G. (2001). *L'évaluation des apprentissages dans une approche par compétences*. Québec: Éditions du renouveau pédagogique.
- Schmidt, W. H. y McKnight, C. C. (1995). Surveying educational opportunity in mathematics and science: An international perspective. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 17(3), 337-353.
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. Wood (Eds), *Tools and processes*

- in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. En R. W. Tyler, R. Gagné, y M. Scriven (Eds.), *Perspectives of curriculum evaluation* (pp. 39-83). Chicago: Rand McNally.
- Segovia, I. (1997). *Estimación de cantidades discretas. Estudio de variables y procesos*. Granada: Comares.
- Segovia, I. (2005). *Diseño, implementación y evaluación de los contenidos prácticos en la formación inicial del profesorado de matemáticas. Informe final (Proyecto andaluz de formación del profesorado universitario UGR041 de la Unidad para la Calidad de las Universidades Andaluzas)*. Granada: Universidad de Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Segovia, I., Lupiáñez, J. L. y Flores, P. (2006). Formación práctica en educación matemática del profesor de primaria para la Europa del siglo XXI. En J. L. Benítez, J. de la Fuente, A. B. Berbén y F. Justicia, *La universidad ante el reto del espacio europeo de educación superior: investigaciones recientes* (pp. 177-208). Madrid: EOS.
- Segovia, I. y Rico, L. (2001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22, 1-36.
- Sfard, A., Hashimoto, Y., Knijnik, G., Robert, A. y Skovsmose, O. (2004). *The relation between research and practice in mathematics education*. Trabajo presentado en 10th International Congress on Mathematical Education, Copenhagen.
- Short, E. (1985). The concept of competence: Its use and misuse in education. *Journal of Teacher Education*, 36(2), 2-6.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26(2), 114-145.
- Simon, M. A. (2000). Research on mathematics teacher development: The teacher development experiment. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.
- Simon, M. A. (2008). The challenge of mathematics teacher education in an era of mathematics education reform. En B. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 17-29). Rotterdam: Sense Publishers.

- Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 91-104.
- Skovmose, O. (1994). *Towards a Philosophy of Critical Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Snow-Renner, R. (2001). *What is the promise of large-scale classroom practice measures for informing us about equity student opportunities-to-learn? An example using the Colorado TIMSS*. Trabajo presentado en Annual Meeting of the American Educational Research Association, Seattle.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: ice - Horsori.
- Soria, F. J., Trujillo, R. y Vázquez, E. (2007). Salidas profesionales de los estudios de matemáticas. Análisis de la inserción laboral y ofertas de empleo. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10(3), 561-592.
- Sotelo, I. (2009). *Cara y cruz del proceso de Bolonia*. Descargado el 22/4/2009, de http://www.elpais.com/articulo/opinion/Cara/cruz/proceso/Bolonia/elpepiopi/20090416elpepiopi_4/Tes/
- Sowder, J. T. (2007). The mathematics education and development of teachers. En F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook on research on mathematics teaching and learning Vol. 1*, (pp. 157-224). Charlotte: Information Age Publishing y Nacional Council of Teachers of Mathematics.
- Sowder, L. y Harel, G. (2003). Case studies of mathematics majors' proof understanding, production, and appreciation. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 3(2), 251-267.
- Stacey, K. (2008). Mathematics for secondary teaching. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.) *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 87-113). Rotterdam: Sense Publishers.
- Stevens, F. I. y Grymes, J. (1993). *Opportunity to learn: Issues of equity for poor and minority students*. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Sticht, T. (1997). *Functional context education*. Descargado el 2/4/2009, de <http://www.nald.ca/Fulltext/context/context.pdf>
- Sullivan, P. y Wood, T. (2008). *Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching development*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Taba, H. (1983). *Elaboración del currículo*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.
- Tall, D. y Razali, M. H. (1993). Diagnosing students' difficulties in learning mathematics. *International Journal Mathematics Education Science*, 24(2), 209-222.

- Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., y Rowley, G. (2008). *teacher education and development study in mathematics (TEDS-M): policy, practice, and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Study Center, College of Education, Michigan State University.
- Tirosh, D. y Wood, T. (2008). *Tools and processes in mathematics teacher education*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Topping, K. J. (2005). Trends in peer learning. *Educational Psychology*, 25(6), 631-645.
- Törnroos, J. (2005). Mathematics textbooks, opportunity to learn and student achievement. *Studies in Educational Evaluation* 31, 315-327.
- Torralbo, M. (2002). *Análisis cuantitativo, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en educación matemática (1976-1998)*. Universidad de Córdoba.
- de la Torre, S. (2004). *Aprender de los errores. El tratamiento didáctico de los errores como estrategia de innovación*. Buenos Aires: Magisterio del Río de la Plata.
- Trafton, P. R. (1980). Assessing the mathematics curriculum today. En M. Montgomery (Ed.), *Selected Issues in Mathematics Education* (pp. 9-26). Berkeley, CA: McCutchan.
- Traiman, S. L. (1993). *The debate on opportunity-to-learn standards*. Washington, DC: National Governor' Association.
- Tsamir, P. (2008). Using theories as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 211-234). Rotterdam: Sense Publishers.
- Turner, R. (2007). Modelling and applications in PISA. En W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn y M Niss (Eds.), *Modelling and Applications in Mathematics Education* (pp. 433-440). Nueva York: Springer.
- Unidad Europea de Eurydice (2002). *Las competencias clave. Un concepto en expansión dentro de la educación general obligatoria*. Madrid: Ministerio de Educación, Ciencia y Cultura.
- Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H., y Houang, R. T. (2002). *According to the Book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational number: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, 14, 453-467.

- Van Zoest, L. y Bohl, J. (2002). The role of reform curricular materials in an internship: The case of Alice and Gregory. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5, 265-288.
- Viiri, J. y Saari, H. (2006). Teacher talk patterns in science lessons: use in teacher education. *Journal of Science Teacher Education*, 17(4), 347-365.
- Villa, A. y Poblete, M. (2007). *Aprendizaje basado en competencias*. Bilbao: Universidad de Deusto y Editorial Mensajero.
- De Villiers, M. (1999). *Rethinking Mathematical Proof*. Emeryville, CA: Key Curriculum Press.
- De Vries, M. J. y Mottier, I. (Eds.). (2006). *International handbook of technology education. Reviewing the past twenty years*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Vinner, S. (2008). Some missing dimensions in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 305-320). Rotterdam: Sense Publishers.
- Vizmanos, J. R., Anzola, M. y Primo, A. (1981). *Funciones 1 (Matemáticas 1º BUP)*. Madrid: SM.
- Watson, A. y Sullivan, P. (2008). Teachers learning about tasks and lessons. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 109-134). Rotterdam: Sense Publishers.
- Weinert, F. (2004). Concepto de competencia: una aclaración conceptual. En D. S. Rychen y L. H. Salganick (Coord.), *Definir y seleccionar las competencias fundamentales para la vida* (pp. 94-127). México: Fondo de Cultura Económica.
- Zabalza, M. A. (2004). *Diseño y desarrollo curricular*. Madrid: Narcea.
- Zaslavsky, O. (1997). Conceptual obstacles in the learning of quadratic functions. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 19(1), 20-44.
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 297-321.
- Zaslavsky, O. (2008). Meeting the challenges of mathematics teacher education through design and use of tasks that facilitate teacher learning. En T. Jaworski y T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 93-114). Rotterdam: Sense Publishers.
- Zazkis, R. (2008). Examples as tools in mathematics teacher education. En D. Tirosh y T. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 135-156). Rotterdam: Sense Publishers.

ÍNDICE DE ANEXOS

Los siguientes Anexos, están incluidos en el CD adjunto.

Anexo A. *Programa de la asignatura “Didáctica de la Matemática” en el curso académico 2008-2009 y en años anteriores.*

Anexo B. *Documentación empleada en las sesiones iniciales de la asignatura.*

Anexo C. *Documentos y guiones de lectura entregados a los profesores en formación durante la asignatura.*

Anexo D. *Base de datos de las sesiones de la asignatura.*

Anexo E. *Resultados del cuestionario sobre el aprendizaje de las matemáticas.*

Anexo F. *Prioridades de aprendizaje (o focos de contenido) y objetivos específicos enunciados por los grupos.*

Anexo G. *Asignación entre objetivos y competencias realizada por los grupos*

Anexo H. *Limitaciones del aprendizaje enunciadas por los grupos.*

Anexo I. *Hojas de cálculo empleadas en el análisis de las producciones*

Anexo J. *Transcripciones de las sesiones de clase centradas en el análisis cognitivo y en las presentaciones de las unidades didácticas.*

Anexo K. *Producciones de los grupos en relación con el análisis de contenido.*

Anexo L. *Diseño de una hora de clase (producción del análisis de instrucción).*

Anexo M. *Tareas incluidas en las unidades didácticas.*

Anexo N. *Producción académica del doctorando*

