INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Encarnación Castro

Encarnación Castro Martínez

Luis Rico
María C. Cañadas
José Gutiérrez
Marta Molina
Isidoro Segovia
(Eds.)

INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Encarnación Castro

Granada, 2013

Colección «Didáctica de la Matemática»

Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Edición promovida por el grupo de investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico»

Los capítulos de este libro han superado una revisión por pares.

Comité Científico
L. Rico
M. C. Cañadas
J. Gutiérrez
M. Molina
I. Segovia

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Gutiérrez, J., Molina, M. y Segovia, I. (Eds.) (2013).
Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro.
Granada, España: Editorial Comares.

© Los autores

Editorial Comares, S.L.
Gran Capitán, 10 – Bajo
18002 Granada
Telf.: 958 465 382 • Fax: 958 272 736
E-mail: libreriacomares@comares.com
http://www.editorialcomares.com
http://www.comares.com

ISBN: 978-84-9045-095-6 • Depósito legal: Gr. 1.788/2013

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

RELACIÓN DE AUTORES

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science (Israel)

Lorenzo J. Blanco Nieto
Universidad de Extremadura (España)

Rafael Bracho López
Universidad de Córdoba (España)

María C. Cañadas Santiago
Universidad de Granada (España)

José Carrillo Yáñez
Universidad de Huelva (España)

Marcelo Casis Raposo
Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada (España)

Elena Castro Rodríguez
Universidad de Granada (España)

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Carlos III de Madrid (España)

Antonio Codina Sánchez
Universidad de Almería (España)

Luis C. Contreras González
Universidad de Huelva (España)

Moisés Coriat Benarroch
Universidad de Granada (España)

Carlos de Castro Hernández
Universidad Complutense de Madrid (España)

Aurora del Río Cabezas
Universidad de Granada (España)

Ángel Díez Lozano
Universidad de Granada (España)

Paola Donoso Riquelme
Universidad de Granada (España)

Francisco Fernández García
Universidad de Granada (España)

Alejandro Fernández Lajusticia
Universidad de Valencia (España)

Antonio Fernández Cano
Universidad de Granada (España)

José A. Fernández Plaza
Universidad de Granada(España)

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada (España)

Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga (España)

Francisco Gil Cuadra
Universidad de Almería (España)

Bernardo Gómez Alfonso
Universidad de Valencia (España)

Pedro Gómez Guzmán
Universidad de los Andes (Colombia)

Evaristo González González
Colegio Público Sierra Nevada, Granada (España)

M.ª José González López
Universidad de Cantabria (España)

José Luis González Marí
Universidad de Málaga (España)

José Gutiérrez Pérez
Universidad de Granada (España)

Josefa Hernández Domínguez
Universidad de La Laguna (España)

Ángel A. López
Universidad de Carabobo (Venezuela) y Universidad de Granada (España)

Carmen López Esteban
Universidad de Salamanca (España)

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada (España)

Antonio Marín del Moral
Universidad de Granada (España)

Alexander Maz Machado
Universidad de Córdoba (España)

Marta Molina González
Universidad de Granada (España)

María Francisca Moreno Carretero
Universidad de Almería (España)

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada (España)

Tomás Ortega del Rincón
Universidad de Valladolid (España)

Antonio Luis Ortiz Villarejo
Universidad de Málaga (España)

M.ª Mercedes Palarea Medina
Universidad de La Laguna (España)

Luis Puig Espinosa
Universidad de Valencia (España)

Luis Radford
Universidad Laurentienne (Canadá)

Rafael Ramírez Uclés
Universidad de Granada (España)

Nuria Rico Castro
Universidad de Granada (España)

Luis Rico Romero
Universidad de Granada (España)

Susana Rodríguez Domingo
Universidad de Granada (España)

Isabel Romero Albaladejo
Universidad de Almería (España)

Juan F. Ruíz Hidalgo
Universidad de Granada (España)

Francisco Ruíz López
Universidad de Granada (España)

María Teresa Sánchez Compaña
Centro de Magisterio María Inmaculada, Antequera (España)

Victoria Sánchez García
Universidad de Sevilla(España)

Isidoro Segovia Alex
Universidad de Granada (España)

Modesto Sierra Vázquez
Universidad de Salamanca (España)

Martín M. Socas Robanya
Universidad de La Laguna (España)

Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba (España)

Antonio Tortosa López
Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional «S. Ramón y Cajal», Granada (España)

Gabriela Valverde Soto
Universidad Nacional de Costa Rica (Costa Rica)

Danellys Vega Castro
Universidad de Granada (España)

ÍNDICE

Bloque 3
Formación de Profesores e Investigación

PRÓLOGO

El libro que tiene en sus manos el lector es, sin duda, una valiosa contribución científica al campo de la Didáctica de la Matemática. Los que hemos participado en su elaboración y contenidos, nos hemos esforzado por dotar sus páginas del rango que merece la persona a la que tratamos de rendir homenaje con su publicación: Encarnación Castro Martínez. Para los integrantes del Grupo de Investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», y para muchas otras personas, que a lo largo de los años se han relacionado de un modo u otro con ella, Encarnación ha sido un ejemplo y un estímulo a la hora de trabajar en grupo, de abordar nuevos planteamientos, de renovar la docencia de las Matemáticas y de formar nuevos maestros y maestras. Gran parte del prestigio investigador del que hoy goza en este campo la Universidad de Granada, se debe a su labor y su constancia a lo largo de su trayectoria profesional. Y también a su personalidad que, en muchos casos, ha sabido trascender la pura relación profesional, creando lazos de amistad, respeto y afecto entre quienes la conocemos.

Durante los últimos años, la preocupación por modernizar la enseñanza de las Matemáticas y adaptarla a los requerimientos y avances derivados de propuestas de cambio curricular, de nuevas ideas y de proyectos de innovación, han traído consigo un amplio replanteamiento docente y toda una gama de técnicas, recursos, procedimientos y herramientas, hasta hace poco insospechados. De modo especial, ha contribuido a ello una creciente y cualificada labor investigadora en el campo de la Educación Matemática, donde el trabajo aislado ha sido sustituido por la colaboración científica sistemática. Además, el incremento de contactos, la constitución de redes y la realización de reuniones han propiciado un mejor conocimiento de los temas que interesan a los investigadores españoles en estas materias. Los simposios, que anualmente celebra la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), constituyen una de las referencias principales sobre las que contrastar tal actividad. Las reuniones de la SEIEM han acreditado también la labor del grupo, al que pertenece Encarnación Castro y, en general, al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, conformándolo como uno de los más activos de las universidades españolas, tanto por lo que se refiere a su producción científica como a su calidad.

A ello se une la labor de divulgación y popularización, que desde años se viene realizando con notable éxito, de una materia tradicionalmente poco grata para los estudiantes, pese al innegable atractivo que encierra; desapego en buena parte derivado de planteamientos y métodos de enseñanza obsoletos. Recientemente, el entusiasmo, la capacidad profesional, de innovación y de investigación de una amplia comunidad de profesores de matemáticas y de investigadores en Educación Matemática, está logrando que las Matemáticas despierten el interés de los estudiantes, reciban su atención y despierten su vocación por un mayor y mejor conocimiento de la materia como ciudadanos, como profesionales o como futuros docentes.

En esta actividad, el trabajo de Encarnación Castro ha sido referente constante en la comunidad española de educadores matemáticos. Detrás de todo ello, además de la convicción y el amor que toda buena maestra siente por su disciplina y por sus alumnos y alumnas, están muchas horas de trabajo docente e investigador, de confrontación de ideas y teorías, de análisis de la realidad, de planteamientos y resultados como los que se exponen en las páginas de este libro. Un trabajo interuniversitario que, además de ofrecerse a la comunidad científica, es también ejemplo paradigmático de agregación, de la necesidad de esa cooperación cada vez más necesaria en un mundo globalizado, donde lo interdepartamental, lo interuniversitario, lo internacional, en definitiva, la visión de conjunto para la integración de las aportaciones de todos, son cada vez más imprescindibles ya que los problemas son, asimismo, cada vez más complejos y universales. Estamos ante unas líneas de investigación y un modo de concebir la investigación en Educación Matemática, en particular y en las ciencias de la educación, en general, por las que también se apuesta decididamente desde la Administración autonómica andaluza.

Como universitario, como gestor público, como hombre preocupado por lo que rodea a mi vocación profesional de matemático, no puedo menos que sentirme orgulloso de obras como esta. Este volumen, desde el punto de vista conceptual, se centra en cuestiones sobre las estructuras numéricas y la didáctica del álgebra, contempladas en sus dos primeros apartados; no obstante su denominador común son las ideas e inquietudes específicamente tratadas en el tercero, es decir: la formación del profesorado, la investigación y la innovación. Esta adición de compendios constituye un aporte cualificado, que enaltece a nuestra siempre merecida homenajeada, pero también a los autores, de tan variados y ricos aportes, a sus compañeros y amigos.

Estoy seguro de que sus páginas no sólo aportan el reconocimiento debido a Encarnación ahora, en el momento de su jubileo, sino sobre todo, una gran inquietud por la creación, transmisión y difusión del conocimiento, por su innovación y avance, con la esperanza de que se amplíen estas vías de gran atractivo por las que proseguir en el futuro para beneficio de los ciudadanos, de la enseñanza de las Matemáticas y de la formación de sus profesionales.

MANUEL TORRALBO RODRÍGUEZ
Director General de Universidades, Junta de Andalucía

CONFERENCIAS PLENARIAS

EN TORNO A TRES PROBLEMAS DE LA GENERALIZACIÓN[1]
Concerning three problems of generalization

Luis Radford[a,b]
[a] Université Laurentienne, Canadá y [b] University of Manchester, Reino Unido

Resumen

La generalización es uno de los procedimientos principales de producción del conocimiento. Esta se constituye a través de tres problemas fundamentales, mutuamente relacionados. El primero es un problema fenomenológico planteado alrededor de la escogencia de las determinaciones sensibles, un problema en el que participan, entre otros, la intuición, la atención, la intención y la sensibilidad. El segundo es un problema epistemológico, que consiste en la extrapolación o generalización propiamente dicha y a través de la cual se produce el nuevo objeto. El tercer problema es un problema semiótico, que resulta de los medios a través de los cuales se denota el objeto generalizado. En este trabajo, propongo una reflexión sobre dichos problemas, centrándome en particular en la generalización de patrones en un contexto educativo.

Palabras clave: Generalización; Gestos; Patrones; Percepción; Semiótica.

Abstract

Generalization is one of the principal knowledge production processes. It is constituted through three fundamental interrelated problems. The first one is a phenomenological problem that deals with the choice of sensible determinations—a problem in which intuition, attention, intention, and sensibility participate. The second problem is of an epistemological nature; it consists in the manner in which the extrapolation or generalization produces a new object. The third problem is of a semiotic nature. It results from the semiotic means that are mobilized in order to denote the generalized object. In this presentation I discuss these fundamental problems, focusing in particular on the generalization of patterns in an educational context.

Keywords: *Generalization; Gestures; Intention; Patterns; Perception; Semiotics.*

Radford, L. (2013). En torno a tres problemas de la generalización. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Granada, España: Editorial Comares.

[1] Este artículo es resultado de un programa de investigación subvencionado por the Social Sciences and Humanities Research Council of Canada (SSHRC/CRSH).

Introducción

En un célebre pasaje de la *Lógica*, Kant dice:

> Veo un abeto, un sauce y un tilo. Al comparar primero estos tres objetos, noto que los tres son diferentes entre ellos respecto al tronco, las ramas, las hojas, etc. Sin embargo, luego reflexiono en lo que tienen en común… y hago abstracción de su tamaño, forma, etc. Así formo un concepto de árbol. (Kant, 1974, p. 100)

Este pasaje sugiere que la generalización se constituye, primero, a través de un proceso de determinaciones sensibles sobre objetos en el que participan, entre otros, la intuición, la atención y la sensibilidad. Vemos tres objetos frente a nosotros (en este caso, un abeto, un sauce y un tilo). Operando en el plano fenomenológico, efectuamos una serie de determinaciones. En el ejemplo que Kant ofrece, las determinaciones sensibles corresponden al tronco, las ramas y las hojas, que notamos que son *diferentes* de un objeto al otro. A pesar de sus diferencias, procedemos a una segunda serie de determinaciones, orientada esta vez hacia lo que tienen en *común*. Y luego, por una especie de «abstracción», dice Kant, formamos el concepto de árbol.

La abstracción a la que hace referencia Kant es, sin embargo, más compleja de lo que sugiere el ejemplo. Para llegar a formar el concepto de árbol, la escogencia de lo que vamos a dejar de lado y lo que vamos a conservar de las determinaciones sensibles se inscribe en un terreno que ya no es fenomenológico, sino epistemológico. Es, en efecto, en este terreno que criterios de selección deberán ser tomados en cuenta y llevarán a un concepto o a otro. Según la manera de operar de lo epistemológico, los datos sensibles serán abstraídos, inducidos o generalizados a fin de producir el nuevo objeto. Queda, por fin, un problema semiótico: el de denotar de alguna manera el nuevo objeto. En el caso de los objetos botánicos, como en el ejemplo de Kant, la denotación se hace a través del lenguaje natural: el resultado de la generalización se designa a través de un término lingüístico, «árbol». En el caso de los objetos matemáticos, la denotación puede tomar varias formas. En la generalización de patrones, por ejemplo, la denotación puede hacerse a través de lo gestual, el lenguaje natural o el simbolismo alfanumérico (o combinaciones de estos). Del ejemplo anterior podemos ya observar que en una generalización aparecen tres problemas importantes: uno fenomenológico, uno epistemológico y otro semiótico. En este capítulo, propongo una reflexión didáctica en torno a esos tres problemas en el caso particular de la generalización de patrones o secuencias figurales.

El problema fenomenológico y la intención perceptiva

Consideremos la siguiente secuencia (Figura 1) que hace parte de una serie de lecciones sobre la generalización algebraica emprendida en una clase de segundo año de escuela primaria (niños de 7-8 años).

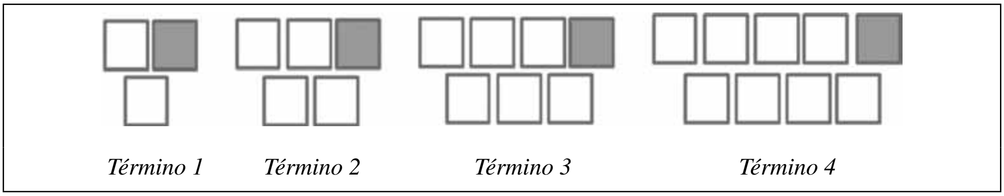


Figura 1. *Los cuatro primeros términos de una secuencia investigada en una clase de segundo año*

Para poder generalizar la secuencia, los alumnos deben proceder a una serie de determinaciones sensibles y notar similitudes y diferencias. A priori, las determinaciones posibles constituyen un conjunto extenso: los alumnos pueden fijar su atención en la forma de los términos, en la cantidad de cuadros que constituyen cada uno de los términos, el color, el espacio entre ellos, etc. La escogencia de similitudes y diferencias se hará, en principio, según la comprensión que se hacen los estudiantes del *objeto* de la actividad de generalización. En efecto, la mirada con la que cada uno de nosotros percibe el mundo no es una mirada desinteresada. Vemos con cierta *intención*, deteniéndonos en aquellas determinaciones sensibles que le corresponden.

En nuestra serie de lecciones, el *objeto* de la actividad es reconocer una manera histórica y culturalmente constituida de razonar algebraicamente sobre secuencias. Ahora bien, ese objeto no es claro para los alumnos. Y no puede serlo. Si el objeto de la actividad fuese claro para ellos, no habría nada por aprender. Por el contrario, el objeto de la actividad sí es claro para el maestro. Esta es la característica fundamental de la actividad de enseñanza-aprendizaje: su asimetría respecto al objeto de estudio. Esto significa que el maestro y el alumno no atienden necesariamente al mismo complejo de determinaciones sensibles. La intención fenomenológica del maestro y de los alumnos no es la misma.

A falta de tener una idea clara del objeto de la actividad, no es sorprendente, pues, que cuando les pedimos a los alumnos que prolonguen la secuencia de términos figurales, los alumnos proceden a determinaciones que no son necesariamente propicias para la producción de una generalización algebraica. A menudo, los alumnos se centran sobre la dimensión cuantitativa de los términos y, al continuar la secuencia de la Figura 1, proponen términos como los que se muestran en la Figura 2.

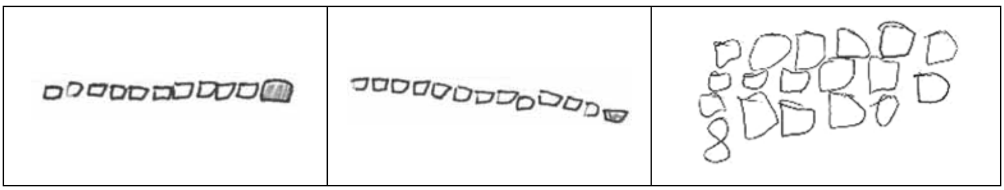


Figura 2. *Izquierda y medio, los términos 5 y 6, respectivamente, según un alumno. A la derecha, el término 8 según otro alumno*

El problema epistemológico

Para producir los términos 5, 6 y 8, los alumnos han hecho una *generalización*. Han notado que los términos son diferentes numéricamente y que entre un término y el siguiente hay dos cuadrados de más. Esta *propiedad común* ha sido extrapolada a los siguientes términos. Aunque tal procedimiento es operacional para pequeñas figuras, el mismo se vuelve impráctico cuando se trata de saber cuántos cuadrados hay en términos remotos, como el término 25. A menudo, los alumnos afirman que hay que seguir añadiendo 2 hasta llegar al término buscado (Radford, 2010). Adolescentes, que han tenido oportunidad de alcanzar un pensamiento numérico más sofisticado, proponen estrategias basadas en procedimientos de ensayo y error: proponen «n + 1»; remplazan n por números pequeños como 2 o 3 y se dan cuenta que la fórmula propuesta no funciona. Luego tratan otra, como «n + 2», etc., hasta que «encuentran» que la fórmula es «2n+1». Estos dos procedimientos se sitúan en el terreno epistemológico señalado arriba: de un trabajo de observación en el terreno fenomenológico, ciertas determinaciones son seleccionadas; luego se procede a una extrapolación que opera diferentemente. En el primer caso, se propone un procedimiento en el que se dicen de manera *genérica* las etapas a seguir (continuar añadiendo pacientemente 2 hasta llegar al término buscado, que puede ser el término 25, 50, 1000, etc.). En el segundo caso, se propone un procedimiento de ensayo y error. Ninguno de estos dos procedimientos reposan, como puede verse, en conceptos algebraicos, y no obedecen por tanto a una generalización algebraica. Estos procedimientos de generalización son más bien aritméticos. Si estas generalizaciones no son algebraicas, ¿cómo podemos caracterizar las generalizaciones algebraicas de secuencias figurales?

La generalización algebraica de patrones

La generalización algebraica de secuencias figurales o numéricas, sugiero, esta basada en los siguientes puntos: (a) la toma de conciencia de una *propiedad común* que se nota a partir de un trabajo en el terreno fenomenológico de observación sobre ciertos términos particulares (por ejemplo, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_k$), (b) la generalización de dicha propiedad a todos los términos subsecuentes de la secuencia ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \ldots$) y (c) la capacidad de usar esa propiedad común a fin de *deducir una expresión directa* que permite calcular el valor de cualquier término de la secuencia.

Hay varios elementos envueltos en la generalización, como lo proponemos aquí. Primero, una característica común local es notada a partir de un número finito de términos. Como lo hemos mencionado anteriormente, esta etapa requiere hacer una escogencia entre determinaciones sensibles potenciales. Enseguida, esa característica común es generalizada a los otros términos de la secuencia. La generalización de la «característica común» (que puede ser una o varias) corresponde a lo que Peirce llama una abducción (*abduction*), esto es, algo que es solamente plausible (Peirce, 1931-

1958, CP 2.270). Dependiendo del uso de esta abducción, la generalización tomará varios cursos. Cuando la abducción es simplemente utilizada para pasar de un término al otro (como cuando los alumnos dicen que hay que añadir 2 cuadrados), llegamos a una generalización aritmética. En este caso, *no* hay *deducción* de una expresión directa que permita calcular el número de cuadrados en cualquier término de la secuencia. La abducción permite generar un procedimiento pero no una expresión directa—en otras palabras, una fórmula. En el caso del procedimiento por ensayo y error, los alumnos producen una fórmula. Pero la fórmula no es deducida. De hecho, la abducción concierne la fórmula misma. Los alumnos proponen una fórmula, que parece plausible, y la someten a un número finito de pruebas. Esta generalización (que corresponde a una de las formas de inducción) no es todavía algebraica. Para que la generalización sea algebraica se requiere, de acuerdo a lo expuesto arriba, que la abducción que se hace de la característica común sea utilizada de manera *analítica*. Esto quiere decir que la abducción será utilizada ya no como simple posibilidad, sino como principio asumido para deducir apodícticamente una fórmula que proporciona el valor de cualquier término.

Como vemos, el punto crucial corresponde al papel epistemológico que desempeña la característica común, C, extraída durante el trabajo efectuado en el terreno fenomenológico. C pasa de entidad plausible a principio asumido, esto es hipótesis, H. La Figura 3 muestra un diagrama que explica estas ideas. Las flechas son bidireccionales, pues a menudo hay idas y vueltas entre los diferentes elementos. Hay también relaciones entre casillas no contiguas, que omitimos con el fin de simplificar el diagrama.

Figura 3. *Estructura de la generalización algebraica de secuencias figurales*

El aprendizaje de la generalización algebraica

La Figura 3 muestra la complejidad detrás de la generalización algebraica. No es sorprendente que, cuando alumnos de diversos niveles educativos se enfrentan a ella por primera vez, aparezca una serie de dificultades de índole diferente (un estudio con adolescentes es presentado en Radford, 2010; un estudio con alumnos de escuela primaria es presentado en Radford, 2012).

Entre las dificultades se encuentra, primero, la escogencia de determinaciones sensibles en el terreno fenomenológico. Estas dificultades resultan de las varias posibilidades que ofrece la percepción de los términos dados. Como vimos anteriormente, los alumnos tienden a centrarse en la dimensión numérica. Sucede también que los alumnos se dejan llevar por la apariencia de los términos. Así, en la primera lección de una serie de lecciones de introducción a la generalización algebraica en una clase de segundo año de escuela primaria, hemos podido constatar lo siguiente. Los alumnos fueron llamados a pronunciarse sobre la veracidad o falsedad de la afirmación hecha por una alumna ficticia (Monique) quien pretendía que el término mostrado en la Figura 4 corresponde al término 8 de la secuencia dada en la Figura 1.

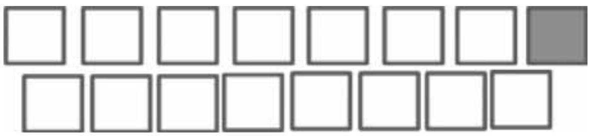


Figura 4. *El término 8 de Monique*

Dejándose llevar por la apariencia del término, los alumnos concluyeron en su mayoría que el término de Monique corresponde, efectivamente, al término 8 de la secuencia, sin notar que hace falta un cuadrado blanco en la figura de arriba. Para notar este hecho, los alumnos tendrían que tomar en cuenta dos estructuras que desempeñan un papel importante en la generalización algebraica. En efecto, el trabajo algebraico sobre el terreno fenomenológico va a reposar sobre la articulación de dos estructuras diferentes: una de tipo numérico y otra de tipo espacial. La estructura numérica responde a la pregunta: ¿cuántos cuadrados? La estructura espacial responde a la pregunta ¿en dónde colocarlos? Aunque es posible generar una fórmula algebraica tomando en cuenta solamente la dimensión aritmética, notando que se añaden siempre dos cuadrados a un término para producir el siguiente y que para llegar al término (digamos) 25 debemos adicionar al primer término 2 cuadrados 24 veces, esta vía resulta difícil en virtud de requerir un conteo sistemático que debe enseguida ser transformado en una multiplicación sofisticada: 3 + 2 x 24. Para nuestros alumnos de segundo grado, dicha vía se encuentra más allá de lo que parece razonable esperar, dada la naturaleza todavía emergente de su pensamiento aritmético. Es aquí donde la estructura espacial es proveedora de índices perceptivos generalizables. Ahora bien, para utilizar dichos índices, hay que ver los términos no como un conglomerado de cuadrados, sino como cuadrados propiciamente organizados. Hay varias formas de proceder. Una de las formas que hemos explorado en nuestra investigación es la de imaginar los términos como constituidos por dos filas (otras posibilidades incluyen ver los cuadrados organizados en diagonales en dirección ascendente o en dirección descendente, etc.). En el pasaje que comentaremos a continuación, los alumnos de la clase de segundo año fueron divididos en pequeños grupos de 3 miembros. Los alumnos fueron invitados a dibujar los términos 5 y 6. Luego debían discutir sobre el término de Monique y decidir si era o no el término 8 de la secuencia.

Los tres alumnos de uno de los grupos sobre el que nos concentraremos en el resto de este articulo (Sara, Jaime y Melinda) trabajaron juntos por 32 minutos sobre esas y otras preguntas de la actividad. Cuando la maestra fue a ver al grupo, los alumnos le explicaron a la maestra que estaban de acuerdo con Monique: su término era el término 8 de la secuencia. La maestra decidió entonces iniciar un trabajo conjunto para llevar a los alumnos a tomar conciencia de la estructura espacial de la secuencia como primer paso hacia la objetivación de la característica común que se desprende de una lectura que atiende a la estructura numérico-espacial de la secuencia. Indicando la fila inferior con gestos repetidos, le maestra dice:

1. Maestra: Bueno. … Vamos a ver los cuadrados que están abajo… solamente los cuadrados de abajo… [ver Figura 5, foto 1] no los que están arriba. En el término 1, ¿cuántos …?
2. Alumno 1: ¡1!
3. Maestra: [señalando la fila de abajo del término 2; ver Figura 5, foto 2] ¿Término 2?
4. Alumnos: ¡2!
5. Maestra: [continúa haciendo los mismos gestos indexicales y hablando de manera rítmica, como lo hará en las próximas intervenciones; señalando la fila de abajo del término 3] ¿Término 3?
6. Alumnos: ¡3!
7. Maestra: [señalando la fila de abajo del término 4] ¿Término 4?
8. Alumnos: ¡4!
9. Maestra: [moviendo su mano hacia un espacio vacío después del término 4, donde se esperaría que se encontrase el término 5] ¿Término 5?
10. Alumnos: ¡5!
11. Maestra: [moviendo su mano hacia un espacio vacío donde se esperaría que se encontrase el término 6] ¿Término 6?
12. Alumnos: ¡6!
13. Maestra: [Igualmente, señalando indexicalmente la fila de abajo del imaginado término 7] ¿Término 7?
14. Alumnos: ¡7!
15. Maestra: [Igualmente, señalando indexicalmente la fila de abajo del imaginado término 8]
16. Alumnos: ¡8!

Figura 5. *Izquierda, la maestra señala las filas de abajo de los cuatro primeros términos. En medio, la maestra y Jaime señalan la fila debajo del término 2. A la derecha, imaginando que el término 8 está hacia el final de la hoja, la maestra señala el imaginado término 8*

En la línea 1, la maestra enfatiza la palabra «abajo», señalando la fila inferior del término 1. Luego, mueve despacio el índice de la mano izquierda tres veces horizontalmente a partir del término 1 hasta llegar al término 4. Los gestos y los enunciados de la maestra intentan hacer visible a los alumnos una nueva intención y su correspondiente manera de percibir las figuras: una manera en la cual estas aparecen divididas en dos filas. Naturalmente, los alumnos ven dos filas pero su atención no se detiene y no retiene esta particularidad de los términos que son filtrados, hasta ahora, según su atributo numérico. El problema de la maestra es, pues, resaltar del conjunto potencial de determinaciones sensibles ciertos rasgos que permitirán más adelante una generalización algebraica. La maestra contribuye con sus gestos y palabras, mientras que los alumnos acompañan los gestos con la vista y responden a medida que los gestos se desplazan sobre los términos visibles de la secuencia. A través de esta actividad semiótica, la maestra intenta resaltar la relación funcional de la que emergerá la toma de conciencia de una relación funcional entre el número de la figura y el número de los cuadrados en la fila inferior. Notable en este proceso de toma de conciencia (o de objetivación; Radford, 2003) es el papel del ritmo y el papel de los gestos indexicales que la maestra hace con las dos manos. En la Figura 6, la maestra hace dos tipos de gestos: uno en el que el gesto apunta hacia lo que es accesible a través de la vista: es el caso de los cuatro primeros términos. La maestra dice «término 3» y apunta hacia el término correspondiente sobre la hoja de los alumnos (ver Figura 6, foto 1). A partir del término 5 y hasta el término 8, la función gestual cambia de papel: puesto que los términos no están dibujados, los alumnos tienen que imaginarlos. Para ayudarlos en esta extrapolación sensible en la que está basada la generalización, la maestra en lugar de hacer un gesto por término, hace dos gestos: uno para señalar el término donde éste estaría ubicado si se hubiese dibujado (ver Figura 6, foto 2, en el que la maestra hace referencia al término 6), el otro para señalar la fila de abajo del término en cuestión (la fila de abajo del término 6). Siguiendo el mismo esquema, la maestra y los alumnos llegan hasta el término 8.

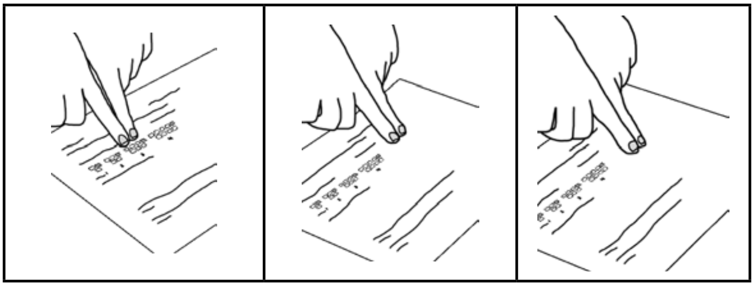


Figura 6. *Izquierda, la maestra señala con un gesto indexical doble el término 3. Medio y derecha, la maestra señala el término 6 y la fila inferior del término 6 (Reconstrucción a partir del vídeo)*

La acción lingüística-perceptiva-gestual se convierte en un *nodo semiótico* (Radford, 2009), esto es, un segmento de la actividad de enseñanza aprendizaje en la que signos que pertenecen a diferentes sistemas semióticos (Radford, 2003) se complementan para generar una toma de conciencia de la manera en que el problema puede ser atacado desde un punto de vista algebraico. La generalización ocurre en la transición del término 4 (el último término en el campo concreto perceptivo) a los términos siguientes (5, 6, 7 y 8). Esta reposa en una abducción, su transformación en hipótesis y la aplicación de esta última a los términos siguientes que los gestos y las palabras intentan evocar y hacer presente —a través de la imaginación— en el terreno fenomenológico. En efecto, la característica común ha sido extraída del trabajo sensible sobre los términos 1 a 4 (característica que conlleva a notar que el número del término coincide con el número de cuadrados en la fila inferior). Dicha característica común es luego aplicada a los términos siguientes. La actividad continúa con la verificación del número de cuadrados en la fila inferior del término de Monique. La maestra logra que los alumnos comprueben que, en efecto, el término de Monique contiene 8 cuadrados en su fila inferior. Los alumnos se muestran muy contentos. Luego, la maestra invita a los alumnos a «ver solamente la fila de arriba». Siguiendo un procedimiento gestual similar, los alumnos toman conciencia que, en la fila superior de cada término, hay un cuadrado de más que el número del término. Con toda seguridad, afirman que el término de Monique tiene 9 cuadrados arriba. Luego hacen una verificación que culmina con una gran sorpresa: contrariamente a lo que habían creído, el término de Monique tiene solamente 8 cuadrados. A partir de esta experiencia, los alumnos pueden indicar cuántos cuadrados hay en un término fijo cualquiera de la secuencia. Así, Melinda dice unos minutos más tarde, refiriéndose al término 25: «25 + 25 + 1».

El problema de la denotación

A menudo se considera que hay generalización algebraica cuando los alumnos recurren al simbolismo algebraico alfanumérico. Como hemos sostenido en otros trabajos (ver, por ejemplo, Radford, 2010), esto no es cierto. La denotación de la generalización algebraica puede ser efectuada a través de otros sistemas semióticos. En el ejemplo que hemos discutido aquí, vemos que la denotación se hace a través de una actividad multimodal, en la que intervienen la percepción, los gestos, los símbolos matemáticos y el lenguaje natural. Los alumnos han llegado a constituir una fórmula encarnada en la acción y en el lenguaje y que se aplica a cualquier término particular, por ejemplo, en el caso del término 25, la formula es «25 + 25 + 1». Pero los alumnos pueden aplicarla ahora a otros términos. Otro alumno propone el término 50, y dice: «50 + 50 + 1». La encarnación (*embodiment*) de la formula en la acción y en el lenguaje natural es potente, pero tiene sus limites. La variable en sí no aparece como objeto de discurso: esta aparece instanciada en algunos de sus valores. Para que la variable (“el número del término») se convierta en objeto de discurso, habrá que mover la actividad de enseñanza-aprendizaje a otros niveles de generalidad en el que aparecerán, del lado de los alumnos, nuevas formas de conciencia mediatizadas por el uso más abstracto del lenguaje oral y escrito.

Referencias

Kant, I. (1974). *Logic.* Indianapolis: The Bobbs-Merrill Company. (First Published in 1800).

Radford, L. (2003). Gestures, speech and the sprouting of signs. *Mathematical Thinking and Learning, 5*(1), 37-70.

Radford, L. (2009). «No! He starts walking backwards!»: Interpreting motion graphs and the question of space, place and distance. *ZDM - the International Journal on Mathematics Education, 41*, 467-480.

Radford, L. (2010). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. *Research in Mathematics Education, 12*(1), 1-19.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA, 6*(4), 117-133.

REFLEXIONES SOBRE EL ALGEBRA ESCOLAR Y SU ENSEÑANZA

Reflections on school algebra and its teaching

Abraham Arcavi
Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel

Resumen

En las tres décadas pasadas hemos sido testigos y protagonistas de ciertos progresos en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra. La investigación ha contribuido documentando y analizando las dificultades conceptuales de los alumnos. El desarrollo curricular ha producido textos que toman en cuenta esas dificultades ofreciendo enfoques y problemas originales y promisorios. Las tecnologías educativas han propuesto entornos computarizados para motivar a los alumnos con trayectorias didácticas innovadoras. Sin embargo, el álgebra sigue siendo un desafío para muchos alumnos y para sus profesores, lo cual invita a seguir reflexionando sobre el tema procurando aportar perspectivas para repensar y quizás también para innovar.

Palabras clave: Álgebra; Enseñanza; Aprendizaje.

Abstract

In the past three decades we witnessed and lead some advances in the teaching and learning of algebra. Research has contributed by documenting and analysing students' conceptual difficulties. Curriculum development has produced textbooks in order to cope with these difficulties offering original approaches and promising tasks. Educational technologies have proposed computerized environments designed to motivate students and to offer novel learning trajectories. Nevertheless, algebra continues to pose a challenge to many students and their teachers, inviting us to continue reflecting on these issues in the pursuit of perspectives to rethink and perhaps also to innovate.

Keywords*: Álgebra; Learning; Teaching.*

Arcavi, A. (2013). Reflexiones sobre el álgebra escolar y su enseñanza. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 13-22). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

El matemático Augustus De Morgan (1806-1871) relató la siguiente historia sobre una visita del filósofo y escritor francés Denis Diderot a Catalina la Grande, a la sazón emperatriz de Rusia. Diderot era ateo, o por lo menos se hacía pasar por tal, y esto divertía a la creyente emperatriz y a sus jóvenes acólitos. Pero en su corte había quienes consideraban altamente imprudente ese tipo de discurso. La emperatriz no quiso silenciar a su huésped con una prohibición explícita, por lo tanto se urdió el siguiente plan. Diderot fue informado que un matemático tenía una demostración algebraica de la existencia de Dios y que la comunicaría ante toda la corte, con su acuerdo. Diderot accedió complacido. El matemático en cuestión era Leonhard Euler, quién se acercó a Diderot con un aire grave y en un tono de perfecta convicción le dijo: *«Monsieur,* $\frac{a + b^n}{n} = x$ *donc Dieu existe; respondez!»* De Morgan narra que Diderot, para quién aparentemente el álgebra le era incomprensible, quedó visiblemente desconcertado, provocando intensas carcajadas por doquier. Al día siguiente solicitó permiso para volverse a Francia lo cual le fue concedido de inmediato (De Morgan, 1915, vol. II, p. 339).

Esta historia, sea verdadera o imaginada, nos presenta el álgebra como una fuente de poder, como un instrumento místico usado para intimidar en lugar de esclarecer. Por medio de una concatenación ininteligible de símbolos, es posible envolver cualquier argumento con un manto de respetabilidad científica proveyéndolo así de «evidencias irrefutables» con el explícito objetivo de paralizar a un interlocutor inseguro de sus conocimientos matemáticos (Arcavi, 2008). Una persona con mínimos conocimientos de álgebra hubiera desafiado el manipuleo autoritario de los símbolos matemáticos, cuestionando la relación entre la esencia del argumento y la fórmula esgrimida para fundamentarlo.

Una posible moraleja de esta historia sería que el conocimiento del álgebra es crucial para inspeccionar y entender expresiones simbólicas, desarrollar una actitud crítica hacia ellas sabiendo establecer y evaluar cuándo es apropiado usarlas y cuándo no lo es. Esto es especialmente importante en una era en la que abunda la información con sus diversos ropajes, muchos de ellos pseudocientíficos y apoyados en argumentos «matemáticos». Un aspecto central del alfabetismo algebraico consistiría pues en la capacidad de inspeccionar y cuestionar cualquier uso, mal uso o abuso de las expresiones algebraicas para sustentar conclusiones.

Nos preguntamos si entre los objetivos de la enseñanza del álgebra se presta la suficiente atención a este aspecto y de qué manera. Y en términos mas generales, ¿cuáles son esos objetivos, qué aspectos abarcan, cómo se formulan y cómo se implementan? Sobre estas cuestiones propongo reflexionar usando algunos ejemplos e invitando al diálogo.

Sentido de própósito

El Proyecto 2061, una iniciativa a largo plazo de la American Association for the Advancement of Science (AAAS) para reformas curriculares en la educación en ciencias, estableció y publicó (en el 2000) criterios para analizar y evaluar programas curriculares y textos de estudio de álgebra. Su primer criterio procura identificar si el texto transmite el propósito de la enseñanza de una unidad o de un tema y si las consiguientes actividades y problemas propuestos para ese tema reflejan ese propósito. Es decir, ¿podrá un alumno obtener una respuesta a la pregunta del para qué estudiar el álgebra (o un tema en particular dentro del álgebra) y de qué manera lo que se estudia le puede servir? De los doce libros de texto de álgebra analizados por el Proyecto 2061, sólo cinco fueron considerados satisfactorios o buenos con referencia a este criterio y ninguno fue calificado de excelente. Es decir, en su mayoría, los textos no parecen preocuparse por otorgarle al álgebra un sentido de propósito, y esto puede (y suele) redundar en una visión del álgebra como una actividad carente de una finalidad relevante. Por lo tanto no es de sorprender que su estudio sea considerado por los alumnos como algo esotérico y estéril. Hay quienes (por ejemplo, Moses y Cobb, 2001) van más lejos aún y afirman que, en muchos casos, la enseñanza del álgebra lejos de enriquecer a los alumnos los empobrece. Nos preguntamos ¿qué constituirá para el alumno un propósito adecuado del álgebra? ¿Serán válidos nuestros propósitos, o serán considerados como artificialmente impuestos? Ciertamente un argumento del tipo «sin álgebra no podrás avanzar en el estudio de las matemáticas» no sólo no constituye un convincente sentido de propósito sino que además puede ser contraproducente. Proponemos que durante el estudio del álgebra es necesario co-construir con nuestros alumnos un sentido de propósito, a tono con sus expectativas, intereses y posiblemente sus inclinaciones intelectuales, y también a tono con las necesidades de un mundo cambiante tanto en sus valores como en los medios tecnológicos puestos a nuestra disposición.

Álgebra, democracia y toma de decisiones

El National Council on Education and the Disciplines (NCED) publicó un libro titulado Mathematics and Democracy (Steen, 2001). El título y su subtítulo «The Case for Quantitative Literacy» indican de manera resumida el mensaje principal: en un mundo donde nos inunda la información y sus diversas representaciones, la alfabetización matemática es de crucial importancia – su ausencia puede tener consecuencias imprevisibles y hasta puede afectar las características del sistema social en el que vivimos. Individuos que la carezcan podrían protagonizar situaciones similares al caricaturesco encuentro entre Diderot y Euler. Por lo tanto, la enseñanza del álgebra debe prestar atención no sólo al comando de destrezas procedimentales, sino también al saber cómo y cuándo usarlas (y a veces saber decidir cuándo no usarlas en favor de otros medios más eficientes), aplicándolas a la información cruda para elaborarla o para inspeccionar información analizada por otros, reflexionando sobre ella, criticándola, re-representándola y tomando decisiones apropiadas. A veces estas decisiones involucrarán el rechazo de un argumento esgrimido por otros (como lo que no ocurrió en la anécdota de De Morgan). Otras veces se puede tratar de decisiones que afectan aspectos de nuestras vidas. Consideremos el siguiente ejemplo tomado de la vida real del aula, en el que el comando del álgebra provee al alumno de un sentido de propósito transparente e inmediato, íntimamente ligado a su vida escolar y proveyéndolo de un instrumento para la toma de decisiones.

DA, de 15 años de edad, contó que su profesor de matemáticas estaba decepcionado por las calificaciones obtenidas por la clase en un examen sobre el tema funciones, pero consideró que quizá los problemas propuestos habían sido un poco difíciles. En consecuencia, decidió ajustar las calificaciones mediante un factor de corrección de la siguiente manera: si x era la calificación que le hubiera correspondido a un alumno en una escala de 0-100 (100 la calificación máxima), ésta se transformaría en 10.

El álgebra (y en especial el concepto de función, sobre el cuál era el examen) es un instrumento esencial para entender esta situación con todas sus implicaciones. En base al concepto de función, y en general usando el álgebra, se puede responder a muchas de las preguntas naturales que surgen en este caso, por ejemplo: si originalmente me correspondió un 81, ¿qué nota me corresponde al aplicar el factor de corrección? ¿Este factor aumentará la calificación original a todos los alumnos o habrá quienes perderían puntaje en lugar de incrementarlo? (Hay alumnos que contestan que esto es imposible alegando que la función $f(x) = 10\sqrt{x}$ es creciente, sin darse cuenta que hay funciones crecientes que pueden disminuir la calificación original (un ejemplo simple sería $f(x) = x - 10$). A mi amigo le correspondió un 64, ¿el factor de corrección será más o menos generoso con él que conmigo? ¿En general, será justo este factor de corrección, es decir, beneficiará a todos por igual, o beneficiará más a «ricos» que a «pobres», o viceversa? Si me dieran a elegir entre este factor y aumentar mi calificación en un 10% ¿cuál elegiría? ¿Qué otro factor de corrección propondrías? (Arcavi, 2006). Es claro que el conocimiento de funciones y sus gráficas permite contrastar el gráfico de $f(x) = 10\sqrt{x}$ con el gráfico de $f(x) = x$ (la calificación sin corregir), evaluar distancias entre ambas gráficas (o estudiar la gráfica de $f(x) = 10\sqrt{x} - x$ buscando sus puntos máximos y mínimos), compararlas con otros factores de corrección (por ejemplo, el sugerido más arriba, cuya representación simbólica es $f(x) = 1.1x$). Cierto conocimiento algebraico, permitiría además notar, por ejemplo, que $10\sqrt{x}$ es la media geométrica entre 100 (la máxima calificación posible) y la calificación original. Lo cual sugiere, inmediatamente un factor de corrección alternativo: la media aritmética (que verbalmente podría traducirse en agregar a la calificación original la mitad de la distancia entre ella y la calificación máxima). Pensar en términos de medias geométrica y aritmética también permite evocar que dados dos números distintos, la primera es siempre menor que la segunda, y eso permite comparar ambos factores. Actividades matemáticas de este tipo son ricas ya que movilizan e integran muchos conocimientos matemáticos. Sin embargo, la traemos acá no sólo por eso, sino porque al ser integrada en el aula como un proyecto (individuales o colectivos), esta actividad ejemplifica el poder que el manejo algebraico puede otorgar para entender situaciones que de otra manera son difíciles (o quizá imposibles) de desentrañar de manera general. En este ejemplo, las matemáticas nos permiten entender la naturaleza y el alcance de una decisión que otros han tomado por nosotros y que nos afectan personalmente (corregir nuestra calificación) y además nos permite pensar y proponer una decisión alternativa (otro factor de corrección, más favorable personal o colectivamente).

El sentido de propósito que proponemos en base a este ejemplo y otros similares (y que fuera señalado como ausente de la mayoría de los textos de álgebra) se refiere al empoderamiento, potenciación, capacitación (empowerment) que las herramientas algebraicas nos pueden otorgar para entender y manejar situaciones. Cuando situaciones de este tipo son usadas en el aula, no sólo se puede trabajar sobre las matemáticas y las posibles conclusiones que se derivan de ese trabajo, sino que explícitamente se debe hacer notar precisamente eso: el poder de las herramientas matemáticas en arrojar luz sobre ciertas situaciones. La elección o el diseño ad hoc de situaciones de este tipo, su trabajo en el aula y la consiguiente discusión acerca del poder del álgebra constituyen, en nuestra opinión, un aporte a la co-construcción del sentido de propósito buscado. A veces estas situaciones emergen en el contexto de las experiencias cotidianas de los alumnos (en nuestro caso en el aula de DA) y presentan excelentes oportunidades didácticas.

Relación entre un argumento y la fórmula que lo expresa

Una famosa cita de Bertrand Russell dice: «las matemáticas son la ciencia donde no se sabe ni de lo que se habla ni si lo que se dice es verdadero». Ciertamente, el contexto de esta cita es el estudio de la lógica y no la educación matemática, sin embargo su manifestación en el aula podría traducirse en un enfoque que propone hacer caso omiso de los significados de los símbolos que manipulamos. Conscientemente o no, demasiado a menudo la enseñanza y el aprendizaje del álgebra consiste casi exclusivamente en practicar leyes formales (asociativa, conmutativa, distributiva, etc.) y establecer cuándo rigen y cuándo no. Practicar estas reglas puede semejar un juego con reglas arbitrarias, como el ajedrez, y la actividad principal es jugarlo omitiendo cualquier pregunta acerca de posibles significados. En este caso, el propósito es el juego mismo y la actividad de jugar. Sabemos que los humanos en general, y los niños en particular, tenemos fuertes inclinaciones lúdicas sin necesidad de buscar metas o significados en los juegos que juguemos, más allá del goce que nos produzcan. Este argumento aplicado a las matemáticas puede tener sus serios riesgos. Raramente nuestros alumnos perciben las matemáticas como un juego que se disfruta al jugarlo. En este caso las leyes arbitrarias del juego se tornan una carga tediosa sin objetivo alguno. Y es por ello, que es perentorio que desde los comienzos, el lenguaje algebraico se viva como una manera eficiente de expresar ideas y un instrumento eficiente para derivar de ellas conclusiones significativas que de otra manera sería muy difícil o imposible de obtener. El sentido de propósito con el que aspiramos imbuir al lenguaje algebraico es precisamente ese: una herramienta para expresar relaciones y derivar conclusiones y en todo momento transitar entre la manipulación simbólica y sus significados.

Ser competente en álgebra escolar implica, entre otras cosas, el ejercicio de esa transición bidireccional, oportunista y flexible entre el uso de acciones desprovistas de significado (como la aplicación automática de reglas y procedimientos) y la aplicación del sentido común y la búsqueda de significados (Arcavi, 2007). Dicho de otra manera, esta competencia incluiría una óptima convivencia entre la oportuna postergación de los significados a favor de una aplicación rápida y eficiente de un procedimiento, pero también, cuando sea necesario o cuando uno lo desee, proceder a la interrupción de una rutina automática con el objeto de cuestionar, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados. Freudenthal lo describiría como «desatascar un automatismo» para desvelar su origen, su significado y su propósito (Freudenthal, 1983, p. 469).

Transiciones significativas y flexibles entre acciones caracterizadas como pobres en significados y aquellas en que los significados juegan un papel central (y viceversa) constituyen la componente central de la competencia en el álgebra escolar.

Veamos un ejemplo. En el arreglo bidimensional de números (llamémoslo «triángulo») de la Figura 1, cada celdilla libre (blanca) debe ser completada con un número que resulta de la suma de los números más próximos en la hilera inmediata superior:

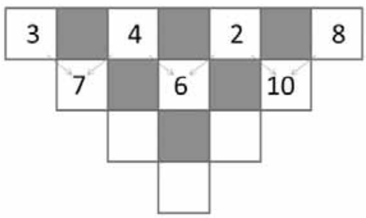


Figura 1. *Ley de formación del triángulo numérico*

El problema consiste en completar el «triángulo» de la Figura 2 cuando sus «vértices» están dados.

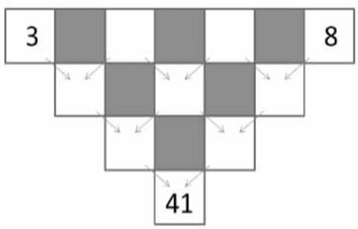


Figura 2. *El problema del triángulo numérico*

Frecuentemente, el paso inicial de nuestros alumnos es el ensayo y error probando distintos números en los dos casilleros vacíos de la hilera superior, efectuando las sumas y comprobando si en la última suma se obtiene 41. Por lo general, el primer intento no resulta y el ensayo y error se torna más controlado ajustando los números por menores o mayores según se haya obtenido más o menos que 41. Otros alumnos proceden en sentido contrario probando descomposiciones posibles del 41 y así tratando de llegar a la primera hilera. A la mayoría de los alumnos no les es inmediata la posibilidad de echar mano al álgebra para elegir dos variables, colocarlas en los dos lugares de la hilera superior, realizar el cálculo a lo largo del triángulo para obtener la ecuación $3 + 3x + 3y + 8 = 41$ y de allí concluir que la solución buscada es la relación es $x + y = 10$, es decir que mientras introduzcamos en las dos celdillas dos números cualesquiera que sumen 10, podremos completar el triángulo para que cumpla con el requerimiento. El álgebra, casi de manera milagrosa, nos ofrece la condición necesaria y suficiente para resolver el problema revelándose así como una herramienta rápida y eficiente. Pero, fieles a nuestra propuesta de co-construcción del sentido de propósito con nuestros alumnos, proponemos resolver el problema de manera general, para mostrar cómo este lenguaje puede resolver no sólo este problema específico, sino un número infinito de problemas similares. Dados tres números cualesquiera en los vértices, A, B y C, la condición para resolver el problema será que los dos números a elegir para las celdillas libres de la hilera superior verifiquen que $x + y = (C - A - B) \div 3$. Pero, esto no es suficiente en nuestro desarrollo del sentido de propósito, lo que nos falta es desentrañar este misterio, o en otras palabras el porqué de este resultado. Es decir, ¿cómo expresa la fórmula la condición buscada y cuál es su relación con el argumento expresado? Transitamos entonces entre la manipulación simbólica carente de significados y lo que el resultado final expresa, y tratamos de descifrar su razón. Re-inspeccionando el triángulo y re-trazando lentamente las operaciones con números, podremos observar que el número final es la suma de una sola vez el valor de los dos vértices superiores y tres veces cada uno de los números que debemos elegir para que el triángulo funcione. Esta observación puede surgir al hacer varias sumas antes de expresar el problema simbólicamente, pero si no surge allí, definitivamente lo podemos provocar observando el resultado simbólico y tratando de otorgarle un sentido. Resumamos los elementos que nos ofrece esta actividad matemática para co-construir un sentido de propósito: la necesidad de invocar y usar una eficiente herramienta simbólica para resolver efectiva y rápidamente el problema, la potencia de esa herramienta para resolver no sólo un problema sino una clase de problemas similares y la relación entre lo que expresa la fórmula y lo que observamos usando nuestro sentido común puede desentrañar de ella el significado que nos indica la estructura del «triángulo» y las relaciones entre sus elementos.

Relegar los símbolos para expresar significados

Hoy en día podemos investigar ciertas situaciones matemáticas con «tecnologías cognitivas» que no sólo nos permiten amplificar nuestros poderes mentales sino que nos permiten proceder de maneras que no podríamos hacer sin ellas (Pea, 1987). Consideremos, por ejemplo, las geometrías dinámicas mediante las cuales podemos modificar en tiempo real y de manera dinámica objetos geométricos. Con esta tecnología podemos investigar el caso de un conjunto de triángulos isósceles cuyos lados iguales miden 5 unidades y su base es variable, obteniendo mediante el arrastre de un vértice de manera continua tantos representantes de esta familia de triángulos como se desee (ver Figura 3).

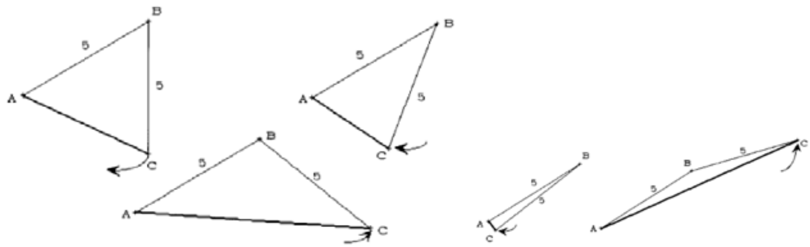


Figura 3. *Triángulos isósceles de lados 5 y base variable*

Esta herramienta permite observar el dominio de variación tanto de la base variable como del área del triángulo (Arcavi y Hadas, 2000), y estudiar ésta en función de aquella. Tradicionalmente, esto implicaría modelar esta situación mediante símbolos para obtener $A = 0.5x\sqrt{100 - x^2}$, donde A representa el área y la base. Esta representación simbólica es críptica, expresa la variación pero no de manera transparente —poco podemos decir a simple vista sobre la naturaleza de esa variación. Contrastemos esta representación con la posibilidad de obtener en tiempo real (mientras arrastramos uno de sus vértices) el trazado de su gráfico (ver Figura 4).

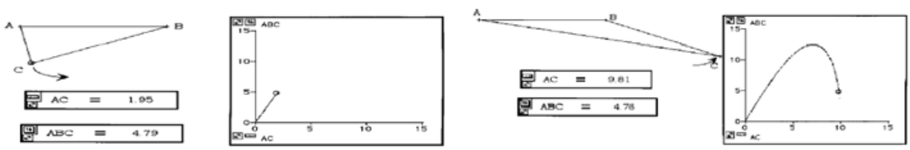


Figura 4. *Instantáneas del trazado del gráfico en tiempo real*

Observar, gracias a las posibilidades tecnológicas, el gráfico de la variación del área en función de la base mientras éste se va trazando simultáneamente a nuestro arrastre de un vértice, nos permite acceder a muchas de las características de esta variación de una manera mucho más transparente que la que nos provee el álgebra. La asimetría del gráfico obtenido, el lugar de máximo y la relación existente entre estas dos observaciones son sólo algunas de las características notables. La exploración de esta actividad (descripta en detalle en Arcavi y Hadas, 2000) nos ejemplifica situaciones en las cuales es posible explorar situaciones por otros medios matemáticos que no sean los símbolos algebraicos, posponiendo la construcción de la fórmula. Esta posibilidad nos permite coleccionar ideas y acumular conocimiento de tal manera que cuando finalmente obtengamos la fórmula podamos identificar en ella (leyendo los símbolos entre líneas) lo que ya sabemos, y constatar que las tres representaciones (el triángulo cambiante, la gráfica de la función y su expresión simbólica) nos ofrecen la misma información además de otros detalles complementarios.

En resumen, ciertas tecnologías nos permiten modelar situaciones no sólo algebraicamente sino también mediante herramientas más cercanas a los significados que queremos representar y estudiar. Posponer el uso de símbolos enriquece nuestro entendimiento de la situación como asimismo nos permite escudriñar ciertos aspectos que son opacos en la fórmula.

A modo de conclusión (o de inicio de un diálogo)

La investigación en educación matemática nos ha legado enseñanzas y experiencias invaluables acerca del estudio del álgebra. Los proyectos curriculares nos han mostrado trayectorias que han tomado en cuenta los resultados de la investigación y han diseñado propuestas creativas e innovadoras. Las tecnologías han puesto a nuestra disposición posibilidades impensadas de acceder al conocimiento. Sin embargo, las dificultades en la enseñanza del álgebra persisten como también la insatisfacción de alumnos y profesores. Es claro que muchos factores inciden en los éxitos y los fracasos de la educación matemática, muchos de ellos ajenos a nuestras posibilidades de influir ya que vivimos en un mundo de tensiones de diversa índole y eso influye en nuestras capacidades de enseñar y aprender. Esas motivaciones (o anti-motivaciones) externas condicionan todo quehacer pedagógico, pero no por ello debemos interrumpir nuestros esfuerzos para entender procesos y basar nuestro proceder en lo que esos esfuerzos produzcan. En esta presentación quise proponer que una posible avenida de trabajo que, a mi juicio, debe ser extendida y profundizada es emprender la co-construcción de una motivación interna con los alumnos para el estudio del álgebra, revelándola como un instrumento poderoso que nos puede servir tanto en decisiones prácticas como en el goce intelectual que produce descubrir relaciones y conexiones inesperadas.

Referencias

ARCAVI, A. (2006). Lo cotidiano y lo académico en matemáticas. *Números, 63,* 3-23.

ARCAVI, A. (2007). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 44,* 59-75.

ARCAVI, A. (2008). Algebra: purpose and empowerment. En C. Greenes y R. Rubenstein (Eds.), *Algebra and algebraic thinking in school mathematics. 70th Yearbook* (pp. 37-49). Reston, VI: NCTM.

ARCAVI, A. *y* HADAS, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. International *Journal of Computers for Mathematical Learning, 5,* 25-45.

DE MORGAN, A. (1915). *A budget of paradoxes* (2nd ed., editado por David Eugene Smith). Londres, Reino Unido: Open Court Publishing Co.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Los Países Bajos: Reidel Publishing Company.

MOSES, R.P. *y* COBB, C.E. (2000). *Radical equations: civil rights from Mississippi to the algebra project.* Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer.

PEA, R. (1987). Cognitive technologies for mathematics education. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 89-122). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

PROJECT 2061, http://www.project2061.org/publications/textbook/algebra/summary/criteria.htm

STEEN, L. A. (Ed.) (2001). *Mathematics and democracy. The case for quantitative literacy.* Washington DC: National Council on Education and the Disciplines (NCED).

SE HACE CAMINO AL ANDAR

Paving the Way

Tomás Ortega
Universidad de Valladolid

RESUMEN

En este capítulo se describe el camino que la Dra. Castro ha abierto para la Didáctica de la Matemática a través de su participación en la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Comenzó a trazar este camino allá por el año 1996 con la creación de esa Sociedad y, desde entonces, ha participado en todos los simposios de la Sociedad de forma destacada. El primero de ellos se celebró en Zamora (Universidad de Salamanca), en el ya lejano 1997, y, pasando por otras 14 universidades, el último se celebró en Baeza (Universidad de Jaén) el pasado año 2012. En este documento se describe su participación en todos los niveles del simposio y sus aportaciones científicas, pero siempre de forma incompleta porque a buen seguro que faltará por registrar su inmensa aportación humana.

Palabras clave: Aportación; Investigación; Didáctica; Matemática; Pensamiento numérico

ABSTRACT

This chapter describes the road Dr. Castro has paved in the Teaching of Mathematics through her participation in the Spanish Society for Research in Mathematics Education (SEIEM). The road was begun in 1996 with the birth of this Society and she has taken an active part in all of the Symposia: the first was held in Zamora, Spain (University of Salamanca) in 1997; fourteen universities later, the latest took place in Baeza, Spain (University of Jaén) in 2012. Her participation at all levels of the symposia as well as her scientific contributions will be dealt with here, but the true scope of her contribution must also take into account the human dimension.

Key Words: *Contribution; Mathematics; Numerical thinking; Research; Teaching.*

ORTEGA, T. (2013). Se hace camino al andar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 23-31). Granada, España: Editorial Comares.

CONSTITUCIÓN

Las inquietudes investigadoras de la Dra. Castro y su preocupación por abrir camino a la investigación en Didáctica de la Matemática (DM), especialmente en la formación de maestros, datan desde muy atrás y, sin duda, una de las primeras aportaciones como servicio a la investigación fue su participación en la fundación de la propia Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Su trabajo e ilusión por crear esta Sociedad, junto con otros compañeros investigadores, estuvo presente en las jornadas de trabajo que transcurrieron en el Centro de Desarrollo Curricular del Ministerio de Educación y Ciencia (Madrid) en marzo de 1996. En estas jornadas se propuso el nombre de la Sociedad, se creó su reglamento, se organizaron sus grupos de investigación y se eligió a la primera Junta Directiva. El 12 de marzo, los 34 investigadores en DM presentes, entre ellos la Dra. Castro, firman el acta de constitución de la SEIEM.

La primera Junta Directiva tuvo que trabajar duro para poner en marcha la Sociedad y, entre otras acciones, destaco la creación de los estatutos y la legalización de la Sociedad, hecho que ocurrió en el 4/10/1996, y en el documento firmado y sellado por el Ministerio del Interior también está registrada la firma de la Dra. Castro. ¿Y ahora qué? La SEIEM ya tiene su Sociedad y se piensa que la mejor forma de potenciar la actividad investigadora en España es hacerla pública. Con esta voluntad de servicio se crean los simposios nacionales como foros de comunicación, intercambio y fomento de la investigación en DM con una periodicidad anual.

El primer simposio (I SEIEM) se celebró en Zamora (Universidad de Salamanca), participaron 60 investigadores de 25 universidades. La Dra. Castro ha asistido a casi todos (16 en total) y su participación y aportaciones han sido destacadas en los tres niveles de participación: comunicaciones en los grupos, comunicaciones generales y ponencias en los seminarios de investigación como invitada por el Comité Científico. Asimismo, ha ejercido responsabilidades de gestión como vocal y secretaria de la Junta Directiva, ha formado parte de los Comités Científicos de tres Simposios, Coordinadora del primer seminario de investigación del VI SEIEM, Directora del Comité local del VII y Editora de las actas de este simposio, Coeditora de las actas del VIII, ha colaborado en la edición de los boletines y también como referee de comunicaciones generales.

COMUNICACIONES EN EL GRUPO DE PNA

En el IX SEIEM (Córdoba, 2005) es coautora de: *El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles una investigación en curso*. Muestran resultados sobre el desarrollo del pensamiento multiplicativo en niños de tercer curso de Educación Infantil (EI) (5 años). Para explorar este tipo de pensamiento crean la situación de una rana que va saltando de una a otra en un camino de 12 piedras. Observan que los alumnos subitizan los saltos de 2 en 2 y de 3 en 3 piedras; si son de 4 en 4 alternan con conteos y si son saltos de 6 en 6 piedras siempre cuentan. En las tareas sobre más saltos de menor longitud, y viceversa, hay gran variedad de respuestas que reflejan diferentes razonamientos relacionales, les cuesta razonar directamente y para ellos son más difíciles que las anteriores. No representan las situaciones planteadas, rehusaron el uso del lápiz y sólo usaron plastilina tras varias indicaciones.

En el XI SEIEM (La Laguna, 2007) es coautora de: *Razonamiento inductivo (RI) en un aula de formación de maestros*. En este documento, describen cómo tratan de obtener información sobre la capacidad que muestran estudiantes para maestros de Educación Primaria (EP) a la hora de resolver tareas para las que precisan utilizar RI. Asimismo, contrastan la mejora formativa que produce en ellos la realización de algunas tareas en las que han tenido que aplicar razonamiento inductivo. Tras aplicar un pre-test y un pos-test y analizar los resultados concluyen que el RI de estos estudiantes es deficiente y que con la instrucción recibida han mejorado poco. Además, han detectado numerosas dificultades en los razonamientos inductivos y sugieren que se hagan traslaciones entre distintos tipos de representación, procurando que se utilice un vocabulario correcto.

En el XII SEIEM (Santander, 2008) es coautora de: *Cuaderno de trabajo sobre razonamiento inductivo para profesores de primaria en formación*. Tratan de describir y caracterizar el RI de 32 profesores de EP en formación. Consideran una metodología de diseño y han elaborado un cuaderno de trabajo para que lo utilicen los alumnos de forma individual. Sólo presentan una primera aproximación de un análisis general, pero han comprobado que el programa NVIVO es una buena herramienta para analizar el contenido de los cuadernos, que están presentes todos los sistemas de representación y que entre los pasos del RI predominan trabajos con casos particulares.

En el XV SEIEM (Ciudad Real, 2011) es coautora de: *Pensamiento multiplicativo en los primeros niveles. Una tesis en marcha*. Tratan de obtener evidencias de pensamiento multiplicativo y relacional en niños de entre 4 y 6 años, en un contexto de resolución de problemas (RP) de división que no puedan ser resueltos mediante un reparto, y el planteamiento de cuestiones sobre proporcionalidad asociadas a dichos problemas. El análisis de los datos aportó información sobre qué hacen los niños, cómo lo hacen (logros alcanzados y estrategias utilizadas) y qué dicen (argumentaciones y verbalizaciones realizadas). También en el XV SEIEM es coautora de: *Errores en la traducción de enunciados algebraicos en la construcción de un dominó algebraico*. Presentan un análisis de los datos aportados por 26 alumnos de 4º de ESO para determinar su capacidad para traducir y relacionar enunciados algebraicos presentados en los sistemas de representación simbólico y verbal. Se diseñó un dominó algebraico específico para esta investigación, y se propuso su posterior uso en un torneo entre los alumnos. Presentan un análisis de los errores cometidos en las traducciones y afirman que la mayoría de ellos son causados al traducir la expresión verbal.

Comunicaciones generales

En el I SEIEM (Zamora, 1997), la Dra. Castro es coautora de: *Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones*. Aquí describen una investigación general sobre problemas aritméticos basada en la tipología numérica, en la estructura, en las etapas y en los procesos, y otra más específica sobre los problemas de estructura aditiva de dos etapas para los que consideran: categorías de estructura semántica de cambio, categorías de comparación y de igualación, categorías de relaciones de aumento/disminución, y categorías de la forma de enlace entre las dos relaciones y la cantidad desconocida.

En el VIII SEIEM (A Coruña, 2004) es coautora de: *RI de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático*. Presentan el análisis del RI de 12 estudiantes de ESO ante un problema de geometría que consiste en determinar cuántas regiones del plano determinan n rectas sin que haya paralelas. Crean un sistema de categorías ad hoc para organizar los datos aportados por los alumnos y para analizar: la comprensión del enunciado, el trabajo de casos particulares, la formulación de conjeturas, su validación, y la justificación. Constatan que para que los alumnos hagan conjeturas, erróneas o no, son necesarias muchas intervenciones del profesor y consideran que es conveniente buscar lo antes posible el patrón implícito.

En el IX SEIEM (Córdoba, 2005) es coautora de: *Trabajo con igualdades numéricas para promover pensamiento relacional*. Con un diseño de investigación dirigido por una conjetura en la que no se fijan hipótesis, la investigación se desarrolla según va evolucionando la conjetura sobre la comprensión del significado del signo igual. Trabajan con 18 alumnos de tercer grado de un colegio público de Sacramento (California), en el que ya habían detectado que estos alumnos tenían una comprensión muy limitada del significado del signo igual. Suponen que, en general, dichas dificultades no son atribuibles a falta de capacidad debida a su edad, y conjeturan que con un trabajo sistemático y ordenado con igualdades numéricas estos escolares lograrían una mejor comprensión del signo igual y desarrollarían el pensamiento relacional como estrategia para resolver igualdades numéricas. Realizan una experimentación durante cinco semanas y tras el análisis de los datos confirman la conjetura relativa a la capacidad y concluyen que el desarrollado de pensamiento relacional permite una mejor comprensión semántica de la aritmética.

En el XI SEIEM (La Laguna, 2007) es coautora de: *Ansiedad matemática de los alumnos que ingresan en la universidad de Granada*. Aquí describen un análisis de los niveles de ansiedad matemática en 856 alumnos que accedieron a la Universidad de Granada al enfrentase a tareas matemáticas. Se ha utilizado la escala de ansiedad matemática de Fennema-Sherman, de manera global y en las agrupaciones de los alumnos por sexo y por las ramas de conocimiento de sus titulaciones (50 pertenecientes a Ciencias de la Salud (CS), 149 a Ciencias Experimentales (CE), 339 a Enseñanzas Técnicas (ET) y 347 a Ciencias Sociales (CSo)). Del análisis de los datos infieren: que los sujetos de la muestra presentan un nivel de ansiedad hacia las matemáticas por debajo del considerado «valor neutro»; que se detectan diferencias significativas entre hombres y mujeres, presentando éstas un mayor nivel de ansiedad; que existen diferencias significativas entre los alumnos de ET y CS, por una parte, y entre ET y CSo, por otra; que los alumnos de ET son los únicos con un nivel de ansiedad por debajo de la media estándar; que entre los hombres no se detectan diferencias significativas pero sí entre las mujeres de los diferentes bloques de titulaciones. También en el XI SEIEM es coautora de: Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3º y 4º de la ESO en el problema de las baldosas. Describen los patrones y la generalización que llevan a cabo 359 estudiantes de 3º y 4º de ESO en la resolución del «problema de las baldosas» (Determinar cuántas baldosas grises son necesarias para rodear con ellas a 1320 baldosas blancas). Prestan especial atención a los tipos de patrones identificados, a la forma en que los estudiantes expresan la generalización y, mediante la descripción de las estrategias inductivas, describen algunas características de generalización referentes a los elementos y a los sistemas de representación utilizados. En la investigación se descubre que, a pesar de que el enunciado se expresa gráficamente, la mayor parte de los alumnos que hacen generalizaciones trabajan previamente en el sistema de representación numérico; que para estos estudiantes es muy relevante la identificación de patrones; que descubren la mayoría de estos patrones. Por otra parte, la gran variedad de patrones identificados a partir de la representación gráfica implica que la visualización es un factor importante en las actividades de ESO.

Figura 1. *Fotografía del simposio de Badajoz*

En el XII SEIEM (Badajoz, 2008) es coautora de: *Descripción de la generalización de estudiantes de 3º y 4º de ESO en la RP que involucran sucesiones lineales y cuadráticas*. Aquí las autoras describen cómo los alumnos de estos niveles educativos realizan conjeturas y presentan generalizaciones en la resolución de sucesiones lineales y cuadráticas. Para ello tratan de descubrir aspectos relativos al RI que están implícitos en las estrategias que utilizan para describir los procesos constructivos de las sucesiones. Analizan los trabajos de 359 alumnos de 3º y 4º de ESO, y este análisis les lleva a formular que son escasos los estudiantes que utilizan la generalización y que éste es el único paso de RI en el que encuentran diferencias, que aplican numerosas estrategias inductivas, que la mayor parte de los escasos alumnos que llegan a la generalización utilizan el sistema numérico de representación y que sólo utilizan representaciones gráficas cuando éstas están implícitas en los enunciados de las actividades.

En el XIII SEIEM (Santander, 2009), es coautora de: *Un estudio de casos sobre el proceso de generalización.* Esta investigación es parte de una más amplia en la que se analizan los procesos de generalización de dos estudiantes para maestros de EP (F y M) cuando trabajan con expresiones aritméticas que requieren ser generalizadas. Propusieron cuatro tareas numéricas para que F y M escribieran enunciados que generalizaran las situaciones descritas en cada tarea. Para su análisis hicieron una adaptación de las taxonomías de Ellis. Observaron que ambos alumnos tuvieron poca dificultad para describir el patrón de forma verbal, pero sí para describirle de forma algebraica. El alumno M construyó más del doble de enunciados que el F, identificó numerosas relaciones diferentes a las consideradas en el diseño de la tarea y creó enunciados en las subcategorías *de similitud de situaciones, objetos o representaciones y también en la de estrategia o procedimiento*. También en este simposio es coautora de: *Actuaciones de maestros en formación en la RP en proporcionalidad directa*. Aquí presentan los resultados sobre la aplicación de razonamiento proporcional por un grupo de 76 alumnos de EP de la Universidad de Granada al tratar resolver problemas de proporcionalidad directa. Para analizar las actuaciones del grupo crearon subgrupos jerarquizados de categorías: para describir el razonamiento proporcional, para la comprensión del concepto de proporcionalidad, para estrategias específicas y tipos de errores, para tratar de identificar los tipos de conocimientos procedimentales aplicados a las actividades propuestas. Descubren el predominio de un razonamiento pre-proporcional (influenciado por procedimientos algorítmicos relacionados con otros objetos ajenos al de razón), observan que hay una separación entre la representación simbólica y el significado de fracción como razón. No reconocen al operador escalar de la proporcionalidad (relación funcional entre cantidades) y prevalecen conocimientos procedimentales sobre el reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción.

En el XIV SEIEM (Lérida, 2010) es coautora de: *Conocimiento aritmético informal puesto de manifiesto por una pareja de alumnos (6-7 años) sobre la invención y RP*. Aquí describen cómo tratan de averiguar el conocimiento informal que tienen dos niños de 6-7 años sobre el planteamiento y RP mediante entrevistas clínicas. Con ellas descubren que este conocimiento informal se manifiesta muy rico y variado. Uno de los niños exige realizar una acción escrita, pero no requiere esta exigencia en su problema inventado. El segundo niño tiene una concepción más amplia de problema, no reducida al campo matemático, y para él el uso de los números facilita la resolución, pero no son imprescindibles. También descubren que ambos niños creen que debe haber una pregunta, pero ni en el enunciado ni en la solución (simple o múltiple) requieren números. Finalmente, explican racionalmente los resultados de los problemas en relación con el contexto.

En el XV SEIEM (Ciudad Real, 2011), es coautora de: *Invención de problemas y tipificación de problema «difícil» por alumnos de EP.* Aquí presentan un estudio realizado con 27 alumnos de todos los cursos de EP. A estos alumnos se los encomendó que inventaran un problema difícil para que lo resolviera un compañero y que explicaran lo que entienden por problema difícil. En todos los cursos, salvo en primero, casi todos los alumnos hacen una propuesta coherente, lo que indica que conocen los elementos de un problema. Los problemas simples y de estructura aditiva de los primeros cursos van dando paso a problemas compuestos de estructura multiplicativa y las formulaciones les permiten conjeturar que la estructura de cambio1 es la más utilizada en las aulas, le sigue la de cambio2 y la de combinación1. Por otra parte, la dificultad del problema depende del concepto matemático asociado. También en este simposio es coautora de: *Avances de un experimento de enseñanza sobre la razón y la proporcionalidad con futuros maestros de primaria*. Aquí, las autoras describen los avances de un experimento de enseñanza sobre el desarrollo del conocimiento del profesor diseñado con doble propósito: analizar las nociones iniciales que manifiestan los futuros maestros de EP sobre algunos componentes de la razón y la proporcionalidad, y estudiar cómo promover la comprensión de los mismos. Con esta experimentación las investigadoras detectan cómo interpretan los alumnos la expresión «3 es a 2», descubren que a partir de los elementos de la razón se infiere el total de elementos comparados y la evolución de los alumnos en la interpretación y manifestaciones. Asimismo, en el XV SEIEM, es coautora de: *Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas*. Aquí analizaron el sentido estructural que manifiestan estudiantes de entre 16 y18 años al trabajar con expresiones algebraicas en el contexto de la simplificación de fracciones algebraicas que involucran las igualdades notables y la propiedad sacar factor común. Los descriptores de Hoch y Dreyfus les permitió: reconocer una estructura familiar en su forma más simple, tratar un término compuesto como una única entidad, reconocer una estructura familiar en una forma más compleja, y elegir manipulaciones apropiadas para mejorar el uso de una estructura. La identificación y clasificación de las estrategias empleadas por los estudiantes les permitió diferenciar los tres modos de actuación que evidencian diferentes niveles de sentido estructural.

Ponente en los seminarios como invitada

En el III SEIEM (Valladolid, 1999) presentó: *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Su intervención se basó en su tesis doctoral (defendida en el curso 1994-95), es una de las primeras tesis que se realizaron íntegramente en DM y, por tanto, fue pionera en España y sirvió de modelo para muchos trabajos que se realizaron en el área después. En la ponencia describió cómo desarrollaban los alumnos exploraciones sobre sucesiones y su capacidad para descubrir su estructura utilizando material estructurado específico. Los alumnos trabajaron con configuraciones puntuales, expresiones numéricas usuales y desarrollos aritméticos. La Dra. Castro utilizó un marco metodológico de integración combinando investigación acción con un análisis estadístico de los datos, y consideró que las representaciones gráficas juegan un papel destacado en la interpretación y descubrimiento de patrones numéricos. Elaboró material curricular extraordinario para trabajar con alumnos de 7º y 8º de Educación General Básica y tres grupos de categorías para analizar la interacción didáctica, el contenido matemático y la comprensión de contenido. Estas categorías han sido utilizadas por varios investigadores, y han inspirado a otros muchos en cómo construir categorías de análisis ad hoc y cómo aplicarlas.

Figura 2. *Fotografía del simposio de Ciudad Real*

En el XV SEIEM (Baeza, 2012) presentó: *Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar.* En esta ponencia considera que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (las intrínsecas al objeto, otras inherentes al propio sujeto y otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza). Desde dicha asunción reflexiona sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra en relación con el objeto y focaliza su interés en dos vías: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje. Expone ejemplos ilustrativos de las investigaciones realizadas y se centra en las diferentes dificultades que muestran los estudiantes en sus aprendizajes algebraicos, achacables a lo peculiar de esta materia. Por otra parte, considera que, a pesar de las innumerables investigaciones, las dificultades siguen persistiendo y, por tanto, hay que seguir investigando para comprender cómo los alumnos construyen conceptos y aprenden procedimientos complejos, para sugerir actividades de docencia que fomenten las conexiones y que lleven a la comprensión de conceptos para impulsar un mayor rendimiento de los estudiantes.

Sinopsis

Un rasgo fundamental de toda la investigación presentada en la SEIEM es que en todas sus experimentaciones utiliza unos contenidos matemáticos muy sencillos, sin grandes alardes, pero muy bien seleccionados, se han usado con precisión y con ellos ha conseguido analizar los objetivos fijados en cada investigación. Una característica de sus trabajos es la construcción de categorías de análisis *ad hoc* o bien la modificación de algún marco para que se pueda aplicar con mayor éxito a la problemática que se investiga en cada caso. También quiero destacar la cantidad de antecedentes que ha tenido en cuenta en todos y cada uno de los trabajos de investigación presentados. En suma, sus investigaciones están bien fundamentadas, y la misma observación es válida para los marcos teóricos y metodológicos considerados. Termino esta exposición destacando su servicio a la investigación con múltiples aportaciones de calidad que han sido generadoras de conocimiento, su apoyo eficaz a jóvenes investigadores, su estupenda labor como docente y también, por qué no, su abnegación como madre de cinco hijos estupendos, ahora, abuela de unos nietos no menos maravillosos y, siempre, poniendo en valor el dicho:

> «*Detrás de un gran hombre siempre hay una gran mujer*».
> «*Caminante, son tus huellas el camino y nada más*».

Se han utilizado las actas de los siguientes SEIEM: Zamora, Valladolid, A Coruña, Córdoba, La Laguna, Badajoz, Santander, Lleida, Ciudad Real, Baeza. http://www.seiem.es/publicaciones/actas.htm

BLOQUE 1

ESTRUCTURAS NUMÉRICAS Y GENERALIZACIÓN

RENDIMIENTO ARITMÉTICO DE LOS ESTUDIANTES DE EDUCACIÓN GENERAL BÁSICA

Arithmetic performance of the Spanish students in 70's compulsory education

Luis Rico y Ángel Díez
Universidad de Granada

Resumen

Los cambios curriculares en el sistema educativo español en las últimas décadas han implicado variaciones en los programas de las matemáticas escolares, con las consiguientes modificaciones en objetivos, contenidos, metodología y criterios de evaluación. Los programas establecidos por las Nuevas Orientaciones, derivadas de la Ley General de Educación (1970), introdujeron el estudio de la teoría de conjuntos y de las estructuras matemáticas, con aparente abandono de la aritmética. A mediados de la década de los 70 pareció necesario evaluar el rendimiento aritmético escolar de los estudiantes que cursaban los nuevos programas, para valorar su eficacia respecto al aprendizaje de la aritmética. Este trabajo describe el estudio que la profesora Encarnación Castro llevó a cabo en el curso 1974-1975, enfocado como una investigación sobre cambio curricular.

Palabras clave: Cambio curricular; Educación obligatoria; Pruebas diagnósticas; Rendimiento aritmético escolar.

Abstract

Curricular changes in the Spanish educational system in the last decades have involved modifications in school mathematics programs, with consequent changes in objectives, content, methodology and evaluation criteria. The programs established by the Nuevas Orientaciones, derived from the Ley General de Educación (1970), initiated the study of set theory and mathematical structures with apparent abandonment of arithmetic. In the mid-70s seemed necessary to evaluate school arithmetic performance of students carrying out the new programs to assess its effectiveness for the learning of arithmetic. This chapter describes the study of Professor Encarnación Castro that she conducted during the academic course 1974-1975, as a research focused on curricular change.

Keywords: *Arithmetic performance; Compulsory education; Curricular change; Tests.*

Rico, L. y Díez, A. (2013). Rendimiento aritmético de los estudiantes de educación general básica. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 35-42). Granada, España: Editorial Comares.

Presentación

La noción de cambio ocupa un lugar importante en el estudio de las reformas educativas. «El estudio del pasado en el presente supone situar interrupciones, discontinuidades y rupturas en la vida institucional» (Popkewitz, 1994, p. 27). El cambio educativo encuentra en las reformas curriculares un cauce epistemológicamente sólido, institucionalmente coherente y estructuralmente organizado. La noción de cambio ha devenido importante en los estudios sobre el currículo de matemáticas.

La conceptualización dinámica del currículo de matemáticas, como estructura sometida a un conjunto de fuerzas que desencadenan procesos de cambio, fue acometida durante la década de 1970. Howson, Keitel y Kilpatrick (1981) mostraron las fuerzas que inciden y las barreras que se oponen al cambio curricular en matemáticas, junto con las estrategias usuales para su gestión. Teorizaron y ubicaron su fundamento en la investigación, describieron su difusión mediante la innovación, presentaron diversos métodos puestos en práctica y los criterios para su evaluación.

La interpretación dinámica del currículo de matemáticas la hemos presentado y ejemplificado en otros trabajos que estudian los cambios curriculares acaecidos en España en el periodo 1945-2010. Manejamos tres niveles distintos de categorías de reflexión curricular: las finalidades educativas establecidas que orientan el cambio; las estructuras legales y normativas que lo regulan; y, las componentes curriculares que lo concretan en relación con el contenido matemático, el trabajo de los alumnos y la actividad de los profesores (Díez, 2011; Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011). El estudio que aquí se presenta muestra la pertinencia que tuvo evaluar el rendimiento aritmético escolar para conocer el alcance de un cambio curricular a mediados de la década de 1970.

Habilidades de cálculo en los Programas Renovados

Las Nuevas Orientaciones para la educación obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 1970), establecieron el marco para la enseñanza de la matemática escolar durante la década de 1970 en España. Este documento caracterizó el cambio educativo que ocurrió en España durante estos años, algunas de cuyas ideas se resumen en la Tabla 1.

Una de las cuestiones debatidas durante la implantación de esta reforma fue la conveniencia de iniciar a los escolares durante la educación obligatoria en los conceptos de la teoría de conjuntos y las estructuras algebraicas. Responsables educativos de los años 70 estuvieron preocupados por la pérdida de habilidades aritméticas en el periodo de educación obligatoria e intentaron contrarrestarla. Un argumento reiteradamente utilizado atribuyó el deterioro no deseado del conocimiento sobre aritmética y habilidades de cálculo de los estudiantes, al tiempo y el trabajo dedicados a estudiar los nuevos contenidos en detrimento de los habituales (Rico, 1979).

Tabla 1. *Descriptores del cambio curricular en matemáticas*

Matemáticas en los Programas Renovados de la Ley General de Educación
Objetivos específicos
Adquirir y lograr las capacidades y desarrollar la intuición espacial; representación gráfica y construcción plástica; adquirir el vocabulario matemático básico; lograr mecanismos de cálculo operatorio; automatizar el razonamiento lógico; desarrollar agilidad de cálculo mental; crear estructuras formales; plantear situaciones problemáticas; interpretar funciones y tablas; leer y expresar datos cuantitativos.
Contenidos
Conjuntos, operaciones y relaciones; Naturales: SDN, operaciones, problemas; Aplicaciones y funciones; Geometría del plano y del espacio; Ángulos, círculos y polígonos; Medidas: longitud y superficie; Divisibilidad; Movimientos en el plano; Igualdad de figuras; Números racionales y decimales, Estructura; Segmentos y ángulos generales; Área de figuras planas, Volumen; Números enteros; Funciones de variable entera, gráficas, ecuaciones; Proporcionalidad de magnitudes; Aritmética comercial; Semejanza; Polinomios; Ecuación de segundo grado; Iniciación a la estadística.

Rendimiento aritmético escolar

Por rendimiento aritmético escolar entendemos el resultado final de la evaluación práctica del conocimiento aritmético alcanzado por grupos de escolares, evaluación llevada a cabo con unos instrumentos que deben responder a los objetivos de aprendizaje propuestos.

> Los estudios sobre rendimiento tienen como finalidad establecer la eficacia de la institución escolar, corregir los defectos detectados en el proceso de enseñanza y aprendizaje; también permitir la comparación entre grupos por su dominio del conocimiento aritmético. Rendimiento aritmético es un valor que expresa la eficacia en el logro de la formación aritmética esperada para los escolares en una institución educativa. La determinación del rendimiento, en términos generales, se hace mediante los valores que grupos de escolares obtienen como resultado de las respuestas que dan a los tests y pruebas estandarizadas. (Díez, 2011, pp. 65-66)

El estudio

El estudio que aquí se presenta es la revisión de una investigación sobre rendimiento aritmético escolar de estudiantes que cursaron los Programas Renovados, establecidos por la Ley General de Educación (LGE) (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 1970). El supuesto de partida consideraba que estos estudiantes habían disminuido sus conocimientos sobre aritmética y, en consecuencia, su rendimiento aritmético escolar.

Contexto del estudio y problema planteado

El estudio de la profesora Castro se realizó en el curso 1974-1975 y se presentó como Tesina de Licenciatura en Matemáticas, en junio de 1975, con el título de *El Cálculo Aritmético en la EGB*. El problema que abordó este estudio trataba de dar respuesta a la siguiente cuestión: «el escolar, hoy día, ¿ha mejorado sus capacidades de cálculo?» (Castro, 1975, pp. 3-4).

Instrumento para recogida de información

Para llevar a cabo la comparación entre el rendimiento aritmético de los escolares que cursaron la educación obligatoria antes de 1970 con un grupo de escolares que la cursaron con posterioridad a esa fecha, se escogió el *Test de habilidad de cálculo aritmético de Ballard*. Se trata de un test psicométrico de base estructurada. Valora la instrucción aritmética y consta de 100 ítems de cálculo aritmético, de respuesta abierta. La adaptación del test de Ballard a las condiciones españolas en la década de 1950 fue efectuada por el profesor García Hoz (1973).

Los expertos reconocen varias ventajas a la hora de seleccionar un test ya publicado para una investigación. Los tests son objetivos; han sido ensayados en pruebas piloto y refinados; están estandarizados para una muestra conocida, que representa una población más amplia; tienen fiabilidad y validez conocidas; suelen ser pruebas paramétricas, que permiten cálculos estadísticos avanzados; se acompañan de instrucciones detalladas para su administración; son directos y rápidos, tanto para su administración como para su corrección (Cohen, Manion y Morrison, 2000, pp. 319-320). La utilidad de elegir este test provino del hecho de contar con aplicaciones del mismo en fechas anteriores a 1970, por lo cual se podían contrastar datos previos de las aplicaciones del test de Ballard con nuevos datos obtenidos en aplicaciones posteriores (Díez, 2001, pp. 16-17).

Dominio que se evalúa

Atendiendo a sus contenidos curriculares, los ítems del test se pueden clasificar en tres bloques temáticos generales, que delimitan el dominio: (a) números naturales: operaciones y relaciones, (b) números racionales y decimales: operaciones y relaciones, y (c) magnitudes: unidades y operaciones.

Objetivos, variables e hipótesis del estudio

Los objetivos propuestos para el estudio fueron:

1º Baremar el test de habilidad de cálculo aritmético de Ballard, adaptándolo a la realidad del currículo de la Educación General Básica.
2º Determinar si se incrementa el número de ítems resueltos en general por la población escolar, o bien existe variabilidad significativa entre centros. Es decir, observar si las habilidades operatorias se incrementan y maduran con cierta regularidad.
3º Estudiar el influjo de la estructura de la población escolar en los resultados.
4º Iniciar a los matemáticos españoles en la investigación educativa, valorando así la investigación en Didáctica de la matemática en España. (Castro, 1975, pp. 18-19)

Las variables independientes que se controlan son: curso, sexo y centro. Entre las hipótesis establecidas, destacan las siguientes:

Dada la diferente estructura del alumnado en el año en que se baremó la prueba, 1950, y el año en que se replica, 1975, cabe esperar:

Al ser la primera etapa de básica similar a los correspondientes antiguos cursos de la enseñanza primaria, los resultados de la actual baremación no se diferenciarán significativamente de los iniciales. La discrepancia no podrá atribuirse al alumnado ni al resto de los factores contemplados, sino a la diferente metodología y contenidos entre ambos currículos.

Al ser los cursos 6º, 7º y 8º de Enseñanza Primaria resultado de una selección negativa de alumnos, su dominio de cálculo debiera ser menor que el de los escolares de los mismos cursos en la EGB, enseñanza única y no segregada.

La hipótesis alternativa de la anterior afirma que la diferencia de resultados tiene que ser debida a la variable independiente contenidos del aprendizaje matemático. (Castro, 1975, pp. 23-24)

Por cada alumno se considera su rendimiento aritmético o porcentaje de ítems resueltos correctos.

Muestra. Implementación de la prueba

La muestra escogida en el curso 1974-1975 constaba de 2067 alumnos, procedentes de diez centros de EGB de Granada y provincia, escogidos por disponibilidad. Se tuvo en cuenta una gama variada que comprendía centros públicos y privados, de poblaciones pequeñas, medianas y grandes, con unidades masculinas y femeninas, de ambiente residencial, popular y rural, con niveles de exigencia altos, medianos y bajos. La Tabla 2 presenta las características de la muestra.

Tabla 2. *Composición de la muestra en la aplicación del curso 1974-1975*

3º curso	4º curso	5º curso	6º curso	7º curso	8º curso
Femenino					
165	171	171	163	143	192
Masculino					
195	177	180	186	170	156

Recogida y organización de datos

La prueba se presentó impresa a doble folio: la primera cara dedicada a la presentación e instrucciones, las otras tres a los ítems (Castro, 1975, pp. 28-29). Para estudiar la homogeneidad entre centros y entre cursos, se calculó la media de respuestas correctas y la desviación típica en cada uno de los grupos. Se obtienen tres datos básicos para cada uno de ellos: N (número de alumnos), X (media del rendimiento en cada grupo) y s (desviación típica), que se reflejan en la Tabla 3.

Tabla 3. *Parámetros normales obtenidos en la aplicación del test Ballard*

Curso	*N*	*Media*	*Desviación*
3º EGB	360	11,05	5,48
4º EGB	348	19,99	9,07
5º EGB	351	23,95	8,97
6º EGB	349	33,26	10,79
7º EGB	313	43.47	12,49
8º EGB	348	57,18	16,59
Total	2069	31,152	18,974

La fiabilidad obtenida en esta aplicación del test de habilidad de cálculo aritmético fue: $\alpha = 0{,}95$.

Homogeneidad de la muestra

Se contrastan dos hipótesis de homogeneidad, una relativa a la homogeneidad de la muestra, cuando se consideran los alumnos agrupados por niveles y, otra, relativa a la homogeneidad de la muestra cuando los alumnos se agrupan por centros. Hechos los correspondientes cálculos para un nivel de confianza del 5%, se obtiene que no hay diferencias entre los centros y sí las hay entre cada dos niveles escolares consecutivos. Los centros se comportan como muestras que provienen de una misma población, mientras que la prueba discrimina por niveles (Castro, 1975, pp. 30-38).

Comparación con los datos obtenidos en 1950

Para verificar la hipótesis enunciada y dar respuesta a la cuestión inicial relativa a la disminución del rendimiento aritmético de los escolares que cursaban la EGB respecto de los estudiantes de 1950, se procede a estudiar la homogeneidad de los nuevos datos con los obtenido por Fernández Huertas (1950), nivel a nivel y globalmente. Las comparaciones muestran que sí hay diferencias significativas entre ambas poblaciones, diferencias que se identifican en los cursos 3º, 4º, 5º y 6º, mientras que no se detectan tales diferencias en los cursos de 7º y 8º (Castro, 1975, pp. 39-40).

Conclusiones

Sobre los objetivos propios del estudio, la profesora Castro presenta las siguientes conclusiones. Con las reservas propias derivadas de la elección de la muestra, la homogeneidad de los 10 centros que participaron en el estudio los resultados muestran que las variables sexo, tipo de centro y nivel sociocultural no tienen influencia estadísticamente medible. Los distintos grupos se pueden considerar, a los efectos de este estudio, como muestras provenientes de una misma población. El test de Ballard-García Hoz es un instrumento de diagnóstico escolar válido, independientemente de las variables mencionadas, que no se evidencian en la prueba en cuanto tal.

Los distintos niveles son significativamente diferentes. Se confirma así una de las conjeturas iniciales «la edad escolar (cronológica) funciona como un factor que da congruencia y continuidad al aprendizaje (…) podemos pues describir conductas por niveles» (Castro, 1975, p. 48).

Las conclusiones comparativas ponen de manifiesto que sí hay diferencias significativas entre las poblaciones de los niveles 3º, 4º, 5º y 6º al comparar los estudiantes de 1950 con los de 1975 a un nivel de confianza del 5%. Como las medias de la población de 1975 son superiores a las de 1950, los autores afirman que los escolares de los niveles 3º a 6º de la EGB han mostrado mayor capacidad para responder a esta prueba que los alumnos que la respondieron hace 25 años.

Sin embargo, comprueba que los escolares de 7º y 8º no obtienen resultados significativamente diferentes de los de 1950. Se puede concluir que no ha habido pérdida en el nivel del rendimiento en cálculo aritmético en la segunda etapa, aún cuando pueden hacerse diferentes matizaciones.

Concluye que «no es en absoluto cierto que hoy día nuestros escolares calculen peor. Otro problema distinto es que hagan más o menos ejercicios, o bien que estos los hagan con mayor o menor rapidez» (Castro, 1975, pp. 50-51).

Independientemente de su valor intrínseco como informe de investigación, el trabajo sobre cálculo aritmético realizado por la profesora Castro para evaluar el rendimiento aritmético escolar de los estudiantes que cursaban la EGB en 1975 y, al mismo tiempo, comparar este rendimiento con el de los escolares de los mismos niveles que cursaban la Educación Obligatoria en 1950, tiene otra significación como trabajo pionero de investigación en Didáctica de la matemática en España, que se expresa en el 4º objetivo del estudio.

Esta investigación es la primera que se presenta en la Universidad de Granada, como trabajo final para obtener el título de Licenciado en Matemáticas dentro del campo de estudio Didáctica de la matemática que, en ese momento, no tiene reconocimiento formal en la universidad española. Tiene, por tanto, un carácter pionero: es la primera investigación en esta área con aval académico, presentada y refrendada ante un tribunal en la Universidad de Granada. Con las restricciones de la época y el grado de desarrollo de la educación matemática, que comienza su despegue en esos años, este trabajo inicia en la Universidad de Granada la línea de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico.*

También contribuye a los estudios curriculares y de evaluación de programas en educación matemática que se desarrollarían posteriormente. Los trabajos del Dr. Díez Lozano han dado continuidad al trabajo de la Dra. Castro y han mostrado lo acertado de sus propuestas, el interés de sus conclusiones y la potencialidad de su orientación, que confiamos se mantenga en el futuro.

REFERENCIAS

CASTRO, E. (1975). *El cálculo aritmético en la EGB*. Granada, España: Universidad de Granada.

COHEN, L., MANION, L. y MORRISON, K. (2000). *Research methods in education*. Londres, Reino Unido: Routledge-Falmer.

DÍEZ, A. (2001). *Evaluación del rendimiento aritmético. Estudio y actualización de un instrumento*. Granada, España: Universidad de Granada.

DÍEZ, A. (2011). *Evaluación del rendimiento aritmético. Un estudio comparativo*. Granada, España: Universidad de Granada.

FERNÁNDEZ HUERTAS, J. (1950). Influjo del tiempo de examen en las pruebas de instrucción aritmética. *Bordón. Revista de la Sociedad Española de Pedagogía. Tomo II, 13,* 5-15.

GARCÍA HOZ, V. (1973). *Manual de tests para la escuela.* Madrid, España: Escuela Española.

HOWSON, G., KEITEL, K. y KILPATRICK, J. (1981). *Curriculum development in mathematics*. Cambridge, Reino Unido: Cambridge University Press.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1970). *Educación General Básica. Nuevas Orientaciones*. Madrid, España: Magisterio Español.

POPKEWITZ, TH. S. (1994). *Sociología política de las reformas educativas.* Madrid, España: Morata.

RICO, L. (1979). Didáctica de la matemática en el primer nivel de Educación General Básica. En M. Delgado, R. Gutiérrez y E. Moreno (Eds.), *Contribuciones en Probabilidad y Estadística Matemática, Enseñanza de la Matemática y Análisis, ofrecidas al Prof. Guiraún Martín* (pp. 248-273). Granada, España: Universidad de Granada.

RICO, L., DÍEZ, A., CASTRO, E. y LUPIÁÑEZ, J. L. (2011). Currículo de matemáticas para la educación obligatoria en España en el periodo 1945-2010. *Educatio Siglo XXI, 29*(2), 139-172.

LA ESTIMACIÓN Y EL SENTIDO DE LA MEDIDA
Estimation and measurement sense

Isidoro Segovia[a] *y Carlos de Castro*[b]
[a]Universidad de Granada, [b]Universidad Complutense de Madrid

Resumen

La estimación es una competencia matemática que implica el dominio de una gran red de conceptos y destrezas. Estas van desde el conocimiento de los campos numéricos y los correspondientes algoritmos de cálculo escrito y mental, hasta la percepción de las diferentes magnitudes, su medida, la interiorización de unidades de medida y referentes y las estrategias de comparación. En el caso de la estimación en medida, subsume las destrezas de estimación asociadas al cálculo numérico y constituye, por tanto, un campo rico de trabajo para el aprendizaje de todos los conceptos y destrezas relacionados. En este trabajo se presenta una revisión teórica y de investigación de la estimación en medida de magnitudes continuas, enfatizando el papel que tiene en relación al sentido de la medida.

Palabras clave: Estimación; Estimación en medida; Medida; Sentido de la medida.

Abstract

The estimation is a math competence that involves the mastery of a vast network of concepts and skills. It ranges from the knowledge of numerical fields and the corresponding written and mental calculation algorithms, to the perception of different magnitudes, their measurement, the internalization of measurement units and comparison strategies. In particular, the measurement estimation comprises the skills associated with numerical calculation. Therefore it constitutes a rich field of work for the learning of all the concepts and skills related. This paper presents a theoretical and research review of measurement estimation of continuous quantities, emphasizing its role in relation to the measurement sense.

Keywords: *Estimation; Measurement; Measurement estimation; Measurement sense.*

Segovia, I. y De Castro, C. (2013). La estimación y el sentido de la medida. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 43-49). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

La capacidad de estimar, tomada como la valoración del resultado de una operación aritmética o la medida de una cantidad (Segovia, Castro, Rico y Castro, 1989), es más que una destreza que deben adquirir los alumnos en las etapas de educación primaria y secundaria; implica el dominio de conceptos y destrezas numéricas y de medida, que deben ser puestos en juego en un momento determinado en situaciones de la vida diaria. Por ejemplo, cuando nos dan la cuenta de una serie de productos que hemos adquirido y queremos controlar que el resultado es correcto o queremos determinar, de manera aproximada, cuántos metros de cable necesitamos para cercar un terreno. La estimación tiene, por tanto, un papel relevante en los actuales currículos de la enseñanza obligatoria por las características funcionales de los mismos, especialmente en el caso de educación primaria y en los primeros niveles de secundaria. En el caso de la estimación en medida a que se refiere este trabajo, se presenta una revisión teórica y de investigación que se concreta en el papel fundamental que tiene en la adquisición del sentido de la medida.

El sentido de la medida

El término «sentido» ha sido incorporado al lenguaje de la Didáctica de la Matemática, comenzando por el caso del sentido numérico, para describir la capacidad que permite a las personas relacionarse con los números de manera desenvuelta y flexible en diferentes situaciones y contextos.

¿Cuál es la capacidad que permite relacionarse con las medidas de manera desenvuelta y flexible en diferentes situaciones y contextos? Comenzaremos por poner de manifiesto algunas situaciones extremas que denotan falta de sentido de la medida: sopesar una silla de 7 kilogramos e indicar que su peso son 2 kilogramos; indicar que la superficie de una pizarra es de 4 metros; indicar que la capacidad de un cono de 10 centímetros de diámetro de la base y 10 centímetros de altura es de 104 litros como resultado de aplicar una fórmula, o que un folio tiene un milímetro de grosor. Estos ejemplos, tomados de situaciones reales de actividades prácticas de una clase de estudiantes universitarios para maestro (Castillo, 2006), inciden en la falta de dominio de determinadas componentes que caracterizan el sentido de la medida y que son los siguientes.

- Reconocer los distintos atributos medibles de los objetos.
- Manejar la terminología propia de cada magnitud.
- Comparar cantidades dependiendo de la magnitud.
- Conocer y usar las unidades de medida propias de cada magnitud.
- Cambiar de unidad de medida dentro de la misma magnitud.
- Establecer de manera adecuada la unidad de medida según el contexto.
- Manejar de manera adecuadas los diferentes instrumentos de medida.
- Conocer las formas de medida indirecta de las cantidades.
- Reconocer el carácter aproximado de la medida.

- Realizar aproximaciones adecuadas de las medidas.
- Estimar la medida de las cantidades.

La componente de estimación implica un dominio de las anteriores componentes; podría decirse por tanto que tener la capacidad de realizar buenas estimaciones de medidas es tener sentido de la medida. Castillo (2012) presenta un listado de componentes asociadas a la estimación en medida, entre las que se encuentran las que hemos referido para el sentido de la medida. Ocurre lo mismo con el sentido numérico y la estimación numérica. Y dado que para la estimación en medida es necesaria la estimación en el cálculo, podemos considerar que la estimación en medida es una destreza potentísima que acoge una parte relevante de los conceptos y procedimientos matemáticos, al menos de los niveles de enseñanza obligatoria. Hope (1989) señala que el «conocimiento de una amplia variedad de referentes cotidianos de medida, como que las puertas miden aproximadamente dos metros de altura» (p. 15), es el fundamento del sentido de la medida y del sentido numérico. Estas equivalencias entre objetos cotidianos, tomados como puntos de referencia, y las unidades de medida son también consideradas instrumentos para el desarrollo del sentido de la medida (Joram, 2003).

Dentro del actual currículo de educación primaria, en el bloque de medida, estimación y cálculo de magnitudes, se propone poner un énfasis especial en el desarrollo del sentido de la medida, que implica el conocimiento de las unidades, del proceso de medir, de la expresión de los resultados de mediciones, y del conocimiento y uso de instrumentos de medida, así como las capacidades de usar estrategias de estimación de medidas, de decidir sobre la coherencia del resultado de una medición, o de obtener aproximaciones, cuando no son posibles resultados exactos (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007, p. 31565).

Reforzaremos más este vínculo entre estimación y sentido de la medida mediante una conceptualización de la estimación en medida.

Estimación en medida

Bright (1976) define la estimación en medida como el «proceso de obtener una medida sin la ayuda de herramientas de medición. Se trata de un proceso mental que tiene aspectos visuales o manipulativos» (p. 89), es decir, basado únicamente en los conocimientos y experiencias que podemos disponer. Hay que distinguir si las cantidades están referidas a magnitudes discretas o continuas ya que son distintas las componentes implicadas. No es lo mismo, por ejemplo, estimar el número de personas que han ido a un concierto (discreta) que la estimación de la altura que tiene un edificio (continua). También, dentro de las magnitudes continuas, hay que distinguir aquellas cuyas cantidades admiten una organización espacial gráfica o manipulativa de las unidades, como la longitud o la superficie, que pueden reconstruirse con unidades, de aquellas cuya medida no la admite, como la masa o el tiempo.

Con la consideración de que para estimar la medida de una cantidad hay que saber medirla, son obvias las necesidades conceptuales y procedimentales que permiten hacer estimaciones razonables de medida y que pueden estructurarse en categorías. La primera está referida a los conceptos y procedimientos relacionados con la medida de las magnitudes la mayor parte de los cuales los hemos referido al hablar del sentido de la medida. La segunda está referida a los conceptos y procedimientos propios de la estimación que son los siguientes.

- Interiorización del tamaño de las unidades de medida.
- Establecimiento e interiorización de referentes (cantidades familiares cuya medida es conocida).
- Dominio de estrategias de comparación.
- Dominio de estrategias de descomposición/recomposición de cantidades.

Una tercera categoría de destrezas está relacionada con la estimación en cálculo dado que en muchas ocasiones son necesarias estrategias de estimación basadas en el empleo de técnicas indirectas de medida como por ejemplo, el área de un rectángulo o el volumen de un cilindro a través de operaciones con longitudes de sus dimensiones.

Bright (1976), Castillo (2012), Pareja (2001) y Segovia, Castro, Rico y Castro (1989) elaboran un organigrama que articula todas estas componentes que permiten diferenciar diferentes estrategias de estimación.

En definitiva, la estimación en medida es una actividad que pone en juego conceptos y procedimientos relativos a la medida y al cálculo constituyendo por tanto un campo para el desarrollo del sentido de la medida. Desarrollamos a continuación este potencial de la estimación en medida de magnitudes continuas que aporta la investigación.

Estimación de magnitudes continuas

La longitud, la superficie, el volumen, la amplitud, la masa, la capacidad y el tiempo son magnitudes continuas que se trabajan en el ámbito de la matemática en los niveles obligatorios de enseñanza. La investigación se ha ocupado de indagar en las diferentes magnitudes aportando información para la enseñanza. No obstante el corpus de investigación no es muy abundante (Castillo, 2012; Sowder, 1992). Castillo (2012) presenta una revisión de investigaciones que clasifica en las cuatro categorías que presentamos en los siguientes apartados.

Precisión de las estimaciones

Se muestra que el grado de precisión depende de la magnitud a estimar, de la forma y la posición espacial en que se presenta la cantidad, la precisión mejora con la edad y con la práctica y el dominio de diversas estrategias también contribuye a la mejora de la precisión.

Estrategias de estimación

Se presentan en tres categorías: de medición mental (aplicar un instrumento o iterar la unidad de medida de forma mental), de empleo de referentes y de transformación del objeto (descomponiéndolo en partes). Castillo (2012) presenta, de una manera pormenorizada, las diferentes estrategias que emplean los alumnos de secundaria cuando realizan estimaciones de longitud y área, clasificándolas en tres bloques: (a) de comparación con unidad estándar o con referentes, (b) de descomposición/recomposición de la cantidad en partes iguales o diferentes, (c) empleando fórmulas dependiendo de la figura y acotando la cantidad entre dos valores.

Enseñanza y aprendizaje de la estimación

Bright (1976) considera que

> El objetivo principal de la estimación en el currículo de matemáticas es, en primer lugar, ayudar a los estudiantes a desarrollar un marco mental de referencia para los tamaños de las unidades de medida en relación entre sí y con los objetos reales, y, en segundo lugar, proporcionar a los estudiantes con actividades que ilustran las propiedades básicas de la medición. (p. 93)

Hildreth (1983), que se centra en el trabajo con las magnitudes longitud y superficie, expone las habilidades necesarias para su estimación entre las que se encuentran, una comprensión de los atributos (longitud o área) que se medirá, la comprensión del concepto de unidad, una imagen mental de la unidad que se está utilizando en la tarea de estimación, la capacidad de comparar los objetos en el atributo a medir, la capacidad de realizar la iteración de la unidad, la capacidad de seleccionar y utilizar las estrategias adecuadas para hacer estimaciones y la capacidad de comprobar la idoneidad de la estimación. También sobre estas magnitudes, Castillo (2012) identifica diez errores en la estimación de cantidades de los cuales siete son extrínsecos al proceso de estimación como, percepción errónea de la m2agnitud, empleo de unidades no adecuadas, error en la conversión de unidades de medida y ausencia de unidades de medida para expresar los resultados. La mayor parte de estos errores estaban asociados a las tareas de estimación de cantidades de superficie mientras que en el caso de la longitud los errores más frecuentes tenían un carácter intrínseco a los procesos de estimación.

La investigación también sugiere modelos de enseñanza de la estimación que pueden clasificarse en dos categorías: conjeturar y comprobar, es decir realizar la estimación y luego comprobar mediante la medida, y entrenamiento en estrategias. En este sentido, Hodgson, Simonsen, Luebeck y Andersen (2003) consideran que la enseñanza de la estimación puede promover una comprensión de las matemáticas, ayuda a revelar el pensamiento del estudiante y puede servir como enlace entre el mundo real y el matemático.

Estimación en la recta numérica

Dentro de la estimación, definida por Siegler y Booth (2005) como «proceso de traducción entre representaciones cuantitativas alternativas, al menos una de las cuales es inexacta» (p. 198), la estimación en la recta numérica es una variedad en que la traducción se realiza entre una posición espacial de la recta numérica y un número. La recta numérica se presenta vacía, con los extremos marcados con numerales que sirven de referencia para ubicar las estimaciones.

Siegler y Booth (2005) realizan una revisión de estudios sobre estimación en la recta numérica. Un resultado importante de estos trabajos es que los niños, durante la educación infantil y el primer ciclo de educación primaria, tienen una representación mental de los números que se ajusta más a un modelo logarítmico que a uno lineal. Es decir, en distintos tipos de rectas numéricas representan los «números pequeños más separados que los mayores» (Clements y Sarama, 2009, p. 46). Por ejemplo, el 5 y el 10 más separados que el 85 y el 90. Siegler y Booth (2005) consideran este tipo de representación logarítmica como una de las causas de la lentitud observada en el desarrollo de las destrezas de estimación. A partir de tercer curso de primaria, los niños van evolucionando del modelo logarítmico al lineal, cambio favorecido con la práctica de la estimación.

En los últimos años, se han llevado a cabo una serie de estudios sobre los beneficios del uso de juegos de mesa con dados y bandas numéricas (Opfer y Siegler, 2012). En estos trabajos, los niños de educación infantil mejoran en la precisión de sus estimaciones en la recta numérica, gracias a estos juegos. Esta mejora se produce al emplear bandas numéricas rectilíneas y numeradas, pero no con bandas circulares, ni con los numerales sustituidos por colores en bandas y dados.

Con base en los trabajos descritos sobre estimación en la recta numérica en la revisión de Siegler y Booth (2005) y los de juegos de tablero (Opfer y Siegler, 2012), la investigación sobre estimación en la recta numérica ha comenzado a producir resultados en Educación Matemática, en estudios orientados al desarrollo del currículo. Clements y Sarama (2009) han elaborado una trayectoria de aprendizaje con el uso de tecnología para la comparación, el orden y la estimación, para niños de hasta 8 años. En ella incluyen el uso de juegos de mesa, comenzando a los 4 años, con recorridos sobre una banda numérica numerada del 0 al 5; continúan con situaciones de estimación en rectas numéricas del 0 a 10, para 6 años; y finalizan proponiendo actividades de estimación en rectas numéricas del 0 al 100 y de 0 a 1000, para alumnos de 7 y 8 años, respectivamente.

Conclusiones

El desarrollo del sentido de la medida puede conceptualizarse como «el aprendizaje del lenguaje de la medición» (Joram, 2003, p. 65). En esta metáfora, la semántica de la medición corresponde a la comprensión del significado de las unidades de medida, a través de su asociación con objetos cotidianos, que se convierten en referentes para la estimación de medidas. El aspecto sintáctico de la medición supone el reconocimiento de las relaciones entre las diferentes unidades y entre sus referentes, dentro del sistema de medidas. La gramática de la medición implica principios y reglas, como las que determinan cómo se aplican las unidades en el proceso de medición. Finalmente, la pragmática de la medición supone comprender las restricciones que impone el contexto a la práctica de la medición, por ejemplo, al valorar la diferencia entre la actividad de medición del cocinero que utiliza una receta y la del farmacéutico que prepara un medicamento (Joram, 2003).

La revisión de investigaciones sobre estimación en medida de este trabajo muestra que, al igual que la estimación y el sentido numérico están íntimamente relacionados (Sowder, 1992), entre la estimación en medida y el sentido de la medida se da un vínculo análogo.

Referencias

Bright, G. W. (1976). Estimation as part of learning to measure. En D. Nelson y R. Reys (Eds.), *Measurement in School Mathematics: 1976 Yearbook* (pp. 87-104). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Castillo, J. J. (2006). *Estimación de cantidades continuas: longitud, superficie, capacidad y masa*. Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.

Castillo, J. J. (2012). *Estimación de magnitudes continuas: longitud y superficie*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Clements, D. H. y Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: The learning trajectories approach*. New York, NJ: Routledge.

Hildreth, D. J. (1983). The use of strategies in estimating measurements. *Arithmetic Teacher, 30*(5), 50-54.

Hodgson, T., Simonsen, L., Luebeck, J. y Andersen, L. (2003). Measuring Montana: an episode in estimation. En D. H. Clements y G. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 220-228). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Hope, J. (1989). Promoting number sense in school. *Arithmetic Teacher, 36*(6), 12-16.

Joram, E. (2003). Benchmarks as tools for developing measurement sense. En D. H. Clements y G. W. Bright (Eds.), *Learning and teaching measurement: 2003 Yearbook* (pp. 57-67). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). ORDEN ECI/2211/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación primaria. *Boletín Oficial del Estado, 173*, de viernes 20 julio, 31487-31566.

Opfer, J. E. y Siegler, R. S. (2012). Development of quantitative thinking. En K. Holyoak y R. Morrison (Eds.), *Oxford handbook of thinking and reasoning* (pp. 585-605). Cambridge, Reino Unido: Oxford University Press.

Pareja, J. L. (2001). *Estimación de cantidades discretas por alumnos de magisterio.* Memoria de Tercer Ciclo. Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Segovia, I., Castro, E., Castro, E. y Rico, L. (1989). *Estimación en cálculo y medida*. Madrid, España: Síntesis.

Siegler, R. S. y Booth, J. L. (2005). Development of numerical estimation: A review. En J. I. D. Campbell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 197-212). New York, NJ: Psychology Press.

Sowder, J. T. (1992). Estimation and number sense. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research in mathematics teaching and learning* (pp. 371-389). New York, NJ: Macmillan Publishing Company.

FORMAS TEXTUALES EN LA DIVISIÓN
Textual forms in division

Bernardo Gómez
Universidad de Valencia

RESUMEN

La falta de competencia de los estudiantes en la resolución de los problemas multiplicativos con números racionales depende de varios factores. Uno de ellos es el fenómeno de la discontinuidad de los modelos semánticos al pasar de los naturales a los racionales. En este capítulo se da cuenta de las limitaciones de estos modelos en el caso de la división y de las formas textuales asociadas a esos modelos que están presentes en la tradición de enseñanza reflejada en los libros de texto.

Palabras clave: Aritmética; Didáctica de la Matemática; Discontinuidades; Formas textuales; Problemas de división.

ABSTRACT

The lack of competence of the students in the multiplicative problem solving with rational numbers depends on several factors. One of them is the phenomenon of the discontinuity of the semantic models when passing of the whole to rational numbers. We give account in this chapter of the limitations of those models in the case of division and the textual forms associated to them, which are present at the tradition of teaching reflected in the textbooks.

Keywords: *Arithmetic; Didactic of mathematics; Discontinuities; Division problems; Textual forms.*

GÓMEZ, B. (2013). Formas textuales en la división. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 51-58). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

Los curricula actuales dotan de una perspectiva limitada a la enseñanza de los problemas multiplicativos, una de cuyas consecuencias es que los estudiantes son incapaces de reconocer y resolver una gran variedad de problemas de multiplicación y división con fracciones. Es como si los conceptos de fracción y multiplicación se mezclaran en los problemas verbales como el aceite y el vinagre. Si hay una fracción involucrada, la multiplicación no puede estar involucrada (Thibodeau y Mestre, 1989, p. 547). De hecho, los estudiantes evitan multiplicar directamente fracciones para resolver un problema incluso cuando es la forma más simple de obtener el resultado (Hart, 1981), incluso cambian su elección de la operación cuando se les presentan sucesivamente problemas que solo difieren en términos numéricos sin que esto les parezca incongruente porque les parecen problemas diferentes (Bell, Swan y Taylor, 1981).

Estos resultados han desplazado el punto de mira de la investigación desde la habilidad algorítmica a los distintos factores que interactúan de forma múltiple y compleja en la resolución de los problemas. Numerosos estudios han señalado que la selección de la operación para resolver los problemas multiplicativos está influenciada por una gran variedad de factores: malentendidos debidos a una sobre generalización de reglas que son válidas en el dominio de los naturales, aspectos lingüísticos que refuerzan conceptualizaciones intuitivas, deficiencias para disociar el concepto del algoritmo, la estructura textual en la interpretación del problema, los modelos de situación utilizados por los profesores para resolver los problemas, y el tipo y naturaleza de los números involucrados en el problema.

Entre las explicaciones más sugerentes destaca la de Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985), en su influyente teoría de los modelos intuitivos primitivos, quienes han señalado que la identificación de la operación que se necesita para resolver un problema con dos ítems de datos numéricos no ocurre directamente sino que está mediatizada por el modelo mental del estudiante.

Modelos de las operaciones aritméticas elementales

La palabra modelo se usa en matemáticas para referirse a objetos matemáticos que reproducen, en forma simbólica, características esenciales de un fenómeno o situación del mundo real, que se pretende estudiar. La finalidad del modelo matemático es hacer una réplica de la realidad y su función es la de simular acciones para analizar, deducir o predecir resultados. Esto es lo que ocurre, por ejemplo, con la derivada, que es un modelo matemático de la velocidad instantánea.

En la enseñanza de las operaciones matemáticas elementales la relación entre los fenómenos o situaciones y sus modelos es a la recíproca. En vez de usar el modelo matemático para explicar un determinado fenómeno o situación, se usa un fenómeno o situación para explicar el modelo matemático. Es lo que ocurre, por ejemplo, con la unión o reiteración de conjuntos de objetos (e.g., canicas) que se usan para modelar las operaciones de sumar o multiplicar respectivamente.

Como la finalidad del fenómeno o situación es crear condiciones para que de su observación y manipulación surja el conocimiento matemático que se persigue, es por su intencionalidad de enseñanza-aprendizaje un modelo didáctico. De esta manera las operaciones matemáticas elementales usan modelos matemáticos, que representan las operaciones en abstracto, por medio de letras numerales y signos: $a + b = c; axb = c$; y usan modelos didácticos que las representan en lo concreto, por medio de situaciones contextualizadas.

En el caso de las operaciones aritméticas elementales las situaciones que representan los modelos didácticos suelen ser problemas verbales. Estos problemas, junto con las interpretaciones de las operaciones que se derivan del análisis semántico de sus enunciados, dan lugar al concepto de modelo semántico de la operación. Las limitaciones de la enseñanza hacen que para cada operación se elijan uno o varios modelos semánticos, pero no todos. Esto supone una restricción del campo semántico, ya que favorece unas interpretaciones de la operación pero deja a otras en segundo plano o se ignoran.

Al pasar de trabajar con números naturales a números racionales la enseñanza de las operaciones se suele orientar a la práctica de los algoritmos: el producto cruzado o invertir y multiplicar, con ejemplos numéricos descontextualizados. Los modelos semánticos de las operaciones ya no son un objetivo de enseñanza y se dan por aprendidos, con lo cual los problemas se ponen, más o menos arbitrariamente, con el fin de mostrar que los algoritmos enseñados tienen aplicaciones, pero sin una base sólida que permita comprender cómo se selecciona la operación que los resuelve cuando hay involucrados números racionales. Esto es desafortunado, ya que tiene consecuencias en la competencia de los estudiantes que evitan la operación directa para resolver el problema y optan por estrategias más complicadas, a menudo confiando excesivamente en la linealidad (e.g., reglas de tres y ecuaciones lineales o de primer grado).

Bien entendido que cuando hay números racionales la dificultad de los problemas multiplicativos no es simplemente debida a la introducción de números más «duros» (fracciones o decimales), no es su mera presencia lo que influye en la dificultad, sino el papel que juegan en el problema, o cómo son interpretados en relación con los términos que dotan de significado a las operaciones multiplicativas: dividendo, divisor y cociente.

Dividendo, divisor y cociente

En la enseñanza tradicional de la división está involucrada la acción de partir. El papel del dividendo es claro: es la cantidad a partir en partes iguales, normalmente un número natural denominado o concreto (e.g., 12 caramelos). El papel del divisor es más ambiguo, porque tiene una naturaleza dual: indica un proceso y un producto. Esta dualidad se puede ver, por ejemplo, considerando el problema de repartir 12 caramelos entre 3 niños. Se empieza repartiendo un caramelo a cada uno. Se sigue repartiendo otro caramelo a cada uno, y así hasta que se acaben los caramelos. Cada vez se han repartido 3 caramelos y se ha repetido el proceso de reparto 4 veces. El total de caramelos se ha ido partiendo en 4 partes de 3 caramelos cada una. Al final cada niño recibió 4 caramelos y el total de los caramelos ha quedado partido en tres partes, que son tercios del total de 12, de 4 caramelos cada tercio.

El número de pasos en el proceso de reparto (4) coincide con el número de caramelos que reciben los niños al final (4), y este es el número que se busca o cociente; mientras que el número de caramelos que se reparte en cada paso del proceso de reparto (3) coincide con el número de partes en que ha quedado partido el total de caramelos (3), y éste es el número que se da como divisor.

Las dos interpretaciones del divisor: como el número de ítems que se reparte en cada paso del proceso y como el número de partes que al final ha producido ese proceso, se asocian a dos modelos semánticos diferentes que se conocen como división «cuotición» y división «partitiva» respectivamente.

Discontinuidad semántica en la división de fracciones

La naturaleza dual del divisor está ligada a la asimetría y roles del multiplicando y del multiplicador. Mientras que en la división, el producto de la multiplicación pasa a ser claramente el dividendo, el cociente y el divisor cumplen las funciones del multiplicando y del multiplicador.

En la división partitiva, el divisor cumple las funciones del multiplicador, es un escalar que indica el número de partes en que queda partida la cantidad total, mientras que el cociente es un número concreto, del mismo espacio de medida que el dividendo, que indica el número de ítems que tiene cada parte. Esta interpretación no tiene sentido cuando el divisor es una fracción. Partir, por ejemplo, $\frac{3}{4}$ en $\frac{5}{12}$ partes no tiene sentido, por lo que se puede decir que en la división partitiva no hay continuidad semántica cuando el divisor es una fracción.

En la división cuotitiva, el divisor cumple las funciones del multiplicando, es un número concreto, del mismo espacio de medida que el dividendo, que indica la cantidad de ítems que se reparte en cada uno de los pasos del proceso, lo que no tiene sentido cuando el divisor es mayor que el dividendo. En este caso el cociente cumple las funciones del multiplicador, es un escalar o número abstracto.

Sin embargo, a diferencia de los que ocurre con la división partitiva, la discontinuidad semántica de la división cuotitiva se puede sortear. Esto es lo que se hace cuando se pretende medir una longitud con una unidad mayor: se parte la unidad mayor en subunidades para dar el resultado de la medida mediante esas subunidades, que son partes de esa unidad; es decir fracciones.

En cualquier caso, la discontinuidad semántica de la división de fracciones, afecta al reconocimiento de la operación que resuelve el problema porque a menudo los estudiantes no encuentran nada en el enunciado del problema que les diga si es de multiplicar o dividir y, en su caso, cuál es el multiplicando y el multiplicador, o el dividendo y el divisor.

Esto es lo que ocurre, por ejemplo, en los problemas de la torta utilizados por Rey Pastor y Puig Adam (1932, p. 211): «$\frac{3}{7}$ de torta pesan $\frac{2}{9}$ de kg. ¿Cuánto pesa la torta? Si cada torta pesa $\frac{3}{7}$ de kg, ¿qué porción de torta tendré con $\frac{2}{9}$ de kg?»

Para abordar estos problemas hay varias estrategias, una de ellas es la analogía. Esta consiste en comparar el problema con otro del mismo enunciado en el que se han cambiado las fracciones por números naturales. El nuevo enunciado del primer ejemplo: «3 tortas pesan 2 kg. ¿Cuánto pesa una torta?», hace visible una división partitiva, ya que tiene la misma forma que los problemas de «repartir 2 entre 3», lo cual no tiene sentido en N. Igualmente, el nuevo enunciado del segundo ejemplo: «si cada torta pesa 3 kg, ¿qué porción tendré con 2 kg?», hace visible una división cuotitiva, ya que tiene la misma forma que los problemas de «cuántas veces cabe o está 2 en 3», lo cual tampoco tiene sentido en N.

Otras estrategias, presentes en la tradición escolar, evitan plantear la división directa de fracciones, ya sea deshaciendo una fracción (a) o reduciendo las dos fracciones a igual denominador (b):

a) Deshacer la fracción: $\frac{3}{7}$ *de torta pesan* $\frac{2}{9}$ *de kg. ¿Cuánto pesa la torta? Y diremos: si 3 séptimos de torta pesan* $\frac{2}{9}$ *de kg, 1 séptimo de torta pesará* $\frac{2}{9} : 3 = \frac{2}{9 \cdot 3}$ *Y la torta entera = 7 séptimos de torta, pesará* $\frac{2}{9 \cdot 3} \cdot 7 = \frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 3}$ (p. 211).

b) Reducir las fracciones a igual denominador: *Si cada torta pesa* $\frac{3}{7}$ *de kg., ¿qué porción de torta tendré con* $\frac{2}{9}$ *de kg.? Reduciendo los pesos a la misma parte alícuota de kg. plantearemos la pregunta de este otro modo: Si cada torta pesa* $\frac{3 \cdot 9}{7 \cdot 9}$ *kilogramos, ¿cuánto tendré por* $\frac{2 \cdot 7}{9 \cdot 7}$*? De modo que, tomando por nueva unidad* $\frac{1}{7 \cdot 9}$ *kg., la torta pesa 3 · 9 unidades, luego con 2 · 7 unidades tendré una porción de torta igual a:* $\frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 9}$. (p. 211)

Lo que parece evidente es que al intentar resolver estos problemas los estudiantes hacen una lectura del enunciado tratando de buscar referentes que les permita asociarlos a sus modelos semánticos de multiplicar o dividir, y así identificar los términos clave de esas operaciones. Como se ha dicho antes, los modelos semánticos de la división de enteros: partición y cuotición, no son suficientes para ello, se necesitan otras interpretaciones, algunas de las cuales han sido recogidas en las formas textuales con que se define, se explica y se justifica el uso de la división presentes en la tradición de enseñanza recogida en los libros de texto.

En la Tabla 1, se recogen las principales formas textuales encontradas en una revisión de libros de texto influyentes en la tradición de enseñanza española. Estas formas textuales se han agrupado en correspondencia con un modelo semántico, lo que permite observar que hacen escasa mención a la casuística específica de la división con fracciones (tampoco a la división con números decimales).

En conclusión, se puede decir que en la tradición de enseñanza reflejada en los libros de texto, el problema de la discontinuidad de los modelos semánticos pasa casi desapercibida, cuando no es ignorada. Esto tiene consecuencias en el aprendizaje de los estudiantes ya que, como se ha podido comprobar en un reciente trabajo de Contreras (2013), ellos creen que las formas textuales de la división de naturales se corresponden con las formas textuales de la división de fracciones. Al parecer, los estudiantes ignoran que al cambiar de campo numérico la operación ya no es la misma, aunque se llame igual, hasta el punto que cambia su definición, la regla o algoritmo y su interpretación.

Implicaciones para la enseñanza

La manera usual de presentar la multiplicación y división a los estudiantes tiene defectos de procedimiento y conceptuales, porque se apoya en modelos que son restrictivos, válidos en el dominio de los números naturales pero no siempre en el de los racionales.

Al pasar de los números naturales a los racionales hay interpretaciones de la división que dejan de tener sentido: no se puede partir en un número fraccionario de veces, la división no se puede interpretar como resta repetida ni como la inversa de la adición repetida ya que el número de veces que cabe una fracción en otra no puede ser fraccionario, y la comparación multiplicativa no se puede interpretar como hacer tantas veces menor. En consecuencia, hay otras interpretaciones de la división que adquieren más importancia, como la proporción de valor unitario conocido, el factor perdido y la «cuotición». Estas interpretaciones vienen dadas por formas textuales que la tradición escolar ha dejado reflejadas en los libros de texto y que la enseñanza actual no debería dejar de prestarles especial atención para hacer frente al fenómeno de la discontinuidad de los modelos semánticos. Tal vez así, se ayude a los estudiantes a comprender que al pasar a los racionales se construye una nueva concepción de la división de fracciones, y que esta es la que les va a permitir ampliar el abanico de problemas que pueden resolver con una división.

Tabla 1. *Formas textuales*

En las definiciones	Uso escolar o casos en que se aplica la división
Partición	
Repartir un número dado en partes iguales (Lacroix, 1846). Partir un número en porciones iguales (FTD, 1930).	1. Cuando hay que repartir entre varias personas cierto número de cosas (Vallejo, 1841, p. 62). Un padre al morir ha dejado en haciendas, alhajas, casas, etc., 2359367 reales, y se trata de saber cuánto corresponde a cada uno de sus nueve hijos (p. 62). 2. Cuando se quiere dividir un número en partes iguales, o tomar una parte de un número (p. 61). Se quiere dividir en cinco partes iguales el número 4625 (p. 62). Tomar la duodécima parte del número 8563015 (p. 62).
Cuotición	
Sacar cuántas veces cabe el menor en el mayor (Aurel, 1552). Vamos ahora a tratar de la segunda operación de disminuir que se origina de la resta, cuando intentamos averiguar cuántas veces se puede restar el sustraendo del minuendo (Vallejo, 1841). Averiguar cuántas veces un número, llamado dividendo, contiene a otro llamado divisor (Edelvives, 1934).	3. Cuando se quiere buscar las veces que un número está contenido en otro, o de cuantos números como uno dado se compone otro también dado (p. 61). 4. Dado el valor de una unidad, determinar cuántas unidades como aquella se podrán adquirir con una cantidad determinada (p. 62). Se sabe que el valor de una fanega de trigo es 37 reales, y que se quiere saber cuántas fanegas se podrán comprar con 9500 reales (p. 62). 5. Cuando se quiere reducir unidades de especie inferior a unidades de especie superior (p. 62). Reducir 8536 maravedises a reales (el real tiene 34 maravedises) (p. 63).
Comparación multiplicativa	
Comparación multiplicativa Dividir es hacer un número tantas veces menor como unidades tiene otro (Dalmau, 1929).	6. Hacer un número cualquiera cierto número de veces menor Juan tiene 14.500 pesetas y su hermano tiene 5 veces menos. ¿Cuántas pesetas tiene su hermano? (Dalmáu, 1929, p. 52).
Factor del dividendo o factor perdido	
Buscar un número que multiplicado por el divisor dé el dividendo (Vallejo, 1841) Dado el producto de dos factores y uno de ellos, hallar el otro factor (Dalmau, 1944).	7. Buscar por cuánto debe multiplicarse un número dado para hallar otro. ¿Por qué número debe multiplicarse 89 para igualar a 7.565? (Bruño, 1905, p. 53)
Proporción: Valor unitario conocido: $\frac{D}{C} = \frac{d}{1}$	
Multiplicar un número por otro es formar un número con el primero, de la misma manera que el segundo está formado con la unidad (Lacroix, 1846)	No se han encontrado formas textuales en los libros que correspondan a este modelo entre los casos en los que se aplica la división.

En las definiciones	Uso escolar o casos en que se aplica la división
Proporción: Valor unitario desconocido: $\frac{D}{d} = \frac{C}{1}$	
Buscar un otro número tercero que se haya con la unidad en tal proporción como el número que partimos con el partidor (Pérez de Moya 1562).	8. Cuando conociendo el valor de muchas unidades, se quiere averiguar el de una. Sabiendo que 25 varas de paño han costado 750 reales, averiguar cuánto ha costado la vara.

Agradecimientos

Esta investigación se ha realizado en el marco de los proyectos: EDU2011-27168 y EDU2012-35638 del Plan Nacional de I + D + i del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

Aurel, M. (1552). *Libro primero de Arithmetica Algebraica*. Valencia, España: En casa de Joan de Mey.

Bell, A., Swan, M. y Taylor, G. (1981). Choice of operation in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics, 12*(4), 399-420.

Bruño, G. (1905). *Aritmética. Curso medio*. Madrid, España: Ediciones Bruño.

Contreras, M. (2013). *Problemas multiplicativos relacionados con la división de fracciones. Un estudio sobre su enseñanza y aprendizaje*. Tesis doctoral. Valencia, España: Universidad de Valencia.

Dalmáu, C. (1929). *Lecciones de Aritmética*. 1ª Parte. Grado Superior. 115 Edición. Gerona, España: Dalmáu Carles.

Dalmáu, C. (1944). *Aritmética razonada y nociones de álgebra*. Gerona, España: Dalmáu Carles.

Edelvives (1934). *Aritmética segundo grado*. Sexta edición. San Sebastián, España: FTD.

FTD (1930). *Aritmética primer grado*. Undécima edición. Barcelona, España: Autor.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M. S. y Marino, M. S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, *16*(1) 3-17.

Hart, K. (ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16.* Londres, Reino Unido: Murray.

Lacroix, S. (1846) *Curso completo elemental de matemáticas puras*. Tomo II. Algebra. Sexta edición. Madrid, España: Imprenta Nacional.

Pérez de Moya, J. (1562). *Arithmetica práctica y speculativa.* Madrid, España: Ediciones de la Fundación José Antonio de Castro (Reed. 1998).

Rey Pastor, J. y Puig Adam, P. (1932). *Elementos de Aritmética. Col. Elemental intuitiva*. Tomo I. Sexta Edición. Madrid, España: Imp. A. Marzo.

Thibodeau, P. y Mestre, J. P. (1989). Understanding multiplicative contexts involving fractions. *Journal of educational Psychology*, *81*(4), 547-557.

Vallejo, J. M. (1841). *Tratado Elemental de Matemáticas escrito de orden de S. M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madrid y demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida y considerablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra*. Madrid, España: Imp. Garrayasaza.

UTILIZACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA POR MAESTROS EN FORMACIÓN EN TAREAS DE DIVISIBILIDAD

Use of the fundamental theorem of arithmetic by a group of training primary teachers on divisibility tasks

Ángel A. López[a,b] *y María C. Cañadas*[b]
[a]Universidad de Carabobo, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo muestra una investigación que estamos realizando, relativa al conocimiento matemático de futuros maestros sobre divisibilidad. En este capítulo presentamos resultados de las respuestas dadas por 37 futuros maestros a dos cuestiones sobre divisibilidad y teorema fundamental de la aritmética. Estos futuros maestros mostraron una utilización limitada de dicho teorema y manifestaron dificultades para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica.

Palabra clave: Divisibilidad; Divisores; Factores, Formación de maestros; Teorema fundamental de la aritmética.

Abstract

This work is part of an on going study on divisibility as mathematical knowledge of training primary teachers. In this chapter we present results of the responses by 37 training primary teachers to two questions on divisibility and the fundamental theorem of arithmetic. These future teachers showed a limited use of this theorem. They expressed difficulties in determining all factors-divisors of a number from the canonical decomposition of such number.

Keywords: *Divisibility; Divisors; Factors; Fundamenthal teorem of arithmetic; Training primary teachers.*

Introducción

Las actividades que requieren de la utilización del teorema fundamental de la aritmética plantean dificultades a los estudiantes de diferentes niveles educativos. En las aulas, es usual encontrarse con la pregunta de si el número 1 es primo. Hay maestros en

López, A. A. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización del teorema fundamental de la aritmética por maestros en formación en tareas de divisibilidad. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), I*nvestigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 59-66). Granada, España: Editorial Comares.

formación que, en una descomposición en factores primos como $3^2 \times 5^3 \times 7$, para responder si 21 es factor o divisor del número dado, expresan el número en su representación decimal y hacen la división, sin percatarse de que ese proceso no es necesario (López, Castro y Cañadas, 2013). Es frecuente que la transformación del número 45, (como el producto de factores primos) sea realizada sin dificultad pero que, a su vez, no consideren 15 como factor o divisor de 45. Esta y otras situaciones similares tienen que ver con el teorema fundamental de la aritmética. Por ejemplo, si un estudiante considera que el 1 es un número primo, entonces la descomposición no sería única (las descomposiciones con y sin el 1 serían diferentes y válidas).

El teorema fundamental de la aritmética es útil para la realización de algunas tareas de divisibilidad que se plantean en educación primaria. Por tanto, es posible que los futuros maestros tengan que enseñarlo en sus aulas. Además, consideramos que no es suficiente que dicha enseñanza se limite al enunciado del teorema, y que su uso no debería restringirse a la descomposición de un número en factores primos. Estas razones nos motivan a realizar el presente trabajo.

En este capítulo analizamos la utilización del teorema fundamental de la aritmética que hace un grupo de futuros maestros cuando responden dos cuestiones sobre divisibilidad. En el resto del capítulo, describimos el teorema fundamental de la aritmética e introducimos la estructura conceptual de la divisibilidad, presentamos el objetivo de la investigación, explicamos el método, describimos e interpretamos los resultados y, por último, recogemos las conclusiones.

Teorema fundamental de la aritmética y divisibilidad

La primera parte del teorema fundamental de la aritmética hace referencia a la posibilidad de descomponer cualquier número entero mayor que uno en factores primos. Esta descomposición es considerada un procedimiento en sí mismo en el currículo de educación primaria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2007) y en los libros de texto de este nivel educativo. Además, la descomposición en factores primos se usa como parte de un algoritmo que permite calcular divisores de dos o más números, el mínimo común múltiplo y el máximo común divisor.

En la descomposición de un número entero positivo en factores primos, distinguimos entre factores-divisores explícitos (cada uno de los factores primos con su respectiva potencia que expresan el número) y factores-divisores no explícitos (el resto). En estos últimos, diferenciamos entre los no explícitos de base y los no explícitos de productos internos. Por ejemplo, en la descomposición canónica $3^2 \times 5^3 \times 7$, los factores-divisores explícitos del número son 3^2, 5^3 y 7; los números 3, 5 y 5^2 son los únicos factores-divisores no explícitos de base; y 15, 75, 175 o 1125 son factores-divisores no explícitos de productos internos.

La segunda parte del teorema plantea la unicidad de la descomposición en factores primos. Esta parte del teorema queda al margen en las actividades donde se hace uso del teorema en educación primaria y, usualmente, solo se encuentra en el enunciado del teorema.

La teoría elemental de números y, en particular, el teorema fundamental de la aritmética se consideran contenidos útiles para que los futuros maestros logren una comprensión conceptual de propiedades y estructuras numéricas (NCTM, 1989) y para que puedan entender y tratar sus ideas fundamentales en las aulas (Conference Board of the Mathematical Sciences, 2001). Zazkis y Campbell (1996) constatan que, aunque muchos futuros maestros de educación primaria están familiarizados con dicho teorema y son capaces de enunciar y explicar su significado, no tienen la capacidad de aplicarlo en la resolución de problemas sobre divisibilidad.

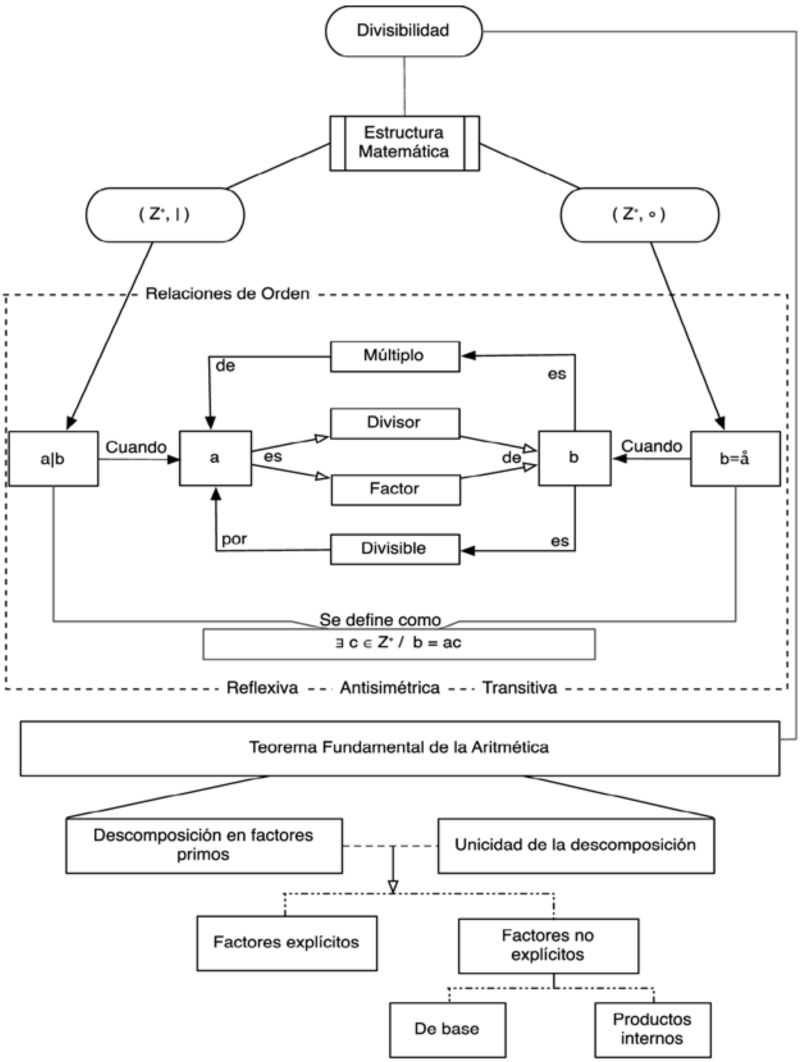


Figura 1. *Estructura conceptual de divisibilidad*

En la Figura 1 presentamos la relación que hemos considerado con el teorema fundamental de la aritmética y la estructura conceptual de la divisibilidad. La descomposición en factores primos aporta información importante para decidir sobre factores-divisores de un número y, en general, para decidir sobre las relaciones de divisibilidad.

Zazkis y Liljedah (2004) asocian la comprensión de la divisibilidad en N, con la descomposición en factores. Muchos autores han coincidido en sus investigaciones en la necesidad de avanzar en el campo de la teoría elemental de números y maestros en formación, así como en la comprensión de conceptos relacionados con la divisibilidad (Brown, Thomas y Tolias, 2002; Castro y Molina 2011; Leinkin, 2006; Zazkis, 2000).

Objetivo de investigación

El objetivo del trabajo que recogemos en este capítulo es describir la utilización que hacen futuros maestros de educación primaria del teorema fundamental de la aritmética, en tareas sobre divisibilidad. Esperamos poder aplicar los resultados para la mejora de la docencia de los futuros maestros.

Método

Desarrollamos 3 sesiones de trabajo sobre divisibilidad con 37 maestros en formación que cursaban la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria, del Grado de Maestro de Educación Primaria de la Universidad de Granada en 2012. Nos centramos en una sesión en la que realizaron una tarea compuesta por varias cuestiones. Debían resolver la tarea individualmente, aunque estaban organizados en grupos de 3 o 4 compañeros, con los que podían hablar. Los futuros maestros disponían de 1,5 horas para esta tarea. Recogimos el trabajo individual escrito y grabamos en audio las discusiones de cada uno de los grupos. Por su relación con el teorema fundamental de la aritmética, nos centramos en las cuestiones 4 y 5 de la tarea mencionada.

4. Escribe todos los factores del número 459 distintos de 3 y 17. Explica tu respuesta.
5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

Con cada una de las cuestiones, indagamos sobre el uso o no del teorema y la consideración de los factores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica de un número. La Cuestión 4 se refiere a una situación familiar para los futuros maestros, mientras que la Cuestión 5 supone una situación poco habitual ya que la respuesta no es única, por lo que les proponemos un ejemplo del que puedan extraer conclusiones.

Con base en nuestros intereses investigadores y una revisión preliminar de las respuestas, consideramos las siguientes categorías para el análisis de las mismas: utilización del teorema (utilización de la descomposición canónica de un número, consideración de la unicidad establecida por el teorema) y reconocimiento de los diferentes tipos de factores-divisores definidos anteriormente. Codificamos las respuestas de los futuros maestros con estas categorías. Presentamos un ejemplo de codificación de la respuesta de Jesús a la Cuestión 4, en la Figura 2.

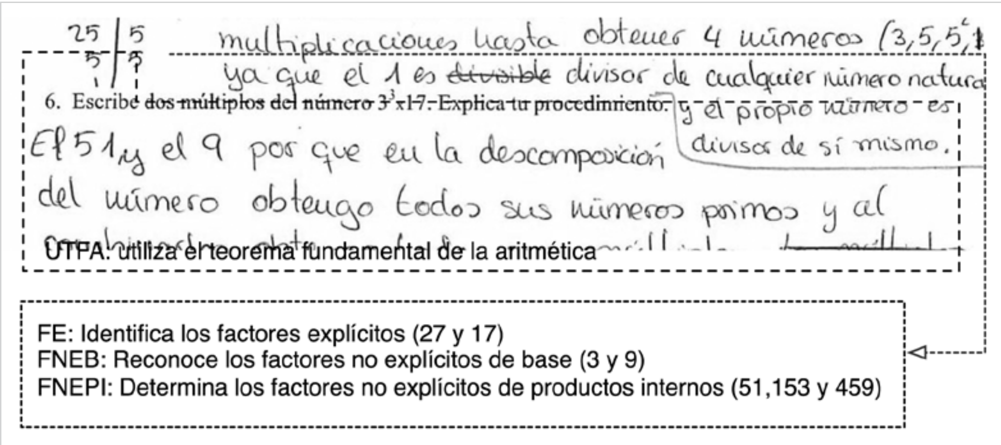


Figura 2. *Respuesta de Jesús a la Cuestión 4*

Resultados y discusión

A la Cuestión 4 respondió un 78,4% de los futuros maestros, mientras que a la Cuestión 5 respondió un 67,6%. Resumimos la información referente a las categorías consideradas en la Tabla 1. Los datos son porcentajes sobre el total de respuestas dadas a cada una de las dos cuestiones.

Tabla 1. *Respuestas de las cuestiones 4 y 5, expresadas en porcentajes*

Nº	UTFA	FE	FNEB	FNEPI
4	75,9	72,7	81,8	72,7
5	60,0	73,3	60,0	53,3

Nota. UTFA=utiliza el Teorema fundamental de la aritmética, FE=identifica los factores explícitos en la descomposición canónica; FNEB=reconoce los factores no explícitos de base en la descomposición canónica; FNEPI=determina los factores no explícitos de productos internos en una descomposición canónica.

En la Cuestión 4, el 75,9% de los futuros maestros que respondieron, utilizaron el Teorema fundamental de la aritmética. Todos ellos hicieron la descomposición en factores primos del número 459 y la mayoría identificó los factores-divisores explícitos y no explícitos. En la Figura 2 se puede observar que Jesús identifica los factores explícitos (27 y 17), los no explícitos de base (3 y 9) y no explícitos de productos internos (51,153 y 459) en la descomposición canónica del número. Sin embargo, no todos los futuros maestros lograron identificar los factores explícitos y no explícitos en la descomposición canónica hecha. El 27,3% de los futuros maestros que respondió, no identificó los factores explícitos en la descomposición canónica del número, el 18,2% no identificó los factores no explícitos de base y el 27,3% no identificó los factores no explícitos de los productos internos.

En la Cuestión 5, el 60% utilizó el teorema fundamental de la aritmética para responder. Las estrategias seguidas por los futuros maestros para responder las podemos agrupar en tres tipos: (a) escoger un número al azar y descomponerlo en factores primos, luego probar a dividirlo para saber si cumple con la condición de exactamente seis divisores; (b) escoger cuatro números primos al azar y la unidad y, luego, hacer el producto de ellos; y (c) descomponer en factores primos el número dado como ejemplo y escribir otro número con característica similares a este en su descomposición en factores primos.

Independientemente de la estrategia utilizada para responder a la Cuestión 5, se observa confusión para determinar los factores explícitos y no explícitos en una descomposición canónica. El 46,7% de los futuros maestros que respondieron, no identificó los factores que no están explícitos y que son resultado de productos internos de la descomposición canónica del número (ver Figura 3). El 40% no identificó los factores no explícitos de base en la descomposición canónica y el 26,7% mostró confusión para identificar los factores explícitos en una descomposición canónica.

Manuel (ver Figura 3) utiliza cuatro números primos, la unidad y el producto de todos ellos para responder. Consideró que el número 75361 es el producto de cuatro factores primos 11×13×17×31=75361. Sin embargo, no consideró los productos internos entre los números primos que también son divisores del número (e.g., 11×13 o 11×17×31). En la grabación de audio, donde participó Manuel con dos compañeros más, constatamos que no consideraron la posibilidad de los factores no explícitos de productos internos como una situación que se presenta en cualquier descomposición canónica.

> Manuel: …ah ya! entonces hago factores primos, multiplica 1×2×3×7×11×13 el trece es primo ¿no?.
> José: si el 13 es primo.
> David: 6006… no pero espérate porque es un rollo, no porque luego puede ser divisible por 6.

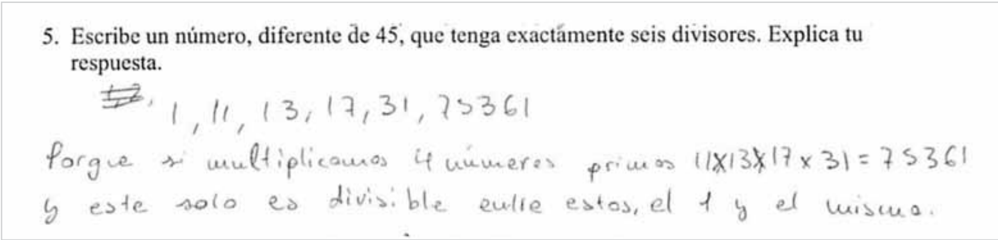
La advertencia es evidente porque el número es 6006 y sólo sospecharon del 6 como posible divisor diferente del número, pero en ningún caso advirtieron que 6 es producto de 2×3. Luego, acordaron escribir otro número que sea producto de números primos y decidieron que los números debían ser mayores. Nuevamente, no consideraron los factores no explícitos de productos internos.

> José: …el uno y el número que sea ya son dos, así que hay que buscar cuatro más.
> Manuel: …pues mira coge el uno y ahora multiplica el 11 por 13.
> José: porqué con esos números primos.

Manuel: para que sea grande, un número complicado, 51… no 51 no… pon ahí dos primos… 17 también y 31 es primo ¿no?… es que debería ser así por 31.

David: pero ¿31 es primo o no?.

Manuel: 1×11×13×17×31=75361



5. Escribe un número, diferente de 45, que tenga exactamente seis divisores. Explica tu respuesta.

1, 11, 13, 17, 31, 75361

Porque si multiplicamos 4 números primos 11x13x17x31=75361 y este solo es divisible entre estos, el 1 y el mismo.

Figura 3. *Respuesta de Manuel a la Cuestión 5*

CONCLUSIONES

Los futuros maestros mostraron una utilización limitada del teorema fundamental de la aritmética. La descomposición en factores primos de un número (primera parte del teorema) no presentó dificultad para los maestros en formación que participaron en este estudio. Sin embargo, algunos de ellos no consideraron los factores explícitos y no explícitos en esa descomposición. En particular, mostramos las dificultades que presentaron para determinar todos los factores-divisores de un número a partir de su descomposición canónica. Esta evidencia, junto con los conocimientos previos, nos lleva a conjeturar que utilizaron la descomposición en factores primos como un procedimiento independiente del teorema fundamental de la aritmética y que lo aplicaron de forma mecánica.

Respecto a la segunda parte del teorema, observamos algunas respuestas que apuntan a la «posibilidad» de existencia de otra descomposición en factores primos, lo cual refleja una limitación importante en la utilización del teorema fundamental de la aritmética.

A partir de los resultados, extraemos algunas implicaciones docentes que podrían contribuir al uso del teorema. En primer lugar, y dado que una de las estrategias en la Cuestión 5 fue seleccionar un número al azar y dividir, podríamos utilizar una idea de la demostración del teorema: a partir de la descomposición canónica del número, calcular el número de divisores-factores y, posteriormente, hacer el producto de las combinaciones posibles entre ellos. En segundo lugar, como algunos de los maestros en formación, no identificaron como factores de un número dado los no explícitos, proponemos plantear la descomposición en factores primos en diferente orden. En tercer lugar, dado que la unicidad del teorema fundamental de la aritmética es un aspecto que no es considerado más allá del enunciado del teorema, proponemos profundizar sobre la unicidad del teorema, incidiendo en que esta implica que todos los factores-divisores de ese número se generan a partir de esa descomposición necesariamente, y haciendo hincapié en que no es una cuestión de azar, como ocurrió con la estrategia seguida por un grupos de futuros maestros cuando respondieron la Cuestión 5 de este estudio.

Referencias

Brown, A., Thomas, K. y Tolias, G. (2002). Conceptions of divisibility: Success and understanding. En S.R. Campbell y R. Zazkis (Eds.), *Learning and teaching number theory: research in cognition and instruction* (pp. 41-82). Westport, CT: Ablex.

Castro, E. y Molina, M. (2011). Introducción a la divisibilidad. En I. Segovia y L. Rico (coords), *Matemáticas para maestros de educación primaria* (pp. 123-146). Madrid, España: Pirámide.

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2001). *The mathematical education of teachers*. Providence, RI: American Mathematical Society.

Leinkin, R. (2006). Learning by teaching: the case of sieve of Eratosthenes and one elementary school teacher. En R. Zazkis y S. R. Campbell (Eds.), *Number theory in mathematics education: perspectives and Prospects* (pp. 115-140). New Jersey, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

López, A., Castro, E. y Cañadas, M. C. (2013). Utilización de la noción «ser múltiplo» por maestros de educación primaria en formación. *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 84*.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Real Decreto 2211/2007 de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación primaria (Vol. BOE Nº 173, pp. 31487-31566). Madrid, España: Autor.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Zazkis, R. (2000). Factors, divisors and multiples: Exploring the web of students' connections. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinsky (Eds), *Research in collegiate mathematics education* (Vol. 4, pp. 210-238). Providence, RI: American Mathematical Society.

Zazkis, R. y Campbell, S. R. (1996). Prime decomposition: understanding uniqueness. *Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 207-218.

Zazkis, R. y Liljedah, P. (2004). Understanding primes: the role of representation. *Journal for Research in Mathematics Education*, *35*(3), 164-186.

LIMITACIONES EN LA COMPRENSIÓN DE LOS SISTEMAS DE NUMERACIÓN AL INICIO DE LOS ESTUDIOS DEL GRADO DE MAESTRO EN EDUCACIÓN PRIMARIA

Limitations in understanding of numbering systems at the beginning of the graduate studies of teacher in primary education

José Luis González, Antonio Luis Ortiz y Jesús Gallardo
Universidad de Málaga

Resumen

La comprensión de los conocimientos matemáticos elementales constituye un requisito necesario para desarrollar una labor profesional docente de calidad. Pero la formación inicial de un maestro está fuertemente condicionada por los conocimientos, capacidades y destrezas con las que ingresan en la universidad. Tal es el caso de la comprensión que manifiestan, los errores en que incurren y las estrategias que utilizan los futuros maestros de primaria acerca de los sistemas de representación numérica cuando acceden por primera vez a la carrera. Los resultados obtenidos mediante un estudio exploratorio evidencian un dominio meramente técnico, limitado y con lagunas importantes.

Palabras clave: Competencia matemática; Comprensión del conocimiento matemático; Grado de Maestro en Educación Primaria; Sistemas de numeración.

Abstract

The understanding of elementary mathematical knowledge is a prerequisite for developing a quality teacher professional work. But the initial training of a teacher is strongly influenced by the knowledge, skills and abilities acquired prior to the start of the studies. Such is the case of the understanding shown, the mistakes and the strategies that are using the future primary teachers about natural number representation systems when accessing to the initial training programs for the first time. The obtained results through an exploratory study show a purely technical and limited domain and with significant gaps.

Keywords: *Mathematical competencies; Numbering systems; Primary Teacher Education Degree; Understanding in mathematics.*

González, J. L., Ortiz, A. L. y Gallardo, J. (2013). Limitaciones en la comprensión de los sistemas de numeración al inicio de los estudios del Grado de Maestro en Educación Primaria. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 67-75). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

La «buena formación matemática» del docente depende del estado real de la comprensión de los conocimientos matemáticos al inicio de los estudios universitarios (Contreras, Carrillo, Zakarian, Muñoz-Catalán y Climent, 2012, pp. 433-436), así como de las experiencias formativas durante dichos estudios.

Los sistemas de numeración participan también de la situación descrita (Ortiz, 1999; Contreras et al., 2012), razón por la cual venimos desarrollando una investigación enmarcada en una línea de estudio sobre la comprensión del conocimiento matemático y su interpretación operativa (Gallardo y González, 2006a, 2006b, 2006c, 2007; Gallardo, González y Quispe, 2008). El estudio se orienta a conocer el estado de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria al inicio de sus estudios, averiguar la incidencia del desarrollo de la asignatura Didáctica de la Aritmética sobre dicho dominio y obtener evidencias que permitan optimizar el proceso formativo. En el presente capítulo se describen algunas dificultades, limitaciones y estrategias de los estudiantes para generalizar y aplicar el conocimiento a nuevas situaciones (Ortiz, González y Gallardo, 2011, pp. 321-330).

Marco teórico y metodológico

Desde la óptica de la comprensión, el estudio se articula siguiendo el esquema de la Figura 1.

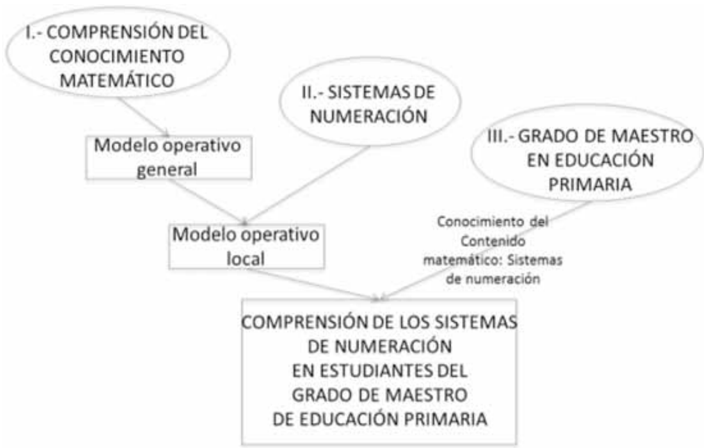


Figura 1. *Áreas y relaciones en la investigación*

Sus fundamentos se encuentran en los referentes teórico-metodológicos detallados en Gallardo et al. (2006a, 2006b, 2006c, 2007) y en Ortiz, González y Gallardo (2011), de los que nos interesa destacar aquí, como referencia sintética, las tres orientaciones básicas que contemplamos para la interpretación de la comprensión: cognitiva, semiótica y hermenéutica, y el modelo general asociado basado en: (a) una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración; (b) una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión que evoluciona en función de la situación y los factores que intervienen; (c) una concepción analítica del conocimiento matemático sustentada en las estructuras epistemológica y fenomenológica del mismo y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento; y (d) un método o proceso secuenciado mixto (estudios teóricos y empíricos) que se articula en torno a dos dimensiones:

A) *Dimensión fenómeno-epistemológica*, en la que se inicia el estudio mediante el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a): 1. Análisis de la estructura matemática de los sistemas de numeración (Ortiz, 1999; Ortiz, González y Gallardo (2011) y análisis didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006b); 2. Delimitación del conjunto genérico de situaciones; 3. Estructuración fenómeno-epistemológica y Modelo local; 4. Construcción de instrumentos; 5. Desarrollo, resultados y primeras conclusiones;

B) *Dimensión hermenéutica*, en la que se analiza la información y se completan los resultados mediante el círculo interpretativo o método hermenéutico esquematizado en la Figura 2.

Figura 2. *Círculo interpretativo*

Desarrollo y resultados generales

La investigación se desarrolla en tres fases. La primera fase involucra el estudio empírico 1, formado por una aproximación exploratoria de la que se describen algunos resultados en los párrafos que siguen, y un segundo estudio conjunto. A partir de los datos anteriores se desarrollan los estudios 2 y 3, cuyos resultados se describen en González, Ortiz y Gallardo (2012). Finalmente, la tercera fase (estudio 4) se centra en la delimitación de los niveles de comprensión, el análisis de los efectos del proceso formativo y las consecuencias para la optimización de dicho proceso.

El estudio 1 se inició con el análisis didáctico de los antecedentes (Gallardo y González, 2006a; Ortiz, 1999) y el análisis fenómeno-epistemológico para determinar la estructura del conjunto de situaciones o «universo de tareas», las categorías y niveles del modelo 1 (4 niveles para la estructura epistemológica (técnica, analítica, sintética y formal) y 5 niveles para la estructura fenomenológica (elementos básicos, cuantificación y medida, comparación y orden, representación y composición y operaciones)), la selección y ordenación de tareas y la construcción de la Prueba 1 (Ortiz, González y Gallardo, 2011, pp. 375-378).

La prueba se aplicó a una muestra de 155 alumnos de los 420 que componían la población de estudiantes de primer curso del Grado de Educación Primaria de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga en el curso académico 2010-11. Con los datos obtenidos, se realizó un análisis descriptivo global (Figura 3), otro puntual de los tipos de respuestas y un análisis de errores y estrategias. En la Figura 3 se observa que el 77,5% de los sujetos responden acertadamente a más del 90% de los 16 ítems del nivel I (Reproducción). En el nivel II (Análisis) se aprecia una distribución más homogénea y que el 70 % de la muestra contestan correctamente a menos del 50% de los ítems. Por último, el 85% de los sujetos responden correctamente con porcentajes inferiores al 30% a los ítems del nivel III (Síntesis), concentrándose en el intervalo de porcentajes inferiores al 10%.

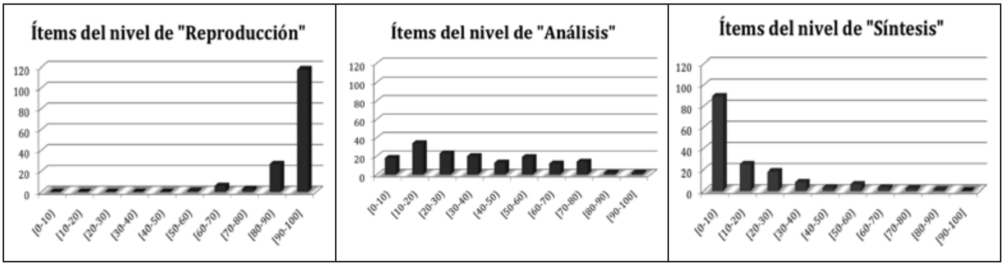


Figura 3. *Frecuencias absolutas de respuestas en los tres niveles del cuestionario*

Limitaciones, estrategias y errores en el nivel de síntesis

Las tareas del nivel de síntesis se caracterizan por poner a prueba la capacidad de los sujetos para aplicar las ideas y los conocimientos sobre los sistemas de numeración a nuevas situaciones o sistemas. Pero dicha capacidad se presenta bajo múltiples variantes que resultan de la combinación de estrategias, errores, tipos de respuesta y su valoración. En el caso que nos ocupa, encontramos un bajo porcentaje de respuestas correctas, el uso de estrategias inadecuadas o correspondientes a niveles inferiores y numerosos errores, entre los que destacamos: (a) aplicación mecánica de los algoritmos; (b) no utilización de la estructura del sistema (unidades, posiciones y equivalencias) ni del desarrollo polinómico; (c) no realización de transferencias entre los distintos órdenes y unidades. Veamos algunos ejemplos.

En la tarea 16, el 42,6% de los alumnos aplican el desarrollo polinómico (Figura 4), el 14,8% realiza una transformación de las unidades de menor a mayor orden, efectuando el cálculo ([(5x10 +4)x10)+5]x10+9), y el 7,1% de los alumnos reconocen la coincidencia de la base de agrupamiento y simplemente cuentan cada grupo de símbolos.

En las tareas 17 (Figuras 5 y 6) y 18 (Figura 7) se utiliza un contexto familiar de compras y ventas de bombones con diferentes sistemas de representación (icónica y posicional o abreviada) y se aprecian estrategias que corresponden a diferentes niveles de comprensión.

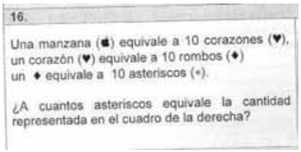
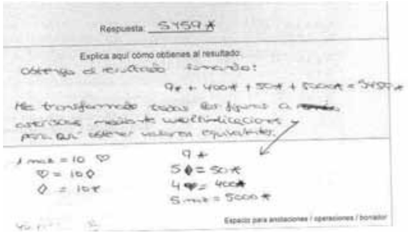
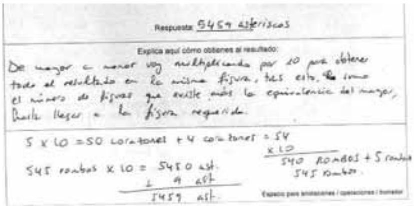
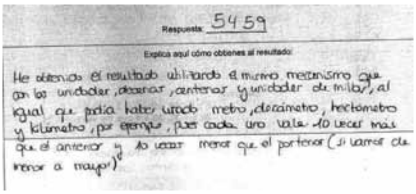
Tarea 16	Respuestas	Estrategias
 16. Una manzana ( ) equivale a 10 corazones ( ), un corazón ( ) equivale a 10 rombos ( ) un equivale a 10 asteriscos ( ). ¿A cuantos asteriscos equivale la cantidad representada en el cuadro de la derecha?		Desarrollo polinómico $5x10^3 + 4x10^2 + 5x\ 10 + 9$ (42,6%)
		Transformación progresiva de unidades de mayor a menor orden [(5x10+4)x10) +5] x10+9 (14,8%)
		Contar las unidades y responder directamente (7,1%) “He obtenido el resultado utilizando el mecanismo que con las unidades, decenas, centenas y unidades de millar, al igual que podía haber usado metro, decámetro, hectómetro y Kilómetro, por ejemplo, pues cada uno vale 10 veces más que el anterior y 10 veces menos que el posterior (si vamos de menor a mayor)»

Figura 4. *Las tres estrategias mayoritarias de niveles distintos para la tarea 16*

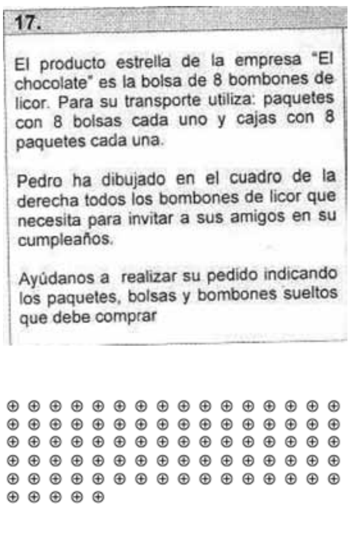
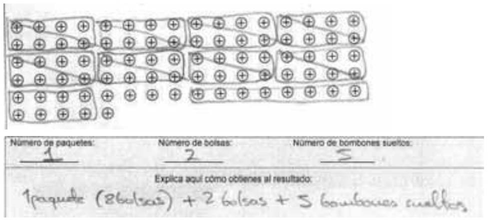
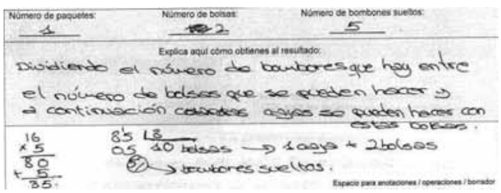
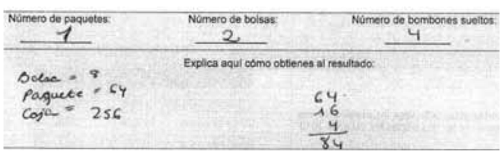
Tarea 17	Respuestas	Estrategias
 17. El producto estrella de la empresa "El chocolate" es la bolsa de 8 bombones de licor. Para su transporte utiliza: paquetes con 8 bolsas cada uno y cajas con 8 paquetes cada una. Pedro ha dibujado en el cuadro de la derecha todos los bombones de licor que necesita para invitar a sus amigos en su cumpleaños. Ayúdanos a realizar su pedido indicando los paquetes, bolsas y bombones sueltos que debe comprar	 Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 5 Explica aquí cómo obtienes el resultado: 1paquete (8bolsas) + 2 bolsas + 5 bombones sueltos	Manipulando las cantidades (27,1%)
	 Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 5 Explica aquí cómo obtienes el resultado: Dividiendo el número de bombones que hay entre el número de bolsas que se pueden hacer y a continuación cuantas cajas se pueden hacer con estas bolsas. 16 × 5 = 80 + 5 = 85; 85 : 8 = 10 bolsas → 1 caja + 2 bolsas; 5 bombones sueltos.	Aritmética-mente (13%)
	 Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 2 Número de bombones sueltos: 4 Explica aquí cómo obtienes el resultado: Bolsa = 8 Paquete = 64 Caja = 256 64 + 16 + 4 = 84	Equivalencia y distribución entre órdenes (13%)

Figura 5. *Tres estrategias de distinto nivel para la tarea 17*

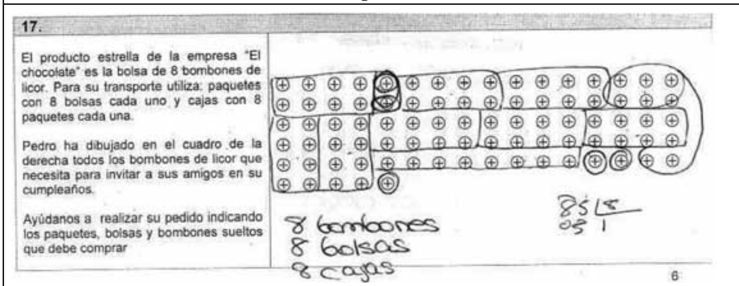
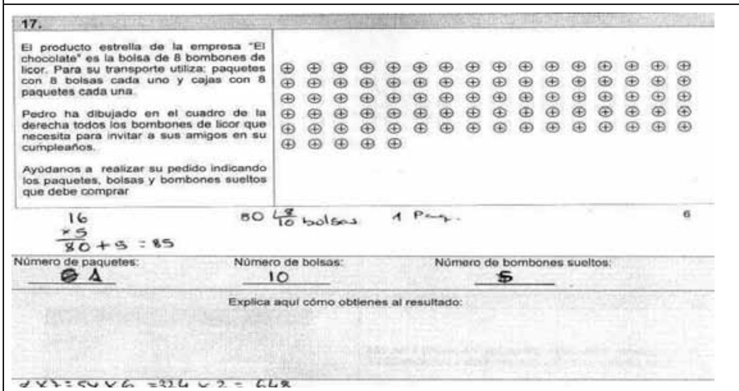
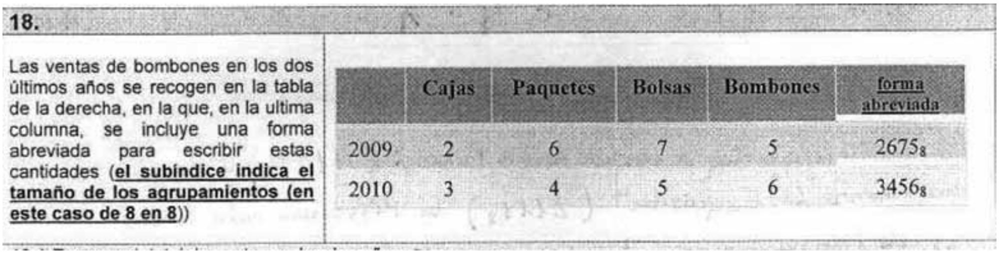
Respuesta	Errores (47%)
 8 bombones 8 bolsas 8 cajas 85 : 8 = 1	Responde: 1 paquete, 10 bolsas y 85 bombones sueltos. Cuenta el total de bombones, los agrupa de 8 en 8 mediante divisiones, pero repite ordenes
 16 × 5 = 80 + 5 = 85 80 : 8 = 10 bolsas 1 Paq. Número de paquetes: 1 Número de bolsas: 10 Número de bombones sueltos: 5 Explica aquí cómo obtienes el resultado:	Responde: 1 paquete, 10 bolsas y 5 bombones sueltos Primero calcula el total de bombones (no utiliza la figura para realizar los agrupamientos): 16x5=80+5=85. Después divide 80 entre 8 y obtiene 10 bolsas y añade a continuación 1 paquete

Figura 6. *Errores más frecuentes en la tarea 17*

La tarea 18 es resuelta correctamente por el 28,4% de los alumnos de la muestra, que, sin embargo, utilizan mayoritariamente estrategias propias de niveles anteriores.

Tarea 18



18.

Las ventas de bombones en los dos últimos años se recogen en la tabla de la derecha, en la que, en la ultima columna, se incluye una forma abreviada para escribir estas cantidades (**el subíndice indica el tamaño de los agrupamientos (en este caso de 8 en 8)**)

	Cajas	Paquetes	Bolsas	Bombones	forma abreviada
2009	2	6	7	5	2675_8
2010	3	4	5	6	3456_8

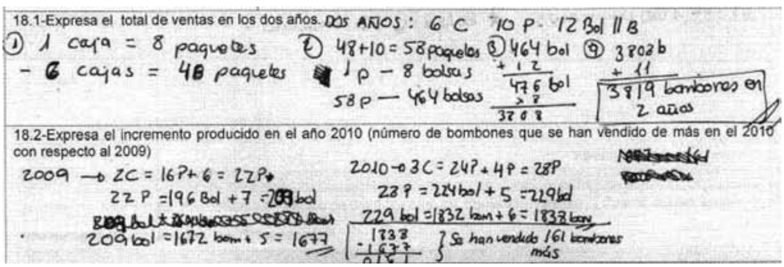
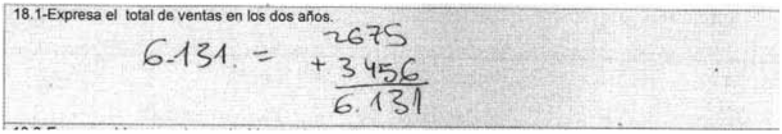
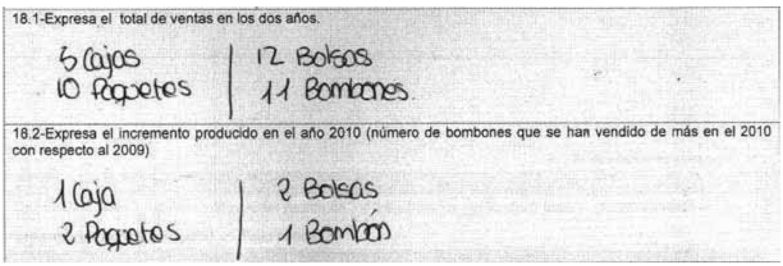
Respuestas	Estrategias/errores
	Estrategia mayoritaria: Transformar a base 10 y operar
	Error: Sumar los totales como si estuvieran en base 10
	Errores: operar en base 10 y restar el mayor del menor en cada orden

Figura 7. *Algunas estrategias y errores en la tarea 18*

La tarea 19 es semejante a las anteriores, pero se pide la respuesta en la notación abreviada, lo que hace que las respuestas correctas no pasen del 22,6%, las respuestas en blanco lleguen hasta el 43,9% y las respuestas erróneas alcancen el 33,5% (Figura 8).

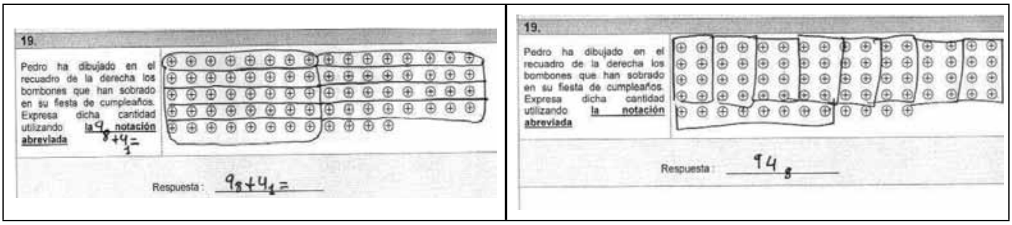


Figura 8. *Dos respuestas erróneas a la tarea 19*

CONCLUSIONES

El estudio de la comprensión se puede abordar desde distintos niveles de generalidad. Desde un enfoque general se pueden interpretar pautas comunes y obtener conclusiones útiles para acometer modificaciones curriculares. En este nivel, el estudio obtiene resultados como los siguientes: (a) la mayoría de los alumnos de la muestra se encuentran entre los niveles de reproducción y análisis y muy pocos en el de síntesis; (b) hay sujetos que muestran rastros de compresión de varios niveles dependiendo de las tareas del campo en estudio; (c) la mayor parte de los errores y estrategias se pueden explicar en función de las respuestas a las tareas de niveles inferiores.

Desde un enfoque más específico se pone de manifiesto la gran variedad de estrategias, situaciones cognitivas y estilos de pensamiento que complican la interpretación de los comportamientos y la delimitación de la situación de la comprensión. Los datos son elocuentes: Se pueden identificar una decena de estrategias diferentes y más de 12 errores básicos (algunos más como combinación de los básicos) en las respuestas a las 9 tareas del nivel de Síntesis.

Entre las fuentes de errores más frecuentes destacamos: (a) el nivel técnico o de reproducción se encuentra tan consolidado que provoca la aplicación mecánica de los procedimientos y algoritmos; (b) una variante se puede observar en las situaciones en las que se realizan traducciones entre sistemas con agrupamientos distintos al decimal, en las que en lugar de efectuar el desarrollo polinómico, se multiplica la cantidad por la base correspondiente; (c) en operaciones con agrupamientos distintos al decimal se mantienen los esquemas de llevadas del sistema decimal; (d) en situaciones de expresar la cantidad con agrupamientos diversos, no se realizan transferencias entre órdenes distintos. Entendemos que la condición de economía en la representación, por la que es obligado utilizar las unidades de orden superior al sobrepasar en un orden el número de unidades que indica la base, no recibe la atención que debiera en los procesos didácticos correspondientes.

REFERENCIAS

CONTRERAS, L. C., CARRILLO, J. ZAKARIAN, D., MUÑOZ-CATALÁN, M. C. y CLIMENT, N. (2012). Un estudio exploratorio sobre las competencias numéricas de los estudiantes para maestro. *Bolema, 26(42B),* 433-457.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006a). El análisis didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57-77). Huesca, España: Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006b). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics, 26*(2), 10-15.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2006c). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA, 1*(1), 21-31.

GALLARDO, J. *y* GONZÁLEZ, J. L. (2007). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números, 66,* 1-8.

GALLARDO, J. y GONZÁLEZ, J. L. (2011). On understanding and interpretation in mathematics: an integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 26*. Retrieved from http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html.

GALLARDO, J., GONZÁLEZ, J. L., y QUISPE, W. (2008). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME,* 11(3), 355-382.

GONZÁLEZ, J. L. (1998). Didactical analysis: a non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.) *Proceedings of the First Conference of the European Society in Mathematics Education (Vol. II*, pp. 245-256). Osnabrück, Alemania: CERME.

GONZÁLEZ, J. L., ORTIZ, A. L. y GALLARDO, J. (2012). Avances en el estudio de la comprensión del sistema de numeración decimal en estudiantes del Grado de Maestro de Educación Primaria. En A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 303-316). Baeza, España: SEIEM.

ORTIZ, A. L. (1999). *Comprensión del Sistema de Numeración Decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado.* Memoria de Tercer Ciclo no publicada. Universidad de Málaga, España.

ORTIZ, A. L., GONZÁLEZ, J. L. y GALLARDO, J. (2011). Comprensión del sistema de numeración decimal en estudiantes del Grado de Primaria. En M. Marín y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 309-378). Ciudad Real, España: SEIEM.

FENOMENOLOGÍA Y REPRESENTACIONES EN LA *ARITHMETICA PRACTICA* DE JUAN DE YCIAR

Phenomenology and representations in the *Arithmetica practica* of Juan de Yciar

Alexander Maz-Machado[a], Carmen López[b], Modesto Sierra[b]
[a]Universidad de Córdoba, [b]Universidad de Salamanca

Resumen

Juan de Yciar además de ser un reputado caligrafista europeo del siglo XVI también publicó una obra matemática cuyo propósito era brindar herramientas aritméticas básicas a los comerciantes. En este trabajo presentamos un análisis de la fenomenología y los tipos de representaciones expuestas en su obra. Para el análisis se ha recurrido a la técnica del análisis de contenido y conceptual que ya hemos utilizado en investigaciones anteriores. Destaca la amplia variedad de ejemplos con problemas cotidianos para los comerciantes y la incorporación de tablas y gráficas, si bien son muy semejantes a las publicadas en otros libros matemáticos contemporáneos pero sin la riqueza conceptual de la obra de, por ejemplo, Kobel en 1608.

Palabras clave: Fenomenología; Historia de la Educación Matemática; Libros de texto; Siglo XVI.

Abstract

Juan de Yciar besides being a renowned calligrapher sixteenth century European mathematics also published a work whose purpose was to provide basic arithmetic tools to traders. In this paper we present an analysis of the phenomenology and the types of representations presented in his work. The analysis has used the technique of conceptual content analysis we have used in previous research. Highlights the wide variety of examples with everyday problems for traders and the incorporation of tables and figures although very similar to those published in other contemporary mathematician's books but without the conceptual richness of the work of such Kobel in 1531.

Keywords: *History of mathematics education; Phenomenology; Sixteenth century; Textbooks.*

Maz-Machado, A., López, C. y Sierra, M. 82013). Fenomenología y representaciones en la Arithmetica Practica de Juan de Yciar. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 77-84). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

La historia de la matemática va ligada a la Educación Matemática cuando entra en juego la intencionalidad de su difusión y enseñanza a lo largo de la historia. Hasta hace poco tiempo los libros eran el único instrumento de transmisión del conocimiento matemático en el contexto educativo. Por ello, el estudio de los libros antiguos de matemáticas ofrece una inmejorable ventana para conocer no solo el tratamiento de los conceptos matemáticos en su época. También lo es para estar al tanto de la actividad intelectual de una sociedad, así como las modas y tendencias pedagógicas imperantes en ciertas regiones o países. Por lo tanto, la investigación histórica en Educación Matemática es importante por cuanto permite descubrir y sacar a la luz momentos, situaciones, instituciones, personajes o temas que, en un momento dado, han significado un cambio de rumbo y un avance tanto para la historia de las matemáticas como para la Educación Matemática (Maz y Rico, 2013). En esta disciplina son muchos los trabajos a nivel internacional y español en los que el estudio de los manuales antiguos es el eje central de la investigación (Gómez, 2011; Schubring 1988).

Por otra parte, asumimos que la fenomenología considera los problemas o cuestiones básicas a las que da respuesta un determinado concepto matemático, así como las situaciones usuales en las que estas cuestiones se plantean (Rico, Lupiañez, Marín y Gómez, 2008). Esta fenomenología se hace evidente en los ejemplos y actividades que se presentan en un manual de matemáticas (Maz y Rico, 2009a). Las representaciones son los modos en los que los conceptos se hacen presentes, es decir, las distintas formas que el autor emplea para hacerlos visibles a los lectores.

En este trabajo analizamos una obra matemática del siglo XVI publicada en España, centrando la atención en la fenomenología y las representaciones que el autor hace explicitas en ella. Para ello utilizaremos una metodología entrada en el análisis de contenido y conceptual ya empleada en otros trabajos previos (Maz y Bracho, 2013; Maz y Rico, 2009a; Maz y Rico 2009b).

Juan de Yciar

Juan de Yciar nace en Vizcaya en la villa de Durango entre 1522 y 1523 (Alzugaray y Aguirre, 1988; De Echegaray, 1907; Martínez y Criado, 1993). No se halla información sobre la fecha precisa de su muerte. Durante su juventud se traslada a Zaragoza.

En 1549 publica en Zaragoza su *Recopilación Subtilissima Intitulada Orthographia Pratica,* en la que da reglas para aprender a escribir correctamente. En esta obra deja su impronta pedagógica, donde se declara enemigo de que a los alumnos se les hiciera ejercitar solamente la memoria. Entre 1549 y 1596 la *Ortographia*, fue objeto de diez ediciones (con diferentes títulos).

Su conocimiento de la *Geometría* de Durero le sirvió para tomarla como modelo para practicar y mejorar la escritura de la letra antigua a través de los trazos geométricos.

Esto se observa en la muestras de *Casos de Compás con su Geometría,* escritas en 1547 y muestras de *Letras de Compás para Iluminadores* (De Echegaray, 1907).

En 1549 publica su *Arithmetica Practica*. Cuando tenía más de cincuenta años se consagra al sacerdocio y en 1575 recibe las órdenes sacerdotales, pasando a partir de entonces el resto de sus días en la ciudad de Logroño.

La Arithmetica practica

La *Arithmetica Practica muy vtil y provechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar* (De Yciar, 1549), se publica en la ciudad de Zaragoza el 16 de febrero de 1549 en la casa de Pedro Bermúdez, a costa del autor y de Miguel de Suelves, alias Çapila, mercader de libros. Tiene unas dimensiones de 19 por 28,9 cm y consta de 4 páginas sin numerar y 56 numeradas (ver Figura 1).

Figura 1. *Arithmetica Practica*

El libro se compone de cinco partes, la primera trata de la cuenta castellana y la componen nueve capítulos. La segunda parte corresponde a las progresiones y la componen tres capítulos. La tercera parte trata de la regla de tres y está compuesta por un apartado. La cuarta parte trata de la regla de compañía y está distribuido por preguntas, que plantea el autor y a las que da respuesta. La quinta parte está dedicada a los quebrados. También agrega unos apartados sobre raíces cuadradas, pesas y medidas de varios reinos de España.

El autor dedica dos páginas a la dedicatoria del libro a D. Juan de Fernández de Heredia Conde de Fuentes. Luego presenta una tabla con los contenidos de «tratado» (p. iii) que ocupan otras dos páginas. Dedica un folio a una composición poética destinada a los lectores del libro al reverso de la misma hay un retrato del propio de Yciar, realizado en buril y firmado IDV, firma que sir Henry Thomas (citado por Vindel, 1942) atribuye al grabador zaragozano Juan de Vingles.

Fenomenología

La fenomenología es un medio para organizar las ideas o los conceptos matemáticos y cuando está relacionada con el medio escolar y los procesos implicados en su enseñanza/aprendizaje, Puig (2001) afirma que es entonces cuando hay una fenonomenología didáctica. Este es el tipo de fenomenología presente en los manuales de matemáticas. Hallamos seis tipos de fenómenos o situaciones en la obra: contables, comerciales, de repartos, de medidas, geométricos y aritméticos.

- *Fenómenos contables*: se presentan asociados a problemas ganancias y perdidas.
- *Fenómenos comerciales*: se utilizan cuando son planteadas situaciones de compras y ventas de objetos o animales.
- *Fenómenos de repartos*: los hallamos cuando la situación planteada requiere de la distribución equitiva de objetos o cuando se requiere de la aplicación de la regla de compañía para distribuir la rentabilidad de un depósito o negocio.
- *Fenómenos de medida*: se recurre a ellos para hallar longitudes de objetos o para encontrar la equivalencia entre determinadas medidas utilizadas en regiones geográficas diferentes.
- *Fenomenos geométrico*: el autor recurre a ellos cuando establece cierta relación de utilidad de la raiz cuadrada para obtener valores a partir de áreas de poligonos.
- *Fenómenos aritméticos*: esencialmente se utilizan en la parte numérica y estan asociados con la operatividad de los números bajo determinadas operaciones aritméticas.

Representaciones

Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos (Rico, 2009). Es decir, los sistemas de representación permiten a un autor comunicar a los lectores usualmente de forma visual las ideas matemáticas que quiere tramsistir. A continuación se presentan las representaciones halladas en la *Artihmetica Practica* y se muestra un ejemplo:

***Verbales*:** el autor recurre mediante palabras a dar una serie de explicaciones sobre el concepto que quiere mostrar.

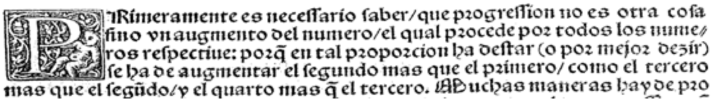

PRimeramente es necessario saber/que progression no es otra cosa sino vn augmento del numero/el qual procede por todos los nume/ros respectiue: porq̃ en tal proporcion ha destar (o por mejor desir) se ha de augmentar el segundo mas que el primero/ como el tercero mas que el segũdo/y el quarto mas q̃ el tercero. Muchas maneras hay de pro

Figura 2. *Representación verbal*

Numéricas: Se utilizan combinaciones de números para presentar las operaciones aritméticas.

Figura 3. *Representación numérica*

Gráficas: estas son abundantes en la obra. El autor recurre a cuatro tipos de representaciones gráficas diferentes a) las tabulares; b) figuras; c) geométricas; d) las mixtas.

Las gráficas tabulares presentan la información agrupada mediante tablas con valores numéricos. Se sirve de ellas para las tablas de multiplicar.

1	1 1	2 2	3 3	4 4	5 5	6 6	7 7	8 8	9 9
2	2 1	4 2	6 3	8 4	10 5	12 6	14 7	16 8	18 9
3	3 1	6 2	9 3	12 4	15 5	18 6	21 7	24 8	27 9
4	4 1	8 2	12 3	16 4	20 5	24 6	28 7	32 8	36 9
5	5 1	10 2	15 3	20 4	25 5	30 6	35 7	40 8	45 9
6	6 1	12 2	18 3	24 4	30 5	36 6	42 7	48 8	54 9
7	7 1	14 2	21 3	28 4	35 5	42 6	49 7	56 8	63 9
8	8 1	16 2	24 3	32 4	40 5	48 6	56 7	64 8	72 9
9	9 1	18 2	27 3	36 4	45 5	54 6	63 7	72 8	01 9

Figura 4. *Gráfica tabular*

Las gráficas de figuras son las más variadas y sirven para ilustrar el problema que se plantea.

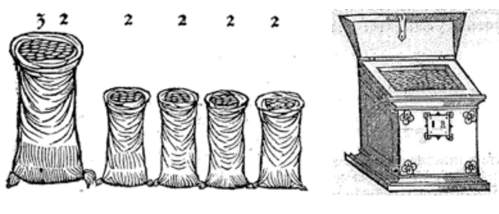


Figura 5. *Gráfica de figuras*

Las gráficas geométricas representan a polígonos básicos y sirven para delimitar regiones o áreas, pero siempre asociadas al proceso de extracción de raíces cuadradas.

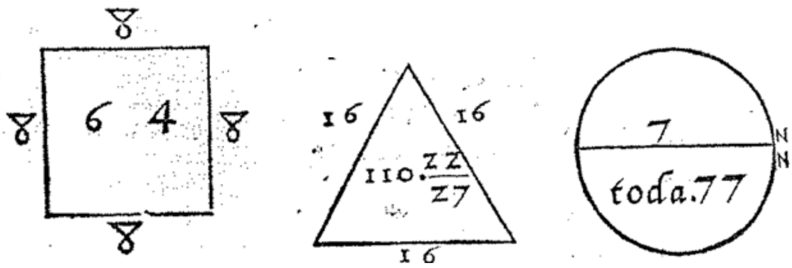


Figura 6. *Gráficas geometricas*

Las gráficas mixtas mezclan números con líneas o corchetes para indicar la dirección o el sentido de la operación, así como para agrupar pasos o procedimientos.

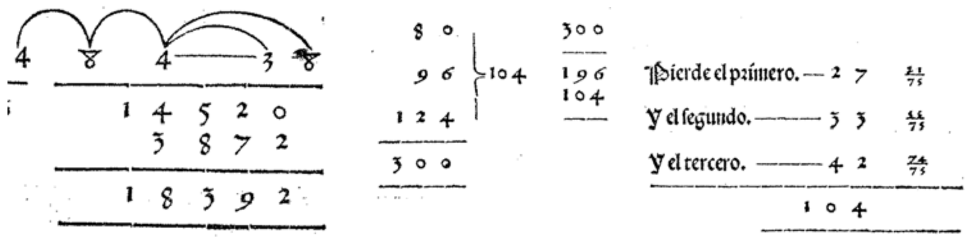


Figura 7. *Gráficas mixtas*

Las representaciones gráficas sirven además para ilustrar explicaciones de ciertos problemas, asi tenemos por ejemplo la Figura 8, la cual sirve para ilustrar una explicación de un problema de regla tres, en el que un cantero tiene una piedra cuadrada de cuatro varas de ancho y de alto por la que le pagan 20 ducados y quiere saberse cuanto costara una de 8 varas de largo y ancho.

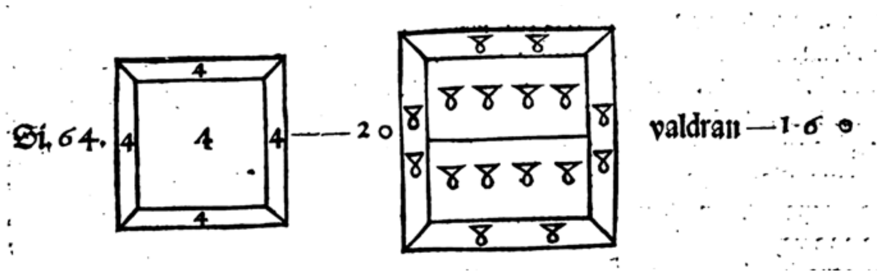


Figura 8. *Gráfica para ilustrar un problema*

Tambien se recurre a las gráficas para mostrar diferentes procesos algorítmicos para la multiplicación, así se presentan los métodos de celosía y de copa.

La obra de De Yciar tiene como propósito dotar de herramientas aritméticas básicas para quien desempeñe la labor de mercader. Esto se hace evidente si analizamos la semejanza y diferencia conceptual con respecto a otras obras matemáticas europeas publicadas en épocas cercanas a la suya. Por ejemplo, presenta un problema para hallar la altura de una torre (Figura 9, imagen izquierda), y las indicaciones para su solución es la aplicación del teorema de Thales aunque no lo menciona, porque solo pretende fomentar el uso de la raíz cuadrada. Esto es más elemental, si lo comparamos con un problema semejante publicado en 1531 en la *Geometry* de Kobel (Figura 9, imagen derecha), allí está implícita la medición de la altura de una torre usando cuadrantes, cuando no se puede medir la distancia.

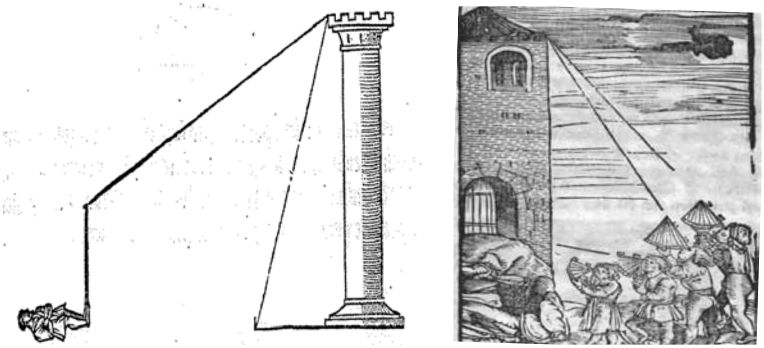


Figura 9. *Medición de la altura de una torre*

Conclusiones

De Yciar no fue un matemático como lo entenderíamos hoy, sino que es un erudito especialista en caligrafía que aprende matemática desde variadas fuentes como lo son Durero o Juan de Ortega, y pone esos conocimientos impresos en esta obra. La misma se distingue de otras de la época en la calidad de la impresión, los grabados y la distribución del contenido, otorgando los espacios necesarios a la parte matemática de manera que resultan visualmente armoniosos.

Su intencionalidad es escribir una obra con los rudimentos básicos de la aritmetica pero uilizando variados ejemplos y situaciones fenomenologicas de gran familiaridad para los comerciantes de la época: compras, ventas, ganancias, pérdidas, repartos, correspondencia de medidas entre diferentes regiones, etc. Para lograr una adecuada comprensión de lo que presenta recurre a diversos tipos de representaciones, con las cuales logra otorgar una imagen de actualidad y modernidad para las matemáticas de la época en España. Sería de interés realizar un análisis comparativo de esta obra con otras españolas contemporaneas escritas por matemáticos propiamente dichos.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada dentro del proyecto EDU2011-27168 del Plan Nacional de I+D+i (2008-2011) del Ministerio de Ciencia e Innovación de España.

Referencias

De Echegaray, C. (1907). Calígrafos vascongados: Juan de Icíar. Revista internacional de los estudios vascos= Eusko ikaskuntzen nazioarteko aldizkaria= Revue internationale des ètudes basques= *International Journal on Basque studies, RIEV, 1*(3), 242-248.

De Ycíar, J. (1549). Arithmetica practica muy vtil y provechoso para toda persona que quisiere exercitar se en aprender a contar. Zaragoza, España: Casa de Pedro Bermúdez.

Gómez, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA, 5*(2), 49-65.

Maz, A. y Rico, L. (2009a). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537-554.

Maz, A. y Rico, L. (2009b). Las liciones de Thomas Cerda: doscientos cincuenta años (1758-2008). *Suma, 60,* 35-41.

Maz, A. y Bracho, R. (2013). Acercamiento entre la Historia de las Matemáticas y la Educación Matemática mediante el análisis de contenido. En L. Rico, J. L. Lupiáñez, y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática.* Granada, España: Comares.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (en prensa). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos xviii y xix. *Relime*.

Puig, L. (2001). Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freundental. En H. Freudental (Ed.), *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas (textos seleccionados)* (pp. i-v). México DF: CINVESTAV.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Schubring, G. (1988). Discussions épistémologiques sur le statut des nombres négatifs et leur représentation das les manuels allemands et français de mathématique entre 1795 et 1845. En C. Laborde (Ed.), *Actes du premier colloque franco-allemand de didáctique des mathématiques et de l´informatique* (pp. 137-145). Paris, Francia: Editions La Pensée Sauvage.

Vindel, F. (1942). Escudos y marcas de impresores y libreros en España durante los siglos xv a xix (1485-1850): con 818 facsímiles. Madrid, España: Orbis.

LA RELACIÓN PARTE-TODO
Parte-whole relationship

Elena Castro-Rodríguez, Enrique Castro
Universidad de Granada

Resumen

La relación parte-todo es uno de los pilares a partir del cual construimos y damos sentido a un buen número de objetos matemáticos. Con este trabajo intentamos hacer un recorrido por algunos de los objetos matemáticos a los que sustenta y pretendemos poner de manifiesto de forma explícita esa fundamentación, mostrando ideas teóricas de cómo se produce la asignación de sentido. Nos referimos concretamente al modo en que la relación parte-todo se imbrica en el concepto de número natural, de cómo sustenta esquemas semánticos de los problemas de estructura aditiva y multiplicativa, de cómo es uno de los subconstructos de la fenomenología de las fracciones, y de cómo se halla en el origen de ciertas ideas de lo que podríamos denominar pensamiento prealgebraico.

Palabras clave: Esquemas semánticos; Pensamiento numérico; Relación parte-todo; Sentido numérico.

Abstract

The part-whole relationship is one of the pillars from which we construct and give meaning to many mathematical objects. In this paper we try to take a tour of some of the mathematical objects which sustains and try to show that reasoning explicitly showing how theoretical ideas allocation occurs meaningless. We refer specifically to how the part-whole relationship overlaps the concept of natural number, how schemata underlying problems of additive and multiplicative structure, how is one of the subconstructs of phenomenology of fractions, and of how it is at the origin of certain ideas of what might be called prealgebraic thought.

Keywords: *Number sense; Numerical thinking; Part-whole relationship; Semantic schema.*

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada, España: Editorial Comares.

> Probablemente el mayor logro intelectual de los primeros años escolares es la interpretación de los números en términos de las relaciones parte-todo. Empleando el esquema parte-todo para cuantificar, los niños pueden pensar los números como compuestos de otros números. Esto les proporciona una formación numérica que les faculta para resolver problemas y realizar interpretaciones que no están al alcance de niños más pequeños. (Resnick, 1983)

Un objetivo actual en los programas de matemáticas escolares es desarrollar el «sentido numérico» en los estudiantes, intentando prestar una atención equilibrada a las destrezas de cálculo, a la comprensión matemática y a la resolución de problemas. La profesora Castro (2006) lo considera un componente de la competencia matemática que los alumnos pueden adquirir desde la etapa de educación infantil y señala aspectos que pueden trabajarse en esta etapa. El sentido numérico es difícil de precisar, en términos generales se puede considerar como una red conceptual bien organizada de información numérica que nos faculta para comprender los números y las relaciones numéricas, así como para resolver problemas.

El desarrollo del sentido numérico se produce desde la más temprana escolaridad y se cimenta sobre el conocimiento informal que tienen los niños sobre las cantidades del mundo físico y sus relaciones. Este conocimiento se desarrolla, en principio, mediante actividades con materiales manipulativos y, con ellos, adquieren una forma de pensar que Resnick (1992) denomina razonamiento protocuantitativo, dado que es un razonamiento sin números. Resnick distingue formas de razonamiento protocuantitativas básicas a las que denomina esquemas protocuantitativos. Partiendo de esta idea, se han realizado un buen número de investigaciones que consideran la hipótesis de que en la base del sentido numérico se encuentran tres tipos de esquemas protocuantitativos: el de aumento-disminución, el esquema parte-todo y el esquema de comparación (Resnick, 1992). A partir de estos esquemas, el autor sugiere que se contruyen los conocimientos aritméticos de los niños. Investigaciones posteriores han centrado su atención en el sentido numérico y su relación con diversas actividades de carácter matemático relativas a estos tres tipos de esquemas protocuantitativos, así como sus implicaciones para la resolución de problemas. Los esquemas protocuantitativos los entienden como conocimiento informal de cantidades en el mundo físico.

Las teorías cognitivas han postulado que los esquemas son mecanismos mentales útiles para organizar la información que nos llega del entorno y juegan un papel fundamental en el pensamiento y en la resolución de problemas. Un ejemplo es el esquema parte-todo, que se encuentra presente en la comprensión del número y las operaciones, así como en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos. El esquema parte-todo posee una componente lógica sustentada en la relación parte-todo, que es una parte esencial del razonamiento aritmético y prealgebraico.

La relación parte-todo

La naturaleza de la relación parte-todo es problemática, su estudio formal lo realiza la mereología, como ciencia de las relaciones entre la parte y el todo. Fue objeto de atención en los inicios de la filosofía y su estudio ha sido, y continúa siendo, un tema recurrente a lo largo de la historia. Los primeros que trataron el tópico de las partes y el todo fueron los filósofos de la antigua Grecia, los presocráticos, continuando a través de los escritos de Platón, Aristóteles y los Escolásticos que abordaron cuestiones fundamentales que aún hoy son importantes, como la caracterización del «todo» y las «partes», o las relaciones entre ellos. En los inicios del siglo veinte, Husserl (1900-1901/1985) se ocupó de los conceptos de «parte» y «todo» en su *Tercera Investigación Lógica*. El objetivo era analizar la relación parte-todo, omnipresente en nuestros conceptos y prácticas lingüísticas. La moderna mereología comienza con Lesniewski (1927-1931/1992), quien construye el primer sistema formal de mereología fundamentado en la relación «ser parte de». La mereología surgió contemporáneamente y con el mismo espíritu que la lógica moderna, uno de sus objetivos era la de proveer una fundamentación de la matemática mediante un desarrollo estricto de la relación parte-todo. Cercana a la concepción de Frege, la mereología constituiría una teoría referida a las propiedades de entidades reales. Los problemas que se plantean en torno a esta teoría afectan a diversos campos científicos como la Lingüística, la Psicología, la Computación, o la Antropología.

Todo, parte y relación

La caracterización formal de la relación parte-todo no es simple, pues en el lenguaje cotidiano los términos todo y parte presentan diversos significados, no todos ellos de interés para este trabajo. En primer lugar consideramos como «todo» aquella cantidad que tomamos como dato de partida y «parte» a cada una de las cantidades P_i en que el todo puede romperse o fragmentarse real o metafóricamente, pudiendo afirmar que algo puede ser considerado parte de una totalidad si es o ha sido poseído por dicha entidad. En matemáticas, no se entiende un todo sin partes, ni una parte sin todo «no se llamará a ninguna cosa todo a no ser que tenga partes» (Russell, 1973, p. 504). Es importante comprender la diferencia entre un todo y sus partes. Un todo es una entidad distinta de cada una de sus partes y de todas ellas, se relaciona con ellas pero tiene un ser distinto a ellas. Cuando un todo T, se fragmenta o divide en n partes P_i, con $1 \leq i \leq n$, se afirma que el todo es la unión de sus *n* partes, $T = \bigcup_{i=1}^{n} P_i$. Cada una de esas partes P_i presenta una determinada relación con el todo: $R(P_i, T)$.

Clasificación de las relaciones parte-todo

Las teorías mereológicas han realizado diversas clasificaciones de las relaciones parte-todo desde distintas perspectivas. La realizada por Gerstl y Pribbenow (1995) cubre varios dominios ontológicos y está realizada desde un punto de vista constructivo, es decir, cada relación representa una manera diferente de realizar la partición del todo. Para ello utiliza dos criterios alternativos: a) el todo posee a priori una estructura de partes, y b) las partes se construyen de manera temporal mediante la aplicación de un criterio externo al todo.

En el primer tipo de relaciones parte-todo, el todo posee una estructura a priori y las partes están integradas en esa estructura. Por ejemplo, una casa tiene una estructura previa de habitaciones, un libro está constituido por capítulos. Gerstl y Pribbenow distinguen tres tipos de relaciones parte-todo de acuerdo a la estructura previa de partes que posee el todo: elemento-colección, cantidad-masa y componente-complejo (Figura 1).

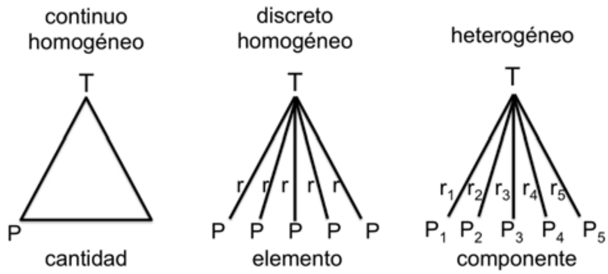


Figura 1. *Tipos de relaciones cuyos todos presentan estructura de partes*

El segundo tipo de relaciones parte-todo surgen de tener en cuenta criterios que se utilizan en un momento dado para establecer una división del todo en partes de manera temporal. El criterio puede ser interno al todo o bien externo.

La relación parte-todo en aritmética

La relación entre la parte y el todo ha jugado un papel fundamental en el desarrollo de las matemáticas (Bell, 2004). Esta relación se encuentra en los principios fundamentales sobre los que se desarrollan los *Elementos de Euclides,* concretamente en el apartado «nociones comunes». La quinta noción común afirma que «el todo es mayor que la parte», que sería rechazada posteriormente por George Cantor en su teoría de los cardinales, y sería sólo válida para los cardinales finitos, que es sobre la que están construidos los números naturales.

El trabajo de Cantor y el de sus coetáneos intenta fundamentar la matemática desde un punto de vista lógico, en el que tiene importancia la relación parte-todo y su estrecha conexión con la relación de inclusión. La relación de inclusión forma parte de la teoría de conjuntos, aunque la relación esencial en la teoría de conjuntos es la relación «ser elemento de». La relación parte-todo y, por ende, la relación de inclusión son objeto de atención preferente de las teorías merológicas, que tratan de desentrañar y clarificar su esencia.

La relación parte-todo conlleva considerar que los números naturales están constituidos por dos o más partes y su dominio es uno de los mayores logros a alcanzar con los niños en sus primeros años de escolaridad. Según Piaget, el niño construye el concepto de número a través de la integración de dos tipos de relaciones, el orden y la inclusión jerárquica, esta última es un caso de relación parte-todo, en el que cada número debe ser concebido como una componente de los números siguientes (Figura 2).

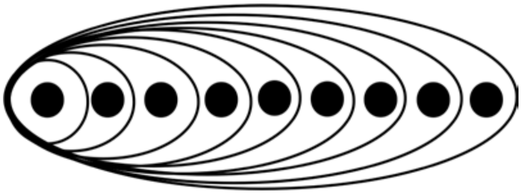


Figura 2. *Inclusión jerárquica de los primeros números*

Mediante tareas de inclusión de clases, Piaget puso de manifiesto las dificultades que entraña para los niños el dominio de esta relación. Los niños pueden dividir mentalmente un todo en partes, pero el todo deja de existir en el momento en el que ha sido dividido, pudiendo pensar en las partes, pero no en el todo y las partes a la vez. Para comparar el todo con una parte, el niño ha de hacer dos acciones opuestas de forma simultánea, dividir el todo en partes y reconstruir el todo, ésta habilidad no sé consigue hasta la edad de 7 u 8 años. Cuando el niño establece este tipo de relaciones parte-todo, su pensamiento se hace reversible, y como resultado construye la estructura lógico-matemática del número.

La relación parte-todo aditiva

En aritmética, la relación parte-todo aditiva tiene lugar, o se establece, entre dos cantidades de una misma magnitud, pero con la condición de que la cantidad que hace de parte esté incluida física o mentalmente en la cantidad que actúa como el todo, es decir, $P \subset T$. De manera implícita, se está considerando otra parte que es complementaria de la dada con respecto al todo. Esta relación se puede representar en distintos niveles de generalidad y con distintos tipos de diagramas, que representan en forma simbólica la relación aditiva $P+P=T$ (Figura 3).

El conocimiento de la relación parte-todo constituye la base para comprender y resolver tareas como completar expresiones numéricas (eg., 5 +__= 9 ò __− 3=7) y resolver problemas de estructura aditiva de combinación parte-todo, en los que dos partes se combinan para formar un todo o hay que hallar una parte cuando se conoce el todo y la otra parte.

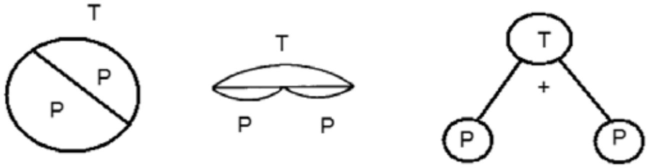


Figura 3. *Distintos diagramas de la relación parte-todo aditiva*

La relación parte-todo aditiva no se reduce a considerar el caso en el que un todo se divide en dos partes complementarias, también un todo puede estar compuesto por tres o más partes. Si un todo se descompone en tres partes, $T=P_1+P_2+P_3$, la reconstrucción del todo se puede hacer de dos maneras: $(P_1+P_2)+P_3$ o bien $(P_1+P_2)+P_3$, lo que en el lenguaje de Resnick (1992) es un conocimiento protocuantitativo previo de la propiedad asociativa de la suma de números naturales.

La relación parte-todo multiplicativa

El caso más general de la relación aditiva es considerar un todo dividido en n partes ($T=\sum_{1\leq i\leq n} P_i$), lo que nos lleva al caso especial de que todas las partes sean iguales. En este caso notamos cada parte como P y tenemos que $T=\sum_{1\leq i\leq n} P_i=nP$. A las situaciones en las que se da esta relación las denominamos de grupos repetidos y constituye un conocimiento que sirve de base para la introducción de la multiplicación de números naturales como suma repetida.

En una relación parte-todo multiplicativa distinguimos dos relaciones numéricas: una directa R(T, P) en la que se trata de obtener el todo como composición de partes iguales, y su inversa R(P, T), en la que a partir de un todo debemos descomponerlo en partes iguales. Esta relación inversa es fructífera desde un punto de vista matemático, dando lugar a los conceptos de división partitiva y de división cuotitiva, por un lado, y de fracción por otro.

La relación directa la expresamos $T = nP$, con P parte unitaria, donde n expresa la relación entre el todo y cualquiera de sus partes unitarias: $R(T, P) = n$. Cuando consideramos la relación inversa $P=\frac{1}{n}T$, entonces la fracción $\frac{1}{n}$ expresa la relación entre cada parte P y el todo T: $R(P,T)=\frac{1}{n}$. Esta relación entre P y T se expresa diciendo que P es parte enésima unitaria de T.

En la estructura multiplicativa encontramos un caso especial donde la relación parte-todo adquiere especial relevancia, las fracciones. Las fracciones surgen en una relación multiplicativa parte-todo como el modo de expresar la relación entre una parte y el todo del que procede. De este modo. los niños comienzan el aprendizaje de las fracciones en términos de las partes que componen un todo. Diversos investigadores, como

Behr, Lesh, Post y Silver (1983), Freudenthal (1983) o Kieren (1976), han considerado esta relación como base del conocimiento de las fracciones y, por consiguiente, de los números racionales. Estos autores utilizan el término subconstructo u otros similares para referirse a distintas interpretaciones o significados de los números racionales, entre las que se encuentra la relación parte-todo a la que le asignan un papel primordial.

El subconstructo parte-todo depende directamente de la habilidad de partir una cantidad continua o un conjunto de objetos discretos en partes iguales o subconjuntos de igual tamaño. El concepto inicial de fracción emerge de la aplicación de unos mecanismos intuitivos, en particular el proceso de partición en cantidades continuas o discretas, y destaca la identificación de la unidad o todo. El concepto de totalidad como algo que se descompone, recompone y convierte ha sido el fundamento de la relación parte-todo y un factor que unifica a los otros subconstructos de los números racionales.

CONEXIONES PREALGEBRAICAS

Kilpatrick, Swafford, y Findell, (2001) discuten el tipo de pensamiento que los estudiantes desarrollan en programas aritméticos tradicionales a diferencia del que se requiere para el estudio del álgebra: Los programas de aritmética ponen su foco de atención en el cálculo y no favorecen el aspecto relacional de las operaciones. Linsell y cols. (2007) recogen estas ideas para dar recomendaciones sobre la conexión entre la aritmética y el aprendizaje inicial del álgebra. Le otorgan gran importancia a los aspectos relacionales de la aritmética en el aprendizaje del álgebra. Citemos como ejemplo la idea que adquieren los niños del signo igual como un cálculo a realizar cuando trabajan con expresiones como $5 + 7=$___, en vez de concebirlo como una relación de igualdad o de equivalencia (Molina, Castro y Castro, 2009). Para facilitar el paso de la aritmética al algebra, los escolares deben realizar actividades de uno y otro tipo para no quedarse anclados en la interpretación del signo igual como indicador de cálculo. Íntimamente ligado a esto está el considerar las ecuaciones como un proceso en lugar de un objeto que hay que transformar. Cuando los escolares se enfrentan por primera vez con ecuaciones del tipo $2\times4+3=x$ pueden pensar que una ecuación es un proceso aritmético que hay que llevar a cabo. Esta idea la extrapolan a otro tipo de ecuaciones, como $4x + 8 = 20$, e intentan resolverla mediante un proceso aritmético de ensayo y error para hallar x.

Si bien los escolares pueden resolver ecuaciones del tipo $x + 4 = 9$ mediante estrategias aritméticas de ensayo y error, propuestas curriculares como la *New Zealand Number Framework* (Ministry of Education, 2003) subrayan que esto puede resultar más fácil para los escolares que apliquen ideas de la relación parte-todo. En esta propuesta se recomienda que, para resolver ecuaciones del tipo $3x = 12$ se utilicen ideas ligadas a la relación multiplicativa parte-todo. Linsell y cols. (2006) aseguran que sólo los estudiantes que han dominado las relaciones parte-todo de carácter multiplicativo son capaces de resolver ecuaciones siguiendo el proceso formal de invertir las operaciones.

Referencias

BELL, J. L. (2004). Whole and part in mathematics. *Axiomathes, 14*, 285-294.

BEHR, M., LESH, R., POST, T. y SILVER E. (1983). Rational number concepts. En R. Lesh y M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York, NJ: Academic Press.

CASTRO, E. (2006). Competencia matemática desde la infancia. *Rev. Pensamiento Educativo, 39*(2), 119-135.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

GERSTL, P. y PRIBBENOW, S. (1995). Midwinters, end games, and bodyparts: a classification of part-whole relations. *International Journal of Human-Computer Studies, 43*(5-6), 865-889.

HUSSERL, E. (1900-1901/1985). *Investigaciones lógicas*. Madrid, España: Alianza.

KIEREN, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. En R. Lesh (Ed.), *Number and measurement* (pp. 101-144). Columbus, OH: ERIC/SMEAC.

KILPATRICK, J., SWAFFORD, J. y FINDELL, B. (Eds.). (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.

LESNIEWSKI, S. (1927-1931/1992). On the foundations of mathematics. En S. J. Surma, J. T. Srzednicki, D. I. Barnett y V. F. Rickey (Eds.), *Collected Works*. Dordrecht, Holanda: Kluwer,

LINSELL, C., SAVELL, J., JOHNSTON, N., BELL, M., MCAUSLAN, E. y BELL, J. (2007). *Early algebraic thinking: links to numeracy*. Wellington, Nueva Zelanda: Teaching and Learning Research Initiative.

MINISTRY OF EDUCATION. (2003). *The number framework*. Wellington, Nueva Zelanda: Autor.

MOLINA, M., CASTRO, E. y Castro, E. (2009). Elementary student's understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 341-368.

RESNICK, L. B. (1983). A developmental theory of number understanding. En H. P. Ginsburg (Ed.), *The development of mathematical thinking* (pp. 109-151). New York, NJ: Academic Press.

RESNICK, L. B. (1992). From protoquantities to operators: building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis de arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

RUSSELL, B. (1903/1982). *Los principios de la Matemática*. Madrid, España: Espasa Calpe.

BLOQUE 2

DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA

DIFICULTADES Y USO DE RECURSOS ALGEBRAICOS DE ESTUDIANTES PARA MAESTROS DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Difficulties and use of algebraic resources of primary education teachers' students

Martín M. Socas, M.ª Mercedes Palarea y Josefa Hernández
Universidad de La Laguna

Resumen

Presentamos en este capítulo un estudio sobre recursos algebraicos que utilizan alumnos del Grado de Maestro en Educación Primaria y analizamos las dificultades que tienen cuando resuelven tareas que implican operaciones, estructuras y procesos algebraicos. El análisis y discusión de los datos de las diferentes producciones de los estudiantes se realizan mediante las categorías que derivan de las componentes: Competencia Matemática Formal, para el análisis del contenido de las tareas (Socas, 2012), y Competencia Cognitiva, para el análisis de las dificultades y errores de los alumnos (Socas, 1997). Encontramos que el recurso habitual es hacer uso de las operaciones algebraicas en cualquier tarea y que este predominio de lo operacional emerge como dificultad para el pensamiento algebraico.

Palabras clave: Álgebra; Dificultades y errores; Formación de profesores.

Abstract

In this chapter we present a study about algebraic resources used by Primary Teaching Degree students. We analyze the difficulties they have for solving tasks where the operations, structures and algebraic processes are implicated. The data analysis and discussion for different productions of students were done by the categories derived from the components: Mathematical Formal Competence, for tasks content analysis (Socas, 2012), and Cognitive Competence, for analysis of pupil's difficulties and errors (Socas, 1997). We found that the habitual resource is the use of the algebraic operations for any task and this operational predominance appears as a difficulty for the algebraic thought.

Keywords: *Algebra; Difficulties and errors; Training teachers.*

Socas, M. M., Palarea, M. M. y Hernández, J. (2013). Dificultades y uso de recursos algebraicos de estudiantes para maestros de educación primaria. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 95-102). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

El estudio de los conocimientos matemáticos de los estudiantes para profesores de Matemáticas de Primaria, ha sido un trabajo básico en la Universidad de La Laguna, en los últimos diez años. Estudios que tienen como objetivo obtener información que permita mejorar los programas de Matemáticas y Didáctica de las Matemáticas para los Títulos de Maestro, que partan del conocimiento real de los alumnos y que permitan desarrollar actitudes positivas hacia la Matemática. La investigación se planteó como un análisis del bagaje matemático de los alumnos, a partir de los datos obtenidos a través de pruebas en forma escrita de contenido matemático básico. El trabajo trataba sobre preguntas relativas a conceptos y procedimientos matemáticos elementales que normalmente se dan por conocidos.

Después de varios estudios piloto, una prueba general de Matemáticas del nivel de la ESO se pasó a 883 alumnos de siete universidades españolas en el curso 2001-2002, obteniéndose una puntuación media de 26.4 sobre 49 puntos de máximo, con un recorrido entre 5 y 47 puntos. Los resultados mostraron de nuevo enormes deficiencias de los alumnos que inician los estudios para maestros en conocimientos básicos de Matemáticas. Los estudios posteriores no mejoran los resultados obtenidos anteriormente, encontrándose en estos últimos trabajos que los alumnos tienen un predominio del conocimiento operacional frente al estructural y procesual, y que es este conocimiento el que subyace, mayoritariamente, en la resolución de cualquier tarea matemática, muchas veces, sin éxito, incluso cuando el conocimiento operacional aplicado es correcto.

Estos resultados ponen de manifiesto que el énfasis que la enseñanza de las Matemáticas pone en el conocimiento operacional, está creando dificultades y obstáculos al alumno en la aplicación, por ejemplo, de heurísticos y estrategias en la resolución de situaciones problemáticas que están más asociadas a un pensamiento estructural e incluso procesual.

El trabajo que se presenta se sitúa en el estudio sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas y se analizan las dificultades y el uso de recursos algebraicos de estudiantes para Maestros de Educación Primaria. Trata de obtener respuestas a las preguntas siguientes: 1) ¿Qué recursos: operaciones, estructuras y procesos, usan los estudiantes cuando se enfrentan a diversas situaciones problemáticas de naturaleza algebraica?, 2) ¿Qué dificultades tienen los estudiantes? y 3) ¿Cuál es el origen de los errores?

Marco conceptual

El marco conceptual que utilizamos para el análisis y discusión de los datos de las diferentes producciones de los estudiantes, se sustenta en los modelos de Competencia Matemática Formal, para el análisis del contenido de las tareas (Socas, 2012) y Competencia Cognitiva para el análisis de las dificultades y errores de los alumnos (Socas, 1997), que propone el Enfoque Lógico Semiótico (Socas, 2007).

La Competencia Matemática Formal (CMF) es considerada como un referente fundamental del análisis del contenido, y se describe para los tres campos conceptuales: numérico, algebraico y analítico, desde la perspectiva disciplinar, tomando como ejemplo el campo conceptual algebraico.

En Socas (1997) se establecen cinco procedencias diferentes de las dificultades que tienen los alumnos en la construcción del conocimiento matemático y éstas están relacionadas con la complejidad de los objetos de las Matemáticas, las especificidades de los procesos de pensamiento matemático, los procedimientos de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las Matemáticas, los procesos de desarrollo cognitivo de los alumnos, y las actitudes afectivas y emocionales hacia las Matemáticas.

La propuesta de formación de los estudiantes para profesor de Matemáticas en la educación obligatoria (Socas y Hernández, 2013), es una propuesta global desde una perspectiva profesional, que pretende facilitar un acercamiento desde el conocimiento matemático disciplinar, al conocimiento matemático curricular, al conocimiento didáctico matemático y al conocimiento de la práctica educativa, mediante una propuesta que va desde la globalidad general del currículo y del conocimiento matemático disciplinar implicado, a la totalidad organizada de un contenido curricular como contenido para enseñar.

Las consideraciones anteriores, sobre los conocimientos matemáticos de los estudiantes para profesores y los resultados de la investigación en Educación Matemática sobre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), lleva a considerar que los conocimientos y competencias para la organización de los contenidos matemáticos, desde la perspectiva disciplinar, necesitan en los estudiantes para profesores una revisión de la disciplina en términos de unas «Matemáticas» para formarlos profesionalmente, que mejore, no sólo sus conocimientos matemáticos sino sus creencias sobre la finalidad de estos conocimientos en la Educación Obligatoria, teniendo en cuenta el conocimiento del profesor de Matemáticas, considerado como conocimiento profesional (Hill, Ball y Schilling, 2008).

Metodología

En el plan de formación de los estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria en la Universidad de La Laguna, se imparte una materia de Matemáticas para profesores de 6 créditos en 2.º curso, seguida de dos materias de Didáctica de la Matemática (14 créditos), que se cursan en 3.º, en las que se tiene como objetivo una necesaria reconceptualización de las Matemáticas para la profesión de Maestros. Se completa la formación con una materia optativa de Innovación e Investigación Curricular (4.5 créditos) que se cursa en 4.º.

Los datos obtenidos en este trabajo han sido extraídos de las respuestas de los estudiantes a diferentes instrumentos: cuestionarios e informes. En concreto, en este trabajo consideramos dos cuestionarios, de los que sólo analizamos las respuestas relativas al

Álgebra. Uno, el que cumplimentaron antes de iniciar la materia de Matemáticas para Maestros, en el curso 2011-12, con el fin de tener un diagnóstico de sus conocimientos básicos en Matemáticas. Otro, el que realizaron en el curso 2012-13, antes de empezar las materias de didáctica del contenido matemático. Las respuestas a este segundo cuestionario, permiten valorar el uso que hacen los estudiantes de los recursos algebraicos, antes y después de un curso de Matemáticas.

El tercer instrumento utilizado lo constituyen los informes individuales que realizan los estudiantes y que tienen como punto de partida el segundo cuestionario. A partir de las respuestas dadas al mismo y de las preguntas sin respuesta, los alumnos hacen un informe sobre las dificultades que han tenido en ellas, las justificaciones a las respuestas correctas; los diferentes recursos: operaciones, estructuras y procesos utilizados en las respuestas, el origen de los errores cometidos y el porqué de las preguntas incompletas o en blanco.

El primer cuestionario se administró a 194 alumnos, de estos se seleccionaron 30, que asisten a clase regularmente en 3.º y cumplimentaron los informes. Vamos a considerar los datos relativos a varios de estos alumnos (que citaremos como F, J, V, C, A y E).

El contenido de las tareas algebraicas de los cuestionarios es analizado previamente desde la competencia matemática mediante el modelo de CMF, lo que facilitará el análisis de las respuestas de los estudiantes. En este modelo de análisis se considera que en un problema están implicados en general ocho tipos de conocimientos: C1: Conocimiento lingüístico, C2: Conocimiento semántico, C3: Conocimiento de la estructura del problema, C4: Conocimiento de las representaciones, C5: Conocimiento de los razonamientos, C6: Conocimientos operacionales, C7: Conocimientos conceptuales y C8: Conocimientos procesuales, que se relacionan entre sí y que generan dificultades al resolutor. Las preguntas del cuestionario están diseñadas para obtener, respectivamente, una posible respuesta procesual, estructural u operacional, pero ello no garantiza que ésta sea la respuesta del alumnado, ya que éste está condicionado por los significados y por las funciones que este lenguaje le sugiere, de manera que tratamos de observar en las diferentes situaciones los tipos de conocimientos que utilizan.

Datos

Mostramos a continuación el análisis de las respuestas al problema 29, cuyo enunciado se da posteriormente. Es una actividad que responden correctamente todos los seleccionados menos el alumno J que lo deja en blanco.

C1. El enunciado lo entienden correctamente, no muestran dificultad con las expresiones «menos que», «3 veces más que». C2. No hay términos o palabras que ofrezcan dificultad. C3. Comprenden la estructura de la situación problemática, considerándolo un problema de traducción del lenguaje habitual al algebraico. C4. Muestran conocimiento adecuado de la representación algebraica. C5. Utilizan una deducción lógica, van representando mediante letras la expresión de cada una de las personas hasta llegar a decidir cuál es la expresión que le corresponde. También puede entenderse que van eliminando aquellas expresiones que no coinciden con el razonamiento que van haciendo. C6. Uso correcto de variable y expresión algebraica. Uso correcto del paréntesis. C7. Concepto de variable y de expresión algebraica. C8. Sustitución formal: Realizan una traducción correcta del lenguaje habitual al lenguaje algebraico.

Por ejemplo, el alumno F es capaz de traducir correctamente del lenguaje habitual al algebraico, como podemos observar en la Figura 1, incluyendo el uso de la propiedad conmutativa y sustituciones de variables. Otros como V necesitan razonar con la letra x, para identificar la expresión, como se muestra en la Figura 2.

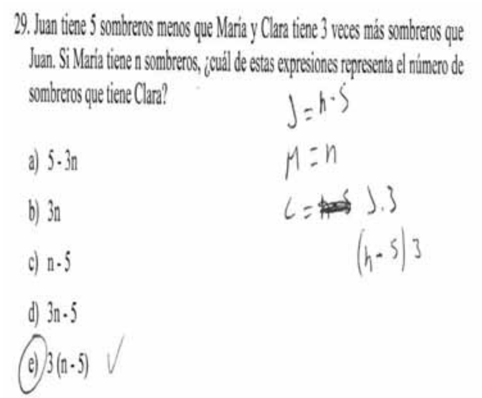


Figura 1. *Respuesta del estudiante F*

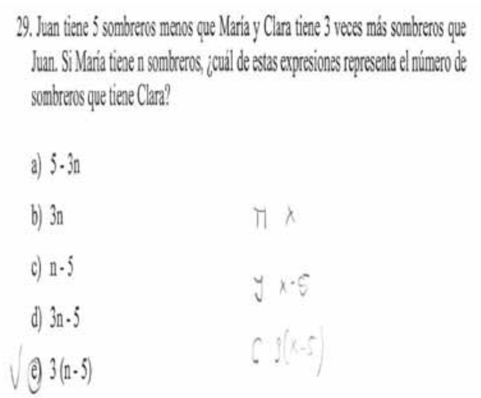


Figura 2. *Respuesta del estudiante V*

El estudiante C realiza razonamientos como los que se expresan en la Figura 3.

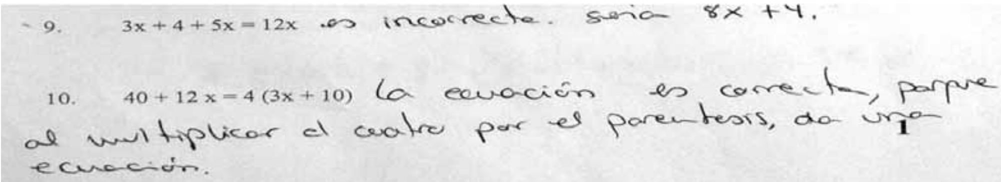
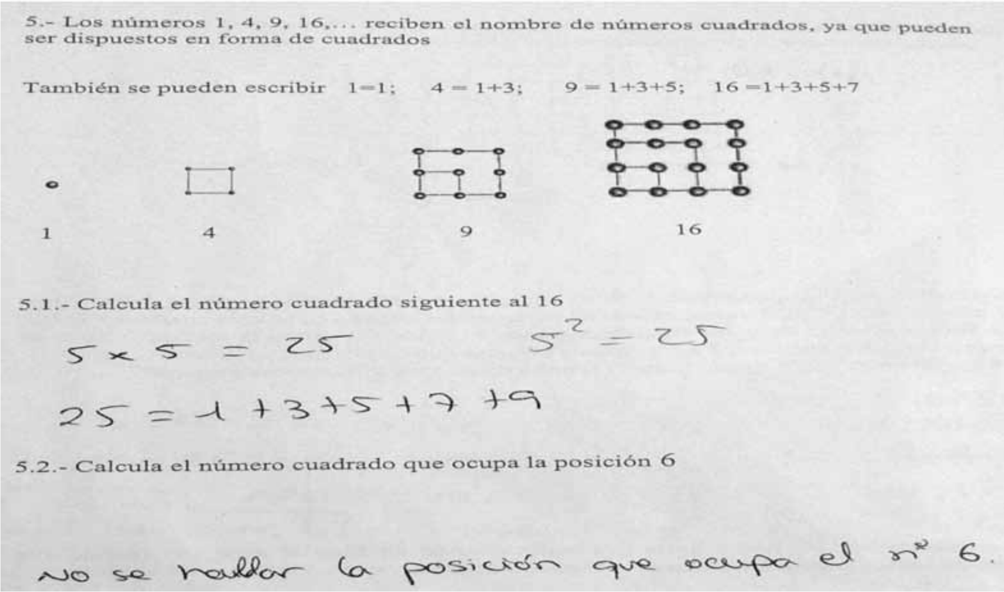


Figura 3. *Razonamiento del estudiante C*

El estudiante J no comprende en el problema 5 expresiones como: «ocupa la posición 6», «ocupa la posición 20», siendo incapaz de expresar la regla y generalizar, como se ve en la Figura 4.



5.- Los números 1, 4, 9, 16,... reciben el nombre de números cuadrados, ya que pueden ser dispuestos en forma de cuadrados

También se pueden escribir 1=1; 4 = 1+3; 9 = 1+3+5; 16 =1+3+5+7

1 4 9 16

5.1.- Calcula el número cuadrado siguiente al 16

$5 \times 5 = 25$ $5^2 = 25$

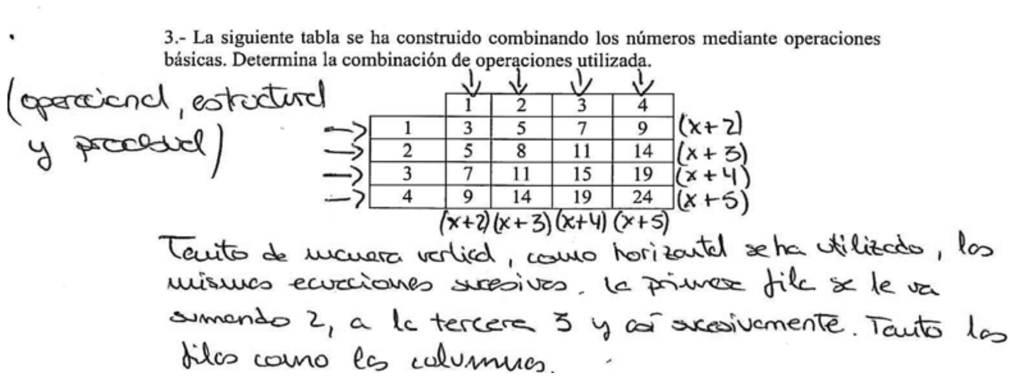
$25 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

5.2.- Calcula el número cuadrado que ocupa la posición 6

No se hallar la posición que ocupa el nº 6.

Figura 4. *Trabajo del estudiante J*

El estudiante A, por ejemplo, solo es capaz de encontrar relaciones recursivas por filas o columnas, para el problema 3 de generalización del cuestionario 2, como se observa en la Figura 5.



3.- La siguiente tabla se ha construido combinando los números mediante operaciones básicas. Determina la combinación de operaciones utilizada.

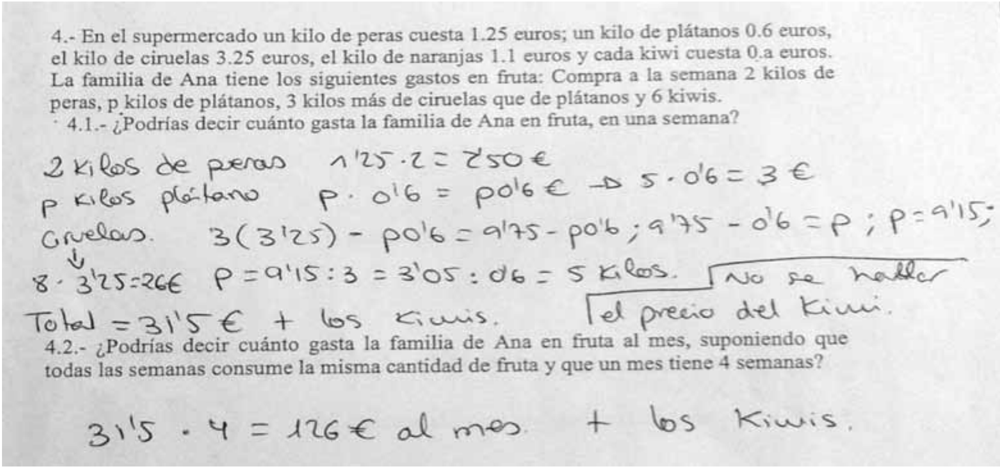
(operacional, estructural y procedual)

	1	2	3	4	
1	3	5	7	9	(x+2)
2	5	8	11	14	(x+3)
3	7	11	15	19	(x+4)
4	9	14	19	24	(x+5)
	(x+2)	(x+3)	(x+4)	(x+5)	

Tanto de manera vertical, como horizontal se ha utilizado, los mismos ecuaciones sucesivas. La primera fila se le va sumando 2, a la tercera 3 y así sucesivamente. Tanto las filas como las columnas.

Figura 5. *Trabajo del estudiante A*

El estudiante E, necesita convertir el problema de modelización en una ecuación que no puede establecer para encontrar el precio del kiwi, dejando algunos apartados sin responder, como se expresa en la Figura 6.



4.- En el supermercado un kilo de peras cuesta 1.25 euros; un kilo de plátanos 0.6 euros, el kilo de ciruelas 3.25 euros, el kilo de naranjas 1.1 euros y cada kiwi cuesta 0.a euros. La familia de Ana tiene los siguientes gastos en fruta: Compra a la semana 2 kilos de peras, p kilos de plátanos, 3 kilos más de ciruelas que de plátanos y 6 kiwis.

4.1.- ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta, en una semana?

2 kilos de peras   1'25 · 2 = 2'50 €
p kilos plátano   p · 0'6 = p0'6 € → 5 · 0'6 = 3 €
Ciruelas.   3(3'25) - p0'6 = 9'75 - p0'6 ; 9'75 - 0'6 = p ; p = 9'15;
8 · 3'25 = 26€   p = 9'15 : 3 = 3'05 : 0'6 = 5 kilos.   No se hallar
Total = 31'5 € + los kiwis.   el precio del kiwi.

4.2.- ¿Podrías decir cuánto gasta la familia de Ana en fruta al mes, suponiendo que todas las semanas consume la misma cantidad de fruta y que un mes tiene 4 semanas?

31'5 · 4 = 126 € al mes + los kiwis.

Figura 6. *Trabajo del estudiante E*

Consideraciones finales

Los estudiantes tienen dificultades en todos los aspectos que caracterizan al campo conceptual algebraico, no tienen un conocimiento estructural del Álgebra, la abordan siempre desde el conocimiento operacional. Tienen dificultades en el conocimiento procesual, por ejemplo en la sustitución formal que tratan, en el mejor de los casos, haciendo una sustitución en un cálculo, despejando la incógnita en una ecuación, etc. Igualmente en los procesos de generalización y modelización. Sus puntos fuertes son en apariencia el conocimiento operacional pero cometen muchos errores que atribuyen, en general, por un lado a la ausencia de sentido y por otro, a dificultades afectivas y emocionales, que describen, en unos casos, como excesiva confianza y, en otros, como miedo y desánimo. En relación con los conocimientos matemáticos implicados en las diferentes preguntas de los dos cuestionarios encontramos que:

No presentan dificultades en la comprensión lingüística del enunciado, excepto en las expresiones *«posición 5», «posición 20» del número cuadrado* (actividad 5, 2.º cuestionario) que manifiestan no entender lo que significa, y en la traducción al lenguaje algebraico de *3 kilos más de ciruelas que de plátanos*» (actividad 4, 2.º cuestionario). No hay ninguna palabra, matemática o no, que expresen que no sepan lo que significa. En general, saben identificar la estructura del problema, aunque luego no tengan los conocimientos necesarios para resolverlos. No saben argumentar sus razonamientos, ni conocen heurísticos que les facilite la resolución de los problemas. Conocen la representación gráfica, numérica y algebraica. En los problemas propuestos tienen fallos operacionales: cuando se encuentran con una expresión algebraica, se ven obligados a convertirla en una ecuación, igualándola a cero, y a resolverla para obtener una solución. Tienen dificultades al hacer simplificaciones en las expresiones algebraicas: (a+b)

- (a-b) = $(a-b)^2$. Pocas veces hacen uso de alguna estructura (concepto o propiedades) para resolver problemas. Se pone de manifiesto que las mayores dificultades se dan en aquellos problemas que incluyen procesos. Los alumnos que tienen muchas dificultades, bien con la modelización (actividad 4, 2.º cuestionario), argumentando «*no lo pude resolver porque creía que necesitaba un resultado concreto y para ello me faltaban datos*», bien con la generalización. Por otra parte, la sustitución formal la tratan como una habilidad heurística asociada a un cambio de registro.

Los alumnos creen que muchos de sus errores tienen su origen en la ausencia de sentido sobre alguno de los objetos algebraicos que tratan, pero en general están asociadas a actitudes afectivas y emocionales, ya que se enfrentan a los problemas de Matemáticas con una actitud negativa. El predominio del conocimiento operacional, erróneo o no, que ponen de manifiesto, «*el pensamiento operacional es el que más utilizo para responder a estos cuestionarios*», es un resultado coincidente con los de trabajos anteriores en el campo numérico y en la resolución de problemas.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: «Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación» (EDU2011-29324).

Referencias

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, *39*(4), 372-400.

Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Socas, M. M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. En M. Camacho, P. Flores y M. P. Bolea (Eds.), *Investigación en educación matemática* XI (pp. 19-52). Tenerife, España: SEIEM.

Socas, M. M. (2012). El análisis del contenido matemático en el Enfoque Lógico Semiótico (ELOS). Aplicaciones a la investigación y al desarrollo curricular en Didáctica de la Matemática. En D. Arnau, J. L. Lupiáñez y A. Maz (Eds.) (2012), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática*-2012 (pp. 1-22). Valencia, España: SEIEM.

Socas, M. M. y Hernández, J. (2013). Mathematical problem solving in training elementary teachers from a semiotic logical approach. *The Mathematics Enthusiast, 10*(1 y 2), 191-218.

LA REPRESENTACIÓN DE CANTIDADES MEDIANTE SEGMENTOS LINEALES PARA RESOLVER PROBLEMAS DE ÁLGEBRA ELEMENTAL

Representation of quantities using linear segments to solve elementary algebra problems

Francisco Fernández y José Luis Lupiáñez
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo presentamos un método gráfico para resolver problemas algebraicos mediante el uso de segmentos de recta. Además, describimos parte de una investigación en la que se diseña un material para un aula de Secundaria y en donde los escolares logran un alto rendimiento al resolver problemas algebraicos verbales usando este método.

Palabras clave: Álgebra elemental; Representación gráfica; Resolución de problemas.

Abstract

In this work we present a graphic method for solving algebraic problems by using segments. In addition, we summarize partially a research and we propose a didactical activity for a secondary classroom in which students show a high performance in solving algebraic word problems by using this method.

Keywords: *Elementary algebra; Graphic representation; Solving problems.*

Introducción

El uso del álgebra, en Matemáticas y en otras disciplinas, es de gran utilidad para representar situaciones e ideas complejas utilizando un sistema de signos universal, convirtiéndose así en un instrumento valioso para desenvolverse exitosamente en distintas áreas de conocimiento, así como en la vida cotidiana. Su presencia en diferentes propuestas curriculares para Educación Obligatoria (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006; NCTM, 2000), pone de manifiesto su importancia en el desarrollo de la competencia matemática de los escolares. Sin embargo, el aprendizaje del álgebra es problemático

Fernández, F. y Lupiáñez, J. L. (2013). La representación de cantidades mediante segmentos lineales para resolver problemas de álgebra elemental. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 103-110). Granada, España: Editorial Comares.

desde que se inicia en los primeros cursos de Educación Secundaria. Aunque para el profesor de matemáticas el paso de la aritmética al álgebra así como las reglas y el lenguaje algebraico, suelen ser una tarea fácil de comprender y aplicar, generalmente el estudiante de secundaria no concibe dicho proceso como elemental y mucho menos rutinario (Kieran, 2004). Fernández (1997) describe como una dificultad constante el hecho tradicional de considerar el álgebra como generalización de la aritmética, a pesar de que en ocasiones las operaciones algebraicas contradicen las reglas aritméticas.

Por otra parte, la utilización de la resolución de problemas como metodología de enseñanza ha sido, y sigue siendo en la actualidad, un campo importante de estudio en la Didáctica de la Matemática: desarrollándose teorías al respecto (Brousseau, 1997), considerando la resolución de problemas como un eje en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas (Schoenfeld, 1998; NCTM, 2000; Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) y valorando también su papel en el desarrollo de la competencia matemática de los escolares (Rico y Lupiáñez, 2008).

Para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y, en particular, para el álgebra, consideramos como elemento esencial la resolución de problemas. Por una parte, las matemáticas y sus aplicaciones a otras áreas tienen como principal objetivo la resolución de problemas (OECD, 2012). Por otra, históricamente el desarrollo de las matemáticas ha tenido grandes avances en el momento en que han sido utilizadas para resolver algún problema determinado.

Los sistemas de representación en el álgebra escolar

El uso de distintos tipos de representaciones y sus relaciones para comunicar y para hacer matemáticas ha sido un tema ampliamente estudiado y discutido por numerosos especialistas (Castro y Castro, 1997; Duval, 1999; Stacey y McGregor, 2000), como un factor clave en el aprendizaje de esta disciplina.

El uso de diversos tipos de representaciones ligadas a un mismo objeto matemático, no sólo implica la comprensión de cada una de ellas por separado, considerando cuáles son las propiedades y procedimientos ligados al concepto que se hacen presentes en ella y cuáles no; también aparece la necesidad de poder traducir de un tipo de representación a otro los objetos matemáticos, para poder asegurar la comprensión y aprendizaje de dichos objetos. Adoptamos el término *sistema de representación* propuesto por Fernández (1997) como «conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, dotado de reglas y convenios, que permite expresar determinados aspectos y propiedades de un concepto» (p. 73). La traducción entre sistemas de representación ha sido caracterizada diferenciando dos procesos: el *tratamiento* (transformación efectuada dentro de un mismo sistema de representación) y la *conversión* (consiste en la transformación de un sistema de representación a otro) (Duval, 1999).

Fernández (1997) también propone una clasificación detallada de sistemas de representación para la resolución de problemas algebraicos elementales en donde se pueden diferenciar tipologías de resolutores por el sistema de representación utilizado en la resolución de estos problemas. Esta clasificación, que ha sido replicada y ratificada en estudios posteriores (Espinosa, 2004), muestra un continuo desde aquellos sistemas de representación más numéricos a aquellos que pueden ser considerados más simbólicos y formales (ver Figura 1).

Figura 1. *Sistemas de Representación (Fernández, 1997)*

Según este continuo, el sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema intermedio entre ambos extremos. Permite la representación de procesos de traducción aritméticos y procesos de traducción algebraicos (Cerdán, 2008), por lo que se puede considerar como un puente que permite pasar de un tipo de proceso de traducción a otro.

Método Geométrico – Lineal (MGL)

Dentro los sistemas de representación gráficos, uno de los más sofisticados es el denominado *Método Geométrico – Lineal* (MGL). Se trata de un método gráfico, basado en utilización de segmentos para representar cantidades, como una alternativa para resolución de problemas de álgebra elemental. Consideramos que se utiliza en la resolución de problemas algebraicos, cuando se establecen relaciones lineales entre los datos y las incógnitas contenidas en el enunciado del problema mediante segmentos de recta, de tal forma que:

- — Se representan las incógnitas por segmentos cualesquiera de diferentes longitudes (en caso de haber varias incógnitas).
- — Se elige, de forma explícita o implícita, un segmento de longitud unidad.
- — Los datos se representan mediante segmentos de longitud proporcional al segmento unidad.
- — Se establecen gráficamente, mediante segmentos, las relaciones contenidas en el enunciado entre las cantidades conocidas (datos) y las desconocidas (incógnitas).
- — La resolución del problema pasa por determinar las longitudes (referidas a la unidad elegida) de los segmentos que representan a las incógnitas y hacer la traducción, mediante la proporción ya establecida, a las cantidades inicialmente desconocidas.

Al hablar de «relaciones lineales» nos referimos a relaciones que darían origen a una ecuación de primer grado. Definimos también una *Relación Gráfica Lineal* (RGL) como un segmento de recta sobre el que se representan diversas cantidades de una magnitud (conocidas y desconocidas) y la dependencia lineal entre ellas, a partir de las condiciones descritas por el enunciado del problema.

En la Figura 2 se observa que en la traducción del enunciado verbal del problema, inicialmente se han utilizado dos segmentos: sobre uno se representa «el doble del número disminuido en tres unidades» y sobre el otro, «el número aumentado en siete unidades». Se continúa la resolución comparando ambos segmentos para conseguir su «igualdad gráfica». Se utilizan dos RGL para la producción del texto intermedio.

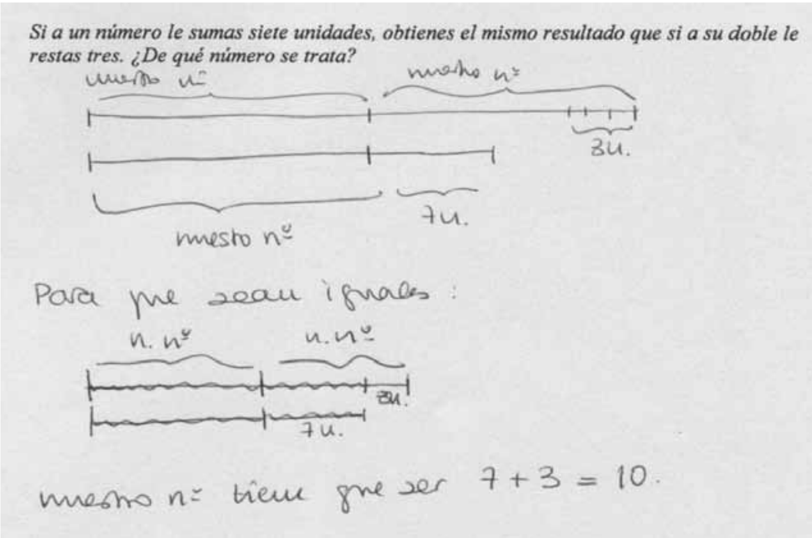


Figura 2. *Ejemplo de resolución de un problema algebraico usando MGL*

El MGL en la resolución de problemas algebraicos

A continuación presentamos parte de una investigación centrada en elaborar, aplicar y analizar un material docente centrado en el uso del MGL como método de resolución de problemas algebraicos para estudiantes de los dos primeros cursos de ESO (Martínez, 2006).

Descripción del material

El material consta de siete fichas de trabajo que se pueden emplear al comienzo del tema de «álgebra y funciones», ya sea de 1º o 2º de ESO (Martínez, Fernández y Flores, 2011). Las tres primeras fichas tienen por objetivo introducir la utilización de segmentos como forma de representación gráfica y las cuatro siguientes se centran en la resolución de problemas utilizando el MGL (fichas 4 y 6) y su posterior «traducción» al lenguaje algebraico (fichas 5 y 7). En este trabajo nos centraremos en la aplicación de las fichas 4 y 6.

La ficha 4 incluye problemas que se pueden resolver utilizando, como mínimo, una RGL, mientras que los problemas de la ficha 6 se pueden resolver empleando dos RGL como mínimo y, como el resto del material, se centran en la representación de cantidades desconocidas y en la resolución gráfica de problemas (ver Figura 3). Cada listado de problemas viene precedido de la consigna «resuelve los siguientes problemas gráficamente usando segmentos de recta».

a) Si al triple de un número le quitas 13 unidades, obtienes 86. ¿Cuál es el número?
b) La suma de un número con su doble y su mitad da 42. ¿Cuál es el número?
c) Un alumno dedica, todos los días, las 4/11 partes de su tiempo de estudio a repasar matemáticas y los 70 minutos restantes a las demás materias. ¿Cuánto tiempo necesita para repasar todas las materias? ¿Cuánto tiempo pasa estudiando matemáticas?
d) En una tienda tienen rebajada la ropa de invierno. Luis observa unos pantalones que están rebajados un 20% y cuestan 18 euros. ¿Cuánto valían antes de efectuarse el descuento?
e) En un examen de matemática, la sexta parte de los alumnos obtuvo notable o sobresaliente, la cuarta parte bien, la mitad suficiente y 10 suspendieron. ¿Cuántos alumnos realizan el examen?
f) Si a un número le restas 15 y el resultado lo divides entre 3, obtienes 20, ¿De qué número se trata?

a) Halla un número tal que su doble aumentado en una unidad sea igual a su triple disminuido en 3 unidades.
b) Calcula tres números naturales consecutivos, sabiendo que su suma es igual al cuádruplo del menor.
c) Al sumarle a un número 60 unidades, se obtiene el mismo resultado que al multiplicarlo por 5. ¿Cuál es el número?
d) Compro 5 bolígrafos y me sobran 2 euros. Si hubiera necesitado comprar 9 bolígrafos, me habría faltado un euro. ¿Cuánto cuesta un bolígrafo? ¿Cuánto dinero llevo?
e) Dos depósitos tienen igual capacidad. Estando llenos de agua, de uno de ellos se sacan 2000 l. y del otro 9000 l. quedando en el primero doble cantidad de agua que en el segundo. ¿Cuál es la capacidad de los depósitos?
f) Luis tiene 45 años y su hijo Alejandro 25 años. ¿Hace cuántos años la edad de Alejandro era la mitad de la edad de su padre?

Figura 3. *Enunciados de los problemas de las fichas 4 (superior) y 6 (inferior)*

Aplicación del instrumento

La aplicación se realizó en cinco aulas: tres de 2º de ESO y dos de 1º de ESO, en distintas localidades de la provincia de Granada, completando un total de 102 estudiantes. Para el análisis se seleccionaron aquéllos que trabajaron con las 7 fichas que componen el material, por lo que la muestra analizada está compuesta por 82 sujetos.

Análisis y resultados

Para poder realizar el análisis estadístico de la información se codificaron numéricamente los datos a partir de las variables consideradas. Los sujetos se codificaron numéricamente, desde 01 a 82; los problemas *4a* a *4f* para la ficha 4 y *6a* a *6f* para la ficha 6.

Se realizaron tres análisis de frecuencias simples: Porcentaje de respuestas correctas e incorrectas en la resolución del problema y fase de resolución; porcentaje de empleo del MGL por problema en la fase de planteamiento y ejecución, y porcentaje de utilización, correcta o no del MGL por problema en esa misma fase. Además, en cada uno de los tres análisis se realizó un resumen de la frecuencia obtenida para cada tipo de respuesta en cada etapa. Finalmente, también se describieron los resultados obtenidos para detallar de qué forma se utilizó el MGL en los distintos tipos de resoluciones de los estudiantes. A continuación resumimos los resultados del primer análisis.

Análisis de resultados correctos por problema y fase de resolución

En la Tabla 1 mostramos un resumen de las frecuencias porcentuales obtenidas en cada uno de los problemas para cada una de las fases, considerando si se llevaron a cabo de forma correcta o no, omitiendo las respuestas en blanco en las fases de planteamiento y ejecución.

Tabla 1. *Frecuencia de resoluciones correctas/incorrectas por fases de resolución.*

Problema	Corrección por fases					
	Planteamiento		Ejecución		Desempeño final	
	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto	Incorrecto	Correcto
4a	15,8	70,7	7,3	62,2	40,2	59,8
4b	40,2	41,5	22,0	28,0	72,0	28,0
4c	4,9	65,8	4,9	63,4	37,8	62,2
4d	18,3	68,3	18,3	56,1	52,4	47,6
4e	15,9	73,2	11,0	73,2	26,8	73,2
4f	23,2	59,8	11,0	64,6	35,4	64,6
6a	17,1	74,4	2,4	56,1	59,8	40,2
6b	50,0	36,6	6,1	40,3	67,1	32,9
6c	15,9	74,4	11,0	64,6	39,0	61,0
6d	34,1	54,9	17,1	28,1	73,2	26,8
6e	29,3	37,8	13,4	32,9	69,5	30,5
6f	61,0	24,4	19,5	45,1	45,1	54,9

A partir de estos datos, podemos concluir que en la mayoría de los problemas, el porcentaje de sujetos que plantea correctamente es alto. Destacan los problemas *4a*, *4e*, *6a* y *6c* en los que se obtuvo un porcentaje de planteamientos correctos superior al

70%. Precisamente los problemas en los que se obtuvo menor porcentaje de planteamientos correctos (*4b*, *6b*, *6e* y *6f*) son, junto al *6d*, los que registran menor porcentaje de ejecuciones correctas. En el problema *6d* el porcentaje de planteamientos correctos baja considerablemente en la fase de ejecución, bajando del 55% al 28%.

Llama también la atención que el problema *6f* tiene un porcentaje muy bajo de planteamientos correctos (24,4%), pero aumenta el porcentaje de los que han realizado la fase de ejecución correcta, superando el 50% los estudiantes que llegan finalmente a un resultado correcto. En la fase de desempeño final, seis de los doce problemas (*4b*, *4d*, *6a*, *6b*, *6d* y *6e*) obtienen un porcentaje bajo de resultados correctos, inferior al 50%. Finalmente, los problemas *4b*, *6b* y *6e* destacan por haber tenido bajo nivel de corrección en las tres fases y el problema *4e* es el único que tiene cierta estabilidad con un alto porcentaje (73,2%) de los sujetos que desarrollaron las tres etapas correctamente.

Comentarios finales

Como aporte central destacamos la caracterización de un método gráfico para la resolución de problemas, que definimos como Método Geométrico Lineal. Para su definición, se han tomado como base métodos tradicionales de resolución de problemas en matemáticas, como son el Análisis-Síntesis y Método Cartesiano, lo que ha permitido entender la utilización del MGL como una herramienta valiosa en el contexto del área (Martínez, Fernández y Flores, 2009). La elaboración de un material para el aula ha permitido hacer operativo el método, a través de las fichas de trabajo y junto con un protocolo de actuación, que ha sido validado, tanto desde la teoría, como desde la práctica. Aún así, consideramos que este instrumento no está cerrado ni acabado sino que, de acuerdo al análisis de los resultados, puede mejorarse con nuevas aportaciones.

En cuanto a la definición del MGL, puesto que los problemas que se abordan en los textos escolares (para 1º y 2º de ESO) consideran la utilización sólo de números positivos, hemos definido el MGL para trabajar en $\Re_0^+$. Para ampliar el campo numérico y trabajar con todos los reales, es necesario ampliar la definición considerando la utilización de segmentos orientados. En cualquier caso, la relevancia de este método se encuadra perfectamente en la organización de contenidos y finalidades que se trabajan en España en Educación Secundaria Obligatoria.

Referencias

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95 – 122). Barcelona, España: Horsori.

Cerdán, F. (2008). *Estudio sobre la familia de problemas Aritméticos – Algebraicos.* Valencia, España: Server de Publicacions de la Universitat de València.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Universidad del Valle.

ESPINOSA, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

FERNÁNDEZ, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

KIERAN, C (2004). The core of algebra: Reflections on its main activities. En K. Tacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (pp. 35-44). Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

MARTÍNEZ, M. (2006). *Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución mediante un modelo geométrico lineal.* Trabajo de investigación tutelado, Universidad de Granada, España.

MARTÍNEZ, M., FERNÁNDEZ, F. y FLORES, P. (2009). Sentido numérico en resolución gráfica de problemas de enunciado. En J. M. Cardeñoso y M. Peñas (Eds.), *Investigación en al aula de matemáticas. Pensamiento Numérico* (s/p). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática y Sociedad Andaluza de Educación matemática y Sociedad «Thales».

MARTÍNEZ, M., FERNÁNDEZ, F. y FLORES, P. (2011). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución de un modelo geométrico lineal. *Revista UNION, 25,* 43- 61.

MAYER, R. (1986). *Pensamiento, resolución de problemas y cognición.* Barcelona, España: Paidós.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE, 106*, 17158-17207.

NCTM (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*. París, Francia: Autor. http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

RICO, L. y LUPIÁÑEZ, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid, España: Alianza.

SCHOENFELD, A. (1998). Reflections on a curse in mathematical problem solving. En A. Schoenfeld, J. Kaput y E. Dubinski (Eds.), *Research in collegiate mathematics education* (Vol 7, pp. 81-113). Washington DC: American Mathematical Society.

STACEY, K. y MCGREGOR, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problems. *Journal of Mathematical Behaviour*, *18*(2), 149-167.

DE LO VERBAL A LO SIMBÓLICO: UN PASO CLAVE EN EL USO DEL ÁLGEBRA COMO HERRAMIENTA PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LA MODELIZACIÓN MATEMÁTICA

From verbal to symbolic: A key step in the use of algebra as a tool for problem solving and mathematical modelling

Susana Rodríguez-Domingo y Marta Molina
Universidad de Granada

RESUMEN

En este capítulo se analizan los resultados de investigaciones que informan sobre el proceso de traducción del sistema de representación verbal al simbólico. Recurrimos a la literatura para conocer qué se sabe sobre cómo los estudiantes abordan este proceso, las dificultades y errores que presentan, y sus posibles causas. De este modo contribuimos a las investigaciones interesadas en esta temática particular, y avanzamos en la comprensión de los complejos procesos de aprendizaje del simbolismo algebraico. La información aquí recogida también resulta de utilidad para informar la enseñanza del álgebra escolar.

Palabras clave: Lenguaje algebraico; Lenguaje verbal; Resolución de problemas; Simbolismo algebraico; Sistemas de representación.

ABSTRACT

In this chapter we analyze the results of previous studies about the process of translation from the verbal to the symbolic representation system. By looking at the literature we identify what is known about how students deal with this process, the difficulties and errors they present and their possible causes. In this way we contribute to research on this topic and advance on understanding the complex process of learning algebraic symbolism. The information here presented is also of use to inform school algebra teaching.

Keywords: *Algebraic language; Algebraic symbolism; Problem solving; Representation systems; Verbal language.*

RODRÍGUEZ-DOMINGO, S. y MOLINA, M. (2013). De lo verbal a lo simbólico: un paso clave en el uso del álgebra como herramienta para la resolución de problemas y la modelización matemática. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 111-118). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

Hasta hace poco más de dos décadas, en la investigación relativa a la enseñanza y aprendizaje del álgebra había una asunción implícita de que el pensamiento algebraico y, por tanto, el álgebra, sólo podía tener lugar ante la presencia del lenguaje simbólico (Sutherland, Rojano, Bell y Lins, 2001). Actualmente, se adopta una concepción más amplia del álgebra, incluyendo actividades que no necesariamente requieren del uso de simbolismo algebraico tales como el estudio de relaciones funcionales, la generalización y el estudio de patrones (Molina, 2009); no obstante esta componente del álgebra escolar sigue teniendo una presencia notoria en el currículo. Se destaca la utilidad del simbolismo algebraico para la comunicación y representación de conceptos matemáticos; siendo identificados ambos procesos como componentes de la competencia matemática a alcanzar por los escolares en la educación secundaria (NCTM, 2000). En este sentido el NCTM y los documentos curriculares vigentes en España (Boletín Oficial del Estado, 2006) señalan el papel del simbolismo algebraico como parte del lenguaje matemático que los estudiantes deben ser capaces de utilizar para expresar ideas matemáticas de forma precisa, comunicar su pensamiento matemático, analizar y evaluar el pensamiento matemático y estrategias, resolver problemas, y modelizar e interpretar fenómenos de las matemáticas y otras ciencias. Así mismo, se destaca como expectativa de aprendizaje de esta etapa, utilizar y moverse con fluidez entre diferentes representaciones de conceptos matemáticos.

Estas expectativas de aprendizaje relativas al dominio del simbolismo algebraico, junto a las críticas que a nivel internacional señalan la ausencia de significado en el aprendizaje algebraico adquirido por los estudiantes en su formación obligatoria (Kieran, 2007), entre otras razones, han motivado nuestro interés por el análisis del proceso de traducción entre los sistemas de representación verbal y simbólico. En este capítulo, atendemos únicamente a uno de los sentidos de dicho proceso de traducción y recurrimos a la literatura para conocer qué se sabe sobre cómo los estudiantes abordan este proceso, las dificultades y errores que presentan, y sus posibles causas. De este modo se contribuye a las investigaciones interesadas en esta temática, en particular algunas de las investigaciones que venimos realizando en la Universidad de Granada.

Traducción entre sistemas de representación

Un sistema de representación es un conjunto estructurado de notaciones, símbolos y gráficos, con reglas y convenios, que nos permiten expresar aspectos y propiedades de un concepto, teniendo presente que ningún sistema de representación agota por sí solo un concepto (Castro y Castro, 1997). La traducción entre sistemas de representación consiste entonces en reproducir el mismo «contenido» en otro sistema (Freudenthal, 1983); en transformar los conceptos y atributos representados en un sistema a los correspondientes conceptos y atributos en otro sistema, obteniendo una representación diferente a la de partida pero congruente en significado.

En este trabajo nos centramos en los sistemas de representación simbólico y verbal, los cuales se consideran frecuentemente para representar diferentes conceptos matemáticos. El primero de ellos se caracteriza por la expresión escrita de numerales, letras y signos característicos de la aritmética y el álgebra, mientras que el sistema de representación verbal está determinado por el uso del lenguaje cotidiano incluyendo, en ocasiones, terminología específica del lenguaje matemático académico (Cañadas, 2007). De este modo, un ejemplo de enunciado algebraico en representación verbal es «un número más su consecutivo es igual a otro número menos dos», siendo $x+(x+1)=y-2$ su correspondiente representación simbólica.

LOS PROCESOS DE TRADUCCIÓN: UNA MIRADA DESDE LA INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DEL ÁLGEBRA

Los estudios que atienden a los procesos de traducción en contextos algebraicos consideran en su mayoría los sistemas de representación tabular, gráfico y simbólico (Kieran, 2007). Dichos estudios evidencian que los estudiantes tienen dificultades para mantener la congruencia semántica que caracteriza estos procesos, aunque muestren comprensión de las representaciones inicial y final. Son escasas las investigaciones que centran su atención en la traducción entre el sistema de representación verbal y el simbolismo algebraico. La mayoría de ellas se localizan en el contexto de la resolución de problemas dado que una de las acciones a realizar al abordar un problema algebraico es pasar del enunciado verbal a su modelización con símbolos. En este contexto los estudiantes muestran resistencia a hacer uso del simbolismo algebraico, prefiriendo utilizar razonamientos de tipo aritmético (Kieran, 2007).

La traducción del sistema de representación verbal al simbólico es un proceso en el que los estudiantes de educación secundaria presentan numerosas dificultades (Cerdán, 2010; MacGregor y Stacey 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Wagner y Parker, 1993; Weinberg, 2007). Esto ha motivado el interés de algunos investigadores interesados en la didáctica del álgebra. La mayoría de los estudios realizados atienden a los errores más habituales puestos de manifiesto por los estudiantes, por medio de los cuales se intenta inferir el modo en que abordan esta tarea. En este apartado sintetizamos resultados de estas investigaciones, complementándolos con otros más recientes que indagan en factores que condicionan la dificultad de las traducciones entre representaciones.

Procesos de traducción por estudiantes de secundaria

Para realizar de forma exitosa traducciones, los estudiantes requieren comprender tanto las variables y las relaciones de dependencia mutua entre ellas descritas en el enunciado verbal, como las características sintácticas de la representación simbólica (Kaput, Sims-Knight y Clement, 1985), alternando entre formas sintácticas y semánticas de analizar las representaciones implicadas (Kaput, 1989). MacGregor y Stacey (1993) llaman la atención sobre la necesidad de que los estudiantes sean conscientes de que algunas relaciones fáciles de expresar mediante una representación verbal precisan de cierta reorganización antes de ser traducidas al simbolismo algebraico. En esta misma línea, Socas (1997) advierte de la mayor precisión del simbolismo algebraico frente al lenguaje verbal y de la posibilidad de lecturas secuenciales y no secuenciales de expresiones simbólicas.

A partir del análisis de resultados de estudios previos sobre procesos de traducción de enunciados algebraicos verbales a su expresión simbólica, MacGregor y Stacey (1993) identifican dos formas en que los estudiantes abordan esta tarea: (a) *traducción sintáctica*, es decir, procediendo de izquierda a derecha y traduciendo palabra por palabra o buscando palabras clave, sin atender al significado del enunciado verbal, o (b) *traducción semántica*, es decir, mediante una comparación estática, tratando de expresar el significado de la expresión a partir de la construcción de un modelo cognitivo de las relaciones matemáticas descritas en el enunciado dado.

Estudios recientes de Cerdán (2008, 2010) aportan detalles sobre las características de las traducciones de enunciados verbales realizadas por estudiantes de bachillerato. Se observa que (a) proponen diversidad de traducciones, (b) el número de cantidades contenidas en el enunciado verbal no coincide con el número de símbolos diferentes utilizados, (c) tienden a utilizar más letras del mínimo necesario, una de las cuales corresponde a la incógnita del enunciado, y (d) muestran preferencias comunes en la elección de las cantidades a ser representadas con una letra.

Errores en los procesos de traducción

Las investigaciones que han indagado en la traducción del sistema de representación verbal al simbólico por estudiantes de secundaria y bachillerato (Cerdán, 2008, 2010; MacGregor y Stacey, 1993; Rodríguez-Domingo, 2011; Weinberg, 2007), han reportado un alto porcentaje de fracaso en el desarrollo de esta tarea (variable entre 30% y 60% según el estudio). Uno de los errores más referidos es el denominado *error de inversión*, que consiste en representar la relación opuesta a la indicada. Dicho error conduce, por ejemplo, a traducir como 6S=P el enunciado verbal «hay 6 veces tantos estudiantes como profesores», utilizando la variable S para referir a los estudiantes y P para los profesores. Este error presenta una gran persistencia, siendo más frecuente cuando las variables implicadas tienen coeficientes diferentes a uno y cuando las letras utilizadas corresponden a las iniciales de las cantidades referidas en el enunciado verbal (Weinberg, 2007). También se ha identificado en enunciados con estructura aditiva (MacGregor y Stacey, 1993).

Cerdán (2008, 2010), Ruano, Socas y Palarea (2008) y Rodríguez-Domingo (2011) identifican otros errores partiendo de enunciados algebraicos representados verbalmente que en el caso de Cerdán y Ruano et al. están contextualizados y en el de Rodríguez-Domingo no. Los errores detectados por estos autores son similares, variando su frecuencia de presentación según el tipo de problema o la presencia o no de contexto. Se identifican errores de carácter aritmético como la confusión de operaciones o el uso inadecuado de paréntesis, errores en la completitud del enunciado construido (incompletos vs desmedidos), y errores derivados de las características propias del lenguaje algebraico entre los que destacan errores en el uso de las letras (ej., utilizan un símbolo para designar a más de una cantidad, designan con más de un símbolo a la misma cantidad), errores de particularización o generalización de alguno de los términos, y errores en la construcción de las expresiones debidos a la complejidad estructural de las mismas. Entre los errores más frecuentes destacan la confusión de las operaciones potenciación y producto, una interpretación incorrecta de la estructura del enunciado y la particularización de alguno de los términos del enunciado.

ORIGEN DE LOS ERRORES Y CONDICIONANTES DE LA DIFICULTAD DE LAS TRADUCCIONES

Los estudios referidos en los dos apartados anteriores permiten identificar posibles causas de los errores señalados: (a) se utiliza un procedimiento puramente sintáctico al abordar la traducción; (b) el estudiante elabora un modelo cognitivo basado en relaciones de comparación entre las variables en vez de un modelo basado en relaciones de igualdad; (c) el signo igual es considerado como indicador de una correspondencia o asociación; (d) los numerales son interpretados como adjetivos; (e) el estudiante no comprende el enunciado verbal debido a la compleja sintaxis del lenguaje verbal; y (f) el estudiante posee una limitada comprensión del concepto de variable y de las características sintácticas de los enunciados simbólicos.

Además de estos factores, los trabajos de Bossé, Adu-Gyamfi y Cheetham (2011) centrados en la identificación de elementos que dificultan los procesos de traducción según los tipos de sistemas de representación implicados, destacan la influencia de dos factores personales: la inclusión de traducciones intermedias y la experiencia previa del alumno en el tipo de traducciones en cuestión. En este sentido, cabe señalar que según estos autores la traducción del sistema de representación verbal al simbólico recibe una atención intermedia por los docentes, pues dedican la mayor atención a las traducciones de lo simbólico a lo gráfico y tabular, así como entre los sistemas gráfico y tabular. La presencia de información no explícita y de información irrelevante o confusa en los enunciados son otros condicionantes de la dificultad de las traducciones (Bossé et al., 2011), siendo mayor cuando la presencia de estos condicionantes es alta en la representación origen de la traducción y baja en la representación destino. Por tanto, las características de los sistemas de representación implicados en los procesos de traducción que estamos considerando (ver Tabla 1), justifican una dificultad alta.

Tabla 1. *Presencia de información en los sistemas de representación verbal y simbólico*

Características	Sistema de representación	
	Verbal (origen)	Simbólico (destino)
Presencia de información no explícita u omitida	Alta	Alta
Presencia de información irrelevante o confusa	Alta	Baja

La dificultad de este tipo de traducciones también puede estar influenciada por la presencia y tipo de contexto implicado en la representación verbal dada. Hasta el momento no existen evidencias claras sobre la naturaleza de esta influencia, pues si bien algunos trabajos la descartan (Wollman, 1983), la familiaridad del contexto es un factor reconocido en los procesos de resolución de problemas (Ambrose y Molina, en prensa) e incluso recomendado para dotar de significación concreta al lenguaje matemático (Gómez-Granell, 1989).

Conclusiones e implicaciones para la docencia

La traducción del sistema de representación verbal al simbólico por estudiantes de secundaria es una línea de investigación en la que las autoras de este capítulo venimos trabajando junto a las doctoras Encarnación Castro y María C. Cañadas, buscando comprender cómo los estudiantes abordan este proceso y desarrollan sus habilidades en relación al mismo. Los resultados de estudios previos sintetizados en este capítulo nos permiten avanzar en esta línea de investigación, y aportan implicaciones para la docencia. Hemos identificado dos formas prioritarias en las que los estudiantes abordan este proceso y limitaciones en las mismas que conducen potencialmente a errores. En particular, destacamos la importancia de conjugar (y promover desde la enseñanza) el desarrollo de un modelo cognitivo (matemático) con el análisis sintáctico de las representaciones al ejecutar una traducción. La existencia de contexto podrá ayudar a sustentar la construcción de dicho modelo cognitivo en un modelo previo de la situación descrita, de forma análoga a cómo los buenos resolutores abordan la resolución de problemas aritméticos (Hegarty, Mayer y Monk, 1995). En el caso de enunciados descontextualizados queda por indagar si la falta de contexto supone una limitación, induciendo con mayor frecuencia a traducciones sintácticas o condicionando la riqueza del modelo cognitivo construible por el estudiante o, en cambio, el conocimiento previo sobre relaciones cuantitativas del estudiante suple eficazmente el rol del contexto. En ambos casos, con o sin contexto, las dificultades detectadas en el proceso de traducción son altas, estando motivadas no sólo por el modo de abordar la traducción sino también por la comprensión del significado de las operaciones, de las características sintácticas de las expresiones aritméticas y algebraicas, y la comprensión de las variables. Las características de los sistemas de representación implicados justifican esta alta dificultad y, junto con los errores identificados, informan el diseño de propuestas de enseñanza que ayuden a incidir en dichas dificultades y contribuyan a que los errores más frecuentes se produzcan en menor medida. El análisis de los errores más comunes podrá también servir para que el propio alumnado reflexione sobre sus ideas erróneas.

Referencias

Ambrose, R. y Molina, M. (en prensa). Spanish/English bilingual students' comprehension of story problem texts. *International Journal of Science and Mathematics Education.*

Boletín Oficial del Estado (2006). *Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria*. (Vol. BOE Nº 5, pp. 677-773). Madrid, España: Ministerio de Educación y Ciencia.

Bossé, M. J., Adu-Gyamfi, K. y Cheetham, M. R. (2011). Assessing the difficulty of mathematical translations: synthesizing the literature and novel findings. *International Electronic Journal of Mathematics Education, 6*(3), 113-133.

Cañadas, M. C. (2007). *Descripción y caracterización del razonamiento inductivo utilizado por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori.

Cerdán, F. (2008). Las igualdades producidas en el proceso de traducción algebraico: estudio de las igualdades correctas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho, y L. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XII* (pp. 257-272). Badajoz, España: SEIEM.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(3), 99-110.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Holanda: Reidel.

Gómez-Granel, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. *CL & E: Comunicación, lenguaje y educación, 3-4*, 5-16.

Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbolic systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research agenda for mathematics education: Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J., Sims-Knight, J. y Clement, J. (1985). Behavioral objections: A response to Wollman. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 56-63.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707–62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Hegarty, M., Mayer, R. E., y Monk, C. A. (1995). Comprehension of arithmetic word problems: A comparison of successful and unsuccessful problem solvers. *Journal of Educational Psychology, 87*(1), 18-32.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(3), 217-232.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135-156.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Autor.

Rodríguez-Domingo, S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólico por estudiantes de secundaria.* Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada, España.

Ruano, R. M., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA, 2*(2), 61-74.

Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona, España: Horsori.

Sutherland, R., Rojano, T., Bell, A. y Lins, R. (Eds.) (2001). *Perspectives on school algebra*. Dordrecht, Los Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Wagner, S. y Parker, S. (1993). Advancing algebra. En P. S. Wilson (Ed), *Research ideas for the classroom. High school mathematics* (pp. 119-139). New York, NY: Macmillan.

Weinberg, A. (2007). New perspectives on the student-professor problem. En T. Lamberg, T. y L. R. Wiest (Eds.), *Proceedings of the 29th annual meeting of the PME-NA*. Stateline, NV: University of Nevada.

Wollman, W. (1983). Determining the sources of error in a translation from sentence to equation. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 169-181.

ACERCA DE LAS NOCIONES SENTIDO ESTRUCTURAL Y PENSAMIENTO RELACIONAL

About structural sense and relational thinking

Gabriela Valverde[a] *y Danellys Vega-Castro*[b]
[a]Universidad de Costa Rica, [b]Universidad de Granada

Resumen

Uno de los focos de estudio de las investigaciones en Didáctica del Álgebra se centra en las dificultades que enfrentan los individuos cuando deben realizar acciones con expresiones e igualdades, tanto numéricas como algebraicas. En esta línea, encontramos que en la literatura especializada frecuentemente aparecen dos constructos para describir cognitivamente el tratamiento que se hace de tales objetos matemáticos, éstos son el sentido estructural y el pensamiento relacional. En este trabajo se presentan los principios subyacentes a estas nociones, se identifican los contextos matemáticos usados para estudiar estos constructos y se procura establecer puntos comunes y divergentes asociados a las mismas.

Palabras clave: Pensamiento relacional; Sentido estructural.

Abstract

One of the focal points of research in the Didactics of Algebra is the difficulties that individuals face when they have to make actions related to numerical and algebraic expressions and equalities. Regarding these difficulties we found that in the specialized literature two constructs frequently appear for describing the treatment done in those mathematical objects in a cognitive way; they are structural sense and relational thinking. In this paper we present the underlying principles of both notions we identify the mathematical contexts used for studying those constructs and we attempt to establish common and divergent points related to them.

Keywords: *Relational thinking; Structural sense.*

Valverde, G. y Vega-Castro, D. (2013). Acerca de las nociones sentido estructural y pensamiento relacional. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro (pp. 119-125). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

En las investigaciones centradas en estudiar fenómenos relacionados con la enseñanza y aprendizaje del álgebra se hace referencia a diferentes, pero interconectadas, maneras de concebir el álgebra escolar, una de ellas contempla el álgebra como la generalización de relaciones, el estudio de patrones y estructuras; esta perspectiva se denomina álgebra como aritmética generalizada (Molina, 2006). Parte de los estudios que se sitúan en este enfoque destacan que estudiantes de diversos niveles educativos tienen dificultades para concebir expresiones numéricas y algebraicas como un todo, por ejemplo las igualdades, y para reconocer semejanzas en las estructuras de expresiones equivalentes (Arcavi, 2003; Carpenter, Levi, Loef y Koehler, 2005; Hoch y Dreyfus, 2004, 2006; Molina, 2006, 2012; Vega-Castro, 2010; Vega-Castro, Molina y Castro, 2011, 2012). En el contexto de los mismos aparecen los constructos sentido estructural y pensamiento relacional para describir actuaciones idóneas de los estudiantes en diversas actividades algebraicas, en este sentido ambas nociones se pueden visualizar como componentes que caracterizan la competencia algebraica (Molina, 2012).

Pensamiento relacional

El constructo pensamiento relacional ha sido utilizado en diversas áreas del conocimiento para referirse de manera genérica al pensamiento sobre relaciones o conceptos basados en relaciones. No obstante, en este trabajo limitamos la reflexión al contexto de la aritmética, particularmente a la resolución de igualdades y en operaciones con fracciones (Carpenter et al., 2005; Empson, Levi y Carpenter, 2011; Molina, 2006).

Molina (2012) afirma que el pensamiento relacional surge como respuesta a la problemática dada por el énfasis procedimental que caracteriza la enseñanza usual de la aritmética. Tradicionalmente, ésta ha estado vinculada al cálculo de respuestas, y las operaciones básicas han sido generalmente concebidas como procesos que implican hacer algo. En la aritmética, el resultado de los cálculos es el cierre de los mismos, a través de una secuencia de pasos se llega a un solo número. En álgebra, por otro lado, el foco son las relaciones (Carpenter et al., 2005). Incluso la resolución de ecuaciones tiene un carácter distinto que la aplicación de un algoritmo a números, pues una ecuación se resuelve a través de la aplicación de transformaciones sucesivas a la ecuación y la transformación final resulta en una ecuación que expresa una relación (x = uno o varios números), en lugar de un solo número aislado.

Carpenter et al. (2005) han caracterizado el pensamiento relacional como la consideración de expresiones e igualdades en su totalidad en lugar de procedimientos que deben realizarse paso a paso. Según estos autores, el pensamiento relacional implica el uso de las propiedades fundamentales de los números y operaciones para transformar expresiones matemáticas en lugar de calcular una respuesta aplicando una secuencia de procedimientos. Para ilustrar esta noción, Carpenter et al. (2005) plantean la igualdad $8+4=\_+5$, en cuya resolución es posible que los estudiantes hallen el valor faltante sumando 8 y 4 y después buscando el valor que sumado a 5 da como resultado 12. Esta es una solución perfectamente válida del problema que trata apropiadamente con el signo igual como expresión de una relación, sin embargo, la misma se basa en cálculos para llegar a la respuesta. Un estudiante que considere la ecuación como un todo podría haber reconocido que 5 es una unidad mayor que 4, de modo que el número en la caja debe ser una unidad menor que 8. En otras palabras, el estudiante podría usar, al menos implícitamente, la propiedad asociativa de la adición para transformar la ecuación. Además de las tareas matemáticas descritas previamente, encontramos en la literatura otras actividades usadas para estudiar el pensamiento relacional. Así, Molina (2006) considera tareas en las que es preciso manipular las expresiones o construir sentencias basadas en relaciones aritméticas (la relación de mismidad, de no mismidad, diferencia de magnitud entre dos números, correspondencia de dos números mediante una operación). Además, en su investigación considera actividades en las que se requiere estudiar la veracidad de igualdades que contemplan relaciones entre las operaciones, por ejemplo, expresiones del tipo $4 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7$.

Otra de las problemáticas que se abordan en los estudios sobre el pensamiento relacional están asociados a los usos del signo «=» (Carpenter et al., 2005; Molina, 2006, 2012). En este sentido, la literatura expone que la mayor parte de los niños consideran el «=» como el signo que antecede a la respuesta de un cálculo. Comprender el signo igual es una cuestión clave, pero según Carpenter et al. (2005) el pensamiento relacional implica mucho más que utilizar el signo igual apropiadamente.

Más recientemente y desde otro contexto matemático, Empson, Levi y Carpenter (2011) indican que el pensamiento relacional implica el uso de las propiedades fundamentales de las operaciones y de la igualdad para analizar un problema, cuya resolución se puede visualizar como un *esquema de acciones* a realizar u objetivos parciales a lograr para progresivamente simplificar o reducir la expresión hasta alcanzar el objetivo final. Desde esta postura se entiende que el uso de propiedades fundamentales para generar un esquema de acciones de este tipo y transformar la expresión puede ser explícito o estar implícito en la lógica del razonamiento de los niños. Por ejemplo, para calcular $1/2 + 3/4$ un niño puede pensar que $3/4$ es igual a $1/2 + 1/4$ y razonar que $1/2$ más otro $1/2$ es igual a 1, después agregar el $1/4$ restante para llegar al número mixto $1\,{}^{1}\!/_{4}$. En el razonamiento expuesto se infiere el uso implícito de la propiedad asociativa de la suma. Esta solución del problema evidencia lo que se conoce como *pensamiento anticipativo*[1], la misma implica flexibilidad de pensamiento en relación con la cantidad $3/4$ y en relación con la operación, teniendo en cuenta ambas situaciones a la vez y no separadamente como pasos a seguir aislados unos de otros. El principio de anticipar las acciones también es señalado por Molina (2006) cuando indica que el pensamiento

[1] Un constructo introducido por Piaget (1960) para caracterizar el uso de estructuras psicológicas que posibilitan coordinar el logro de un objetivo con los objetivos parciales usados para lograrlo.

relacional «es la actividad intelectual (interna) consistente en examinar objetos o situaciones matemáticas…, y utilizar dichas relaciones con una intencionalidad, es decir, para alcanzar un objetivo» (p. 62), este propósito se traduce en la búsqueda de una estrategia de solución.

Sentido estructural

La noción de sentido estructural, según cita Vega-Castro, Molina y Castro (2011), surge del análisis del trabajo con expresiones algebraicas, al distinguir entre las posibles actuaciones aquellas que hacen un uso efectivo de la estructura particular de las expresiones y de las técnicas algebraicas aprendidas previamente. Este constructo se refiere, de forma general, a una colección de habilidades relacionadas con transformar expresiones algebraicas, que permite hacer un mejor uso de las técnicas algebraicas (Linchevski y Livneh, 1999).

El constructo sentido estructural fue utilizado por vez primera por Linchevski y Livneh (1999). Sin embargo, estas autoras no abordaron la concreción de la noción sentido estructural. Posteriormente, Hoch y Dreyfus (2004, 2006) realizan varias investigaciones centradas en este constructo. Avanzan en la definición del mismo presentando varios descriptores que permiten identificar si un estudiante está utilizando sentido estructural en el contexto del álgebra escolar. En la Tabla 1, procedente de Vega-Castro et al. (2011) se recoge la definición de dichos descriptores y ejemplos de los mismos.

Tabla 1. *Descriptores del sentido estructural procedentes del estudio de Hoch y Dreyfus (2006)*

Descriptor	Definición	Ejemplos de Actuaciones
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	Al factorizar $81–x^2$, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores $(9–x)(9+x)$.
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	Al factorizar $(x–3)^4 – (x+3)^4$ tratar los binomios $(x–3)^2$ y $(x+3)^2$ como una sola entidad, reconocer dicha expresión como una diferencia de cuadrados, e identificar los factores implicados.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	En las tareas anteriores, aplicar la igualdad notable diferencia de cuadrados $a^2–b^2 = (a–b)(a+b)$ para factorizar dichas expresiones.

Hoch y Dreyfus (2006) realizan una subdivisión a los descriptores SS2 y SS3, mostrados en la Tabla 1, de acuerdo a la complejidad de los términos que componen las expresiones con las cuales se está trabajando, es decir, términos compuestos con productos o potencias o compuestos con suma o resta. Estos autores para promover el sentido estructural proponen tareas que incluyen clasificar, comparar y factorizar expresiones, resolver ecuaciones, y crear nuevos ejemplos con el objetivo de animar a los estudiantes a aprender a buscar y reconocer las estructuras propuestas en su forma más simple, y en formas más complejas, así como diferenciar entre ecuaciones y expresiones.

Como consecuencia de un estudio exploratorio[2] (Vega-Castro, 2010) relacionado con el constructo sentido estructural y después de observar que la definición aportada por Hoch y Dreyfus en 2006 no implicaba la especificidad de las tareas para el trabajo propuesto, las investigadoras realizan una extensión de la caracterización del sentido estructural (Vega-Castro, Molina y Castro, 2012). Deciden añadir como descriptores del sentido estructural los siguientes: reconocer relaciones entre subestructuras, considerar formas alternativas de transformar una expresión algebraica, anticipar la utilidad de transformaciones algebraicas en una expresión e identificar el rango de variación permisible para las variables involucradas. En una ampliación realizada a este estudio exploratorio, aún no publicada, las autoras proponen tareas de comprobar, completar espacios, generalizar y generar expresiones de estructura similar a otras dadas; todas persiguen el propósito de que el alumno perciba las estructuras y subestructuras dentro de una expresión algebraica.

Respecto al término estructura, Molina (2012) reconoce un doble significado del mismo, la estructura externa de una expresión y la estructura interna. La estructura externa se refiere a los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos. Por su parte, la estructura interna se refiere al valor de dicha expresión y a las relaciones de los componentes de la expresión con el mismo. Otro trabajo enfocado en el estudio del sentido estructural ha sido realizado por Lüken (2012) quien realiza un estudio con niños de 6 y 7 años de edad. Define sentido estructural temprano como reconocer patrones y estructuras, comprender y usar estructuras, tener capacidad de estructuración espacial.

El pensamiento relacional y el sentido estructural

Las apreciaciones nuestras, respecto a los puntos comunes y divergentes relativos a estos dos constructos no son definitivas e inflexibles; consideramos que conforme se avanza en el estudio de ambas nociones es posible que se llegue a dilucidar aspectos que permitan establecer límites o semejanzas de mayor calado. Compartimos la visión expuesta por Molina (2012) quien expresa que son dos constructos difíciles de definir y concretar; esta circunstancia ha limitado la consecución del objetivo de este trabajo referente a esclarecer los límites y alcances de las nociones pensamiento relacional y sentido estructural.

Ambas nociones se refieren a una manera de considerar las expresiones numéricas y algebraicas, ambas implican ver estos objetos de manera global, considerarlas como

[2] Estudio que ha sido ampliado y profundizado en la tesis doctoral en curso desarrollada por Danellys Vega-Castro bajo la dirección de las doctoras Encarnación Castro y Marta Molina.

totalidades y no como partes integradas por números, operaciones o literales que no mantienen un enlace entre sí. En relación con el pensamiento relacional Molina (2006) indica «se encuentra vinculado con el uso de sentido estructural ya que este sentido incluye la capacidad de considerar las expresiones aritméticas o algebraicas así como la totalidad de la igualdad, sentencia o expresión como entidad» (p. 97). En las acciones que deben realizar las personas cuando han de afrontar tareas como las propuestas en las investigaciones de pensamiento relacional, se reconocen actuaciones propias del sentido estructural. Así Molina (2006) destaca que cuando hay que identificar o establecer relaciones matemáticas es necesario identificar subestructuras.

En cuanto a la caracterización que se desprende de los estudios revisados encontramos que la presencia del pensamiento anticipativo es un elemento común presente en las caracterizaciones de ambos constructos. Considerando que una de las características que definen el aprendizaje con comprensión son las conexiones entre conocimientos, destacamos que los estudiantes que aplican el pensamiento relacional y el sentido estructural, usan un conjunto de principios matemáticos elementales para establecer relaciones y percibir estructuras. Desde este punto de vista, el pensamiento relacional y el sentido estructural se pueden considerar como dos maneras de especificar el tipo de conexiones que son productivas para conseguir un aprendizaje con comprensión.

Agradecimiento

La segunda autora agradece el patrocinio de beca doctoral otorgada por la Secretaría Nacional de Ciencia, Tecnología e Innovación (SENACYT) de la República de Panamá.

Referencias

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52*(3), 215-241.

Carpenter, P., Levi, L., Loef, M. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: developing relational thinking. *Analyses*, *37*(1), 53-59.

Empson, S., Levi, L., y Carpenter, T. (2011). The algebraic nature of fractions: Developing relational thinking in elementary school. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives* (pp. 409-428). Berlín, Alemania: Springer-Verlag.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 49-56). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol.3, pp. 305-

312). Praga, República Checa: Charles University in Prague.

LINCHEVSKI, L. y LIVNEH, D. (1999) Structure sense: The relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

LÜKEN, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

MOLINA, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, Granada.

MOLINA, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Granada, España: Universidad de Granada.

VEGA-CASTRO, D., (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Tesis de Maestría, Universidad de Granada, España.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández y J. Blanco (Eds.), *Investigación en educación matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *15*(2), 233-258.

ANÁLISIS DE TAREAS DE CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO EN LAS QUE INTERVIENEN IDENTIDADES NOTABLES

Analysis of tasks on calculations of limits involving notable equations

Juan F. Ruíz-Hidalgo y José A. Fernández-Plaza
Universidad de Granada

Resumen

Una de las dificultades identificadas en las investigaciones en Pensamiento Matemático Avanzado es la ruptura con el pensamiento algebraico y sus procedimientos. El Análisis se apoya continuamente en habilidades algebraicas pero, al mismo tiempo, para conseguir dominar el pensamiento analítico se requiere alejarse del algebraico y tomar conciencia de las diferencias que se establecen entre ellos. En este trabajo se analiza la relación entre los aspectos estructurales y los errores que los estudiantes manifiestan cuando realizan tareas en las que se involucran identidades notables y los errores que los estudiantes manifiestan cuando calculan límites finitos de funciones en un punto, que corresponden a indeterminaciones del tipo 0/0 y, que se pueden resolver mediante la simplificación de fracciones algebraicas en las que aparecen identidades notables.

Palabras clave: Fracciones algebraicas; Identidades notables; Indeterminaciones 0/0; Límite de una función en un punto; Simplificación.

Abstract

One of the difficulties identified in investigations in Advanced Mathematical Thinking is the break with algebraic thinking and its procedures. Continuously, calculus is based on algebraic skills, but at the same time, to get dominate analytical thinking requires moving away from algebraic thinking and become aware of the differences that exist between them. This paper is devoted to the relationship between the structural sense and errors that students demonstrate when performing tasks that involve algebraic identities and the errors when calculating finite limits of functions at a point, corresponding to uncertainties of type 0/0, which can be solved by simplifying algebraic fractions in which appear notable equations.

Keywords: *Algebraic fractions; Limit of a function at one point; Limit of indeterminate forms 0/0; Notable equations; Simplification.*

Ruíz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 127-134). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

Durante el primer curso de Bachillerato se realizan los primeros contactos con el cálculo de límites. En general, las actividades que se proponen consisten en desarrollar una serie de destrezas apoyadas en las habilidades algebraicas que el alumnado ha ido desarrollando a lo largo de la educación secundaria, pero que añaden una componente relacionada con procesos analíticos a los que no están habituados. Investigaciones acerca de la didáctica del análisis muestran que las diferencias entre las habilidades algebraicas y las propias del análisis suponen una ruptura y una dificultad a la que los estudiantes se enfrentan (Artigue, 1995).

En este trabajo se pretende indagar en esta ruptura mediante un estudio exploratorio. Partiendo de tareas de cálculo de límites en las que aparecen fracciones algebraicas, se pretende observar qué estrategias siguen los alumnos, los errores en los que incurren y cómo se podrían establecer relaciones entre las habilidades algebraicas y analíticas.

Marco teórico

En este trabajo intervienen, por una parte, el cálculo de límites, por lo que está situado en la agenda del Pensamiento Matemático Avanzado. Más concretamente, el estudio está centrado en las dificultades que se producen al pasar del razonamiento algebraico al cálculo. Por otra parte, intervienen también tareas de simplificación algebraica, por lo que se toman como última base del trabajo investigaciones sobre pensamiento algebraico y, en particular, algunas acerca del sentido estructural.

En educación matemática no se ha logrado establecer una distinción clara entre los rasgos distintivos entre las matemáticas elementales y avanzadas, aunque sí se han establecido una serie de características que ayudan a separarlos. Entre estas características se pueden encontrar la complejidad de los contenidos (límites, continuidad, derivación o integración) o los procesos cognitivos involucrados en el manejo de dichos contenidos (analizar, generalizar, definir, demostrar, abstraer,…) (Azcárate y Camacho, 2003; Edwards, Dubinsky y McDonald, 2005).

Las dificultades que el alumnado encuentra cuando se enfrenta al cálculo son variadas, fuertes y persistentes. Según Artigue (1995), se clasifican en tres grandes tipos: 1) Las ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos del cálculo, como los números reales y las sucesiones; 2) Las relacionadas con la conceptualización de la noción de límite, que es la noción nuclear del campo y; 3) Las asociadas a la ruptura con los modos de pensamiento algebraico y del orden.

Este trabajo se centra en esta tercera dificultad. Legrand (1993) distingue los procedimientos del análisis de los conocimientos algebraicos y propone el ejemplo de la igualdad: mientras que algebraicamente dos expresiones A y B son iguales si una de ellas (o las dos) se pueden transformar por equivalencias sucesivas en la otra, en el análisis, el concepto de igualdad viene determinado por la condición de que $\forall \varepsilon > 0$ se cumple que la distancia $d(A,B) < \varepsilon$.

Dentro de las investigaciones en pensamiento algebraico, Vega-Castro, Molina y Castro (2011, 2012) presentan un análisis de las habilidades involucradas en el trabajo con expresiones algebraicas en las que aparecen identidades notables haciendo uso de la noción *sentido estructural.* Hoch y Dreyfus (2006) proponen una definición operacional de sentido estructural y presentan tres descriptores con subdescriptores, con los que caracterizan los diferentes niveles de complejidad algebraica (Tabla 1).

Tabla 1. *Descriptores del sentido estructural (Hoch y Dreyfus)*

Descriptor	Descripción	
SS1	Reconocer una estructura familiar en su forma más simple.	
SS2	Tratar un término compuesto como una única entidad y reconocer una estructura familiar en una forma más compleja.	
	SS2a	El término compuesto contiene un producto, pero no una suma/resta.
	SS2b	El término compuesto contiene una suma o resta.
SS3	Elegir manipulaciones apropiadas para hacer el mejor uso de una estructura.	
	SS3a	La estructura está en su forma más simple.
	SS3b	El término compuesto contiene un producto, pero no una suma/resta.
	SS3c	El término compuesto contiene una suma o resta.

Descripción del estudio

El presente trabajo es de tipo exploratorio. La recogida de datos se realizó durante el mes de abril de 2013 en dos Institutos de Enseñanza Secundaria, uno de Granada y otro de un municipio de la provincia de Jaén. En total 44 sujetos que cursaban 1º de Bachillerato de diferentes modalidades fueron escogidos intencionalmente por la disponibilidad para participar en el estudio y por el nivel educativo que cursaban.

Se elaboró una prueba escrita de cuatro tareas con enunciados semejantes. En cada una de ellas aparece el cálculo de un límite en un punto de una fracción algebraica. La estructura de todos estos límites corresponde a $\mathrm{L} = \lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^{\mathrm{n}} P_1(x)}{(x-a)^{\mathrm{m}} Q_1(x)}$, donde *n, m* son naturales mayores que 1 y P_1 y Q_1 son dos polinomios sin ceros en el punto $x=a$. El límite está determinado por los valores de *n* y *m*, es decir por el valor del exponente del binomio *(x–a)*. Los estudiantes habían recibido ya la instrucción ordinaria, limitando la intervención del profesor y de los investigadores a la aclaración de dudas.

Se pretende y espera que los sujetos realicen un procedimiento de resolución compuesto por las acciones: 1) transformar las expresiones algebraicas; 2) simplificar las fracciones por cancelación; 3) calcular los límites. A cada una de estas sucesiones de acciones se la denominará estrategia. Para facilitar el análisis se ha realizado la codificación que se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2. *Codificación de las acciones realizadas por los estudiantes*

Acción	Acción detallada	Código
Transformar expresiones algebraicas	Factorizar usando una identidad notable	T1
	Factorizar usando el método de Ruffini.	T2
	Factorizar usando la fórmula para ecuaciones de 2º grado.	T3
	Expandir usando una identidad notable.	T4
	Expandir usando la propiedad distributiva.	T5
Simplificar las fracciones	Cancelar los factores *x–a* en numerador y denominador usando la propiedad de equivalencia de fracciones algebraicas.	X
Calcular el límite	Determinar el valor numérico.	C1
	Cálculo de límites laterales finitos o infinitos.	C2

En la Tabla 3 se presentan con detalle todas las tareas propuestas acompañadas por sus características. Estas características, que son los descriptores del sentido estructural (Tabla 1) están relacionadas con la complejidad algebraica de la tarea. A estos descriptores se les deben añadir los propios del cálculo de límites, particularmente la necesidad de recurrir a los límites laterales para realizar los cálculos. Es importante destacar que las acciones relacionadas con el cálculo de límites, especialmente la C2, son habilidades diferentes a las algebraicas y, por tanto, son las que generan la ruptura descrita entre el álgebra y el análisis.

Según las características de la Tabla 3, se organizan las tareas por la complejidad algebraica y, posteriormente, la complejidad analítica. Así, las tareas quedarían ordenadas por complejidad de más fácil a más difícil (tarea 3, tarea 1, tarea 2 y tarea 4).

Tabla 3. *Tareas propuestas ordenadas por grado de complejidad de más fácil a más difícil*

Tarea		Límite	Exponente	Características de complejidad
3	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(7x-2)(x+2)}{x^2-4}$	$L = 12$	$n - m = 0$	SS1, SS2b, SS3a, C1
1	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)\,(3x+1)}{(x^2-4x^2+4)}$	$L = \pm\infty$	$n - m < 0$ impar	SS1, SS3a, C2
2	$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-10x^2}{(x-2)\,(x^2+1)}$	$L = 4$	$n - m = 0$	SS2a, SS3b, C1
4	$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2-12}{(x-2)^3\,(2x^2+1)}$	$L = +\infty$	$n - m < 0$ par	SS2a, SS3b, C2

Resultados

Siguiendo la notación establecida, se caracterizan las estrategias elaboradas por los sujetos en exitosas, exitosas erróneas y otras estrategias erróneas o interrumpidas.

Estrategias exitosas

Las estrategias exitosas están formadas por aquellas estrategias correctas que presentan el esquema de acciones: Transformación algebraica (T)-Simplificación (X)-Cálculo de límites (C). Las hay de tres tipos: las que utilizan igualdad notable como transformación algebraica (Figura 1); las que no utilizan igualdad notable y que implican un uso menos efectivo del sentido estructural; aquéllas que implican una transformación algebraica de la expresión en uno o varios estados de tránsito antes de aplicar la cancelación.

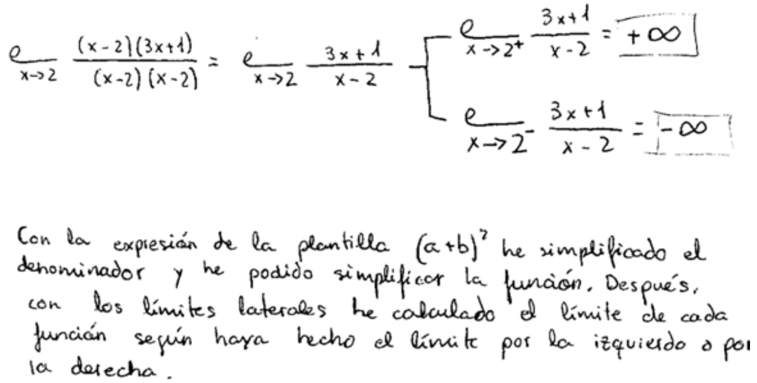


Figura 1. *Estrategia exitosa en la tarea 1 con igualdad notable cuadrado de la diferencia*

Estrategias exitosas erróneas

Esta categoría la conforman aquellas estrategias incluyendo acciones iniciales exitosas, incurriendo en error bien en el proceso de manipulación algebraica (EE-EMA), o bien en el cálculo del límite (EE-ECL) (Figura 2).

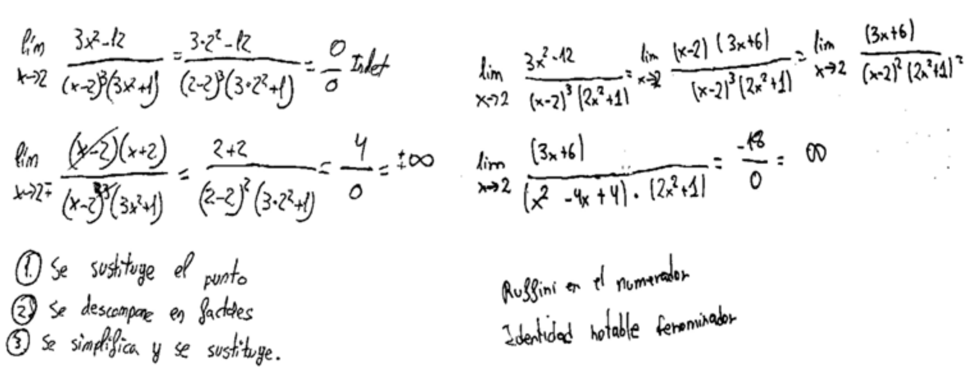


Figura 2. *Estrategias exitosas erróneas en la tarea 4, error algebraico (Izq.), y analítico (Dcha.)*

Otras estrategias erróneas o interrumpidas

Cuando desde la primera acción hay errores, la estrategia se considera errónea. Existen también otras estrategias de cálculo de límite como la regla de L'Hôpital. Sin embargo, algunos estudiantes emplearon para el cálculo del límite en un punto finito las propiedades para límites en infinito, ya que en este último caso, el cálculo se reduce a una comparación de los grados del numerador y del denominador, eludiendo así la necesidad de factorizar. También se incluyen aquellas estrategias interrumpidas (EI) tanto en la manipulación algebraica, como en el cálculo final.

En la Tabla 4 se presenta un resumen de las frecuencias absolutas de respuestas según las categorías anteriores.

Discusión y conclusiones

El número de estrategias exitosas es mayoritario en la tarea 3 (30 de 44), lo cual es coherente con la complejidad a priori de esta tarea. La tarea que menos estrategias exitosas presenta es la 4 (3 de 44), lo cual también coincide con los niveles de complejidad establecidos teóricamente.

En las estrategias exitosas erróneas se puede observar que cuando se requiere que realicen cálculo de límites laterales infinitos (tareas 1 y 4) el número de errores ECL aumenta (21 errores) respecto de las tareas 2 y 3 (2 errores).

Tabla 4. *Frecuencias absolutas de las respuestas*

	Estrategias											
	Exitosas			Ex. Erróneas			Erróneas/Interrumpidas					
Tarea	EEI	Otras	Tot	EMA	ECL	Tot	EMA	ECL	EI	Tot	NR	TOT
1	12	4	16	0	14	14	4	4	5	13	1	44
2	15	4	19	3	0	3	8	4	3	15	7	44
3	25	5	30	1	2	3	0	2	2	4	7	44
4	3	0	3	3	7	10	8	3	6	17	14	44
	55	13	68	7	23	30	20	13	14	49	28	176

Observamos que la dificultad analítica de la tarea 1 tiene un mayor peso que la algebraica en su resolución errónea (18 erróneas ECL de 22 erróneas, 81%) en comparación con el peso asociado a la mayor dificultad algebraica de la tarea 2 (11 errores EMA de 15 erróneas, 73%). Por otro lado, existe un equilibrio entre la dificultad analítica y algebraica en la resolución errónea de la tarea 4.

Las tareas cuyos descriptores de sentido estructural eran más complejos (tareas 2 y 4), acumulan cada una, 11 errores de manipulación algebraica y se diferencian en el número de errores de cálculo de límite que son 4 en la tarea 2 y 10 en la tarea 4, lo que vuelve a coincidir con la complejidad teórica propuesta con anterioridad (Tabla 3).

Las tareas con descriptores de sentido estructural más simple (1 y 3), presentan, como era de esperar, muy pocos errores por manipulación algebraica (4 y 1 respectivamente) y, al igual que ocurre con las tareas 2 y 4, su diferencia es el número de errores en el cálculo de límite.

Prestando atención a las acciones (Transformación (T), Cancelación (X), Cálculo de límite (C)), se puede observar que apenas se incurre en errores de cancelación (5) y que la mayoría de los errores de manipulación algebraica son debidos a errores de transformación (22 del total de respuestas). Son bastante más los errores de cálculo de límites (36).

Conclusiones

Mayoritariamente los estudiantes aplican exitosamente las igualdades notables para simplificar las fracciones algebraicas (T1 y T4) (55 de 68), lo que hace pensar que los procedimientos algebraicos cercanos al sentido estructural están bastante desarrollados en el alumnado que utiliza estas estrategias. Por otro lado, los métodos generales Ruffini (T2) y fórmula (T3) se emplean sistemáticamente para cualquier ecuación polinómica, expandiéndola si es necesario, sin reflexionar sobre un tratamiento más eficiente de las ecuaciones pre-factorizadas. Además hay errores aislados en la interpretación de los coeficientes «correctos» que se obtienen del uso del método de Ruffini.

Dentro de las estrategias erróneas, los errores más comunes son de manipulación algebraica (Tareas 2 y 4) y de cálculo del límite infinito (Tarea 1 y 4). Destacan singularmente la aplicación errónea de la regla de L'Hôpital y el uso de inferencias inadecuadas del límite cuando x tiende a infinito. Estos resultados coinciden con los niveles de complejidad que se han establecido teóricamente para las tareas, lo que lleva a pensar que existe una relación entre el sentido estructural y la complejidad analítica y el crecimiento en el número de estrategias erróneas. Se plantea como continuidad validar esta conjetura en otros contextos.

Agradecimientos

Agradecemos la colaboración y disposición de los profesores Alejandro Caño, Antonio Quesada y Joaquín García. Este trabajo ha sido realizado con la ayuda y financiación de la beca FPU (AP2010-0906), (MEC-FEDER) y del proyecto «Procesos de Aprendizaje del Profesor de Matemáticas en Formación» (EDU2012-33030) del Plan Nacional de I+D+I (MICIN).

Referencias

ARTIGUE, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 97-140). México, México DF: Grupo Editorial Iberoamericano.

AZCÁRATE, C. y CAMACHO, M. (2003). Sobre la investigación en didáctica del Análisis Matemático. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana, X*(2), 135-140.

EDWARDS, B. S., DUBINSKY, ED., MCDONALD, M.A. (2005). Advanced mathematical thinking. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(1), 15-25.

HOCH, M. y DREYFUS, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: an unexpected result. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká y N. Stehlíková (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp, 305-312). Praga, Republica Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.

LEGRAND, M. (1993). Débat scientifique en cours de mathématiques et spécifité de l'analyse. *Repère IREM, 10*, 123-159.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M. y CASTRO, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.

VEGA-CASTRO, D., MOLINA, M., CASTRO, E. (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *RELIME, 15*(2), 233-258.

REQUISITOS MATEMÁTICOS PARA EL MANEJO DE DOS DEFINICIONES ALGEBRAICAS DE LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN Y DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Mathematical requirements for two algebraical definitions: The limit of a sequence and the limit of a function at a point

María Teresa Sánchez[a], *Francisco Javier Claros*[b], *Moisés Coriat*[c].
[a] Fundación María Inmaculada, [b] Universidad Carlos III, [c] Universidad de Granada

Resumen

Presentamos requisitos matemáticos para el manejo de dos definiciones que se apoyan en la representación simbólica: las nociones de límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto. En cada noción, estos requisitos matemáticos reciben el mismo nombre (dependencia, orden, valor absoluto, acotación, procesos infinitos y tipos de infinitos) pero se observan diferencias entre ellos. Éstas llevan a recomendar el estudio de cada definición de manera diferenciada y a señalar que el paso del límite finito de una sucesión al límite finito de una función en un punto, requiere un estudio minucioso.

Palabras clave: Cota; Dependencia; Función; Límite finito; Orden; Procesos infinitos; Requisitos matemáticos; Sucesión; Tipos de infinitos; Valor absoluto.

Abstract

We present mathematical requirements for handling two definitions which are based on the symbolic representation: finite limit of a sequence and finite limit of a function at a point. For each notion, these mathematical requirements receive the same name (dependence, order, absolute value, enclose, infinite processes and infinite types) but one can observe differences among them. These differences lead to recommend the study of each definition separately and to remark that the passage from the finite limit of a sequence to the finite limit of a function at a point requires a thorough study.

Keywords: *Absolute value; Dependence; Dimension; Finite limit; Function; Infinite processes; Mathematical requirements; Order; Sequence; Types of infinite.*

Sánchez, M. T., Claros, F. J. y Coriat, M. (2013). Requisitos matemáticos para el manejo de dos definiciones algebraicas de límite finito de una sucesión y de una función en un punto. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 135-141). Granada, España: Editorial Comares.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo analizamos una definición de límite finito de una sucesión y una definición de límite finito de una función en un punto. Enunciamos los requisitos matemáticos que permiten su manejo. Usamos la palabra «algebraico» en el sentido de Carpenter, Levi, Franke y Zeringue (2005), según los cuales el desarrollo de un razonamiento algebraico supone:

— Apreciar relaciones numéricas entre los términos de una expresión y entre distintas expresiones o ecuaciones.
— Transformar expresiones matemáticas, sin limitarse al cálculo de una respuesta concreta.
— Desarrollar un conocimiento sobre conjuntos de objetos matemáticos (números o variables), de operaciones entre ellos, de propiedades de estos objetos y sus operaciones (ej., asociativa, conmutativa, distributiva) y de las propiedades de relaciones cuantitativas (ej., transitividad e igualdad).

Todo lo anterior se halla al trabajar una noción de límite. Lo primero se observa en la fase intuitiva previa a la formalización de la noción, cuando se aprecia la relación que mantienen los términos de la sucesión o los valores de la función. Lo segundo se emplea para justificar que una determinada sucesión o función tiene límite. Por ejemplo, en la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$ al resolver la indeterminación que aparece al calcular el límite en $x_0 = 2$. Por último, es necesario controlar las nociones matemáticas de acotación, valor absoluto, orden, procesos infinitos, tipos de infinito y dependencia, ya que se usan en el enunciado de las definiciones analizadas y también en una demostración de que un determinado valor es límite de la sucesión o función correspondiente.

El capítulo lo hemos estructurado en cuatro apartados. En el primero, presentamos las definiciones que hemos seleccionado y exponemos los requisitos matemáticos que permiten trabajar tales definiciones: dependencia, valor absoluto, orden total, acotación, procesos infinitos y tipos de infinitos. En el segundo apartado desarrollamos el uso de estos elementos en cada una de las definiciones seleccionadas. En el tercer apartado mencionamos similitudes y diferencias entre los objetos o elementos indicados teniendo en cuenta la definición en que se aplican. El cuarto apartado contiene conclusiones y algunas perspectivas futuras.

DEFINICIONES. REQUISITOS MATEMÁTICOS

En este apartado presentamos las definiciones seleccionadas y describimos los requisitos matemáticos de cada una de ellas. Cuando hablamos de requisitos matemáticos nos referimos a los objetos o elementos matemáticos necesarios para abordar el límite finito de sucesiones y de funciones.

Definiciones seleccionadas

Límite finito de una sucesión: Sea x_n una sucesión en IR, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada ε>0, existe un número natural N tal que si n ≥ N se cumple que | xn-x | <ε . Spivak (1991, p. 615), notación adaptada.

En esta definición, $\mathbb{R}$ es el conjunto de números reales y la convergencia en $\mathbb{R}$ se entiende como la convergencia en el espacio métrico $\mathbb{R}$, con la distancia usual d(x,y)=|x-y|. Esta definición es conocida usualmente como «definición ε–N ».

Límite finito de una función en un punto: La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Spivak (1991, p. 118), notación adaptada.

Requisitos

En Claros (2010) y en Sánchez (2012), se considera que los requisitos necesarios para manejar estas definiciones son: dependencia, orden, valor absoluto, cota, procesos infinitos y tipos de infinitos. Describimos a continuación cada uno de ellos.

Dependencia. Para exponer lo que entendemos por dependencia nos apoyamos en la siguiente afirmación de Freudenthal (1983):

> El origen fenomenológico de la noción de función surge en el momento en que se enuncia, se postula, se produce o se reproduce una dependencia entre variables, que se presenta en el mundo físico, social o mental, así como entre variables matemáticas que, a su vez, están relacionadas con variables de los otros mundos. (p.494)

Freudenthal señala que una función corresponde a un tipo especial de dependencia entre dos variables; una dependiente y otra independiente. Cuando calculamos el límite de una sucesión o de una función estamos partiendo del supuesto que el alumno conoce y maneja el concepto de sucesión y de función. En el caso de las «sucesiones» la variable independiente toma valores en el conjunto numérico $\mathbb{N}$, mientras que en caso de las «funciones» toma valores en el conjunto de los números reales. Esta dependencia que señalamos en el caso de las sucesiones es $\{n \to f(n)\}$, pero tenemos que añadir otra dependencia que es $\{\varepsilon \to n(\varepsilon)\}$ y que ayuda a demostrar que una determinada sucesión tiene límite. En el caso de las funciones, a la dependencia $\{x \to f(x)\}$ tenemos que añadir la dependencia $\{\varepsilon \to \delta(\varepsilon)\}$, que será la que ayude a demostrar que una determinada función tiene límite finito en un punto.

Un requisito, a la hora de trabajar los límites finitos, es el de observar o reconocer las dos parejas de dependencias indicadas. Se usa la primera para proponer un candidato a límite, calculando valores de la sucesión o, respectivamente, de la función y observando a qué valor parecen acercarse, y la segunda para demostrar que el candidato seleccionado es, en efecto, el límite de la sucesión o, respectivamente, de la función en el punto elegido.

Valor absoluto. El valor absoluto suele definirse como una función real de variable real, que cumple que $x \rightarrow |x| = máx\{x,-x\}$. El valor absoluto asegura que el resultado de una operación sea un número real positivo.

Este valor absoluto aparece en el caso de las sucesiones en la expresión $| x_n - x | < \varepsilon$ y servirá para garantizar que un determinado valor (en este caso «x») es el límite de la sucesión x_n. En el caso de las funciones las desigualdades con valor absoluto son: $0 < |x-a| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$. Para demostrar que la función f(x) tiene límite L, será necesario llegar a una relación entre la segunda desigualdad y la primera de manera que se establezca en este caso una relación entre épsilon y delta.

Para demostrar que un determinado valor es el límite de la sucesión o de la función, tanto en las sucesiones como en las funciones, será necesario que el alumno domine el concepto de valor absoluto (sus propiedades) y sepa operar cuando se usa éste en expresiones de desigualdad.

Orden total. Por orden total en $\mathbb{R}$, entendemos una relación que cumple las propiedades de ser reflexiva, antisimétrica y transitiva, que es compatible con la suma y la multiplicación y que se aplica a cualquier pareja de números reales. En la definición de límite seleccionada, la relación de orden está obviamente presente, ya que con ella se expresa formalmente la idea intuitiva de acercamiento.

Hemos tenido en cuenta la relación de orden en $\mathbb{R}$en los siguientes casos:

— En las sucesiones: (a) exigimos que ε sea mayor que cero, (b) usamos la expresión si $n \geq N$ y (c) imponemos que el valor absoluto de la diferencia entre x_n y x, supuesto que x sea el límite de la sucesión x_n, sea menor que ε.

— En las funciones, exigimos: (a) que ε y δ sean mayores que cero, (b) que el valor absoluto de la diferencia entre los valores de x y el punto x_0 en el que se está calculando el límite sea, por una lado mayor que cero y por otro menor que δ y (c) que el valor absoluto de la diferencia entre $f(x)$ y L, supuesto límite en el punto x_0, sea menor que ε.

Acotación. Un conjunto A está acotado superiormente si existe un valor K que verifica que $x \leq K$ para todo $x \in A$ y está acotado inferiormente por un valor K' si $x \geq K'$ para todo $x \in A$. La acotación es un requisito en la sucesión con límite y en la función con límite finito en un punto. Si no es así, la sucesión o función no tendrá límite finito. Este hecho se refleja en el caso de las sucesiones con la expresión $x_n \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ y en el caso de las funciones con la expresión $f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$. Los alumnos usarán el concepto de acotación para distinguir sucesiones o funciones convergentes de otras que no lo son.

Procesos infinitos. Los cambios experimentados por las variables, independiente y dependiente, presentes en la definición formal considerada son ejemplos de procesos infinitos que aparecen tanto en sucesiones como en funciones.

En el caso de las sucesiones se manejan y se coordinan dos procesos infinitos basados en la idea de sucesión. El primer proceso se refiere a la variable independiente, y se resume con la frase «n tiende a infinito»; se trata de un avance inexorable, por lo cual nos abstenemos de hablar de acercamiento o de aproximación. El segundo proceso infinito se genera al construir los sucesivos valores de los términos de la sucesión.

Los procesos infinitos que hemos descrito para cada variable son procesos infinitos discretos, ya que el cardinal de los conjuntos que manejamos tanto en la variable independiente como en la variable dependiente es el de $\mathbb{N}$.

En el caso de las funciones se manejan y coordinan tres procesos infinitos continuos (el cardinal del conjunto que representa cada uno de estos procesos es el de $\mathbb{R}$), uno de ellos basado en la idea de función. (1º) El acercamiento de los valores de la variable independiente al punto donde se está calculando el límite; se resume con la frase $x \to x_0$. (2º) La obtención de las imágenes para todos y cada uno de los puntos que hemos considerado en el acercamiento a x_0, basado en la idea de función. (3º) El acercamiento de los valores de la variable dependiente al candidato a límite L.

Tipos de infinitos: infinito potencial e infinito actual.

Infinito potencial: En el límite finito de sucesiones el proceso infinito generado al dar valores a n y al obtener sus correspondientes valores x_n, se ajusta a la idea de infinito potencial. Por este motivo decimos que el infinito potencial se halla presente en la definición de límite finito de una sucesión.

Cuando se usa un proceso infinito discreto para intuir el candidato a límite de la función, por ejemplo dando valores cercanos a x_0 y observando qué valores les corresponden, aparece un infinito potencial, porque hemos discretizado un fenómeno continuo. Tal discretización no basta para concluir sobre el límite de la función en el punto, como es bien sabido.

Infinito actual: Si consideramos la sucesión y el valor del límite de dicha sucesión como un todo, obtenemos la idea de infinito actual, pero con cardinal $\mathbb{N}$.

El conjunto que forman la función sometida a estudio y su límite en el punto considerado tiene como cardinal el de $\mathbb{R}$. Por este motivo decimos que el infinito actual es un requisito de la definición de límite finito de una función en un punto.

Comparación de requisitos matemáticos entre las dos definiciones

En la Tabla 1 resumimos las diferencias y similitudes existentes entre los requisitos matemáticos necesarios para manejar las dos definiciones seleccionadas.

Tabla 1. *Resumen: Analogías y diferencias entre el límite finito de una sucesión y el límite finito de una función en un punto*

Acotación	Dependencia	Procesos infinitos	Tipos de infinito	Valor absoluto y orden
		Límite finito de una sucesión		
Variable independiente no acotada Variable dependiente acotada	$\{n \rightarrow x_n\}$ $\{\varepsilon \rightarrow N_0\}$	– Sin aproximación en la variable independiente – Aproximación al límite mediante valores superiores o inferiores – Procesos infinitos discretos	Infinito potencial presente Infinito actual (cardinal) numerable	Uso de la expresión $\|x_n - x\| < \varepsilon$ Relación de orden en $\mathbb{R}$
		Límite finito de una función en un punto		
Variable independiente acotada Variable dependiente acotada	$\{x \rightarrow f(x)\}$ $\{\varepsilon \rightarrow \delta(\varepsilon)\}$	– Aproximación en la variable independiente – Aproximación al límite mediante valores superiores e inferiores – Procesos infinitos continuos	Infinito potencial ausente Infinito actual (cardinal) no numerable	Uso de la expresión $0 < \|x - a\| < \delta$, entonces $\|f(x) - L\| < \varepsilon$ Relación de orden en $\mathbb{R}$

Conclusiones

El hecho de manejar seis nociones, en ambas definiciones, con el mismo nombre (dependencia, valor absoluto, acotación, tipos de infinitos, valor absoluto y orden) no debe ocultar las diferencias notables que hay entre dichos requisitos como esperamos haber puesto de manifiesto en este trabajo. Tales diferencias vienen a sustentar las siguientes conclusiones:

— El estudio de los requisitos matemáticos necesarios para el manejo de las nociones de límite finito de una sucesión y de límite finito de una función en un punto, pone de manifiesto el hecho de que son nociones de límite significativamente diferentes.

— Es necesario abordar de manera diferente el límite finito de una sucesión y de una función.

Si atendemos a los requisitos matemáticos, el límite de sucesiones parece algo menos complejo que el límite de funciones; por ello, parece sensato considerar que el paso del límite de sucesiones al límite de funciones se aborde analizando minuciosamente los matices que distinguen los requisitos matemáticos en ambos casos. Este hecho no siempre ha sido realizado por los autores que en algún momento llegaron incluso a unificar ambos conceptos (véase Rey Pastor, 1933) aunque hay que decir que sin mucho éxito si tenemos en cuenta su nula aceptación posterior en la comunidad educativa.

La conjetura de estudiar de manera diferenciada cada tipo de límite no ha sido considerada tampoco por muchos investigadores en didáctica de la matemática con anterioridad, lo que llevó a Claros (2010) y a Sánchez (2012) a proponer diseños de procesos de enseñanza y aprendizaje que tuvieran en cuenta las diferencias indicadas.

Referencias

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. En P. Bolea, M. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática X* (pp. 157-171). Huesca, España: SEIEM.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2009). Sobre la equivalencia entre sucesiones con límite finito y sucesiones de Cauchy. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 197-209). Santander, España: SEIEM.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Los Paises Bajos: Reidel Publishing Company.

Rey Pastor, J. (1933). *Curso cíclico de Matemáticas. Cálculo infinitesimal. Tomo II.* Cuenca, España: Madrid-Buenos Aires.

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.

Sánchez, M. T., Claros, F. J. y Coriat, M. (2011). Límite finito de una función en un punto y relatos de profesores de matemáticas: perfiles fenomenológicos. En J. L. Lupiañez, M. C. Cañadas y M. Molina (Ed.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico. Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 203-216). Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona, España: Reverté.

LA *ARITHMETICA ALGEBRATICA* DE MARCO AUREL, PRIMER ÁLGEBRA IMPRESA ESCRITA EN ESPAÑOL. PRELIMINARES PARA SU ESTUDIO*

Marco Aurel's *Arithmetica Algebratica,* being the first printed Algebra written in Spanish. Preliminaries to a study

Luis Puig y Alejandro Fernández
Universitat de València

Resumen

La Arithmetica Algebratica de Marco Aurel es el primer libro impreso escrito en español en el que se trata el Álgebra, pese a lo cual no se ha hecho ningún estudio detallado de él. Presentamos aquí unos preliminares para su estudio en los que indicamos a) los trabajos parciales ya realizados sobre este texto, b) los antecedentes de aparición del álgebra en lenguas vernáculas de la península ibérica, c) los textos relacionados con él que le siguieron inmediatamente, y d) el hecho de que el libro de Marco Aurel que se conserva es sólo la tercera parte de lo que dice haber escrito.

Palabras clave: Álgebra; Historia del álgebra; Historia de la educación matemática.

Abstract

Marco Aurel's Arithmetica algebratica is the first printed Algebra written in Spanish. However a complete study of this book is still to be done. We present here some preliminaries to a study: a) the partial studies made to date, b) the antecedents of appearance of algebra in vernacular tongues of the Iberian peninsula, c) the texts related with Marco Aurel's book closely following it, and d) the fact that the extant Marco Aurel's book is only one of the three volumes he said to have written.

Keywords: *Algebra; History of algebra; History of mathematics education.*

Puig, L. y Fernández, A. (2013). La ArithmeticaAlgebratica de Marco Aurel, primer álgebra impresa escrita en español. Preliminares para su estudio. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 143-150). Granada, España: Editorial Comares.

* Este trabajo está subvencionado con fondos del proyecto de investigación EDU2012-35638

Introducción

El libro de Marco Aurel *Arithmetica algebratica* ocupa un lugar especial en la historia del álgebra y su enseñanza en España. En efecto, impreso en Valencia en casa de Joan de Mey en 1552, es el primer libro impreso escrito en español en que se trata el álgebra. Sin embargo, a pesar de su carácter singular, aún no ha sido objeto de un estudio detallado, ni se ha publicado transcrito o en facsímil, aunque hay algunos estudios descriptivos o parciales. Así, Antoni Malet sólo le dedicaba una página del capítulo «La aritmética y el álgebra en la península ibérica en el s. XVI» de Paradís y Malet (1989), basada en Rey Pastor (1926). En ese texto, Rey Pastor le dedicaba cuatro páginas y se mostraba contundente y despiadado:

> Muy doloroso es confesarlo, pero el Algebra fué ignorada por los españoles, hasta que el alemán Marco Aurel, se la dió a conocer en 1552, con un libro vulgar y atrasado (Rey Pastor, 1926, 97-98).

En opinión de Rey Pastor, el libro «no ofrece nada extraordinario», aunque constituye «un breve compendio muy aceptable de la parte algebraica contenida en la *Summa*; en unos puntos mejorada, y en otro empeorada» (Rey Pastor, 1926, pp. 100-101). Rey Pastor se refiere a la *Summa* de Luca Pacioli, y lo que considera una mejora es el hecho de que Marco Aurel utilice la notación de los cosistas alemanes para las especies de números, en vez de la notación de los algebristas italianos. A nuestro entender, Rey Pastor sobrevaloró la diferencia entre una y otra notación, ya que en realidad ambas son de carácter sincopado al ser en ambos casos abreviaturas de los nombres de las especies de números, aunque las alemanas añadan a ser abreviaturas el ser abreviaturas esquematizadas, lo que las hace parecer signos específicos distintos de los signos del lenguaje natural.

El primer trabajo más extenso que conocemos lo presentó en València Vicente Meavilla en 1991 en el *Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática*, organizado por el Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universitat de Valencia y el Programa Nacional de Formación y Actualización de Profesores de Matemáticas de México, en cuyas actas ocupaba treinta y una páginas (Meavilla, 1993). En él, Meavilla, como él mismo indicaba en la introducción, hacía una descripción, pero no un análisis, de la parte de álgebra del libro:

> Quede claro, desde aquí, que no pretendemos hacer un análisis crítico del contenido del texto. Sólo nos limitaremos a presentar una descripción del mismo que nos sirva para tener una idea de cómo se enseñaba el álgebra en España a mediados del siglo XVI (Meavilla, 1993, p. 66).

Desde entonces, que conozcamos, sólo se han realizado unos pocos estudios parciales. Así, en Infante (2010) e Infante y Puig (2011), se puede encontrar un estudio del sistema de signos de Marco Aurel, de cómo concibe las especies de números (que él llama «caracteres»), de qué clasificación hace de las ecuaciones (que él llama «igualaciones») en formas canónicas y de qué algoritmos plantea para resolverlas. Aunque la investigación de la que este estudio forma parte trata sobre las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones en el álgebra presimbólica, en el caso de Marco Aurel no se estudiaron éstas, sino que sólo se aventuró una hipótesis sobre de qué tipo podrían ser, ya que, como veremos más adelante, no hay demostraciones en el libro de Marco Aurel o la parte que se conserva de él.

Javier Docampo examinó someramente el libro de Marco Aurel con el propósito de compararlo con el Ms 71 de Sant Cugat que analizó en su tesis doctoral (Docampo, 2004), y Rosa Massa-Esteve lo hizo para compararlo con la forma en que Antich Rocha clasifica y resuelve las ecuaciones (Massa-Esteve, 2010). Finalmente, Fátima Romero Vallhonesta incluyó también a Marco Aurel en sus estudios comparativos de la forma de representar una segunda incógnita (Romero Vallhonesta, 2011) y de las notaciones (Romero Vallhonesta, 2012), en los que examina los textos de Marco Aurel, Juan Pérez de Moya, Antich Rocha, Pedro Nunes y Diego Pérez de Mesa.

PRECEDENTES

En este apartado damos cuenta de los escasos precedentes de aparición del álgebra en textos escritos en alguna lengua vernácula de la península ibérica anteriores al libro de Marco Aurel.

Un problema resuelto por Regula Recta

En el *Libro de Arismética que es dicho alguarismo*, editado por Caunedo y Córdoba, un manuscrito del siglo XIV, que es la primera aritmética comercial escrita en lengua castellana que se conserva, hay un problema resuelto por el procedimiento que Leonardo de Pisa en su *Liber Abacci* llama Regula Recta y atribuye a los árabes: «qua arabos utuntur» (Boncompagni, 1857, p. 191).

> Quistion, un ome avia su algo e non sabemos quánto e doblólo e despendió 8 y otra vez dobló lo que le quedó e despendió 9 e doblólo otra vez e despendió 12 y esto fecho, quedáronle 25, demando ¿quántas cosas tenía de comienço? (Caunedo y Córdoba, 2000, p. 200).

Éste es un clásico enunciado de problema de ábaco, del tipo cuya estructura admite una solución aritmética que tiene la forma más simple posible, ya que un diagrama de análisis del problema tiene estructura de cadena (Puig y Cerdán, 1988) y, por tanto, la síntesis se puede realizar invirtiendo las operaciones una a una. También es un problema que puede resolverse fácilmente usando el método pre-algebraico de falsa posición. Sin embargo, el anónimo autor de este texto no recurre a ninguna de esas soluciones, sino que lo resuelve de la siguiente manera:

> Fazlo por esta regla, pon el algo una cosa e dóblala e son 2 cosas y espendió 8 son 2 cosas menos 8 e dobló e son 4 cosas menos 16 e despendió 9 e son 4 cosas menos 25 e

> dobló 4 cosas menos 25 e 4 cosas menos 25 son 8 cosas menos [50] e despendió 12 son 8 [cosas] menos 62, añade estos 62 a 25 que dixieron que quedaban e son 87, parte estos 87 sobre 8 e viene a la parte 7/108 [sic, debería ser 10 7/8] y este es el algo que al comienzo tenía (Caunedo y Córdoba, 2000, p. 200).

Es decir, lo que hace es nombrar la cantidad desconocida, el «algo» que «non sabemos quánto», con la palabra «cosa» y, así nombrada, calcular con ella. No hace pues un análisis que vaya desde la incógnita a los datos, sino que el análisis que hace es un cálculo con lo desconocido nombrado como «cosa». Esto es lo que Leonardo de Pisa llama Regula Recta.

La Regula Recta no es, sin embargo, lo que en las álgebras medievales se trata usualmente en el capítulo de álgebra, sino que lo que en ellas se trata es alguna variante de lo que está expuesto en el libro de álgebra de al-Khwārizmī, es decir, definición de las especies de números con las que se hacen los cálculos, ecuaciones clasificadas en tipos, que puede que se presenten como una lista completa de posibilidades o como un conjunto de posibilidades que se sabe resolver, algoritmos de resolución de cada tipo, etcétera. El propio Leonardo de Pisa trató en el *Liber Abaci* la Regula Recta y el álgebra de al-Khwārizmī en lugares distintos del libro separados por más de doscientas páginas, como ya señalamos en Puig y Rojano (2004, p. 200).

Un anuncio no realizado

En el libro *Sumario breve de la pratica de la arithmetica y todo el curso del arte mercantivol bien declarado, el qual se llama maestro de cuento*, Tratado Segundo, «Capítulo septimo de la setena especia de la aritmética que se llama extracion de rayzes», Juan Andrés termina el artículo primero diciendo que con respecto a las «rayces asi quadradas como cubicas» sólo va a tratar «quanto baste a saberlas extraer de los números ocurrientes» y anuncia que «otras pertinencias suyas difusamente diremos en un tratado que queremos fazer del arte mayor siquiere arte de algibra» (Andrés, 1515, f51v). Sin embargo, de este tratado no se conserva ni noticia de que lo escribiera.

Un manuscrito en catalán

Docampo ha estudiado en detalle, en su tesis doctoral (Docampo, 2004) y en Docampo (2006), el Ms. 71 de la sección del Monasterio de Sant Cugat del Archivo de la Corona de Aragón. Este manuscrito contiene unos apuntes de lectura muy extensos de la *Summa* de Luca Pacioli, probablemente notas de estudio para preparar unas clases. Docampo asume que el manuscrito debió de escribirse entre 1500 y 1530, y apunta algunos indicios que permitirían atribuírselo a Joan Ventallol. Este manuscrito sería pues anterior a la impresión del libro de Marco Aurel, con lo que éste no sería el primer texto escrito en alguna de las lenguas vernáculas de la Península Ibérica. Ahora bien, seguiría siendo tanto el primer libro impreso, como el primer texto escrito en español.

Un contemporáneo y dos deudores inmediatos

En este apartado damos noticia de una aparición del álgebra contemporánea al libro de Marco Aurel, pero de valor sólo anecdótico (los añadidos algebraicos de Gonzalo Busto a su edición de 1552 de la *Aritmética* de Juan de Ortega), y de los libros que le siguieron inmediatamente en el tiempo y están basados en el libro de Marco Aurel: los tres de Juan Pérez de Moya de 1558, 1562 y 1573 y el de Antich Rocha de 1564. Mencionamos además, sin entrar en más detalles, el *Libro de Álgebra en Arithmetica y Geometria* de Pedro Nunes, impreso en español en 1567, pero escrito en portugués, según dice él mismo, unos treinta años antes, y nos limitamos a mencionarlo porque es un libro muy distinto del de Marco Aurel. Ahora bien, siendo el mejor de todos los libros de álgebra que se publican en español en el siglo XVI, cualquier estudio que se realice sobre el álgebra de la época debe referirse a él. También mencionamos sin más detalle la existencia de un manuscrito de Diego Pérez de Mesa de 1598, no publicado, que ha sido estudiado por Romero Vallhonesta (2007).

Gonzalo Busto, 1552

En el mismo año en que se imprime el libro de Marco Aurel, Gonzalo Busto imprime en Sevilla, con correcciones y añadidos suyos la *Aritmética* de Juan de Ortega (1552). En la propia página de la portada está anunciado que ha añadido en la parte de geometría «pruevas, con ciertos avisos subjetos al Algebra», y además «al fin deste tratado 13 exemplos de arte mayor». Es dudoso que Gonzalo Busto haya podido conocer el texto de Marco Aurel, y no sólo porque el suyo se publica sólo unos meses después, sino, sobre todo, porque los «13 exemplos», que sólo contienen la aplicación de algunas reglas para resolver esos problemas sin más explicación, no usan abreviatura alguna para los nombres de las especies de números, ni las italianas, ni las cósicas que usa Marco Aurel, sino que escribe «cosa», «censo», «cubo», etcétera, con todas las letras. Gonzalo Busto excusa el no dar explicaciones de los objetos y reglas del álgebra, diciendo que «no es necesario hazer aquí mencion; pues esta impreso todo lo que conviene a la pratica Algebratica en otros tractados compuestos por excellentes autores» (Ortega, 1552, fo. 233v). Cabe preguntarse a qué autores se refiere, pero no parece que se refiera a Marco Aurel.

Juan Pérez de Moya, 1558, 1562, 1573

El Bachiller Juan Pérez de Moya es autor del texto más popular en su época en el que aparece el álgebra. Se trata de la *Arithmetica práctica y speculativa* de 1562, que reúne, modifica y amplía tres libros suyos anteriores, entre los que se encuentra el *Compendio de la regla de cosa, o arte mayor*, que había publicado en 1558 en Burgos. Este libro y la parte de álgebra de la *Arithmetica práctica y speculativa* se basan en el libro de Marco Aurel, excepto en el uso de las abreviaturas, que no son las cósicas, sino las italianas, simplemente porque la imprenta no tenía los tipos para los caracteres cósicos, si hemos de creer lo que dice el propio Pérez de Moya. La mejor prueba de que Pérez de Moya sigue fielmente a Marco Aurel, según Rey Pastor (1926, p. 105), es que le copia hasta los errores. En 1573, Pérez de Moya integró ese libro en su *Tratado de Mathematicas*, ampliando la parte de álgebra, en particular con la inclusión de demostraciones de los algoritmos de resolución de las ecuaciones canónicas, que en la *Arithmetica práctica y speculativa* sólo se enunciaban.

Antich Rocha, 1564

Antich Rocha, que Rey Pastor con su habitual dureza califica de «figura insignificante en la historia que estamos bosquejando» (Rey Pastor, 1926, p. 109), presenta su libro como una recopilación. La primera edición, que no he podido localizar, es de 1564; la segunda, de 1565, explícitamente dice en la portada «*Arithmetica, recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora*, por Antich Rocha, en Barcelona, casa de Claudio Bornat, 1565», y unas páginas después, bajo el título «Cathalogo de los autores, de los quales ha sido recopilada esta presente obra», aparecen cincuenta nombres, entre los que no figura Marco Aurel. Sin embargo, en el «Libro quarto de la Arithmetica […] en el qual se trata la Arte mayor» pronto aparece. En el folio 231 recto, del capítulo sobre «números Sordos dichos Rayz de rayz quadrada, o números mediales, que cosa sean, y quantas especies ay dellos», titula un apartado «Quatro especies de números mediales traídas de Marco Aurel Aleman», y, en el folio 235 verso, dice al final de una explicación: «como lo nota todo Marco Aurel Aleman». Hay más referencias a «traído de Marco Aurel Aleman», pero, sobre todo, cuando aborda los algoritmos para resolver las formas canónicas de las ecuaciones, que él llama «ygualaciones», dice que lo va a hacer siguiendo a Marco Aurel:

> Fray Lucas de Burgo puso 6 ygualaciones, Marco Aurel Aleman puso 8 Albertucio de Saxonia puso 10 Estevan de la Rocha puso 4 Joan Scheubelio 3 Perez de Moya 7 aunque a la verdad pone 8 y despues las reduce a 4 he determinado de seguir a Marco Aurel Aleman y traerte 8 ygualaciones, en las quales están fundadas las respuestas desta regla: las 4 son simples y las 4 son compuestas (Rocha, 1565, fo. 264r).

Por lo que respecta pues a lo esencial del álgebra, el libro de Antich Rocha es deudor del de Marco Aurel y, por otro lado, muy inferior en desarrollo y extensión, excepto, según Massa Esteve (2010), por su intento de reducir los tipos de ecuaciones a dos, aunque, según Infante (2010), el mismo Marco Aurel reduce a dos los ocho tipos de ecuaciones que plantea.

El libro impreso de Marco Aurel y lo anunciado desconocido

El libro de Marco Aurel lleva en su título completo la indicación de que es el *Libro Primero, de Arithmetica Algebratica*, y al comienzo dice que la obra la ha dividido en tres partes:

> Considerando, amado Lector, la gran falta que en estos Reynos de España ay de la sciencia Mathematica, por ser ella tan necessaria, a los sabios verdaderos, me he atrevido de escrivir esta obra, la qual he partido en tres partes: Primera: Segunda: y Tercera. La segunda, sera para provar (en parte) por demostracion Geometrica, lo que en esta presente, y pª parte he puesto por numero: aunque en esta primera (en el arte mayor) lo que digo de numero, podras tambien tomar por linea. La tercera parte sera de Geometria Practica, para officiales mechanicos (Aurel, 1552, fo. 3r).

No tenemos más noticia de las partes segunda y tercera del libro que la que da Juan Vernet en una breve nota, en la que dice que el libro de Marco Aurel habría sido traducido al árabe, y que esa traducción contendría también esas partes que no se conservan en castellano:

> En el prólogo de la obra *De la fuerza y de la utilidad para quienes combaten con cañones* de Ibrāhīm b. Ahmad Ganim Arribas, cuya versión árabe se debe a Bejarano, se deduce que también se vertió al árabe «un libro de Alemán que es el más importante que hay en cuanto a la aritmética, álgebra y geometría». Me parece que aquí nos encontramos con una cita de excepcional importancia, pues debe referirse a la obra de Marco Aurel Alemán *Libro primero de aritmética algebrática* (Valencia, 1552) que introdujo en España la notación algébrica de los autores alemanes y parece inspirarse, directamente, en la de Rudolf. Además, si el texto árabe que nos conserva estas noticias es exacto, puede creerse que Aurel publicó las dos últimas partes de su obra, de las cuales no parece quedar constancia en las bibliotecas españolas (Vernet, 1974, p. 646).

Un estudio sistemático del libro primero o, mejor aún, de los tres libros de Marco Aurel si aparecieran los dos últimos o su traducción árabe, está pues por hacer. Estas pocas páginas pueden tomarse como el anuncio del comienzo de ese estudio.

Referencias

ANDRÉS, J. (1515). *Sumario breve de la pratica de la arithmetica y todo el curso del arte mercantivol bien declarado, el qual se llama maestro de cuento.* Valencia, España: Juan Joffre.

AUREL, M. (1552). *Libro primero, de Arithmetica Algebratica, en el qual se contiene el arte Mercantivol, con otras muchas Reglas del arte menor, y la Regla del Algebra, vulgarmente llamada Arte mayor, o Regla de la cosa; sin la qual no se podra entender el decimo de Euclides, ni muchos otros primores, assi en Arithmetica como en Geometria*. Valencia, España: En casa de Joan de Mey.

BONCOMPAGNI, B. (Ed.) (1857). *Scritti di Leonardo Pisano matematico del secolo decimoterzo. I. Il Liber Abbaci di Leonardo Pisano*. Roma, Italia: Tipografia delle Scienze Matematiche e Fisiche.

CAUNEDO, B. y CÓRDOBA, R. (2000). *El arte del alguarismo*. Salamanca, España: Junta de Castilla y León.

DOCAMPO, J. (2004). *La formación matemática del mercader catalán 1380-1521. Análisis de fuentes manuscritas*. Tesis doctoral, Universidade de Santiago de Compostela, España.

DOCAMPO, J. (2006). Reading Luca Paccioli's Summa in Catalonia: An early 16th-century

Catalan manuscript on algebra and arithmetic. *Historia Mathematica, 33*, 43-62.

INFANTE, F. (2010). *Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Abū Kāmil, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes*. Trabajo Fin de Máster del Máster de Investigación en Didácticas Específicas, Universitat de València, España.

INFANTE, F. y PUIG, L. (2011). Un estudio de las demostraciones de los algoritmos de solución de las formas canónicas de las ecuaciones de segundo grado en al-Khwārizmī, Marc Aurel, Juan Pérez de Moya y Pedro Nunes. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 283-301). Granada, España: SEIEM.

MASSA-ESTEVE, M. R. (2010). The treatment of equations in the Iberian Peninsula after Marco Aurel (1552): the Great Art of Antic Roca. En H. Hunger, F. Seebacher y G. Holzer (Eds.), *Styles of Thinking in Science and Technology. Proceedings of the 3rd International Conference of the European Society for the History of Science, Vienna, September 10-12, 2008* (pp. 103-111). Viena, Austria: OAW.

MEAVILLA, V. (1993). Una aproximación al «Libro primero de Arithmetica Algebratica» de Marco Aurel. En E. Filloy, L. Puig, y T. Rojano (Eds.), *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática. Historia de las ideas algebraicas* (pp. 65-95). México, México DF: CINVESTAV.

ORTEGA, J. (1552) *Tractado subtilissimo de Arismetica y de Geometria. Compuesto por el reverendo padre fray Juan de Hortega de la orden de los predicadores. Ahora de nuevo enmendado con mucha diligencia por Gonzalo Busto de muchos errores que havia en algunas impressiones pasadas.* Sevilla, España: Juan Canalla.

PARADÍS, J. y MALET, A. (1989). *La génesis del álgebra simbólica. Vol. 1. Los orígenes del álgebra: de los árabes al Renacimiento.* Barcelona, España: PPU.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid, España: Síntesis.

PUIG, L. y ROJANO, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / Londres: Kluwer Academic Publishers.

REY PASTOR, J. (1926). *Los matemáticos españoles del siglo XVI*. Madrid, España: Biblioteca Scientia.

ROCHA, A. (1565). *Arithmetica, recopilación de todas las otras que se han publicado hasta agora* (2.ª edición). Barcelona, España: En casa de Claudio Bornat.

ROMERO VALLHONESTA, F. (2007). *Una aproximació al pensament algebraic a l'Espanya del segle XVI. Estudi del manuscrit 2294 de la Biblioteca de la Universitat de Salamanca. Treball de recerca d'història de les ciències.* Barcelona, España: Universitat Politècnica de Barcelona.

ROMERO VALLHONESTA, F. (2011). The «rule of quantity» in Spanish algebras of the 16th century. Possible sources. *Actes d'història de la ciència i de la tècnica 4*, 93-116.

ROMERO VALLHONESTA, F. (2012). Algebraic symbolism in the first algebraic works in the Iberian Peninsula. *Philosophica, 87*, 117-152.

VERNET, J. (1974). La introducción de la ciencia occidental en el mundo árabe. En J. M. Barral (Ed.), *Orientalia Hispanica sive Studia F. M. Pareja octogenario dicata* (vol. I, pp. 645-646). Leiden, Los Países Bajos: Brill.

INVENCIÓN DE PATRONES PARA LOS DÍGITOS DEL CÓDIGO BRAILLE

Pattern design for the digits of Braille code

Aurora Del Río y Rafael Ramírez-Uclés
Universidad de Granada

Resumen

En algunas de las propuestas de su tesis doctoral, Encarnación Castro explora patrones numéricos mediante configuraciones puntuales (Castro, 1995). En una de las fases de su investigación, plantea a los estudiantes tareas de estudio de representaciones de números utilizando puntos, para posteriormente investigar los patrones que aparecían.

El diseño del código Braille permite contextualizar en una situación escolar la invención y búsqueda de patrones en configuraciones puntuales, ya que en este alfabeto para personas ciegas cobra una especial relevancia. Siguiendo el estudio realizado por Encarnación Castro hemos propuesto a los alumnos de Estalmat que inventen sus propios patrones para representar los dígitos en el código Braille y en este trabajo estudiamos los argumentos utilizados para esta organización.

Palabras clave: Configuración puntual; Braille; Talento matemático.

Abstract

In some of the proposals from her doctoral dissertation, Encarnación Castro explores numerical patterns employing dots configurations (Castro, 1995). In one of the steps of her investigation, she proposes to her students the study of number representations using dots, for subsequent analysis of the resultant patterns.

Braille code allows putting into context the design and search for patterns employing dots configurations in academic situations, due to the special importance of this alphabet for blind people. Following the study of Encarnación Castro, we have proposed our Estalmat students to devise their own patterns in order to represent the Braille digits, and in this work we study the reasoning behind these patterns.

Keywords: *Dots configuration; Braille; Mathematically gifted.*

Del Río, A. y Ramírez-Uclés, R. (2013). Invención de patrones para los dígitos del código Braille. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 151-158). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

Suponemos que para una investigadora su tesis doctoral es un trabajo que lleva asociado el recuerdo de múltiples sensaciones. Por esta componente emocional, partimos en nuestro homenaje de algunas de las ideas recogidas en su tesis (Castro, 1995).

> «Hay unanimidad entre los especialistas cuando consideran que un investigador creativo en matemáticas ha de tener predisposición innata, una inclinación favorable hacia esta labor». (p. 21)
>
> «La visualización es importante para la educación puesto que la comprensión alcanzada mediante elementos visuales y analíticos se complementan; por ello mismo, el aprendizaje debe lograrse integrando información que utilice ambos tipos de códigos.» (p. 48)
>
> Tarea 2: Elige tres números y represéntalos utilizando el mismo patrón de puntos. (p. 168)
>
> Tenemos que dejar en suspenso la segunda parte de nuestra hipótesis general: «Los sujetos en edad escolar, en especial aquéllos en los que predominan los procedimientos visuales, mejoran significativamente su trabajo con números al utilizar representaciones figurativas. (p. 310)

Creatividad, visualización y patrones. Hemos pretendido sintetizar las ideas anteriores planificando una experiencia con un grupo de alumnos de ESO que les motive para trabajar con representaciones figurativas de números. La relación entre el valor de un número y su representación mediante puntos es una cuestión que quizá haya podido surgir en un ascensor para sustituir los silencios incómodos o las insustanciales conversaciones atmosféricas mientras compartimos viaje hacia la última planta. ¿Por qué el botón del número 1 tiene cinco puntos?

La presente experiencia para la búsqueda de patrones en el código Braille tiene dos fases independientes. En una primera, dos alumnos de alto rendimiento matemático investigan la cuestión anterior e indagan en el proceso de formación del alfabeto Braille. En una segunda fase, con alumnos con talento matemático del proyecto ESTALMAT, propusimos una tarea de invención de un patrón para representar en código Braille los dígitos del 0 al 9 y la escritura del número 70 (un número muy especial por muchos motivos). Las dos fases de la experiencia pretenden que los alumnos seleccionados pongan de manifiesto distintas características de su capacidad matemática.

Para este trabajo hemos seleccionado algunas características de las expuestas por Freiman (2006), que no difieren en esencia de las de otros autores: el alumno con talento matemático es aquel que pregunta espontáneamente cuestiones que van más allá de las tareas matemáticas que se le plantean, busca patrones y relaciones, construye nexos, lazos y estructuras matemáticas, localiza la clave de los problemas, produce ideas originales, valiosas y extensas, mantiene bajo control los problemas y su resolución, presta atención a los detalles, desarrolla estrategias eficientes, cambia fácilmente de una estrategia a otra, de una estructura a otra, piensa de modo crítico y persiste en la consecución de los objetivos que se propone.

Aunque otras características pueden ir asociadas, hemos focalizado la primera fase en la búsqueda de patrones y relaciones. De hecho, esta primera tarea de investigación ha dado como resultado una búsqueda de respuestas con la que los propios alumnos han sido premiados en un concurso de investigaciones en estadística (Hernández y Quiles, 2013).

No obstante, nuestra principal intención se focaliza en la segunda fase. De las características del talento matemático, consideramos que la producción de ideas originales puede manifestarse en las argumentaciones que han presentado los alumnos para la invención y justificación de los patrones inventados. Sin profundizar en otras componentes del talento matemático que podrían manifestar en esta tarea (Krutetskii, 1996), ni en la posible preferencia de estos alumnos por los métodos no visuales (Presmeg, 1986), consideramos que en la elaboración de estos patrones se ponen en juego habilidades y procesos de visualización (Del Grande, 1990; Ramírez, 2012).

Descripción de las fases del trabajo

Fase 1: La lógica del código Braille

¿Cuál es el patrón que sigue el alfabeto Braille? ¿Por qué el número 1 se representa con cinco puntos? ¿Se podría reinventar el código Braille para que sea más eficiente? Estas tres preguntas fueron la guía de investigación para una alumna y un alumno de 4º ESO. Dichos alumnos fueron seleccionados por su alto rendimiento en la asignatura de matemáticas en la unidad didáctica de Combinatoria y se les propuso como trabajo de enriquecimiento curricular.

Inicialmente, y tras varias hipótesis que ellos mismos rechazaban al comprobar que eran ineficaces, no encontraron ningún patrón en las letras del alfabeto ni en los dígitos. Se les permitió que indagaran utilizando bibliografía y búsquedas guiadas en Internet. Compartimos resumidas algunas de sus respuestas.

¿Cuál es el patrón que sigue el alfabeto Braille?

Louis Braille publicó su sistema en 1827 reduciendo a seis el número de puntos utilizados y representando el alfabeto en lugar de sonidos como sugerían propuestas anteriores. Los puntos se representan en un cajetín de unos 5 mm de alto por 2,5 mm de ancho distribuidos como se muestra en la Figura 1. Las distancias entre cajetines y entre los puntos están normalizadas para adaptarse a la yema de los dedos. El patrón para la formación del alfabeto sigue el siguiente esquema. Para los tres primeros símbolos se eligen los puntos 1, 1-2 y 2 (ver Figura 2). Para los tres siguientes, se utiliza la misma combinación pero en la segunda columna: 4, 4-5 y 5 (ver Figura 3). Combinando el 1, el 1-2 y el 2 de la primera columna con los tres elementos anteriores de la segunda columna se obtienen 9 representaciones más (ver Figura 4).

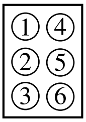


Figura 1.
Cajetín del código Braille

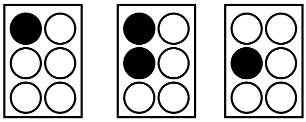


Figura 2.
Símbolos 1, 1-2 y 2 del proceso de formación

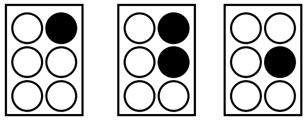


Figura 3.
Símbolos 4, 4-5 y 5

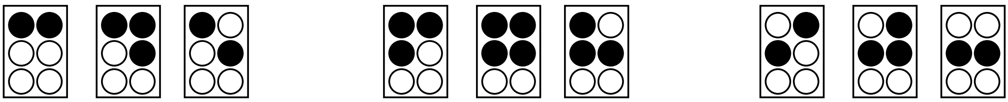
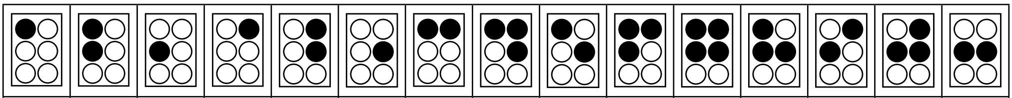


Figura 4. *Símbolos obtenidos de las combinaciones anteriores*

De estos 15 símbolos, se eliminan las combinaciones que podían confundirse con otros por el número o su posición, creando una primera serie de 10 símbolos que se asocia a las primeras letras del alfabeto (ver Figura 5).



a(1)	*b(2)*	*X*	*X*	*X*	*X*	*c(3)*	*d(4)*	*e(5)*	*f(6)*	*g(7)*	*h(8)*	*i(9)*	*j(10)*	*X*

Figura 5. *Primera serie de formación del código Braille*

A partir de esta serie, se forma el resto de series combinándolas con los elementos 3 y 6. Así la segunda serie es la anterior añadiéndole el punto 3, la siguiente serie añadiéndole el 3-6 y la siguiente con el 6. La quinta serie se obtiene desplazando las combinaciones de la primera serie un espacio hacia abajo en el cajetín, es decir, dejando la primera fila vacía. Las series 6º y 7º se obtienen con combinaciones del punto 3 con combinaciones de la segunda columna que no hayan sido utilizadas antes.

¿Por qué el número 1 se representa con cinco puntos?

Con el cajetín generador se podrían conseguir 64 signos que resultan insuficientes para representar el alfabeto, los dígitos, signos de puntuación, etc. Para obtener más símbolos, se procede a combinar varios cajetines. En el caso de los números, se utiliza el símbolo antes de uno de los símbolos de la primera serie (1=a, 2=b, 3=c, 4=d, 5=e, 6=f, 7=g, 8=h, 9=i y 0=j).

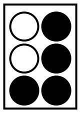


Figura 6. *Símbolo de número*

Tinta	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
Notación Braille	⠼⠁	⠼⠃	⠼⠉	⠼⠙	⠼⠑	⠼⠋	⠼⠛	⠼⠓	⠼⠊	⠼⠚
Código Braille	3456,1	3456,12	3456,14	3456,145	3456,15	3456,124	3456,1245	3456,125	3456,24	3456,245

Figura 7. *Dígitos en Braille (Fernández, 2004)*

¿Se podría reinventar el código Braille para que sea más eficiente?

En relación al abecedario, los alumnos abordaron esta cuestión estudiando la forma de asociar los símbolos generadores de la primera serie (símbolos desde a hasta j) a otras letras más utilizadas en el lenguaje español. Como muestra, analizaron las 100 primeras palabras del Quijote y de un texto de actualidad. Estas frecuencias coinciden con el estudio hecho sobre el Quijote completo, concluyendo que la primera serie estaría asignada a las letras a, e, i, o, u, s, n, r, d y l. Sin embargo, este planteamiento no reformula la asignación a los dígitos ya que están generados por la primera serie ideada por Braille. Esto nos llevó a proponer la segunda fase de nuestra investigación.

Fase 2: Invención de patrones para los dígitos del 0 al 9 y el número 70

Para esta segunda fase, elegimos un grupo de alumnos con talento matemático del primer curso del proyecto ESTALMAT. Previamente a la sesión de Combinatoria, les propusimos la siguiente tarea sin trasmitirle ningún tipo más de información.

Un cajetín para representar símbolos en el código Braille consta de los siguientes puntos que se van marcando para ser identificados por el tacto. ¿Cómo representarías los dígitos 0, 1, 2… 9? Explica el procedimiento que utilices. ¿Cómo representarías el número 70 con el sistema que has diseñado?

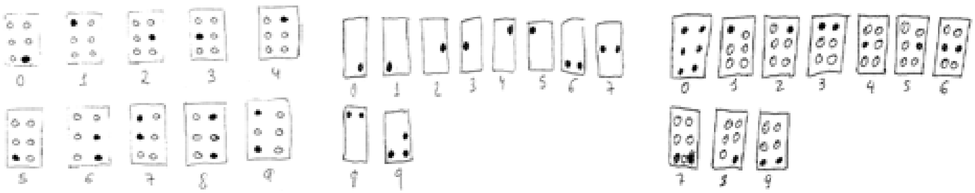
Resolvieron la tarea individualmente en menos de 10 minutos y se recogieron sus respuestas para el análisis posterior.

ANÁLISIS DE LAS RESPUESTAS DE LOS ALUMNOS

Hemos clasificado las respuestas de los alumnos en tres categorías, según el criterio que seguían en su propuesta: atendiendo a la posición de los puntos, atendiendo al número de puntos y otros criterios. También hemos descrito la construcción que hacen del número 70 a partir del patrón numérico que proponían.

Posición de los puntos

La construcción que hacen de los dígitos del 1 al 9 sigue un patrón en el que lo determinante es la posición de los puntos, independientemente del número de éstos. Eligen una posición de inicio y, a partir de ahí, rellenan con un único punto progresando de arriba-abajo y de izquierda-derecha, o viceversa, dependiendo de la posición de inicio. Cuando llegan al número 6 y se quedan sin posiciones libres, rellenan siguiendo el mismo criterio pero con un punto fijado y marcando dos puntos (Figuras 8.A y 8.B). Otros van completando filas, primero con un punto de derecha a izquierda, y el siguiente número lo escriben rellenado los dos puntos de la fila correspondiente (Figura 8.C). Otra propuesta que sigue este criterio es elegir una columna para los pares y otra para los impares y rellenar de arriba-abajo.

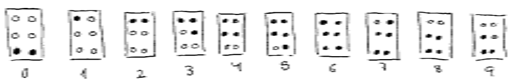


A B C

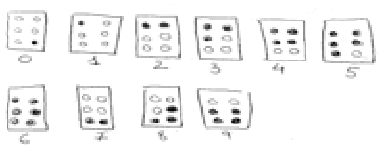
Figura 8. *Ejemplos del criterio posición de puntos*

Número de puntos

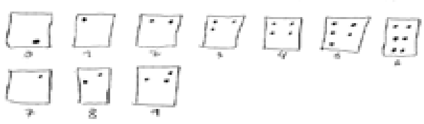
La construcción de los números se hace aumentando el número de puntos. En la mayoría de los casos el cero tiene una representación distinta, que no sigue ningún patrón para poder empezar por el 1 con un único punto. El orden de colocación de los puntos es diverso, de arriba-abajo, de izquierda-derecha. Los códigos 7, 8, 9 se obtienen quitando los códigos 1, 2 y 3 (Figura 9.A), códigos 4, 3 y 2 (Figura 9.B) o bien, repitiendo los códigos 1, 2 y 3, respectivamente desde la parte superior, previa reconfiguración de los puntos (Figura 9.C).



A



B

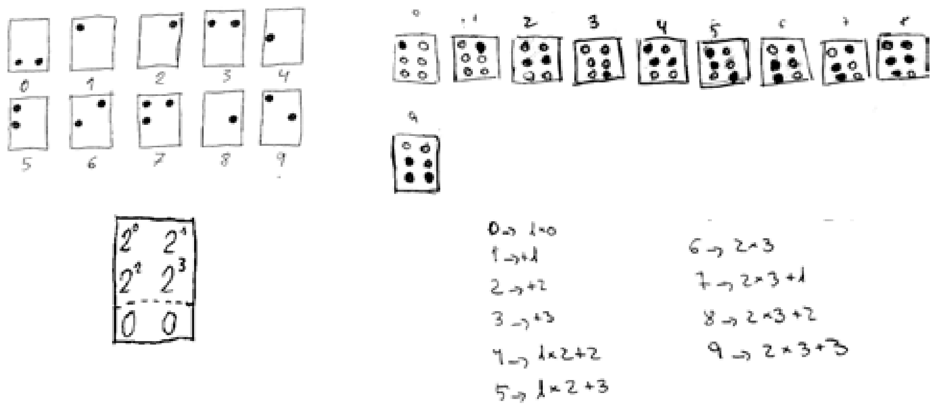


C

Figura 9. *Ejemplos del criterio números de puntos*

Otros criterios

Del resto de criterios destacamos el uso del sistema binario (Figura 10.A) para representar los dígitos o representar los 4 primeros dígitos y obtener los demás como combinaciones lineales de los anteriores o ir completando en orden hasta rellenar todos los puntos. En la Figura 10.B, la primera fila de cada ficha representa el 1, la 2º el 2 y la 3º el 3. La primera columna representa multiplicación y la segunda suma. Así, los números del 4 al 9 se obtienen multiplicando las posiciones (en orden descendente, 1, 2, 3) de los puntos resaltados en primera columna más la posición (en el mismo orden, 1, 2, 3) del punto resaltado en la segunda.



A B

Figura 10. *Ejemplos de otro criterios*

Por otra parte se les pedía que representaran el número 70 a partir de los dígitos construidos. En la mayoría de los casos usan una representación posicional, es decir, escriben 70 como el dígito 7 seguido del dígito 0. Algún alumno que proponía completar los números en lugar de representar los dígitos argumenta que «de mi forma sólo se puede hasta el 63», ya que este lo representa con los seis puntos y ya no le quedan más posibilidades. Otro usa un sistema semi-posicional, ya que en lugar de colocar dos fichas representa el 70 en una única ficha utilizando cada columna para un dígito. Con la construcción que hace de los números sí que puede representar el 70, pero no así otros como el 89, ya que se le solapan los puntos (ver Figura 11).

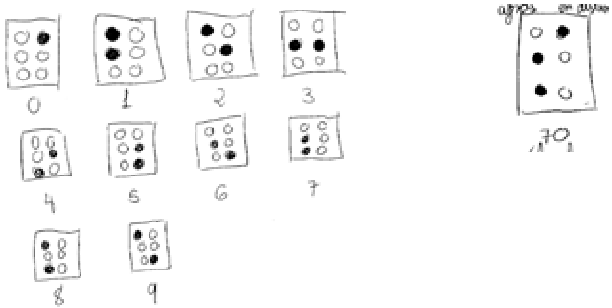


Figura 11. *Representaciones del número 70*

Especialmente en estos criterios más sofisticados se observa la predisposición que los alumnos tienen por aplicar sus conocimientos sobre propiedades numéricas o sistemas de numeración. Resaltamos la creatividad de algunas de las propuestas y la eficacia de los patrones propuestos, valorando la inmediatez de la respuesta (apenas cinco minutos), por lo que esperamos realizar un análisis más a fondo de esta tarea completándola con entrevistas personales. Asimismo, lo sobresaliente de las respuestas es que ninguno de los estudiantes se percata de la posibilidad de confusión de códigos «iguales salvo traslación» por un hipotético lector ciego.

Agradecimientos

Este trabajo se ha desarrollado dentro del proyecto EDU2012-37259 «Análisis de procesos de aprendizaje de estudiantes de altas capacidades matemáticas de E. Primaria y ESO en contextos de realización de actividades matemáticas ricas» subvencionado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Granada, España: Editorial Comares.

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37*(6), 14-20.

Fernández del Campo, J. (2004). *Braille y matemática*. Madrid, España: ONCE.

Freiman, V. (2006). Problems to discover and to boost mathematical talent in early grades: a challenging situations approach. T*he Montana Mathematics Enthusiast, 3*(1), 51-75.

Hernández, L. y Quiles, J. (2013). *Reinventemos el código Braille.* Manuscrito presentado al concurso Incubadora de Sondeos y Experimentos organizado por el Departamento de Estadística e Investigación Operativa de la Universidad de Granada.

Krutetskii, V. A. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children*. Chicago, IL: University of Chicago Press.

Presmeg, N. (1986). Visualisation and mathematical giftened. *Educational Studies in Mathematics, 17*(3), 297-311.

Ramírez Uclés, R. (2012). *Habilidades de visualización de los alumnos con talento matemático*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Granada, España.

INTRODUCCIÓN A LA ESTRUCTURA DE GRUPO MEDIANTE UN ENFOQUE GEOMÉTRICO Y ARTÍSTICO. UNA EXPERIENCIA CON ESTUDIANTES PARA MAESTRO

Introduction to the group structure by means of a geometric and artistic approach. An experience with preservice teacher training students

Francisco Ruíz
Universidad de Granada

Resumen

El estudio de estructuras suele presentar dificultades a causa de su elevado grado de abstracción. La visualización de elementos de estas estructuras puede facilitar su reconocimiento y la comprensión de algunas de sus propiedades. Con el fin de visualizar los grupos aditivos de las clases residuales Z_n, proponemos sustituir, en la correspondiente tabla pitagórica, los símbolos numéricos por algunos patrones geométricos coloreados, para resaltar las regularidades que aparecen en dicha tabla. De esta forma la tabla resultante conserva la estructura original y proporciona nuevos elementos geométricos que reducen el grado de abstracción al mismo tiempo que se obtienen diseños creativos que enfatizan la simetría. Los trabajos realizados por los estudiantes, resultaron ser elementos motivadores para introducir la estructura de grupo.

Palabras clave: Estructura de grupo; Diseños artísticos; Simetría; Visualización.

Abstract

The study of algebraic structures usually presents difficulties because of its degree of abstraction. The visualization of elements of these structures can facilitate their recognition and the understanding of some properties. In order to visualize the additive groups of the residual classes Z_n we propose to substitute the numeric symbols for certain colored visual patterns in the corresponding Pythagorean table, in order to highlight the regularities in the group. In this way, the resulting table maintains the original structure and provides new geometric elements to reduce the degree of abstraction and to obtain creative designs which emphasize the symmetry. The student's works became motivational elements for the study of the structure of group.

Keywords: *Artistic designs; Structure of group; Symmetry; Visualization.*

Ruíz, F. (2013). Introducción a la estructura de grupo mediante un enfoque geométrico y artístico. Una experiencia con estudiantes para maestro. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 159-166). Granada, España: Editorial Comares.

Introducción

La visualización en Matemáticas se ha convertido en un punto de referencia en la investigación en Educación Matemática, ya que la percepción sensorial es un importante camino de acceso al conocimiento. La información visual como generadora de imágenes y objetos mentales juega un papel importante en el aprendizaje de las Matemáticas. La capacidad para visualizar conceptos o problemas matemáticos requiere experimentación para interpretar y comprender información figurativa sobre los conceptos y poder manipularlos mentalmente, así como expresarlos de manera visual.

Numerosas investigaciones realizadas aportan datos que indican que muchas dificultades en el aprendizaje del Cálculo, el Álgebra y la Geometría pueden diluirse e incluso evitarse si a los estudiantes se les anima a usar e interiorizar representaciones visuales asociadas a dichos conceptos (Castro, Rico y Romero, 1997). Nadie duda de la importancia de la visualización en Geometría pero sí es cuestionable e innovador el utilizar la visualización para la enseñanza del Álgebra.

En los últimos años los currículos españoles de Enseñanza Obligatoria han ido alejándose de la denominada Matemática Moderna, teniendo este hecho importante repercusiones en la enseñanza de estructuras algebraicas, por lo que nuestros alumnos de Enseñanza Obligatoria no han oído hablar del concepto de grupo o de anillo. El hecho de que, en la época en la que se hizo la primera experiencia que narramos, sí figuraba en el plan de estudios de Magisterio una introducción a las estructuras algebraicas, justificaban nuestro interés en favorecer el acercamiento de los futuros maestros a un tipo de conocimiento matemático que ciertamente involucra una importante capacidad de abstracción, peculiaridad que, junto con la demostración y la precisión caracteriza a las Matemáticas.

Objetivos

Al realizar estas experiencias de aula, nuestra intención global fue intentar paliar las dificultades que nuestros estudiantes encontrarían en este proceso de abstracción, mediante: (a) una matemática visual derivada de las conexiones existentes entre Álgebra y Geometría y el uso de representaciones, (b) elementos de carácter motivador para los estudiantes como el uso de recursos tanto manipulativos como de tipo informático, y (c) la potenciación de la creatividad mediante la elaboración de diseños artísticos. En este trabajo se pretende que los estudiantes se percaten de que la comprensión de estructuras algebraicas, y la búsqueda de propiedades y relaciones, se pueden facilitar mediante la creación de patrones de carácter geométrico. Un segundo objetivo de esta experiencia es utilizar elementos de carácter motivador en la enseñanza, como la manipulación de medios físicos o tecnológicos que puede ayudar a los estudiantes que tienen dificultades para abstraer conceptos matemáticos.

Un tercer objetivo es favorecer la creatividad en los estudiantes en el aprendizaje de las Matemáticas. Esta creatividad, en nuestra experiencia, está ligada a la percepción de formas y patrones. El trabajo de realizar composiciones de formas y colores agradables estéticamente supone un esfuerzo por parte de los estudiantes en el manejo de regularidades, figuras geométricas y transformaciones, hasta conseguir la composición que satisfaga sus expectativas estéticas.

CONTEXTO Y DESARROLLO DE LA EXPERIENCIA

El presente trabajo describe dos experiencias realizadas en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada. La primera de ellas se realizó durante el curso 1993/1994 con estudiantes de tercer curso para maestros de Primaria de la especialidad de Ciencias, en la asignatura troncal de *Matemáticas*. La segunda experiencia se desarrolló durante el curso 2001/2002 con estudiantes de diversos estudios universitarios en la asignatura de libre configuración denominada *Didáctica de las Matemáticas y nuevas tecnologías de la información y la comunicación*.

Debemos destacar dos diferencias significativas entre ambos grupos de estudiantes. En la primera experiencia los estudiantes provenían del Sistema Educativo en cuyos programas figuraban estructuras algebraicas, eran todos estudiantes para maestros y, además, los medios utilizados fueron casi exclusivamente de carácter manipulativo, como diversos tipos de papel, fotocopiadora, tijeras y usando básicamente los colores blanco y negro. Los estudiantes del curso 2001/02 en cambio no estudiaron estructuras algebraicas previamente, y utilizaron exclusivamente medios informáticos para realizar las mismas actividades que el otro grupo. Estos estudiantes conforman un grupo diverso ya que lo componían estudiantes de otras carreras además de Magisterio.

En una primera fase el profesor expuso a los estudiantes los conceptos matemáticos que iban a trabajar, les explicó que se van a utilizar estructuras matemáticas para generar patrones y se resaltaron las propiedades de los elementos de dichas estructuras y las operaciones de un sistema algebraico. En nuestro caso se pretende que los estudiantes trabajen y se relacionen con la obtención de las clases residuales $(Z_n, +)$, que sean capaces de operar con estos nuevos elementos y que se familiaricen con tablas pitagóricas, así como aplicar algunos conocimientos geométricos ya conocidos como las isometrías planas.

En una segunda fase se pusieron a los estudiantes en contacto con materiales de carácter manipulativo (transparencias, fotocopias, retículas en papel vegetal, material de dibujo, etc.) y se les indicó que asignaran a cada elemento de la clase residual una forma geométrica. Una vez realizada esta asignación los estudiantes construyeron las tablas pitagóricas correspondientes con la suma y el producto.

A partir de este momento son los estudiantes los que debieron profundizar en las estructuras algebraicas realizando sus propias producciones, buscando propiedades y regularidades, identificando estructuras y realizando diseños artísticos en los que se valorara de manera importante la creatividad y el análisis de los mismos. Se instó a los estudiantes a que utilizaran transformaciones geométricas, inventaran nuevas figuras para crear nuevos diseños, y cambiaran los tipos de rejilla. Esta técnica puede cambiar la habilidad de los estudiantes para usar competentemente estructuras algebraicas y puede fomentar sus habilidades creativas (Forseth y Troutman, 1974). Esta presentación que hace el profesor de los conceptos matemáticos abordados y de las sugerencias de trabajo para los estudiantes, se hacen usando transparecias, para el primer grupo, y mediante presentación power point para el grupo que utiliza las computadoras. La Figura 1 muestra el organigrama que se utilizó para presentar el grupo aditivo (Z_4, +).

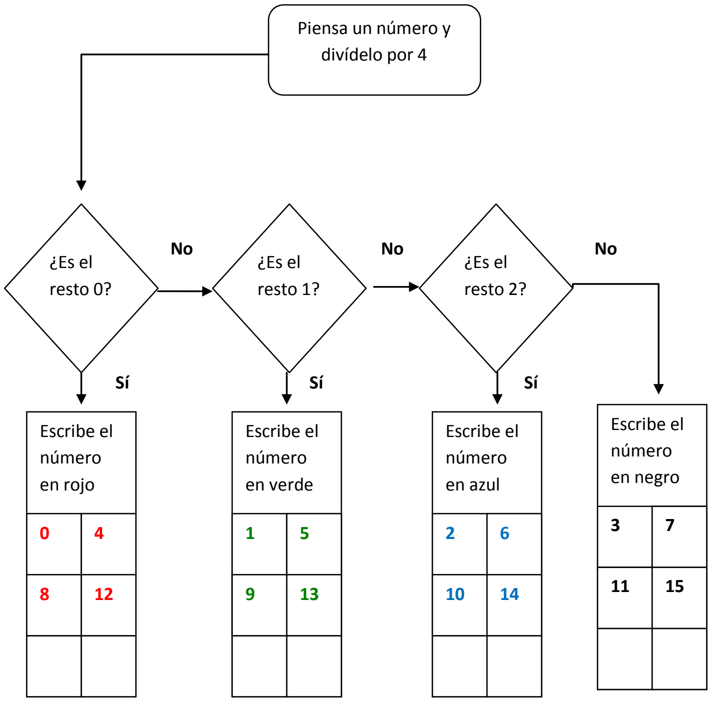
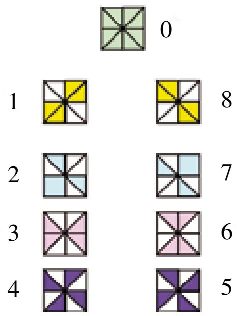


Figura 1. *Obtención de las clases residuales en Z4*

A continuación definimos la suma de clases y disponemos sus elementos en una tabla pitagórica. Para ello, nos ayudamos de los distintos colores que hemos asignado a las clases de equivalencia para denominarlas (clase roja, clase 0, o clase 4, por ejemplo, que es la clase elemento neutro). Distinguimos entre un número y una clase de números, por ejemplo, y aprovechamos para hablar de la diferencia que hay entre el número y el símbolo que lo representa. Lo que se plantea es cambiar el símbolo numérico usual por un dibujo o patrón geométrico diseñado a nuestro gusto. Ayudados de la Figura 2, sugerimos la idea de que cada par de elementos simétricos o inversos tenga formas geométricas complementarias, de manera que al juntarlas se obtenga siempre el mismo elemento, que sería el elemento neutro, como ilustra el ejemplo de (Z_9, +) en la Figura 2. Hacemos notar las regularidades que presenta la tabla, tales como la simetría según la diagonal principal, y comprobamos que esta simetría es consecuencia de la propiedad conmutativa de la suma.



+	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	2	3	4	5	6	7	8	0
2	2	3	4	5	6	7	8	0	1
3	3	4	5	6	7	8	0	1	2
4	4	5	6	7	8	0	1	2	3
5	5	6	7	8	0	1	2	3	4
6	6	7	8	0	1	2	3	4	5
7	7	8	0	1	2	3	4	5	6
8	8	0	1	2	3	4	5	6	7

Figura 2. *Asignación de patrones geométricos a las clases en* (Z_9, +)

También observamos como las diagonales paralelas a la diagonal secundaria están rellenas con la misma clase. Después de la sustitución de los símbolos numéricos por las figuras geométricas asociadas se obtiene una tabla isomorfa con la primera (Figura 3), que obedece a la misma estructura de grupo aditivo y que es susceptible de ser sometida a isometrías planas tales como reflexiones o rotaciones (Figura 4).

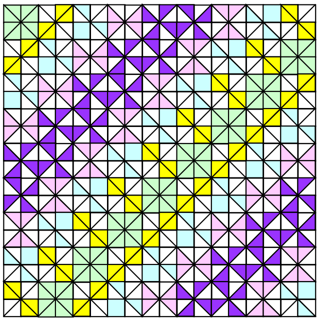


Figura 3. *Tabla pitagórica de* (Z_9,+)

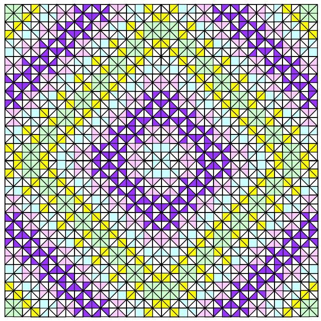


Figura 4. (Z_9,+) *sometida a reflexiones*

Después de las presentaciones del profesor, los estudiantes deben familiarizarse con estas estructuras por su cuenta, atendiendo a diversas variables: estructura aditiva o multiplicativa, elección del módulo, diseño de los patrones geométricos para las clases de equivalencia, rejilla asignada a la tabla, colores, isometrías planas elegidas para transformar la tabla, y distorsiones en su caso.

A continuación presentamos algunas producciones de estudiantes del primer grupo.

El trabajo de la Figura 5 toma como base el cuadrado para diseñar las clases, aunque las celdillas de la tabla tienen diferentes formas. El estudiante utilizó simetrías axiales con ejes perpendiculares (Figura 6). El trabajo de la Figura 7 toma como base el triángulo tanto para el diseño de cada clase como para la tabla, aunque las celdillas son triángulos y cuadriláteros. Se utiliza simetrías axiales y rotaciones, dando como resultados en ambos casos un hexágono regular (Figuras 8A y 8B).

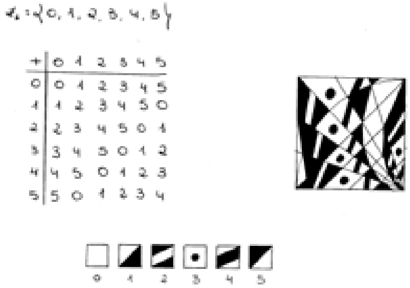


Figura 5. *(Z_6, +)*

Figura 6. *La tabla sometida a simetrías axiales con ejes perpendiculares*

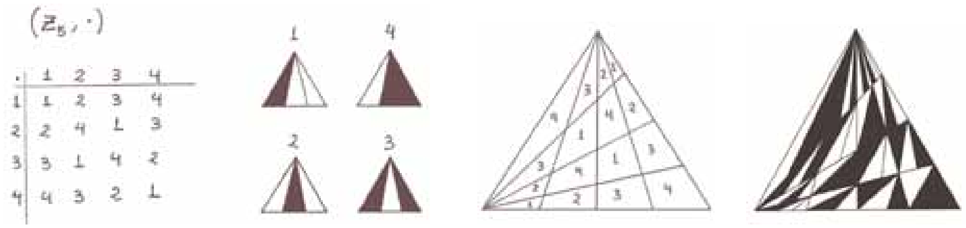


Figura 7. *Construcción basada en triángulos*

A

B

Figura 8. *Construcción que utiliza simetrias y rotaciones*

Existe una gran variedad de producciones realizadas por los estudiantes del segundo grupo, donde se utilizaron computadoras para diseñar celdillas, rejillas y también para realizar las isometrías planas elegidas, así como distorsiones. Algunas de ellas se muestran a continuación.

En los diseños de las Figuras 9 y 10 no existe relación geométrica entre las clases simétricas. Cuando se utiliza el producto de clases en lugar de la suma y observamos la tabla pitagórica correspondiente, la clase cero se convierte en elemento absorbente, estando la primera fila y la primera columna ocupada por él. Al realizar dos simetrías axiales de ejes perpendiculares, lo que se obtiene es una tabla «enmarcada» con esta clase 0, que caracteriza visualmente a las estructuras multiplicativas de este tipo. Este es el caso del trabajo de la Figura 11, en la que su autora utilizó una gran variedad de formas geométricas incluyendo triángulos, cuadrados y otros paralelogramos.

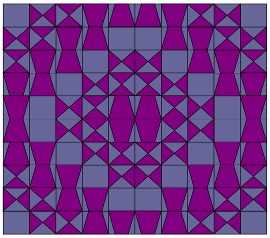


Figura 9. *(Z_6, +)*

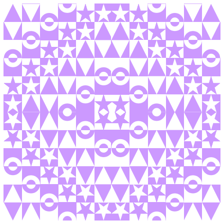


Figura 10. *(Z_7, +)*

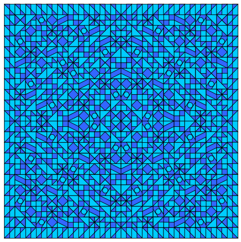


Figura 11. *Estructura multiplicativa*

En la Figura 12 se observa el marco negro que aparece alrededor de la tabla, una vez realizadas las reflexiones axiales de ejes perpendiculares. Esta estructura se identifica por tanto con una estructura multiplicativa, y corresponde a (Z_{10}, x). Una variación del mismo trabajo ha sido obtenido aplicando un efecto acuarela (Figura 13). El trabajo de la Figura 14 fue bautizado por su autor como la mezquita, después de haber conseguido, mediante deformaciones con la computadora, esos arcos a partir de una tabla pitagórica.

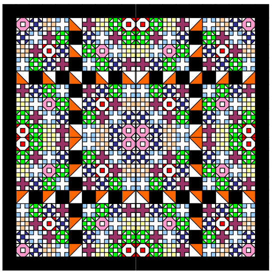


Figura 12. *(Z_{10}, x)*

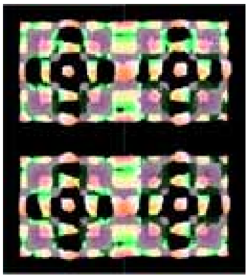


Figura 13. *Variación de (Z_{10}, x)*

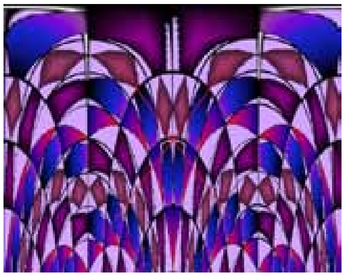
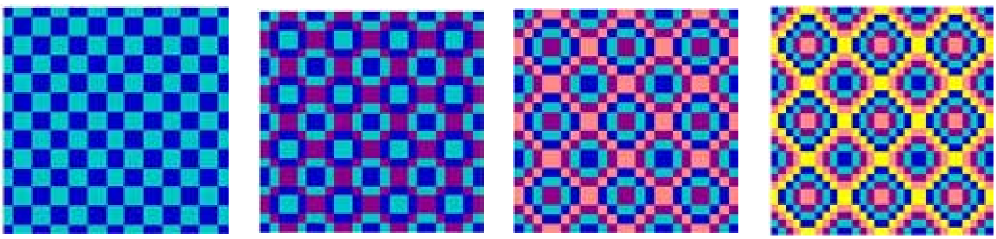


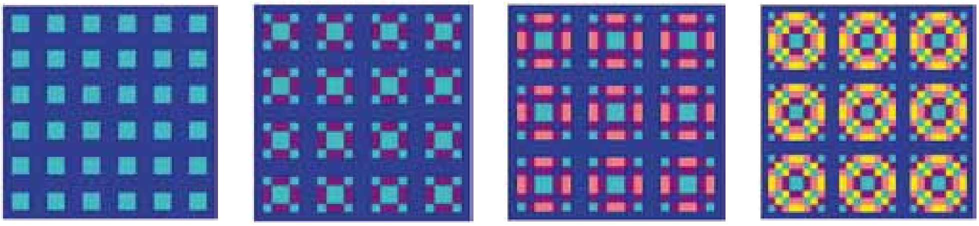
Figura 14. *La mezquita*

Las producciones de las Figuras 15 y 16 responden a la idea de ir incrementando el módulo en una unidad, obteniéndose en cada paso una clase añadida, y un color más, con el consiguiente cambio gradual en su configuración que evoca la noción de teselado.



(Z_2, +) *(Z_3, +)* *(Z_4, +)* *(Z5, +)*

Figura 15. *Estructuras aditivas*



(Z_2, x) *(Z_3,x)* *(Z_4, x)* *(Z_5, x)*

Figura 16. *Estructuras multiplicativas*

Conclusiones

De acuerdo con las observaciones del profesor y el análisis de las producciones de los estudiantes, se deduce que en general, estos se implicaron de una manera muy satisfactoria en esta actividad. La mayoría de ellos exploraron con éxito regularidades en estructuras algebraicas, e indagaron posibilidades mediante diseños creados por ellos mismos: relieve en forma de esfera, cambio de líneas rectas por composiciones de líneas en zig-zag, ampliación y contracción los diseños, arremolinan las líneas entorno a un centro, difuminan líneas, alteran ángulos, etc. Además realizaron rotaciones, reflexiones horizontales y verticales, alteraron las dimensiones de la retícula y cambiaron la perspectiva. También se comprobó que el uso de computadoras: (a) facilitó el diseño de las figuras geométricas y los efectos de distorsión; (b) mejoró la asignación de colores, la duplicación y alineación de elementos, etc; (c) facilitó la realización de las isometrías planas; y (d) proporcionó motivación especial a los estudiantes y su nivel de implicación en las tareas.

Dadas las características de la labor con los estudiantes, y teniendo en cuenta que este trabajo responde a una experiencia de aula, más que a una investigación formal, es evidente que las conclusiones relatadas se obtienen de la percepción del profesor a lo largo de las actividades realizadas con ambos grupos y no de datos estadísticos computados. Por otra parte debemos destacar que el principal interés del profesor estuvo más bien en conseguir de los estudiantes una actitud más favorable hacia las Matemáticas antes que en el aprendizaje de nuevos contenidos.

Referencias

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de Representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), *361-371*.

Forseth, S. y Troutman, A. (1974). Using mathematical structures to generate artistic designs. *Mathematics Teacher, 67(*5), 393-398.

BLOQUE 3

FORMACIÓN DE PROFESORES E INVESTIGACIÓN

INVESTIGACION EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA DE ALTA VISIBILIDAD E IMPACTO EN LA BASE SOCIAL SCIENCES CITATION INDEX

Research in mathematics education with high visibility and impact from the database Social Sciences Citation Index

Manuel Torralbo[a], Rafael Bracho[a] y Antonio Fernández-Cano[b]
[a]Universidad de Córdoba y [b]Universidad de Granada

Resumen

Este estudio pretende ofrecer una visión longitudinal de la investigación en educación matemática a nivel internacional con alta visibilidad, dada por su indexación en la conspicua base *Social Sciences Citation Index* de WOS *(Web of Science)*-ISI *(Institute for Scientific Information* de Filadelfia (USA), e impacto, calculado mediante indicadores de citación *ad hoc.* Así mismo, describe patrones cienciométricos emergentes de la investigación considerada relativos a indicadores de productividad (total, diacrónica y por revistas-fuente) y citación (tasas de citas, clásicos de citación, factores de impacto de revistas afines, diacronía en la citación e índice general h de Hirsch). En definitiva, ofrece una descripción cuantitativa pero fértil de la investigación en educación matemática, que es asimilable a la de otros campos de la ciencia, y que puede servir como guía para investigadores y profesores a la búsqueda de información cualificada.

Palabras clave: Base de datos Social Sciences Citation Index; Impacto por citación; Investigación en educación matemática; Patrones cienciométricos.

Abstract

This study aims to provide a longitudinal view of research in mathematics education at an international level with high visibility, given its indexing based on the eminent Social Sciences Citation Index of the WOS (Web of Science) -ISI (Institute for Scientific Information in Philadelphia (USA), and impact, calculated by ad hoc citation analysis. Likewise, it describes emergent scientometric patterns of the research under consideration relative to productivity indicators (total, diachronic, and source-journals) and citation (citation rates, citation classics, impact factor of related journals, diachronic citation and Hirsch's general index h). Ultimately, it offers a quantitative yet fertile description of research in mathematics education, which can be assi-

Torralbo, M., Bracho, R. y Fernández-Cano, A. (2013). Investigación en Educación Matemática de alta visibilidad e impacto en la base de datos Social Sciences Citation Index. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 169-176). Granada, España: Comares.

milated to other fields of science, and that can be used as a guide for researchers and teachers in search of approved information.

Keywords: *Citation impact; Database Social Sciences Citation Index; Research in mathematics education; Scientometrics patterns*

Investigación relevante

En el ámbito anglosajón se habla de *fully fredged research* para designar a aquella investigación relevante por visible, con riqueza conceptual, rigor metodológico y de impacto demostrado por su citación posterior. Tal investigación contribuye a la génesis y desarrollo de una disciplina científica pues acapara la atención de los miembros de una comunidad o «colegio invisible». En el ámbito de la información científica suelen ser documentos con formatos de artículo o de revisión; otros tipos de documentos como revisión de libro, comunicación congresual, nota, carta, corrección, bibliografía, etc. quedan omitidos. Las bases de *Thomson Reuters* (antiguas bases del ISI, ahora también conocidas con el dúo en acrónimo ISI-WOS) se han consolidado en la red como las fuentes básicas de información y evaluación científicas que denotan el estado y el vigor investigador de un sistema nacional, de sus agentes e instituciones (ver Fernández-Cano, 1999; 2011; para el subsistema de investigación educativa en España), una disciplina (como la educación multicultural en Vallejo, Ocaña, Bueno, Torralbo y Fernández-Cano, 2005) e incluso un determinado método de investigación (por ejemplo, el estudio de caso, en Delgado y Fernández-Cano, 2002).

El riguroso proceso de selección de revistas indexadas, junto a la posibilidad de conocer diversos índices de impacto a partir del recuento de las citas, principalmente el factor de impacto dado en la base *Journal Citation Reports* (JCRs), también de ISI-WOS, han transformado a estas bases en recursos indispensables para la evaluación de la ciencia y convirtiéndose sus indicadores cienciométricos en estándares de referencia ineludible. Sin embargo, no debiéramos magnificar estos indicadores en su funcionalidad paraevaluativa en el sentido de usarlos como indicadores únicos y sí combinados con otros indicadores de extracción nacional (Fernández-Cano, 1997).

Búsqueda documental de investigación relevante en educación matemática

Las bases del *Institute for Scientific Information* (ISI) de Filadelfia accesibles a través de la *Web of Science* (WOS), y en este estudio la base *Social Sciences Citation Index* (SSCI), permiten realizar búsquedas diversas utilizando múltiples campos relativos: tópico, título, autor, nombre de la publicación, año, dirección, idioma, DOI, tipo de documento y algunos otros más. Además, ISI-WOS posibilita refinar la relación de documentos recuperados al tipo de documento más cualificado: artículo y revisión.

Para localizar la investigación en educación matemática (desde ahora en adelante, abreviadamente, Ed. Mat.) indexada en la base SSCI, tenemos dos opciones posibles: usar el campo *topic* e incorporar términos propios de la Ed. Mat. (i.e. educat*, mathem*, learn*, teach*,…) o realizarla a través de las revistas específicas de Ed. Mat. La primera búsqueda sería por exceso, liberal, pues múltiples títulos no editados por revistas de Ed. Mat., podrían aparecernos; en el segundo caso, la búsqueda sería evidentemente conservadora pero más ajustada, aunque por defecto, pues trabajos afines a la Ed. Mat. publicados en revistas generalistas no serán recuperados. Hemos optado por usar la segunda opción al considerarla más acotada documental y sobre todo disciplinarmente, ya que, en definitiva, un campo disciplinar es manifiestamente definible por las revistas científicas que lo conforman. La cuestión es seleccionar aquellas revistas que son específicas del campo de la Ed. Mat.; para ello, hay que acudir a la base paralela *Journal Citation Reports* (JCRs) y localizar mediante una inspección ocular en las categorías temáticas educativas (*Education & Educational Research*, *Education Especial* y *Educational-Psychology*) aquellas revistas que por su título son de Ed. Mat. al contener un término propio de ésta.

Relación de revistas propias del campo de la Ed. Mat.[1] indexadas en los JCRs

Revisando la relación de revistas incluidas en las tres categorías educativas de los JCRs durante los últimos cinco años, se detecta una serie de revistas propias de la Ed. Mat. contenidas en la Tabla 1, y que adjuntamos con sus indicadores de temporalidad, producción e impacto (factor de impacto, cuartil de ubicación en la categoría e índice Hirsch[2] *h* de la revista).

[1] Podría ser cuestionable esta relación por reducida ya que algunas revistas indexadas en los JCRs publican investigación en educación matemática; este sería el caso de la revista española *Enseñanza de la Ciencias*. Sin embargo, se ha optado por considerar en puridad sólo aquellas que son específicas y eminentemente de ese campo. Una derivación de esta consideración sería poner de manifiesto la necesidad de una revista española exclusivamente centrada en educación matemática.

[2] Hirsch (2005) define su controvertido índice como: «Un científico tiene índice *h* si el *h* de sus *Np* trabajos recibe al menos *h* citas cada uno, y los otros *(Np - h)* trabajos tienen como máximo *h* citas cada uno». En definitiva, se trata de un indicador cienciométrico proevaluativo que combina datos de productividad y de citación. El ansia de elevar este valor ronda la obsesión llevando a prácticas espurias.

Tabla 1. *Revistas específicas de educación matemática indexadas en la base JCRs e indicadores cienciométricos afines*

Revista	Año	# Docs	FI_{2011}	Q	h
Journal for Research in Mathematics Education (JRME)	1986	553	1.500[3]	Q1	42
Educational Studies in Mathematics (ESM)	2009	250	0.549	Q3	7
Revista Latinoamericana de Investigación en Matematica Educativa-RELIME	2008	61	0.167	Q4	4
Bolema-Mathematics Education Bulletin-Boletim de Educacao Matematica	2008	203	0.000	Q4	1
International Journal of Science and Mathematics Education	2009	245	0.529	Q3	6
Mathematical Thinking and Learning	2009	57	0.393	Q3	5

Código: Año de entrada en ISI; # Docs: artículos + revisiones, total documentos relevantes; FI: Factor de Impacto en el año 2011; Q: Cuartil; h: índice de Hirsch

Hemos recuperado 1369 documentos *fully fredged* editados por las seis revistas específicas de Ed. Mat., que por cierto están todas incluidas en la categoría temática *Education & Educational Research*, propia de la base SSCI[4]. Tal producción acapara 9620 citas, por promedio 7 citas por documento, con un muy notable índice *h* de Hirsch global de 42; obviamente el «expurge» de otros tipos de documentos facilita al alza de este índice.

El patrón de hallazgos manifiesta la existencia de una revista nuclear de Ed. Mat. (JRME) presente en las base SSCI desde 1986 y que durante más de veinte años fue la única indexada[5]. Tal revista había alcanzado un aceptable factor de impacto (1.5) en los

[3] Referido al año 2010; incomprensiblemente JRME no aparece en los últimos JCRs, los de 2011. Es bien sabido que las bases JCRs de ISI-WOS son dinámicas; las revistas suben y bajan de *ranking* e incluso algunas desaparecen de los JCRS ese año si no se ajustan a una serie de criterios (el principal, ser citadas); ver Garfield (1990). Asombra como la revista JRME con una larga trayectoria en los JCRs y ubicada habitualmente en el primer cuartil (Q1), haya sido «sacada» de esa base.

[4] Hay que destacar que en los JCRs de Ciencia (*Science Edition*) existe la categoría temática, *Education, Scientific Disciplines*, relativa a cuestiones educativas y sobre todo de formación en campos como la medicina, física, química, biología, farmacia, ingeniería, electrónica, y otras disciplinas científicas y técnicas. Se denota la ausencia de una plausible y conveniente revista centrada en la formación superior de matemáticos tal como acontece en otros campos. Con esto no se está manifestando que ISI-WOS desconsidere las matemáticas, antes bien, al menos 245 revistas de los JCRs-*Science* contiene en su título el término *mathem**. Cuatro son las categorías temáticas de los JCRs, propias o afines del campo de la matemática: *Mathematical & Computational Biology* (con 47 revistas), *Mathematics* (289 revistas), *Mathematics, Applied* (245 revistas) y *Mathematics, Interdisciplinary Applications* (92 revistas) a las que incluso podríamos incluir también 116 revistas de *Statistics & Probability*.

[5] Mostrando nuestro estupor, remitimos un correo al organismo competente del *National Council of Teachers of Mathematics* de EE.UU. editor de esta revista (JRME), para tratar de recabar alguna razón

JCRs, que le permitía posicionarse en el primer cuartil (Q1) como revista de excelencia, alta visibilidad y notable impacto de citación.

El resto de revistas indexadas no llegan a alcanzar un factor de impacto 1, ello las ubica en cuartiles 3º y 4º, y su índice de Hirsch es menor que 10; valores estos, que aunque no son referentes arquimedianos de validez, sí tienen un cierta validación por su aceptación y uso en la comunidad científica.

Patrones cienciométricos

Patrón de productividad diacrónica

ISI-WOS permite analizar la producción recuperada ofertando tablas y gráficos pertinentes. La Figura 1 ofrece el histograma de la producción anual a lo largo de los últimos veinte años. Obviamente, no procede considerar el año 2013 por inacabado.

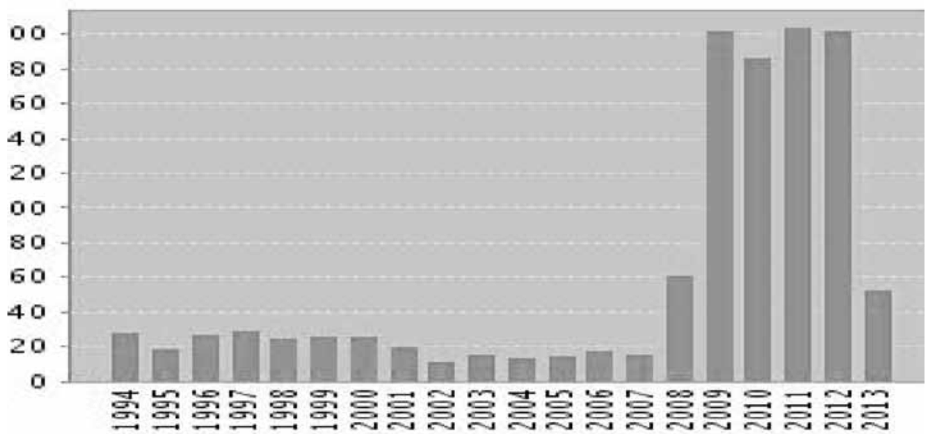


Figura 1. *Histograma de la producción diacrónica documental en Ed. Mat. indexada en la base SSCI (1994-2013)*

Obsérvese que la producción sigue un patrón lineal monótono ligado unívocamente a JRME hasta 2007; tras la incorporación de otras revistas tal producción da un salto abrupto para permanecer estable de 2009 a 2012. El sistema de investigación en Ed. Mat. que ISI-WOS configura podría haber entrado en el tercer estadio del crecimiento de la ciencia que describió Price (lineal-exponencial-logístico) y que se revisa prospectivamente en Fernández-Cano, Torralbo y Vallejo (2004, 2012), verificándose un patrón similar.

al respecto. Por el momento, no hemos obtenido respuesta. Posteriormente, en la edición de los JCRs de 2012, JRME reaparece con FI = 1.552 y rango 24º de 216 (Q1).

Patrón de citación diacrónica

ISI-WOS también permite realizar un análisis de la citación recibida por la población de documentos considerada tal como se visualiza en la Figura 2. Obviamente, tampoco procede considerar el año, 2013, por inacabado.

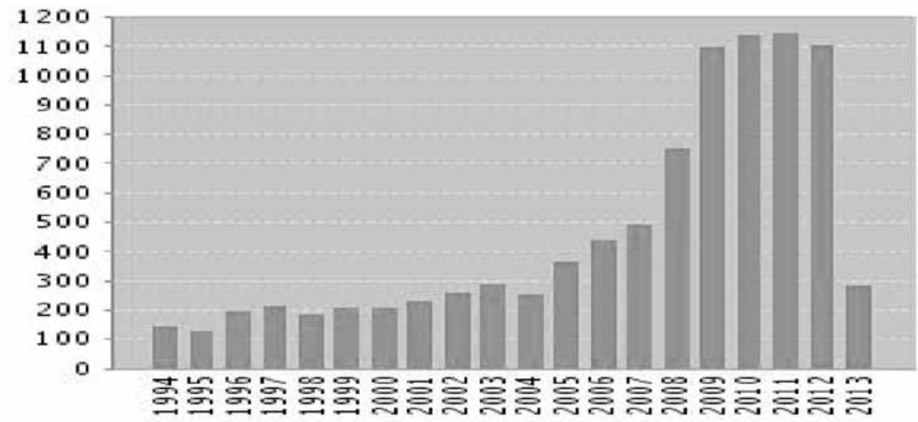


Figura 2. *Histograma de la citación diacrónica de documentos de Ed. Mat. indexados en la base SSCI (1994-2013)*

El patrón diacrónico del indicador de citación ofrece incluso un mejor ajuste al modelo de crecimiento científico (lineal-exponencial-logístico), que enunció Price (1986). Hasta 2005, se denota un crecimiento lineal ascendente para entrar en lo exponencial para el periodo 2006-2010. Sería aventurado proponer que se ha entrado en la fase logística para un período tan corto como sería el dado por el bienio de estabilización 2011-12.

Clásicos de citación

Garfield acuñó en 1977 la idea de clásico de citación como aquel documento altamente citado dentro de una determinada disciplina, pero sin marcar un número de citas predeterminado, aunque con el tiempo se consideró a todo documento que alcanza o ronda las cien citas. En la Tabla 2 se ofrecen los diez documentos indexados en la base SSCI (el ya casi popular *top ten*) que bien pudieran considerarse clásicos de citación de la Ed. Mat. Se trata de trabajos que han impactado profusamente la disciplina y han orientado en consecuencia la investigación posterior.

Tabla 2. *Clásicos de citación en Educación Matemática*

Rº	*Documento*	*Total Citas*	*Citas/año*
1º	Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 458-477.	214	11.89
2º	Webb, N.M. (1991). Task-related verbal interaction and mathematics learning in small-groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(5), 366-389.	168	7.30
3º	Hembree, R. (1990). The nature, effects, and relief of mathematics anxiety. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(1), 33-46.	128	5.33
4º	Hackett, G. y Betz, N.E. (1989). An exploration of the mathematics self-efficacy. *Journal for Research in Mathematics Education*, *20*(3), 261-273.	123	4.92
5º	Fennema, E., Carpenter, T.P.; Franke, M.L., et al. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, *27*(4), 403-434	116	6.44
6º	Nicholls, J.G., Cobb, P., Wood, T., et al. (1990). Assessing students theories of success in mathematics - individual and classroom differences. *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*(2), 109-122.	113	4.71
7º	Simon, M.A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 114-145.	112	5.89
8º	Greeno, J.G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(3), 170-218.	111	4.83
9º	Cobb, P., Yackel, E., y Wood, T. (1992). A constructivist alternative to the representational view of mind in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *23*(1), 2-33.	95	4.32
10º	Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., et al. (1991). Assessment of a problem-centered 2nd-grade mathematics project. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*(1), 3-29.	91	3.96

Obsérvese que la revista JRME acapara todos los clásicos de citación; algo obvio ya que tal revista era la única indexada y por tanto citable hasta 2008. Del resto de documentos contenidos en otras revistas, el artículo más citado con 17 citas es el de Gresalfi, Martin, Hand y Greeno (2009).

Autores altamente citados con al menos 200 citas totales son: Erna Yackel (851), Paul Cobb (703), Terry Wood (409), Thomas P. Carpenter (355), Elizabeth Fennema (321), Karen C. Fuson (311), Megan L. Franke (237) y Martin A. Simon (204), todos ellos procedentes de universidades norteamericanas.

Consideraciones finales

Este estudio ha puesto de manifiesto la existencia de un subsistema de investigación de alta visibilidad e impacto dado por la información sobre Ed. Mat. indexada en la base SSCI de ISI-WOS. Se ofrecen patrones relativos de productividad y citación de los documentos recuperados; pero al par se denotan aspectos puntuales, idiosincráticos, de cierto relieve, cual es la ausencia de la revista nuclear JRME en los JCRs de 2011 aunque ésta reaparece en los de 2012. También sería de interés particular indagar los 49 (3.58 %) documentos con autores cuya dirección es España.

Por archisabidos, son bien ostensibles sesgos diversos: a favor del inglés, *lingua franca* de la comunicación científica, con el 83. 37 % de la producción considerada, y a ámbitos científicos de USA, que acapara el 43.68 % de la producción total; aunque Brasil irrumpe con un notable vigor productivo (12.78 %) posicionándose en segundo lugar.

Este estudio es susceptible de una notable ampliación al incorporar indicadores de productividad según autoría y colaboración en tres dimensiones, tanto personal, como institucional y nacional, idioma de los documentos, de indicadores de subvención tanto de agencia como número de la ayuda (investigación financiada: *granted research*) y sobre todo un análisis temático de los títulos y descriptores afines. Ese trabajo de profundización al respecto sería sin duda bienvenido.

Referencias

Delgado, E. y Fernández-Cano, A. (2002). El estudio de casos en las bases del Science Citation Index, Social Sciences Citation Index y Arts and Humanities Citation Index. *Arbor. Ciencia, Pensamiento y Cultura, CLXXI*(675), 609-629.

Fernández-Cano, A. (1997). Evaluación de la investigación educativa española: Una revisión integrativa de realizaciones en 25 años. *Revista Española de Pedagogía, LV*(207), 277-301.

Fernández-Cano, A. (1999). Producción educativa española en el Social Sciences Citation Index (1988-1997). *Revista Española de Pedagogía, LVII*(214), 509-524

Fernández-Cano, A., Torralbo, M. y Vallejo, M. (2004). Reconsidering Price's model of scientific growth: An overview. *Scientometrics*, *61*(3), 301-321.

Fernández-Cano, A. (2011). Producción educativa española en el *Social Sciences CitationIndex* (1998-2009). II. *Revista Española de Pedagogía*, *LXIX*(250), 427-444.

Fernández-Cano, A., Torralbo, M. y Vallejo, M. (2012). Time series of scientific growth in Spanish doctoral theses (1848–2009). *Scientometrics*, *91*(1), 15-36.

Garfield, E. (1977). Introducing Citation Classics: The human side of scientific papers. *Current Contents*, *1*, 1-2.

Garfield, E. (1990). How ISI selects journals for coverage: Quantitative and qualitative considerations. *Current Contents*, *22*, 3-13.

Gresalfi, M., Martin, T., Hand, V. y Greeno. J. (2009). Constructing competence: An analysis of student participation in the activity systems of mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(1), 49-70.

Hirsch, J. E. (2005). An index to quantify an individual's scientific research output. *PNAS-Proceedings of the National Academy of Sciences*, *102*(46), 16569-16572.

Price, D.J.S. (1986). *Little science, big science … and beyond* (17.ª ed.). Nueva York: Columbia University Press.

Vallejo, M., Ocaña, A., Bueno, A., Torralbo, M. y Fernández-Cano, A. (2005). Producción científica sobre educación multicultural contenida en las bases de datos social Science Citation Index y Arts & Humanities Citation Index. *Revista Española de Documentación Científica*, *28*(2), 206-220.

CAMINOS DE APRENDIZAJE Y FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Learning paths in mathematics teacher education

Pedro Gómez[a], M.ª José González[b], Isabel Romero[c]
[a]Universidad de los Andes, [b]Universidad de Cantabria, [c]Universidad de Almería

Resumen

Inspirados en la idea seminal de Simon sobre trayectorias hipotéticas de aprendizaje, presentamos la idea de camino de aprendizaje de una tarea y describimos su función como herramienta para caracterizar los objetivos de aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares en función de las estrategias de resolución de tareas que se prevén en el tema y de los posibles errores en los que pueden incurrir los escolares. Indicamos posibles usos de esta noción en la instrucción y la evaluación.

Palabras clave: Camino de aprendizaje; Objetivo de aprendizaje; Trayectoria hipotética de aprendizaje.

Abstract

Inspired by Simon's seminal idea on hypothetical learning trajectories, we present the idea of learning path of a task and describe its role as a tool for characterizing the learning goals of a school mathematics topic in terms of the expected problem solving strategies and the possible mistakes of the students when they solve tasks linked to the topic. We suggest some uses of this idea in teaching and assessment.

Keywords: *Hypothetical learning trajectory, Learning goal; Learning path.*

Introducción

En su artículo seminal, Simon (1995) define la noción de trayectoria hipotética de aprendizaje como el camino por el que puede proceder el aprendizaje. Esta trayectoria está dirigida por el objetivo de aprendizaje y sirve para guiar la instrucción. Simon y

Gómez, P., González, M. J., y Romero, I. (2013). Caminos de aprendizaje y formación de profesores de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 177-183). Granada, España: Comares.

Tzur (2004) identifican tres elementos básicos de una trayectoria hipotética de aprendizaje: (a) los objetivos de aprendizaje, (b) las tareas y (c) las hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje. Este trabajo se enmarca dentro de la problemática reciente de investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de esta noción en programas de formación de profesores de matemáticas (Wilson, Sztajn y Edgington, 2013). Centramos nuestra atención en la noción de camino de aprendizaje como la idea que le permite al profesor en formación formular sus hipótesis sobre cómo se desarrolla el aprendizaje con motivo de unas tareas que buscan caracterizar las expectativas de aprendizaje y contribuir a superar los posibles errores que se puedan presentar.

Caminos de aprendizaje

Para planificar la enseñanza de cualquier tema de la matemática escolar el profesor establece lo que espera aprendan los escolares. Algunas de estas expectativas de aprendizaje hacen referencia al conjunto de conocimientos básicos y de procedimientos rutinarios que los escolares tienen que aprender. Corresponden al nivel cognitivo más bajo. Las denominaremos *capacidades*. Por ejemplo[1], en el tema permutaciones sin repetición para escolares de 16 años, «hacer uso de diagramas de árbol para realizar conteo de permutaciones posibles» es una capacidad. Durante el proceso de resolución de una tarea matemática de una cierta complejidad, los escolares van poniendo en juego distintas capacidades de una forma ordenada. Así, es posible describir una estrategia de resolución de una tarea mediante la sucesión de capacidades que se ponen en juego al resolverla. La noción de camino de aprendizaje capta esta idea.

Un *camino de aprendizaje* de una tarea es una sucesión de capacidades que se espera los escolares pongan en juego al resolverla.

Una tarea puede tener asociados distintos caminos de aprendizaje. Por otro lado, al resolver una tarea es previsible que los escolares incurran en errores propios del tema. Esos errores aparecen en momentos concretos del proceso de resolución de la tarea, de modo que se pueden incorporar a los caminos de aprendizaje. Veamos un ejemplo en la tarea denominada *T1.Letras*.

> *T1.Letras*. ¿De cuántas maneras posibles puedo ubicar las letras A, B, C y D seguida una de la otra y teniendo en cuenta que ninguna de ellas se puede repetir?

La Figura 1 presenta cinco caminos de aprendizaje posibles para la tarea T1 junto con los errores previstos[2].

[1] En este texto utilizamos ejemplos producidos por el grupo 5 de MAD 2, compuesto por David Benavides, Andrés Carrillo, Milena Ortiz, Sara Parra y Carlos Velasco. La idea de secuencia de capacidades que se presenta más adelante surgió de una propuesta de este grupo dentro de este programa de formación.

[2] Podemos encontrar las capacidades y los errores a los que se refieren estos caminos de aprendizaje en http://cl.ly/2N2a0y3Z3s3Y.

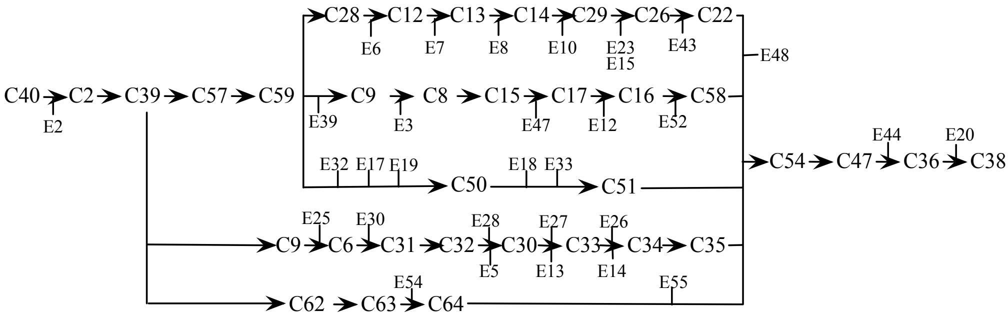


Figura 1. *Caminos de aprendizaje y errores previstos para la tarea T1*

Caminos de aprendizaje de secuencias de capacidades

Los caminos de aprendizaje, vistos en su totalidad, pueden resultar ininteligibles. Pero una parte de la información recogida en ellos se puede expresar de un modo más sencillo. La noción de secuencia de capacidades nos permite simplificar los caminos de aprendizaje sin perder la referencia a las capacidades.

Un trozo de un camino de aprendizaje de una tarea es una *secuencia de capacidades* cuando es posible interpretar su sentido en el proceso de resolución de la tarea.

En los caminos de aprendizaje de la tarea T1 (Figura 1) podemos identificar varias secuencias de capacidades. Por ejemplo, la secuencia C39 permite identificar cuáles son los sistemas de representación útiles al cálculo de permutaciones en función de los datos que aporta la tarea. En ese momento, se produce una primera decisión sobre la estrategia a seguir, separando el conteo directo de otros métodos indirectos. Si se elige el conteo directo, las secuencias C28-12-13-14-29-26-22, C9-8-15-17-16-58, y C50-51 representan las estrategias asociadas a la utilización de distintos sistemas de representación: un diagrama de árbol, una tabla y una lista, respectivamente. Cada una de ellas prevé la aparición de errores ligados al correspondiente sistema de representación. Por ejemplo, si se emplea un diagrama de árbol, se prevé que los escolares construyan un árbol con igual número de ramificaciones en cada nivel (E6). En la Figura 2 mostramos los caminos de aprendizaje simplificados. Más adelante nos detendremos en el resto de las secuencias de capacidades de esta tarea.

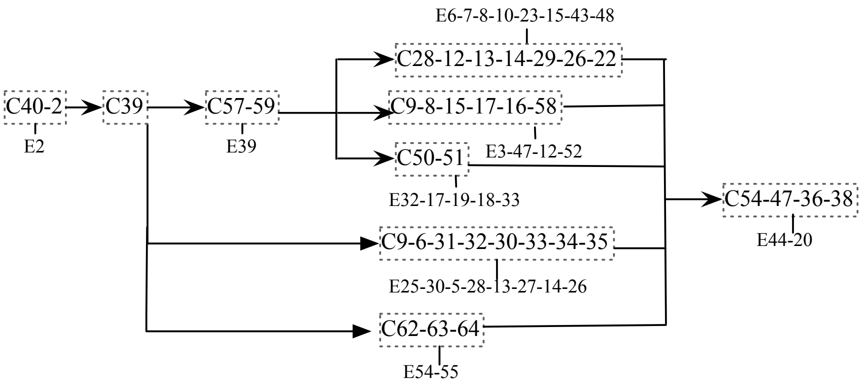


Figura 2. *Caminos de aprendizaje simplificados de la tarea T1*

En ocasiones, aparecen secuencias de capacidades diferentes pero con algunas similitudes. Por ejemplo, secuencias de capacidades que varían en una sola capacidad, o que tienen las mismas capacidades en un orden distinto. Sin embargo, su interpretación es la misma en el proceso de resolución de las tareas correspondientes. En estos casos, consideramos a las secuencias equivalentes. Ejemplificaremos esta idea más adelante.

Caracterización de los objetivos de aprendizaje de un tema de las matemáticas escolares

Hemos denominado capacidades a las expectativas de aprendizaje del nivel cognitivo más bajo; denominaremos objetivos a las más complejas. Así, un objetivo expresa expectativas que involucran conexiones entre los conceptos y procedimientos del tema matemático, los sistemas de representación en que se representa y los fenómenos que organiza. Por ejemplo, en el tema de permutaciones sin repetición es un objetivo el que llamaremos *O3: Establecer la cantidad de permutaciones sin repetición posibles en un conjunto dado*.

A través de los caminos de aprendizaje podemos dar una caracterización de los objetivos de aprendizaje en función de las estrategias de resolución de tareas que se prevén en el tema y de los errores en los que pudieran incurrir los escolares. Veamos cómo.

A cada objetivo de un tema se le pueden asociar un conjunto de tareas prototípicas, es decir, tareas tales que si un escolar las resuelve, entonces el profesor considera que ha desarrollado el objetivo. Al colocar juntos los caminos de aprendizaje simplificados y los errores previstos de esas tareas prototípicas se obtiene el grafo de aprendizaje del objetivo. Dicho grafo proporciona una representación del objetivo en términos de las estrategias de resolución de tareas y de los errores que se prevén en el tema. A partir del grafo se obtiene una valiosa información sobre el modo en que el objetivo se pretende desarrollar.

Por ejemplo, el objetivo O3 anterior está asociado a dos tareas prototípicas. Una de ellas es la tarea T1 que vimos antes. La otra es la tarea T2 siguiente.

T2.Podios. En una competencia atlética participan 5 personas. David dice que se pueden obtener 12 podios diferentes. Camilo afirma que podrían ser 15. Sin embargo, Carlos encontró 60. ¿Quién tiene la razón? Justifique su respuesta.

Los caminos de aprendizaje simplificados de esta tarea se presentan en la Figura 3.

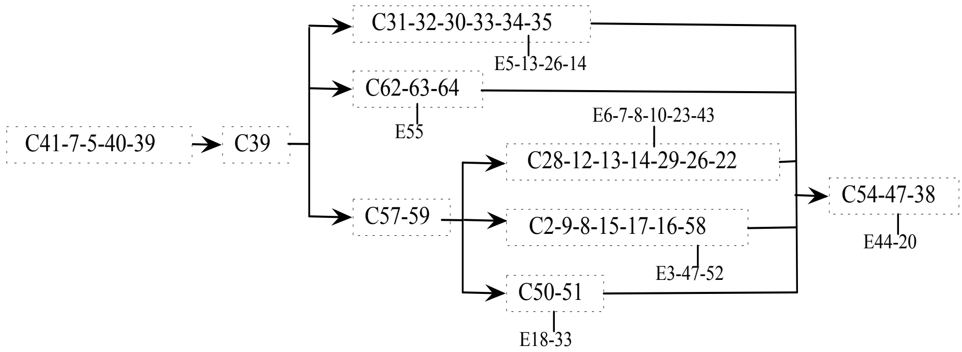


Figura 3. *Caminos de aprendizaje simplificados de la tarea T2*

En los caminos de aprendizaje simplificados de las tareas T1 y T2 (Figuras 2 y 3) se aprecia que comparten varias secuencias de capacidades equivalentes. Teniendo en cuenta estas secuencias, podemos reunir los caminos de aprendizaje simplificados de las dos tareas con sus correspondientes errores, formando el grafo del objetivo de aprendizaje (Figura 4). Los números situados junto a las secuencias o sobre las flechas indican la frecuencia correspondiente. Si no aparece ningún número significa que la frecuencia es uno.

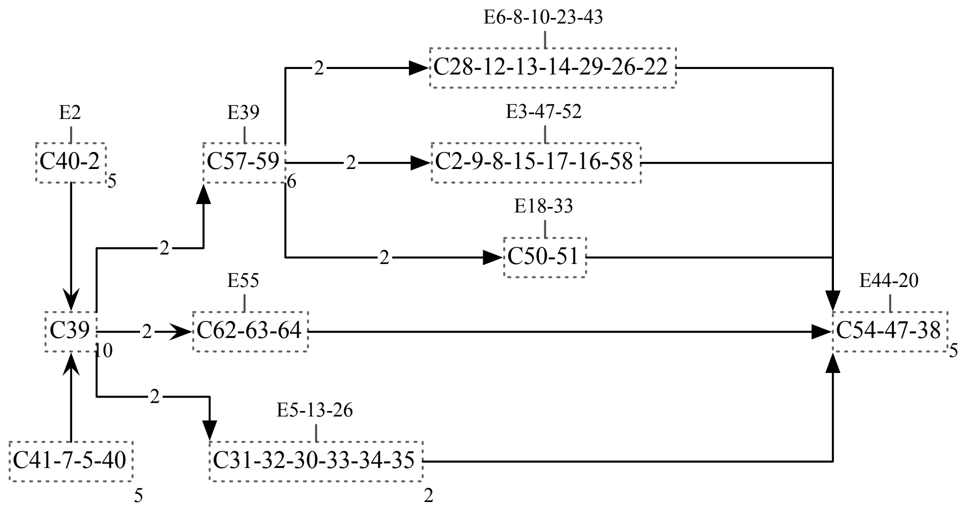


Figura 4. *Grafo del objetivo de aprendizaje O3*

En el grafo de la Figura 4 destacan por su frecuencia cuatro secuencias de capacidades. Las dos primeras, C40-2 y C41-7-5-40, se corresponden con identificar en el enunciado que el problema se resolverá mediante permutaciones y a extraer los datos necesarios para realizar el cálculo. En ese momento se prevé que los escolares incurran en el error de tomar elementos repetidos para realizar el cálculo de permutaciones (E2). Las dos secuencias anteriores aparecen seguidas de C39 reiteradas veces, punto en el que los escolares deciden si utilizarán un método de cálculo directo o indirecto. Si el cálculo es directo, la secuencia C57-59 representa la decisión sobre el sistema de representación en el que se hace conteo y las estrategias consiguientes, como hemos detallado en el ejemplo de la tarea T1. Si el conteo es indirecto, se prevén dos métodos, representados por las secuencias C62-63-64 y C31-32-30-33-34-35, que corresponden al empleo del principio multiplicativo y al cálculo mediante la fórmula, respectivamente. En ese momento se prevé que los escolares incurran en errores relacionados con un mal uso de la fórmula, como confundir parámetros, calcular mal el factorial, o interpretar mal un número combinatorio (E5-13-26). Finalmente, todos los caminos comparten la secuencia C54-C47-C39, que corresponde a exponer la cantidad pedida o a verificarla sobre los sistemas de representación (si se usaron). Es previsible que en esta parte los escolares incurran en errores relacionados con un conteo equivocado y, en consecuencia, con la obtención de una solución incoherente (E44-20). La Figura 5 expresa la caracterizacióndel objetivo de aprendizaje O3 en función de las estrategias de resolución de tareas yde los errores previstos.

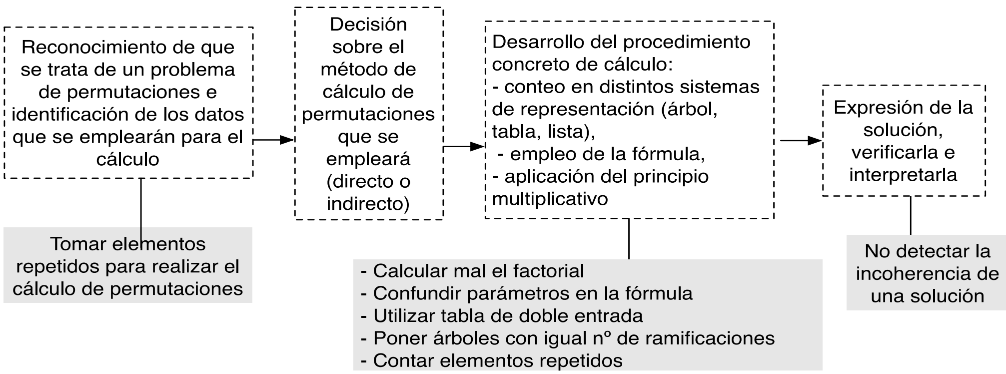


Figura 5. *Caracterización del objetivo O3*

Caminos de aprendizaje, enseñanza y evaluación

Analizar la contribución de una tarea al logro de un objetivo de aprendizaje implica dos pasos: (a) producir los caminos de aprendizaje de la tarea y (b) comparar las secuencias de capacidades que el profesor prevé que se pueden activar con una tarea con las secuencias de capacidades que caracterizan un objetivo de aprendizaje. Al hacer la comparación, podemos establecer cuáles de las secuencias de capacidades que caracterizan el objetivo de aprendizaje se activan con la tarea y cuáles no. Este análisis de las tareas nos proporciona información relevante para diseñar una secuencia de tareas que induzca a los escolares a activar las secuencias de capacidades, poner en práctica las estrategias y abordar los errores que caracterizan el objetivo de aprendizaje.

Los caminos de aprendizaje también son útiles en la evaluación. Al permitirle al profesor prever las diferentes formas en que el aprendizaje se puede desarrollar, constituyen una herramienta para diseñar criterios de logro, así como instrumentos de recogida de información y procedimientos de análisis, de cara a conocer en qué medida y de qué forma sus escolares han progresado en su aprendizaje con motivo de las tareas que él les ha propuesto. Sobre la base de la caracterización del objetivo 3 a partir de su grafo, podemos establecer criterios de logro como ser capaz de reconocer aquellas situaciones en las que es posible y adecuado utilizar el principio multiplicativo para establecer la cantidad de permutaciones sin repetición. Una vez establecidos los criterios de logro, las capacidades y los errores previstos en los caminos de aprendizaje servirán para observar y caracterizar, durante el proceso de instrucción y a través diferentes instrumentos, el progreso de los escolares hacia la consecución del objetivo.

Agradecimientos

Agradecemos a Encarnación Castro sus contribuciones a la Educación Matemática en el área del Pensamiento Numérico y Algebraico; ellas han inspirado algunas de las ideas que presentamos en este capítulo.

Este trabajo ha estado financiado parcialmente por el proyecto Procesos de aprendizaje del profesor de matemáticas en formación, EDU2012-33030 del Ministerio de Economía y Competitividad (España).

Referencias

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal For Research in Mathematics Education, 26*(2), 114-145.

Simon, M. A. y Tzur, R. (2004). Explicating the role of mathematical tasks in conceptual learning: an elaboration of the hypothetical learning trajectory. *Mathematical Thinking and Learning, 6*(2), 91-104.

Wilson, P. H., Sztajn, P. y Edgington, C. (2013). Designing professional learning tasks for mathematics learning trajectories. *PNA, 7*(4), 133-141.

ANÁLISIS DEL PROPÓSITO DE LAS TAREAS CONTEXTUALIZADAS EN EL MARCO DE LA FORMACIÓN DE PROFESORES

Analyzing the purpose of contextualized tasks in teacher's training

Antonio Moreno y Antonio Marín
Universidad de Granada

Resumen

Este artículo enuncia y aplica criterios para analizar el propósito del profesor cuando se planifica una lección y los potenciales propósitos y utilidades del alumno respecto a una tarea escolar. El análisis se realiza con tareas diseñadas por profesores de secundaria en un curso de formación orientado al desarrollo de las competencias PISA. Los criterios aplicados se fundamentan en las nociones de propósito y utilidad propuestos por Ainley.

Palabras clave: Contextos; Diseño de tareas escolares; Formación del profesorado; Propósito de las tareas.

Abstract

This article explains and applies criteria for analyzing the teacher's purpose in lesson planning and the student's perceptions about the purpose and utility of a task. The analysis is focused on tasks designed by secondary teachers who participated in a training course to design tasks targeted toward the development of PISA's competencies. The criteria applied are based on the constructs of purpose and utility suggested by Ainley.

Keywords: *Context; Purpose; Task design; Teacher training.*

Tareas contextualizadas y propósito del profesor en la formación del profesorado

La utilización de tareas escolares en Secundaria haciendo referencia a contextos obedece a diferentes orientaciones (Ainley, 2012, pp. 90-91). ¿Qué propósito tiene el profesorado de enseñanza secundaria cuando propone a los estudiantes tareas escolares

Moreno, A. y Marín, A. (2013). Análisis del propósito de las tareas contextualizadas en el marco de la formación de profesores. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 185-191). Granada, España: Comares.

referidas a un contexto de la vida real? Posiblemente lo hace para centrarse en metas de la enseñanza de las matemáticas ligadas a la aplicabilidad de la Matemática y reflejadas en orientaciones curriculares actuales.

Sin embargo, esta función de las tareas contextualizadas consistente en actuar como puente entre la clase y la vida diaria no se realiza con eficacia (Ainley, 2012, p. 90). La autora refiere diferentes investigaciones en las que no se consigue y añade que hay al menos dos propósitos más que inducen a manejar tareas contextualizadas en la enseñanza de las matemáticas: incrementar la motivación de los estudiantes o ayudar a comprender los significados de las nociones matemáticas mediante modelos de la vida real que simulan la noción matemática.

Por otra parte, es un objetivo de la formación de profesores suministrar herramientas para que el profesorado en formación tome las decisiones adecuadas sobre los propósitos con los que se eligen o diseñan las tareas.

Los autores[1] de este estudio hemos sido profesores de un curso virtual de 100 horas de formación permanente de profesores de secundaria durante varios años (2008-2012) orientado a la selección, modificación o diseño de tareas escolares favorecedoras del desarrollo de las competencias matemáticas que el marco de evaluación PISA. En este curso hemos planteado un estudio sobre los propósitos que guiaban a los profesores en formación cuando propusieron tareas contextualizadas orientadas al desarrollo de la competencia de Modelizar.

El programa del curso contiene formación sobre dos temas generales del análisis didáctico (Gómez, 2007, pp. 36-76), el análisis del contenido y el análisis cognitivo; tres temas orientados al análisis y diseño de tareas para el desarrollo de las competencias de Pensar y Razonar, Modelizar y Representar y un tema referido a la Evaluación en un marco de competencias. El producto final consistió en que cada profesor elaborase una Unidad Didáctica en la que se potenciase el desarrollo de algunas competencias.

Para mejorar el diseño del curso los autores valoramos la necesidad de tener más información acerca de la forma en que los profesores utilizaron las tareas contextualizadas.

La segunda línea de exploración que nos propusimos abordar consistió en analizar si las tareas que el profesorado propuso poseen cierto grado de interés, motivación o importancia para los alumnos de modo que se involucren con fuerza en su resolución y valoren su potencialidad matemática. Cuando el profesor planifica es el momento de elegir las tareas y en ese periodo surgen los interrogantes acerca de si la tarea será aceptada y valorada por el alumnado. Interrogantes que no podrá resolver hasta que no la trabaje en el aula aunque vendría muy bien estar dotado de criterios que le facilite la elección.

[1] Junto con el Dr. José Luis Lupiañez Gómez del Dpto. de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Para fundamentar el análisis adoptamos la perspectiva de Ainley, Pratt y Hansen (2006) que precisan las nociones de propósito y utilidad.

El propósito de una tarea se «refiere a las percepciones del estudiante más que a cualquier uso de las matemáticas fuera de la clase. Definimos una tarea con propósito como la que tiene un resultado para el alumno en forma de un producto actual o virtual o de solución a un problema inquietante» (Ainley, Pratt y Hansen, 2006, p. 29).

La noción de propósito se complementa con la de utilidad. «Con ello queremos decir que el aprendizaje de las matemáticas incluye no sólo la habilidad para aplicar procedimientos, sino la construcción de significados acerca de cómo estas ideas matemáticas son útiles» (Ainley, Pratt y Hansen, 2006, p. 30). «La segunda dimensión de nuestro marco de trabajo es construir en el diseño de la tarea la necesidad de que los aprendices usen las nociones matemáticas de manera que les permita reconocer lo que llamamos su utilidad. La meta de nuestro diseño de tareas es que los alumnos sean capaces de construir un significado para los tipos de situaciones en las que una idea matemática concreta puede usarse y acerca de la potencia que ofrece» (Ainley, 2012, p. 96).

La utilidad indica si una tarea escolar es capaz de producir en el estudiante significados acerca de por qué, cómo y cuándo la noción matemática subyacente es útil. Realmente no sería posible tener una evidencia empírica de tal utilidad hasta que la tarea se hubiese implementado en el aula. El objeto de nuestra exploración no es éste. Se trata de iniciar el estudio ensayando si algunos criterios descriptivos de las tareas inducen a prever que serían útiles y con propósito en el sentido que formula Ainley.

Criterios para el análisis del propósito de las tareas

Los elementos que hemos manejado para describir las características de las tareas pueden resumirse así:

En relación con los propósitos del profesorado:

Problema verbal o tarea contextualizada

Distinguimos siguiendo a Van den Heuvel-Panhuizen (2005), entre problemas verbales si el contexto puede ser intercambiado por otro sin alterar sustancialmente el problema, o tareas contextualizadas en las que la conexión entre contexto y problema es suficientemente estrecha como para que la solución del problema contribuya en algo al contexto, describiéndolo, efectuando predicciones o contribuyendo a la toma de decisiones (Davis, 1991, p. 2).

Tareas para matematizar o modelizar

Distinguimos entre problemas orientados a introducir nuevas nociones matemáticas simulándolas o abstrayéndolas de la realidad (matematización) o a aplicar nociones matemáticas a la realidad con objeto de intervenir en ella (modelización).

En relación con la existencia de propósito y utilidad para el alumnado en las tareas:

Tareas generadoras de propósito en el estudiante

Los criterios aplicados para valorar si una tarea puede generar propósito en los alumnos se han obtenido a partir de los heurísticos que Ainley y otros autores han usado para construir tareas que tuvieron un propósito cuando las implementaron. Se proponen cuatro criterios: a) en la tarea existe un producto final explícito que deben obtener los alumnos; b) la tarea involucra hacer algo para que otra audiencia lo maneje; c) El producto de la tarea implica tomar decisiones; y d) en la tarea se manejan procesos de optimización

Tareas generadoras de utilidad en los alumnos

En este caso se trata de analizar si las tareas pueden servir para que los estudiantes reflexionen acerca de la utilidad de las matemáticas —por qué, cómo, cuando son útiles—.

Desde la perspectiva de la formación de profesores es necesario introducir herramientas para que el profesor en formación cuando planifica la unidad didáctica, a) sepa «por qué», «cómo» y «cuándo» son útiles estas nociones; b) marque en su planificación previa las ideas matemáticas susceptibles de aprender su utilidad. Dentro del análisis didáctico este proceso formativo se inicia en el análisis del contenido mediante el análisis fenomenológico del tema (Gómez, 2007, p. 50), (Rico, Marin, Lupiañez, y Gómez, 2008). Además, al decidir los objetivos de aprendizaje es necesario incluir ciertas acciones encaminadas a extraer conclusiones sobre las matemáticas utilizadas en las tareas escolares y su utilidad. Finalmente, en el análisis de instrucción se puede valorar en cada actividad su propósito y/o utilidad.

Para decidir si las tareas que los profesores diseñaron podrían ser generadoras de utilidad en los estudiantes hemos considerado tres indicadores: a) que las tareas sean potencialmente generadoras de propósito en los alumnos; b) que las matemáticas usadas en los diferentes procedimientos de resolución del problema resulten necesarias y no es sensato resolver el problema sin ellas; c) que la tarea contenga alguna acción específica orientada a reflexionar acerca de la utilidad de la matemática subyacente.

Análisis de tareas

Vamos a ejemplificar el análisis de dos tareas siguiendo los criterios expuestos anteriormente.

Tarea: Viaje en coche

Una familia vive a 160 km de la ciudad en un pequeño pueblo. Se han quedado sin alimentos y el padre decide ir a la ciudad para comprar lo que necesitan. Ha pensado salir de casa a las 9:00 y conducir a una velocidad de 40 km/hora. ¿A qué hora llegará a la ciudad?

Propósito del profesor

En esta parte del análisis se trata de responder a la cuestión, ¿por qué se elige este problema? El profesor elige este problema porque entiende que aparece en una situación real. Él mismo afirma que se trata de «aplicaciones de los números enteros en la vida cotidiana».

¿Para qué se usa el contexto?

Las tareas que se presentan en un contexto pretenden conectar el contenido matemático escolar con el mundo real. Según Ainley (2012) esto no siempre es posible porque no todos los problemas verbales satisfacen los requisitos de información de un problema real. Éste es el caso del problema que nos ocupa. El contexto en esta tarea es accesorio y puede ser reemplazado por otro sin que el procedimiento de resolución y el análisis de la validez de la solución varíen. Esto nos lleva a clasificar la tarea, siguiendo el criterio de Van de Heuvel-Panhuizen (2005), como *problema verbal*.

El profesor propone esta tarea para desarrollar la competencia matemática modelización. En ese sentido, el objetivo fundamental es manipular la expresión de la velocidad (s=v*t) para calcular el tiempo de circulación. Por tanto el interés se centra en aplicar los datos conocidos en una fórmula y obtener la incógnita (sin intervención de la situación). Sin embargo, ¿cuál es el propósito del profesor para pretender que este problema deba ser utilizado en clase?

En la descripción que realiza el profesor que plantea esta actividad afirma: «Realizar divisiones con números enteros teniendo en cuenta la regla de los signos. Comprender, plantear y resolver problemas con números enteros». El propósito por tanto, es adiestrar en el uso de procedimientos (división entera y manejo de fórmulas) en problemas verbales sin desarrollar la modelización. Debe observarse, sin embargo, que la regla de los signos no se utiliza por lo que también sirve para un problema con números naturales siempre que hayamos hablado de división entera.

Propósito y utilidad para el alumno

Según Ainley (2012), una característica de las tareas con propósito desde la perspectiva del alumnado es que el producto final sea la solución a un problema interesante. Lo subjetivo del término «interesante» nos lleva a equipararlo con «curioso» y así la tarea propuesta podemos considerar que tiene potencialmente propósito para el alumno si el resultado le resulta curioso o interesante. Sin embargo, esta consideración es demasiado imprecisa como propósito y, como veremos más adelante, sería necesario que el alumno tomara por ejemplo una decisión sobre un camino a escoger para considerarse realmente como una actividad con propósito.

La actividad enfatiza principalmente la idea de utilizar procedimientos matemáticos. Identificar los datos (distancia y velocidad) y las incógnitas (tiempo). Empleando una fórmula ya conocida y manipulándola se responde a la actividad. El constructo «utilidad» requiere algo más que la aplicación de un concepto, es una dimensión más de la comprensión de las matemáticas junto al aprendizaje de procedimientos y relaciones matemáticas. En esta actividad, la fórmula no es una idea matemática imprescindible ni se plantean preguntas que hagan reflexionar al alumno sobre la utilidad de las matemáticas.

Tarea: La empresa

Una empresa tiene unos ingresos diarios que siguen la siguiente función: 3x^2 + 2x + 5. Dicha empresa también tiene gastos diarios según: 3x + 10 donde x es el número de horas trabajadas.

Contesta razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuántos serían los beneficios tras 4 días?

b) ¿Cuántas serían las pérdidas durante dos días laborables si se hubiera trabajado durante 8 horas diarias?

c) ¿Cuánto dinero neto se conseguirá al finalizar los dos días laborables?

Propósito del profesor

En el análisis realizado por el profesor que plantea la actividad afirma que «el profesor debe guiar la tarea introduciendo primero la situación en su contexto, realizando preguntas como por ejemplo: ¿qué entendéis por beneficios? ¿Se pueden tener pérdidas en un puesto de trabajo sin haber trabajado ninguna hora?

Esta tarea ofrece como información inicial una función que modeliza los ingresos y otra los gastos. La situación propone al alumno preguntas que requieren el uso de un modelo de ganancias obtenido por los estudiantes. En este sentido, la acción de describir supone desde el punto de vista de la modelización aportar o enriquecer el propio contexto mediante un mejor conocimiento de las reglas que rigen ganancias y pérdidas en la empresa. Se trata por tanto de una tarea contextualizada.

Aunque potencialmente la actividad permite la modelización de la realidad, sin embargo el propósito declarado por el profesor es «Operar con polinomios. Calcular el valor numérico de un polinomio», lo que lo sitúa más en la línea de matematizar la realidad para la mejor comprensión de los polinomios.

Propósito y utilidad para el estudiante

El propósito de la tarea desde la perspectiva del estudiante no tiene que coincidir necesariamente con el propósito anteriormente indicado del profesor. El propósito (desde la perspectiva del estudiante) crea la necesidad de usar el objetivo conocido (del profesor) para completar la tarea, tanto si envuelve el uso de conocimiento que ya tiene como si se trata de construir nuevos significados por medio del trabajo en la tarea.

En este sentido la tarea propuesta tendrá propósito desde la perspectiva del estudiante porque puede llegar a construir una nueva expresión matemática (producto) que modeliza las ganancias de la empresa y aporta información del modelo.

En este caso, la presencia potencial del constructo utilidad se justifica porque el modelo se considera necesario para resolver el problema y su uso amplía el conocimiento sobre la situación planteada en el contexto dando pié para valorar la aplicabilidad de las funciones y los polinomios.

Reflexiones finales

En este estudio hemos ensayado algunos criterios para analizar a priori el propósito del profesor al seleccionar tareas escolares y si pueden tener algún propósito y/o utilidad para los alumnos cuando se implementen en el aula. Estos criterios aportan información sobre las tareas, aunque aún se muestran escurridizos, pero esperamos que otros análisis semejantes nos permitan elaborar un conjunto de indicadores más precisos.

Por otra parte, en relación al curso de formación de profesores del que se han extraído las tareas, es posible establecer la siguiente conjetura —pendiente de confirmar en un análisis exhaustivo de las tareas del curso—: «aunque las tareas que el profesorado selecciona en estos ejemplos buscan desarrollar la competencia de modelización, la inercia provocada por la formación inicial, el trabajo y los materiales que utilizan asiduamente los profesores no se rompe con el curso realizado. En las tareas seleccionadas predomina como propósito del profesor la componente matematizadora ya que se busca más favorecer la comprensión matemática de procedimientos o relaciones matemáticas que el uso de la matemática para intervenir en la realidad».

Referencias

Ainley, J. (2012). Developing purposeful mathematical thinking: a curious tale of apple trees. *PNA, 6*(3), 85-103.

Ainley, J., Pratt, D. y Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38.

Davis, P. (1991). Applied Mathematics as a Social Instrument. En M. Niss, W. Blum y I. Huntley, *Teaching of mathematical modelling and applications* (pp. 2-9). Chichester, England: Ellis Horwood limited.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Universidad de Granada.

Rico, L., Marin, A., Lupiañez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *SUMA*(58), 7-23.

Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2005). The role of contexts in assessment problems in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 25*(2), 2-9.

UN MODELO DE CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

A model of mathematics teacher's specialised knowledge

José Carrillo[a], *Luis Carlos Contreras*[a] *y Pablo Flores*[b]
[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de Granada

Resumen

Presentamos un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. Señalamos dos contribuciones especialmente relevantes en las últimas décadas, la de Lee Shulman, con su aportación del Conocimiento Didáctico del Contenido (PCK), y la del equipo de Deborah Ball en la Universidad de Michigan (MKT), estableciendo subdominios tanto en el PCK, como en el dominio del Conocimiento Matemático (MK), particularmente el Conocimiento Matemático Especializado (SCK). Nuestro modelo emerge desde las dificultades que hemos tenido en el uso del MKT en nuestros estudios y de la consideración del carácter especializado del conocimiento del profesor.

Palabras clave: Conocimiento; Matemáticas; Profesor.

Abstract

We present an analytical model for the study of the mathematics teacher's knowledge. Two relevant contributions are highlighted in the last decades: Lee Shulman's, with the Pedagogical Content Knowledge (PCK), and Deborah Ball's team's in the University of Michigan (MKT), establishing sub-domains within the PCK and within the Mathematical Knowledge domain (MK), mainly the Specialised Content Knowledge (SCK). Our model emerges from two perspectives: from the difficulties we have faced when using the MKT in our studies; and, more important, from the consideration of the specialised nature of teachers' knowledge.

Keywords: *Knowledge; Mathematics; Teacher.*

CARRILLO, J., CONTRERAS, L.C. y FLORES, P. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193-200). Granada, España: Comares.

Introducción

Nos situamos en un campo en el que Encarnación Castro ha tenido una amplia experiencia y una actuación destacada: la formación del profesorado de matemáticas, que ha cambiado sustancialmente durante los últimos años. En este capítulo reflexionamos sobre una dimensión importante que sustenta los cursos de formación, el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, llegando a proponer un modelo de conocimiento especializado del profesor de Matemáticas. Para ello hacemos un breve recorrido conceptual sobre el conocimiento profesional, para terminar exponiendo un modelo que se ha elaborado en el Seminario de Didáctica de la Matemática (SIDM), de la Universidad de Huelva.

Del conocimiento disciplinar al conocimiento didáctico del contenido matemático

Desde la mitad del siglo XX a la actualidad ha habido cambios importantes en lo que se considera el conocimiento profesional de un docente de Matemáticas en la línea de una integración entre el conocimiento disciplinar y el didáctico. Las primeras investigaciones en enseñanza identificaban elementos de la práctica que podían influir en el desempeño educativo (tiempo de reacción a las respuestas de alumnos, reactivos para reforzar o corregir errores de los alumnos, etc.). El conocimiento del profesor de Matemáticas separaba dos dominios, el conocimiento de Matemáticas y el conocimiento derivado de la investigación didáctica. Al aplicar las teorías educativas a la enseñanza y aprendizaje de temas matemáticos concretos se da lugar a lo que hemos llamado «Matemáticas y su Didáctica».

Un momento importante en esta evolución se produce cuando Shulman plantea la necesidad de que las investigaciones sobre el profesor consideren la especificidad del contenido que se está enseñando. Con la idea de «paradigma desaparecido», Shulman (1986) hace ver a la comunidad educativa la importancia de mirar el conocimiento didáctico a través de la lente del conocimiento disciplinar, creando el «conocimiento didáctico del contenido». La importancia de este aporte de Shulman, que deviene en momentos de renovación curricular, hace que se dé viabilidad a las áreas de didácticas específicas (como la Didáctica de la Matemática), y se atienda a un conocimiento especializado para enseñar contenidos matemáticos. Desde el punto de vista investigativo, el Conocimiento Didáctico del Contenido tiene una gran acogida, pero se reconoce la dificultad de identificarlo en la práctica. Se hace preciso, por tanto, operativizarlo. Un paso importante en este campo se produce con los trabajos promovidos por el grupo de Deborah L. Ball, quienes, a través de investigaciones para detectar el conocimiento en la práctica, con objeto de comprender sus características, y de cuestionarios con los que examinar el conocimiento a partir de constructos teóricos, proponen un modelo para organizar y operativizar el conocimiento del profesor de Matemáticas (Ball, Thames y Phelps, 2008). Del trabajo de Shulman heredan dos de los dominios más importantes desde el punto de vista matemático: el Conocimiento de las Matemáticas (MK)[1], y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático (CCK). El conocimiento del contenido (MK) está compuesto por tres subdominios: el Conocimiento Común del contenido (CCK), el Conocimiento Especializado del contenido (SCK), caracterizado como conocimiento matemático que solo tiene sentido para el profesor, y el Conocimiento del Horizonte matemático (HCK). Por su parte, el Conocimiento Didáctico del Contenido, está compuesto por otros tres subdominios: el Conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS), el Conocimiento del contenido y de la enseñanza (KCT) y el Conocimiento del currículo (CK) (Ball *et al.*, 2008).

Necesidad de reformulación del modelo

Si el PCK supuso un avance muy importante en el modelo de Shulman, el HCK y el SCK son probablemente las aportaciones más relevantes del modelo de Ball. Sin embargo, justificaremos a continuación la necesidad de reformular ese modelo. Centrándonos en el HCK, mostraremos que con una organización diferente puede mejorar la comprensión de los aspectos considerados en este subdominio; por otro lado, analizaremos problemas de delimitación entre el SCK y, respectivamente, el CCK, KCS y KCT.

Problemas de ubicación en el HCK

En Ball y Bass (2009) se establecían tres subdominios dentro del HCK: HCK (T), HCK (P) y HCK (V). El HCK(T) incluye el conocimiento de las principales ideas y estructuras de la disciplina y las conexiones entre diferentes entes matemáticos, y el desarrollo de nuevos entes a partir del conocimiento existente. Incluye también el conocimiento de conexiones con contenidos posteriores y anteriores a los que se están tratando. En el HCK(P) está el conocimiento de las formas de conocer y crear o producir en Matemáticas, aspectos de la comunicación matemática, el razonamiento y la prueba, saber definir y usar definiciones, establecer relaciones (entre conceptos, propiedades, etc), correspondencias o equivalencias o elegir representaciones, generalizar o explorar. En el HCK (V)[2] se consideran los valores centrales de la disciplina, como la precisión y el cuidado con la consistencia del lenguaje matemático, el gusto por la coherencia argumental, la corrección y la exactitud como opuesto de la ambigüedad (no como opuesto de la aproximación).

[1] Usaremos las siglas en inglés reconocidas en la literatura al uso.

[2] Vinculamos el HCK (V) al ámbito de las concepciones y creencias. Además, la precisión, la consistencia del lenguaje, el gusto por la coherencia argumental son comunes a todo el pensamiento científico y no exclusivas de la educación matemática. Por ello no aparecerá de forma explícita en el modelo.

La idea de *matemática elemental desde un punto de vista avanzado* y *matemática avanzada desde un punto de vista elemental* parece ser el elemento de conexión más potente entre estos tres subdominios que, por otro lado, tienen una naturaleza sustancialmente diferente. Pero, además, cabe preguntarse qué aspectos del conocimiento matemático (MK) quedan fuera del HCK. HCK (T) tiene, a su vez, dos elementos diferenciados, las ideas principales de la disciplina y la estructura de la misma. Desde nuestro punto de vista (Montes, Aguilar, Carrillo y Muñoz-Catalán, 2013), estos dos elementos tienen capacidad de contener todo el conocimiento matemático común desde la perspectiva de *qué es* la matemática, vista como un conjunto de *Temas* incardinados en una *Estructura*, mientras el HCK (P) contendría los conocimientos relativos al *cómo* se construye. Esto nos lleva a proponer una clasificación que los diferencie en tres subdominios diferentes KoT, KSM y KPM.

El conocimiento de los temas (**KoT**) es más que el conocimiento de la matemática como disciplina; la matemática escolar también está incluida en este subdominio, así como lo relativo a su fundamentación teórica, y los procedimientos, estándar y alternativos, o las distintas formas de representación. Siguiendo con esta mirada puesta en las matemáticas que tienen sentido para el profesor, incluimos la fenomenología de los conceptos (Freudenthal, 1983; Rico, 1997), que aporta al profesor una amplia variedad de contextos en los que situar el contenido, así como aspectos epistemológicos ligados a la matemática que permiten al profesor comprender diferentes significados que pueden atribuírsele al contenido. De igual manera, pensamos que un profesor debe conocer de un modo integrado y relacionado aquello que es objeto de enseñanza, con lo que surge el subdominio del conocimiento de la estructura matemática (**KSM**), constituido por los conocimientos, tanto más avanzados, como más elementales, que permiten al profesor trabajar la matemática avanzada desde un punto de vista elemental y viceversa. Asimismo, las grandes ideas (Kuntze, Murphy, Lerman, Kurz-Milcke, Siller y Windbourne, 2011) constituyen un elemento estructurador de la matemática, y por tanto han de ser incluidas en este subdominio. Finalmente, el conocimiento de la práctica matemática (**KPM**) consta de aquellas formas de hacer y proceder en matemáticas que sin duda un profesor ha de conocer para desarrollar su clase, como son las diferentes formas de demostrar, el significado de definición, axioma o teorema como elementos constituyentes de la matemática, o el conocimiento de la sintaxis matemática.

Problemas de delimitación entre CCK y SCK y especificidad del conocimiento del profesor de matemáticas: reforzando el KoT

Ball *et al.* (2008) caracterizan el CCK como el conocimiento matemático que puede poseer una persona instruida. Por tanto, para decidir si un episodio corresponde al CCK o no, es preciso compararlo con un hipotético conocimiento de una hipotética persona sobre la base del compendio de conocimientos deseables que pueden extraerse de múltiples planes de estudio. Para resolver esto no podemos observar la puesta en práctica del conocimiento de todos esos ciudadanos medios. Nos parece más razonable caracterizar el conocimiento matemático de un modo intrínseco sin referirlo a otras profesiones o titulaciones (Flores, Escudero y Carrillo, 2013).

En los ejemplos difundidos por Ball *et al.* (2008) se asocia al CCK un conocimiento algorítmico (saber hacer). Pensamos que en ese conocimiento que ellos llaman común no sólo debería concurrir el saber hacer, sino el saber por qué se hace así, y también el conocimiento de los conceptos. De este modo, nuestra propuesta incluiría el conocimiento de conceptos y procedimientos matemáticos con sus correspondientes fundamentos. Podría decirse que todo el conocimiento que un alumno ideal tuviera en un determinado nivel formaría parte de este tipo de conocimiento del profesor, relativo a ese nivel, incluyendo también cierto grado de formalización o de visión del contenido desde un punto de vista superior. Además, en el modelo MKT, el nombre de este subdominio induce a pensar en un conocimiento compartido por otros profesionales; por ello, en sintonía con su caracterización dentro de la propia matemática, conviene pensar en otra denominación, como *conocimiento de los temas matemáticos* (entendiendo conocimiento de hechos, reglas, nociones, procedimientos, métodos y sus fundamentos KoT).

Problemas de delimitación entre KCS y SCK: emerge KFLM

El profesor necesita conocer la procedencia de los errores y otros vericuetos por los que circula el razonamiento de algunos alumnos cuando resuelven un ejercicio o un problema, o cuando definen un concepto, o clasifican objetos; no es de interés de ninguna otra profesión, ni es objeto de estudio de ninguna otra titulación. Esto forma parte del SCK de Ball, pero, obsérvese que saber cuáles son las dificultades de los alumnos o dónde suelen cometer errores se asocia al KCS, mientras que conocer la procedencia matemática del error se sitúa en el SCK. Esto ha supuesto una importante fuente de dificultades en la investigación, y muestra problemas de operatividad de las caracterizaciones y límites de SCK y KCS. Además, no parece haber ninguna ventaja al incluir el conocimiento de la procedencia del error en un subdominio y la consciencia de su existencia en otro, entre otras cosas porque queda un poco desdibujada la presencia de la matemática en el KCS. Esto motiva el nacimiento de KFLM (conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas). Está también en este subdominio lo que podemos llamar *teoría matemática escolar*, compuesta por las nociones matemáticas que solo tienen sentido en la escuela o que se han creado en función del aprendizaje, como la relevancia del conocimiento de las clasificaciones disjuntas e inclusivas en general, y de polígonos en particular. También incluye el conocimiento de la lógica de procedimientos erróneos. Es evidente que el KoT y el KFLM guardan mucha relación con el aprendizaje, ya que el referente de ambos es el conocimiento matemático escolar; sin embargo, mientras el KoT se relaciona con el conocimiento en sí, KFLM se relaciona con el aprendizaje específico de ese conocimiento.

El KCS nos lleva a pensar en contenido y estudiantes, cuando lo que queremos abordar es conocimiento de las matemáticas y de su aprendizaje, o mejor, de cuáles son las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM). Esto nos sitúa en la perspectiva del conocimiento de lo que sucede en las interacciones de los alumnos con el contenido, donde se incluye el conocimiento de las dificultades, errores y obstáculos en el aprendizaje de un concepto, el conocimiento de las concepciones e ideas previas, el lenguaje y el vocabulario de los alumnos, así como el conocimiento de la forma en que se desarrolla el aprendizaje de los alumnos respecto de cierto contenido (pudiendo incluir aquí el conocimiento de teorías de aprendizaje, e. g. Van Hiele, APOS).

Diferencias entre KMT y KCT

Enlazando con lo anterior, creemos que tiene más sentido hablar de conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT) que de conocimiento del contenido y la enseñanza (KCT), expresando una mayor integración que la propuesta original de Ball y cols., pero, sobre todo, añadiendo, al conocimiento de las estrategias de enseñanza, los recursos y materiales, y las ayudas que se pueden dar a los alumnos, el conocimiento de teorías de enseñanza de las matemáticas (en relación, pongamos por caso, con la resolución de problemas).

Del currículo a los estándares de aprendizaje: el KMLS

Más allá del conocimiento del currículo, deberíamos reconocer el valor de las aportaciones de las diferentes sociedades de profesores de matemáticas, de educación matemática y los diferentes responsables internacionales de educación matemática acerca de lo que debe aprenderse en cada momento y de las razones que lo sustentan. Esto amplía la noción de Shulman (1986), y Ball *et al.* (2008) de conocimiento curricular, para proponer el conocimiento de los estándares de aprendizaje (KMLS), constituido por todos aquellos referentes que indican en qué momento debe/puede aprenderse cada contenido y a qué nivel de profundidad. Así, están incluidos aquí, evidentemente, el currículo, pero también lo que asociaciones profesionales proponen (como los estándares de la NCTM), o lo propuesto desde la literatura de investigación, así como la opinión de profesores expertos.

A modo de síntesis, la Figura 1, recoge los seis subdominios de nuestra propuesta que denominamos *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (**MTSK**) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013).

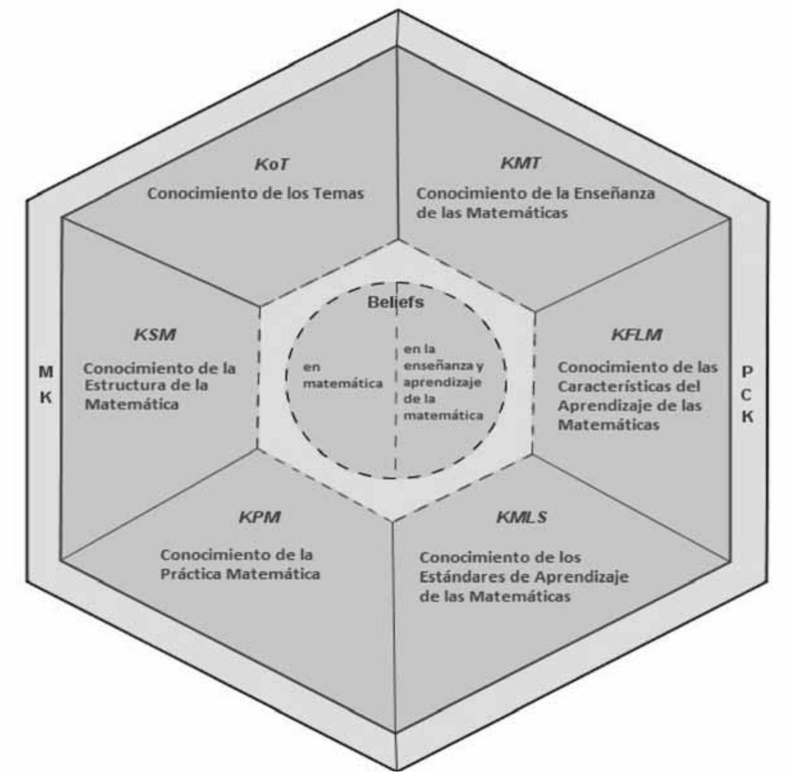


Figura 1. *Subdominios del MTSK*

Nos gustaría subrayar que el SCK de Ball, circunscrito exclusivamente a un subdominio del Conocimiento Matemático (MK), ha ido quedando subsumido en los nuevos subdominios de nuestra propuesta de forma que todo nuestro modelo está compuesto por componentes de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. Así, por ejemplo, el conocimiento del fundamento de los algoritmos de las operaciones elementales no queda separado del conocimiento de los significados de las operaciones y forma parte del conocimiento de los temas (KoT), junto al conocimiento del fundamento matemático de los recursos didácticos. El conocimiento del potencial matemático de estos recursos para la enseñanza de los algoritmos de las operaciones estará en el KMT, y el conocimiento de las dificultades que tienen los alumnos en el aprendizaje de estos algoritmos en el KFLM. Cada uno de estos conocimientos forma parte, claramente, del conocimiento especializado del profesor de matemáticas[3].

[3] Cabe destacar que en la representación aparecen las creencias sobre la matemática y sobre la enseñanza y aprendizaje de la misma como elemento que el investigador ha de considerar a la hora de entender de una forma más completa el conocimiento del profesor.

Referencias

BALL, D. L. Y BASS, H. (2009). With an eye on the mathematical horizon: knowing mathematics for teaching to learners' mathematical futures. *Comunicación presentada en el 43rd Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik*, Oldenburg, Germany.

BALL, D.L., THAMES, M.H. y PHELPS, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407. DOI: 10.1177/0022487108324554.

CARRILLO, J., CLIMENT, N., CONTRERAS, L.C. y MUÑOZ-CATALÁN, M.C. (2013). Defining specialized knowledge for mathematics teaching. *Actas del CERME8*. Antalya, Turquía (en prensa).

FLORES, E., ESCUDERO, D. y CARRILLO, J. (2013). *A theoretical review of specialised content Knowledge*. *Actas del CERME8*. Antalya, Turquía (en prensa).

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

KUNTZE, S., MURPHY, B., LERMAN, S., KURZ-MILCKE, E., SILLER, S-H. y WINBOURNE, P. (2011). Development of pre-service teachers' knowledge related to big ideas in mathematics. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME* (Vol. 3, pp. 105-112). Ankara, Turkey: Middle East Technical University.

MONTES, M.A., AGUILAR, A., CARRILLO, J. y MUÑOZ-CATALÁN, M.C. (2013). *MSTK: from Common and Horizon Knowledge to Knowledge of Topics and Structures*. *Actas del CERME8*. Antalya, Turquía (en prensa).

RICO, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria.* Madrid, España: Síntesis.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14. DOI: 10.3102/0013189X015002004.

DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSIDAD DE ALMERÍA: INNOVACIÓN DOCENTE EN FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Mathematics education at the University of Almería: teaching innovation in teacher training

Antonio Codina, Francisco Gil, M.ª Francisca Moreno
Universidad de Almería

RESUMEN

Describimos propuestas de innovación docente desarrolladas por un grupo de profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Almería con el propósito de mejorar la calidad docente. Las experiencias están relacionadas con el ámbito interdisciplinar y el diseño y la utilización de recursos tecnológicos que fomenten el aprendizaje autónomo del alumnado. Aportamos una breve descripción de cada una de las actuaciones y algunas conclusiones sobre su incidencia en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje del alumnado, mayoritariamente maestros en formación inicial.

Palabras clave: Didáctica de la matemática; Innovación; Interdisciplinar; Recurso tecnológico.

ABSTRACT

We describe innovative teaching proposals that have been developed by a group of Mathematics Education researchers at the University of Almeria in order to improve teaching quality. The proposals are related to interdisciplinary field and to the design and implementation of technological resources to encourage self-learning. We present a brief description of each one of them and some findings related to their impact on improving teaching and learning processes of our university students, mainly pre-service teachers training.

Keywords: *Innovation; Interdisciplinary; Technology; Mathematics education.*

CODINA, A., GIL, F., y MORENO, M. F. (2013). Didáctica de la Matemática en la Universidad de Almería: innovación docente en formación del profesorado. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 201-209). Granada, España: Comares.

Introducción

El periodo de convergencia al Espacio Europeo de Educación Superior (EEES) nos ha brindado una oportunidad única para analizar nuestra labor docente detectando debilidades, amenazas, reconociendo fortalezas y aprovechando oportunidades. En este marco un grupo de profesores del área de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Almería (UAL), influenciados por la tradición innovadora de la profesora Encarnación Castro, hemos desarrollado diversas propuestas de innovación tendentes a incrementar la calidad de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los títulos de Maestro. Parte de estos trabajos se han realizado participando en convocatorias de formación docente y de innovación universitaria, tanto del ámbito andaluz como propias de la UAL.

La valoración de los resultados generados ha merecido la obtención de dos premios: Excelencia en Innovación Docente para el diseño de materiales didácticos en soporte informático y Excelencia Docente para el diseño y transferencia práctica de innovaciones docentes de la Universidad de Almería (V convocatoria, curso 2012). En este capítulo resumimos nuestra actuación en proyectos relacionados con dos líneas:

- Experiencias de innovación interdisciplinar centradas en: a) la adquisición de competencias a través del aprendizaje colaborativo y la potenciación de la Evaluación Formativa; b) la utilización de tutorías colectivas y experimentación de diseños de aula (presencial y virtual) que las potencien.
- Diseño, desarrollo y experimentación en el aula (presencial y virtual) de recursos tecnológicos para el aprendizaje autónomo del alumnado.

A continuación describimos cada una de estas actuaciones y aportamos algunas conclusiones sobre su incidencia en la mejora de los procesos de enseñanza-aprendizaje.

Experiencias de innovación interdisciplinar

En la práctica docente se detectan debilidades: deficiente coordinación entre las asignaturas y el profesorado de un mismo grupo; propuesta poco planificadas de trabajos, con escaso seguimiento por parte del profesorado y sin coordinación entre diferentes asignaturas; solapamientos entre contenidos, entre otras. Para evitarlas, hemos impulsado diversos grupos docentes interdisciplinares con objeto de desarrollar propuestas de innovación docente universitaria compartida (Moreno, Codina, Ruiz, De Amo, Santos, 2009; Sánchez, Rodríguez, Bosch, 2011).

La coordinación de varias asignaturas en un proyecto común ha supuesto un enorme esfuerzo. Han sido numerosas las reuniones para planificar, implementar y evaluar las distintas experiencias de innovación. Moreno *et al.* (2009) desarrollaron, durante tres cursos académicos, una experiencia de trabajo colaborativo entre tres asignaturas de maestro en Educación Infantil, correspondientes a las áreas de Didáctica de la Matemática, de la Lengua y la Literatura y de la Expresión Corporal.

Habiendo constatado que los estudiantes para Maestro carecían de la competencia de trabajo en equipo, su aprendizaje estaba excesivamente compartimentado y no establecían relaciones entre diferentes conocimientos adquiridos, el grupo docente, bajo el paradigma de la investigación-acción y a través de ciclos de acción reflexión (Latorre, 2003), diseñó una propuesta innovadora de planificación y aplicación de un proyecto coordinado que denominó *Trabajo Interdisciplinar*. La propuesta, orientada a fomentar el aprendizaje colaborativo y el desarrollo de herramientas para un aprendizaje autónomo de los estudiantes, pretendía promover la capacidad globalizadora de aplicar lo aprendido en las diferentes áreas de conocimiento a la resolución de una situación real acaecida en el aula de Infantil. Esto exigía que el alumnado se acercara a la escuela a través del diseño, desarrollo y evaluación de una secuencia didáctica o proyecto de trabajo que tuviera objetivos educativos conectando los ámbitos de experiencia de las asignaturas implicadas.

El trabajo interdisciplinar se articulaba sobre tres ejes básicos: (a) implicar un contacto con la realidad educativa del aula de Infantil; (b) fundamentarse en la reflexión de la acción y sobre la acción; y (c) implicar una coordinación de la acción formativa de los docentes en la metodología, la evaluación y la acción tutorial.

La evaluación formativa entendida como «todo proceso de evaluación cuya finalidad principal es mejorar los procesos de enseñanza-aprendizaje mientras éstos tienen lugar» (López, Fernando, Julián, 2007, p. 10), está estrechamente relacionada con dinámicas de trabajo colaborativo y cobra especial relevancia en un diseño metodológico que promueva la participación del alumnado en los procesos de evaluación, entendidos como una oportunidad para el aprendizaje. Existen diferentes registros (rúbricas, valoraciones de los compañeros/as, valoración de informes escritos, participación en debates y actitud colaborativa, etc.) que nos aportan datos sobre la calidad del proceso desarrollado y el trabajo llevado a cabo. Esto permite al alumnado entender lo que sucede y porqué, dándole posibilidad de rectificar, reconocer los errores y mejorar la práctica.

Otro elemento importante es la tutoría y el hecho de que la naturaleza interdisciplinar de la experiencia de innovación implicaba una acción tutorial coordinada. Para ello, se realizaron tutorías en pequeños grupos y en gran grupo con la presencia de todos los docentes del grupo y además se establecieron pautas de coordinación de los docentes con los maestros/as en ejercicio para una tutoría efectiva del alumnado. De este modo, se mostró la naturaleza globalizadora de los procesos de enseñanza, consensuando estrategias de supervisión, evitando la fractura del conocimiento y creando espacios comunes de coevaluación y autoevaluación.

Es destacable en esta experiencia de innovación la creación un espacio de formación compartido entre alumnado y maestras/os en ejercicio a los que se invitó al aula universitaria para compartir sus conocimientos a través de charlas, coloquios y jornadas. Paralelamente se elaboró un plan de acción tutorial que involucró a docentes del grupo, maestros/as de centros escolares y alumnado sobre una tarea específica a realizar por éstos últimos: el diseño, puesta en práctica y evaluación de una secuencia didáctica para escolares de Educación Infantil. Las tutorías, realizadas en la universidad y en los centros escolares, favorecieron (a) el trasvase de conocimientos entre la Universidad y los Centros, (b) un contexto real para situar las experiencias de nuestros alumnos y (c) el desarrollo de las competencias trabajadas. La acción tutorial compartida potenció el aprendizaje de competencias básicas y transversales de los estudiantes.

Una segunda experiencia de innovación interdisciplinar, denominada «Museo del color, la forma y el movimiento» (http://museodelcolor.blogspot.com.es), involucraba también a tres asignaturas de tres ámbitos de conocimiento. Se desarrolla ampliamente en Sánchez *et al.* (2011).

Estos trabajos de innovación han conseguido establecer un espacio para el encuentro, el análisis y la reflexión sobre las competencias transversales de la titulación de Maestro de Educación Infantil conectadas, y esto es necesario destacarlo, con la actividad profesional real. Igualmente nos ha permitido analizar el progreso del trabajo del alumnado en el seno de una metodología activa y participativa. Sin lugar a dudas, las actividades de innovación han generado cambios significativos en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las áreas que intervienen, poniendo de manifiesto las bondades de la coordinación entre el profesorado y la necesidad de incrementarla.

La tercera experiencia es el diseño y la implementación de «Nuevas tecnologías en la enseñanza de las matemáticas», asignatura del Campus Virtual Andaluz impartida desde Almería. La virtualización supuso un reto metodológico. Por ejemplo, en el caso de la evaluación formativa, aunque inicialmente se detectó un rechazo del alumnado hacia ella, principalmente por la creencia de que no se sentían capacitados para valorar los trabajos propios o de los compañeros, se fue transformando en un proceso natural, positivo e integrado en su aprendizaje (Codina, 2008, 2009). Quizás esto se vio favorecido por el ambiente virtual, que permite un cierto grado de anonimato (al menos físico). El alumnado comprobó cómo la evaluación puede jugar un papel destacado al observar que las valoraciones de los trabajos y comentarios de los compañeros permitía que (a) las puntuaciones de su participación en el foro se incrementara, (b) sus propios trabajos fueran de mayor calidad y (c) la puntuación del trabajo del compañero que era citado también se veía incrementada. Se mejoró la distribución de conocimientos y la comunicación entre estudiantes y entre estudiantes con el profesor fue más fluida.

A pesar de esos elementos positivos, también se detectaron algunas dificultades. Concretamente, respecto al trabajo colaborativo, el alumnado universitario no se sentía partícipe de su propio aprendizaje y mucho menos, del de sus compañeros. Por esto, al comienzo del curso hubo que «luchar» contra las ideas individualistas y potenciar la importancia y beneficios que aportan para el conocimiento la comunicación y resolución de dudas, problemas, hallazgos, resultados, etc. El proceso desarrollado tuvo tres momentos de ejecución y tres componentes interconectadas que permitían una retroalimentación constante, con reflejo en la calificación de las distintas actividades (Figura 1).

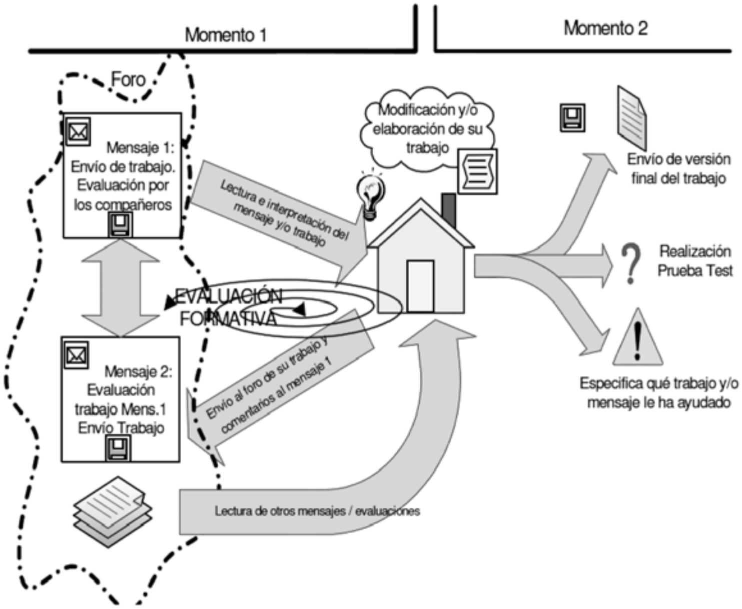


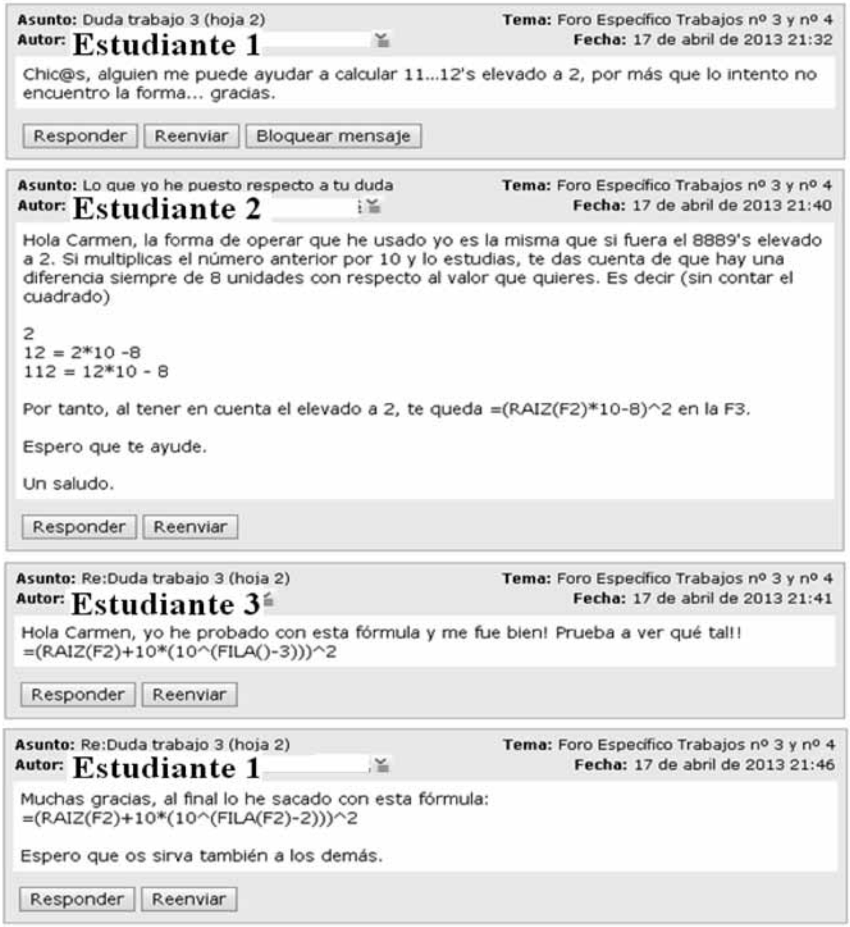
Figura 1. *Momentos de ejecución*

Momento 1. El estudiante lee y analiza los mensajes enviados al foro. Con ello, realiza o modifica su propio trabajo reenviándolo ahora al foro para que pueda ser valorado y utilizado por los compañeros. Continúa leyendo los mensajes del foro, valorando los trabajos de otros compañeros y observando los comentarios que realizan sobre el suyo (evaluación formativa).

Momento 2. El estudiante considera que su trabajo tiene la suficiente calidad según los criterios de evaluación establecidos por el profesor para dicha actividad y envía su versión final, realiza el test asociado al trabajo y cita expresamente qué mensajes y/o comentarios le han sido útiles para la realización de su trabajo.

Momento 3. Evaluación por parte del profesor. El profesor valora todos los trabajos, observa cuales han sido citados para asignar positivos y valora los mensajes enviados al foro. Devuelve dichas valoraciones a los estudiantes para cerrar el ciclo de evaluación.

La tutoría adquiere una nueva dimensión para la asignatura virtual. En este sentido, Codina y Gil (2007), partiendo de una metodología de enseñanza colaborativa, ponen de manifiesto que las tutorías en entornos virtuales tienen más funciones que las que se le atribuyen en un modelo presencial. Al igual que Peralta *et al.* (2010), detectan cómo la acción de aclarar dudas particulares se aborda con éxito utilizando los medios de comunicación sincrónicos y asincrónicas. Además en una enseñanza virtual (o semipresencial), las destrezas y competencias abordadas en clases prácticas, bajo la supervisión del docente *«in situ»*, también deben desarrollarse virtualmente. En este caso, la supervisión es parcialmente llevada a cabo por los propios alumnos, compartiendo la distribución del conocimiento a través de la colaboración (Figura 2) y el papel de docente es guiar y orientar el proceso. Ello favorece que pueda realizar en su acción tutorial un seguimiento más individualizado, interviniendo para resolver dudas puntuales.


Asunto: Duda trabajo 3 (hoja 2) **Tema:** Foro Específico Trabajos nº 3 y nº 4
Autor: Estudiante 1 **Fecha:** 17 de abril de 2013 21:32

Chic@s, alguien me puede ayudar a calcular 11...12's elevado a 2, por más que lo intento no encuentro la forma... gracias.

Responder | Reenviar | Bloquear mensaje

Asunto: Lo que yo he puesto respecto a tu duda **Tema:** Foro Específico Trabajos nº 3 y nº 4
Autor: Estudiante 2 **Fecha:** 17 de abril de 2013 21:40

Hola Carmen, la forma de operar que he usado yo es la misma que si fuera el 8889's elevado a 2. Si multiplicas el número anterior por 10 y lo estudias, te das cuenta de que hay una diferencia siempre de 8 unidades con respecto al valor que quieres. Es decir (sin contar el cuadrado)

2
12 = 2*10 -8
112 = 12*10 - 8

Por tanto, al tener en cuenta el elevado a 2, te queda =(RAIZ(F2)*10-8)^2 en la F3.

Espero que te ayude.

Un saludo.

Responder | Reenviar

Asunto: Re:Duda trabajo 3 (hoja 2) **Tema:** Foro Específico Trabajos nº 3 y nº 4
Autor: Estudiante 3 **Fecha:** 17 de abril de 2013 21:41

Hola Carmen, yo he probado con esta fórmula y me fue bien! Prueba a ver qué tal!!
=(RAIZ(F2)+10*(10^(FILA()-3)))^2

Responder | Reenviar

Asunto: Re:Duda trabajo 3 (hoja 2) **Tema:** Foro Específico Trabajos nº 3 y nº 4
Autor: Estudiante 1 **Fecha:** 17 de abril de 2013 21:46

Muchas gracias, al final lo he sacado con esta fórmula:
=(RAIZ(F2)+10*(10^(FILA(F2)-2)))^2

Espero que os sirva también a los demás.

Responder | Reenviar

Figura 2. *Intercambio asincrónico*

Recursos tecnológicos para el aprendizaje autónomo

Entre las competencias que deben desarrollarse en las titulaciones para Maestro/a figuran fomentar en los estudiantes la capacidad para gestionar información, aprender autónomamente, utilizar recursos tecnológicos, conectar teoría y práctica con la realidad laboral futura, y resolver problemas y trabajar en equipo de forma interdisciplinar. Con objeto de promoverlas, algunos docentes del área de Didáctica de la Matemática han intentado mejorar el uso del aula virtual, empleando tanto los recursos tecnológicos disponibles en la UAL, como diseñando y evaluando materiales electrónicos propios.

Aunque en la actualidad el grupo está formado íntegramente por docentes del área, se han desarrollados experiencias y materiales con docentes de otras áreas.

El trabajo está potenciando que todos los grupos de estudiantes para Maestro compartan materiales en el aula virtual, mantengan una estructura y línea común, y unos estándares de calidad, independientemente del profesor asignado a cada grupo. El diseño y la utilización de los recursos tecnológicos se fundamentan en un constante ciclo de interacción entre la teoría y la práctica, en la renovación permanente y en la constante valoración para su mejora.

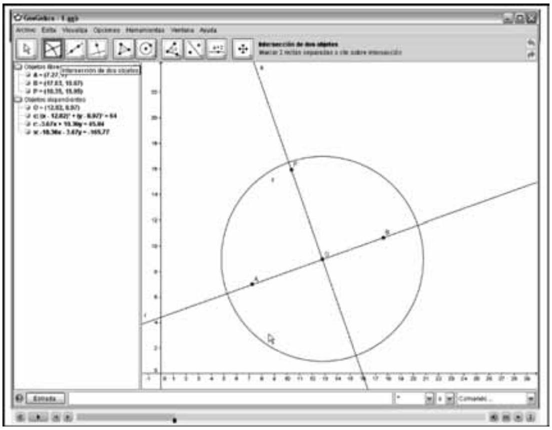


Figura 3. *Video flash*

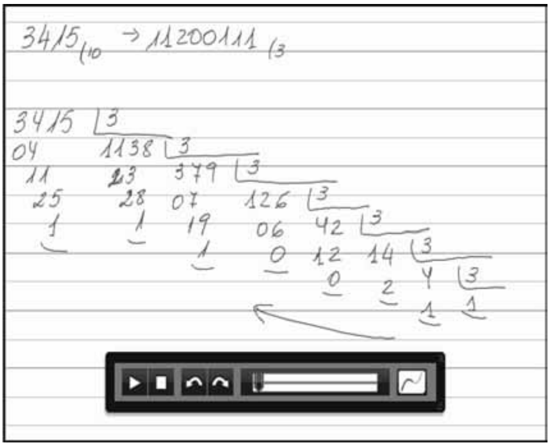


Figura 4. *Pdf interactivo*

La participación del área de Didáctica de la Matemática en el proceso de implantación en los procesos educativos de los recursos tecnológicos en la UAL desde sus comienzos nos ha permitido observar la evolución, su aceptación por el alumnado y las posibilidades que encierra para fomentar aprendizajes de calidad. Los recursos elaborados han permitido flexibilizar los procesos de enseñanza-aprendizaje al posibilitar su acceso en cualquier dispositivo fijo o móvil, esto es, *tablet*, *smartphone* o PC. Por otro lado el carácter reutilizable facilita al estudiante: controlar su ritmo de aprendizaje con actividades autoformativas y personalizadas, usando videotutoriales en *flash* (Figura 3), rúbricas de autoevaluación o crucigramas entre otras; realizar actividades destinadas al desarrollo de destrezas matemáticas utilizando documentos interactivos *pdf* que incorporan el audio y video explicativo (Figura 4). A su vez, posibilita al docente plantear una enseñanza individualizada y basada en la evaluación formativa a través de rúbricas de evaluación o personalización de preguntas tipo test.

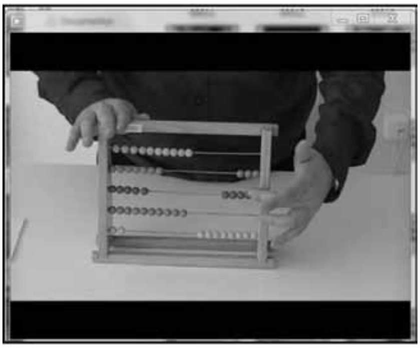


Figura 5. *Video Multiplataforma*

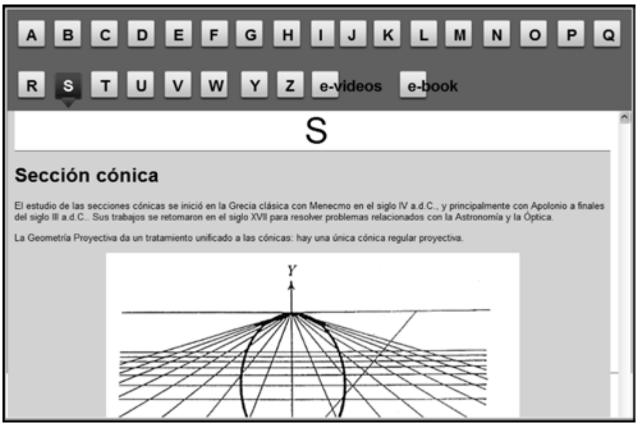


Figura 6. *Glosario*

Paralelamente, dado que el trabajo con materiales físicos (ábaco, balanzas numéricas, etc.) y software específico en el laboratorio de matemáticas está muy limitado por el tiempo disponible, se están elaborando videos didácticos multiplataforma (Figura 5), así como videotutoriales (Figura 3), de modo que el alumnado pueda revisar y analizar en detalle tanto la descripción de los materiales y software, como las orientaciones sobre su aplicación en el aula. También se están generando continuamente diversas fuentes de información electrónica para favorecer el aprendizaje autónomo del alumnado, como un glosario de términos didácticos y matemáticos (Figura 6), documentos de trabajo interactivos con videos o *applets* embebidos y mapas conceptuales. Por último, se intenta aprovechar al máximo las posibilidades de comunicación asincrónica y sincrónica del aula virtual o de *Skype* para potenciar la labor tutorial y el trabajo en equipo.

Los materiales presentados sirven, tomados en su conjunto, para otorgar coherencia a nuestras propuestas formativas, quedado plenamente integrados en los procesos educativos actuales. Finalmente, consideramos que el uso de recursos tecnológicos, aunque precisa de una constante revisión y crítica, es imparable y debe adaptarse tanto a los procesos de enseñanza-aprendizaje, como a la evolución tecnológica.

Referencias

Codina, A. (2008). Una experiencia de trabajo colaborativo y evaluación formativa en ambientes virtuales en Educación Matemática: ventajas, peligros y riesgos. *Enseñanza de la Matemática*, *17*(2), 59-78.

Codina, A. (2009). El papel del foro en la asignatura Nuevas Tecnologías en la Enseñanza de las Matemáticas. *Buenas Prácticas en Teleformación del Campus Andaluz Virtual*, *1*(2), 1-9.

Codina, A. y Gil, F. (2007). Las tutorías virtuales en la formación de profesores de matemáticas. *Educación y Futuro Digital*, *1*, 1-6.

Latorre, A. (2003). La investigación-acción. Conocer y cambiar la práctica educativa. Barcelona, España: Graó.

López, V. M, Fernando, L. y Julián, J. A. (2007). La Red de Evaluación Formativa, Docencia Universitaria y Espacio Europeo de Educación Superior (EEES). Presentación del proyecto, grado de desarrollo y primeros resultados. *Boletín de la RED-U*, *1*(2), 2-19.

Moreno, M. F., Codina, A., Ruiz, M. M., De Amo, J. M. y Luisa, M. (2009) La coordinación entre materias. Tres asignaturas compartiendo un mismo proyecto de aprendizaje. En V. López, (Coord.) *Evaluación formativa y compartida en educación superior: propuestas, técnicas, instrumentos y experiencias* (pp. 179-182). Barcelona, España: Narcea.

Peralta, J., Escoriza, J., Fernández, A., Codina, A., Piedra, J. A. y Asensio, J. A. (2010). Aprendizaje autónomo, creatividad y tutorización virtual. En Comisionado para el Espacio Europeo (Ed.) III *Memoria de actividades docentes en el marco del EEES de la Universidad de Almería* (pp. 5-13). Almería, España: Editorial de la Universidad de Almería.

Sánchez, A., Rodríguez, A. y Bosch, M. A. (2011). El museo de los colores. Una propuesta interdisciplinar en la Especialidad de Maestro/a de Educación Infantil en la Universidad de Almería. En *II Congreso internacional de arte y educación. La educación artística como proyecto común europeo,* (pp. 326-338). Badajoz, España: Universidad de Extremadura.

ETAPAS DE ELABORACIÓN DE UN INSTRUMENTO PARA INDAGAR SOBRE ACTITUDES HACIA LAS MATEMÁTICAS

Stages in the development of an instrument for research on attitudes towards mathematics

Paola M.ª Donoso[a], *Nuria Rico*[a], *Marcelo Casis*[b]
[a]Universidad de Granada
[b]Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación (Chile)

Resumen

En este capítulo se describen las fases de un proceso de construcción, validación y aplicación de un instrumento para indagar sobre actitudes, entendiendo como tales las respuestas evaluativas con respecto a un objeto con consecuencias tanto cognitivas como afectivas y comportamentales. Para ello, se revisan las diferentes fases necesarias: redacción, validación, diseño muestral, aplicación y volcado de datos.
Palabras clave: *Actitudes; Concepciones; Cuestionario; Creencias; Instrumento; Investigación cuantitativa.*

Abstract

In this chapter we describe the process of creation, validation and application of an instrument to research on attitudes, understanding them as evaluative responses with respect to an object with cognitive, affective and behavioural consequences. With this aim, we review the different phases required: composition, validation, sample design, implementation and data transfer.
Keywords: *Attitudes; Beliefs; Ideas; Instrument; Quantitative research; Survey.*

En investigaciones sociales es habitual que exista un instrumento de recogida de datos. Dentro de los instrumentos más comunes se encuentra el cuestionario de tipo encuesta, utilizado por un amplio espectro de investigadores para conocer opiniones, actitudes, creencias y un largo etcétera.

La encuesta es una técnica que utiliza un conjunto de procedimientos estandarizados de investigación mediante los cuales se recogen y analizan una serie de datos de una

Donoso, P. M.ª, Rico, N. y Casis, M. (2013). Etapas de elaboración de un instrumento para indagar sobre actitudes hacia las matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 211-218). Granada, España: Comares.

muestra de casos representativa de una población o universo más amplio, del que se pretende explorar, describir, predecir y/o explicar una serie de características (García Ferrando, 1993).

Introducción

El uso de encuestas es una técnica utilizada como herramienta en la metodología cuantitativa desde finales del siglo XIX, donde surge a partir de las experiencias de Le Play y Booth (González, 1976).

Los primeros estudios donde se presentan técnicas precisas y elaboradas, que muestran que es posible la medición en psicología social, son los trabajos de Thurstone (1928), Likert (1932), Guttman (1950), y Osgood, Succi y Tannenbaum (1957). Todos ellos realizan mediciones de los estados subjetivos, entendiendo como tales los sentimientos, actitudes, creencias, etc. de las personas. En la literatura, a este conjunto heterogéneo de variables se les llama «actitudes», entendiendo que «una actitud es una respuesta evaluativa, relativamente estable, en relación a un objeto, que tiene componentes o consecuencias cognitivas, afectivas y probablemente comportamentales» (Lambert, 1989, p. 217).

En general, los estudios sobre actitudes utilizan técnicas verbales para la recogida de información, y dentro de ellos el más utilizado es el cuestionario por medio de escalas, razón por la cual ha sido el más fundamentado, contrastado y estudiado lo que le ha llevado a ser considerado de alto rango científico (Torgeson, 1958; Morales Vallejos, 2000; Morales, Urosa y Blanco, 2003).

Entre las ventajas referentes al uso de cuestionarios para la medición de actitudes y creencias, Munn y Drever (1995) señalan que el cuestionario mide variables que no se pueden observar en forma directa, que por lo general son variables psicológicas y educativas, y que por sus características son elaboraciones teóricas denominadas «constructos». Crocker y Algina (1986) asignan al constructo un papel de etiqueta que resume todo un conjunto de comportamientos relacionados. Según estos autores, la medición de un constructo debe empezar enumerando los comportamientos que el constructo engloba, tarea denominada «definición operacional».

Según Padilla García, González Gómez, y Pérez Meléndez (1998), el cuestionario es un todo, formado por preguntas y tests. La función de las mismas es provocar las respuestas que servirán de indicadores del constructo a medir.

La medición a partir de encuestas, una vez establecidos los comportamientos que el constructo incluye, requiere de la elaboración y aplicación de un instrumento. Ambos procesos, y las etapas que requieren, se abordan en las secciones siguientes.

Elaboración de un cuestionario

En el proceso de elaboración de un cuestionario no existe unanimidad en el orden de las etapas a seguir. En Rodríguez Fernández (2005) se muestra un diagrama de este proceso de planificación en términos generales. Según la experiencia de los trabajos realizados para indagar sobre las actitudes, creencias y concepciones de profesores en formación y en ejercicio se han identificado una serie de fases que se registran en la Figura 1.

El primer paso a seguir es determinar los objetivos del cuestionario. Para ello, se realiza una profunda revisión de los conceptos involucrados con el objeto de estudio.

Una vez revisada la bibliografía relativa al objetivo, se establece si existe un instrumento elaborado previamente con el mismo objeto de estudio. En caso afirmativo, este instrumento se puede replicar, abriendo la posibilidad de comparación entre los resultados del primer estudio y los nuevos. También es posible modificar el cuestionario ya existente para adaptarlo a los objetivos planteados. En caso de no existir instrumento, se procede a crear uno propio.

El paso siguiente consiste en elaborar las preguntas o ítems del cuestionario. Muchos autores comparten la idea de que la redacción de las preguntas es una tarea difícil y lenta. Por ello, han elaborado diversos manuales para facilitar esta labor (Arias Astray y Fernández Ramírez, 1998; Azofra, 1999; Foddy, 1996; García Ferrando, M., 1993; Harvatopoulos, Livan y Sarnin, 1992; Padilla García, et al., 1998; Rojas, Fernández y Pérez, 1998). Todos ellos recomiendan seguir los siguientes criterios para redactar preguntas fiables y válidas: responder de manera equitativa a las dimensiones diseñadas y a las distintas componentes que se han definido en el estudio, presentar una redacción adecuada y sencilla, que evite las dobles interpretaciones, y presentar situaciones individuales en lugar de colectivas, con el fin de aumentar la implicación del encuestado con la situación.

Se distinguen dos tipos de preguntas: preguntas factuales, las cuales están diseñadas para medir hechos o sucesos que pueden ser medidos de manera objetiva, y preguntas subjetivas, que pretenden medir actitudes, opiniones, sentimientos y creencias de las personas. No hay un medio objetivo de comprobar la precisión de las respuestas de las personas, ya que, sólo el encuestado tiene acceso a sus estados subjetivos.

Cuando el cuestionario está constituido por preguntas subjetivas, se elaboran preguntas abiertas de tipo exploratorias para cada uno de los constructos a estudiar. El contenido de estas preguntas estará directamente relacionado con los antecedentes teóricos adquiridos en la revisión bibliográfica, y su propósito es recoger información exhaustiva sobre el objeto de estudio. De esta forma el instrumento último será obtenido por un procedimiento inductivo a posteriori (Gil, Moreno, Olmo y Fernández, 1997).

El cuestionario abierto se ha de aplicar a una muestra reducida de individuos y las respuestas de cada ítem serán sometidas a un proceso denominado análisis de contenido, siguiendo las siguientes fases: En primer lugar, todas las respuestas se ordenan alfabéticamente. Esto permite registrar un listado de respuestas por cada ítem. En segundo lugar, se registra el número de frecuencias de respuestas, con lo que se identifican los ítems con mayor o menor cantidad de respuestas. En tercer lugar, se agrupan las respuestas con igual contenido, lo que permite establecer un listado de contenidos por ítem sobre el objeto de estudio. El cuarto paso es la elaboración de categorías. Los contenidos identificados anteriormente permiten determinar categorías según un criterio, en las cuales se clasifican las respuestas. Las categorías han de ser exhaustivas, esto es, deben abarcar todas las respuestas que puedan darse, y han de ser excluyentes, con lo que una respuesta debe pertenecer a una sola categoría.

Una vez determinadas las categorías y su respectiva clasificación de respuestas, se somete la clasificación al criterio de un grupo de expertos. Estos evalúan si las respuestas corresponden a las categorías. Las valoraciones de los expertos pueden desembocar en la realización de modificaciones para algunas de las categorías.

El lenguaje de las categorías se modifica para dar paso a un listado de afirmaciones coherentes, susceptibles de ser medidas en una escala. Aiken (1970) y Morales Vallejos (2000), advierten que el término escala suele ser equívoco ya que en la literatura psicométrica se usa en dos sentidos distintos. García-Valcárcel y Tejedor (2007) entienden por escala «un conjunto de frases que lleva asignado un valor numérico, resultante de una serie de operaciones estadísticas, que nos permitirá situar al sujeto en un punto de la graduación jerárquica establecida para el continuo psicológico de un determinado objeto» (p. 3). La escala de Likert es una de las más utilizadas (Likert, 1932).

El listado de afirmaciones que surge de las categorías debe ser validado, en una segunda instancia por un grupo de expertos, con el objetivo de asegurar la adecuación en cuanto a la redacción, cantidad de ítems por constructo y su respectiva coherencia. Recibidas las sugerencias propuestas por los expertos, se procede a elaborar la primera versión del cuestionario cerrado.

El proceso anterior corresponde a un análisis de calidad del cuestionario denominado procedimiento subjetivo. Asimismo, se somete a un procedimiento empírico, que consiste en aplicarlo a una muestra piloto y analizar sus resultados, para luego llevarlo a la muestra definitiva. Esta aplicación permite verificar la redacción de los ítems, el formato, el tiempo y materiales que requiere su administración. A su vez, calcular el grado de confiabilidad, usualmente el valor del coeficiente de confiabilidad α de Cronbach.

La versión definitiva del cuestionario cerrado se obtendrá una vez realizadas las modificaciones que resulten de la aplicación del cuestionario a la muestra piloto.

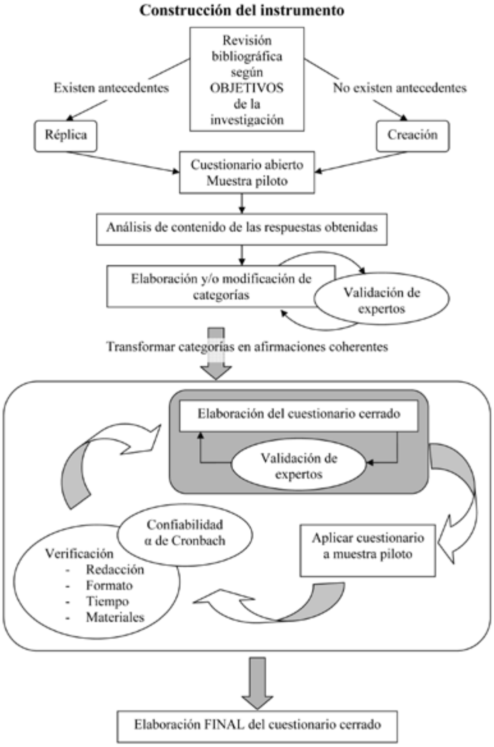


Figura 1. *Fases en la elaboración del instrumento. (Elaboración propia)*

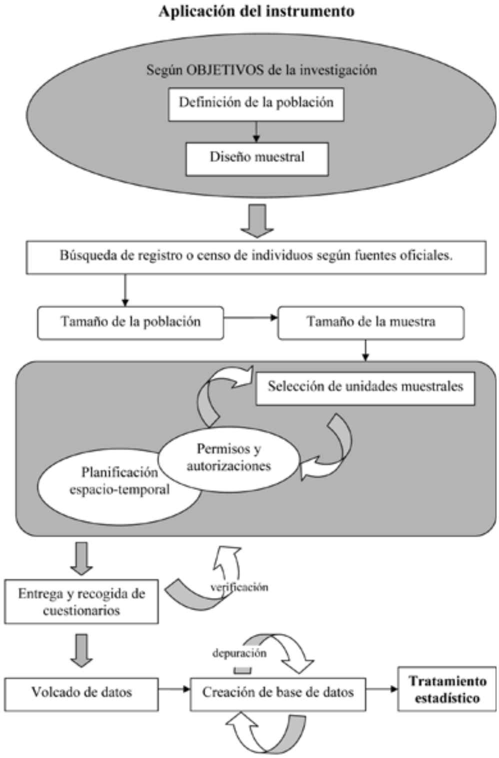


Figura 2. *Fases en la aplicación del instrumento. (Elaboración propia)*

Por último, en todo cuestionario es de utilidad agregar un listado de preguntas demográficas, que tienen el objetivo de conocer las características sociales de los encuestados. Por su contenido común se llaman variables demográficas. Se recomienda ubicarlas al final de la encuesta, cuando el encuestado ya ha comprendido el objetivo de las preguntas o ítems (Padilla García, et al., 1998 y Azofra, 1999). Las variables demográficas (ej. edad, ciudad de origen, etc.) son utilizadas para obtener grupos de comparación con los que interpretar las respuestas a las preguntas.

En la literatura se encuentran monografías sobre la elaboración del cuestionario que se recomienda consultar cuando se inicia en el uso de esta técnica como recogida de datos (Fink, 1995a; Fink, 1995b; Harvatopoulos, et al., 1992; Fowler, 1993; Bosch y Torrente, 1993 y Santesmases Mestre, 2009).

Aplicación del instrumento

Un esquema de las fases que se siguen, una vez construido el instrumento, puede verse en la Figura 2.

Previamente a la aplicación del cuestionario, se debe delimitar tanto la población objetivo como la unidad estadística que proporciona la información. Según Nortes Checa (1977), con respecto a esta última, «deben darse todas las propiedades necesarias que permitan reconocerla con facilidad y evitar posibles equivocaciones, debiendo ser precisa, clara y expresada en términos de fácil compresión por todos» (p. 620). Así mismo es deseable contar con un registro, censo o listado fiable de las unidades que forman parte de la población, su localización geográfica o indicaciones suficientes que permitan el acceso a las unidades para recabar la información deseada.

A continuación se debe determinar el diseño muestral, esto es, establecer los mecanismos por los cuales se van a seleccionar las unidades que formarán parte de la muestra. La teoría de muestras tiene por objeto suministrar la metodología que permita un diseño muestral más adecuado, que dependerá de multitud de factores, tales como el tipo de encuesta, forma material de presentar el cuestionario, características de la población, información requerida, presupuesto, análisis que posteriormente se pretendan realizar, delimitación geográfica o temporal, etc. Cochran (1953) realiza una revisión de las técnicas de muestreo más utilizadas y sus características.

Considerado el listado, dependiendo del tamaño de la población y de la variabilidad esperada en las respuestas, se establece el tamaño muestral mínimo que garantice la representatividad de la muestra. En Arkin y Colton (1950) se resume el tamaño de muestra necesario para diversos casos, dependiendo del tamaño de la población y el error máximo admisible.

Conociendo el tamaño de la muestra, se debe poner en marcha el mecanismo para la selección de unidades que corresponda con el diseño muestral. Una vez seleccionadas las unidades, se revisa la planificación espacio-temporal para la aplicación de la encuesta y se realiza una petición de los permisos necesarios para acceder a las unidades finales. Es habitual que en esta etapa se deba realizar una segunda selección de ciertas unidades, debido a la imposibilidad de acceder a algunas de las unidades inicialmente seleccionadas, por diferentes motivos. Esta revisión y, en su caso, la incorporación de nuevas unidades muestrales, puede ser contemplada también en la siguiente fase en sentido temporal, esto es, durante el trabajo de campo de entrega y recogida de cuestionarios.

Diversos autores recomiendan una minuciosa programación del trabajo de campo, lo cual puede incluir la preparación de materiales, selección y formación de personal, asignación de tareas y funciones del equipo, previsión de posibles incidencias en el trabajo de campo, etc. En cualquier caso, una mayor complejidad del diseño muestral se verá reflejada en la necesidad de un equipo mayor y por tanto en necesidades de coordinación y formación mayores.

La recogida de información se llevará a cabo según los diseños establecidos.

Obtenida finalmente la información, ésta debe ser codificada y puesta en un formato adecuado que permita su posterior análisis. En la actualidad, los soportes informáticos permiten realizar la depuración de los datos codificados de forma semi-automática, así como su validación y el estudio y tratamiento de datos faltantes, como se puede ver en Santos Peñas, Muñoz Alaminos, Juez Martel y Cortiñas Vázquez (2003). Un archivo de datos depurado permitirá abordar el siguiente paso en la investigación: el tratamiento estadístico de los datos.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por: Becas Chile de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica (CONICYT) del Ministerio de Educación de la República de Chile; Becas MAEC-AECID del Ministerio de Asuntos Exteriores y de Cooperación del Gobierno de España; y por los grupos FQM193 y FQM147 de la Junta de Andalucía, España.

Referencias

Aiken, L. (1970). Attitudes Toward Mathematics. *Review of Educational Research* (40), 551-596.

Arias Astray, A. y Fernández Ramírez, B. (1998). La encuesta como técnica de investigación social. In A. J. Rojas, J. S. Fernández y C. Pérez, *Investigar mediante encuestas. Fundamentos teóricos y aspectos prácticos.* Madrid, España: Síntesis.

Arkin, H. y Colton, R. (1950). *Tables for Statisticians.* New York: Barnes and Noble.

Azofra, M. J. (1999). Cuestionarios. Madrid: CIS, *Cuadernos Metodológicos, 26.*

Bosch, J. L. y Torrente, D. (1993). Encuestas telefónicas y por correo. Madrid: CIS, *Cuadernos Metodológicos,* número 9.

Cochran, W. (1953). *Sampling Tecniques.* Jhon Wiley & Sons, Inc.

Crocker, L. y Algina, J. (1986). *Introduction to classical and modern test theory.* New York: Holt, Rinehart and Wilston.

Fink, A. (1995a). *How to design surveys.* Thousand Oaks, California: Sage.

Fink, A. (1995b). *How to ask survey questions.* Thousand Oaks, California: Sage.

Foddy, W. (1996). *Constructing questions for inteviews and questionnaries.* Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Fowler, F. (1993). *Survey Researche Methods.* Newbury Park, California: Sage.

García Ferrando, M. (1993). La entrevista. En M. García Ferrando, J. Ibáñez, y F. Alvira, *El análisis de la realidad social. Métodos y técnicas de investigación.* Madrid, España: Alianza.

García-Valcárcel, A. y Tejedor, F. (2007). *Estudio de las actitudes del profesorado universitario hacia la integració de las TIC en su práctica docente.* Recuperado el 30 de marzo de 2011, de http://gredos.usal.es/jspui/handle/10366/18450>

Gil, F., Moreno, M., Olmo, M. y Fernández, A. (1997). Elaboración de cuestionarios para determinar las creencias de profesores. *UNO. Revista de Didáctica de la Matemática* (11), 43-54.

González, S. (1976). *La sociología, aventura dialéctica.* Madrid: Tecnos.

Guttman, L. (1950). The basis for scalogram analysis. In S. A. Stouffer (Ed.), *Measure-*

ment and prediction. Priceton N.J.: Priceton University Press.

Harvatopoulos, Y., Livan, Y. F. y Sarnin, P. (1992). *El arte de la encuesta. Principios básicos para no especialistas.* Bilbao: Deusto.

Lambert, J. (1989). *Psicologóa social.* Madrid: Pirámide.

Likert, R. (1932). A technique for measurement of attitudes. *Archives of Psychology,* XXII(140), 1-55.

Morales Vallejos, P. (2000). *Medición de actitudes en psicología y educación: construcción de escalas y problemas metodológicos.* San Sebastián: Tártalo.

Morales, P., Urosa, B. y Blanco, A. (2003). *Construcción de escalas de actitudes tipo Likert.* Madrid: La Muralla.

Munn, P. y Drever, E. (1995). *Using questionnaries in small- scale research.* Glasgow: SCR.

Nortes Checa, A. (1977). *Estadística teórica y aplicada.* Burgos: Editorial Santiago Rodríguez. S. A. .

Osgood, C. E., Succi, C. J. y Tannenbaum, P. H. (1957). *The measurement of meaning.* Urbana Ill: University of Illinois Press.

Padilla García, J. L., González Gómez, A. y Pérez Meléndez, C. (1998). Elaboración del cuestionarioa. In A. J. Rojas, J. S. Fernández, y C. Pérez, *Investigar mediante encuestas. Fundamentos teóricos y aspectos prácticos.* Madrid: Síntesis.

Rodríguez Fernández, S. (2005). El Cuestionario. In S. Rodríguez Fernández, M. Á. Gallardo Vigil, M. C. Olmos Gómez y F. Ruiz Garzón, *Investigación Educativa: Metodología de Encuesta* (pp. 33-50). Granada: Grupo Editorial Universitario.

Rojas, A. J., Fernández, J. S. y Pérez, C. (1998). *Investigar mediante encuestas. Fundamentos teóricos y aspectos prácticos.* Madrid: Síntesis.

Santesmases Mestre, M. (2009). *DYANE Versión 4: diseño y análisis de encuestas en investigación social y de mercados.* Madrid: Pirámide.

Santos Peñas, J., Muñoz Alaminos, Á., Juez Martel, P. y Cortiñas Vázquez, P. (2003). *Diseño de encuestas para estudios de mercado. Técnicas de muestreo y análisis multivariante.* Madrid: Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, S. A.

Thurstone, L. L. (1928). Attitudes can be measured. *American Journal of Sociology* (33), 529-544.

Torgeson, W. (1958). *Theory and methods of scaling.* New York: Wiley.

LA FORMACIÓN INICIAL DE LOS MAESTROS EN ESPAÑA EN LOS ÚLTIMOS 40 AÑOS

Preservice training teachers in Spain in the later fourty years

Lorenzo J. Blanco
Universidad de Extremadura

Resumen

Los medios de comunicación nos muestran un debate acerca del fracaso escolar y de la necesidad de cambio en el sistema educativo. Pero si hicéramos un estudio histórico de estos mismos medios veríamos que tal debate es frecuente y reiterado, al menos, en los últimos 40 años. Es importante resaltar que, si bien en menor medida en los medios generales, también ha sido un periodo de cambio en el sistema de formación de los Maestros. Podríamos señalar, además, que estos cambios lo han sido tanto en la estructura del sistema de formación como en los organizadores curriculares de las diferentes materias que han ido formando parte de los diferentes planes de estudio. Haber marcado un tiempo de 40 años para esta aportación tiene una doble justificación. Por una parte, estas cuatro décadas corresponden a un periodo con el que podemos identificar la vida profesional de Encarna Castro y de un grupo importante de los que participamos en este libro. Pero, al mismo tiempo, fue una época en la que se produjeron importantes cambios sociales y políticos y, también, en el sistema educativo que afectaron directamente a nuestro inicio profesional.

Palabras Claves: Formación inicial; Primaria; Matemáticas.

Abstract

The mass media have been presenting us with a debate on academic failure and the need for change in the education system. A look back over time at these same media shows, however, that over the last 40 years they have regularly brought up this topic as a subject of debate. Importantly, these last 40 years have seen the major changes in our society in general reflected, although clearly to a lesser degree, in the system of Primary Teacher Education. These changes have been both systemic affecting the structure of teacher training and in the central elements

Blanco, L. (2013). La formación inicial de los maestros en España en los últimos 40 años. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 219-226). Granada, España: Comares.

around which the curricula of the various subjects have been organized in the successive study plans. The choice of this 40 year period for this contribution had a twofold motivation. First, these four decades correspond to a period with which one can identify the professional career of Encarna Castro and of a major part of those of us involved as participants in this book. And second, as was just indicated, it has been a period involving important social and political changes, and changes too in the education system which directly affected our own beginnings in our professional careers.

Keywords: *Initial teacher education; Primary education; Mathematics.*

Punto de partida. La formación de maestros en los 70

Un número importante de los profesores de las actuales Facultades de Educación iniciamos nuestra andadura profesional con las especialidades de Ciencias, Humanas, Lengua Española, Lengua Extrajera y Preescolar, que se adoptaron como consecuencia de los cambios edutativos en los 70. Desde entonces, dos referentes nos han ocupado y preocupado: la inquietud por mejorar nuestra actividad y desarrollo profesional y la búsqueda constante por establecer la relación entre docencia e investigación, o de otro modo, entre la teoría y la práctica docente. Y, además, siempre se consideraron básicos los procesos de reflexión e información sobre la práctica docente, y la generación de un nuevo conocimiento útil para la profesión de formador de profesores que surgiera de un equilibrio entre la experiencia e innovación docente y los resultados de la investigación.

Al inicio de este periodo encontramos algunos acontecimientos específicos que provocaron cambios importantes en los centros de formación de Maestros. La promulgación de la Ley General de Educación de 1970 y las orientaciones curriculares para la EGB, sugerían una readaptación de las Escuelas Normales que fueron incorporadas a la Universidad dando lugar a nuevos planes de estudios y las especialidades ya señaladas. Y, provocó la incorporación de un gran número de profesores procedentes de licenciaturas de contenido. Esta incorporación masiva de profesores jóvenes influidos, además, por la época de cambio social tuvo consecuencia en el funcionamiento de estos centros y en diferentes aspectos.

Cuando accedimos a estos centros el contenido de las asignaturas a impartir era, fundamentalmente, teórico. Los «Cuestionarios de Didáctica de la Matemática» publicados en el BOE (MEC, 14 - VII – 67) evidenciaban la, casi exclusividad del contenido científico sobre Matemáticas en la formación de profesores, a pesar de la expresión Didáctica de la Matemática. Este predominio lo muestra Sierra (1987) en su estudio de los Planes de Estudios del 71 de las Escuelas de Formación del Profesorado de EGB, vigentes hasta principio de los 90. En ellos, se distinguía entre las asignaturas de contenido científico y la de Didáctica de la Matemática, para los alumnos de la especialidad de Ciencias. Señalaba que, en éstos, «la Didáctica de la Matemática ocupa aproximadamente un 25 % del currículo de los alumnos de las Escuelas referido a su formación matemática global» (p. 105). Para las demás especialidades aparece, solamente, una asignatura llamada «Matemáticas y su Didáctica» donde el temario nos volvía a demostrar la escasa referencia a la Didáctica de la Matemática. Es decir, en los antiguos planes de estudio en la formación inicial de maestros el peso recaía en la formación matemática y la reflexión didáctica estaba casi ausente. Primeramente había que 'darles' Matemáticas y, prácticamente, con eso era suficiente.

Cuando accedí a la Escuela de Magisterio de Badajoz, en 1978, me propusieron dar clases a la especialidad de ciencias y me dijeron: «Tienes que dar el álgebra de primero y el cálculo infinitesimal de segundo». Ambas materias eran parte fundamental del currículo del futuro maestro. Existía una asignatura de dos horas semanales llamada «Metodología de la Matemática» en la que se trabajaban los bloques lógicos y los bloques multibases, con las referencias a Piaget, Dienes, Mialaret y poco más. Al poco tiempo conseguimos modificarlos y adapatarlos a la realidad en la que nos movíamos. Teníamos algunos libros sobre diferentes aspectos de la Didáctica de la Matemática de autores conocidos, como Z. P. Dienes, E. Castelnuovo, G. Mialaret, A., P. Puig Adam, A. Aizpún y E. Roanes que «trataron de integrar en un mismo texto los aspectos didácticos junto con los contenidos matemáticos necesarios para el maestro» (Sierra y Rico, 1996, p. 56). En la década de los 80 aparecieron algunos textos, especialmente de A. Nortes Checa, que fueron utilizados en las Escuelas de Magisterio como manuales específicos.

La inquietud señalada por la mejora profesional nos llevó a participar en el nacimiento de sociedades de Profesores de Matemáticas (Gutiérrez, 1991, Rico y Sierra, 1994) que planteaban la organización de jornadas, cursos y actividades; y cuyo objetivo era divulgar innovaciones educativas, difundir las corrientes sobre enseñanza/aprendizaje (E/A) de las Matemáticas, coordinar esfuerzos de personas, grupos relacionados con la educación matemática, etc. donde las inquietudes sociales de la época no eran ajenas. Nuestra inquietud por mejorar los resultados de la E/A de las Matemáticas, porque los alumnos aprendieran matemáticas era el motor de nuestra constante y heterogénea actividad. Y ahora podemos asumir que, sin duda, «la historia de la Educación Matemática en España hubiera sido muy diferente sin la presencia activa, desbordante y, a veces, provocadora de los grupos de innovación a finales de los 70» (Rico y Sierra, 1994, p. 166).

Sus resultados eran aportaciones valiosas, vinculadas a planteamientos de innovación o experimentación relacionados con problemas concretos de intervención en el aula, que nosostros fuimos incorporando, más de una forma puntual que de una manera integrada dentro de un planteamiento general para la educación matemática. Así, las referencias a la E/A de las matemáticas en la enseñanza obligatoria fue ganando espacio en el terreno de los programas de las asignaturas que constituían el currículum de la formación del maestro. Todo el esfuerzo suponía un intento por superar una situación curricular que nos era claramente insatisfactoria, por cuanto considerábamos que tanto la formación científica como didáctica de los estudiantes para profesores resultaba claramente insuficiente.

Punto de inflexión. La década de los 80

Algunos de los acontecimientos que tuvieron lugar en esos años nos afectaron de manera directa y consideramos están en el origen de un cambio importante en nuestra actividad profesional. El desarrolllo de la Ley de Reforma Universitaria, en el año 1983, provocó que los profesores que trabájabamos en las Escuelas de Magisterio nos integráramos en departamentos universitarios, optando por un Área de Conocimiento llamada «Didáctica de la Matemática», que nacía en 1984, independiente de las áreas de Matemáticas y de las de Ciencias de la Educación. Las Pruebas de Idoneidad convocadas ese año nos dieron estabilidad profesional. Muy pronto en el año 1987 se celebra en Valencia la I reunión de profesores del área de Didáctica de la Matemática para debatir seis preguntas sobre la naturaleza de la Didáctica de la Matemática como disciplina, lo que es considerado por Sánchez (1997) como los primeros pasos en un intento de caracterizar los problemas de nuestra área de conocimiento en el contexto de la formación inicial de maestros.

En Rico (1994) se muestra un cuadro con la adscripción de los profesores del área de Didáctica de la Matemática a 27 departamentos universitarios, de los que 3 eran específicos del área, 14 departamentos en unión con áreas de Matemáticas y 7 con el área de Didáctica de las Ciencias Experimentales. La creación de estos departamentos supuso disponer de medios personales y materiales, ayudas institucionales y otros recursos para facilitar la investigación en este campo (Rico y Sierra, 2000).

La investigación. La década de los 90

El paso anterior facilitó que en la década de los 90 se intensificara la realización y dirección de tesis doctorales de profesores del área, y un mayor protagonismo en el desarrollo de proyectos de investigación, regionales y nacionales, sobre temas específicos de la educación matemática. Rico (1999) sitúa el inicio de los primeros Programas de Doctorado de Didáctica de la Matemática en el curso 1988-89, en las Universidades Autónoma de Barcelona, Granada y Valencia. En 1994, específicamente, o en colaboración con otras áreas, se constataban diferentes Programas de Doctorado en las universidades de Almería, Autónoma de Barcelona, Granada, Extremadura, La Laguna, Sevilla, Valencia y Valladolid. Era un cambio respecto de la situación anterior donde eran los Departamentos de Ciencias de la Educación o de Psicología los que nos daban apoyo y cobertura para la lectura de Tesis Doctorales sobre Educación Matemática (Blanco, 2011). Y, tuvo como consecuencia la formación de un nuevo profesorado universitario motivado e interesado por la investigación en educación matemática (Rico, 1999), lo que mostraba un salto cualitativo importante en este ámbito de investigación.

Es, también, significativo que en el año 1996 se creara la *Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática·* en un acto al que asisten 35 investigadores universitarios que representan a 20 universidades españolas y sobre cuya constitución podemos encontrar referencias en el Boletín nº 0 de la sociedad (SEIEM, 1996). En

1997, se celebra su primer simposio donde quedan organizados grupos de trabajo que se nuclean en torno a las principales preocupaciones sobre la investigación en educación matemática de sus miembros. Que continúan en la actualidad.

Probablemente, estas referencias anteriores ratificarían la determinación de las tres etapas de crecimiento, en la investigación en educación matemática, que Torralbo, Vallejo y Fernández (2003) consideran: 1965 – 1985; 1986 – 1995 y a partir de 1996. Rico y Sierra (2000) aclaran esta distinción al señalar que la primera etapa correspondería con la realización de tesis doctorales en otras áreas educativas, que finalizaría a finales de los 80 y principio de los 90. La segunda, centrada en la matemática pero sin una visión específica del propio campo. Y la tercera generación serían doctores formados dentro de los programas de doctorados de Didáctica de la Matemática.

A pesar del escaso tiempo, los trabajos de M. Torralbo, M. Vallejo y A. Fernández, cuyas producciones son claramente visibles en revistas nacionales e internacionales, muestran la producción científica en referencia a la producción de tesis doctorales. Igualmente, existen otros trabajos que analizan el impacto internacional de nuestras publicaciones (Llinares, 2008).

La docencia. La década de los 90

En 1990 se aprobó la LOGSE, que suponían un enfoque diferente en la enseñanza que debiera ser transmitido y asumido por los fututros maestros. El Real Decreto 1440/1991 (BOE, 11 –X - 1991) estableció el titulo universitario de Maestro con las nuevas especialidades (Educación Primaria, Educación Infantil, Lengua Extranjera, Educación Especial, Educación Física y Audición y Lenguaje) y las directrices generales para su obtención.

Esta referencia añadía un elemento más de reflexión sobre la actividad que debiéramos desarrollar en nuestras aulas. Los programas de formación de profesores se movían en tres niveles. Aquellos que enfatizaban los contenidos matemáticos tradicionales, otros que incorporaban estudios o experiencias que surgían en relación a la E/A de las Matemáticas, dando mayor peso a aspectos pedagógicos y algunos pocos que se centraban directamente en la didáctica de la matemática en la educación preescolar y primaria, asumiendo la necesidad de definir un cuerpo de conocimiento específico, que considerara que el conocimiento escolar matemático no debe ser tratado como una mera simplificación del conocimiento matemático formal y cuya E/A requiere de unas condiciones, también específicas. Es decir, convivían, y aún conviven, diferentes tendencias en la formación de maestros, en nuestra área de conocimiento.

En Abraira et al (1997) se analizaron los planes de estudio de la Especialidad de Primaria de 69 centros que impartían 126 asignaturas, troncales y obligatorias, relacionadas con las Matemáticas. El número de créditos de las asignaturas variaba de 4,5 a 21. El 58 % de los casos variaban entre 12 y 16 créditos, un 22 % tenía menos de 12 créditos y un 20 % de los centros tenía más de 16 créditos. Sin ser una referencia que justifique los tres niveles anteriores ya que eso hubiera implicado un estudio de los programas, de las asignaturas encontradas en los planes de estudio, 13 se llamaban 'Matemáticas', 66 utilizaban la expresión 'Matemáticas y su didáctica' y 16 utilizaban la expresión 'Didáctica de la Matemática' y 8 algún otro título relacionado con la E/A de las matemáticas en primaria.

Lo anterior evidenciaba soluciones diferentes a la misma situación lo que era visto por algunos como un elemento de reflexión y significaba un nuevo reto centrado en la necesidad de organizar la actividad docente como formador de profesores. Esta preocupación está en el origen la reunión que celebramos en Badajoz, en noviembre de 1995 al objeto de realizar aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de primaria en el área de matemática (Blanco y Cruz, 1997), a la que asistieron 38 profesores del área de 17 Escuelas de Magisterio. En cierto modo, esta reunión era continuación de la celebrada en Valencia en 1987 «para dar respuesta a las preguntas planteadas y añadir otras nuevas que surgían como consecuencia del nuevo contexto científico e institucional» (Sanchez, 1997, p. 19). Había que justificar, más allá de los aspectos legales, las razones que subyacen en las diferentes posturas y en la forma de entender y dotar de significado a nuestras materias. E implentar programas que ayudaran a los EM a asumir esa nueva cultura matemática escolar, tomando como base nuevos dominios del conocimiento de los profesores (Sánchez, 1997).

También Encarna Castro se refirió a los diferentes tipos de conocimiento necesarios en la formación de profesores tomando como referencia los trabajos de L. Shulman. Y, reivindicó la formación matemática de los educadores de infantil al asumir que las matemáticas que los niños aprenden de manera informal ejerce una gran influencia en el dominio posterior de las técnicas básicas (Castro, 1997). Siguieron otras intervenciones que pusieron de manifiesto la necesidad de seguir reflexionando sobre el currículum en la formación de los maestros.

En febrero de 1997 se celebró un nuevo encuentro en la Universidad de León (Abraira y De Francisco, 1997), en el que participaron 95 profesores de 26 universidades. Se entendía que «la Didáctica de la Matemática empezaba a ampliar su conocimiento teórico desde las investigaciones cognitivas, las reflexiones teóricas, etc. Eso planteaba cuestiones relativas a «cómo incorporar dicho conocimiento teórico a las asignaturas que estaban dirigidas a formar profesores de EGB» (Llinares, 1998, p. 26).

Posterioremente se desarrollaron otros cuatro encuentros nacionales, en torno a la formación del profesorado de matemáticas en todos los niveles educativos, organizados en la Universidad de La Rioja (Murillo, Escolano y Gairín, 1998), Universidad de Huelva (Carrillo y Climent, 1999), Universidad de Oviedo (Corral y Zurbano, 2000) y Universida de Alicante (Penalva, Torregrosa y Valls 2002). Siempre hemos lamentado que de una u otra manera no hubieran continuado estos encuentros.

De cualquier manera, se asumió la necesidad de publicar aquellos resultados que se iban obteniendo en relación a la formación de Maestros y que pudieran ser útiles en la actividad docente o libros que recogieran aportaciones específicas para tal fin (Castro, 2001; Contreras y Blanco, 2002; Chamorro, 2003b; Godino et al, 2004, entre otros).

Punto y seguido. La situación actual

Hasta aquí llega mi aportación, ya que la referencia a la situación actual mostraría una nueva propuesta curricular en la enseñanza con las referencias a las competencias, sobre las que tristemente hemos obviado el giro ideológico que suponen, un nuevo marco para la formación de profesores con los grados y los máster, y una reiterada referencia al fracaso escolar a partir de los informes internacionales. Sin embargo, este punto y seguido puede forjarse sobre nuevos pilares más consistentes. Las referencias y reflexiones anteriores nos permiten asumir que el área de conocimiento de Didáctica de la matemática ha conseguido un buen nivel de consolidación, tanto en la investigación como en la formación de Maestros. Es evidente que somos un grupo joven como colectivo científico y queda mucho camino. Pero entiendo que los retos actuales en relación al nuevo marco institucional que se nos presenta en las universidades y que han llevado a la implantación de los nuevos grados podremos asumirlos con mayor diligencia y solidez que en las situaciones anteriores. Así, en el aspecto investigador contamos con la consolidación de departamentos y programas de doctorado y el papel de la SEIEM como sociedad dinamizadora, mientras que en el aspecto docente las aportaciones realizadas en las jornadas celebradas en Castro Urdiales (Santander) en abril de 2011 pudiera ser un buen punto para relanzar la reflexión sobre la formación inicial del profesorado de Matemáticas en los grados de infantil y primaria.

Referencias

Abraira, C. y De Francisco, A. (1997). *II Simposio. El currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas*. Departamento de Matemáticas y la Facultad de Educación de la Universidad de León.

Abraira, C.; Gómez, M. D.; Blanco, L. J. y Martín, M. C. (1997). Análisis de los planes de estudio del título de maestro de la especialidad de Educación Primaria. C. Abraira y A. De Francisco, *II Simposio. El currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas,* (pp. 15-24). Departamento de Matemáticas y la Facultad de Educación de la Universidad de León.

Blanco, L.J. y Cruz, M.C. (coords.) (1997). *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el área de Matemáticas.* ICE de la Universidad de León.

Blanco, L.J. (2011). La Investigación en Educación Matemática. *Educatio Siglo XXI, Vol. 29 nº 1*, 109-128.

Castro, E. (1997). Capacidades matemáticas en la infancia. En L.J. Blanco y M.C. Cruz, (coords.) (1997). *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el área de Matemáticas.* ICE de la Universidad de León.

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la Matemática en la Educación Primaria*. España: Síntesis.

CHAMORRO, M. C. (Coord.) (2003b). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Pearson, Prentice Hall. Madrid.

CONTRERAS, L. C. y BLANCO, L. J. (2002). *Aportaciones a la Formación Inicial de Maestros en el área de matemáticas: Una mirada a la práctica docente.* Serv. de Publicaciones de la Univ. Extremadura.

E. U. DE FORMACION DEL PROFESORADO, (1984). *Memoria. Curso 1983-84*. Servicio de Reprografía de la E. U. de F. P. Badajoz.

GODINO, J. D. (Ed.) (2004). *Matemáticas para maestros*. Departamento de Didáctica de la Matemática. http://www. ugr. es/local/ jgodino (Acceso en Mayo de 2009).

GUTIERREZ, A. (1991). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid, España: Síntesis.

LLINARES, S. (1998). Área de conocimiento Didáctica de las Matemáticas ampliando responsabilidades docentes. C. Abraira y A. De Francisco, La Formación inicial de los profesores de primaria y secundaria en el área de didáctica de las matemáticas (pp. 25-28). Universidad de León.

LLINARES, S. (2008). Agendas de investigación en Educación Matemática en España. Una aproximación desde «ISI-web of knowledge» y ERIH. *Actas de la XII SEIEM* (pp. 25-53). Badajoz.

RICO, L. (1994). Mitos y realidades de la Educación Matemática en España. En L. Blanco y L. Casas, (Coord.) *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas* (pp. 41-62). S. E. I. E. M. Badajoz.

RICO, L. y SIERRA, M. (1994). Educación matemática en la España del Siglo XX. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra, *Educación Matemática e investigación* (pp. 97-207). Madrid, España: Síntesis.

RICO, L. (1999). Desarrollo en España de los estudios de Doctorado en Didáctica de la Matemática. En K. Katt y F. Hitt (Eds.) *Dirección de Tesis de Doctorado en Educación Matemática: Una perspectiva Internacional* (pp. 1-28). México: CINVESTAV. http://cumbia. ath. cx:591/pna/Archivos/ RicoL99-142. PDF 20 de Agosto de 2010.

RICO, L. y SIERRA, M. (2000). Didáctica de la matemática e investigación. En J. Carrillo y L. C. Contreras (eds) *Matemática española en los albores del siglo XXI*. 77-131. Huelva, España: Hergué.

SÁNCHEZ, M.V. (1997). Área de Didáctica de las Matemáticas en el título de maestro-Especialidad de Educación Primaria. En L. J. Blanco y M. C. Cruz (coords.). *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el área de Matemáticas* (pp. 19-35). ICE de la Universidad de León.

SIERRA, M. (1987). «El currículum de Matemáticas y su didáctica en las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB». En *Studia Pedagógica.* Vol. 19. 101-114.

SIERRA, M. y RICO, L. (1996). «Contexto y evolución histórica de la formación en matemáticas y su didáctica de los profesores de primaria». En J. Giménez, S. Llinares y V. Sánchez, *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática*. Granada, España: Comares.

TORRALBO, M., VALLEJO, M. y FERNÁNDEZ, A. (2003). Panorama de la investigación en educación matemática en España a través de las Tesis Doctorales. *Actas de la VII SEIEM.* Granada.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS: CAMPO CIENTÍFICO, TRAYECTORIA INVESTIGADORA Y ESPACIO PERSONAL COMPARTIDO

Mathematics teacher education: scientific field, research trajectory and shared personal space

Victoria Sánchez
Universidad de Sevilla

Resumen

Tomando como hilo conductor diferentes ediciones, separadas más o menos por una década, del congreso anual organizado por el 'International Group for the Psychology of Mathematics Education', presentamos en este trabajo algunos de los avances experimentados en el estudio del profesor y los múltiples aspectos con él relacionados (conocimiento y creencias del profesor, desarrollo profesional, etc.), incluyendo en particular la formación de profesores en relación con las matemáticas. El objetivo es intentar hacer visibles tanto aportaciones concretas que han contribuido a estos avances como algunos espacios personales compartidos que se han ido generando a lo largo de los años.

Palabras clave: Formación de profesores; Matemáticas; Trayectorias de investigación

Abstract

Taking as a guiding thread different sessions, separated more or less for a decade, of the Annual Conference organized by the ' International Group for the Psychology of Mathematics Education', I present in this work some advances experimented in the teachers' study, and different aspects related to them (teachers' knowledge and beliefs, professional development, etc.), including, in particular, mathematics teacher education. The aim is to make visible both some specific works that have contributed to these advances and some shared personal spaces, which have been generated over the years.

Keywords: *Mathematics; Teacher education; Research trajectories*

Sánchez, V. (2013). Formación de profesores de matemáticas: campo científico, trayectoria investigadora y espacio personal compartido. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 227-234). Granada, España: Comares.

Introducción

En las últimas décadas la formación de profesores en relación con las matemáticas ha pasado de ser una materia instrumental a un campo científico, en el que se identifican problemas, se transforman en objetivos de investigación bajo una perspectiva teórica compatible, se abordan con metodologías adecuadas y se alcanzan unos resultados que aportan soluciones a dichos problemas y que, en ocasiones, permiten una nueva reformulación de los mismos. En este avance, movidos a veces por un contacto directo con la labor de formación de profesores en todo lo relacionado con la mencionada materia, labor que ha permitido identificar algunos de esos problemas en la propia práctica, se han insertado trayectorias de investigación de muchos investigadores e investigadoras.

Pero toda trayectoria tiene su recorrido y sus puntos notables. En el caso de las trayectorias investigadoras estos puntos están marcados, entre otras cosas, por publicaciones, aportaciones relevantes y asistencia a encuentros o congresos en los que se valida el quehacer investigador. En este trabajo vamos a centrarnos en uno de estos congresos. Concretamente, el eje conductor del mismo van a ser diferentes ediciones, separadas más o menos por una década, del congreso anual organizado por el *International Group for the Psychology of Mathematics Education*, conocido por sus siglas como PME, que se desarrolla ininterrumpidamente desde el año 1976. Estos congresos anuales, de reconocido prestigio en la comunidad internacional, posibilitan una aproximación a la evolución del campo de la educación matemática, visibilizan las aportaciones investigadoras y permiten crear un espacio personal compartido con otros colegas de diferentes países y procedencias. De hecho, algunas publicaciones como la de Gutiérrez y Boero (2006) han sido editadas con el objetivo de proporcionar información sobre el rango de materias y contribuciones de esos congresos en las diferentes áreas de investigación en la educación matemática, en el periodo comprendido entre 1976 y 2006. Aquí, en particular, estos congresos nos permiten centrarnos en trayectorias concretas como la de la Doctora Encarna Castro y la mía propia, mostrar algunas aportaciones y, sobre todo, recordar vivencias compartidas en ellos, vivencias que han contribuido a crear ese espacio personal que aquí se pretende visibilizar.

Un punto de partida

Dentro de las diferentes formas de participar incluidas en la estructura de los congresos anuales del PME, que con algunas variaciones en sus objetivos y organización se han mantenido a lo largo de las sucesivas ediciones de los mismos, aquí nos vamos a centrar en tres: Los Grupos de Discusión (*Discussion Groups* en el original), las Sesiones de Trabajo (*Working Groups* o *Working Sessions* en el original) y los Informes de Investigación (*Research Reports* en el original). Los Grupos de Discusión pretenden ofrecer a los asistentes la oportunidad de discutir un tema específico de investigación de interés común. El objetivo de las Sesiones o Grupos de Trabajo es que los participantes en el congreso puedan implicarse en actividades conjuntas en un tema de investigación. Por último, los Informes de Investigación suelen ocuparse de presentar nuevas investigaciones, indicando cómo se desarrollan, los resultados que se van obteniendo, y abriendo nuevas vías y futuras líneas de trabajo. El motivo de centrarnos en estas tres formas de participar (y no en otras) es que las dos primeras se han mantenido a lo largo de todas las ediciones y, al ser propuestas por los propios investigadores, dan una idea muy dinámica del 'estado de la cuestión'. En las actas de los diferentes congresos se incluyen las preguntas planteadas por los organizadores de estas sesiones para discutir en ellas; por brevedad, y dado el carácter de estas aportaciones, en las páginas siguientes no haremos mención a dichos organizadores como autores de publicaciones estándar (artículos, capítulos de libros, etc.) ni los incluiremos en la sección de referencias. Los Informes de Investigación, altamente competitivos por su exigente proceso de selección, validan la calidad de las investigaciones en desarrollo. En los tres casos, nos vamos a ocupar exclusivamente en los que guardan relación con el objetivo de este trabajo.

El comienzo de la década de los 90 supuso un gran avance para el estudio del profesor y los múltiples aspectos con él relacionados (conocimiento y creencias del profesor, desarrollo profesional, etc.), incluyendo en particular la formación de profesores en relación con las matemáticas. Así, en el XV PME celebrado en Asís del 29 de junio al 4 de julio de 1991, de un total de 10 Grupos de Trabajo propuestos (ver Furinghetti, 1991) tres se ocupan de los profesores con temáticas diversas. ¿Qué ideas se puede considerar que fueron en ellos relevantes como indicadores de lo que interesaba a los investigadores en aquellos momentos? En el propuesto por Dawson, Jaworski y Wood, centrado en la formación permanente de los profesores desde una perspectiva de investigación, se plantearon algunas cuestiones tan interesantes (y todavía tan actuales) como la forma en que podían afectar al desarrollo de los cursos incluidos en la formación permanente las expectativas de los participantes, los dilemas de los formadores de profesores relacionados con estos cursos (flexibilidad versus control), de qué modo se podría apoyar a los profesores en activo participantes en esos cursos a implementar las ideas en ellos desarrolladas, (lo que los autores denominaban el peligro de que no haya sucedido nada cuando se vuelve al trabajo normal) y qué metodologías podían ser las más adecuadas.

En esta misma línea, pero centrado en el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, en el Grupo de Discusión liderado por Nerida Ellerton se planteaban como preguntas de investigación las implicaciones que podría tener la investigación desde diferentes perspectivas teóricas (etnomatemáticas/cotidianas, constructivistas) en los programas de formación inicial y permanente de los profesores. Por último, Lerman y Scott-Hodgetts continuaban en el grupo de trabajo una línea ya iniciada en previos Grupos de Discusión sobre los temas relacionados con los profesores como investigadores, y como involucrarlos en la investigación colaborativa. En este encuentro, de los ocho Grupos de Discusión incluidos no hubo ninguno directamente relacionado con el profesor. Cabe destacar la importancia que ya se empezaba a asignar a las nuevas tecnologías, reconociéndose en el prefacio como una innovación relevante la inclusión de un panel específicamente dedicado a su papel en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Finalmente, dentro los 126 Informes de Investigación presentados, entre otras aportaciones de autores españoles que participaron en este congreso y compartiendo la autoría del Informe presentado con otros compañeros, estábamos la profesora Castro (Castro, Rico, Batanero y Castro, 1991) y nosotros (Llinares y Sánchez (1991). La primera aportación se centraba en delimitar las variables que intervienen en los problemas de comparación elementales y el estudio de su efecto en los niveles de dificultad observada en los alumnos. Aunque los descriptores asignados no la situaban dentro de los apartados relacionados directamente con los profesores, en ella se ponía el interés sobre los aprendices y los procesos de aprendizaje en el campo numérico, lo que pensamos era un paso necesario para empezar a dotar de contenido a los programas de formación. Nuestra aportación examinaba algunos aspectos del conocimiento de contenido pedagógico que los estudiantes para profesores tenían sobre las fracciones, en particular, sobre la noción de unidad. Ambos trabajos compartían dos cosas: trabajar en temáticas muy actuales en aquellos momentos y el hecho de que estaban redactados en español (último congreso en el que se permitió).

Un año después, en el siguiente PME que tuvo lugar en New Hamsphire, de nuevo aparecieron en lo que esta vez se denominaron Grupos de Trabajo los tres temas mencionados en el anterior congreso, continuidad que puso de manifiesto la importancia de lo planteado en ellos. En esta ocasión, de los seis Grupos de Discusión incluidos (ver Geeslin y Graham (Eds.), 1992), en el liderado por Carter y Richards aparecía ya como algo de interés el problema de cómo ayudar a los profesores a acometer las reformas pretendidas en las nuevas orientaciones curriculares que estaban emergiendo, y los dilemas que se les planteaban a estos profesionales. La misma continuidad mostrada en estos Grupos se mostraba en nuestros propios trabajos ya que, de nuevo, entre los 92 Informes de Investigación aceptados, se incluían nuestras aportaciones que continuaban vinculadas a los procedimientos usados por los niños en problemas de comparación (Castro, Rico y Castro, 1992) y al conocimiento de contenido pedagógico de los futuros profesores (Sánchez y Llinares, 1992). Desafortunadamente, estas aportaciones ya no fueron en nuestro idioma pero fueron, como las anteriores, una pequeñísima aportación a la internacionalización de un campo científico que en nuestro país había empezado a despegar años atrás. En cuanto a la creación del espacio compartido, podemos ver en la Figura 1 uno de esos momentos que contribuyeron a crearlo.

Figura 1. *Un alto en el camino*

En el intermedio

Una década más tarde el 26 congreso del PME (Cockburn y Nardi, 2002), celebrado en Norwich (Reino Unido) del 21 al 26 de julio del 2002, no presentó ninguna aportación en los Grupos de Discusión ni en las Sesiones de Trabajo que se pueda considerar directamente relacionada con la temática que aquí nos ocupa. Pero sí volvemos a encontrar entre los 165 Informes de Investigación aceptados aportaciones españolas y, entre ellas, de nuevo las nuestras, que se situaban dentro de las nuevas líneas en las que habían evolucionando nuestros trabajos. Así, en el trabajo de Cañadas, Castro y Gómez (2002) se presentaba una aportación teórica que mostraba algunas clasificaciones de trabajos previos sobre la prueba matemática, subrayando su carácter importante y problemático en la educación matemática indicado en diferentes estudios, y utilizando algunos de sus resultados para ayudar a los profesores a mejorar la comprensión matemática de los estudiantes. En este trabajo ya se mencionaba la importancia del razonamiento inductivo como el tipo de prueba más común utilizada por los alumnos. Precisamente esta importancia se vio reflejada en trabajos publicados directamente relacionados con la formación inicial de profesores, que incidían en la importancia de este razonamiento en dicha formación (ver, por ejemplo, entre otras aportaciones relacionadas con el tema, Cañadas y Castro, 2002). En nuestro caso (Escudero y Sánchez, 2002), el trabajo tenía como objetivo profundizar en los diferentes aspectos que configuran la práctica del profesor de matemáticas, en el caso de profesores de Secundaria en ejercicio, utilizando la integración de dominios de conocimiento del profesor como una forma de entender mejor la diferente forma de abordar el proceso de enseñanza. Los resultados nos permitieron apreciar la complejidad de aspectos que confluyen en una situación de enseñanza (Escudero y Sánchez, 2007). Cabe destacar que en ambos casos las investigaciones presentadas estaban de algún modo relacionadas con las tesis doctorales de alguno de los coautores. De este modo, un nuevo papel como directoras de estos trabajos marcaba un nuevo paso en nuestras trayectorias. En cuanto al espacio personal, pues afortunadamente no hay constancia gráfica del baile medieval incluido en el programa de festejos del Congreso, celebrado en un antiguo y precioso edificio, al que junto con otros colegas ambas asistimos.

Las últimas etapas

El 32 PME celebrado en Méjico en el 2008 (Figueras, Cortina, Alatorre, Rojano y Sepúlveda, 2008) conjuntamente con la versión norteamericana del congreso (PME-NA XXX), supuso un nuevo esfuerzo por evidenciar el avance en el campo. En los Grupos de Discusión aparecieron temas de gran interés relacionados con el profesor, y que reflejan lo nuevo y lo que permanece. Así, Borba y Llinares, entre otras preguntas, plantearon, cómo se pueden desarrollar metodologías *b-learning* tanto en la enseñanza de las matemáticas como en la formación de profesores, y qué diferencias plantean los cursos *online* en la formación inicial y la formación continua de los profesores. La necesidad de proporcionar tanto una fundamentación adecuada a la formación de profesores como oportunidades para considerar las creencias en relación a las matemáticas como un contenido objeto de enseñanza/aprendizaje, en relación a su enseñanza y en relación a su aprendizaje vuelve a aparecer en el grupo liderado por Neubrand, Chick y Leikin. También en la Sesión de Trabajo propuesta por Novotná, Brown y Goos, surge de nuevo el tema de la investigación colaborativa entre profesores de distintos niveles, incluidos los universitarios, analizando los puntos fuertes y débiles que se han presentado en diferentes experiencias de colaboración.

La preocupación de la Dra. Castro y su equipo por las estrategias de los alumnos y el razonamiento inductivo volvió a ponerse de manifiesto en el Informe de Investigación presentado por Cañadas, Castro y Castro (2008), que permitía aproximarse con sus resultados a un procedimiento para identificar estrategias inductivas que, aunque ejemplificado en un problema concreto, podría ser extrapolable a diferentes contenidos. Junto con este Informe se presentó otro que se centraba en el análisis del uso del pensamiento relacional en los estudiantes, describiendo las diferentes estrategias identificadas. Aunque no estaban directamente relacionados con la formación de profesores, ambos trabajos pueden tener una clara repercusión a la hora de caracterizar contenidos específicos, que deberían ser incluidos en los programas de formación de profesores respecto a las propias matemáticas y que, bajo nuestro punto de vista, pueden conducir a caracterizar unas matemáticas específicas para estos profesionales (García y Sánchez, 2012).

Debido a mi ausencia, no coincidimos en este PME, ni tampoco en el celebrado tres años más tarde en Ankara (Ubuz, 2011) al que yo sí asistí. En este congreso, explorar diferentes perspectivas teóricas sobre el aprendizaje y desarrollo de formadores de profesores en relación con las matemáticas (apareciendo como tema importante nuestra propia formación) fue un objetivo que se planteó en la sesión de Trabajo liderada por Goos, Chapman, Brown y Novotná. Junto a ello, la importancia de trabajar con profesores digamos con 'poco éxito' fue la temática abordada por Anne Cockburn en un Grupo de Discusión. Por nuestra parte, nuestro Informe de Investigación formaba parte de una investigación más amplia en la que pretendíamos indagar sobre las relaciones entre las normas sociomatemáticas y matemáticas en la interacción entre futuros maestros cuando resuelven una tarea relacionada con la definición matemática desde una perspectiva sociocultural (Sánchez y García, 2011). En el caso de los dos Informes de Investigación mencionados (presentados en uno u otro de los PME citados), estas aportaciones suponían un nuevo paso en las trayectorias: se enmarcaban en el desarrollo de proyectos de I+D+i financiados en convocatorias competitivas, lo que suponía una incorporación de pleno a la actividad investigadora desarrollada en otros campos científicos digamos 'tradicionales'.

A modo de conclusion

A lo largo de esta aportación, con respecto a la evolución del campo científico que se ocupa de todo lo que tiene que ver con el profesor y las matemáticas, hemos podido apreciar cómo la importancia dada a los programas y cursos de formación (primero en forma presencial y finalmente incorporando nuevas tecnologías), la incorporación de diferentes perspectivas teóricas en su conceptualización, el papel de las creencias y conocimiento del profesor en ellos, y el problema de cómo involucrar a los profesores en la investigación colaborativa, han sido recurrentes a lo largo de los años, extendiéndose progresivamente a docentes de niveles universitarios.

En cuanto a las trayectorias investigadoras de la Dra. Castro y la mía propia, ambas vienen representadas por tres descriptores: internacionalización, dirección de trabajos de investigación, y participación en proyectos de investigación, descriptores que fueron los hitos que marcaron el camino seguido en ellas. Por último, en cuanto a nuestro espacio personal compartido, podemos decir que la labor realizada por una generación de investigadores de nuestro país que se esforzaron en proyectar su trabajo fuera de nuestras fronteras, y los estrechos lazos que se crearon entre ellos, son algo que nos parece importante que se mantenga en las presentes y futuras generaciones. A ellas y, por supuesto, a la Dra. Encarna Castro va dedicado este trabajo.

Referencias

Cañadas, M. C. y Castro, E. (2002). *La importancia del razonamiento inductivo en la formación inicial de profesores.* En J. Gutiérrez, A. Romero, y M. Coriat, M. (Eds.), *El Practicum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación* (pp. 133-138). Granada: Universidad de Granada.

Cañadas, M.C., Castro, E. y Gómez, P. (2002). Didactical reflections about some proofs of the pythagorean proposition. En A.D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of 26th PME* (Vol. 2) (pp. 177-184), Norwich: University of East Anglia.

Cañadas, M.C., Castro, E., Castro, E. (2008). *Description of a procedure to identify strategies: The case of the tiles problem.*

En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*, Vol. 2 (pp. 257-264). Morelia: CINVESTAV-UMSNH.

CASTRO, E., RICO, L., BATANERO, C. y CASTRO, E. (1991). Dificultad en problemas de estructura multiplicativa de comparación. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME* (Vol. 2) (pp. 192-198). Assisi, Italy: PME.

CASTRO, E., RICO, L., y CASTRO, E. (1992). Choice of structure and interpretation of relation in multiplicative compare problems. En W. Geeslin y K. Grahan, (Eds.), *Proceedings of the 16th PME* (Vol. 1) (pp. 113-120). Durham, NH: PME.

COCKBURN, A. D. y NARDI, E. (Eds.) (2002). *Proceedings of the 26th PME* (pp. 177-184), Norwich: University of East Anglia.

ESCUDERO, I. y SÁNCHEZ, V. (2002). *Integration of domains of knowledge in mathematics teachers' practice*. En A.D. Cockburn y E. Nardi, (Eds.), *Proceedings of the 26th PME* (Vol. 4) (pp. 177-184). Norwich: University of East Anglia.

ESCUDERO, I. y SÁNCHEZ, V. (2007). How do domains of knowledge integrate into mathematics teachers' practice? *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 312–327.

FIGUERAS, O., CORTINA, J. L., ALATORRE, S., ROJANO, T. y SEPÚLVEDA, A. (Eds.) (2008). *Proceedings of the Joint Meeting of PME 32 and PME-NA XXX*. Mexico: Cinvestav-UMSNH.

FURINGHETTI, F. (Ed.) (1991). *Proceedings of the 15th PME*. Assisi: Published by the Program Committee.

GARCÍA, M. y SÁNCHEZ, V. (2012). Thinking about a mathematics for mathematics teachers. *For the Learning of Mathematics 32*(1), 23-25.

GEESLIN, W. y GRAHAM, K. (Eds.) (1992). Proceedings of 16th PME. Durhan, USA: PME.

GUTIÉRREZ, A. y BOERO, P. (Eds.) (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Sense Publishers: Rotterdam.

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1991). The knowledge about unity in fraction tasks of prospective elementary teachers. En F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th PME* (Vol. 2) (pp. 334-341). Assisi, Italy: PME.

MOLINA, M., CASTRO, E. y CASTRO, E. (2008). Third graders´ strategies and use of relational thinking when solving number sentences. En O. Figueras, J. L. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano y A. Sepúlveda, (Eds.), *Proceedings of the PME32 and PME-NA XXX* (Vol. 3) (p. 399-406). Morelia: CINVESTAV-UMSNH.

SÁNCHEZ, V. y LLINARES, S. (1992). *Prospective elementary Teachers' pedagogical content knowledge about equivalent fractions*. En W. Greeslin y K. Graham, (Eds.), *Proceedings of the 16th PME* (Vol. 2) (p. 274-281). Durham, NH: PME.

SÁNCHEZ, V. y GARCÍA, M. (2011). Sociomathematical and mathematical norms in pre-service primary teachers' discourse. En B. Ubuz (Ed.), *Proceedings of the 35th PME* (Vol. 4) (p. 105-112). Ankara, Turkey: PME.

UBUZ, B. (Ed.) (2011). *Proceedings of the 35th PME*. Ankara, Turkey: PME.

UNA MIRADA RETROSPECTIVA AL POTENCIAL INNOVADOR DESARROLLADO POR EL GRUPO EGB-SEMINARIO CIEM EN EL CAMPO DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS (1983-1995)

A retrospect view to the innovative power developed by Grupo EGB-Seminario CIEM in the teaching-learning of mathematics (1983-1995)

José Gutiérrez[a], Evaristo González[b], Antonio Tortosa[c]
[a]Universidad de Granada, [b]Colegio Público Sierra Nevada (Granada),
[c]Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional
«Santiago Ramón y Cajal» (Granada)

Resumen

El trabajo que aquí presentamos integra una mirada retrospectiva, que triangula las voces de integrantes del grupo CIEM a treinta años de su creación, siendo su propósito primordial rendir homenaje a la profesora Castro con algunos testimonios subjetivos que analizan las aportaciones más relevantes de este grupo al campo de la investigación en educación matemática y la formación de profesores en un contexto histórico y educativo concreto. Se describe la estructura y funcionamiento, la metodología de trabajo, sus consecuencias para los integrantes y una síntesis de la producción investigadora.

Palabras Clave: Educación matemática; Desarrollo profesional docente; Didáctica activa; Investigación acción-colaborativa; Resolución de problemas.

Abstract

The paper shows a retrospect view, that triangulates the members' voices of the CIEM Group, thirty years later. Its primary purpose being to pay tribute to Professor Encarna Castro with some subjective evidence that analyze the most important contributions of this group to the field of research in mathematics education and training of teachers in a particular historical and educational context. We describe the structure and operation, the methodology, its consequences for the members and a summary of the outcomes of research.

Key Word: *Active teaching; Collaborative action research; Mathematic education; Problems solving; Teacher professional development.*

Gutiérrez, J., González, E. y Tortosa, A. (2013). Una mirada retrospectiva al potencial innovador desarrollado por el Grupo EGB-Seminario CIEM en el campo de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (1983-1995). En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Libro homenaje a Encarnación Castro* (pp. 235-244). Granada, España: Comares.

El grupo en su contexto histórico

Antecedentes

Durante el periodo 83-95, un grupo de 5 profesores de universidad conjuntamente con 22 maestros de primaria en ejercicio comienzan a desarrollar propuestas de trabajo colaborativo en el ámbito de la resolución de problemas y el aprendizaje constructivista de las matemáticas. Inicialmente bajo el nombre *Grupo E.G.B. de la AMPA*, y posteriormente *Seminario CIEM de la SAEM THALES*, se va constituyendo una comunidad de aprendizaje que comparte problemas de enseñanza y propone situaciones de aprendizaje que traslada a las aulas para evaluar su potencial innovador bajo modelos de investigación-acción y diseños comprensivos.

Los referentes conceptuales y metodológicos internos del trabajo del *Grupo CIEM* beben de la experiencia adquirida por parte de sus miembros en la década anterior en la Investigación *Granada Mats* (Rico y cols., 1985), entre cuyos investigadores del equipo se encuentra la *Profesora Castro*. Sin ser estrictamente una continuidad, el *Seminario CIEM* es heredero de los aprendizajes de ese proyecto. Un proyecto evaluativo pionero, de amplia envergadura e impacto científico que permitió reorientar la tradición y modelos al uso sobre planificación curricular hacia un tipo de investigación basada en la evidencia de dominios conceptuales/procedimentales y su adecuación por niveles a partir de indagaciones empíricas en el aula que permitían documentar libros de texto y fundamentar las orientaciones didácticas para el profesor, representando una metodología de análisis didáctico y diseño del currículum de matemáticas desde un riguroso control empírico a la luz de las evidencias de investigación experimentadas en la práctica.

Actores e instituciones en busca de un modelo propio de investigación educativa

Corrían los años 80, la antigua *Escuela Normal* sita en *Gran Vía* albergaba, en uno de los bajos de su torreta, apenas un par de despachos compartidos, un embudo de biblioteca y dos salas de reuniones, que en ese momento no tenían ordenadores. El profesor Rico nos invitó a una reunión con maestros a fin de analizar los recién publicados *Programas Renovados del MEC*. La mayoría de profesores en ejercicio habían sido alumnos suyos, alguno aún cursábamos su optativa de 3º.

> — «Fue mi comienzo en la investigación al inicio de mi carrera docente; supuso el primer acercamiento al mundo de las publicaciones, aunque fuese en gran grupo; supuso también un contacto con la realidad escolar que en muchos casos estaba muy alejada de planteamientos teóricos.» (Profesor 5)
>
> — «En mi caso me incorporé cuando ya estaba funcionando y me adapté fácilmente a la metodología del grupo, en donde había gran presencia de maestros en ejercicio… Me ha permitido profundizar en algunos temas de investigación desconocidos hasta entonces para mí, como el relativo a la Evaluación, que posteriormente ha influido en mi formación y en mi investigación.» (Profesor 3)

— «Me sirvió como motivador de lo que hacía en el aula y ver las posibilidades que tenía la didáctica y la metodología que no había experimentado en mis pasos por la universidad durante mis estudios de magisterio y pedagogía… La motivación para entrar cada mañana en la escuela pensando que se puede modificar el currículo, la didáctica, la metodología y los materiales. Que en la escuela puede aprender tanto el maestro como el alumno.» (Profesor 2)

Figura 1. Escuela Normal de Granada

El afán democratizador que vive nuestro país en esos momentos salpica también las formas de hacer investigación educativa orientada al compromiso, un tipo de investigación artesanal, de «*bajo voltaje*», que persigue visualizar cambios a pequeña escala, desde la simbiosis entre la formación universitaria con los problemas reales de la práctica en las aulas de matemáticas.

«nos encontramos inmersos en un proceso de cambio sobre lo que debe de ser la enseñanza en general y, por tanto, la enseñanza de la Matemática en particular…urge una reforma en el sistema educativo que proporcione a los individuos que se van a formar en él una preparación adecuada, acorde con las necesidades y problemas con las que van a tener que enfrentarse... es necesaria una reforma que tenga en cuenta nuevos objetivos e incida tanto en el contenido como en el enfoque del proceso de enseñanza-aprendizaje, para que pueda dar respuesta a las exigencias planteadas. En este contexto consideramos de gran utilidad investigaciones curriculares en las que se estudien y analicen nuevos planteamientos sobre conceptos y procedimientos conocidos…; estas investigaciones, conectadas con el trabajo en el aula, contribuirán a la renovación y a una formación de calidad… la resolución de problemas de aplicación de la vida diaria que sean familiares y no puedan ser resueltos por rutinas de cálculo conocidas llevará a los alumnos a explorar las situaciones propuestas y a proponer nuevas vías de resolución» (Castro, 1994, pp. 7-8)

En esas condiciones nace el grupo, liderado desde el recién constituido *Dpto. de Didáctica de la Matemática*, a tenor de las exigencias de la *LRU*. En medio de un contexto de transición democrática ya encarrilada, donde se abre paso la consolidación de unas estructuras departamentales inexistentes, ante el impulso de unos esquemas de gobierno del país aún frágiles y poco experimentados; al amparo de un proyecto incipiente de descentralización autonómica que obliga a adaptar los currícula de la enseñanza obligatoria a las peculiaridades de cada ámbito territorial. El primer trabajo publicado en la *Revista Epsilon* ilustra bien este momento y sitúa al grupo en la tradición americana de diálogo de las asociaciones profesionales de matemáticas con las administraciones educativas, a la usanza de la NCTM y sus famosos estándares.

El trabajo del grupo se plantea con metodologías abiertas que dan la palabra al estudiante y otorgan al profesor un papel creativo en la elaboración de materiales de apoyo y complementación al libro de texto ordinario y al modelo de enseñanza-aprendizaje, que convierten el día a día en una aventura innovadora y constructivista. En el marco de una escasa literatura pedagógica autóctona sobre investigación en el aula y teoría del curriculum, el grupo inicia sus trabajos en una línea que está en sintonía con los formatos de investigación acción desarrollada en el contexto internacional: Sthenhouse (1984, 1987); Elliot (1986); Carr y Kemmis (1988); Shulman (1986, 1989).

> «La investigación-acción ha proporcionado un marco de comprensión de lo que ocurre en el aula, mostrando la interrelación entre: profesor, investigador, alumnos y contenido matemático…hemos adoptado la observación participante,… nos hemos integrado en el grupo modificando la vida del mismo,…realizando una observación del desarrollo de las actuaciones de los alumnos, teniendo en cuenta que la observación es a la vez del propio investigador que ha estado implicado en la acción. A lo largo del tiempo… el papel del investigador y el del profesor se han ido modificando, el investigador ha debido de negociar con el profesor un nuevo contenido del programa de matemáticas, pasando en el segundo año a tener responsabilidades de docencia propias del profesor. En esta segunda fase el profesor asume el papel de observador y crítico de la actuación docente del investigador» (Castro, 1994, pp. 74-75)

En este contexto de intercambio dinámico de roles profesionales estandarizados, el *Seminario CIEM* se construye como un espacio apropiado donde confrontar tres perfiles de competencias sin caer en la tentación de considerarlas categorías excluyentes ni exclusivas: hacer investigación, planificar el curriculum e intervenir en el aula.

El seminario de los martes: estructura y funcionamiento

Pasado el tiempo, con la integración en la recién construida Facultad de Educación a comienzos de los 90, ya en el *Campus de Cartuja*, atrás quedó la vieja *Escuela Normal*, abriéndose un periodo ajetreado de convivencia multidisciplinar y normalización de la vida universitaria para las didácticas específicas. Todo ello pasaba por hacer tesis, volver a examinarse de titularidades y cátedras, conseguir proyectos competitivos de I+D, participar en doctorados y publicar, publicar frebrilmente. Espacios nuevos, modernos materiales didácticos en forma de poliedros y mecanos, modernas tecnologías, ordenadores y calculadoras gráficas, curriculum y epistemologías. Todos estos cambios marcan la distancia con un mundo antiguo, vivo aún en la memoria colectiva, aunque poco investigado, que plantó límites a un tipo de hacer en Didáctica, y que desde la nostalgia del pasado siempre nos deja la duda acerca de cuánto de genuino había en aquella etapa de austeridades y cuánto de descafeinado hay en esta otra época de abundancia de recursos, créditos ECTS y pérdida de fundamentos en brazos de la posmodernidad.

—«Visto en perspectiva, el grupo permitió ir construyendo un caldo de cultivo propicio a la formación, el desarrollo profesional y la interacción continuada entre dos culturas: la universitaria, más cercana a preocupaciones de orden teórico y exigencias de productividad académica junto al mundo de la práctica educativa, más ligada a los problemas diarios de la enseñanza de las matemáticas bajo los condicionantes que imponía ese momento histórico.» (Profesor 3)

Figura 2. *Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada*

La fórmula, a priori, podría haber sido un cóctel explosivo, si bien las interacciones prolongadas en el tiempo hicieron posible que cada cual aprovechara a su modo aquel espacio de crecimiento profesional.

—«La dinámica de trabajo durante más de diez años se consiguió por la labor de un coordinador que era capaz de aportar al grupo, en algunas ocasiones, más de lo que el grupo le aportaba a él.» (Profesor 2)

—«El ejercicio de un liderazgo generoso por parte de Luis como coordinador del grupo, el supuesto prestigio profesional que otorgaba el pertenecer a un seminario estable de formación tanto para universitarios como para maestros…» (Profesor 6)

La motivación añadida que conllevaba el compartir tareas de resolución de problemas aritméticos hizo posible que los autores de este trabajo nos conociéramos, y empezáramos a trabajar con Encarna cada martes, que en ese momento andaba ya explorando una línea propia en el campo disciplinar con las tareas de visualización e investigación-acción en el *Colegio Sierra Nevada*, desarrollando un trabajo bastante novedoso en nuestro país en lo que se refiere al contenido y al paradigma de investigación empleado.

—«La unión de la inquietud por mejorar la práctica y metodología diaria en la clase con la inquietud por definir y analizar los procesos de pensamiento que se producen en la enseñanza-aprendizaje en un ambiente de apoyo mutuo.» (Profesor 2)

—«Por ponerle pegas a la historia, aunque no sirva más que de anecdotario terapéutico para el ejercicio de la memoria, en algún momento hemos reconocido que uno de los principales errores de esta aventura común fue el abrir constantemente tantos frentes creativos que nos obligaban a ir y venir del aula al seminario y del seminario al aula con «La tableta de chocolate», «Las funciones y las gráficas», «La vivienda ideal» o un sinfín de situaciones cotidianas problemáticas como «La pesca de la trucha», «Las rebajas»,… (Profesor 6)

Las características fundamentales de este modelo de investigación y su metodología de aula, las podríamos sintetizar en:

— «Poner la escuela por delante de la palabrería que muchas veces se utiliza en las investigaciones, la unión y apoyo como iguales que ha mantenido siempre el grupo, la pulcritud en todos los trabajos y experiencias que hemos realizado.» (Profesor 2)

—«la indagación, estudio y formación en temas de relevancia docente en la práctica de la Didáctica de la Matemática cotidiana; la confrontación con lo que en la práctica de la escuela se hacía; la elaboración de modelos alternativos de intervención educativa; la puesta en práctica de estos modelos, centrándonos fundamentalmente en los procesos de pensamiento que generaba en el alumno; y la evaluación de la idoneidad, eficacia y eficiencia de los mismos, en coherencia con la etapa en la que los alumnos estaban.» (Profesor 4)

Como una grata obligación y con una férrea disciplina de militancia con la enseñanza de las matemáticas, el grupo empieza a reunirse cada martes de 6 a 8; y llegado el momento, ampliamos las citas a las mañanas del sábado dedicadas al estudio de casos mediante el ensayo de una metodología clínica donde empleamos de conejillos de indias a seis adolescentes para los ensayos piloto previos: Pilar (hija de Encarna) y sus amigas Marta, Mónica, Cínta, Leticia y Estefanía.

La producción científica del seminario CIEM

Hay evidencias claras de la evolución del grupo hacia metodologías de investigación cada vez más abiertas, lo cual constituye un indicador de la preocupación por estar al día en nuevas formas de investigación que completen las carencias del método hipotético-deductivo que imperaba en los trabajos de esa época. Partiendo inicialmente de la aplicación de diseños cuasi-experimentales clásicos, los análisis se van enriqueciendo con estudios clínicos de casos desde un paradigma mediacional-cognitivo que incluye también el análisis de cambios en el pensamiento del profesor:

—«el Seminario influyó para que poco a poco fuera dejando la Pedagogía por Objetivos Operativos y Verbos de Conducta, vinculados a la Investigación Cuantitativa, dentro del Paradigma Positivista, y así mi práctica docente se fue situando en posiciones más cercanas a lo que desde este grupo de trabajo proponía y que los alumnos de la época asumían con agrado y mejoraba su rendimiento, ya que potenciaba su motivación, al ser ellos artífices en parte de su propio proceso de Enseñanza-Aprendizaje.» (Profesor 5)

— «El seminario ponía al servicio de un grupo de maestros de escuela de primaria la oportunidad de llegar a ser investigadores conscientes de su propia práctica y, a la vez consumidores activos de los productos más novedosos en el campo de la de la investigación internacional sobre enseñanza de la matemática.» (Profesor 1)

El grupo fue un vivero fértil del cual han surgido líneas de investigación robustas que son referencia internacional en el campo y que actualmente conforman el esqueleto del *Grupo PNA* (Rico, 2013).

—«Por lo que entonces se hacía en España hay que considerarlo pionero; de alguna manera el empuje de este grupo es lo que permite que en la actualidad nuestro departamento tenga un reconocimiento a nivel nacional.» (Profesor 4)

—«Con la perspectiva del tiempo transcurrido, cada vez me afianzo más en la idea de que sí que fue pionero, y aún hoy en día, 30 años después sus aportaciones tienen vigencia.» (Profesor 5)

Cada línea ha ido echando sus raíces como muestra la genealogía de trabajos posteriores o en curso. Desde la distancia que otorga el paso del tiempo, una mirada retrospectiva a las evidencias de la producción científica elaborada a lo largo de los doce años de trabajo coordinado del equipo, permite destacar un elenco de contribuciones de distinta naturaleza, todas chispeantes y cortadas por el mismo patrón. Un total de 69 trabajos publicados en formato de artículos, contribuciones a congresos, cuadernos fotomatemáticos e informes de investigación en la modalidad de libros de autoedición junto a producciones editoriales en formato de textos escolares.

—«Si bien hemos de reconocer que desde sus inicios el trabajo del grupo mantiene una vocación por dar difusión a su actividad, la cultura dominante en el recién constituido dpto. no era precisamente la de investigar para publicar artículos ISI, sino el desarrollar una investigación útil, que estableciera puentes directos con las aulas.» (Profesor 6)

—«Una investigación que permitiera: aprender a sistematizar experiencias, diseñar intervenciones en el aula, familiarizarse con el uso de herramientas de observación, recogida de datos mediante cuestionarios, entrevistas, estudios de caso y empleo de tecnologías de audio o vídeo para poder analizar a posteriori.» (Profesor 1)

Esto exigía invitar a miembros del grupo a visitar las aulas de primaria del *Colegio Sierra Nevada, La Paz, Santa Marta o Fuentenueva*; esta periodicidad contribuye a fortalecer lazos personales entre los miembros del grupo (detonante clave en cualquier empresa humana) cuya consolidación progresiva supone un predictor de éxito, una garantía de tolerancia común y un factor de exigencia colectiva en las tareas propuestas.

—«El trabajo continuado abrió un espacio de formación infinito, tamizado por lazos de amistad trabados en el tiempo que han ido corriendo en paralelo a una promoción profesional cuyo estigma iría marcando las señas de identidad de pertenencia a una escuela de pensamiento.» (Profesor 3)

—«Conseguir trabajar durante tantos años con un grupo de personas constante y sin intereses económicos sólo se consigue porque la amistad y el respeto a las individualidades se han conseguido por todos los miembros del grupo.» (Profesor 2)

A continuación presentamos a modo de ejemplo, una síntesis de uno de los trabajos del grupo, dedicado al trabajo con funciones (González et al., 1995).

CONTEXTOS Y SITUACIONES COTIDIANAS PARA EL ESTUDIO DE LAS FUNCIONES

La forma que se utilizaba para introducir al alumnado en el ámbito de las funciones sigue un esquema formal apoyado en los conjuntos numéricos y el álgebra, apoyándose en situaciones prácticas para aplicar los conocimientos introducidos. Se define primero la aplicación numérica o la ley algebraica y posteriormente se basa en una realidad para ejemplificar y dar sentido práctico al algoritmo inicial. La representación del concepto a través de tablas, diagramas cartesianos requieren un entrenamiento y una asociación con las variables que se expresan en los ejes y su relación de dependencia entre las variables que no se tiene en cuenta ni se entrena partiendo de este proceso de enseñanza aprendizaje.

—«La mayoría de los profesores no estaban satisfechos con el rendimiento del alumnado, los resultados obtenidos por cada profesor con su grupo de trabajo, por las propuestas didácticas y metodológicas que se utilizaban durante la enseñanza de las funciones; esta reflexión crítica sobre la práctica nos motivó para iniciar el trabajo sobre el estudio de las funciones…Entendíamos que el estudio de las funciones se enmarcaba dentro del campo del conocimiento numérico en cuanto eran relaciones entre números, se debía indagar en otros campos como el algebraico y sistemas gráficos de representación.» (Profesor 2)

El primer paso en la investigación consistió en la búsqueda de información y documentación sobre aspectos relacionados con el estudio de las funciones. El documento «El lenguaje de las funciones y las gráficas» elaborado por Alan Bell en 1981 fue motivador para iniciar un cambio metodológico que afectó a la forma que el profesor procedía en el aula, al tipo de materiales y a los recursos didácticos utilizados para introducir el concepto de función al alumnado de 7º de EGB y que nos sirvió de base en nuestra investigación. La propuesta de trabajo que se siguió fue incorporar un tratamiento intuitivo para iniciar al alumnado en el concepto de función.

—«Se trabaja sobre situaciones familiares que se organizan en estructuras y relaciones conceptuales más abstractas, tales como la noción de función, de ley algebraica o de aplicación numérica.» (Profesor 2)

—«Se partió del concepto de variable, las relaciones que se pueden establecer entre ellas que nos ayudarán a generalizar con las representaciones gráficas, simbólicas o algebraicas.» (Profesor 2)

Para la puesta en práctica de las propuestas anteriores se establece una secuencia de trabajo para el aula, a modo de estudio de casos, con las que introducimos las nociones anteriores, la secuencia se esquematiza en los siguientes apartados: búsqueda de contextos en los que tiene sentido establecer relaciones entre variables; selección e interpretación de variables que se presentan en los medios de comunicación; estudio del cuadrante como esquema en el que representar relaciones conocidas entre variables; expresión de relaciones entre variables cualitativas y cuantitativas, utilizando sistemas convencionales y creativos; análisis de los conocimientos que el alumnado posee a la hora de interpretar gráficas contínuas; estudio del gradiente en una función; enunciados verbales de situaciones representativas de funciones; concepto de función.

> —«El proceso de abstracción que se sigue desde las nociones intuitivas previas que tienen los alumnos hasta la asimilación del concepto de función pasa por: aspecto verbal (búsqueda de aspectos variables en entornos cotidianos), aspecto gráfico (identificación de relaciones entre aspectos variables) y aspecto algebraico (representación de relaciones).» (Profesor 2)

La incorporación de situaciones ambientales a los problemas reales supone también una llamada de atención pionera y de cierta vanguardia en el grupo, demarcando un nuevo escenario de intervención que se hace eco de una progresiva sensibilización y apertura mental de la sociedad española ante las cuestiones de sensibilización ambiental y el lugar privilegiado del curriculum de matemáticas para cultivarlas (Tortosa y Rico, 1995; Tortosa y Castro, 1997). No quisiéramos acabar sin hacer mención a un trabajo reciente de síntesis integradora, que hace justicia histórica con el tópico de la invención-resolución de problemas (Ayllón, 2012), y así mismo, con el proyecto inacabado de *Jorge Cáceres* al sistematizar y asentar toda la tradición investigadora sobre invención de preguntas en los problemas verbales. Aquí la profesora *Castro* marca estilo al regalarnos un sólido y generoso legado intelectual en el que habrá que continuar profundizando. En nuestra opinión, este trabajo ha permitido organizar y recuperar esa parte más creativa de la resolución de problemas relacionada con la invención de preguntas ya como una pieza clave de la enseñanza, ya como una clave de la misma vida y de la filosofía matemática que la acompaña.

REFERENCIAS

AYLLÓN, M. (2012). *Invención-Resolución de Problemas por alumnos de Educación Primaria.* Tesis Doctoral. Dir. Encarna Castro y Marta Molina. Granada, España: Universidad de Granada.

CARR, W. y KEMMIS, S. (1988). *Teoría crítica de la enseñanza. La investigación-acción en la formación del profesorado*. Barcelona, España: Martínez Roca.

CASTRO, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de Primer ciclo de secundaria (12-14 años).* Tesis Doctoral. Dir. Luis Rico.

CÁZARES, J. (2000). *La invención de problemas en escolares de primaria un estudio evolutivo.* Memoria de tercer ciclo, Universidad de Granada, España: Universidad de Granada.

ELLIOT, J., BARRET, G., HULL, CH., SANGER, J., WOOD, M. y L. HAYNES, (1986). *Investigación-Acción en el aula*. Valencia, España: Generalitat de Valencia.

González, E., Gutiérrez, J., Rico, L., Castro, En., Castro, Er., Fernández, F., Morcillo, N., Pérez, A., Segovia, I., Serrano, M., Tortosa, A., Valenzuela, J., García, A. y Sevilla, J. (Grupo de Investigación Curriculum e Innovación en Educación Matemática) (1995). *Contextos y situaciones cotidianas para el estudio de las funciones*. Granada, España: Dpto. Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada.

Rico, L., Almendros, A., Cobo, F., Casares, M., Casares, A., Castro, Er., Castro, Ec. Fernández, E., García, A., González, E., Gutiérrez, J., Ibáñez, B., Linares, J., Miñán, A., Moreno, A., Morcillo, N., Pérez, A., Roa, R., Segovia, I., Serrano, M., Sevilla, J., Tamayo, R., Torres, C., Tortosa, A., Urbano, M., Valenzuela, J., Vico, A. (Grupo E.G.B. de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales») (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas. Sexto nivel de EGB*. Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática.

Rico, L. (2013). Antecedentes del Análisis Didáctico en Educación Matemática. En J. L. Lupiañez, M. Molina y L. Rico, (Eds.): *Análisis Didáctico en Ed. Matemática* (pp. 23-58). Granada, España: Comares.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15 (2), 4-12. DOI: 10.3102/0013189X015002004.

Shulman, L. (1989). Paradigmas y programas de investigación para el estudio de la enseñanza. M. Wittrock (Ed.): *La investigación en la enseñanza.* Tomo 1. Barcelona, España: Paidós.

Sthenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del curriculum.* Madrid, España: Morata.

Sthenhouse, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza.* Madrid, España: Morata.

Tortosa, A. y Rico, L. (1995). Invención de problemas aritméticos. *VII JAEM-Thales, Córdoba*, septiembre 1995 (pp. 325-334). Córdoba, España: SAEM-Thales.

Tortosa, A. y Castro, E. (1997). Invención de problemas a partir de situaciones ambientales. J. Gutiérrez, F. J. Perales, J. Benayas y S. Calvo, (Eds.): *Líneas de investigación en educación ambiental* (pp. 81-85). Granada, España: Universidad Granada.