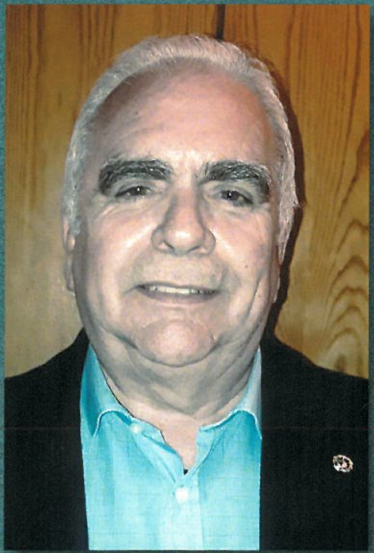
Pablo Flores, José Luis Lupiáñez e Isidoro Segovia
(Eds.)

ENSEÑAR MATEMÁTICAS

Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz



EDITORIAL ATRIO

Enseñar matemáticas

Homenaje a los profesores
Francisco Fernández
y Francisco Ruiz

Pablo Flores, José Luis Lupiáñez
Isidoro Segovia
(Eds.)

Enseñar matemáticas

Homenaje a los profesores Francisco Fernández *y* Francisco Ruiz

❧

Cañadas Santiago, María C.
Castillo Hernández, Francisco
Castro Martínez, Encarnación
Castro Martínez, Enrique
Castro Rodríguez, Elena
Fernández Plaza, José Antonio
Flores Martínez, Pablo
Gil Cuadra, Francisco
Gómez Alfonso, Bernardo
Lupiáñez Gómez, José Luis
Martínez Videla, María Victoria
Molina González, Marta
Montoro Medina, Ana Belén
Moreno Carretero, María Francisca
Puig Espinosa, Luis
Ramírez Uclés, Rafael
Rico Romero, Luis
Roa Guzmán, Rafael
Ruiz Hidalgo, Juan Francisco
Segovia Alex, Isidoro
Varas Scheuch, Leonor

Granada, 2018

Colección “Didáctica de la Matemática”.
Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Este libro debe ser citado como:
Flores, P., Lupiáñez, J.L. y Segovia, I. (Eds.) (2018).
Enseñar Matemáticas. Homenaje a los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz. Granada, Atrio.

Editorial Atrio, S.L.
C./ Hoya de la Mora, 10 - 1.ºA
18008 Granada
Tlf: 958 264 254
Móvil: 661961163
publicaciones@editorialatrio.es

ISBN: 978-84-96101-68-8 • Depósito Legal: Gr.-764/2018

Sumario

Prólogo I

Agradezco al profesorado del Grupo de Investigación PNA, FQM-193 del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, la oportunidad que me brinda para escribir unas notas sobre el profesor Francisco Fernández en el libro dedicado al reconocimiento a su trayectoria profesional universitaria. Trayectoria colmada por una vida de entrega en cuerpo y alma a la docencia y a la investigación universitaria durante un periodo de más de tres largas décadas de trabajo pleno, constante, incansable e ininterrumpido. Destaco, de entrada, su talante de académico ilusionado, infatigable, incombustible,… y su altísima deportividad universitaria para mantener impoluta esa eterna sonrisa y el buen humor característico suyo. Fórmula irrefutable con la que alcanzó a combatir con coraje, en la llegada del cambio de siglo, el desechable "decreto Wert" y sus desastrosas consecuencias para la desregulación de la universidad pública española. Sonrisa, constancia en sus clases, dedicación a sus estudiantes, persistencia en sus principios y buen humor; interés y curiosidad por entender y explicar los fenómenos de la educación matemática. Rasgos que ha cultivado valientemente, de forma admirable y magistral, sin que el paso del tiempo ni los aires azarosos de la modernidad/posmodernidad hayan tenido fuerzas y argumentos suficientes para zarandearlos ni erosionarlos. Aguantando impasible el tsunami de Bolonia, por delante a años luz de sus prescripciones metodológicas y filosóficas:

i. transportando de aquí para allá carritos repletos de poliedros desmontables, piezas geométricas de cerámica para teselar el plano, tableros de Geogebra, regletas Cuisenaire, puzles de Tangram,… u

otros miles de artilugios y recursos didácticos para la manipulación de las matemáticas, sus expresiones, representaciones, conceptos y significados;
ii. sobrellevando la intemperie de la realidad aumentada por los abalorios docentes de plataformas virtuales tipo Swad o Moodle;
iii. aplicando las ingeniosas nuevas técnicas de conteo en base a la métrica del sistema ECTs;

A lo largo de estos años, nada ni nadie ha turbado su nivel y cultura académica, su trato exquisito con los estudiantes, su elevado espíritu universitario y sus cualidades de compañero y amigo generoso. Siempre entregado y dispuesto a conversar sin prisa, a preguntar, a consultar, a decidir de forma colegiada, por unanimidad y desde el consenso absoluto. Abierto a atender sensibilidades divergentes y considerar las necesidades de minorías.

Paco, entre otras, tienes la gran habilidad de hacer fácil lo difícil, de hacer sencillo lo complejo, de explicar con claridad meridiana e infinita paciencia lo abstracto. De convertir un triple salto mortal en un pasito diario, de enseñar el Algebra a maestros sin perder la espontaneidad, respetando la ingenuidad matemática heredada de los primeros años antes de dar el salto apasionado a las operaciones formales. De estimular la creatividad necesaria para atravesar el límite invisible de lo local a lo global, del caso a la ecuación, del patrón al modelo y a la estructura, de lo concreto a lo abstracto, de la Aritmética al Algebra, con uno o varios sistemas de representación. Y en un más difícil todavía, yendo más allá incluso de lo estrictamente geométrico o visual como juego del pensamiento creativo. Y lo haces con absoluta naturalidad, como si nada, sin dar importancia a la ingente obra arquitectónica del intelecto que supone la enseñanza, mostrando con inteligencia docente la colosal tarea didáctica del magisterio bien cimentado, científica y deontológicamente hablando. Posibilitas la creación de significados duraderos y conduces a engarzar habilidosa y exitosamente las delicadas piezas del lego del conocimiento sostenible y duradero, inspirado en tareas y actividades de reciclaje sistemático y continuado; con lápiz y papel o usando nuevas tecnologías. Partiendo de las ideas previas y de la evaluación del error y la dificultad como puntos de arranque y heurístico necesario del pensamiento y el sentimiento humano;

artefactos imprescindibles de la mente, de la razón y la emoción para consolidar significados, elaborar abstracciones, construir conceptos de naturaleza compleja y apasionarse por lo trivial.

Recuerdo el segundo día de clase, en los semisótanos de antigua Escuela Normal de Maestros, a mis compañeros y compañeras dibujando como niños con tizas de colores el “problema del muro y el caracol”, resolviendo con los dedos el “problema de los mochuelos”, representando en fracciones “el problema de las barras de pan”,… A principios de los 80 tuve el honor de ser alumno de Paco en sus primeros años de docencia. Paco fue mi profesor de Matemáticas III y IV, una asignatura de Análisis Matemático, sí Análisis Matemático en Magisterio; en un momento histórico en el que entre otras cosas, La Ley General de Educación (1970) dio a luz la E.G.B. (Educación General Básica) y consiguió elevar el rango de los estudios profesionales del magisterio al nivel universitario y mejorar los salarios de los docentes de las Escuelas Normales y los maestros (a partir de entonces, profesores de E.G.B.). En un momento histórico en el que el personal docente de las Normales tenía una consideración social y profesional inferior incluso al propio profesorado de Bachillerato. Momentos decisivos en los que las Escuelas Normales rompieron con una tradición secular estigmatizada y lastrada por el régimen de la dictadura para integrarse en un entorno universitario políticamente ajetreado donde se empezaba a construir una democracia en ciernes y una renovación pedagógica global desprendida de las ataduras, miedos e inercias del franquismo.

Las Normales pasaban a ser centros universitarios transformándose en Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de E. G. B., viéndose obligadas a recomponer su identidad como centros de formación profesional y académica, reconvirtiendo las antiguas cátedras en Departamentos universitarios, al amparo de la LRU en un contexto de exigencia científico-académica inédito. Es aquí donde surge del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el que Paco ejercerá de secretario durante un largo periodo antes de ocupar el cargo de Jefe de Estudios de la Escuela Universitaria, y más tarde, Director del Centro durante un corto periodo de tiempo al amparo del Plan 71. Un plan excelente en el que cursé mis estudios de Profesor de E.G.B., especialidad en Ciencias Físico-Naturales; en unas circunstancias de escasez de conocimiento pedagógico sobre el contenido didáctico de las materias; pues salvando estudios sistemáticos como la Investigación Granada Mats o los impulsos artesanales de los movimientos de renovación pedagógica, aún estábamos anclados en el estudio de la Teoría de Conjuntos e invadidos por sus rutinas. En este plan tuve ocasión de aprender contenido matemático como la construcción de N, Q y R, de la mano del profesor homenajeado en este libro, en materias obligatorias que posteriormente permitían cursar la optativa de Didáctica de las Matemáticas II con Luis Rico.

De ser alumno pasé a ser amigo y compañero en el Seminario EGB/CIEM de profesores de matemáticas, reunido todos los martes, en un entorno innovador y estimulante para el desarrollo profesional de docentes universitarios mezclados con maestros en activo, de a pié, que deconstruían la torre de Babel compartiendo problemas e inquietudes por una Didáctica de la Matemática innovadora basada en la investigación en el aula y la confianza en el alumno para apropiarse y dirigir sus procesos de aprendizaje. Dándole el protagonismo al estudiante para aprender e inventar preguntas que luego transformaban en “Situaciones y Problemas Aritméticos de Enunciado Verbal”. Ahí surgió su tesis doctoral en 1997, un trabajo pionero centrado en el aprendizaje del algebra contaminado por esa mirada de matemática funcional y progresista: “Evaluación de competencias en Algebra elemental a través de problemas verbales”; junto con algunos trabajos de referencia en el campo de la educación matemática tales como: “De la aritmética al álgebra: aspectos históricos de la evolución del lenguaje simbólico. Implicaciones para el aula”, “El paso de la aritmética al Algebra: una propuesta didáctica”, “La práctica de la evaluación aplicada al área de matemáticas”.

Esta fase abrió paso a otra etapa decisiva en el mundo de la educación en España, la conversión de las Escuelas de Formación del Profesorado en Facultades de Ciencias de la Educación, a principios de los 90, por acto de fusión física en el nuevo edificio de Cartuja entre la sede departamental de Pedagogía (que integraba en ese momento varias áreas de conocimiento) procedente del Campus de Letras y las sedes departamentales de las Didácticas Específicas procedentes de la Escuela Universitaria de Magisterio. Momento clave en el que el Profesor Fernández debió asumir la Dirección de la Escuela y vivir en primera persona esa transición integradora de culturas académicas y epistemológicas, de consolidación del Dpto. de Didáctica de la Matemática en un entorno universitario competitivo que requería, además de dar buenas clases, mostrar una avanzada cultura de investigación, inventar un estándar de internacionalización inédito y mantener una continuada producción de conocimiento académico especializado en congresos y revistas científicas nacionales e internacionales. Cosa que pudo realizarse en el caso de este departamento, con las energías requeridas, el esfuerzo intelectual, la dedicación y el liderazgo necesarios para la realización de tesis doctorales, la publicación continuada y el posterior concurso oposición a plazas de profesor titular y a cátedra de universidad. Visto en perspectiva, que cada cual haga su balance y tome nota a estas alturas, a la luz de la calidad y cantidad de producción científica desplegada en tan corto periodo de tiempo y en relación a los medios y déficits arrastrados en desigualdad de condiciones frente a otros colectivos universitarios del campo de las ciencias puras o incluso de las letras duras.

Equilibrista de las emociones, termómetro de grupos, hombre sereno donde los haya, siempre pegado a su sonrisa y a su gesto atento y generoso. Con el algoritmo de su magia y el imán de su trato amable. Dialogante e ingenioso para darle la vuelta de tuerca a la realidad y ponerla siempre del revés pero a favor, en positivo; mostrando el lado bueno y mirando el lado justo, como reconocía una de las poetisas favoritas de Paco:

> "No juzgues… Juzga, por el contrario; no ceses, conciencia infatigable, de evaluar tus acciones, tus pensamientos y los de los demás con ayuda de tus instrumentos aún primitivos; utiliza lo mejor que tú puedas tu balanza a la vez demasiado poco sensible, nunca en el fiel, equilibrada bien que mal mediante la aportación de incesantes escrúpulos. Juzga para no ser juzgado el peor de los seres, el cobarde de espíritu, perezosamente dispuesto a todo, que se niega a juzgar."[1]

Impulsor de mis primeros pasos en la gestión universitaria al proponerme al Decano Antonio Romero como Vicedecano de Prácticas y Nuevas Tecnología, a comienzos del milenio. En una difícil etapa de resistencia dentro y fuera de la Facultad y de demanda de creatividad en la gestión para avanzar hacia una formación inicial de maestros, comprometida con

[1] Yourcenar, Marguerite (1997). *Peregrina y extranjera*. Barcelona: Alfaguara.

los modelos de lo público, vinculada a los problemas reales de la sociedad de ese momento y a las necesidades reales de la cultura escolar. Como compañero de Equipo Decanal siempre he admirado en Paco su faceta de demiurgo de la economía: ya para negociar al más alto nivel con el Vicerrectorado de turno y Gabinete de Arquitectura del Hospital Real, ya para bregar al nivel más básico de la realidad con albañiles, pintores y carpinteros para arreglar las goteras en la Facultad, poner orden en los dispositivos informáticos, cañones de proyección y demás caros artilugios audiovisuales de las aulas; o proyectar una Biblioteca de vanguardia con ruinas romanas arqueológicas integradas. Y todo ello sin ruido ni aspavientos, dando por hecho lo hecho antes de hacerlo y sin afán por colgarse medallas ni alardear más allá de su interés por hacer bien las cosas y dormir tranquilo.

Matemático polifacético, emprendedor incansable en varios frentes a la vez y visionario en muchas facetas de la profesión, de la vida y del futuro. Supo adelantarse a Bolonia con el primer Máster interdisciplinar del país. Cuando se planificaron los másteres, Paco ya venía de vuelta. A principios de los 90 inventó un programa de formación experto irrepetible que daba valor de formación complementaria a maestros recién acabados que aspiraban a perfeccionar competencias integradas de enseñanza de las ciencias experimentales y de las matemáticas: "Curso Experto de Ingeniería en Didáctica de las Matemáticas y de las Ciencias Experimentales". Una revolución para aquella época en la que nadie pensaba más allá de las clases y los programas exigidos en los temarios de oposiciones.

Anfitrión universitario admirado y querido en el área por sus aportes científicos sobre "razón y proporcionalidad", también por su "Máster Chef Celebrity" en conocimiento de la geografía culinaria, tradicional y de fusión, de los recónditos rincones granadinos. Embajador académico fuera de nuestras fronteras, especialmente en Chile, donde ha propiciado contribuciones que, con su estilo característico, engrandecen su figura.

Mecenas del altruismo, entregado a promocionar en su tiempo libre a jóvenes artistas mediante la suscripción a colecciones periódicas de edición limitada. Entre sus proyectos recientes de mayor ingenio pegados a la "pacha mama" (madre tierra) destaca su programa de conservación actual de la biodiversidad, inspirado en el lema familiar: "Apadrina una viña". Con él, ahora, tras su despegue de la docencia enseña el Álgebra a las vides de forma personalizada en las cimas de la Sierra de Albuñuelas y el Valle de Jete, donde convierte los sueños en aguacates con burbujas de gas que luego llegan a las etiquetas "Rania" de las botellas de vidrio para delirio de sus amigos.

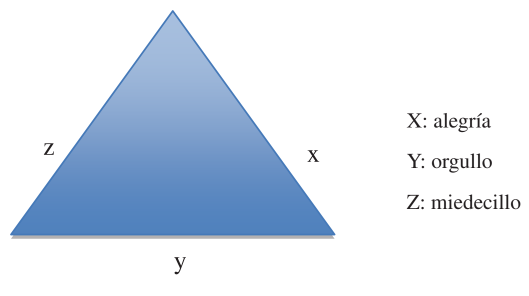
Gracias por la oportunidad de estar en este libro acompañando el merecido reconocimiento a al Prof. Francisco Fernández, una figura clave en la Historia de la Didáctica de la Matemática en España, de la Escuela Normal de maestros de Granada, de la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de E.G.B. y de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Paco, sin duda, tu estilo y altura serán difíciles de reemplazar tras tu jubileo. ¡Ojalá nos sirvas durante mucho tiempo de modelo a imitar en el espacio muestral de la decisión universitaria, docente e investigadora atrapada en estas coordenadas cartesianas de lo científico y lo humano!

Pepe Gutiérrez
Alumno de Paco Fernández

Prólogo II

Cuando hace algún tiempo, dos amigos y buenos colegas, rockeros, me propusieron escribir el prólogo que completase este manual-homenaje a Francisco Ruiz, las sensaciones que me inundaron formaron, sobre la marcha, un triángulo tan equilátero… que apenas me lo pensé. Un antiguo alumno, ahora colega de profesión, firmando el prólogo de un dilecto matemático, y mejor didacta: ¡qué bien!



El caso es que conocí a Paco en la Facultad de Ciencias de la Educación porque, como decía, fue mi profesor de Didáctica de la Matemática en 3º de Magisterio, en la especialidad de Ciencias; y debía ser el año 1995 si no recuerdo mal.

No sabía, entonces, si su experiencia docente era mucha, o poca; si su bagaje como profesor era tal que tenía que buscar y preparar material a menudo, o si las clases eran “pan comido” para él. A decir verdad eso no importaba; quiero decir que eso no era lo que, como alumno, permitía discriminar a Paco de la mayoría de profesores en mi promoción. Era, como hasta ahora, su talante sosegado, calmo, paciente con quien tiene que aprender algo, a veces tan abstracto, como las matemáticas, o lo que es más complicado: aprender cómo enseñarlas.

No recuerdo de él una mala contestación a ninguno de nosotros, sus alumnos, un gesto de desesperanza o una conducta apática al ver que no se avanzaba temario. No, de verdad que no lo recuerdo. Por el contrario lo primero que me viene a la cabeza, cuando hago memoria, y que ya caracterizaba a este maestro en su intención por acercar las matemáticas a quien debe disfrutarlas para enseñarlas, son aquellos apuntes en los que, ocasionalmente, los conceptos matemáticos eran explicados en formato cómic. ¡Matemáticas en cómic, colega! Aquello no podía ser verdad, jolín… fue tan novedoso e impactante, a nuestros ojos, que se convirtió en el tema de conversación de muchos desayunos intempestivos.

Siempre me han gustado las matemáticas, aunque no las había leído en cómic hasta entonces, se me han dado bien y he disfrutado aprendiéndolas. Además, el hecho de que no hubiese muchos que las entendieran a un nivel básico (el cálculo infinitesimal, y sus corolarios, ya es otra cosa) me permitía cierta excepcionalidad en el grupo de amigos, además de ser necesario —que no imprescindible— en ciertos momentos en los que, inocentemente, sacaba algún rédito extra a mis explicaciones a los "colegas" que tenían dificultades con ellas (cromos, canicas y cosas de esas de niño; alguna cerveza que otra cuando fui mayor de edad). Esta productividad, poco anodina en principio, me llevó a ser profesor particular y, también, en alguna academia de Granada durante algún tiempo. Aunque eso es otra historia.

Probablemente el que tradicionalmente hayan sido "un hueso" curricular y en los planes de estudio (a pesar de su importancia instrumental) porque, mayoritariamente, el profesorado era lejano cuando no reticente (vengo de la Educación General Básica y del Bachillerato Unificado Polivalente, ahí es nada) a dinámicas y materiales que permitiesen el aprendizaje significativo de, cuando menos, los conceptos básicos de la Disciplina, facilitaron ese estatus mío del que hablaba. Pero sentirse especial porque aplicaba los algoritmos, comprendía su utilidad y sabía resolver problemas se vino al traste cuando, con Paco, casi todo el mundo "las entendía", salía airoso de los problemas y terminaba entendiendo de qué iba el asunto. ¡Jo, estábamos motivados! Y eso lo recuerdo bien; eso y que era yo quien me pagaba las cervezas con más asiduidad de lo acostumbrado hasta entonces (lo que fácil viene, fácil se va).

El mérito era del profesor, de su vocación infatigable y de una formación excepcional. Un compromiso y una ética (ahora que "ejerzo" puedo valorarlo en su justa medida) que son difíciles de encontrar aún cuando el Espacio Europeo de Educación Superior es parte de nuestra cotidianidad hace más de una década.

Paco, con sus explicaciones y propuestas de trabajo catalizaba nuestros conflictos cognitivos, fundamentales para aprender de manera eficaz —cualquier didacta conoce esto— sabía, y asumía, que el aprendizaje es **CAMBIO**; que requiere de la implicación activa de quien va a aprender, o sea, de su **REFLEXIÓN**; que no es revolucionario sino un **PROCESO GRADUAL** y que cada aprendizaje es **DIFERENTE** porque viene determinado por las ideas previas, experiencia, bagaje, capacidades y actitudes de quien aprende.

De este modo, aquel maestro, era capaz de organizar la clase para que fuéramos activos, y supiésemos que lo puede ser tanto el alumno que propone y trata de resolver una situación (de aprendizaje) como quien escucha las explicaciones del profesor y trata de relacionarlas con lo que ya sabe. Planteaba el análisis y proposición de tareas de forma pormenorizada, pero facilitando su integración en nuestros esquemas previos gracias a la *síntesis comprensiva* con la que le daba sentido, y significado, a lo que íbamos aprendiendo con él (y de él, como por ejemplo que los errores del alumnado son un indicador excelente de cómo se está aprendiendo y en consecuencia, indican dónde se ha de intervenir para mejorar el proceso).

Además facilitaba con su metodología y talante, ojo, la **INTERACCIÓN** entre nosotros y también con él. Hacía de este modo que el proceso de enseñanza-aprendizaje, que en la Escuela y tradicionalmente lo habíamos experimentado como individualista, se convirtiese en un **PROCESO SOCIAL**. Pero lo más importante, lo que más me marcó en esa época —y que luego he intentado no olvidar nunca en mi práctica docente— es que el aprendizaje **NO TIENE POR QUÉ SER PENOSO** (lo que no quiere decir que no requiriese esfuerzo, ¿eh?).

En definitiva, Paco hizo bueno el popular dicho de que *las matemáticas son difíciles por el profesor*, y es verdad. Bueno, quiero decir *que la excepción confirma la regla*, y esa era él.

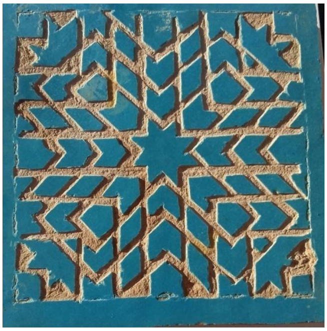
Y si el lector está pensando ahora, lo que creo que está pensando, yo lo confirmo; y es que verdaderos artistas hay muy pocos, y son excepcionales. Si no ¿de qué estamos hablando? Quizás esto sea consecuencia de la colaboración que mantuvo con la Facultad de Bellas Artes, de la Complutense, para la organización de alguna exposición sobre la obra de M. C. Escher. O, ¿quién sabe? quizás Paco colaboró, precisamente, porque es un artista per se.

Nos hizo ver, a muchos, las relaciones entre la Naturaleza (por ende el Arte) y las Matemáticas; y cómo el binomio puede ser un buen complemento para su didáctica acercando los contenidos, de esta manera, a la vida de los escolares (él lo hizo con nosotros usando el cómic para conseguir un aprendizaje significativo, por qué no seguir con otras propuestas). Y dado que el campo en el que ambas disciplinas se relacionan es muy amplio nos hacía reflexionar sobre *¿por qué no acudir a la observación de la Naturaleza y a la producción artística para ayudarnos a enseñar Matemáticas?*

Paco nos *presentó* a Fibonacci, y lo áureo de las proporciones. Recuerdo, perfectamente, cuando nos *demostraba* su existencia –presencia- hablándonos de las proporciones de la *Gran Pirámide de Keops*, y cómo los textos de Herodoto revelaban ya la presencia del *número áureo* en su construcción (por aquellos años yo debía haber visionado *Tierra de Faraones* unas treinta veces en el vídeo SONY BETAMAX C8 de mi padre, así que el lector imagine el impacto que Fibonacci, y Paco, causaron en mi). Luego aprendimos cómo este número se presenta en innumerables construcciones arquitectónicas, esculturas, objetos, y dibujos en diversas épocas (especialmente en el Renacimiento), y, por ejemplo, cómo la divina proporción es la clave con la que Dalí diseña la cúpula dodecaédrica de la *Santa Cena*, o cómo *la Venus* de Boticelli muestra diversas proporciones áureas. Por supuesto las abejas, los árboles, etc. también nos ayudaron a entender, y Paco nos hacía pensar.

Sin embargo, ahí quedó todo. Pasaron años sin volver a coincidir con él. Mantuve, obviamente, el grato recuerdo de él, de su metodología, de lo que había logrado en nosotros… pero poco más. Me diplomé, y licencié, y hasta el 2003 ó 2004 no volví a verlo. Fue en un viaje a Marruecos, que tradicionalmente ha organizado la Universidad, más concretamente al Medio Atlas (Azrou y Fez en aquella ocasión), y fue en ese autobús, compartiendo en algún momento "asiento", y en una conversación, enseñándome algo fue cuando lo entendí todo…

[…] estas isometrías —me decía Paco— constituyen la base de los llamados rosetones, frisos y teselaciones, presentes a lo largo de la historia de los pueblos en sus diversas muestras artesanales y artísticas.



Regateado en Fez

No me estaba hablado de matemáticas, no nos enseñó matemáticas… me hablaba de la vida, nos enseñó a vivir.

¡GRACIAS, COLEGA!

José Antonio Pareja
Alumno de Paco Ruiz

Sistemas de representación en la evaluación de problemas verbales en álgebra elemental

Systems of representation in the evaluation of verbal problems in elementary algebra

Luis Rico
Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo presenta un resumen del problema de investigación abordado por Francisco Fernández en su tesis doctoral, titulada “Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales”; describe las cuestiones relevantes allí tratadas sobre sistemas de representación y sus resultados. Al cerrar su ciclo profesional, docente e investigador, estas notas evocan y reconocen la aportación precursora en esta temática de Francisco Fernández, poco conocida y difundida en el Área de Didáctica de la Matemática. Con esta oportunidad subrayo su contribución al grupo FQM-193, que ha enriquecido y del que ha sido miembro destacado hasta su jubilación, con su competencia y buen hacer, su calidad humana y profesionalidad.

Palabras clave: álgebra elemental, competencia matemática, resolución de problemas, sistemas de representación.

Abstract

This work summarizes the research problem addressed by Francisco Fernández in his doctoral thesis, entitled “Evaluation of competences in elementary algebra through verbal problems”, describes some relevant issues dealt about representation systems and summarizes their results. At the end of his professional cycle, as a teacher and researcher, these notes evoke and recognize the pioneering contribution of Francisco Fernández, little known and widespread in the field of Didactics of Mathematics. On this occasion, I like to highlight his permanent, discreet, measured and relevant work, with which he has stood out and also by his human quality, competence and professionalism.

Keywords: elementary algebra, competences, representation systems, problem solving.

Introducción

Han transcurrido algo más de 30 años desde el 3 de Noviembre de 1997, fecha, en que Francisco Fernández García defendió en la Universidad de Granada su trabajo de Tesis doctoral, titulado Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.

El estudio se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, en el Programa de Doctorado de Matemáticas, y recibió ayuda del grupo "Pensamiento Numérico" (FQM 0193), del II Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía. El estudio estuvo financiado por el Proyecto PS93-0195 "Evaluación de Conocimientos, Procesos y Actitudes en Matemáticas", subvencionado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (DGICYT). Esta investigación forma parte de una generación de tesis doctorales en Didáctica de la Matemática, realizadas en la Universidad de Granada durante la última década del siglo XX.

El trabajo se llevó a cabo con el apoyo y colaboración de los miembros del Seminario "Currículo e Innovación en Educación Matemáticas (CIEM)" (Rico, 1997; Rico y cols. 2013).

Su consecución fue posible gracia al aporte de los profesores y la contribución de los alumnos de los Centros de Secundaria Aynadamar y Hermenegildo Lanz, de la ciudad de Granada y de los estudiantes de la Facultad de Ciencias de la Educación de Granada, quienes prestaron su tiempo y atención para responder a los cuestionarios y facilitar así la obtención de datos. Los directores de la tesis fueron los doctores Luis Rico y Antonio Fernández-Cano.

La tesis obtuvo la calificación de excelencia Apto Cum Laude, por unanimidad (Fernández, 1997). El trabajo tuvo continuación en la tesis de Espinosa (2004) y en la tesis de Martínez de Videla (2011), dirigidas posteriormente por Francisco Fernández, trabajos que prosiguieron el campo de estudio iniciado con esta investigación.

Trabajo de Tesis

Estructura

La memoria final de esta investigación es un informe de 442 páginas, que consta de 10 capítulos y 13 Anexos. El encuadre general y la fundamentación, en el primer capítulo, se centran en cuatro focos: Evaluación en matemáticas, Álgebra escolar, Sistemas de representación y Resolución de problemas, junto con sus interrelaciones. Desde la introducción el investigador destaca el papel de los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos: "...el conocimiento exhaustivo de los sistemas de representación y de sus relaciones mejora la comprensión de los conceptos algebraicos y de su significado, lo que redunda en una mayor capacidad para comprender y abordar otras tareas algebraicas escolares." (Fernández, 1997; p. 34).

El área problemática y el problema de investigación se describen en el segundo capítulo, donde el investigador sintetiza una revisión de investigaciones sobre evaluación a través de problemas verbales algebraicos, lleva a cabo una discusión sobre el sentido de los términos clave con que va a trabajar y concluye con un balance sobre la relevancia y racionalidad del trabajo. Descriptores del estudio son el tópico, su contenido, etapas de estudio, instrumentos y tareas propuestas.

El investigador diferencia entre las fases de planteamiento, ejecución y desempeño final y lleva a cabo un análisis teórico sobre las clases de sistemas de representación que se identifican en las respuestas de los estudiantes encuestados al resolver los problemas verbales algebraicos que se les propusieron.

El investigador identifica y caracteriza cinco valores en la modalidad de representación para las respuestas: Ensayo y error, Parte-todo, Gráfico, Gráfico-simbólico y Simbólico. A partir de un análisis didáctico, establece como nueva variable de producto: "sistemas de representación". A partir de estos valores estudiará las producciones de los estudiantes encuestados. Justifica la opción de definir el sistema de representación utilizado como variable de producto para caracterizar las producciones de los escolares; esta justificación es una de las claves del estudio, de la cual no se conocen antecedentes. Las respuestas de los estudiantes se analizan en términos de los sistemas de representación empleados por los participantes. La caracterización de las respuestas de los estudiantes según el sistema de representación escogido es una primera aportación del trabajo.

La revisión de la literatura de investigación, relativa a los términos clave seleccionados y a su interpretación, se lleva a cabo en ocho apartados del tercer capítulo.

Un cuarto capítulo desglosa los objetivos e hipótesis de la investigación atendiendo a los enfoques exploratorio y confirmatorio establecidos en el diseño del estudio. Para el primer enfoque se enuncian los objetivos en tres niveles distintos: principal, subsidiarios y específicos. Para el segundo enfoque se enuncian las hipótesis, su sentido y lateralidad.

El quinto capítulo detalla la primera etapa del diseño del estudio. Se describe el criterio de elección de la población y de la muestra, integradas por 160 escolares procedentes de dos niveles curriculares distintos, elegidos por disponibilidad. La muestra se compone de 80 estudiantes de un grupo del último curso de Educación Secundaria Obligatoria (16 años) y de otro grupo de 80 estudiantes universitarios que no han recibido instrucción en Álgebra en un período anterior mínimo de 5 años. Se identifican las variables del estudio y se describe su enfoque métrico general. Finalmente, se explica la construcción del instrumento principal en términos de su estandarización, del control de su validez y el control de su fiabilidad.

Una segunda etapa del diseño se desarrolla en el capítulo sexto, cuya secuenciación se articula en catorce fases, cuya descripción y temporalizada se detallan.

El estudio exploratorio previo, acompañado del correspondiente análisis de datos se muestra en el capítulo séptimo. La obtención de cuatro clúster de problemas y de resolutores y los hallazgos que su análisis proporciona destacan la relevancia de los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos y avanzan interpretaciones cuya fiabilidad se considera necesario confirmar.

En el capítulo octavo se procede al estudio de diferencias entre ítems y entre sujetos mediante técnicas comparativo-transversales. Se determinan los estadísticos descriptivos e inferenciales con los que se procede a la discusión de las hipótesis relativas a las tipologías de sujetos según el sistema de representación preferente escogido para la resolución de problemas algebraicos escolares.

El capítulo noveno documenta un estudio de casos con cuatro estudiantes, uno por cada uno de los clúster de resolutores detectados, con los cuales confirmar las conjeturas de caracterización previamente establecidas, que concluye con una discusión de resultados.

Finalmente, el décimo capítulo hace un balance general de resultados que incluye conclusiones específicas y hallazgos, junto con sus implicaciones y repercusiones, nuevas propuestas y líneas de desarrollo de la investigación.

Problema de investigación

La complejidad del estudio y la ambición del investigador se muestran en el sistema escalonado de objetivos e hipótesis que definen el problema y sustentan el trabajo. En esta reflexión nos ceñimos a algunas de las cuestiones relativas a los sistemas de representación y su empleo en el estudio.

Finalidades generales

Las finalidades generales de este estudio se pueden desglosar en cinco propósitos.

En primer lugar, es un estudio exploratorio. Con esa intención, el investigador diseña y construye un instrumento que recoge información para identificar la competencia algebraica elemental de los escolares, considerar la complejidad de las tareas propuestas y reorientar la comprensión sobre los conceptos implicados.

Tiene también un propósito descriptivo. El instrumento se centra en recoger información relativa a los sistemas de representación que emplean los sujetos para abordar la resolución de los problemas. Estudia así la incidencia de las variables de tarea en las producciones de los sujetos, que caracteriza según los tipos de sistemas de representación utilizados en la solución de los distintos problemas.

También contempla una finalidad explicativa, de forma que interpreta la competencia algebraica de un sujeto por su pertenencia a una de las tipologías establecidas.

Finalmente, propone un plan de actuación que, mediante la instrucción adecuada, oriente a los sujetos hacia niveles más complejos del conocimiento algebraico dentro de una evaluación continua y formativa. De este modo plantea una intervención en los aprendizajes.

Para alcanzar los propósitos mencionados el investigador propone las siguientes actuaciones:

1. Establecer variables mediante las que caracterizar tareas algebraicas adaptadas a los programas de la Educación Secundaria Obligatoria.
2. Elaborar una base de problemas verbales algebraicos, que contemplen diferentes opciones de resolución, según las variables establecidas.
3. Seleccionar tareas para evaluar las competencias de los estudiantes en Álgebra Escolar, con las cuales construir un instrumento de evaluación.
4. Tipificar el pensamiento algebraico que los estudiantes activan cuando resuelven los problemas verbales algebraicos propuestos.
5. Identificar los sistemas de representación usuales movilizados por los estudiantes para la resolución de problemas verbales algebraicos.
6. Caracterizar los grados de complejidad que implica el manejo de cada uno de los sistemas considerados.
7. Estudiar las relaciones que se presentan entre las competencias en Álgebra Escolar y los sistemas de representación elegidos.
8. Estudiar las relaciones entre las competencias y las variables que caracterizan los enunciados de los problemas verbales algebraicos.
9. Estudiar las relaciones entre los posibles estratos de la población estudiantil a la que va dirigido el estudio, en orden a determinar si hay diferencias significativas en las competencias en Álgebra Elemental.

Los sistemas de representación y el papel que desempeñan en las actuaciones enumeradas muestran la atención prestada en este trabajo a estos componentes del contenido matemático, movilizados por los estudiantes en la resolución de problemas de álgebra elemental. En el trabajo se reconoce y caracteriza el significado de las relaciones establecidas por dichos escolares y los procedimientos seguidos durante el proceso de resolución, todo lo cual lleva al investigador a identificar grupos de resolutores por el tipo de representación empleado, los procesos seguidos y las conversiones entre sistemas manejadas.

Objetivo principal

El objetivo general se enuncia así: "Aportar elementos de juicio e instrumentos fiables para evaluar las competencias que sobre Álgebra Elemental tienen los estudiantes españoles, a través de la resolución de problemas verbales".

Para llevar a cabo ese objetivo fue necesario identificar previamente los criterios de evaluación, así como determinar instrumentos válidos y fiables para conocer las competencias que, sobre el tópico enunciado, un sujeto pone en juego cuando responde a las tareas propuestas en el instrumento.

Se propuso conocer cómo los estudiantes actúan y responden ante una serie de problemas verbales algebraicos elegidos convenientemente; también establecer si los resultados dependen del tipo de problemas, dentro de una variabilidad controlada. Conocer el sistema de representación que utilizan los estudiantes en la resolución de estos problemas, por su elicitación, es un indicador del tipo de conocimiento algebraico o pre-algebraico movilizado por el estudiante en la realización de la tarea.

Enfoque exploratorio de la investigación

Objetivos a cubrir

El investigador concretó su objetivo central en diversos niveles más específicos:

- Construir un instrumento para evaluar las competencias en Álgebra elemental mediante la resolución de problemas verbales.
- Precisar criterios mediante los que relacionar los resultados de la administración del instrumento sobre toda la muestra.

- Encontrar y caracterizar agrupaciones o tipos de estudiantes según el sistema de representación que utilicen en la resolución de problemas verbales algebraicos.

Objetivos subsidiarios

Para lograr el propósito central mencionado, se hace necesario establecer y articular una serie de temas y tópicos subsidiarios que se relacionan con el objetivo principal. En esta investigación, para el logro del objetivo central, se procedió a:

a) Seleccionar un conjunto de problemas verbales algebraicos que respondan a los contenidos de Álgebra Escolar en la Educación Obligatoria con una variabilidad controlada.
b) Estudiar la validez y fiabilidad del instrumento de evaluación constituido por el conjunto seleccionado de problemas verbales.
c) Analizar estadísticamente la incidencia de cada una de las variables que intervienen en la resolución de los problemas verbales, y relacionarlas entre sí.
d) Determinar tipologías de problemas por los sistemas de representación utilizados para su resolución, caracterizando estas agrupaciones.
e) Determinar tipologías de resolutores por el sistema de representación que han utilizado para resolver los problemas del instrumento de evaluación, caracterizando estas agrupaciones.

Los objetivos a), d) y e) destacan expresamente el interés del investigador por los sistemas de representación en la resolución de problemas algebraicos elementales.

Objetivos específicos necesarios

Para la identificación y articulación de cada uno de los objetivos subsidiarios, que se derivan del objetivo principal, se hace necesario explicitar qué necesidades específicas de información se identifican, así como las correspondientes relaciones entre ellas. En este trabajo, y en relación con los objetivos d) y e) antes enumerados, destacamos:

d.1) Determinar, mediante análisis clúster, si existen tipologías entre los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación, respecto a los sistemas de representación que se utilizan para su resolución.
d.2) Establecer las características de estos agrupamientos y obtener conclusiones.
e.1) Determinar, mediante análisis clúster, si existen tipologías de sujetos por los sistemas de representación que utilicen para abordar los problemas verbales algebraicos del instrumento de evaluación.
e.2) Caracterizar distintas tipologías de resolutores que resulten del estudio de clúster de sujetos."

Como expresan los objetivos específicos, los sistemas de representación desempeñan dos funciones diferentes en los procesos de resolución de problemas algebraicos: como variables de proceso y como variables de sujeto. Estas funciones de los sistemas de representación expresadas como intenciones del investigador, son propuestas innovadoras cuyo tratamiento detallado puede seguirse en el estudio.

Enfoque confirmatorio de la investigación

La elección de dos conglomerados en la composición de la muestra, con características formativas y de desarrollo diferentes permiten enunciar las siguientes hipótesis, general y específicas, que también abordan la función de los sistemas de representación.

Hipótesis a contrastar

La resolución de problemas verbales algebraicos elementales por parte de sujetos de una población estudiantil, en distintos niveles de estudios, que sólo han recibido instrucción en Álgebra Elemental durante el período escolar (hasta 16 años), puede verse influida por el tiempo transcurrido desde han recibido dicha instrucción.

Se utiliza un diseño comparativo-transversal para contrastar las hipótesis que se refieren a la comparación entre grupos de sujetos.

Las hipótesis específicas que se contrastan son:

Hipótesis 1. Al planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos, dependiendo del grupo al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 2. A la resolución de problemas verbales algebraicos dependiendo del grupo al que pertenecen los estudiantes.

Hipótesis 3. Al desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos.

La complejidad de algunas variantes de las tareas suelen ser obstáculo para el éxito en la aplicación de algunos sistemas de representación. La utilización de sistemas de representación económicos y potentes favorecen una resolución correcta de los problemas verbales algebraicos. Dependiendo de la tipología del resolutor, existen diferencias significativas. Por lo tanto se contrastan las siguientes hipótesis, relativas a la caracterización del resolutor según sistemas de representación empleados en:

Hipótesis 4. El planteamiento en la resolución de problemas verbales algebraicos.

Hipótesis 5. La ejecución en la resolución de problemas verbales algebraicos.

Hipótesis 6. El desempeño final en la resolución de problemas verbales algebraicos.

La determinación de posibles tipologías de resolutores a través de un análisis clúster, tomando como referencia el sistema de representación con el que abordan los problemas, implicará la descripción de las características comunes a los sujetos que componen cada una de las tipologías. La confirmación de que esas características son adecuadas llevó a formular unas hipótesis, que se verificaron mediante un estudio de casos.

El enunciado de las anteriores hipótesis muestra el relieve y profundidad con el que el investigador aborda los sistemas de representación, como característica del momento madurativo en que se encuentra el estudiante en relación con su competencia como resolutor de problemas algebraicos elementales.

Racionalidad de las hipótesis: sentido y lateralidad

Diferencias entre los grupos de edad/nivel académico

En las tres primeras hipótesis se propone verificar si los estudiantes, con el paso del tiempo, han mantenido un cierto poso o fondo de competencias acerca de una actividad, como es la aplicación del razonamiento algebraico en la resolución de un problema verbal.

Es usual que cuando ha pasado un período de tiempo suficiente en que no se ha practicado una actividad, como en este caso con tareas de tipo algebraico, se puedan olvidar rutinas y procedimientos que se aprendieron en la época escolar.

Por un lado, tenemos respuestas de escolares que están recibiendo enseñanza específica en Álgebra y resolución de problemas algebraicos y, por otro, respuestas de estudiantes universitarios que, después de Secundaria no han vuelto a recibir enseñanza sobre matemáticas.

Esta circunstancia llevó al investigador a conjeturar que, en los grupos de estudiantes universitarios, tiene que haberse producido también un proceso de maduración de pensamiento y capacidad de razonamiento, que compensa el olvido debido al paso del tiempo. Esta maduración, junto con la memoria a largo plazo de los aprendizajes significativos de los conceptos algebraicos más elementales debe ponerse en juego para abordar y resolver las tareas algebraicas propuestas.

Las Hipótesis 1, 2 y 3 suponen que existen diferencias significativas entre los grupos de sujetos, tomados por el tiempo transcurrido desde que recibieron instrucción algebraica, en cada una de las fases que se consideran en un problema verbal algebraico.

La intuición inicial del investigador es que deben existir diferencias significativas entre los grupos de edad/ nivel académico, en el sentido de que la cercanía a la instrucción algebraica producirá mejores resultados en cualquiera de la fases de la resolución de los problemas algebraicos.

El investigador sostiene una hipótesis unilateral, en el sentido de que el grupo de sujetos que está finalizando la Enseñanza Secundaria Obligatoria, por estar recibiendo una instrucción permanente y sostenida sobre los contenidos de Álgebra Elemental y poniendo en práctica casi a diario el lenguaje algebraico aprendido para la resolución de problemas verbales algebraicos, debe tener mayor dominio sobre las tareas propuestas en nuestro estudio. Tales tareas, que pueden considerarse como continuación de la actividad de enseñanza del Álgebra en la E.S.O., como una actividad más dentro de contexto, no deben suponer mayor dificultad.

Sin embargo, los sujetos de los grupos de estudiantes universitarios para los que han transcurrido más de 3 años sin recibir instrucción algebraica explícita, que no han seguido estudiando matemáticas puesto que han elegido estudiar humanidades, pueden encontrar mayores dificultades en resolver las tareas algebraicas propuestas. En efecto, el Álgebra puede considerarse como un lenguaje matemático y, como tal lenguaje, si no se practica se llega a olvidar. Estas diferencias se pueden confirmar mediante contrastes de las tres primeras hipótesis enunciadas.

Resultados

Pasamos a glosar algunas de las conclusiones más relevantes del estudio en relación con los objetivos e hipótesis antes planteados.

Conclusiones relativas a los sistemas de representación

1. Los sistemas de representación utilizados por los sujetos de la muestra para abordar los problemas verbales algebraicos se clasifican en cinco categorías diferenciadas: Ensayo-Error, Parte-Todo, Gráfico, Gráfico-Simbólico y Simbólico.

En el análisis de los protocolos que se encuentran en la Memoria de Tesis, se muestran ejemplos de todos y cada uno de los sistemas de representación señalados. No se encuentra ninguna otra categoría fuera de las citadas.

2. La utilización del sistema de representación Simbólico ofrece al estudiante perspectivas de acierto en la resolución de los problemas verbales algebraicos, superiores a los otros sistemas de representación. El sistema de representación Simbólico predomina sobre los demás para abordar la resolución de los problemas propuestos. Es el sistema de representación más económico y potente y responde al tipo de instrucción escolar recibida por el estudiante.
3. Las variables que caracterizan las tareas de resolución de problemas verbales algebraicos condicionan parcialmente el sistema de representación utilizado.

La resolución de la mayoría de los problemas verbales algebraicos se aborda mediante el sistema de representación Simbólico, que presenta mayor generalidad de aplicación.

No obstante, podemos destacar que determinadas variables de tarea facilitan o dificultan, según los estados que tomen, la utilización de uno u otro sistema de representación.

Así, por ejemplo, en aquellos problemas en donde uno de los datos es un número decimal que se relaciona como factor multiplicativo y que contienen en su texto un dibujo relativo al mismo, encontramos de forma significativa los sistemas de representación Gráficos, sobre todo el sistema Gráfico-Simbólico. Estos problemas no se abordan mediante el sistema de representación de Ensayo-Error. Cuando un problema contiene en su texto un dibujo, en donde es fácil relacionar visualmente los datos e incógnitas, siendo éstos próximos a su valor real, se destaca la utilización del sistema de representación de Ensayo-Error.

Conclusiones relativas a las tipologías de sujetos

El investigador detecta y caracteriza cuatro tipos diferenciados de sujetos en la resolución de problemas verbales algebraicos, respecto a los sistemas de representación que utilizan para abordar los problemas.

Mediante un análisis clúster determina cuatro agrupaciones de sujetos, que responden a unos comportamientos comunes en cuanto a los sistemas de representación con que han abordado los problemas.

El investigador hace unas conjeturas sobre las características de estas tipologías de respuestas. A continuación realiza un estudio clínico de casos confirmatorio, dos por cada tipología, un estudiante de Secundaria y un estudiante de Universidad. En todos los casos se confirman las características con que se han definido las tipologías.

Dichas características se describen a continuación.

Una primera tipología de resolutores de problemas verbales algebraicos se caracteriza por la variedad en los sistemas de representación elegidos para abordar los problemas. Los sujetos de esta agrupación emplean los diversos sistemas de representación, si bien el sistema mayoritario es el Simbólico. El sistema elegido depende tanto del problema como del sujeto. No existe un patrón definido, estos sujetos conocen los diversos sistemas de representación y eligen el que consideran más adecuado al problema. Este clúster incluye estudiantes de Secundaria y de Universidad, distribuidos en porcentajes del 40% - 60% respectivamente

Una segunda tipología de resolutores de problemas algebraicos se caracteriza por la utilización preferente de sistemas de representación numéricos, Ensayo-Error y Parte-Todo, para abordar los problemas. Si bien pueden conocer la resolución de ecuaciones de modo algebraico, no tienen facilidad para el uso del lenguaje algebraico simbólico. Entonces abordan los problemas de forma numérica. Aunque utilizan más frecuentemente el sistema de representación Parte-Todo, también emplean los sistemas de Ensayo-Error. Se puede considerar que estos sujetos están en una fase pre-algebraica. Este clúster es menos numeroso (28 sujetos sobre 160), Los sujetos se distribuyen equitativamente entre Secundaria y Universidad, 50% - 50%.

Un tercer tipo de resolutores se caracteriza por la utilización preferente del sistema Simbólico (a veces con apoyo gráfico) para abordar los problemas. Es el clúster más numeroso, 62 sujetos sobre un total de 160, que han dejado sin abordar menos problemas. En consonancia con la característica que lo define, es la agrupación que más utiliza el sistema de representación Gráfico-Simbólico. En este grupo no hay ningún sujeto que emplee el sistema Ensayo-Error. En las entrevistas a los estudiantes en el estudio de casos, las respuestas muestran su rechazo a ese sistema de representación, por el tiempo que consume, en contraposición con la economía de tiempo y esfuerzo del sistema Simbólico. La distribución de porcentajes de sujetos entre estudiantes de Secundaria y Universidad en este grupo está equilibrada (47% - 53%).

Finalmente, un cuarto tipo de resolutores se caracteriza por la nula utilización de los sistemas gráficos (Gráfico y Gráfico-Simbólico) para abordar los problemas. Es un clúster poco numeroso (28 sujetos sobre 160), formado en su mayoría por estudiantes de Secundaria, 71% frente al 29% de Universidad. Los sistemas de representación más frecuentes empleados por estos estudiantes son el Simbólico, que predomina, y el de Parte-Todo, que se alterna con el anterior. También se encuentra el sistema de Ensayo-Error. Pero los sujetos de este clúster rechazan las representaciones gráficas aunque sean bastante explícitas en el texto del problema. Los estudiantes de esta agrupación, en su gran mayoría de Secundaria, abordan los problemas más simples mediante una representación que implica relaciones numéricas. Cuando el problema es más complejo, dejan de lado lo numérico y tratan de resolverlo mediante expresiones simbólicas si bien no establecen, prácticamente en ningún caso, un puente entre ambos sistemas de representación a través de lo gráfico. Son sujetos que no tienen desarrollada una visión espacial intuitiva de las relaciones entre los objetos que se citan en el texto de los problemas verbales.

Balance

El trabajo presentado es solo parte de la tesis doctoral de Francisco Fernández, en la que destacamos su contribución al estudio de los sistemas de representación empleados en la resolución de problemas de álgebra elemental, mediante un estudio empírico, con una muestra compuesta por estudiantes de secundaria y estudiantes universitarios, mediante aplicación de un cuestionario, cuyo diseño y características hemos expuesto. Nuestro resumen destaca la función de los sistemas de representación en las tres fases del proceso de resolución identificadas: planteamiento, ejecución y desempeño. Este análisis identifica categorías de procedimientos que caracterizan tanto a los procesos como a los resolutores que comparten una misma estrategia de resolución. La riqueza y complejidad del estudio se muestran en su fundamentación con la caracterización procedimental de las representaciones. Esta aportación teórica se ve refrendada por un estudio confirmatorio derivado de un análisis clúster, que identifica tipos de resolutores y por un estudio de caso complementario.

La lectura actual de esta memoria muestra una gran riqueza de planteamiento por los focos elegidos y por la diversidad de relaciones establecidas entre ellos, como se puede observar en los objetivos e hipótesis de la investigación. Este trabajo fue pionero en su momento y tuvo continuidad en otras dos tesis, la de Espinosa (2004) y la de Martínez-Videla (2011).

La relectura de la memoria, su amplitud, solidez y ambición en el tratamiento de los sistemas de representación descubre líneas de trabajo aún por explorar, que esperan nuevas reflexiones y abordajes por parte de los investigadores en formación interesados por esta temática.

Referencias

Espinosa, E. (2004). *Tipología de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre la evaluación con profesores en formación inicial*. Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada

Fernández, F. (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales.* Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada

http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalles/6681/

Kilpatrick, J., Rico, L. y Sierra, M. (1994). *Educación matemática e investigación*. Madrid: Síntesis.

Martínez-Videla, M. V. (2011). *Utilización de método geométrico lineal (mgl) para la resolución de problemas de álgebra elemental.* Granada: Universidad de Granada. Tesis no publicada.

Rico, L. (Edt.) (1997). *Bases teóricas del currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Granada: Comares.

Representaciones geométricas de operadores numéricos aditivos

Additive Numerical Operators and Geometric Representations

Luis Rico
Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo sintetiza un estudio de las relaciones y conversiones entre las estructuras numéricas aditivas habituales y una estructura geométrica, discreta y finita, derivada de su representación en el Geoplano 10×10. El estudio considera isomorfos el grupo de los operadores aditivos en el conjunto cociente de las clases residuales de enteros módulo 100 y el grupo de las transformaciones geométricas lineales en el Geoplano 10×10, definidas por figuras llamadas "cadenas". Francisco Ruiz introduce y desarrolla estos objetos en su tesis doctoral, La "Tabla 100: Representaciones geométricas de las relaciones numéricas. Un estudio con profesores de educación primaria en formación". Con esos fundamentos diseñó y evaluó una propuesta didáctica sobre estructuras aditivas en la Tabla 100, que basa en conceptos y formas geométricos y con la que trabajó en la formación inicial de un grupo de estudiantes de Magisterio, especialistas en Ciencias.

Palabras clave: estructuras numéricas, formación inicial de profesores de matemáticas, números y geometría, operadores aditivos, sistemas de representación

Abstract

This work synthesizes a study of the relations and conversions between the usual additive numerical structures and a discrete and finite geometric structure, derived from its representation in the 10×10 Geoboard. The study considers isomorphs the group of additive operators in the quotient set of the residual classes of integers module 100 and the group of the linear geometric transformations in the Geoboard 10×10, defined by figures called "chains". Francisco Ruiz developed this object in his doctoral thesis "Table 100: Geometric representations of numerical relations. A study with pre-service primary school teachers." With these foundations he designed and evaluated a didactic proposal on additive structures in Table 100, based on concepts and geometric forms whose goal was the training of a group of pre-service Secondary Teachers.

Keywords: numerical structures, pre-service mathematics teachers training, numbers and geometry, additive operators, representation systems.

Introducción

El 16 de junio del año 2000 Francisco Ruiz López presenta y defiende su tesis doctoral, titulada *La Tabla 100: Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación* (Ruiz, 2000). La tesis obtuvo la calificación de excelencia Sobresaliente Cum laude. El trabajo se matriculó en el Programa de Doctorado de Matemáticas y se realizó en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La tesis se ubica en el Grupo de investigación "Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico" (FQM193) del Plan de Investigación de la Junta de Andalucía, donde se adscribe a las líneas temáticas de Pensamiento Numérico, Formación de Profesores de Matemáticas y Sistemas de Representación.

El estudio se inicia en el curso 1994-1995 y el trabajo de campo tiene lugar en el curso 1995-1996, con la contribución de un grupo de estudiantes de Tercer Curso del Plan 1971, de la Especialidad de Ciencias Físico-Naturales de Magisterio, en la Escuela Universitaria de Profesorado de E.G.B. de Granada, quienes colaboran con su trabajo y prestan su tiempo y ayuda a la obtención de los datos empíricos en que se basa el estudio. Codirectores de la tesis son los doctores Luis Rico y Moisés Coriat.

La memoria final es un documento de 680 páginas en dos volúmenes, el primer volumen se organiza en 7 capítulos (426 páginas.) y el segundo en 6 anexos (254 páginas.) (Ruiz, 2000).

Conceptos y significado

Objeto de estudio

Desde el planteamiento del problema al comienzo de la memoria, Francisco Ruiz destaca que el objeto central de su investigación es el empleo de la tabla de los cien primeros números, que denomina Tabla-100, para el estudio de relaciones numéricas. Al ser su propósito abordar este estudio desde la perspectiva de los sistemas de representación y la visualización de patrones numéricos, escoge la Tabla-100 por su simplicidad y sus características singulares, entre otras tablas posibles. Considera la tabla con el formato de un geoplano de 10×10 puntos, con el apoyo de una rejilla o cuadrícula, que da soporte a las figuras y formas geométricas y a los operadores y relaciones aritméticas que surjan en el estudio.

Al inicio del trabajo la tabla de los cien primeros números es un material didáctico para trabajar con los escolares de Primaria, apenas una configuración gráfica más de los primeros números del sistema decimal de numeración, útil para explorar su estructura aditiva, mostrar resultados de operaciones y descubrir relaciones entre los números de dos dígitos (Sanz, 1995, pp. 81-90).

La motivación surge de un interés genuino por fundamentar el conocimiento didáctico del profesor en formación sobre una posible interpretación de los significado de la propia tabla y de los conceptos vinculados con ese material, simples en apariencia. Se plantea así la conveniencia de instituir la tabla como concepto matemático escolar, mediante su análisis. Es propósito central del trabajo llevar a cabo el análisis conceptual de la Tabla 100 mediante estudio de su estructura, de sus sentidos y modos de uso, junto con las cuestiones derivadas de su representación como un plano finito discreto, del significado de operador aditivo vinculado con la tabla y la conexión de esa representación con otras conocidas según, la interpretación de significado de un concepto matemático escolar (Rico, 2016).

La Tabla 100

Francisco Ruiz simboliza la tabla de los 100 primeros números como Tabla-100. Para formalizar este concepto integra las siguientes nociones y estructuras, como mostramos a continuación.

El conjunto ordenado C de los 100 primeros números naturales, C = {1, 2, 3, 4,…, 100}, distribuido en una combinación de series horizontales y verticales en un cuadrado numérico constituido por 10 filas, que incluyen los números consecutivos de la misma decena en cada fila y manteniendo las mismas unidades en cada columna, como muestra la primera imagen de la Figura 1, de atrás hacia adelante.

El geoplano 10×10, G, red de puntos que representa un conjunto discreto de puntos del plano euclídeo, que se organiza como un cuadrado de 10 filas equidistantes, cada una a su vez con 10 puntos equidistantes, formando una trama rectangular donde los datos son los puntos de la red, segunda imagen de la Figura 1.

Una cuadrícula o rejilla R, de 10×10 celdillas cuadradas, tercera imagen de la Figura 1, que enmarca los datos que se sitúen en su interior.

Todos estos componentes son usuales en la representación de configuraciones gráficas de datos en el material escolar (Sanz, 1995; pp. 82- 89)

Finalmente, postula la Tabla-100 (T-100), que define como integración de las componentes antes detalladas: el conjunto numérico C con sus propiedades numéricas, el geoplano G con sus propiedades métricas

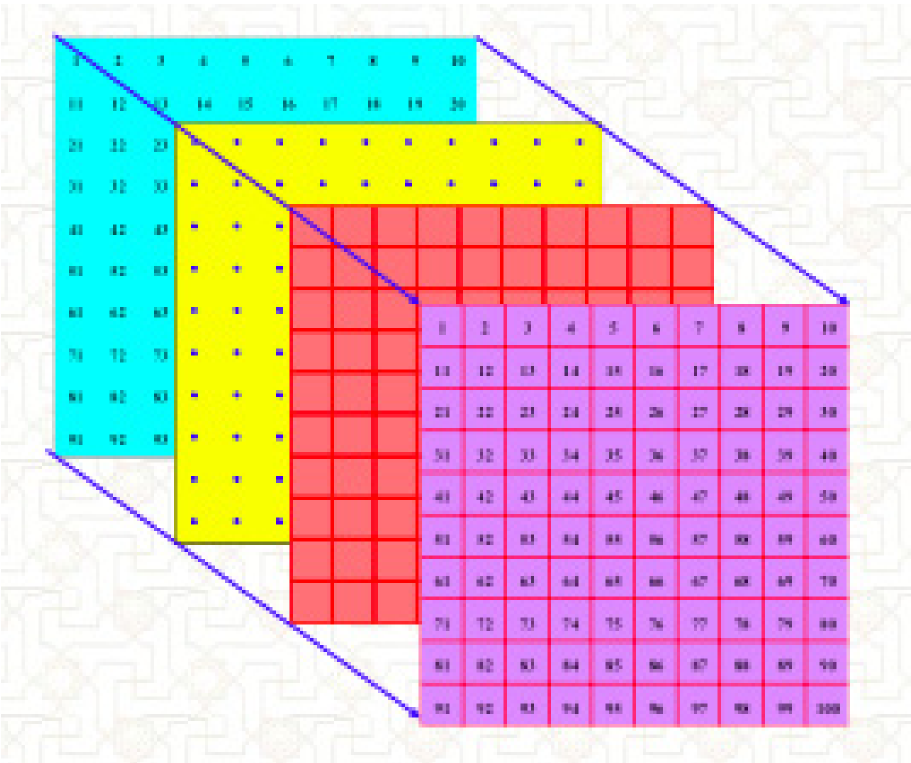


Figura 1. Componentes de la Tabla 100

y la retícula R, como red de conexiones entre los puntos del geoplano G, síntesis que se representa gráficamente mediante la cuarta imagen de la Figura 1.

El resultado es una tabla organizada en filas y en columnas con los números del 1 al 100, tal y como aparece en la imagen frontal de la figura 1, la cual constituye un modo de presentación estructurado de los 100 primeros números naturales. Los números de cada fila, respectivamente columna, están en progresión aritmética, en relación aditiva mediante la suma o resta de unidades, respectivamente, decenas.

Cada punto del geoplano G se identifica con un número de C, y recíprocamente, manteniendo la contigüidad y el orden que marca la rejilla R. Cada elemento de T-100 tiene la doble consideración de punto y de número, que se muestra como etiqueta de una casilla de la cuadrícula.

Esta definición identifica la Tabla-100 como un conjunto dotado de las propiedades aritméticas de C, las geométricas de G y las de conexión de la cuadrícula R. La discusión de las condiciones para que las leyes suma y producto en T-100 sean leyes de composición interna llevan, en el transcurso del trabajo con los profesores en formación, a extender los valores numéricos de T-100 a las clases residuales de naturales, módulo 100.

Con posterioridad el investigador considerará la anterior extensión formal de T-100 a todo el conjunto Z de los enteros: T_Z. Esa extensión tiene estructura de anillo conmutativo, donde los elementos del conjunto Z-100 son las clases residuales de Z módulo 100, y las leyes internas de la suma (+) y el producto (x) se refieren a la suma y producto usuales de clases residuales. Por razones prácticas seguiremos simbolizando por T-100 al conjunto representado, con las extensiones mencionadas.

Operadores aditivos y cadenas en la T-100

Las operaciones aditivas en la tabla se interpretan mediante recorridos formados por celdillas contiguas. Cuando se señalan desplazamientos por la T-100 siguiendo la contigüidad de la cuadrícula, se pueden identificar con operaciones aditivas; desplazarse k posiciones a derecha/izquierda de un determinado número equivale a sumar/restar k unidades a ese número, y desplazarse k lugares hacia abajo/arriba equivale a sumar/restar k decenas al número de partida.

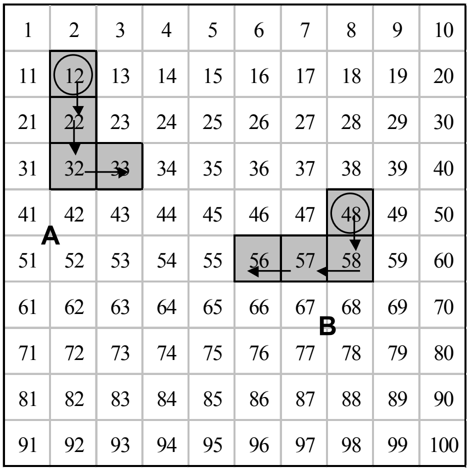


Figura 2. Cadenas en la T-100

Se denominan *cadenas* a los recorridos orientados, dados por concatenaciones de celdillas cuadradas, cada dos con un lado común, que simboliza mediante la notación: C(c+ d±), donde c indica las decenas y d las unidades. Los signos + y – proporcionan el sentido de avance o retroceso de cada tramo de la cadena. La expresión C(2+ 1+) corresponde a la cadena "*bajar 2, derecha 1*", mientras que C(1^{+} 2_{-}) corresponde a "*bajar 1, izquierda 2*" (Figura 2).

A cada cadena corresponde un operador aditivo que resulta de la diferencia entre el número final y el inicial de la cadena. Hay cadenas equivalentes a las que corresponde un mismo operador. Por esta razón, se establece la noción de *cadena libre* o conjunto de cadenas fijas equivalentes a las que corresponde un mismo operador. Cada cadena libre toma como representante canónico la cadena equivalente con valor mínimos de celdillas. De esta forma, se establece una correspondencia biunívoca entre el ámbito aritmético y el geométrico, visualizando así mediante figuras geométricas, *cadenas libres*, un concepto aritmético el *operador aditivo*.

Sentidos y representaciones

El interés didáctico del estudio se centra en explorar las potencialidades de la T-100 y de los operadores aditivos definidos en ella para delimitar, identificar y estudiar patrones y relaciones numéricas. El hecho de representar el conjunto de los números entre 1 y 100 en forma de tabla o de un conjunto de puntos discretos sobre una red ortogonal, proporciona un sentido de operador aritmético a los recorridos realizados sobre esa tabla, como sumar o restar unidades y decenas a un número de partida. La consideración de la T-100 como plano discreto acredita la revisión e interpretación geométrica de las operaciones aritméticas elementales, desarrolla un sentido geométrico para los operadores aditivos como movimientos en un contexto geométrico de un plano discreto. Los *operadores aditivos* sobre la T-100 son portadores en simultáneo de un doble sentido, aritmético y geométrico, que se concreta de modo singular en la identificación de los operadores aritméticos con las figuras geométricas llamadas cadenas libres.

En segundo lugar, desde un análisis de significado, T- 100 incentiva la localización y el trabajo con otras representaciones diferentes de los operadores aditivos a partir de la tabla, tanto de tipo simbólico como de tipo visual o geométrico. A los primeros les llama expresiones aritméticas del operador, y están constituidos por secuencias de números afectados de un signo + o un signo – (según se trate de sumar o restar), escritos como subíndice o superíndice (según se trate de unidades o decenas).

Definiciones

En relación con la caracterización de las cadenas éstas se construyen formalmente como representaciones de los operadores aditivos, para lo cual se definen los siguientes conceptos:

- *Cadenas fijas*, que son concatenaciones orientadas de cuadrados de la retícula con un lado común, a modo de poliminós.
- *Expresiones aritméticas de las cadenas fijas*, que son notaciones mediante números, subíndices y superíndices, que indican los desplazamientos que realiza la cadena por la tabla.
- *Cadenas fijas simples* que constan de un solo tramo vertical y/o un solo tramo horizontal.
- *Expresiones aritméticas reducidas* que corresponden a las cadenas fijas simples, y que contienen solamente dos números.
- *Cadenas libres* son las clases de equivalencia de cadenas fijas que representan al mismo operador aditivo.

- *Cadenas fijas simples mínimas* son las cadenas simples que tienen el menor número posible de celdillas y se adoptan como representantes canónicos de las cadenas libres.

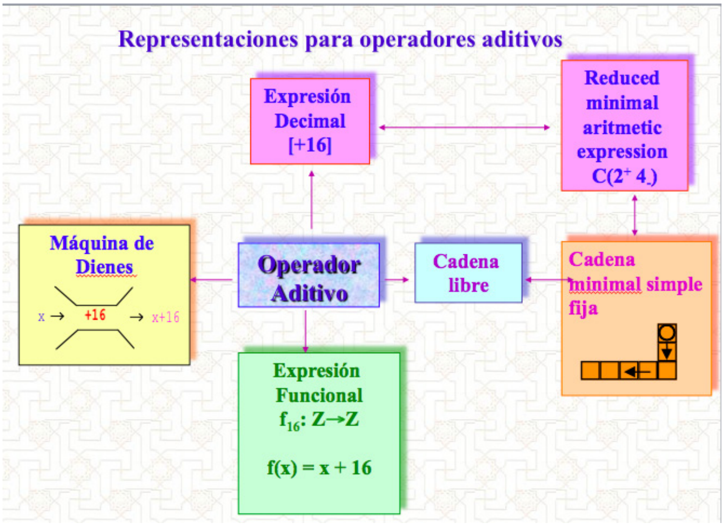


Figura 3. Representaciones y sentidos de los operadores aditivos

Los resultados que se obtienen de la formalización de la T-100 y de la interpretación geométrica de sus operadores aditivos, proporcionan nuevos sentidos que aportan gran riqueza de significados para interpretar las conversiones y traducciones entre nociones aritméticas y geométricas, sobre la base de la dualidad establecida por las representaciones derivadas de T- 100.

Problema de investigación

Francisco Ruiz aborda su problema de investigación en tres momentos, que proporcionan tres focos y le ayudan a estructurar la memoria:

Primero, el estudio se encuadra en el Grupo *Pensamiento Numérico*, que se ocupa de diversas áreas de interés entre ellas, el *Sentido Numérico* y los *Sistemas de Representación*. También del ámbito de las *relaciones entre la Aritmética y la Geometría*, con la atención puesta en la *visuali-*

zación de patrones numéricos y operadores aditivos en la Tabla-100, que trata en el Capítulo 2.

Un segundo foco está en la *Formación Inicial de Profesores y la Innovación Curricular,* que se abordan en el estudio empírico mediante un diseño de Investigación-Acción. Al desarrollo de ese foco dedica los Capítulos 3, 4 y 5.

Tercero, debido al estudio realizado acerca del significado de la T-100 como concepto matemático escolar y de las representaciones de los operadores aditivos, avanza en este estudio desde una perspectiva formal y teórica, estudio al que dedica el Capítulo 6.

La T-100 le ayuda a trabajar con las *estructuras algebraicas*, especialmente la de grupo, y le permite profundizar en las *estructuras aditivas*. Otros conceptos matemáticos utilizados en su trabajo con la T-100 han sido las *relaciones de equivalencia* y en especial las de *congruencia, las isometrías planas* y las *ecuaciones de rectas en el plano*, actividad a la que dedica el Capítulo 6. Identifica las representaciones de dichas nociones en T-100 y las estudia desde un punto de vista matemático y didáctico.

Así, desde una perspectiva matemática formaliza el grupo abeliano de los operadores aditivos utilizando ambos sistemas de representación, tanto con las expresiones aritméticas como con las cadenas. En ambos casos se trata de sistemas de representación adecuados para los operadores aditivos y no de simples dibujos o codificaciones.

Al considerar las cadenas como figuras geométricas en un plano discreto, tiene la oportunidad de aplicar la noción de transformación geométrica a un operador; las relaciones entre ambos sistemas de representación permiten interpretar el resultado aritmético producido por una isometría sobre un operador y dotarlo de significado.

Desde una perspectiva didáctica establece conexiones entre las representaciones anteriores que ayudan a su comprensión, así como para establecer vínculos entre las representaciones usuales conocidas, como son las expresiones numéricas en base 10, la expresión polinómica, la funcional y la máquina de Dienes (Figura 3).

La investigación tiene como ámbitos de actuación la innovación curricular y la formación inicial de profesores de educación primaria. Aunque la T-100 es, principalmente, una herramienta didáctica utilizada en el medio escolar, el investigador muestra cómo dotar de significado formal este objeto para contribuir al conocimiento didáctico de las matemáticas escolares por los profesores.

Se plantea a los profesores en formación una propuesta didáctica, que indaga las posibilidades de la T-100 en los aspectos ya señalados. Las tareas que se diseñan están insertas en el currículo de la asignatura de matemáticas de tercer curso de la Diplomatura de Magisterio del Plan 1971 y se conciben con intencionalidad formativa. La importancia que adquiere el estudio de la T-100 en la realización del trabajo hace destacarlo sobre los restantes focos, ya que vincula los contenidos matemáticos, sus significados e interrelaciones con los conocimientos didácticos.

Interrogantes de la investigación

Volviendo a su finalidad recordamos que ésta consiste en explorar la utilidad didáctica de la tabla de los cien primeros números. Esta idea se concreta en diversos interrogantes:

- ¿Qué tipos de patrones numéricos podemos encontrar en la T-100?
- ¿Qué conceptos aritméticos y geométricos están implicados en dichos patrones?
- ¿Qué representaciones encontramos para los conceptos aritméticos anteriores?
- ¿Qué tareas utilizar con el fin de estudiar esas posibles representaciones?
- ¿Qué grado de aceptación tienen este tipo de actividades por los estudiantes?
- ¿Qué aportaciones proporcionan las tareas en relación con el sentido numérico?

El investigador sitúa su trabajo para abordar estas preguntas dentro de los estudios de innovación curricular, que organiza con dos perspectivas. En primer lugar, realiza un estudio empírico, con estudiantes de tercer curso de la diplomatura de Magisterio organizados en tres grupos distintos, que lleva a cabo mediante una metodología de Investigación en el Aula. En segundo, realiza un estudio teórico y formal de la T-100 y de sus operadores aditivos.

Consideraciones generales

Como resumen de la revisión de literatura y con carácter previo al enunciado de objetivos, Ruiz (2000) expone las siguientes consideraciones generales.

En primer término, la Tabla- 100 es un artefacto didáctico, que se revela útil para plantear una gran riqueza de tareas, cuestiones y problemas tanto en un contexto aritmético como en uno geométrico; constituye un recurso adecuado para descubrir y estudiar patrones. De las revisiones bibliográficas se desprende la escasa utilización en el medio escolar de tablas numéricas para enseñanza y aprendizaje de aspectos aritméticos con un enfoque geométrico. Por ello, resulta útil introducir en un programa de Formación Inicial de Profesores de Primaria y primer ciclo de Secundaria un conjunto de actividades en torno a la T-100 con el fin de suscitar reflexiones por parte de los estudiantes sobre conceptos aritméticos sencillos desde la óptica que proporciona la "geometría de la Tabla-100".

En segundo término, dada la dimensión geométrica que proporciona la T-100 para los diversos conceptos aritméticos que se pueden estudiar y la variedad de patrones numéricos que en ella se detectan, parece factible encontrar representaciones e interpretaciones aritméticas adecuadas para algunos conceptos geométricas. Las relaciones básicas entre los números de la T-100 son aditivas. Es la estructura aditiva la que organiza dicha tabla, siendo las representaciones más fáciles de obtener las que atañen a los operadores aditivos. El material objeto de estudio facilita encontrar, al menos, dos sistemas de representación, aritmético y geométrico, para dichos operadores, permitiendo establecer conexiones entre ambos.

En tercer lugar, la T-100 es una herramienta didáctica sencilla sin mayor dificultad. No obstante, la tabla es susceptible de verse como concepto matemático per se, con el cual se ponen de manifiesto estructuras matemáticas, representaciones y sentidos, es decir, significados para esos conceptos matemáticos escolares. Formalizar la tabla y abordar los problemas conceptuales derivados de ese hecho, es consecuencia de los objetivos didácticos.

Objetivos

Bajo las consideraciones precedentes, el investigador enuncia como Objetivo General para el estudio, el siguiente: "Explorar las potencialidades que encierra la Tabla-100 como espacio de representación, donde se pueden integrar y relacionar aspectos aritméticos y geométricos, en un programa de formación inicial de profesores de primaria."

Este objetivo general se desglosa en los siguientes objetivos parciales:

- Primero: Indagar en la comprensión de los estudiantes sobre los aspectos numéricos y geométricos de la T-100 y las representaciones geométricas realizadas sobre ella.
- Segundo: Estudiar la viabilidad de nuevas representaciones, numéricas o geométricas, para los operadores aditivos, estableciendo conexiones entre esas representaciones.
- Tercero: Realizar una propuesta didáctica en torno a la T-100, integrada por una programación y unas tareas que faciliten establecer relaciones entre aritmética y geometría, por medio del estudio e identificación de patrones y relaciones.

Consecución del primer objetivo y logros alcanzados

El primer objetivo se trabaja durante la primera fase del estudio empírico. A través de las tareas propuestas, se introduce a los estudiantes en los contenidos aritméticos y geométricos que proporciona la T-100.

Los objetivos específicos para esta primera fase del estudio empírico son:

1. Familiarizar a los estudiantes con el uso de la T-100.
2. Constatar la correspondencia entre las operaciones aritméticas básicas y los desplazamientos en la tabla, dotando a aquellas de un contexto de uso dinámico.
3. Encontrar regularidades de carácter visual-geométrico en la tabla e interpretarlas aritméticamente.
4. Establecer conexiones entre el área de un polígono y el hecho de ser sus vértices puntos del geoplano asociados a los múltiplos de un determinado número.
5. Estudiar los múltiplos de un número en la T-100, desde un punto de vista dinámico, sometiéndolos a isometrías planas sencillas y observando el efecto aritmético producido.

Este primer objetivo de la investigación se logra plenamente por cuanto los estudiantes:

- Realizan y reinterpretan operaciones aritméticas basándose exclusivamente en los *desplazamientos por la tabla*, asignando un significado aritmético a cada desplazamiento.
- Encuentran multitud de regularidades visuales de tipo geométrico (cadenas), a las que asocian un operador aditivo.
- Utilizan diversas estrategias para el cálculo de las áreas de polígonos formados al unir **n** múltiplos consecutivos de un número **k** en la T-100, y relacionan las áreas de los polígonos con **n** y **k**.
- Resuelven dudas de tipo geométrico (puntos alineados, paralelismo, ángulos rectos, perpendicularidad entre líneas oblicuas en la tabla, etc.) utilizando datos y propiedades aritméticas que proporciona la T-100.
- Estudian el efecto producido por algunas simetrías sobre los múltiplos de un número en la T-100, observando las regularidades encontradas.

Como balance, los profesores en formación establecen conexiones entre aritmética y geometría mediante las tareas propuestas.

Consecución del segundo objetivo y logros alcanzados

El segundo objetivo parcial de la investigación se corresponde con la segunda fase del estudio empírico, que propicia la búsqueda y estudio de nuevas formas de representación numéricas, simbólicas y geométricas, para operadores aditivos en T-100. Los objetivos específicos de esta fase del estudio son:

1. Proporcionar representaciones geométricas para los operadores aditivos en la T-100.
2. Utilizar las cadenas para estudiar la posible estructura algebraica del conjunto de los operadores aditivos con la “operación suma”.
3. Estudiar el efecto sobre los operadores aditivos asociados a las cadenas cuando éstas se someten a isometrías sencillas.
4. Encontrar representaciones de tipo simbólico para los operadores aditivos.
5. Extender el estudio de las cadenas al considerarlas en la Tabla-100 de k columnas.

Los estudiantes aportan evidencia de haber cubierto también este segundo objetivo parcial, ya que:

- Identifican las cadenas como representaciones geométricas de operadores aditivos, realizando representaciones propias y operando de manera simultánea con ellas y con los operadores que representan.
- Encuentran un criterio adecuado para "sumar" cadenas, identificando aquellas que realizan las veces de elemento neutro y de elemento simétrico de otra para esa operación.
- Observan el efecto de ciertas isometrías sobre las cadenas y sobre los operadores asociados a ellas.
- Encuentran formas simbólicas distintas de las habituales para representar a los operadores aditivos.
- Interpretan correctamente el cambio de significado aritmético que experimentan las cadenas cuando éstas se colocan en una T-100.

Tercer objetivo

El tercer objetivo parcial participa de las dos fases mencionadas. En los apartados iniciales han quedado recogidos los logros generales de tipo matemático conseguidos con el estudio de las cadenas y el manejo de algunas transformaciones geométricas planas.

Conclusiones

Destaca la buena acogida que los estudiantes dispensaron a la identificación y estudio algebraico de los operadores aditivos por medio de las cadenas, encontrando fácilmente cadenas con ángulos rectos y número mínimo de casillas, para representar a los operadores aditivos. También expresaron un criterio coherente para "sumar" cadenas, superponiendo la casilla final de una de ellas con la inicial de la otra.

Para salvar el problema que presentan las cadenas situadas en los bordes de la T-100, los estudiantes impusieron restricciones para el tamaño de las cadenas con objeto de visualizar su "suma" en esta tabla; propusieron la idea de que una cadena que rebasa un lateral de la tabla aparezca por el lateral opuesto en la fila correspondiente, dando así una solución de continuidad al problema.

Otros estudiantes participantes pusieron de manifiesto el papel que juegan los números de la T-100 como el “conjunto origen” de la aplicación que constituye el operador aditivo. De este modo, estado y operador quedan diferenciados en su forma de representación, ya que para el primero se utilizaron los símbolos numéricos habituales y para el segundo adoptaron la forma geométrica de una cadena.

La T-100, en su condición de geoplano, se revela como un buen medio donde realizaron reflexiones sobre las cadenas, consideradas exclusivamente como figuras geométricas independientemente de su orientación. A la hora de observar el efecto producido sobre sus operadores asociados la dificultad aumenta, debido en parte a la no inclusión de flechas que orienten las cadenas.

Además de las representaciones de carácter geométrico, se obtuvieron una variedad de representaciones simbólicas con las que expresaron los operadores aditivos. En su mayoría combinaron elementos gráficos con numéricos y abundaron los pares ordenados. Los estudiantes manejaron así varios sistemas de representación para el mismo concepto.

Por lo que se refiere al significado de los conceptos estudiados destaca que la T-100 constituye el soporte sobre el cual se realizan las representaciones estudiadas. Al considerar en ella números, polígonos y cadenas se hace necesario su formalización, delimitando los elementos con los que trabaja, que son: el conjunto numérico de los 100 primeros números naturales, el geoplano y la cuadrícula.

Con el fin de dar solución a los problemas que se presentan en los límites de T-100, se realizaron las siguientes extensiones:

- T_Z o extensión de T-100 a todo el conjunto Z de los enteros. En esa extensión advertimos la estructura de anillo conmutativo para (K, +, x), donde los elementos del conjunto K son las clases residuales de Z módulo 100, con las leyes internas de suma (+) y producto (x), que se refieren a la suma y producto de clases residuales.
- Z-100 o extensión de T-100 al conjunto cociente de Z respecto de la relación de congruencia módulo 100.

En relación con la estructura del conjunto de las cadenas libres, contemplaron las cadenas como expresiones geométricas de los operadores aditivos como aplicaciones, y abordaron la comprobación de la estructura de grupo aditivo abeliano de estos operadores mediante utilización de las cadenas. En este sentido destacan los siguientes logros:

- Constataron la estructura de grupo abeliano de los operadores aditivos por medio de las cadenas, cuyo dominio de aplicación es la extensión T_Z en lugar de la Tabla-100, debido a los problemas que ésta presenta en sus bordes.
- Definieron la composición de cadenas superponiendo la casilla final de una con la inicial de la otra.
- Establecieron como elemento neutro para esta “suma” es la ***cadena cerrada***.
- Obtuvieron el elemento simétrico de una cadena cambiando su orientación y conservando el orden “decenas, unidades”.
- Constataron los isomorfismos existentes entre las tres expresiones decimal, aritmética y geométrica para los operadores aditivos.

En el año 2000, Francisco Ruiz concluye la redacción del manuscrito de su tesis con las siguientes palabras:

Finalmente, con nuestro esfuerzo y trabajo reflejados en esta memoria, esperamos haber contribuido a clarificar todo un mundo de posibilidades didácticas y matemáticas que se vislumbra encierra el objeto que hemos llamado la Tabla-100, aportando nuestra contribución a la línea de Pensamiento Numérico. (p. 417)

En el balance de este artículo rememorativo destaco el carácter precursor del estudio presentado, que muestra la potencia del marco del Análisis didáctico y la riqueza del análisis del significado de los conceptos matemáticos escolares, junto con la relevancia del uso de diversos sistemas de representación con el juego de conversiones entre ellos.

La riqueza de ideas, de propuestas didácticas y matemáticas abiertas por Francisco Ruiz, esperan su continuación y progreso en próximos trabajos y proyectos.

Referencias

Rico, L. (2016). Significado de los conceptos matemáticos. En L. Rico y A. Moreno *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 153-175). Madrid: Editorial Pirámide.

Rico, L y Ruiz-López, F. (2004). Geometric Visualization of Additiv Operators. In B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelson, B. Johanson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby & K. Walby: *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics* (pp. 351-362). Sweden: Götteborg University.

Ruiz, F. (2000). *La tabla 100: Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/6140/.

Sanz, I. (1995). *La construcción del lenguaje matemático a través de libros escolares de matemáticas*. *Las configuraciones gráficas de datos*. San Sebastián: Universidad del País Vasco y Escuela Universitaria del Profesorado de E.G.B.

Flujo en la formación del profesorado de matemáticas

Flow in mathematics teacher formation

Francisco Castillo Hernández[a], Francisco Gil Cuadra[a], Ana Belén Montoro Medina[b] y María Francisca Moreno Carretero[a]

[a]*Universidad de Almería y* [b]*Universidad de Granada*

Resumen

El flujo es un estado psicológico en el cual las personas están tan concentradas e involucradas en su actividad que nada parece importar a su alrededor. Alcanzar dicha concentración e implicación durante la realización de tareas escolares repercute positivamente en el rendimiento académico. Será esencial que los futuros docentes experimenten flujo, pues, según Bakker (2005), estas experiencias "pueden pasar de los maestros a sus alumnos, y viceversa". Por esta razón, el presente capítulo tiene como objetivo describir brevemente las claves más importantes para identificar experiencias de flujo y los beneficios que reporta, así como aquellos aspectos que favorecen la aparición del flujo con tareas matemáticas. Esto permitirá diseñar experiencias de aula que favorezcan la aparición de flujo.

Palabras clave: Experiencias de flujo, Educación Matemática, motivación

Abstract

Flow is a psychological state in which people are so concentrated and involved in their activity that nothing seems to matter around them. Achieving such concentration and involvement during the performance of school tasks has a positive impact on academic performance. It will be essential for future teachers to experience flow, since, according to Bakker (2005), these experiences "can pass from teachers to their students, and vice versa." For this reason, this chapter aims to briefly describe the most important aspects to identify flow experiences and the benefits that it reports, as well as those aspects that favor the appearance of flow with mathematical tasks. This will allow to design classroom experiences that favor the emergence of flow.

Keywords: Flow experience, Mathematics Education, motivation

Los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz han mostrado también a lo largo de su carrera una gran inquietud por la motivación del alumnado. Por ello, hemos decidido centrar este capítulo en esta temática.

¿Qué es el flujo y cuáles son sus beneficios?

Durante muchos años se ha considerado que el problema de la educación residía en el aspecto cognitivo del alumnado, es decir, que éste no comprendía o no poseía las capacidades necesarias para superar el periodo escolar. Sin embargo, el problema no era únicamente cognitivo, sino también afectivo, emocional o motivacional. En otras palabras, algunos alumnos no superan el periodo escolar debido a que no quieren aprender ni involucrarse debido a falta de motivación (Csikszentmihalyi, 2014). Por ello, los últimos años se han caracterizado por dar una mayor importancia a aspectos emocionales, afectivos y motivacionales en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (Gómez-Chacón, 1998; Gómez-Chacón, 2010, McLeod, 1992).

De todos los tipos de motivación establecidos en la teoría de la autodeterminación (Deci y Ryan, 1985), la intrínseca es la más intensa y duradera. La teoría de flujo, surgió de la observación y el análisis de experiencias de personas mientras realizan actividades por placer y las condiciones que van a facilitar dichas experiencias (Csikszentmihalyi, 2003).

Csikszentmihalyi (1990) establece que el flujo es un estado en el que las personas están tan involucradas en una actividad que nada más parece importar; la experiencia es tan agradable que la gente seguirá haciéndolo, incluso a un gran costo, por el disfrute de hacerlo.

Así pues, el compromiso que se genera con una tarea en la que se experimenta flujo (Nakamura, 1998; Whalen, 1997;) y una mejora en el rendimiento académico (Larson, 1998) —tanto a nivel individual como grupal (Brunelle, Rousseau y Aubé, 2014)— tiene como consecuencia que la teoría del flujo ocupe un lugar cada vez más importante en ámbitos como el escolar. Hemos de tener en cuenta, además, que en el caso de actividades en grupo la relación existente entre flujo y rendimiento está mediada por el compromiso que el equipo tiene con el objetivo y el intercambio de información entre sus miembros (Aubé et al., 2014).

Por otra parte, Shin (2006) demostró en su estudio que el flujo influye positivamente en el rendimiento de la tarea —al igual que Larson (1998)— y que puede ser considerado como un predictor de la satisfacción del estudiante, de tal forma que un estudiante con flujo alto presenta una mayor probabilidad de estar satisfecho con el curso.

Estos beneficios hacen que pase a ser primordial que los maestros creen ambientes de aula en los que el alumnado experimente flujo, pues, de esta forma, el alumnado disfrutará y estará motivado ante las diferentes asignaturas —como matemáticas— lo que es requisito favorecedor de la adquisición de nuevos conocimientos.

Las matemáticas tradicionalmente han sido una asignatura que ha provocado recelo y actitudes negativas. Esto ocurre también entre los futuros docentes, es decir, existe un porcentaje considerable de estudiantes de maestro que presentan actitudes negativas hacia las matemáticas. Es fundamental el cambio de esta actitud, pues, si un maestro mantiene una actitud positiva hacia las matemáticas, muchos de sus alumnos también lo harán. Amparándonos en la teoría del contagio emocional – que es definida como "la tendencia a imitar y sincronizar expresiones faciales, vocalizaciones, posturas y movimientos con las de otras personas y, en consecuencia, converger emocionalmente" (Hatfield, Cacioppo y Rapson, 1994) —cuando los maestros sienten motivación, será mucho más sencillo que sus alumnos también la sientan.

De hecho, en la investigación de Basom y Frase (2004) los maestros afirman que con asiduidad alcanzaron el estado de flujo gracias al compromiso de sus estudiantes. Del mismo modo, los alumnos confirman que llegaron a este estado gracias al compromiso y entusiasmo de los maestros. En otras palabras, cuando los profesores experimentan flujo van a sentirse conectados con sus alumnos, no tendrán conciencia del tiempo y, por último, disfrutarán durante el proceso de enseñanza, lo que favorece la aparición de flujo en los alumnos, ya que los profesores que disfrutan motivan más a su alumnado.

Si nuestro propósito es, por tanto, que los alumnos tengan actitudes positivas hacia las matemáticas, que se diviertan o que sientan pasión por estas —independientemente de las capacidades que posean— será esencial que los futuros docentes también lo hagan. Para ello, las asignaturas relacionadas con la enseñanza de matemáticas deben fomentar actividades que permitan dicho cambio.

Este capítulo presenta como objetivo principal la descripción de los instrumentos disponibles en castellano que sirven para medir la experiencia de flujo, de los factores que facilitan la aparición del flujo en estudiantes y maestros y de investigaciones sobre el flujo en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Instrumentos para medir experiencias de flujo

El análisis de las numerosas entrevistas llevadas a cabo por Csikszentmihalyi fue el punto de partida para caracterizar las experiencias de flujo. Sin embargo, esta metodología requiere de mucho tiempo y esfuerzo por parte del investigador y se ve limitada por la necesidad de recordar. Para lidiar con estos inconvenientes, surgieron dos metodologías: el uso de cuestionarios cerrados y el Método de Muestreo de Experiencias (MME).

Los cuestionarios cerrados se componen de escalas tipo Líkert que hacen referencia a las dimensiones del flujo propuestas por Csikszentmihalyi (2003) y están recogidas en la Figura 1[1].

No obstante, algunas investigaciones han destacado el rol de ciertas dimensiones como facilitadores o condiciones necesarias para fluir, en lugar de aspectos propios de la experiencia de flujo. Un ejemplo de cuestionario cerrado es el diseñado y validado por Montoro (2014) con estudiantes de maestro de primaria realizando tareas matemáticas, justo al concluirlas. Tras una profunda revisión de las definiciones de flujo dadas por investigaciones previas y utilizar todas las dimensiones del flujo y los aspectos de las tareas más frecuentemente vinculados al flujo, concluyó que las expe-

[1] Una traducción al castellano del instrumento diseñado por Jackson y Marsh (1996) para medir el flujo en el deporte puede verse en los trabajos de González-Cutre (2008)

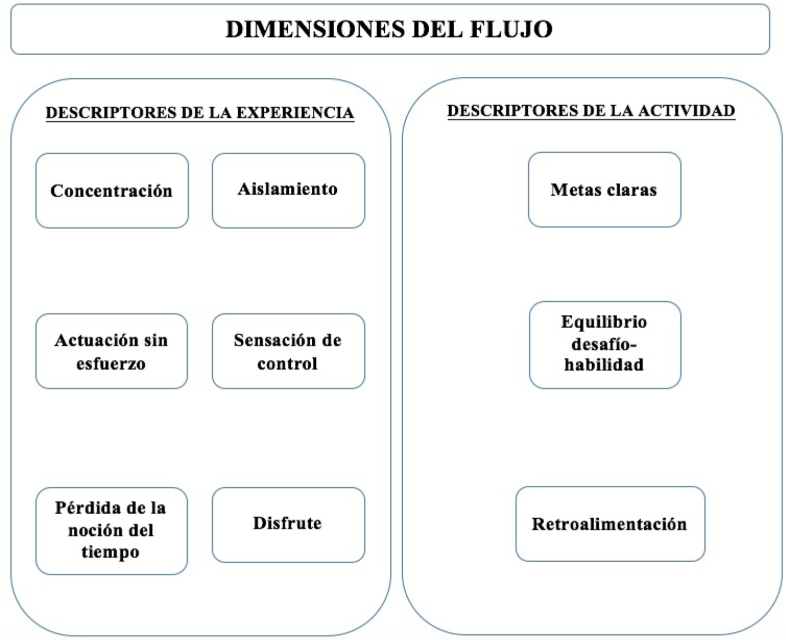


Figura 1. En esta figura se pueden observar las nueve dimensiones del flujo. Adaptado de Montoro (2014).

riencias de flujo están caracterizadas por altos niveles de concentración y disfrute con la actividad. Esta forma de medir el flujo también se encuentra en el cuestionario diseñado por Rodríguez-Sánchez (2009), aunque su extensión es mayor y está pensado para medir la frecuencia con la que se experimenta flujo en el trabajo, en lugar de conocer si se ha experimentado con una tarea concreta. Por su parte, el MME se compone de un formulario que recoge información sobre la actividad que se estaba haciendo y su estado cognitivo, emocional y motivacional. Además, esta adaptación también contaba con dispositivo que emite señales aleatorias durante distintos momentos del día e indica cuándo se debe rellenar el formulario (Csikszentmihalyi y Csikszentmihalyi, 1998). Un resultado remarcable de su aplicación fue el modelo de los cuadrantes de flujo y su posterior refinamiento (Figura 2), en los que los niveles de desafío y habilidad percibidos predicen la aparición del flujo (altos niveles de concentración y disfrute).

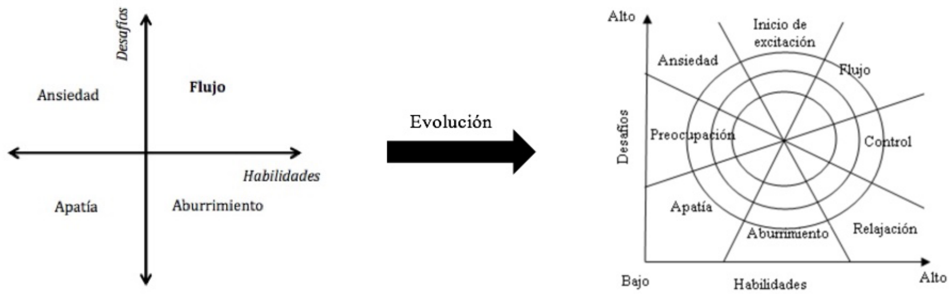


Figura 2. La imagen de la izquierda se corresponde con el modelo de cuadrantes del flujo, en él se representa el flujo en función del nivel de habilidades-desafíos. En la imagen de la derecha aparece el modelo de canales de flujo. Recuperado de Montoro (2014).

A pesar de la riqueza que aporta tener información en distintos momentos del día, consideramos inadecuado su uso en el entorno escolar, pues interrumpe el correcto desarrollo del aula y podría dificultar la aparición del flujo. Algunas autoras como Schweinle, Turner y Meyer (2006) utilizaron el formulario al final de distintas sesiones de matemáticas de diferentes grupos de estudiantes de primaria con habilidades normales. Ellas encontraron que aparecían emociones más positivas cuando los estudiantes percibían desafíos por encima de la media, pero sus habilidades eran muy superiores. En definitiva, el modelo de los canales de flujo predeciría "control" en lugar de flujo.

Mesurado (2008) diseñó un cuestionario tomando como base el formulario utilizado en Método de Muestro de Experiencia con objeto de medir la experiencia pasado un tiempo. El cuestionario se estructuró en cuatro partes: la primera estaba formada por tres preguntas abiertas —el objetivo de las preguntas era averiguar si la persona en cuestión ya había vivido una experiencia óptima; la segunda parte del cuestionario estaba constituida por una serie de preguntas en las que se estudia la voluntad en lo relativo a la elección de la tarea; la tercera parte analiza la calidad de la experiencia, dividiendo a esta en: tono emocional, activación y compromiso; por último, la cuarta parte seleccionaba con quién se encontraba mientras la realizaba.

Facilitadores del flujo

Flujo en maestros en activo

Algunas investigaciones, como la de Rodríguez (2009), se centran en el análisis de las experiencias de flujo en entornos laborales. En su investigación estudia las posibles diferencias entre las personas que trabajan con "cosas" y las que trabajan con "personas", comparando, para ello, a docentes de secundaria —que experimentaban flujo con mayor frecuencia— con trabajadores del ámbito de la construcción. Las diferencias fueron motivadas por las características de la enseñanza. Un maestro o profesor se enfrenta diariamente a desafíos, tienen claras sus metas y, además, reciben retroalimentación gracias a los propios estudiantes.

Basom y Frase (2004) diseñaron una guía para que los entornos escolares lleven a experiencias de flujo en maestros. Algunas de las indicaciones más destacadas fueron que el director del centro visite con regularidad las aulas; evitar elementos que interrumpan el correcto desarrollo de la lección; proporcionar el tiempo necesario para que los docentes puedan planificar correctamente sus lecciones; facilitar la formación adecuada para el diseño de un currículo de calidad; encontrar tiempo para la formación en didáctica; asegurar que las condiciones del entorno laboral conducen al desarrollo y logro continuo; ofrecer programas de iniciación y orientación bien diseñados; procurar tiempo para que los maestro discutan, analicen y reflexionen sobre los éxitos y fracasos de sus clases.

Bakker (2005), por su parte concluyó que los recursos laborales de los maestros —como la autonomía, la retroalimentación en relación a su desempeño, el apoyo social, etc.— influencian positivamente al mantenimiento del equilibrio entre desafíos y habilidades y que las experiencias de flujo de los profesores se relacionan positivamente con las de los alumnos.

Flujo en estudiantes

Como se dijo en el apartado anterior, hay un consenso en la necesidad de establecer desafíos acordes con las habilidades de los estudiantes, metas claras y retroalimentación inmediata para facilitar la aparición del flujo (Csikszentmihalyi, 2003). Resultados similares se encontraron en la investigación de Egbert (2003) con estudiantes de altas capacidades cuyo objetivo principal era analizar la aparición de flujo en siete tareas, utilizando en algunas de ellas las TIC. De estas, cuatro fueron diseñadas específicamente para que el alumnado experimentara flujo. Sin embargo, el resultado fue que solo una de las actividades produjo flujo a todo el alumnado. El mérito, además, no fue del uso de las TIC, sino que se debió principalmente al desafío que supuso la tarea.

No obstante, otro aspecto a tener en cuenta es la importancia que se le dé a la actividad, ya que, según Mesurado (2010), se relaciona con un aumento de la concentración.

Por otra parte, existen diferencias en la capacidad para experimentar flujo de unas personas y otras, así como las actividades que se los provocan (Csikszentmihalyi, 2003b, como se cita en Montoro, 2014). Por ejemplo, hay individuos que no tienen miedo al fracaso, por lo que disfrutan más con las actividades y tienen mayor facilidad de experimentar flujo. Las personas con déficit de atención e hiperactividad, por el contrario, tienen mayores dificultades para experimentar flujo. Así pues, otro factor que dificulta la aparición de flujo es el miedo a hacer el ridículo.

Sinnamon, Moran y O'Connell, (2012) estudiaron la aparición de flujo en estudiantes de música con nivel inicial y también en estudiantes de élite. Los resultados les llevaron a decir que, aunque partían de niveles muy distintos, no hay diferencias relevantes a la hora de experimentar flujo.

No obstante, uno de los aspectos más destacados, relacionado con la percepción de desafíos y habilidad, es la autoconfianza. Así, Rodríguez, Salanova, Cifre y Schaufeli (2011) afirman que existen diferencias entre estudiantes con talento y aquellos que tienen habilidades medias o bajas. Los que tienen talento y confianza en sí mismos tienden a buscar tareas más desafiantes que aquellos que no poseen dicha confianza.

Whalen (1997) concluye que el flujo se va a producir con mayor facilidad en aquellas situaciones en las que nos sentimos competentes. Nakamura (1998), por su parte, planteó que la percepción de habilidad será un aspecto fundamental para afrontar los desafíos. Así, los estudiantes con alta motivación de logro disfrutan de los desafíos, mientras que los alumnos con baja motivación los ven como insuperables, considerando, además, que las actividades suelen estar a un nivel superior al de sus habilidades.

Un aspecto altamente relacionado con la percepción de logro es la posibilidad de elección, que favorece la concentración. De esta manera, la posibilidad de elección se relaciona positivamente con los estados de flujo (Mesurado, 2010).

En este sentido, Rathunde (1993) concluye que para los adolescentes con talento las actividades extraescolares poseen características que llevan a experimentar altos niveles de interés y flujo, algo que no ocurría normalmente con las actividades escolares. Sin embargo, en la investigación llevada a cabo por Gil, Torres y Montoro (2017) con estudiantes de educación primaria con habilidades en torno a la media, llegan a la conclusión de que el flujo se va a producir en mayor medida en las tareas escolares, debiéndose principalmente a que estas últimas proporcionan metas claras, existe una mayor retroalimentación, son más sencillas, útiles y más interesantes.

Otras características que presentan los adolescentes que experimentan flujo son las siguientes: sus padres expresan claramente lo que esperan de ellos, pueden elegir, presentan confianza a la hora de implicarse en las tareas, sus padres muestran interés en aquello que sus hijos hacen, plantean metas claras, proponen nuevos retos y actividades más complejas (Rathunde, 1993).

En definitiva, las experiencias de flujo dependen de la tarea, la persona y el entorno en el que se realiza. La figura 3 sintetiza los aspectos que influyen en el flujo descritos en este apartado.

Investigaciones sobre flujo en matemáticas

A continuación, nos centraremos en investigaciones que relacionan la aparición del flujo con las clases de matemáticas.

Heine (1997) analizó cuál era la relación entre matemáticas y flujo en alumnado con altas capacidades. Concluyó que las habilidades y el disfrute van a influir en el rendimiento de manera independiente. Además apreció que aquellos alumnos que poseen motivación intrínseca en relación a las matemáticas obtuvieron mejores resultados que aquellos que buscaban recompensas externas.

Asimismo, el método de enseñanza del docente, el ambiente generado en clase y las actividades que se proponen, van a ser elementos a tener en cuenta a la hora de provocar flujo. La metodología que consiguió mayores

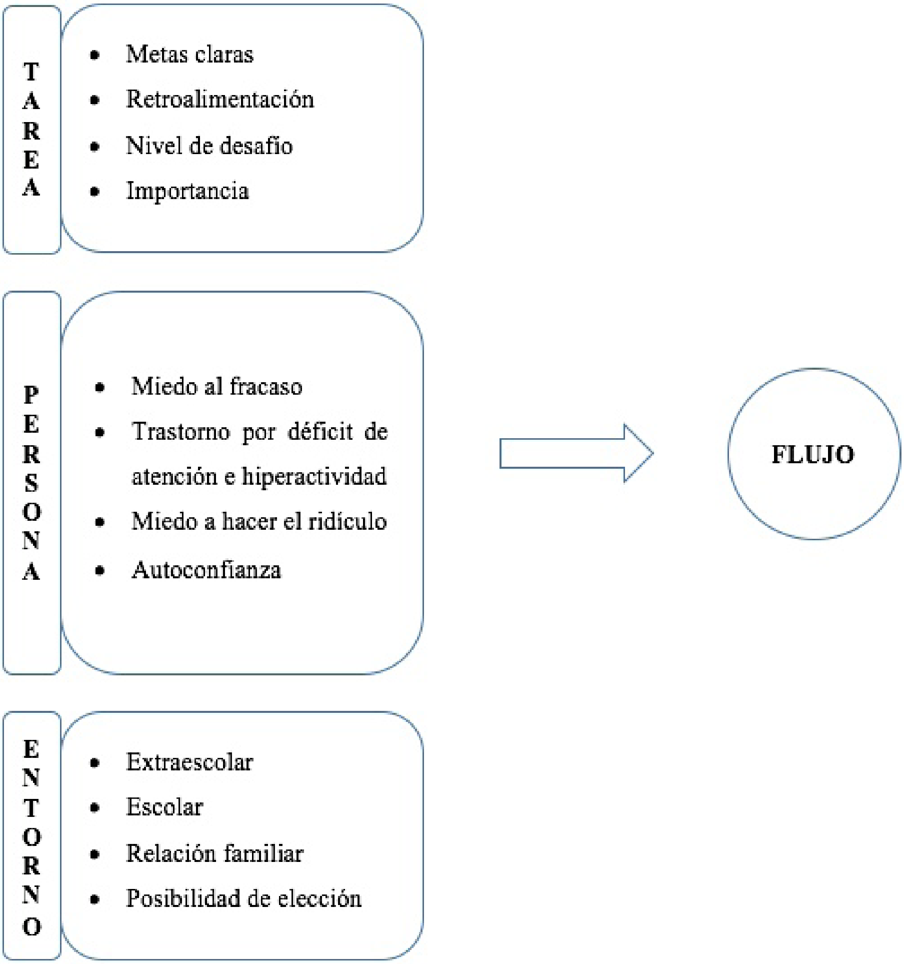


Figura 3. Factores que facilitan las experiencias de flujo. Adaptado de Montoro (2014).

niveles de flujo fue aquella que dedicaba más tiempo al trabajo individual, debates, trabajo en grupo y presentaciones de los estudiantes.

Heine también relacionó tipos de tareas con flujo. Según el proceso cognitivo que requería —conocer, interpretar y aplicar— y según si el problema era conocido, novedoso o parcial. Los resultados mostraron que la que más flujo generó fue la de aplicación, dado que es la que tiene las metas más claras, y los problemas parciales, entendidos estos como aquellos que aplicaban un concepto conocido a situaciones diferentes.

En definitiva, factores como las habilidades, estructura de la clase y el tipo de problema influyen en las experiencias de flujo de estudiantes con talento matemático.

Schweinle, Turner y Meyer (2002), a diferencia de Heine, investigaron en una clase cuyos alumnos presentaban habilidades en torno a la media. Estudiaron cuál podría ser la influencia del nivel de desafío y habilidad percibida en el nivel de eficacia y afecto. Las autoras en cuestión llegaron a la conclusión de que los alumnos con capacidades medias presentan preferencias hacia aquellas tareas en las que se sienten competentes. Los desafíos, por lo tanto, son considerados como amenazas.

En 2006, estas mismas autoras compararon las estrategias de aprendizaje y el ambiente creado por cuatro profesores de cuatro clases. En las clases se produjo, respectivamente, flujo, apatía, ansiedad y aburrimiento. Así pues, Schweinle, Turner y Mayer (2006) encontraron una serie de diferencias en las estrategias del profesorado: la manera de proporcionar apoyo social y afectivo; el tipo de retroalimentación y evaluación; el grado de autonomía proporcionada; la forma de proponer retos; y la importancia que se le da a las tareas.

Sedig (2007) planteó una investigación cuyo objetivo principal fue que el alumnado experimentase flujo al mismo tiempo que aprenden matemáticas, creando para ello un software educativo. El autor concluyó que el alumnado estuvo concentrado, disfrutó de la actividad y de los desafíos y presentó deseos de repetir la experiencia.

Por su parte, Chang, Wu, Weng y Sung (2012) estudiaron la influencia de un sistema informático en las capacidades de un grupo de alumnos, distribuidos en cuatro clases, a la hora de plantear y resolver problemas y cómo podría afectar este sistema a las experiencias de flujo. Todos los alumnos tenían que plantear problemas y resolverlos. La diferencia residía en que dos de las clases empleaban el sistema informático, mientras que las otras dos lo hacían de formar tradicional. El sistema informático se caracteriza por proporcionar dos elementos fundamentales para la aparición del flujo: retroalimentación inmediata y un aumento progresivo del desafío. El alumnado que empleó el sistema informático alcanzó estados de flujo más altos, lo que provocó, a su vez, un gran aumento en la motivación y el compromiso. Del mismo modo, los autores afirman que aumentó el rendimiento del alumnado.

Montoro y Gil (2016) analizaron los factores que podrían afectar a la aparición de flujo en estudiantes de maestro de primaria en el aula de matemáticas. De este modo obtuvieron que la confianza en las habilidades propias para superar la actividad, establecer las metas claramente, retroalimentación inmediata y éxito en tareas parecidas favorecen la aparición del flujo. En contraste, fracasos continuados, que los compañeros no tengan en cuenta sus ideas o reciban retroalimentación inadecuada constituyen obstáculos para fluir.

Berenguel, Gil, Montoro y Moreno (2016) analizan, por una parte, la influencia que tiene la experiencia previa y la autoconfianza en matemáticas en la aparición de flujo a la hora de realizar tareas de forma grupal. Los resultados mostraron que la experiencia previa influye principalmente en el grado de disfrute con la actividad. En contraste, la autoconfianza solo presentó diferencias en tareas complejas. Además, exploraron cómo eran las experiencias de estudiantes con baja autoconfianza y mala experiencia previa y encontraron que casi todos ellos alcanzaron flujo con alguna de las tareas matemáticas. En definitiva, aun teniendo malas experiencias previas y una autoconfianza baja, es posible alcanzar flujo al llevar a cabo tareas matemáticas.

Por último, destacar que Liljedahl (s.f.) realiza una investigación —en un aula de matemáticas— en la que matiza la teoría original de Csikszentmihalyi, la cual señalaba que, en función de los desafíos y las habilidades, el individuo experimenta un estado u otro. Para ser exactos, la teoría original plantea que, en el momento en el que las habilidades superan al desafío, el sujeto se va a aburrir. Por otro lado, cuando el desafío supera a las habilidades, se experimenta frustración. Liljedahl llegó a la conclusión de que los alumnos no reaccionan de forma homogénea, es decir, que no todos tienen las mismas reacciones (aburrimiento o frustración). Según este autor, las reacciones fueron las siguientes:

1. Cuando las habilidades exceden al reto:
    a. Renuncia a realizar actividades por aburrimiento,
    b. Busca desafíos mayores de manera autónoma,
    c. Tolera la rutina y, por tanto, realiza las actividades aunque no supongan ningún reto.

2. Cuando el desafío excede a las habilidades:
   a. Renuncia ante la dificultad que presenta el desafío,
   b. Busca ayuda en el entorno próximo con el objetivo de aumentar las habilidades,
   c. Persevera hasta resolver el desafío.

Conclusión

El flujo es un estado en el que el individuo se encuentra totalmente involucrado en la actividad que está llevando a cabo —independientemente del ámbito de la actividad— olvidándose del tiempo, concentrándose de manera profunda, disfrutando, etc. Por tanto, si estamos ante un estado que provoca tantos beneficios, ¿por qué no llevarlo al ámbito de la educación? En concreto, diseñar experiencias de flujo en asignaturas como las matemáticas —que tradicionalmente genera rechazo y actitudes negativas— sería muy positivo, pues estaríamos provocando que el alumnado disfrutase y se motivara, lo que facilitaría, por tanto, experiencias positivas.

La aparición del flujo en el profesorado es de suma importancia, pues aquellos profesores que disfrutan de su trabajo son capaces de motivar más fácilmente a su alumnado. No obstante, para provocar flujo se ha de tener en cuenta que habrá factores que lo facilitan, pero otros que lo dificultan, por lo que debemos evitarlos (Frase, 1998; Basom y Frase, 2004). Entre los que los facilitan encontramos la autoeficacia, eficacia percibida por otros y eficacia organizativa, la buena planificación de las clases, las lecciones desarrolladas con éxito y proporcionar tiempo para que los maestros discutan, analicen y reflexionen en lo relativo a los éxitos y fracasos de sus clases. En contra, hay que evitar elementos que interrumpan el desarrollo del trabajo en el aula.

Del mismo modo, como docentes hemos de conocer las circunstancias que van a provocar —y dificultar— la aparición de flujo en el alumnado. En este caso, la presencia de metas claras, retroalimentación inmediata, equilibrio entre los desafíos propuestos y las habilidades de los estudiantes, la importancia que tenga la tarea, mejorar la autoconfianza de los estudiantes, su posibilidad de elección y tener un buen entorno familiar. En cambio, ambientes en los que el estudiante tenga miedo a fracasar o a hacer el ridículo dificultarán su aparición, al igual que tener sufrir un trastorno por déficit de atención e hiperactividad.

Somos conscientes de que algunos de los aspectos que favorecen o dificultan el flujo en el aula de matemáticas, tanto para docentes como estudiantes, no son controlables por el profesorado. Sin embargo, algunos aspectos del diseño y organización de tareas expuestas en este apartado dependen principalmente del mismo. Ponerlas en juego puede ayudar a que los estudiantes de maestro y estudiantes de primaria disfruten y se impliquen cuando resuelven tareas matemáticas. Hemos de mostrar a los futuros docentes cómo llevar a cabo estas experiencias, favoreciendo que ellos mismos las experimenten, pues solo de esta forma estarán capacitados para provocar flujo en sus alumnos.

Referencias

Bakker, A. B. (2005). Flow among music teachers and their students: The crossover of peak experiences. *Journal of Vocational Behavior*, 66, 26-44. Doi.org/10.1016/j.vb.2003.11.001

Basom, M. R. y Frase, L. (2004). Creating optimal work environments: exploring teacher flow experiences. *Mentoring and Tutoring: Partnership in Learning, 12*(2), 241–258.

Berenguel, E., Gil, F., Montoro, A. y Moreno, M. F. (2016). ¿Influye la experiencia previa y la autoconfianza en los estados de flujo? *Epsilon. Revista de Educación Matemática, 33*(2), 47-62.

Brunelle, E., Rousseau, V. y Aubé, C. (2014). Flow experience and team performance : The role of team goal commitment and information exchange. *Motivation and Emotion, 38*(1), 120–130. https://doi.org/10.1007/s11031-013-9365-2

Chang, K., Wu, L., Weng, S. y Sung, Y. (2012). Computers and Education Embedding game-based problem-solving phase into problem-posing system for mathematics learning. *Computers and Education, 58*(2), 775–786.

Csikszentmihalyi, M. (1990). *Flow: The Psychology of Optimal Experience*. New York: Harper and Row.

Csikszentmihalyi, M. (2003). *Fluir. Una psicología de la felicidad* (N. López. Trad.) (9 ed.). Barcelona: Kairós. (Trabajo original publicado en 1990)

Csikszentmihalyi, M. (2014). Applications of Flow in Human Development and Education. New York: Springer.

Csikszentmihalyi, M. y Csikszentmihalyi, I. S. (1998). *Experiencia Óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia*. Bilbao: Desclée de Brouwer

Deci, E. L. y Ryan, R. M. (1985). Intrinsic motivation and self-determination in human behaviour. New York: Plenum.

Egbert, J. (2003). A study of flow theory in the foreign language classroom. *The modern Language Journal*, 87, 499-518.

Frase, L. (1998) An examination of teacher flow experiences, efficacy, and instructional leadership in large inner-city school districts, paper presented at the *Annual Meeting of the American Education Research Association*, San Diego, CA, April.

Gil, F., Torres, T. y Montoro, A. B. (2017). Motivación en matemáticas de estudiantes de primaria. *International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 85-94.

Gómez-Chacón, I. M. (1998). Una metodología cualitativa para el estudio de las influencias afectivas en el conocimiento de las matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 16(3), 431-450.

Gómez-Chacón, I. M. (2010). Tendencias actuales en investigación en matemáticas y afecto. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, y T.A. Sierra (Eds.), *Investigación en Educación Matemática* XIV (pp. 121-140). Lleida: SEIEM

González-Cutre, D. (2008). *Motivación, creencias implícitas de habilidad, competencia percibida y flow disposicional en clases de educación física*. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Almería, España.

Hatfield, E., Cacioppo, J. T. y Rapson, R. L. (1994). *Emotional contagion*. New York: Cambridge University Press.

Heine, C. A. (1997). Tasks Enjoyment and Mathematical Achievement. Tesis doctoral no publicada, Universidad de Chicago, Illinois.

Jackson, S. A. y Marsh, H. W. (1996). Development and validation of a scale to measure optimal experience: The flow state scale. *Journal of Sport and Exercise Psychology*, 18, 17-35.

Larson, R. (1998). Flujo y escritura. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del flujo en la conciencia* (pp. 151-169). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Liljedahl, P. (s. f.). On the Edges of Flow : Student Problem Solving Behavior. En *Broadening the scope of research on mathematical problem solving: A focus on technology, creativity and affect.*

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D.A. Grows (Ed), *Handbook of Research on Mathematics*

Teaching and Learning, (pp. 575- 596). New York: Macmillan Publishing Company.

Mesurado, B. (2008). Validez factorial y fiabilidad del Cuestionario de experiencia óptima (flow) para niños y adolescentes. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación Psicológica, 1*(25), 159-178. https://doi.org/10.4321/S1132-12962005000300005

Mesurado, B. (2010). La experiencia de Flow o Experiencia óptima en el ámbito educativo. *Revista Latinoamericana de Psicología*, 42 (2), 183-192.

Montoro, A. (2014). Motivación y Matemáticas: Experiencias de flujo en estudiantes de maestro de Educación Primaria. Servicio de Pubicaciones. Universidad de Almería.

Montoro, A. y Gil, F. (2016). Aspectos que facilitan la motivación con tareas matemáticas. Un estudio de casos con estudiantes de maestro de primaria. PNA, 10(4), 307-337.

Nakamura, J. (1998). Experiencia óptima y las aplicaciones del talento. En M. Csikszentmihalyi e I.S. Csikszentmihalyi (Eds.), *Experiencia óptima: Estudios psicológicos del Flujo en la Conciencia* (pp. 71-90). Bilbao: Desclée de Brouwer.

Rathunde, K. (1993). The motivational importance of extracurricular activities for adolescent development: Cultivating undivided attention. Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association. Atlanta.

Rodríguez, A. M. (2009). The story flows on: A multi-study on the flow experience. Tesis doctoral no publicada. Universitat Jaime I, España. Recuperado el 15 de Junio de 2010 de http://www.tesisenxarxa.net/TDX-0714109-114559/index_cs.html.

Rodríguez-Sánchez, A. M., Salanova, M., Cifre, E. y Schaufeli, W. B., (2011). When good is good: A virtous circle of self-efficacy and flow at work among teachers. *Revista de Psicología Social*, 26 (3), 427-441.

Schweinle, A., Turner, J.C. y Meyer, D. K. (2002, Agosto). Motivational and affective quality of students' experiences in mathematics classrooms. Documento presentado en el Annual Meeting of the American Psychological Association. Chicago.

Schweinle, A., Turner, J.C. y Meyer, D. K. (2006). Striking the right balance: Studients´ motivation and affect in elementary mathematics. *The Journal of Educational Research*. 99 (5), 271-293.

Sedig, K. (2007). Toward operationalization of "flow" in mathematics learnware. Computers in Human Behaviour, 23, 2064-2092.

Shin, N. (2006). Online learner ' s ' flow ' experience : an empirical study. *British Journal of Educational Technology, 37*, 705-720. https://doi.org/10.1111/j.1467-8535.2006.00641.x

Sinnamon, S., Moran, A. y O'Connell, M. (2012). Flow Among Musicians : Measuring Peak Experiences of Journal of Research in Music. *Journal of Research in Music Education,* (September 2017), 6-25. https://doi.org/10.1177/0022429411434931

Whalen, S. P. (1997). Assessing flow experiences in highly able adolescent learners. Documento presentado en el Annual Meeting of the American Educational Research Association. Chicago.

Las representaciones gráficas como modelo y patrón geométrico

Graphic representations as model and geometric pattern

Enrique Castro Martínez, Elena Castro-Rodríguez
Universidad de Granada

Resumen

Las representaciones gráficas son una herramienta fundamental para la expresión y comunicación de los objetos matemáticos. En este capítulo resaltamos dos de sus funciones esenciales. Una de ellas es el de las representaciones gráficas como modelos geométricos en la resolución de problemas aritméticos y algebraicos, que conducen a estrategias de solución. Un segundo uso importante es el tratamiento de los patrones mediante la representación geométrica de los mismos, sugiriendo que además de su carácter estético, su utilización puede aportar una interpretación sinestésica del objeto matemático que representan.

Palabras clave: representación gráfica, geometría, resolución de problemas, modelos, patrones.

Abstract

Graphic representations are a fundamental tool for the expression and communication of mathematical objects. In this chapter we highlight two of its essential functions. One of them is graphical representations as geometric models in solving arithmetic and algebraic problems, leading to solution strategies. A second important use is the treatment of patterns through the geometric representation of them, suggesting that in addition to their aesthetic character, their use can provide a synesthetic interpretation of the mathematical object they represent.

Keywords: graphic representation, geometry, problem solving, models, patterns.

Introducción

Si algo ha caracterizado tradicionalmente a la matemática escolar ha sido su concepción como dos grandes bloques: el de Aritmética y el de Geometría. El primero se ocupa del estudio de los números y sus relaciones y el segundo de las figuras geométricas, sus características y relaciones entre sus elementos (Ruiz, 2001). Estos dos grandes bloques no son compartimentos estancos de la matemática, por el contrario, entre el número y la forma se dan relaciones estrechas, de tal manera que en Geometría los números se utilizan para el estudio de las formas y la Aritmética se vale de las formas para expresar las relaciones numéricas (Ruiz, 2001). Esta conexión es fundamental desde el punto de vista de la resolución de problemas.

Resolver problemas enunciados verbalmente, de carácter aritmético y algebraico, es un aspecto clave del currículo de Matemáticas en la enseñanza obligatoria, y también es uno de los aspectos más problemáticos. ¿Por qué esto es así?, ¿cómo podemos ayudar a los escolares en estas tareas? (González, Castro-Rodríguez y Castro, 2016; Ng y Lee, 2009). Tradicionalmente se ha considerado que la mayor parte de los alumnos que no llegan a resolver un problema, fracasan porque no lo entienden, porque "no lo ven". Por tanto, hay que empezar por eso, porque lo entienden y porque lo ven (Charenton, 1930).

El planteamiento de los problemas matemáticos en la escuela adopta tradicionalmente una formulación verbal y el estudiante debe traducir esta formulación verbal del problema a una expresión matemática de carácter simbólico. Esta afirmación nos traslada al papel que juegan las representaciones en la resolución de problemas. Cuando procedemos a resolver un problema aritmético o algebraico enunciado verbalmente, lo primero que debemos hacer es representárnoslo internamente. El que se comprenda o no un problema depende de si esta representación interna sea o no adecuada, sea completa o el resolutor produzca una representación interna parcial del problema. La representación mental del problema debe contener todos los elementos esenciales de dicho problema, incluidos los datos y las relaciones entre ellos. De esta representación interna del problema es de la que surge la representación externa constituida por las expresiones aritméticas o algebraicas del problema, cuya manipulación nos permite obtener un resultado.

En la literatura especializada sobre resolución de problemas se utiliza el término representación para referirse a la representación interna del problema que construye el resolutor, o bien a las formas externas de carácter semiótico en las que se plantea, reformula o resuelve un problema, y a las que se denominan representaciones externas. Las representaciones externas son “notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes” (Castro y Castro, 1997, p. 96). La importancia de las representaciones externas en el aprendizaje de la matemática y la resolución de problemas ha sido ampliamente estudiada (Cuoco y Curcio, 2001; Fernández, 1997; Goldin, 1998; Janvier, 1987; Martínez, Fernández y Flores, 2011; Rico, 2009).

En el aprendizaje escolar de la matemática y en la resolución de problemas las representaciones se han utilizado de distintos modos, uno de ellos en propuestas teóricas del aprendizaje como facilitadores del proceso del paso de los concreto a lo abstracto. En esta línea Radford y Grenier (1996) presentan una vía alternativa estructurada para la enseñanza del Álgebra a través de la resolución de problemas verbales. Tomando el desarrollo histórico de la resolución de problemas, proponen tres niveles de abstracción para resolver un problema: un nivel concreto (manipulativo), un nivel semiconcreto (a través de dibujos) y un nivel simbólico (que corresponde al lenguaje algebraico). En este enfoque los tres modos de representación son reflejo de desarrollo cognitivo, pero actúan también en paralelo. Es decir, una vez se ha adquirido un modo, se sigue utilizando para desarrollar el siguiente y también de modo simultáneo para complementarse. Fernández (1997) hace un análisis detallado de los distintos tipos de representaciones en matemáticas y subraya el papel fundamental de las representaciones gráficas para la resolución de problemas verbales en álgebra. Su aproximación se ubica dentro de un enfoque que trata las representaciones como sistemas isomorfos en los que cabe representar los problemas para su resolución de forma indistinta, restando predominancia al sistema simbólico en favor de un sistema gráfico más intuitivo.

El modelo geométrico-lineal

Un segundo modo de utilización de las representaciones externas en Educación Matemática es su uso como un modelo o procedimiento para enseñar a resolver problemas verbales en la escuela. Los métodos clásicos de enseñar a resolver problemas verbales consideraban distintas fases, pero una constante común en todos ellos es empezar con la comprensión del enunciado del problema verbal.

Para solucionar esta falta de comprensión puede comentarse el enunciado, dar una explicación sencilla, hacer una aclaración oportuna, o dar vida real al problema mediante su dramatización, haciendo que los mismos niños sean los personajes de la acción que aquél supone. Pero expresar con palabras los elementos y las relaciones que determinan un problema tiene sus ventajas y sus limitaciones. Bajo esta forma de representación verbal a veces los escolares no comprenden la información que se les plantea en el enunciado, no llegan a relacionar las expresiones verbales con sus referentes concretos ni con la dramatización ni con el comentario; entonces se puede recurrir a la interpretación gráfica mediante modelos geométricos de aquél; es decir, a sustituir por líneas (casi siempre rectas) los valores numéricos. Se ha sugerido que la ayuda de representación mediante diagramas, modelos o esquemas gráficos facilita una mejor comprensión del problema que la formulación verbal (Botsmanova, 1989). Y ello porque las representaciones gráficas mediante modelos geométricos lineales permiten presentar las relaciones abstractas del problema en una forma más concreta.

Los modelos geométricos en dos dimensiones son representaciones gráficas de entes cuyos componentes están representados mediante figuras geométricas básicas tales como puntos, líneas, segmentos, polígonos y circunferencias. Un modelo geométrico es una representación isomórfica del ente que representa y que está realizada mediante trazado geométrico. Por tanto conserva la misma estructura de relaciones que el ente representado. La recta real es un ejemplo bien conocido de modelo geométrico de los números reales. El isomorfismo existente entre los números reales y la recta geométrica real ha permitido modelizar geométricamente las operaciones numéricas (y algebraicas) así como sus propiedades mediante modelos geométricos. El ejemplo más reciente es la propuesta en el modelo de Singapur.

El currículo de Singapur ha popularizado los modelos geométricos de barras en la resolución de problemas. En dichos modelos se emplean rectángulos para representar gráficamente la relaciones básicas, como la de parte-todo y la relación de comparación (denominan modelo aritmético a aquel que representa una situación en la que la incógnita está en la solución de la ecuación y modelo algebraico en el caso en que la incógnita sea uno de los sumandos), tal como se muestra en las siguientes figuras.

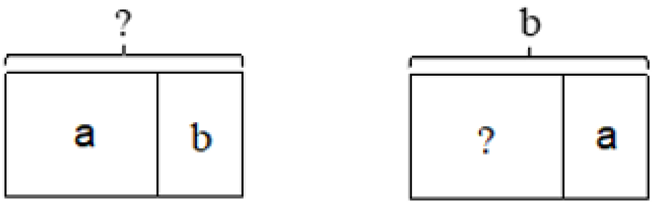


Figura 1. Modelos parte-todo: A la izquierda modelo aritmético, a la derecha modelo algebraico (Ng y Lee, 2009)

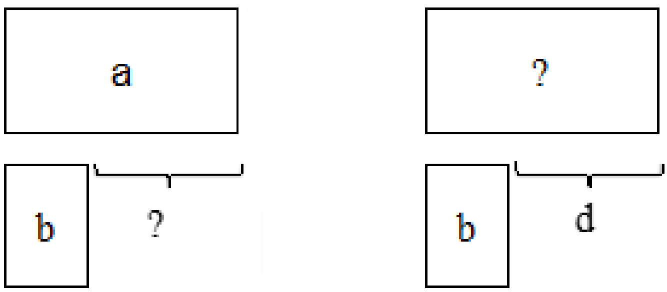


Figura 2. Modelos de comparación: A la izquierda modelo aritmético, a la derecha modelo algebraico (Ng y Lee, 2009)

La utilidad de estos esquemas es facilitar la comprensión de la estructura de relaciones que mantienen las cantidades en el problema. Con este enfoque se recupera parte de una tradición metodológica que trataba de presentar la resolución de problemas aritméticos y algebraicos como una conjunción entre contexto real, modelo gráfico y solución, todo ello ejemplificado con un problema modelo. La figura 3 muestra un ejemplo empleando un problema de cambio. Se muestra un problema real al que va asociado el problema modelo y a continuación el modelo gráfico (geométrico-lineal) y la solución.

PROBLEMA MODELO

Ocho corredores toman parte en una carreta, pero caen 3 y quedan tendidos. ¿Cuántos siguen en la carrera?

GRÁFICO

Corredores: 8

Caen: 3 Siguen: 8-3=5

SOLUCIÓN

Número de corredores: 8
Corredores que caen: 3
Corredores que siguen: 5

Figura 3. Situación real asociada al problema modelo, modelo gráfico y solución (Adaptado de la Aritmética de Luis Vives, 1949).

En esta propuesta el modelo gráfico actúa en paralelo con el modelo simbólico, su aplicación se sitúa en la fase que Polya (1945) denomina comprensión del problema. El profesor Fernández propone una propuesta en la que además la estrategia surja y se realice sobre la representación gráfica.

El modelo geométrico como estrategia

El profesor Fernández ha propugnado el modelo geométrico como una estrategia para la resolución de problemas algebraicos, lo que ha denominado el modelo geométrico lineal. En este enfoque se va un poco más allá de solucionar la comprensión del problema pues con él se pretende obtener la solución de manera geométrica. Es decir, en el modelo geométrico lineal se utilizan los modelos geométricos como estrategia predominante de resolución frente a estrategias de carácter simbólico.

El modelo en cuestión se basa en la utilización de segmentos lineales para representar las cantidades de magnitudes (tanto conocidas como desconocidas) y sus relaciones. Este modelo tiene la ventaja de permitir representar variables discretas y continuas y ser de fácil manipulación.

Enmarcado en un sistema de representación gráfico, y tomando en cuenta el fundamento de dicho modelo, el profesor Fernández y colaboradores definen el modelo geométrico lineal en los siguientes términos:

Método geométrico lineal: consideraremos que se utiliza este método, en la resolución de problemas algebraicos, cuando se establecen, a través de segmentos de recta, las relaciones lineales entre los datos y las incógnitas contenidas en el enunciado del problema mediante segmentos de recta, en donde las incógnitas están representadas por trazos o partes de esos segmentos. Es decir, se representa una (o más) cantidad desconocida utilizando un segmento cualquiera y, posteriormente, se describen gráficamente las relaciones contenidas en el enunciado a partir de dicho segmento y mediante la definición de la unidad (explícita o implícitamente) usando un segmento determinado, de manera tal que se puedan representar cantidades conocidas (datos). La resolución del problema pasa por determinar la longitud del segmento que representa a la cantidad desconocida. (Martínez, Fernández y Flores (2009)).

Veamos un ejemplo de solución de un problema empleando una estrategia geométrico-lineal. Para ello, empleamos un problema que podemos identificar como un problema algebraico.

Problema. Un agricultor tiene dos veces tantos patos como pollos. Después de que el agricultor ha vendido 413 patos y 19 pollos murieron, tiene la mitad de patos que de pollos. ¿Cuántos patos tiene ahora?

Usualmente en el ámbito escolar el profesor espera que el estudiante plantee algebraicamente el problema y lo resuelva siguiendo los preceptos algebraicos. Sintéticamente:

Tabla 1. Síntesis del problema.

	Patos	Pollos
Antes	2x	x
Después	2x 413	x - 19
Por tanto	2(2x - 413) = x - 19, 4x - 826 = x - 19, 3x = 807, x =125	

Pero por diversas razones se puede optar por una estrategia geométrico lineal como la, que se muestra en la figura 4, bien como estrategia en sí misma o como forma de comprender la estrategia algebraica.

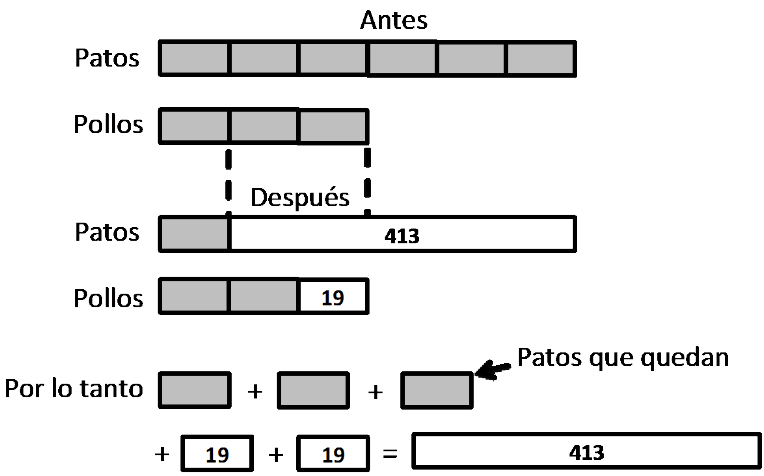


Figura 4. Estrategia geométrico lineal

La estratégica gráfica consta de dos partes. En la primera se muestra las relaciones entre las cantidades de patos y pollos antes y después de efectuada la venta. De esa primera parte se deduce una configuración visual fácilmente resoluble aritméticamente o bien traducible a una expresión algebraica.

El modelo geométrico como patrón

En su reflexión sobre qué es la matemática, Devlin (1998) afirma que muchas personas consideran de forma trasnochada que la matemática es la ciencia de los números. Para él esta visión sería exacta hace dos mil quinientos años pero hoy día sería más adecuado decir que la matemática es la ciencia de los patrones y que diferentes tipos de patrones dan lugar a diferentes ramas de la matemática (Devlin, 1998).

La primera caracterización de la matemática como el estudio de los patrones parece haber sido hecha por el matemático británico, G. H. Hardy, que en su libro "La apología de un matemático" escribió "Un matemático, como un pintor o un poeta, es un fabricante de patrones. Si sus patrones son más perdurables que las de ellos, es porque están hechos con ideas" (Hardy, 1992, p. 84).

Hardy puede o no haber sido el primero en usar la metáfora de los patrones para describir el corazón de las matemáticas, pero ciertamente no fue el último. La declaración más conocida y citada a este respecto es la de Lynne Steen, quien se refirió a las matemáticas como la ciencia de los patrones (Steen, 1988). Desde entonces, la metáfora se ha vuelto casi un lugar común. Lo encontramos en documentos clave en la educación matemática, tales como los Principios y Estándares (NCTM, 2000), en libros como el de K. Devlins Mathematics: The Science of Patterns (Devlin, 1994) y en el aula.

Que sea común llamar a las matemáticas la ciencia de los patrones es probablemente una señal de que hay algo correcto al respecto. Pero, ¿qué significa? Ciertamente, los patrones son a menudo el tema explícito de las matemáticas, a veces incluso en el sentido perfectamente ordinario de la palabra, como en el estudio de las simetrías en frisos, mosaicos y teselaciones. Por supuesto, puede afirmarse que el estudio de la simetría comprende una mayor parte de las matemáticas que podría parecer a primera vista, pero dudamos al decir que esta es la razón por la que es correcto llamar a las matemáticas, en general, la ciencia de los patrones.

¿Por qué el término patrón parece tan adecuado para describir la matemática? Sin duda porque tiene connotaciones que aluden al orden, la regularidad y la legitimidad. Por otra parte, así como el patrón, digamos, de una camisa no es la tela, sino el diseño, el esquema o la idea de una camisa, el término patrón subraya el hecho de que, como indica Resnik, en matemáticas el objeto primario no son los objetos matemáticos individuales, sino las estructuras en que están dispuestos (Resnik, 1999, p. 201).

Desde este punto de vista de la matemática como la ciencia de los patrones, en el ámbito de los sistemas educativos y en las propuestas curriculares, los patrones se consideran de manera más local, como un aspecto importante de la matemática en la que hay que educar a los estudiantes desde los primeros niveles educativos (Castro-Rodríguez y Castro, 2016; NCTM, 2000; Ruiz, 2001). Trabajar los patrones en el aula requiere considerar y explicitar características adicionales de los patrones a lo ya explicitado por Resnik de que conforman una estructura. Ruiz (2001) señala que la idea de patrón está ligada a procesos de repetición y regularidad, y su finalidad es la generalización. Esta idea conecta con el hecho de la búsqueda de un patrón como una estrategia de resolución de problemas, pero no es lo único que se puede hacer en el aula, también es importante la construcción de patrones a partir de su núcleo básico. La repetición de este núcleo básico de manera constante o repitiéndolo de tal manera que se amplía en cada paso el núcleo básico da lugar a dos tipos de estructuras en los patrones: patrones de repetición y de desarrollo.

El estudio de los patrones a nivel escolar puede ser abordado representándolos gráfica o numéricamente, de forma separada o empleando las dos representaciones. Aun cuando se pueda abordar el patrón sólo numéricamente, la representación gráfica del mismo aporta su visualización espacial que en ocasiones conlleva formas con una estructura armoniosa, lo que faculta su aplicabilidad en situaciones prácticas.

Para Devlin (1998) la geometría estudia los patrones en las formas. Los modelos geométricos pueden aparecer como el núcleo de un patrón de repetición o un patrón de desarrollo en formas más complejas.

Un trabajo interesante al respecto realiza Ruiz (2001), en “Números y formas” en el que estudia la relación entre patrones numéricos y geométricos. En él se resalta “la importancia de investigar y la creación de modelos para establecer relaciones, tanto entre aspectos aritméticos y geométricos, como entre las matemáticas y situaciones del mundo real” (p. 449). El profesor Ruiz, destaca el papel importante que juegan las calculadoras gráficas y los ordenadores para visualizar los patrones y establecer conexiones. Una de sus aportaciones más originales es la búsqueda de patrones en tablas numéricas, por ejemplo números poligonales en las tablas de multiplicar, en la tabla del 100, en el triángulo de Pascal, etc.

La representación geométrica nos hace más inteligibles los patrones y los entes matemáticos en general, y concebir y sentir su relación con la naturaleza y las artes desde un ángulo propio, de carácter visual, que nos hace concebir la matemática de forma más atractiva que la representación simbólica de tipo numérica o algebraica. Si bien la representación simbólica es más potente y generalizable para la resolución de problemas, la representación geométrica ofrece una forma más "amigable" de las estructuras matemáticas, una forma de sentir más accesible, que imbuye en las personas unas capacidades sinestésicas de interpretación que enriquecen la inteligibilidad y aplicabilidad de las ideas matemáticas. Trabajar los modelos y patrones favorece la capacidad de resolución de problemas e incrementa la capacidad de comprender e interpretar el mundo desde el punto de vista matemático. No nos sorprende pues, que en determinados ámbitos profesionales como el de los sumilleres, se adopten términos geométricos para caracterizar metafóricamente las cualidades de los vinos (véase tabla 2).

Tabla 2. La geometría del vino

Agudo o anguloso	Vino en el cual domina la aspereza/astringencia por exceso de tanino o tanino inmaduro
Áspero	Vino demasiado tánico
Duro	Vinos con mucho tanino, a veces producto de la juventud del vino
Firme	De buen tanino
Flexible	Redondo, suave
Hueco	Vino con buen sabor inicial y final, pero con falta de tonos entre uno y otro
Largo	Característica positiva de un vino que su sabor perdura
Plano	Sin frescura ni ácido
Redondo	Sin extremos duros, listo para beber
Sólido	Lleno de sustancias, habitualmente vinos con mucho cuerpo

Desconocemos si la geometría del vino ha avanzado más allá de este primer paso en el que aplican términos geométricos de manera aislada para expresar las cualidades de los vinos. Pero el día que los sumillers y enólogos sean capaces de utilizarlos para construir patrones geométricos con los que expresar las cualidades de un vino, habrán encontrado un gran filón para construir y describir los vinos.

Referencias

Botsmanova, E. (1989). El papel del análisis gráfico en la resolución de problemas aritméticos. *Comunicación, Lenguaje y Educación, 3-4,* 17-21.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-122). Barcelona: HORSORI.

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Pensamiento lógico-matemático. En E. Castro y E. Castro (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación infantil.* Madrid: Ediciones Pirámide.

Charentón, A. R. (1930). *Metodología de los problemas.* Madrid: Instituto Samper.

Cuoco, A. A. y Curcio, F. R. (Eds.) (2001*). The roles of representation in School Mathematics. 2001 Yearbook*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Devlin, K. (1998). *El lenguaje de la matemática*. Madrid: Morata.

Fernández, F. (1997). Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Goldin, G. A. (1998). Representational systems, learning, and problem solving in mathematics. *Joumal of Mathematical Behavior, 17*(2), 137-165.

González, F., Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). Interpretación de diagramas de comparación multiplicativa por estudiantes de secundaria. *PNA, 10*(4), 280-306.

Janvier, C. (Ed.) (1987). Problems of representations in the teaching and learning of mathematics. Hillsdale, NJ: LEA.

Hardy, G. H. (1992). *A Mathematicians Apology*. Cambridge: Cambridge University Press.

Martínez, M., Fernández, F. y Flores, P. (2011). Clasificación de problemas verbales de álgebra elemental a partir de su resolución de un modelo geométrico lineal. *UNION, 25*, 43-61.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics.* Reston, VA.: NCTM.

Ng, S. F. y Lee, K. (2009). The model method: Singapore children's tool for representing andsolving algebraic word problems. *Journal for Research in Mathematics Education, 40*(3), 282-313.

Polya, G. (1945). *Cómo plantear y resolver problemas.* Mexico: Trillas.

Radford, L. y Grenier , M. (1996). On the dialectical relationships between-symbols and algebraic ideas. En L. Puig y A. Gutiérrez (Eds.), 20th international conference for the psychology of mathematics education, Vol. 4, 179-186, Universidad de Valencia, Spain

Resnik, M. D. (1999). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Clarendon Press, 1999.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science, 240*, 611-616.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14

Ruiz, F. (2000). La Tabla-100: representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de Primaria en formación. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Ruiz, F. (2001). Números y formas. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 449-475). Madrid: Síntesis.

Patrones en números figurados. Aplicación para la enseñanza

Patterns in figurative numbers. Application for teaching

Encarnación Castro Martínez, Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Universidad de Granada

Resumen

En este capítulo presentamos patrones que siguen algunos números figurados, particularizando en los números triangulares como base para el resto de poligonales. Los patrones se consideran de utilidad para la resolución de algunos tipos de problemas y como herramientas para introducir el álgebra escolar, además de manifestar la belleza inherente a la Matemática Discreta. Esta temática se acerca al interés investigador de nuestros compañeros Francisco Fernández y Francisco Ruiz. Francisco Fernández centró sus trabajos en el aprendizaje del álgebra escolar, más concretamente en la resolución de problemas algebraicos en función de diferentes sistemas de representación, y Francisco Ruiz mostró en sus trabajos gran interés por el carácter interdisciplinar de los conocimientos matemáticos y por destacar las relaciones y conexiones entre las matemáticas con otras disciplinas, entre ellas el Arte.

Palabras clave: patrones, números figurados, números poligonales, números triangulares.

Abstract

In this chapter we show patters followed by some figurative numbers, paying attention to triangular numbers like basis for the rest of polygonal numbers. Patterns are considered useful for solving some types of problems as well as for introducing Algebra in elementary school. Moreover, patterns show inherent beauty to Discrete Mathematics. This topic is close to the research interest of our fellows Francisco Fernández and Francisco Ruiz. Francisco Fernández focused his works in learning of Algebra, more concretely in solving algebraic problems by using different representation systems. Francisco Ruiz showed great interest in the interdisciplinar character of mathematical knowledge as well as in emphasizing relations and conections among Mathematics and others disciplines, like Art.

Keywords: patterns, figurative numbers, polygonal numbers, triangular numbers.

Patrones y matemáticas

Los matemáticos de todos los tiempos han sido fascinados por el arte y la ciencia de los patrones (Joseph, 2000). Desde hace algunas décadas, un cierto punto de vista considera la matemática como la ciencia que estudia las regularidades, y que identifica la matemática como la ciencia de los patrones y el orden (Devlin, 1994; Steen, 1988). Goldin (2002) indica que las matemáticas tratan de la descripción sistemática del estudio de patrones y para Orton (1999) buscar una regularidad, un patrón, una regla, es una de las acciones que se realizan generalmente en matemáticas. Steen (1998) establece la siguiente analogía: así como la biología es la ciencia de la vida y la física la ciencia de la energía y la materia, la matemática es la ciencia de los patrones. La identificación de un patrón apropiado en el comportamiento de la naturaleza permite predecir lo que ocurrirá en un futuro, lo cual otorga a las matemáticas una extraordinaria utilidad (Steen, 1998). El poder de la matemática radica en relaciones y transformaciones que dan lugar a patrones y generalizaciones (Warren, 2005). Patrones y relaciones surgen en todas las ramas de las matemáticas ya sea números, álgebra, geometría, probabilidad o estadística.

Patrones en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas

La literatura ofrece varias definiciones de patrones, la idea básica implícita en esta noción es que toda situación repetida con regularidad da lugar a un patrón (Castro, 1995). Según Guerrero y Rivera (2002), patrón es una regla entre elementos u objetos matemáticos como números, formas. Papic y Mulligan (2005) definen patrón como una regularidad espacial o numérica. Un patrón matemático puede ser descrito como cualquier regularidad predecible que, por lo general, impliquen operaciones numéricas, espaciales o relaciones lógicas (Mulligan, 2010).

Los patrones que expresan relaciones y funciones, a menudo, se presentan gráficamente, verbalmente, numéricamente o analíticamente, a través de tablas, gráficos o fórmulas. La mayoría puede representarse en varias formas. De hecho, los patrones relacionados con las matemáticas a menudo son más eficaces si hay interacción entre estas múltiples representaciones (Steen, 1988).

Los patrones se asocian comúnmente al pensamiento algebraico debido a la presencia en ellos de la abstracción y la generalización (Barbosa y Vale, 2015). Permiten la transición al Álgebra mediante el establecimiento de relaciones de tipo funcional (Zazkis y Liljedahl, 2002). Pueden servir como contexto para la introducción de diferentes formas de expresiones algebraicas sobre la misma relación y percibir que tales relaciones pueden ser descritas correctamente de diferentes maneras. El trabajo con patrones permite la formulación y justificación de las generalizaciones y el uso de estas generalizaciones para hacer predicciones (Mason, Johnston-Wilder y Graham, 2005). La función recursiva, generalmente asociada a los patrones, es considerada una potente vía de expresar relaciones y analizar propiedades de los procesos matemáticos.

Las siguientes acciones, ligadas a los patrones, son señaladas por Steen (1988) y constituyen la descripción misma de lo que significa hacer matemáticas (Liljedahl, 2004):

- *Reconocer:* Descubrir situaciones matemáticas en diversos contextos;
- *Visualizar:* Ver patrones en datos y en situaciones no matemáticas;
- *Verbalizar:* Expresar en palabras la naturaleza de los patrones percibidos por la vista;
- *Simbolizar:* Formalizar en símbolos matemáticos las relaciones encontradas en los patrones;
- *Analizar:* Relacionar un patrón con otro, y predecir nuevos patrones.

Atendiendo a diferentes criterios, se consideran distintos tipos de patrones. Así, dependiendo de los elementos que lo forman, el patrón puede ser numérico o geométrico; según la forma de presentarse, pueden hacerse mediante representación simbólica (es el caso de los numéricos) o con imágenes (caso de las geométricas) que potencian la visualización, entendida esta como procesos de construcción y transformación de imágenes y todas las inscripciones de naturaleza espacial que puedan estar implicadas al hacer matemáticas (Presmeg, 2006); por su formación, pueden ser de repetición (un motivo se va repitiendo en la formación de la secuencia) y de desarrollo o crecimiento (los elementos de la secuencia crecen de uno término al siguiente).

Para que un patrón sea de tipo numérico, el hecho de estar formado por números es condición necesaria pero no suficiente. Para ser considerado numérico un patrón ha de cumplir además que el valor de los diferentes elementos sea relevante en la sucesión. Es decir, el patrón no ha de poder ser transferido a un patrón no numérico, sin pérdida de alguna propiedad crucial del mismo. Por ejemplo, el patrón *1, 2, 3, 4, 3, 2, 1* es transferible a *abcdcba* y, por lo tanto, no es un patrón numérico sino un patrón usando números como elementos individuales. Por lo general, los patrones repetitivos construidos a partir de números no se consideran patrones numéricos ya que pueden ser transferidos a una representación no numérica. Ejemplos de patrones numéricos son los de la figura 1:

1, 1, 2, 3, 5, 8,…; 1, 4, 8, 13, 19,…; 1, 3, 6, 10, 15,...; 1, 4, 9, 16, 25,...

Figura 1. Secuencias de números que siguen un patrón numérico

Todos los tipos de patrones contribuyen al desarrollo del razonamiento matemático, pero los patrones numéricos de crecimiento conducen, de forma más natural, al descubrimiento de una relación entre dos cantidades variables, facilitando así el razonamiento funcional (Rivera y Becker, 2008).

Números figurados

Los números figurados son números que pueden ser representados por una disposición geométrica regular o secuencia de puntos (u objetos discretos) uniformemente espaciados (figura 2). Si la representación corresponde a un polígono se trata de números poligonales y su nombre vendrá dado por el polígono correspondiente (triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.); si corresponde a una figura tridimensional, su nombre depende de la figura de la cual se trate (piramidal triangular, piramidal cuadrangular, cúbico, etc.).

Los números figurados, que suelen asociarse con figuras de 2 o 3 dimensiones, pueden generalizarse a dimensiones más altas. Forman secuencias numéricas de crecimiento cuya representación puede hacerse simbólicamente o gráficamente, y presentan patrones numéricos, o secuencias en la formación de cada figura a partir de la anterior, como se muestra en la figura 2.

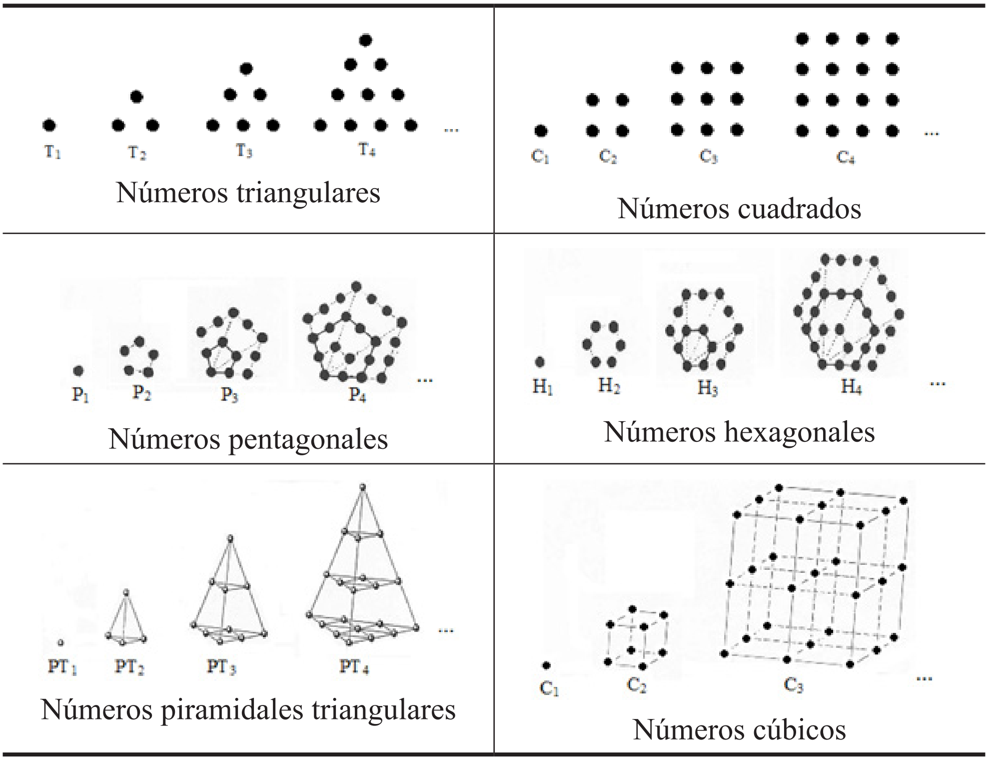


Figura 2. Números figurados

Números triangulares

De la representación poligonal-puntual de los números triangulares (figura 2) se desprende un patrón en la formación de dichas figuras, consiste en agregar al anterior una fila de puntos con un punto más que la fila anterior.

La expresión numérica de esta sucesión es:

$$T_1 = 1; \quad T_2 = 1+2 = 3; \quad T_3 = 1+2+3 = 6; \quad T_4 = 1+2+3+4 = 10 \ldots$$

Donde 1, 3, 6, 10… es una sucesión de números triangulares dada por el patrón: *Sumar tantos números naturales consecutivos como indica el término de la sucesión*.

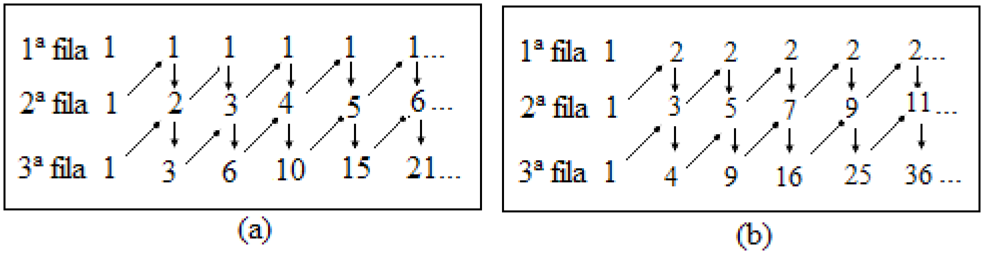


Figura 3. Algoritmo para la construcción de números triangulares y cuadrados

Mediante un algoritmo como el que se recoge en la figura 3(a), basado en el teorema de las diferencias finitas, se pueden conseguir tantos números triangulares como se quiera.

La construcción del algoritmo es como sigue: (i) se escribe una primera fila como sucesión constante de 1; (ii) la segunda fila se construye poniendo 1 en primer lugar, el siguiente número se obtiene sumando este número y el que tiene a su derecha en la fila superior (en el recorrido que indican las flechas); (iii) se repite este procedimiento en toda la fila. Para la tercera fila, se sigue este mismo proceso. En esta tercera fila se obtienen los números triangulares. Si se pone una fila más y se repiten los mismos pasos, en la cuarta fila se obtienen los números piramidales triangulares.

La expresión del término general de la sucesión de los números triangulares es $T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$. Dicha expresión puede obtenerse por diferentes métodos, recogemos a continuación el método que utiliza la representación puntual.

Consideramos dos secuencias de número triangulares y las unimos como indica la figura 4.

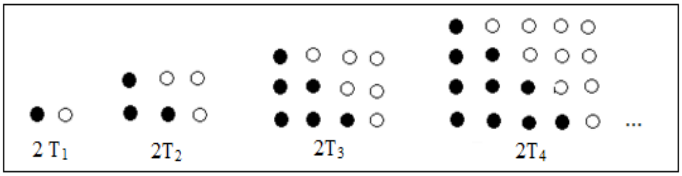


Figura 4. Unión de dos números triangulares del mismo orden.

Se forma una secuencia de números rectangulares en la que cada elemento es el doble del número triangular del mismo orden. El número de puntos de cada uno de estos rectángulos se obtiene como producto del número de puntos que hay en cada lado. Simbólicamente se escribe:

$$2T_1 = 1\times2 = 2;\ 2T_2 = 2\times3 = 6\ ;\ 2T_3 = 3\times4 = 12;\ 2T_4 = 4\times5 = 20;\ \ldots;$$

$$2T_n = n \times (n + 1)$$

De donde $T_n = \frac{1}{2}\, n(n + 1)$.

Los números triangulares, y el término general de su secuencia, proporcionan la base para llegar a conocer el término general de las sucesiones de los otros números figurados y también para resolver algunos tipos de problemas, como vemos seguidamente.

Números cuadrados

La figura 2 muestra los números cuadrados. Se percibe que el patrón para construir los sucesivos cuadrados consiste en ir añadiendo una fila y una columna (una escuadra) de puntos, a la figura anterior. Numéricamente esta secuencia se escribe:

$$C_1 = 1;\ C_2 = 1+3 = 4;\ C_3 = 1+3+5 = 9;\ C_4 = 1+3+5+7 = 16;\ldots$$

que constituye la sucesión de los números cuadrados 1, 4, 9, 16…; cuyo patrón es: *cada número cuadrado es la suma de tantos números impares como indica su orden*.

Como ocurriera para los números triangulares, también en el caso de los cuadrados se puede utilizar el algoritmo de la figura 3(b) para obtener números cuadrados en la tercera fila del algoritmo.

Aunque la expresión general de un cuadrado es conocida —n^2, se puede llegar a obtener dicho término general a partir de considerar que todo número cuadrado es equivalente a dos triangulares, uno de ellos del mismo orden que el cuadrado y otro de un orden menor, como se muestra en la figura 5.

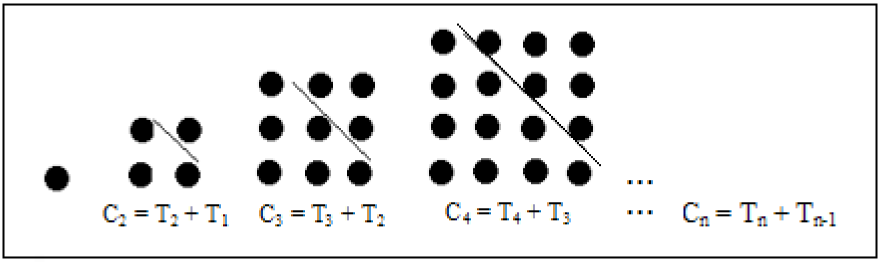


Figura 5. Número cuadrado como suma de dos números triangulares

Así: $C_n = T_n + T_{n-1} = \frac{1}{2}\, n(n+1) + \frac{1}{2}\,(n-1)n = n^2$.

Números Poligonales P_r^2

El término general para cada una de las sucesiones de números poligonales se puede hallar por descomposición del mismo en triangulares (análogamente a lo hecho para los cuadrados). Así en la figura 2 se percibe que para los números pentagonales se cumple que:

$$P_3 = T_3 + 2T_2;\ P_4 = T_4 + 2T_3;\ \ldots,\ P_n = T_n + 2T_{n-1}$$

lo cual llevaría a la siguiente expresión:

$$P_n = \frac{1}{2}\,n(n+1) + 2\frac{1}{2}\,(n-1)n = \frac{1}{2}\,n(3n-1)$$

De forma similar, para los números hexagonales: $H_n = T_n + 3T_{n-1}$; luego, $H_n = \frac{1}{2}\,n(4n-2)$.

Repitiendo este proceso y siguiendo el patrón que indica que cualquier número poligonal se puede considerar suma de un triangular del mismo orden más tantos triangulares de un orden menor como indica su orden menos tres, se llega a la información presentada en la tabla 1, la cual recoge una variedad de sucesiones, tanto en sus filas como en sus columnas, cada una de ellas presentan un patrón numérico.

Tabla 1. Sucesiones de números poligonales y sus términos generales

Lados	Nombre	Número de orden						
		1	2	3	4	5	…	n
3	Triangular	1	3	6	10	15		$\frac{1}{2}\,n(n+1)$
4	Cuadrangular	1	4	9	16	25		$\frac{1}{2}\,n(2n-0)$
5	Pentagonal	1	5	12	22	35		$\frac{1}{2}\,n(3n-1)$
6	Hexagonal	1	6	15	28	45		$\frac{1}{2}\,n(4n-2)$
7	Heptagonal	1	7	18	34	55		$\frac{1}{2}\,n(5n-3)$
	…							
r	r-gonal r ≥ 2	1	r	3(r – 1)	2(3r – 4)	5(2r – 3)		$\frac{1}{2}\,n[(r-2)n-2(r-2)]$

Por lo que la fórmula general para obtener un número poligonal es:

$$P_r^2 = \frac{1}{2}\, n[(r-2)n - 2(r-2)$$

donde r es el lado del polígono, y n es el número de orden que ocupa el número en la secuencia.

Algunos problemas a resolver a partir de los números triangulares

Hay un tipo de problemas que se puede resolver, rápidamente, utilizando un proceso inductivo (Cañadas y Castro, 2014), conociendo los números triangulares y el término general de la sucesión que forman. Por ejemplo:

> Si se dibujan n puntos en un círculo y se unen con líneas rectas de todas las formas posibles, ¿cuántos segmentos se trazan? (La figura 6 muestra cómo quedaría unidos 13 puntos en un círculo).

Siguiendo el razonamiento inductivo, comenzando con dos puntos y aumentando progresivamente el número de estos, se obtiene la tabla 2 que relaciona el número de puntos tomados en el círculo con el número de segmentos obtenidos.

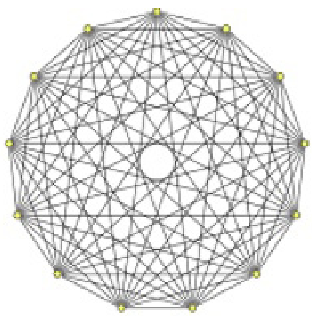


Figura 6. Unión de trece puntos en un círculo

Tabla 2. Puntos y segmentos

Puntos	Segmentos
2	1
3	3
4	6
5	10
n	$\frac{1}{2}n(n-1)$

De este mismo tipo son los siguientes problemas:

> Una clase de 20 niños, el primer día después de las vacaciones, se saludan dándose la mano todos entre sí, ¿Cuántos apretones de mano se han dado?

Tanto los objetos a unir como los contextos del problema pueden variar. Así pueden ser felicitaciones de Navidad entre un grupo cerrado de personas, un conjunto de pueblos los cuales se quieren unir por carretera de todas las formas posibles, etc.

Otros problemas a los que se les puede encontrar solución mediante el uso de los números triangulares son:

- En un conjunto de n números consecutivos, ¿cuántos subconjuntos contienen sólo números consecutivos?
- En una secuencia de números, ¿cuántas formas hay de insertar un par de corchetes?
- En una trama rectangular de dimensiones $m \times n$, ¿cuántos rectángulos se ven?

Conclusión

Actualmente se considera la actividad matemática como el dominio del razonamiento sobre los objetos y sus relaciones. Esto obliga a que la enseñanza de las matemáticas deba tener entre sus prioridades fomentar las generalizaciones y las acciones asociadas a las mismas, como son la justificación de la generalización, así como su expresión en lenguaje matemático. En esta actividad, el papel de los patrones como herramientas pedagógicas no puede pasarse por alto. Los patrones que hemos presentado anteriormente son considerados pruebas de las generalizaciones que presentan. Permiten demostrar una propiedad matemática a partir de una colección finita de formas. Explorar este tipo de patrones lleva a encontrar una relación entre los distintos elementos de la secuencia y su posición en la misma. Esta relación se puede utilizar para hacer una generalización, para generar elementos en otras posiciones (Barbosa & Vale, 2015), algunos de ellos ocultos en la sucesión. Las tareas en las que intervienen patrones pueden ser un poderoso vehículo para la comprensión de las relaciones entre las cantidades que subyacen en dichos patrones, contribuyendo así a la creación de relaciones de tipo funcional (Warren, 2005).

Los patrones asociados a los números poligonales pueden trabajarse en todas los niveles educativos. En infantil y primeros cursos de primaria mediante material manipulativo como aparece en la figura 7. Posteriormente, mediante las representaciones puntuales y llegando hasta obtener el término general de los más familiares. Un conocimiento de los números triangulares como se tiene de los cuadrados puede ayudar a los estudiantes a resolver problemas sencillos como los propuestos, antes de conocer la combinatoria.

Figura 7. Representación de números triangulares y cuadrados con cubos encajables

Referencias

Barbosa, A. y Vale, I. (2015). Visualization in pattern generalization: Potential and Challenges. *Journal of the European Teacher Education Network. 10*(57-70).

Cañadas, C. y Castro E. (2004). Razonamiento Inductivo de 12 alumnos de secundaria en la resolución de un problema matemático. En E. Castro y E. De la Torre, (eds.). *Octavo Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática. Investigación en Educación Matemática* (pp. 173-182). La Coruña.

Castro, E. (1995). *Exploración de Patrones Numéricos mediante Configuraciones Puntuales*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Devlin, K. (1994). *Mathematics: the science of patterns. The search for order in life, mind and the universe*. New York: Scientific American Library.

Guerrero, L., y Rivera A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (24th, Athens, Georgia, October 26-29), 1-4. 262-272.

Goldin, G.A. (2002) Connecting Understandings from Mathematics and Mathematics Education Research. In A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 161-166). Norwich, England: Program Committee.

Joseph, G.G. (2000). *The crest of the peacock: Non-European roots of mathematics*. (2nd ed.). London: Penguin.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on learning problems in mathematics, 26*(3), 24-42.

Mason, J.G.A. y Johnston-Wilder, S. (2005) *Developing Thinking in Algebra*. London, UK: The Open University.

Mulligan, J. (2010). *Reconceptualising early mathematics learning*. Consultado el 03/04/2017 en http://research.acer.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1075&context=research_conference

Orton, A. (1999). *Pattern in Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassel.

Papic, M., y Mulligan, J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. *In The Proceedings of the 28th Mathematical Education Research Group of Australasia Conference* (pp. 609-616).

PRESMEG, N.C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. *Handbook of research on the psychology of mathematics education*, (pp. 205-235).

RIVERA, F.D., y BECKER, J. R. (2008). *Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. ZDM, 40*(1), 65-82.

STEEN, L.A. (1988). The Science of Patterns. *Science 240* (pp. 611-616).

STEEN, L.A. (1998). Reflections on Mathematical Patterns, Relationships, and Functions. *Prepared for the Minnesota K-12 Mathematics Framework, SciMath-MN*. Minnesota Department of Children, Families, and Learning.

WARREN, E. (2005). Young children's ability to generalise the pattern rule for growing patterns. *In Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4* (pp. 305-312).

ZAZKIS R., y LILJEDAHL P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational studies in mathematics, 49*(3), 379-402.

Poliedros Modulares

Modulars polyhedres

Pablo Flores Martínez
Universidad de Granada

Resumen

La geometría tridimensional resulta difícil pero muy plástica. Identificar poliedros, construirlos mediante objetos sencillos y analizar nuevas formas de construcción, es una práctica importante para su aprendizaje. Este artículo presenta una actividad consistente en examinar poliedros construidos mediante materiales sencillos, fácilmente trasladables a las aulas, para desarrollar el sentido espacial de los alumnos. El estudio de los poliedros se realiza en tres etapas: a) identificar poliedros en figuras, b) construir poliedros con objetos simples, y c) analizar las cualidades de los módulos, examinando cómo cambiar las características de los módulos para obtener nuevos poliedros. Tras recopilar diversas fuentes y recursos, nos decantamos por el plástico, material fácil para el profesor. Con estas atendemos dos dimensiones del sentido espacial: características y propiedades geométricas de poliedros y habilidades de visualización.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, sentido espacial, poliedros, recursos

Abstract

3D geometry seems very difficult but extremely malleable. Identifying polyhedra, building them by using simple objects as well as analyzing new ways of construction, is an important practice for its learning. This article presents an activity aimed at developing students' spatial sense. The activity consists in examining modular polyhedra built from simple materials, which are easily transferable to classrooms. The study of polyhedra is done in three stages: a) Identifying polyhedra embedded in objects; b) building polyhedra with simple objects, and c) analyzing the features of the modules, examinining how to change the characteristics of the modules to obtain new polyhedra. After collecting several sources and resources, we opted for plastic, accessible material for teachers. With all of this we explore two dimensions of spatial sense: characteristics and properties of polyhedra and visualization skills.

Keywords: Education, Mathematics, Spatial sense, polyhedra, resources.

Introducción

La divulgación matemática ha estado presente en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, y a ella ha colaborado de manera patente los homenajeados por este libro, Francisco Fernández y Francisco Ruiz. En recuerdo de las numerosas experiencias compartidas, he aprovechado un campo en el que "Paco Ruiz" ha sido un estudioso, los poliedros, para hacer una recopilación y avance que se centran en la construcción y el estudio de poliedros que puedan realizarse a partir de elementos simples. Siguiendo su ejemplo, he continuado la recopilación de poliedros construidos con objetos familiares. La búsqueda en la red ha facilitado el acceso para ampliar lo que ya es conocido y expuesto en el seminario del departamento. Paco me hizo conocer creadores, artistas plásticos que conjugaban el arte y la matemática. En este artículo difundo varios artistas menos conocidos que contribuyen a esta idea, artistas que tienen un gran sentido espacial. El artículo comienza presentando algunos poliedros originales, formados con materiales fáciles. Posteriormente presenta un taller para la construcción y estudio de poliedros modulares, construidos a partir de una figura que puede hacerse en materiales sencillos, cartón o plástico.

Poliedros originales

En el seminario del departamento están presentes desde hace tiempo los poliedros construidos a partir de diversos materiales. Los modelos en plástico y madera, se vieron ampliados con troquelados en cartón, varillas con engarces, piezas de Polydron y, más recientemente, los formados por imanes. Paco tenía siempre en su despacho poliedros construidos con cartulina, que aún se conservan en el expositor, así como los formados por papel plegado (figura 1).

Un descubrimiento interesante fueron los poliedros articulados (figura 2), que cambian de forma, apreciándose poliedros diferentes según estén cerrados o abiertos. Estudiar qué poliedro aparece en posición de reposo o en su "explosión" es una tarea interesante que obliga a poner en juego diversas componentes del sentido espacial, como el manejo de formas geométricas y habilidades como la constancia de la percepción de figuras.

Figura 1. Poliedros en Departamento

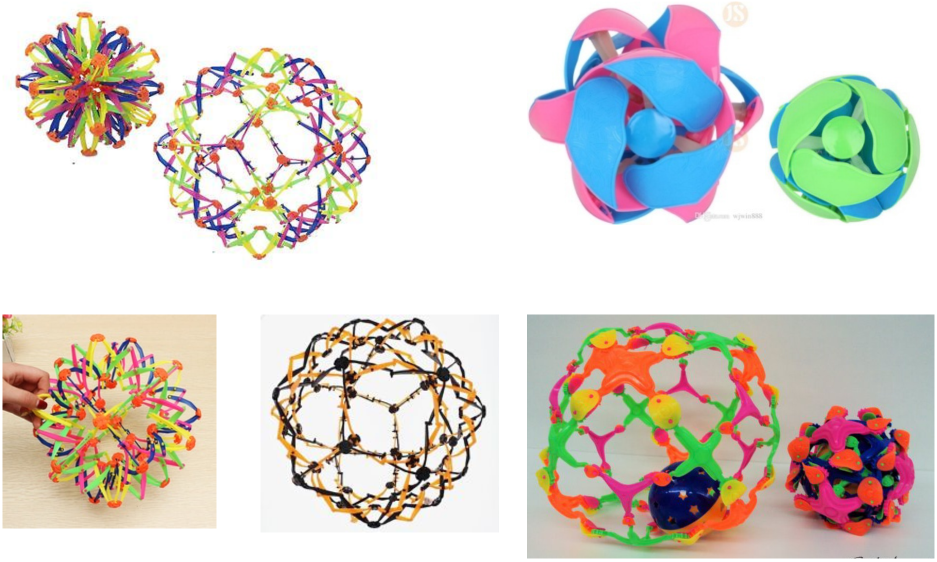


Figura 2. Poliedros articulados

Muchos poliedros originales se encuentran en la red. Muchos poliedros originales se pueden encontrar en internet. En la figura 3 aparecen poliedros formados por tijeras, clips (del escultor Viktor Genel[1]), piezas y monedas, naipes doblados, piezas de madera, entre otros. Todos ellos constituyen aportes novedosos que se prestan a ser examinados para identificar cualidades que no resultan evidentes.

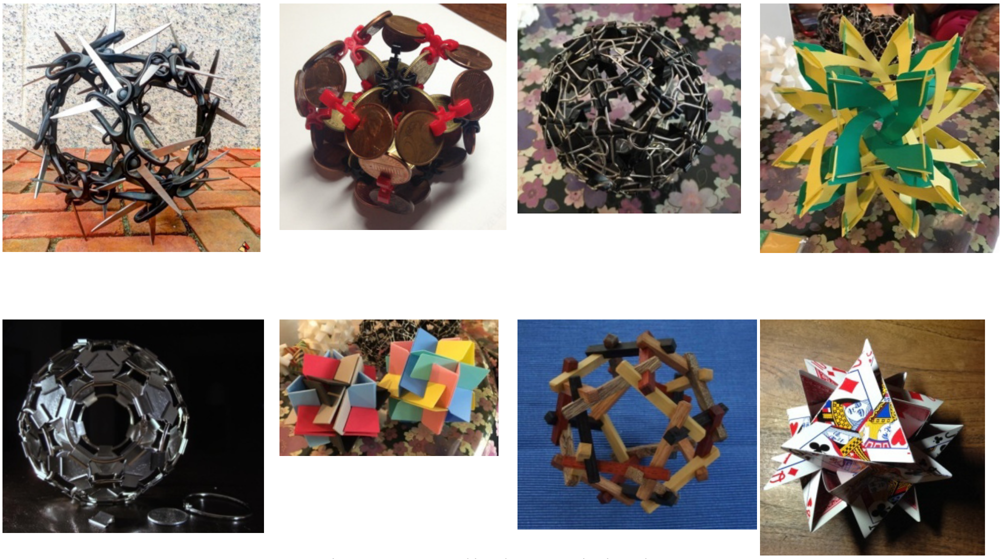


Figura 3. Poliedros originales

Taller de estudio y construcción de poliedros

Tanto en la figura 2 como en la 3 aparecen poliedros, generalmente mostrados a partir de su esqueleto (las aristas). Examinar qué poliedro forman estas aristas requiere disponer o contribuir a desarrollar el sentido espacial (Flores, Ramírez y Del Río, 2015). Para poder identificarlos hay que poner en marcha los conocimientos geométricos para identificar elementos de los poliedros reflejados en las figuras, lo que supone recordar sus cualidades, nombres, etc. Pero también se ponen en juego habilidades

[1] https://www.facebook.com/viktor.genel

de visualización (Del Grande, 1990), especialmente dos coordinadas, la percepción figura-contexto y la percepción de relaciones espaciales. La primera ayuda a seleccionar los elementos que pueden formar el poliedro en el contexto de la figura completa. La percepción de las relaciones espaciales se requiere para identificar cualidades del poliedro que se reflejan en estos elementos (paralelismo de aristas, orden de los vértices, etc.). Para desarrollar el sentido espacial se requiere estimular la realización de estas identificaciones, ponerlas en común, atender a identificaciones que realicen otros compañeros y examinar todas las posibles. Es por esto que consideramos que la tarea de identificación de poliedros sobre elementos plásticos es una tarea matemática especialmente adecuada para realizar en un taller. Describimos a continuación las tareas que se afrontarían en un taller de geometría, que pretende desarrollar el sentido espacial.

Examinar poliedros

Para examinar y valorar si aparece un poliedro en una figura que lo sugiere deberemos basarnos en identificar sus elementos, seleccionando los vértices y aristas, para luego contar el orden de cada vértice y abstraer los elementos que se pueden considerar aristas. El ejemplo de la figura 4, formado por módulos en forma de estrella de 5 y 6 puntas (círculos en los que se ha cortado un radio, para producir el enlace entre módulos), parece estar formado por caras pentagonales y hexagonales. Si nos fijamos en el poliedro resultante encontraremos que cada círculo del polígono conecta sólo con otro círculo del polígono adyacente, con lo que tendríamos vértices de orden 1, lo que no es posible. Tenemos entonces que cambiar nuestra mirada y apreciar que sólo si consideramos el centro de la estrella pentagonal/hexagonal como vértice, de orden 5 y 6, podemos interpretar la figura como un esqueleto del poliedro, en el que los brazos de los módulos son mitades de aristas. De esta forma veremos que tenemos un icosaedro truncado.

Observemos que para llegar a esta consideración hemos tenido que prescindir de la anchura de las aristas, de la materialización tan burda de los vértices (no son puntos, sino formas en las que intuimos el centro geométrico como vértice), y de que las aristas no son planas, sino circunferencias máximas, lo que le da el aspecto de figura redonda (lo que es

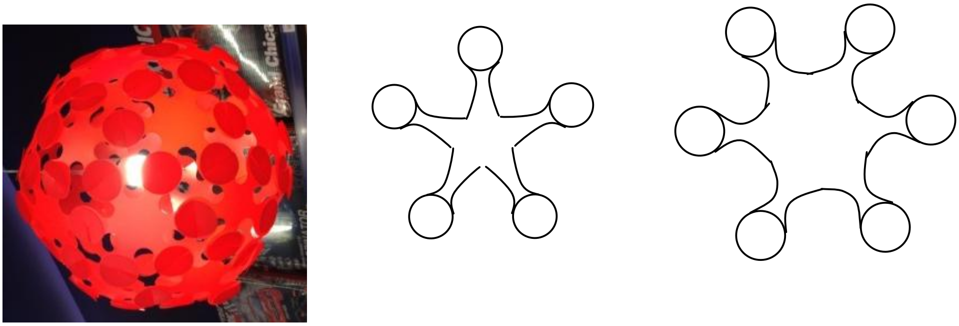


Figura 4. Poliedro y módulos

familiar, ya que el icosaedro truncado es uno de los modelos en los que se ha basado el diseño tradicional de los balones de fútbol).

Un ejemplo claro de esta dificultad de identificación es el que sucede al buscar es el poliedro que se refleja en la figura 5 (lámpara IQLight*[2]). La lámpara está formada por piezas plásticas que sugieren un paralelogramo, pero que finalmente se convierten en rombos, como se aprecia en la figura 5. La forma básica de este poliedro es una pieza con perímetro curvo, aunque lo que interesa es la forma que se determina entre los puntos de contacto, que forman un rombo.

En su página web informan que la lámpara IQlight® system fue creada en 1973 por el diseñador danés Holger Strøm, quien ha diseñado diversos materiales a partir de cartón corrugado (empaquetamientos, sistemas para las exposiciones, muebles y juguetes). La pieza de la lámpara está realizada en plástico con cierta rigidez, aunque permite que pueda alabearse.

Identificar este poliedro es un ejercicio interesante. Una primera mirada nos lleva a apreciar rombos unidos por vértices de orden 3 y 5, formando un Triacontaedro rómbico (Guillén, 1997). Este poliedro es un sólido de Catalán dual del icosidodecaedro, un zonoedro con un ángulo agudo de 63,43°.

[2] Lámpara IQLight*, www.iqlight.com

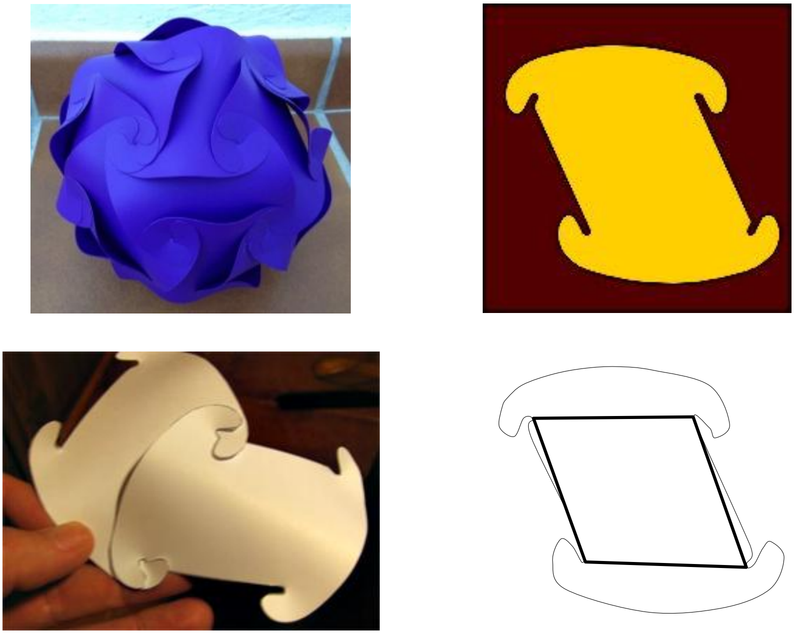


Figura 5. Lámpara IQLight*

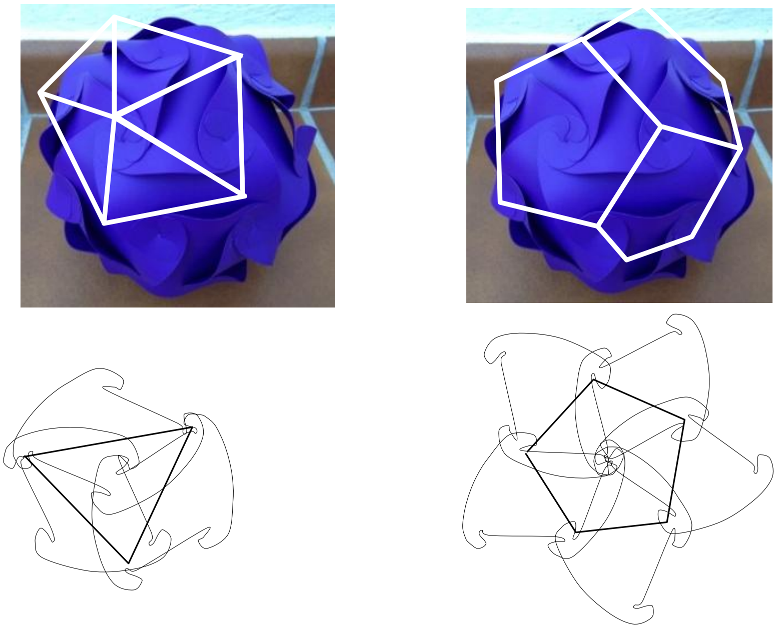


Figura 6. Icosaedro y dodecaedro

Podemos apreciar otros poliedros si nos fijamos solamente en los 12 vértices de orden 5, en el que concurren 5 medios rombos (triángulos), formando un icosaedro. O bien fijarnos en los 20 vértices de orden 3, que forman el dodecaedro (figura 6).

Construir poliedros

La versatilidad de las piezas de IQLight nos anima a construir otros poliedros. Ya en la publicidad del producto aparecen una serie de construcciones, con una cantidad de piezas que van desde 9 hasta 120. En la página web de este producto aparecen elementos geométricos, señalando tanto los poliedros platónicos, como los arquimedianos. Sin embargo no aparece la relación que la lámpara guarda con estos poliedros. Lo que interesa especialmente en el folleto que acompaña a la lámpara es la codificación que permite al constructor generar cada una de las formas que se indican.

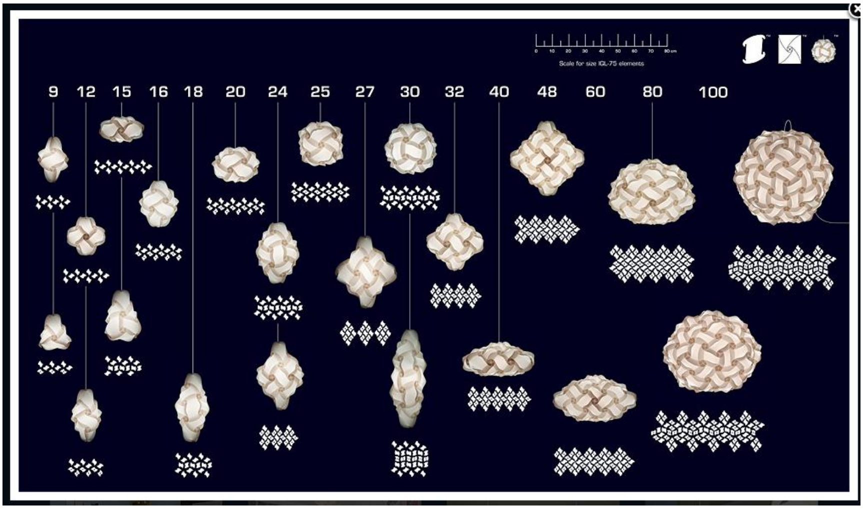


Figura 7. Otras formas con las piezas y esquemas de colocación de los módulos[3]

[3] http://www.iqlight.com/gallery.php

La primera construcción que nos sugiere es la de otros poliedros regulares. La visión en fotografía nos anima a pensar que entre estas formas aparecen nuevos poliedros regulares. Tiene que ser la construcción física la que nos permita apreciar estas posibilidades.

Figura 8. Tetraedro regular y Octaedro regular

Efectivamente con 6 piezas se forma un tetraedro, en el que el triángulo equilátero de cada cara está formado por tres triángulos medios rombos, los que resultan de dividir el rombo por la diagonal larga. Para ello cada cara tiene en su centro un vértice de orden 3, en el que se juntan los tres vértices de los rombos. Para hacer el tetraedro se requiere una deformación de la pieza, doblándose justamente por la diagonal larga.

También se puede formar el octaedro juntando los mismos triángulos anteriores, necesitando 12 piezas. En el octaedro, los 8 triángulos que forman sus caras están formados por tres medios rombos, que guardan en su centro un vértice de orden 3.

La duda que surge es si podrá formarse el cubo, con lo que se formarían todos los poliedros regulares. Para lograrlo tenemos hay que generar caras cuadradas, haciendo recopilación de lo obtenido hasta ahora, estudiando cómo se forman las caras de los poliedros regulares. En la figura 9 se puede apreciar que los triángulos se forman por tres triángulos obtusángulos, mitades del rombo obtenidos por la diagonal grande. El pentágono se forma por la unión de cinco triángulos acutángulos, mitades del rombo por la diagonal corta. Naturalmente si los ángulos obtusos de los rombos tienen aproximadamente 120º, los cinco triángulos (de casi 60º) no pueden cubrir el plano para sobre ellos formar el pentágono, sino que forman una pirámide pentagonal, con lo que el dodecaedro será estrellado. Usando esta misma técnica, se podría intentar construir un cubo, mediante los cuatro medios rombos acutángulos, formando una pirámide cuadrada en cada cara del cubo. La realización con las piezas (originales o con diferente grado de flexibilidad), muestra que el supuesto "cubo estrellado" que aparece es el que hemos llamado octaedro, pues los vértices en los que concurren los cuatro ángulos agudos sobresale especialmente sobre los vértices de orden tres en que concurren los ángulos obtusos, no dejando ver los supuestos vértices del cubo. La dualidad que apreciábamos entre icosaedro y dodecaedro, en este caso nos lleva también a tener que ver el cubo y el octaedro sobre la misma figura.

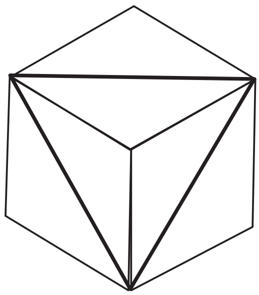
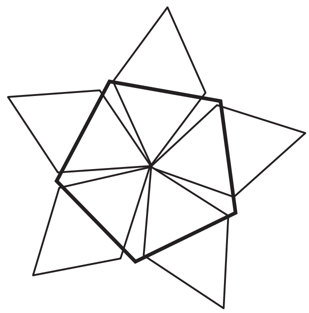


Figura 9. Icosaedro, tetraedro y octaedro



Dodecaedro

Una supuesta alternativa consiste en juntar cuatro triángulos obtusángulos para formar cada cara del cubo, dejando los acutángulos para formar los vértices, con un orden tres. El problema en este caso es que la suma de los cuatro ángulos obtusos supera los 360º, produciendo, teóricamente, un poliedro cóncavo en la confluencia de los centros de sus caras. En la práctica, comprobado tanto con las piezas originales de la lámpara, como con otros materiales, resulta imposible hacer concurrir cuatro triángulos obtusángulos en un vértice. Como vemos, el estudio debe continuar examinando la pieza, estudiando las posibilidades que presenta el material utilizado, cambiando este material o la forma de piezas.

Estudio de las piezas

La pieza tiene una forma mixta, con dos partes curvas, que corresponden a la parte que abrazará a otra pieza, y 4 segmentos, aparentemente iguales dos a dos. Para estudiar la pieza la hemos importado en Geogebra y hemos identificado con cierto nivel de precisión los puntos en los que unas piezas encajan con otras. Así se ha determinado el cuadrilátero (GIJL) que forman estos puntos, así como el hexágono (GHIJKL) en que está integrado.

Geogebra nos ha suministrado unas medidas de ángulos y distancias que nos hacen pensar que detrás de esta figura hay un rombo (una diferencia de 6 y 2 mm en el dibujo nos hace achacarlo a la identificación de los puntos, más que al diseño de la pieza), con ángulos de aproximadamente 68º y 112º, respectivamente.

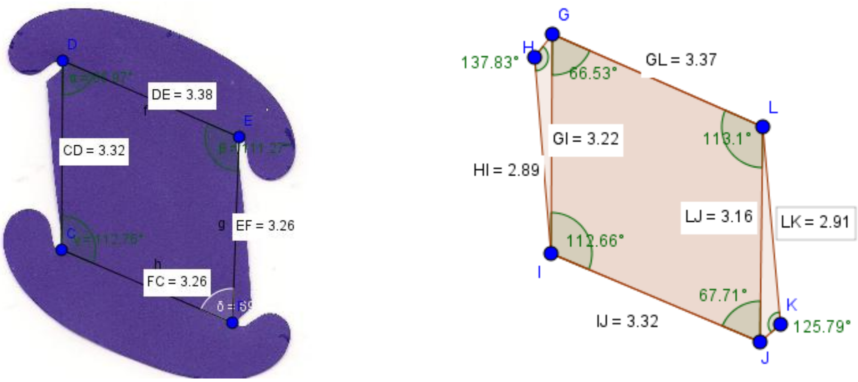


Figura 10. La pieza

Figura 11. Tres piezas

Los datos empíricos nos hacen presumir que los cuadriláteros son rombos, próximos al doble triángulo equilátero, aunque no hay ángulos de 60º y 120º. En la figura 11 vemos tres piezas unidas por los ángulos obtusos, en la que comprobamos que encajan las aristas (la que abraza y la que recibe), confirmándonos que el polígono central se aproxima al rombo, pero también que las tres piezas no generan una pieza plana.

Ya podemos afirmar que el efecto alabeado de la lámpara se consigue debido a tres circunstancias: que los ángulos suman menos de 360º, que existen lados pequeños que transforma el rombo en un hexágono interior y la inclinación de los planos de dos piezas contiguas.

El estudio nos ha permitido apreciar que las dimensiones la pieza deben estar en consonancia con las pretensiones de construcción. Haría falta estudios de materiales para comprender la medida que se le ha dado a los segmentos del hexágono, y su relación con el material empleado, para favorecer que las piezas no se salgan en el poliedro de 30 caras, y la versatilidad que presenta para figuras de mayor número de lados. Esto nos permitiría comprender sus limitaciones, por ejemplo para construir el cubo.

Cierre

Este trabajo muestra la riqueza de aspectos que pueden desarrollarse profundizando sobre algo tan aparentemente sencillo como la construcción de poliedros. Se abren muchas vías de indagación, como estudiar qué cambios podemos hacer en la pieza para construir todos los poliedros regulares. Pero también nos queda pendiente examinar qué otros poliedros se identifican en las otras lámparas del catálogo, qué poliedros arquimedianos se aprecian, por ejemplo. Estamos seguros de que Francisco Ruiz y Francisco Fernández nos ayudarían y disfrutarían en este estudio.

Referencias

Del Grande, J. J. (1990). Spatial sense. *Arithmetic teacher, 37* (6), 14-20.

Flores, P., Ramírez, R., del Río, A. (2015). Sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*, (pp. 127-145). Madrid, Pirámide.

Guillén, G. (1997). *Poliedros.* Madrid, Síntesis.

Strøm, H. (1973) *IQlight® system*. www.iqlight.com

Oh tú que indicas tan bien las horas, ¿cuántas han pasado desde esta mañana? Problemas descriptivos de fracciones[1]

Oh you who indicate the hours so well, how many hours have passed since this morning? Descriptive problems of fractions

Bernardo Gómez y Luis Puig
Universitat de València

Resumen

Se presenta un estudio sobre los problemas descriptivos de fracciones. Son problemas verbales de larga tradición histórica que han tenido gran importancia en el desarrollo del pensamiento aritmético. El objetivo de este trabajo es contribuir a recuperar estos problemas desde una perspectiva global, dando cuenta de sus enunciados, métodos de resolución y las lecturas analíticas que ha transmitido la tradición escolar.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, fracciones, problemas, métodos

Abstract

This paper presents a study about descriptive word problems of fractions. They are word problems of long historic tradition that have had great importance in

[1] Este trabajo ha contado con el apoyo de los proyectos concedidos por el Ministerio de Economía y Competitividad de España (EDU2015-69731-R, MINECO / FEDER) y la Conselleria d'Educació, Investigació, Cultura i Esport de la Generalitat Valenciana (GVPROMETEO2016-143).

the development of the arithmetical thought. The aim of this work is to contribute to recover these problems from a global perspective, giving an account of their statements, methods of resolution and the analytical readings that the school tradition has transmitted.

Keywords: didactics, mathematics, fractions, problems, methods

Introducción

Las fracciones son uno de los contenidos matemáticos más difíciles tanto para niños como para maestros (Kieren, 1988; Figueras, 1988; Charalambos y Pitta-Pantazi, 2007; Castro, Pitta-Pantazi, Rico y Gómez, 2016).

En un reciente estudio, Nicolaou y Pitta-Pantazi (2015) consideraron que la comprensión de las fracciones se sustenta en siete habilidades, una de ellas es la reflexión durante la resolución de problemas.

Sin embargo, hay una tradición de enseñanza de los problemas en la que éstos se han usado, no para la reflexión, sino al estilo de ejercicio y práctica para consolidar o aplicar los conocimientos adquiridos previamente.

Una manera de favorecer esta reflexión es estudiar los métodos de resolución de los problemas que han quedado reflejados en los libros de texto históricos. Estos métodos son valiosos porque son los razonamientos que los grandes matemáticos del pasado han transmitido y, como tales, pueden ayudar a los alumnos a descubrir que ha habido distintas maneras de pensar los problemas, todas útiles para producir conocimiento matemático significativo y de calidad.

Problemas descriptivos

En la tradición de enseñanza de las matemáticas escolares hay una amplia variedad de problemas verbales. Muchos de ellos son descriptivos (usando la terminología de Swetz, 2014), esto es, problemas en cuyo enunciado se describe una situación o se narra una historieta pseudorealista que no pretende dar respuesta a ninguna situación verdaderamente práctica, sino despertar la curiosidad y ejercitar el ingenio y el razonamiento matemático.

Son problemas cuyos antecedentes se remontan a las antiguas culturas matemáticas, anteriores a la era Cristiana, y que desde entonces han sido parte esencial del contenido de los libros de aritmética e incluso de álgebra elemental.

Ejemplos de estos problemas se pueden encontrar en el Jiuzhang Suanshu de la matemática china, más conocido como *Los nueve capítulos del arte matemático* (100 d. C.), en los antiguos textos de la matemática hindú, como por ejemplo en el *Līlāvatī* de Bhaskara o Bhāskārācāryā (1150 d. C.) y en las primeras colecciones de la Europa medieval como es el caso de la *Antología griega* (s. V.), el *De Arithmeticis Propositionibus* de Beda (641 d. C.) o las *Propositiones ad acuendos juvenes* de Alcuino (735-804 d. C.)[2]. En occidente, estos problemas comenzaron a conocerse gracias a la matemática islámica a través de textos como el *Liber abaci* de Fibonacci (1202)[3].

Tras la introducción de la imprenta, se produce una eclosión de aritméticas y álgebras impresas que incorporan problemas descriptivos a menudo a modo de miscelánea. Es el caso, por ejemplo, de la *Conpusición de la Arte de la Arismética* de Ortega (1512)[4,] el *Ars Arithmetica* de Silíceo

[2] Los textos latinos de Beda y Alcuino están recogidos en los tomos 90 y 101 de la monumental recopilación de textos latinos editada por Jacques-Paul Migne con el título *Patrologiae cursus completus, sive Bibliotheca universalis, integra, uniformis, commoda, oeconomica omnium s. s. Patrum, doctorum scriptorumque ecclesiasticorum qui ab aevo apostolico ad usque Innocenti III tempora floruerunt* (Migne, Ed., 1850 y 1863, respectivamente). Del texto de Alcuino hay traducciones al inglés y al italiano, que conozcamos.

[3] Leonardo de Pisa, llamado Fibonacci, escribió una segunda versión del *Liber Abaci* en 1228. La edición crítica canónica del texto en latín del *Liber Abaci* es la de Baldassarre Boncompagni, basada en un único manuscrito de la versión de 1228 (Boncompagni, 1857). Hay una traducción inglesa hecha a partir de ella por Sigler publicada recientemente (Sigler, 2002). Actualmente hay en curso una edición crítica dirigida por Giuseppe Germano que tomará en cuenta los seis manuscritos en que se conserva el texto completo, y otros en que se conserva parcialmente.

[4] Ortega publicó en 1512 en Lyon, la *Conpusición de la arte de la arismética y juntamente de Geometría* y la reeditó con el nombre de *Tratado subtilissimo*, en Sevilla en 1534, 1537, 1542 y 1552, y en Granada en 1563. Además publicó una edición en francés y otra en italiano, ambas en 1515.

(1513), la *Arithmetica práctica y especulativa* de Pérez de Moya (1562) o la *Arithmetica Algebratica* de Aurel (1552).

A mediados del siglo XVII, estos problemas se incorporan a los primeros textos de matemáticas recreativas, como por ejemplo las Récreations Mathématiques de Ozanam (1692)[5], de Vinot (1860) o de Rouse Ball (1902).

En el siglo XX, todavía es posible encontrar algunos de estos problemas en las colecciones que aparecen en los libros dedicados específicamente a presentar problemas resueltos de aritmética y álgebra elemental, como por ejemplo los "Solucionarios" de las famosas "Aritméticas razonadas" de las editoriales Dalmau y Bruño múltiples veces reeditadas a lo largo del siglo XX.

Los enunciados de estos problemas han evolucionado a lo largo del tiempo adaptándose a los cambios sociales pero, conservando su contenido matemático, han llegado a estandarizarse bajo una determinada forma que actúa como modelo, problema tipo o estereotipo.

En los libros de texto antiguos los problemas descriptivos no aparecen bajo un epígrafe común, sino que aparecen dispersos bajo diferentes epígrafes relacionados ya sea con el método o regla, o bien, con los aspectos superficiales: contextos, acciones o agentes.

Esta manera de presentar los problemas descriptivos, si bien permite reconocerlos, no ofrece una visión global o de conjunto de los mismos.

Objetivo general y específico

A fecha de hoy, a diferencia de lo que ocurre con los problemas aditivos y en parte con los multiplicativos con números naturales, no se dis-

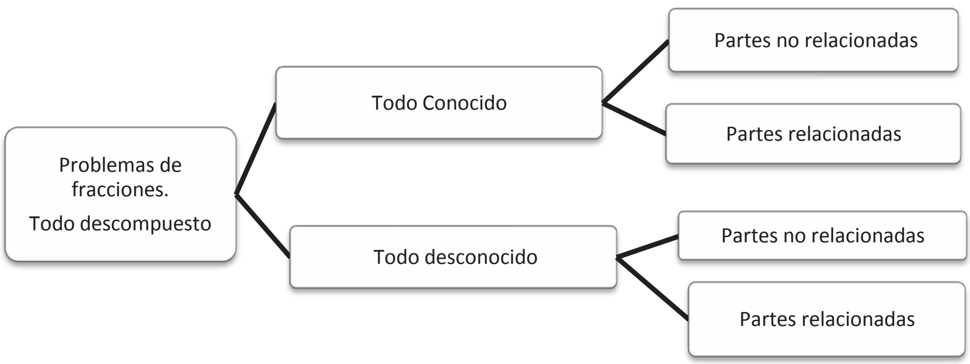
[5] Las *Récreations Mathématiques* de Jacques Ozanam (1640-1717) se publicaron en 1692, pero la edición más conocida es la que realizó en 1778 Jean Etienne Montucla (1725-1799) con algunos añadidos. Montucla era a la sazón Censor Real de Matemáticas, por lo que se envió a sí mismo el texto para autorizarlo, bajo el nombre de M. de C.G.F. En 1803, se publicó en Londres una traducción al inglés de esta edición de Montucla del texto de Ozanam debida a Charles Hutton con notables añadidos, y otra posterior en 1814 de nuevo ampliada.

pone de una clasificación de los problemas de fracciones suficientemente aceptada por la comunidad científica, es por tanto un objetivo general de investigación que sigue abierto.

Este objetivo está ligado al de estudiar los problemas con fracciones por tipos, en vez de hacerlo uno a uno aisladamente, logrando de este modo contribuir a poner orden, claridad y generalidad metodológica para efectos de la enseñanza.

Para clasificar problemas, la literatura existente muestra tres enfoques principales: la estructura matemática, las características sintácticas y las características semánticas. En este trabajo se fija la atención en la estructura de los problemas descriptivos de fracciones en los que se identifican como variables "el todo", que puede ser conocido o no, y las partes, que pueden guardan relación entre sí o no (para más detalle ver Gómez et al., 2016).

El esquema 1 muestra la organización general de estos problemas:



Esquema 1. Organización de los problemas descriptivos de fracciones

Debido a las limitaciones de espacio de este capítulo y a su título ilustrativo, aquí se muestra el estudio de un tipo de problemas descriptivos de fracciones. Concretamente el tipo de problemas en el que el todo conocido se divide en dos partes de las cuales se conoce la suma de las partes y la razón entre ellas.

La metodología que sustenta el estudio se basa el análisis de textos históricos (para más detalle ver Gómez, 2011) tomando como subunidad de análisis las lecturas analíticas que los autores han dejado reflejadas en los mismos.

La lectura analítica de un problema, que por su origen suele vincularse al método cartesiano, se ha entendido a menudo como la traducción del enunciado del problema al lenguaje simbólico algebraico.

Una interpretación más precisa es la que entiende por lectura analítica del enunciado de un problema la lectura que, en primer lugar, lo transforma en una lista de cantidades y de relaciones entre cantidades, para dar lugar a partir de esas cantidades y relaciones a una ecuación, a una fórmula o incluso a una regla.

El problema tipo

La *Antología griega*[6] es una recopilación de poemas, en su mayoría epigramas, reunida en quince libros, que contiene material procedente de dos antologías, la Antología palatina, llamada así por el códice del siglo X en que nos ha llegado, y la *Antología* de Planudes, que es del siglo XIV. El material es de diversas épocas y diversos autores, a menudo desconocidos, y en el libro *XIV*, que contiene 150 epigramas, hay 45 que son problemas aritméticos. No se sabe con certeza cuál es el origen de todos los problemas, pero la mayoría se suelen atribuir a Metrodoro (491-527, d.C) porque así aparecen en el códice palatino los 31 epigramas que van del 116 a 146, aunque puede que Metrodoro no fuera su autor, sino que sólo los recopilara. Hay otro epigrama, el número 1, que el códice palatino atribuye a un Sócrates, del que sólo se sabe que Diógenes Laercio lo cita como un epigramista. El resto aparecen en un códice sin atribución, y tanto hay ar-

[6] Hay varias ediciones críticas. Nosotros hemos utilizado tres de ellas, una del siglo XIX hecha por Fr. Jacobs, que lleva el texto en francés (Jacobs, 1863), y dos del siglo XX: la bilingüe en griego e inglés, editada y traducida por W. R. Paton, de la Loeb Classical Library (Paton, 1918), y la bilingüe en griego y francés, editada y traducida por Félix Buffière para la Collection des Universités de France de la editorial Les Belles Lettres (Buffière, 1970).

gumentos a favor de que sean de Metrodoro como de Sócrates o quizá de ambos. Finalmente, hay un epigrama, el 147, que proviene de la *Disputa entre Hesíodo y Homero*, un texto anónimo compuesto hacia el siglo *II*. Gran parte de estos epigramas se pueden encontrar también en libros de matemáticas recreativas posteriores como los de Ozanam y Rouse Ball.

El enunciado de uno de los atribuidos a Metrodoro, que figura en la *Antología griega* con el número 6 es, en la versión de Jacobs, el siguiente:

> Oh tú que indicas tan bien las horas, ¿cuántas han pasado desde esta mañana? Quedan dos veces los dos tercios de las horas que ya han pasado (Jacobs, 1863, p. 42).

La estructura del problema atiende a un todo conocido, la duración del día, que se ha descompuesto en dos partes una de las cuales es una fracción conocida de la otra.

Jacobs no muestra el razonamiento que sustenta la resolución del problema, aunque da una comprobación del resultado en los siguientes términos:

> Horas pasadas $5\ \frac{1}{7}$, quedan $6\ \frac{6}{7}$: total 12. En efecto, $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$, 6h + $\frac{6}{7}$ o $\frac{36}{7}$ de hora + $\frac{4}{3} = \frac{144}{21}$ de hora, o 6h $\frac{18}{21}$ o $\frac{6}{7}$ (Op. cit. 1863, p. 42)

La manera en que se expresa Jacobs no es académicamente admisible a nuestros ojos de hoy, aun así es posible reconstruir algunos de sus datos: $\frac{4}{3}$ es la forma simbólica de la fracción verbal “dos veces los dos tercios”, $\frac{36}{7}$ de hora es la reducción a fracción impropia del número mixto $5\frac{1}{7}$ de hora y $\frac{144}{21}$ son los $\frac{4}{3}$ de $\frac{36}{7}$ hora. Lo que parece hacer Jacobs es comprobar que los $\frac{4}{3}$ de $5\ \frac{1}{7}$ de hora son las $6\ \frac{6}{7}$ h, que en total son las 12 horas del día.

Esta falta de explicación del método de resolución se reproduce en el texto de Ozanam, que en la edición de Montucla (1778) se limita a aclarar el enunciado del problema:

> Dividiendo la duración del día, como hacían los antiguos, en 12 partes, la cuestión se reduce a partir ese número en dos partes, tales que los $\frac{4}{3}$ de la primera sean iguales a la segunda, lo que da, para el número de horas que han pasado $5\frac{1}{7}$, consecuentemente, para el resto de día, 6 horas y $\frac{6}{7}$ (Ozanam, 1778, p. 192).

El mismo problema lo recoge Rouse Ball (1992), quien sí que razona la resolución y lo hace como sigue:

> Las horas que han pasado + las horas que faltan dan las 12 horas. Las horas que faltan valen los $\frac{4}{3}$ de las horas que han pasado. Luego los $\frac{7}{3}$ de las horas que han pasado valen 12. Horas pasadas = $12 \times \frac{3}{7} = 5\text{h}\ \frac{1}{7}$, horas que faltan $6\text{h}\ \frac{6}{7}$. (Rouse Ball, 1992, p. 126).

Las condiciones del problema son: Las 12 horas del día se descomponen en dos partes: las horas que faltan, b, y las horas que han pasado, a. La relación entre las partes es: $b = \frac{4}{3}$ de a y la suma de las partes $a+b=12$

La lectura analítica se sigue de los siguientes pasos: la parte a es el referente de la fracción; es decir, es la unidad que se fracciona, por lo tanto b es 1 o $\frac{3}{3}$. En consecuencia, la suma de las partes $a+b$ es $a+\frac{4}{3}a = \frac{3}{3}+\frac{4}{3}$ de a, que es $\frac{7}{3}$ de a. Es decir $12= \frac{7}{3}$.

Invirtiendo esta relación se cambia el referente, o unidad que se fracciona, de la parte al todo: Si 12 son $\frac{7}{3}\ a$, entonces a es $\frac{3}{7}12$. Por tanto, b, que es su complemento a 12 vale $\frac{4}{7}12$.

Obsérvese que con esta inversión se cambia el referente del fraccionamiento que pasa de tercios de a a séptimos de $a+b$; esto es, cambia de la parte al todo.

Una lectura analítica diferente de este mismo problema se encuentra en el siguiente ejemplo procedente de un libro del matemático Bahā al-Dīn al-ʻĀmilī, nacido en Baalbek (actualmente en Líbano) en 1547 y muerto en Isfahan (Irán) en 1621, del que disponemos de una traducción francesa de Aristide Marre con el título *Kholāçat al-hissāb ou Quintessence du calcul* (Marre, 1864):

Se le pregunta a alguien cuánto ha transcurrido de la noche. El respondió: un tercio del tiempo transcurrido es igual a un cuarto de lo que queda. ¿Cuánto tiempo había transcurrido y cuánto quedaba aún? (Marre, 1864, p. 48).

Al-ʻĀmilī ha explicado previamente la "búsqueda de las incógnitas mediante la proporción[7]" en el capítulo tercero del libro, y, en otros capítulos ha explicado la "búsqueda de incógnitas" mediante la falsa posición, dos falsas posiciones, lo que llama "la operación de inversión" y el álgebra. Cada problema lo presenta resuelto por varios métodos. En el caso de este problema plantea dos soluciones distintas: la primera "por álgebra", que no comentaremos, y la segunda "por proporción", que transcurre como sigue:

> Pon el tiempo transcurrido una cosa, el resto cuatro horas a causa del cuarto, entonces un tercio de una cosa es igual a una hora, de donde una cosa es igual a tres horas, y la suma siete. Ahora, tres está con siete en la misma razón que el número desconocido está con doce. Divide pues el producto de los términos externos por el término medio, entonces el cociente es cinco y un séptimo (Marre, 1864, pp. 48-49).

Las condiciones del problema son: La noche está dividida dos partes a y b que suman 12 horas y la relación entre las partes es: $\frac{1}{3}a = \frac{1}{4}b$.

La resolución sigue la siguiente secuencia: Si b fuera 4, a sería 3 y el total 7. Repartiendo 12 en la razón de 3 a 4, se tiene el valor verdadero de

[7] El procedimiento no es nuevo: se encuentra, por ejemplo, en el capítulo de transacciones mercantiles del libro de álgebra de al-Khwārizmī.

a y *b*. Esto se puede hacer por la fórmula del reparto proporcional, que con los datos del problema es: *a/12=3/7.*

En libros más recientes también aparece el problema de las horas cambiado de contexto. En el siguiente ejemplo el método es el mismo que el de Al-ʻĀmilī:

> Repártanse 180 ptas. entre dos personas, de modo que la parte de la primera sea los 4/5 de la segunda Tomando un número arbitrario que satisfaga las condiciones del problema, esto es, un número divisible por 5, por ejemplo, 5 tendremos que, si la parte de la segunda persona fuese 5, la parte de la 1ª, sería 5×4/5 = 4: Repartiendo, pues, 180 ptas. en partes proporcionales a 5 y 4, tendremos: 5+4 = 9. Luego: Para la 1ª persona 9:180::4:x; x = 80 ptas. Para la 1ª persona 9:180::5:x, x = 100 ptas. (Dalmau, 1943, p. 254, nº 18).

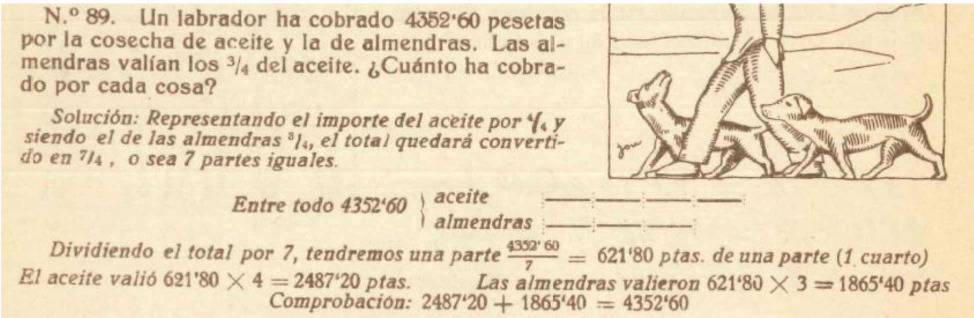
Este mismo método se puede aplicar sin pasar por la regla del reparto proporcional. Basta con aplicar al total la fracción que representa a cada parte. El siguiente ejemplo ilustra el razonamiento:

> Dos personas tienen juntas 100 ptas. La 1/2 de la 1ª vale el 1/3 de la 2ª. ¿Cuánto tiene cada una?
>
> Si la 1/2 de la 1ª vale el 1/3 de la 2ª, la parte de la 1ª vale los 2/3 de la 2ª, o sea, que si la 1ª tiene 2, la 2º tiene 3 y ambas 5. La parte de la 1ª es 100 x 2/5 = 40 ptas., y la de la 2ª, 100 x 3/5 = 60 ptas. (Bruño, 1940, p. 129, prob. 608.).

En el siguiente ejemplo, se cambia el referente de la fracción que liga las partes, pasando de ser una parte al todo, y se aplica la nueva fracción al todo de modo parecido a como se vio en Rouse Ball.

> En dos toneles existen 520 litros de vino y uno de ellos contiene la cuarta parte que el otro. ¿Cuántos litros hay en cada tonel?
>
> Sol. Habiendo en el tonel primero la cuarta parte de lo que contiene el segundo, resulta que la cantidad contenida en aquél [en el 1º] será la quinta parte de la cantidad total de vino o sea: 520:5 = 104 litros. En el segundo habrá 104×4 = 416 litros (Sabrás y Aguayo, 1922, p. 9).

En el ejemplo de la Figura 1, también se sigue el razonamiento de Rouse Ball, con la novedad de que el autor ilustra el referente con segmentos subdivididos de acuerdo a las condiciones del problema, después aplica un método de valor unitario.



N.º 89. Un labrador ha cobrado 4352'60 pesetas por la cosecha de aceite y la de almendras. Las almendras valían los 3/4 del aceite. ¿Cuánto ha cobrado por cada cosa?

Solución: Representando el importe del aceite por 4/4 y siendo el de las almendras 3/4, el total quedará convertido en 7/4, o sea 7 partes iguales.

Entre todo 4352'60 { *aceite* ——:——:——:——
almendras ——:——:——

Dividiendo el total por 7, tendremos una parte $\frac{4352'60}{7}$ = 621'80 *ptas. de una parte (1 cuarto)*

El aceite valió 621'80 × 4 = 2487'20 *ptas.* *Las almendras valieron* 621'80 × 3 = 1865'40 *ptas*

Comprobación: 2487'20 + 1865'40 = 4352'60

Figura 1

El texto dice así:

Un labrador ha cobrado 4352’60 pesetas por la cosecha de aceite y la de almendras. Las almendras valían los ¾ del aceite ¿Cuánto ha cobrado por cada cosa?

Solución: representando el importe del aceite por 4/4, y siendo el del almendras ¾, el total quedará convertido en 7/4 partes, o sea 7 partes iguales.

Entre todo 4352,60 aceite — — — —
almendras — — –

Dividiendo el total por 7, tendremos una parte $\frac{4352'60}{7}$ = 621´80 ptas. de una parte (1 cuarto)

El aceite valió 621’80×4=2487’20 ptas. Las almendras valieron 621’80×3=1865’40 ptas. Comprobación: 2487’20+1865,40=4351’60 (Villar, 1942, p. 30, problema nº 89).

Obsérvese en este razonamiento que el todo $a+b$ viene dado por la suma del numerador y denominador de la fracción que expresa la relación entre las partes, por lo que sabiendo esto, la resolución es inmediata. El siguiente ejemplo sirve para ilustrar el método.

Un ganadero ha comprado un caballo y un burro que le han costado 4.266 ptas. El precio del burro es los 2/7 del precio del caballo. ¿Cuánto ha costado cada animal?

7+2 = 9
4266: 9 = 474
474×2 = 948 ptas. del burro
472×7 = 3.318 del caballo
(Villar, 1942, p. 30, problema nº 90).

Epílogo

En el presente trabajo se ha pretendido dar cuenta de un modo de abordar el estudio de los problemas descriptivos de fracciones desde una perspectiva global.

A partir de una tentativa de clasificación de los mismos se ha seleccionado un tipo particular de problemas, el de las horas, para hacer el estudio de las lecturas analíticas que sustentan los métodos de resolución que algunos autores de diversas épocas han dejado reflejados en los libros de texto.

La variedad de lecturas y métodos expuestos en este documento ilustran una riqueza matemática que aporta conocimiento útil para el aprendizaje de las fracciones desde la reflexión sobre los procesos de resolución.

También es útil para el profesor interesado en disponer de alternativas para orientar una enseñanza de los problemas con fracciones por su propio interés y no como aplicación de conocimientos previos, al estilo de ejercicio y práctica.

En definitiva, es útil para el investigador porque ofrece una metodología para el análisis histórico y epistemológico de los razonamientos aritméticos que han desarrollado los matemáticos del pasado para la resolución de los problemas con fracciones.

El reto para todos es recuperar el valor educativo de los problemas con fracciones, aprendiendo a conocer su estructura, las lecturas analíticas de sus enunciados y los métodos y razonamientos que nos ha legado la tradición de enseñanza.

Referencias

Bruño (1940). *Tratado teórico práctico de aritmética razonada*. Curso superior. Segunda edición. Solucionario. Madrid, Barcelona, Valladolid: Ediciones Bruño.

Castro-Rodríguez, E., Pitta-Pantazi, D., Rico, L., y Gómez, P. (2016). Prospective teachers' understanding of the multiplicative part-whole relationship of fraction. *Educational Studies in Mathematics, 92*(1), 129-146.

Charalambos, Y.C., & Pitta-Pantazi, D. (2007). Drawing on a theoretical model to study students'understandings of fractions. *Educational Studies in Mathematics*, *64*, 293-316.

Dalmau, J. (1943). *Soluciones analíticas. Nueva edición corregida y aumentada. Libro del maestro*. Gerona: Dalmáu Carles Pla, S. A.

Figueras, O. (1988). *Dificultades de aprendizaje en dos modelos de enseñanza de los racionales* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav, Mexico.

Gómez, B. (2016). Problemas descriptivos y pensamiento numérico: el caso de las cien aves de corral. *PNA, 10*(3), 218-241.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 77, 9-22.

Gómez, B.; Sanz, M. y Huerta, I. (2016) Problemas Descriptivos de fracciones. *Bolema: Boletim de Educaçao Matematica, 30*(55), 586-604.

Jacobs, F. (Ed., trad.) (1863). *Anthologie Grecque. Traduite sur le texte publié d'après le manuscrit palatin par Fr. Jacobs avec des notices biographiques et littéraires sur les poëtes de l'anthologie. Tome second*. Paris: Hachette.

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers-Its intuitive and formal development. En J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Numbers concepts and operations in the middle grades* (pp.162-181). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

M.E.C. (2014). Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria. *BOE*, *126,* p. 19386.

Marre, A. (Ed., Trad.) (1864). *Kholâçat al-hissāb ou Quintessence du calcul par Behā-Eddīn al Aamoulī*. Deuxième édition, révue, corrigée et augmentée de nouvelles notes. Roma: Imprimerie des Sciences Mathématiques et Physiques.

Migne, J.-P. (Ed.) (1850). *Patrologiæ cursus completus*. *Tomo XC*. París: Apud editorem.

Migne, J.-P. (Ed.) (1863). *Patrologiæ cursus completus*. *Tomo CI*. París: Excudebat Migne.

Nicolaou, A., & Pitta-Pantazi, D. (2015). The Impact of a teaching intervention on sixth grade student's fraction understanding and their performance in seven abilities that constitute fraction understanding. En Konrad Krainer & Nada Vondrova (Ed.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education - CERME 9*, (pp. 309-315). Prague, Czech Republic: Charles University in Prague, Faculty of Education and ERME.

Ortega, J. de (1512). *Conpusicion de la arte de la arismetica y juntamente de geometría.* León: en casa de Maestro Nicolau de Benedictis: por Joannnes Trinxer librero de Barcelona.

Oughtred, W. (1653). *Mathematicall Recreations*. London: Printed for William Leake

Ozanam, M. (1778). *Récreations Mathématiques & Phisiques.* Nouvelle edition refondue & considérablement augmentée par M de CGF. Paris: Chez Ant. Jombert. (1ª edición 1692).

Puig, L. (2003). Historia de las ideas algebraicas: componentes y preguntas de investigación desde el punto de vista de la matemática educativa. En E. Castro, P. Flores, T., Ortega, L. Rico y A. Vallecillos (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Actas del Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 97-108). Granada: Universidad de Granada.

Puig, L., & Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Boston / Dordrecht / New York / London: Kluwer Academic Publishers.

Rouse Ball, W.W. (1992). *Récréations Mathematiques et problèmes des temps anciens et modernes*. Sceaux: Gabay (Reimpresión de la 2ª edición de 1902. París: Hermann).

Sabrás, T y Aguayo, M. (1922) *Colección de ejercicios y problemas resueltos de Aritmética, Geometría, Álgebra y Trigonometría*. (3ª Ed.). Barcelona: Imprenta A.Ortega.

Sigler, L. E. (2002). *Fibonacci's Liber Abaci A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York: Springer.

Silíceo, J. M. (1513). Ars Arithmética. En J. M. Cobos Bueno y E. Sánchez Salor (Eds.) *Juan Martínez Silíceo. Ars Arithmética.* 1996. Madrid: Editora Regional de Extremadura y Servicio de Publicaciones de la Universidad de Extremadura.

Swetz, F. J. (2014) *Expediciones matemáticas. La aventura de los problemas matemáticos a través de la historia* (José Migual Parra, trad.). Madrid, España: La esfera de los libros.

Villar, A. (1942). *Problemas-tipo ilustrados y ejercicios de cálculo mental*. Ilustraciones de Jou. Colección Avante. Barcelona: Miguel A. Salvatella.

La noción de estructura en early algebra

The notion of structure in early algebra

Marta Molina y María C. Cañadas
Universidad de Granada

Resumen

El early algebra es una propuesta curricular y línea de investigación que atiende a la integración del pensamiento algebraico en el currículo de Educación Primaria. Partimos de una visión multidimensional del álgebra escolar que incluye la aritmética generalizada, el estudio y generalización de patrones, el estudio de las funciones y la resolución de problemas. La noción de estructura está presente en todas estas dimensiones, con diferencias en su significado. En este trabajo describimos el significado asignado a esta noción en diferentes investigaciones que se enmarcan en algunas de estas dimensiones en el marco del early algebra.

Palabras clave: early algebra, educación primaria, estructura, investigación.

Abstract

The early algebra is a curricular proposal and research line that refers to the integration of algebraic thinking in the Primary Education curriculum. We adopt a multidimensional view of school algebra that encompass generalized arithmetic, the study and generalization of patterns, the study of functions and problem solving. The notion of structure is considered in all these dimensions with some differences in its meaning. In this chapter we describe the meaning given to this notion in different research studies which can belong to some of these dimensions in the context of early algebra.

Keywords: early algebra, structure, primary education, research.

Introducción

La propuesta curricular y línea de investigación denominada *early algebra* plantea la "algebrización del currículo" de Educación Primaria (Kaput, 2000), es decir, la introducción de modos de pensamiento algebraicos en la matemática escolar desde los primeros cursos (Cai y Knuth, 2011). Se propone promover en las aulas la observación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas y, de este modo, promover hábitos de pensamiento que atiendan a la estructura que subyace a las matemáticas (Blanton y Kaput, 2005). El *early algebra* va acompañado de una amplia concepción del álgebra escolar que engloba la aritmética generalizada, el estudio y generalización de patrones y relaciones numéricas, el estudio de relaciones funcionales, la resolución de problemas, el estudio de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, y el desarrollo y la manipulación del simbolismo algebraico (v.g. Kaput, 2000).

El álgebra[1] se considera importante en términos de cómo representa los principios y estructuras de las matemáticas (Cooper y Warren, 2011). Las diferentes concepciones no son disjuntas y en ellas se observan nociones comunes. La generalización, los sistemas de representación, la resolución de problemas o las estructuras son algunas de ellas. En este trabajo recogemos diferentes significados con los que el término estructura se emplea en este contexto, distinguiendo la concepción del álgebra en la que se enmarca y ejemplificando algunas de las investigaciones que la consideran como objeto de estudio en el marco del *early algebra*.

El álgebra como aritmética generalizada

En general, el término estructura en matemáticas se asigna a un sistema compuesto por un conjunto de objetos matemáticos, una o más operaciones, así como ciertas propiedades y relaciones de y entre estos objetos y operaciones (Castro, Rico y Romero, 1997). Por ejemplo, la estructura del

[1] En este trabajo utilizaremos el término álgebra para referirnos al álgebra escolar.

conjunto de los números naturales con la operación suma que es de semigrupo conmutativo, comprende los citados números, junto a la operación suma y ciertas propiedades, entre ellas la conmutativa.

Este es el significado con el que se usa la noción estructura al considerar el álgebra como aritmética generalizada. Las investigaciones con alumnos de Educación Infantil y Educación Primaria que atienden a esta noción de estructura analizan la comprensión y conocimiento de propiedades y relaciones matemáticas de forma previa y paralela a la introducción del simbolismo aritmético (v.g., Irwin, 1996; Resnick, 1992). La mayoría de los estudios se centran en el contexto de la estructura aditiva en los números naturales, prestando especial atención a las cuatro propiedades —complementaria de la suma y la resta, conmutativa de la suma, asociativa de la suma, y compensación de la suma—, de forma conjunta o aislada (Molina, 2006).

En investigaciones sobre el uso de algoritmos o estrategias inventadas en la resolución de problemas, se observa que los estudiantes aprecian las propiedades conmutativa y asociativa desde muy jóvenes, utilizándolas cuando abordan cálculos de formas no estándares o cuando inventan y discuten múltiples soluciones de un problema verbal (Resnick, Bill y Lesgold, 1992). Concretamente, al descomponer y volver a componer los términos de una operación de distintas formas, los alumnos hacen un uso implícito de las propiedades conmutativa y asociativa de la suma. Sin embargo, los niños entienden inicialmente estas propiedades como permisos (evidentes) para combinar los números en cualquier orden pero no como leyes o propiedades (Resnick, 1992). Por ejemplo, dan muestras del uso implícito de la propiedad conmutativa de la suma, al operar sin dar importancia al orden tanto al trabajar con modelos físicos como al operar mediante conteo

Algunos trabajos más recientes que atienden a esta dimensión del álgebra, lo hacen en conexión con el estudio de pensamiento relacional, término que se refiere al reconocimiento y uso, para alcanzar un objetivo, de relaciones (incluyendo propiedades) entre los elementos que componen una expresión numérica (Molina, 2006). Como ejemplos están los trabajos de Carpenter y colaboradores (v.g., Carpenter, Levi, Franke y Koehler, 2005) y Molina y colaboradores (v.g., Molina, Ambrose, Castro y Castro, 2009). Estos autores aportan evidencias de la emergencia natural de este tipo de pensamiento en el contexto de tareas que juzgan la equivalencia de expresiones aritméticas (p. ej., 12 + 7 = 7 + 12; 16 + 14 – 14 = 16).

El álgebra como estudio y generalización de patrones

A la generalización, usualmente se llega a partir de una regularidad observada y tras la búsqueda de un patrón que sea válido para más casos (Pólya, 1966). La noción de patrón se asocia a términos como secuencia, serie, orden, predecible, regularidad o estructura. Todas ellas son relevantes y permiten acotar la esencia de esta noción (Liljedahl, 2004). Un patrón "es lo común, lo repetido con regularidad en diferentes hechos o situaciones y que se prevé que puede volver a repetirse" (Castro, Cañadas y Molina, 2010, p. 57). Morales, Cañadas y Castro (2017) distinguen los siguientes tipos de patrones:

- Patrones visuales o espaciales, en los que la regularidad se percibe a través de la vista. Generalmente, se encuentran en el ámbito de la geometría o representaciones pictóricas. La representación puntual de números poligonales se considera un patrón visual. En la figura 1 presentamos un ejemplo con los primeros términos de la secuencia de los números cuadrados.

1 4 9 16 …

Figura 1. Primeros términos de los números cuadrados

- Patrones lineales o de repetición son en los que una unidad se repite cíclicamente. A la unidad que se repite se le llama unidad de repetición o núcleo. Un ejemplo de este tipo de patrones es ABABAB,… donde el núcleo es AB. Otro ejemplo lo observamos en la figura 2, donde el núcleo es cuadrado blanco-triángulo negro.

Figura 2. Ejemplo de patrón de repetición

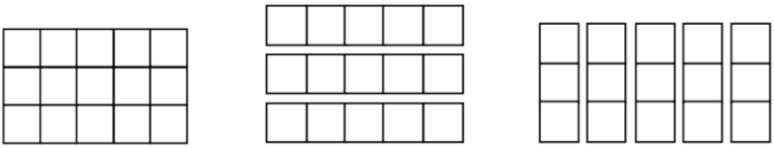
- Patrones numéricos, donde el valor numérico de los elementos en cada posición es importante. Por ejemplo, 1 2 3 5 8 13 21… constituye un patrón numérico.
- Patrones lógicos son aquellos en los que predomina el razonamiento basado en igualdad y diferencia de atributos entre objetos. En la figura 3 mostramos un ejemplo en el que se mantiene el tamaño de las figuras geométricas. Podríamos considerar que el patrón por el que se van añadiendo términos a la seriación es que cada término se diferencia del anterior en forma y color.

Figura 3. Ejemplo de patrón lógico

Los tipos de patrones presentados no son disjuntos. Por ejemplo, el patrón mostrado en la figura 1 es un patrón visual pero también es numérico si atendemos al número de círculos que componen cada configuración puntual que representa los términos de la secuencia.

En este contexto, la noción de estructura conecta los patrones y la generalización. Por ejemplo en el caso de patrones repetitivos, la estructura comprende aspectos como la unidad que se repite, la longitud de dicha unidad, el número de veces que se repite y si el patrón termina o no en una unidad completa. Mulligan, English, Mitchelmore y Robertson (2010) definen el término estructura como la forma en que varios elementos se organizan y relacionan. Estos autores enfatizan que "la estructura matemática se expresa más a menudo en forma de una generalización —una relación numérica, espacial o lógica que es siempre verdadera en un cierto dominio" (Mulligan y Mitchelmore, 2009, p. 34). Desde esta aproximación del *early algebra*, la noción de estructura permite establecer conexiones y relaciones entre conceptos y procesos matemáticos y, como consecuencia, permite analizar cómo los estudiantes interpretan una regularidad y, potencialmente, la generalizan (Warren, Miller y Cooper, 2013).

Las investigaciones sobre estructura en el estudio y generalización de patrones abordan aspectos tales como la distinción de *niveles de reconocimiento* de estructura en tareas de generalización (Mulligan y Mitchelmore, 2009) o *la relación entre las formas de percibir la estructura* que evidencian los estudiantes y su mayor o menor competencia matemática, detectando importantes diferencias entre los estudiantes de alto rendimiento y los de bajo rendimiento (Lüken, 2012). Mulligan y Mitchelmore (2009) destacan que, por ejemplo, el patrón 3 x 5 representado en la figura 4 no es evidente para estudiantes de los primeros cursos, ya que no reconocen la estructura de tres filas con cinco cuadrados cada una (ver (b) de la figura 4). Así, se observa que una estructura pictórica u otra puede ser más cercana a unos estudiantes u otros y puede favorecer o dificultar la comprensión de una estructura numérica asociada.



(a) (b) (c)

Figura 4. Representación pictórica de (a) 3 x 5, (b) 3 filas de 5, (c) 5 columnas de 3 (p. 34)

El álgebra como estudio de las funciones

En este enfoque funcional del álgebra, las funciones son el foco de contenido matemático. En Educación Infantil y Educación Primaria, las investigaciones utilizan funciones lineales. En este sentido, son claves las funciones lineales en general y las relaciones entre las dos variables, en particular. El foco está en el pensamiento funcional "entendido como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen" (Cañadas y Molina, 2016, p. 210).

La forma en que se trabajan las relaciones funcionales en el marco de la propuesta *early algebra* se basa en promover la percepción y generalización de patrones detectados en situaciones donde hay dos variables relacionadas que covarían. En consecuencia, la noción de estructura se utiliza con significado semejante al recogido en el apartado previo. En la práctica, en una misma situación en la que subyace una relación funcional los estudiantes identifican diversidad de estructuras, no todas ellas adecuadas ni equivalentes. Por ejemplo Pinto y Cañadas (2017) en un estudio comparativo, con estudiantes de tercero y quinto de Educación primaria, de la resolución del problema de las baldosas (se les presenta la imagen de la figura 5 y se les pregunta por el número de baldosas grises necesarias para un número dado de baldosas blancas), destacan una amplia variedad de estructuras mayor en tercero que en quinto.

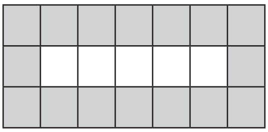


Figura 5. Imagen presentada para el problema de las baldosas

Las estructuras identificadas en el total de estudiantes son las siguientes, expresadas mediante simbolismo algebraico a partir de lo que los estudiantes presentan para casos particulares: (a) $2x+6$, (b) $2(x+2)+2$, (c) $2x+3+3$, (d) $3(x+2)-x$, (e) $3x+1$, (f) $2x+2$ (g) $(x+3)\cdot 2$ y (h) $(x+6)+2x$. Es importante observar que diferentes conteos o formas de percibir el patrón se corresponden con diferentes estructuras. En efecto, en los ejemplos anteriores no todas las respuestas corresponden a estructuras equivalentes. Algunas son adecuadas y otras no. Los estudiantes de tercero, de forma general, emplean más de una estructura al responder diferentes preguntas, lo que permite a los autores concluir una inconsistencia en el uso de las estructuras. Por otra parte, en los estudiantes de quinto se observa una mayor consistencia.

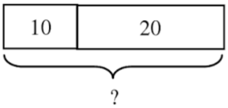
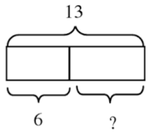
El álgebra como resolución de problemas

Desde la concepción del álgebra como herramienta para la expresión de métodos generales que resuelven clases de problemas, el término estructura se emplea para hacer referencia a la estructura semántica del problema, la cual permite distinguir significados que se asignan a las operaciones en los problemas verbales.

La forma de abordar la resolución de problemas mediante modelos rectangulares, ampliamente utilizada en el método Singapur, hace uso de esta idea de estructura. De forma sistemática, desde segundo de Educación Primaria (7-8 años) hasta la secundaria se enseña a los estudiantes a representar problemas verbales y relaciones numéricas (Clark, 2013). Se utilizan modelos rectangulares para representar la relación entre las cantidades conocidas, cantidades desconocidas y resolver problemas relativos a estas cantidades (ver Figura 6). Se trabaja con las cuatro operaciones aritméticas con diferentes conjuntos numéricos, tanto con los números naturales como las fracciones. La creación de modelos rectangulares permite a los estudiantes visualizar relaciones matemáticas abstractas y la estructura semántica de los problemas. De este modo los estudiantes llegan a resolver problemas algebraicos sin usar (el menos de manera única) el simbolismo algebraico (Bautista y Cañadas, 2015). Adicionalmente el método conduce a los estudiantes a desarrollar el concepto de variable e incógnita de forma gradual.

Este heurístico forma parte del método Singapur (Kho, Yeo y Lim, 2009), que ha tenido especial reconocimiento en los últimos años gracias a los buenos resultados de los estudiantes de Singapur en diferentes ediciones de evaluaciones internacionales de PISA y TIMSS. El objetivo de este método es que los estudiantes desarrollen las habilidades conceptuales y procedimentales de matemáticas para el día a día, y proporcionar a los estudiantes la habilidad para formular, aplicar y resolver problemas. Se considera que las representaciones juegan un papel crucial en la resolución de problemas.

Las investigaciones indagan en aspectos tales como de qué forma los estudiantes utilizan este método (Swee Fong y Lee, 2009), qué dificultades presentan (Kow Cheong, 2002) y cómo condiciona su posterior uso del simbolismo algebraico en la resolución de problemas (Swee Fong, 2003).

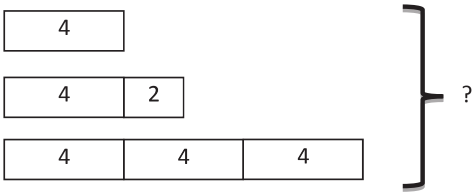
Tengo 10 cromos de animales y 20 de deportes ¿cuántos cromos tengo en total?	He comprado un sobre con seis cromos y ya tengo 13. ¿Cuántos cromos tenía?
	

En una clase hay 4 tizas de color rojo. Hay dos tizas más azules que las que hay rojas. Hay tres veces más tizas blancas que rojas. ¿Cuántas tizas hay en total?

Tizas rojas

Tizas azules

Tizas blancas



3x5+2=17

Figura 6. Problemas resueltos con el método Singapur

No encontramos literatura que haga mención explícita al término estructura en este contexto.

Conclusiones

En este trabajo nos hemos centrado en un contexto muy particular de las matemáticas: el álgebra escolar. No abordamos otros significados que la noción de estructura presenta cuando se trabaja el álgebra en cursos superiores a la Educación Primaria o cuando se trabajan otros contenidos matemáticos. Hemos presentado nociones de estructura, con sutiles diferencias para distintas aproximaciones al *early algebra*. Estas nociones se encuentran estrechamente conectadas con la generalización. Este hecho es importante dado que la generalización se considera clave en el pensamiento algebraico, en el conocimiento matemático y en el conocimiento en general (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

Observamos que en las investigaciones consultadas que atienden al estudio y generalización de patrones, no es fácil en ocasiones distinguir la noción de patrón y la noción de estructura. Consideramos la primera más amplia, conteniendo a la segunda. Entendemos que la noción de estructura hace referencia a la identificación del patrón a través de casos particulares, y a la expresión o aplicación del mismo para el caso general. No obstante, este trabajo pone de manifiesto la necesidad de avanzar en una clara caracterización independiente de ambos términos.

Hay estudios donde considerar que la noción de estructura podría contribuir a la descripción del pensamiento algebraico de los estudiantes y de la percepción del contenido matemático involucrado. Por ejemplo, en el contexto funcional así como en el estudio de patrones, permitiría indagar sobre si la estructura se mantiene para el trabajo con diferentes casos particulares y la generalización. Esto informaría sobre la consistencia del trabajo de los estudiantes en un determinado problema. Consideramos que sería interesante y necesario indagar sobre estas ideas en la investigación desde algunas de las dimensiones del álgebra.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado dentro de los proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencias EDU2013-41632-P y EDU2016-75771-P, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Bautista, A. y Cañadas, M. C. (2015). Book review of The Singapore model method for the learning of mathematics / Reseña del libro, The Singapore model method for the learning of mathematics. *Estudios de Psicología: Studies in Psychology*, DOI: 10.1080/02109395.2014.1000037

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Cañadas, M. C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primeras edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruíz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 209-218). Granada, España: Comares.

Cai, J. y Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization, advances in mathematics education*. Berlin: Springer.

Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. y Koehler, J. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37*(53).

Castro E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Castro, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55-67.

Clark, A. (2013). Singapore Math: A Visual Approach to Word Problems. *Math in Focus*[2].

Cooper, T. J. y Warren, E. (2011). Years 2 to 6 students' ability to generalise: Models, representations and theory for teaching and learning early algebraization. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 187- 214). Berlin: Springer.

Irwin, K. C. (1996). Children's understanding of the principles of covariation and compensation in part–whole relationships. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(1), 25-40.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

Kho, T. H., Yeo, S. M. y Lim, J. (2009). *The Singapore model method for the learning of mathematics*. Singapur, Singapur: Ministry of Education.

Kow Cheong, Y. (2002). The model method in Singapore. *The Mathematics Educator, 6*(2), 47-64.

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 26*(3), 24-42.

Lüken, M. M. (2012). School starters' early structure sense. *PNA, 7*(1), 41-50.

[2] https://www.hmhco.com/~/media/sites/home/education/global/pdf/white-papers/mathematics/elementary/math-in-focus/mif_model_drawing_lr.pdf?la=en

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis doctoral. Granada, España: Universidad de Granada.

Molina, M., Ambrose, R., Castro, E. y Castro E. (2009). Breaking the addition addiction: creating the conditions for knowing-to act in early algebra. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: studies on John Mason's contribution to Mathematics Education* (pp. 121-134). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Morales, Cañadas y Castro (2017). Generación y continuación de patrones por dos alumnas de primero y segundo de educación primaria en tareas de seriaciones. *PNA, 11*(4) 233-252.

Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). Awareness of pattern and structure in early mathematical development. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 33-49.

Mulligan, J., English, L. D., Mitchelmore, M. y Robertson, G. (2010). Implementing a Pattern and Structure Mathematics Awareness Program (PASMAP) in Kindergarten. En L. Sparrow, B. Kissane, y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 795-802). Fremantle, Australia: MERGA.

Pinto, E. y Cañadas, M. C. (2017). Estructuras y generalización de estudiantes de tercero y quinto de primaria: un estudio comparativo. En J. M. Muñoz-Escolano, A. Arnal-Bailera, P. Beltrán-Pellicer, M. L. Callejo y J. Carrillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXI* (pp. 407-416). Zaragoza, España: SEIEM.

Pólya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Tecnos.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hillsdale, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Resnick, L. B., Bill, V. y Lesgold, S. (1992). Development of thinking abilities in arithmetic class. En A. Demetriou, M. Shayer y A. Efklides (Eds.), *Neo-piagetian theories of cognitive development: Implications and applications for education* (pp. 210-230). Londres, Reino Unido: Routledge.

Swee Fong, N. (2003). How secondary two express stream students used algebra and the model method to solve problems. *The Mathematics Educator, 7*(1), 1-17

Swee Fong, N. y Lee, K. (2009). Model Method: Visual tool to support algebra word problem solving. En W. Khoon Yoong, L. Peng Yee, B. Kaur, F. Puig Yee y N. Swee Fong (Eds.), *Mathematics Education*. *The Singapore Journey* (pp.169-203). Singapur: Nanyang Technological University.

Warren, E., Miller, J. y Cooper, T. J. (2013). Exploring young students' functional thinking. *PNA, 7*(2), 75-84.

Isometrías en la resolución de problemas y obras de arte

Isometries applied to problem solving and artworks

Rafael Ramírez, José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se resuelven dos problemas planteados en las asignaturas Bases Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo de los estudios de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada, con el contenido matemático común de las isometrías en el plano. En un problema de rebotes en el billar, la identificación de simetrías axiales se convierte en una interesante estrategia de resolución. En el problema de construcción de mosaicos, las isometrías permiten visualizar y comprender el proceso de creación de obras de arte. Estas actividades, propuestas por Francisco Fernández y Francisco Ruiz en los procesos formativos de maestros han favorecido que los estudiantes den mayor significado a sus conocimientos geométricos, de medida, de los mosaicos en la Alhambra y en la obra de Escher.

Palabras clave: Alhambra, Escher, Isometrías, Mosaicos, Resolución de problemas,

Abstract

In this work we address two problems from the subjects "Fundamentals of Mathematics" and "Design and development of the mathematics curriculum in Primary Education" with a common content related to the plane isometries. One problem is related to the bounces of cue ball in a pool table. We will show an interesting strategy to face it related to the use of axial symmetries. Another problem is the mosaics construction. To face it, plane isometries are also powerful tools to visualize and understand the process to create artworks. These tasks, suggested by Francisco Fernández and Francisco Ruiz for the training of primary teachers, have contributed to a better understanding of geometric knowledge, measurement, the Mosaics of the Alhambra's and Escher's works.

Keywords: Alhambra, Escher, Isometries, Mosaics, Problem Solving,

Introducción

En este capítulo vamos a profundizar en dos tareas estrechamente relacionadas con los trabajos de Francisco Fernández y Francisco Ruiz relativos a Medida y Geometría. Hemos seleccionado dos de sus propuestas que consideramos especialmente significativas para favorecer la enseñanza de las matemáticas con sentido (Flores y Rico, 2015) en las asignaturas que impartimos en el Grado de Maestro de Educación Primaria, "Bases matemáticas" en primer curso, y "Diseño y desarrollo del currículo de matemáticas" en tercer curso.

El primer problema, propuesto por Francisco Fernández, trata de modelar el número de rebotes que una bola dará en las bandas de una mesa de billar partiendo de una esquina y formando, un ángulo de 45º con una banda, hasta llegar a detenerse en cualquiera de las esquinas. Esta tarea se analiza en una de las prácticas de la asignatura de Diseño y desarrollo del currículo, tanto por su riqueza en la identificación de estrategias de resolución como en el análisis de los contenidos matemáticos que pone en juego. Si bien a los estudiantes sólo se les pide localizar soluciones particulares, encontrar la solución general supone un reto complejo, dado que las transformaciones geométricas elementales son contenido de Educación Primaria, sin embargo, la estrategia de resolución específica requiere un nivel más avanzado de dominio para establecer la relación entre el número de rebotes y las dimensiones de la mesa de billar.

La segunda tarea, inspirada en los trabajos geométricos y artísticos de Francisco Ruiz sobre los mosaicos de la Alhambra y la obra de Escher, es una de las actividades propuestas en la asignatura de Bases Matemáticas para la Educación Primaria. El uso de Geogebra, como programa de geometría dinámica, favorece la visualización del proceso de construcción de mosaicos a partir de un polígono regular y puede acercarnos a comprender el proceso de Escher para convertir la geometría en arte.

Problema de la mesa de billar

El problema de la mesa de billar tiene el siguiente contexto general:

En una mesa de billar clásico de 1,5 x 2,5 m se sitúa una bola en una esquina. Se golpea la bola de tal forma que siga una trayectoria con un ángulo de 45º respecto a una de las bandas. La bola sale con fuerza suficiente y no se para hasta que llega a otra (o la misma) esquina de la mesa.

Se plantean a continuación dos preguntas:

a. ¿Cuántos rebotes dará en las bandas de la mesa antes de pararse?
b. ¿Qué medidas debería tener una mesa de billar para que, en las mismas circunstancias, la bola diera 10 rebotes?

Resolución del problema básico

La resolución de la parte a. de este problema requiere de conocimientos geométricos básicos para dibujar la trayectoria de la bola y contabilizar los rebotes en las bandas. En el ejemplo reflejado en la figura 1, la trayectoria de la bola viene marcada por la secuencia de rebotes Pi. Para contabilizar el número de rebotes, se parte de la propiedad de que este número depende exclusivamente de la proporción de la mesa. La mesa que nos ocupa es de tamaño 1,5 x 2,5 m, lo cual equivale a resolver el problema en una mesa de dimensiones 15x25 u, que dividiendo por el máximo común divisor, se reducen las dimensiones de la mesa a 3 x 5 u, que es la representada en la figura. El número de rebotes es 6.

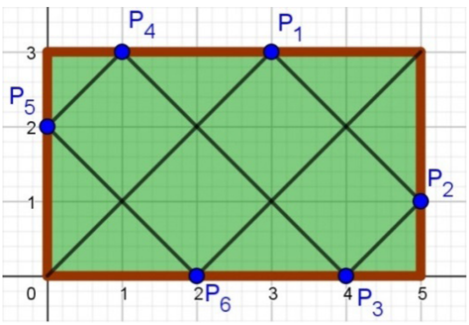


Figura 1. Resolución gráfica de la parte a) del problema original

Por otro lado, la parte b. interesa más desde el punto de vista didáctico de la resolución de problemas, porque hay que diseñar una estrategia para relacionar el número de rebotes con las dimensiones *a* y *b* en la que se usan las propiedades de las isometrías del plano, en particular, reflexiones axiales.

La siguiente figura muestra una representación geométrica del proceso de obtención de la relación entre el número de rebotes y las dimensiones de la mesa de billar *a* y *b*. Esta cuestión requiere un nivel avanzado de reflexión, no adecuado al nivel de Primaria. La propiedad de que en un rebote el ángulo de entrada es el mismo que el de salida, da lugar a establecer una relación entre la trayectoria de la bola en el billar y la trayectoria recta que seguiría la bola si "atravesase distintas copias de la mesa de billar" (figura 2). Por ejemplo, el recorrido tras el primer rebote (punto P_1) se puede obtener a partir de una simetría axial respecto de esa banda, siendo la trayectoria de P_1 a P_2 (segmento s_2) equivalente a la trayectoria entre P_1 y P'_2 (segmento s'_2) en la copia de la mesa de billar obtenida por dicha simetría.

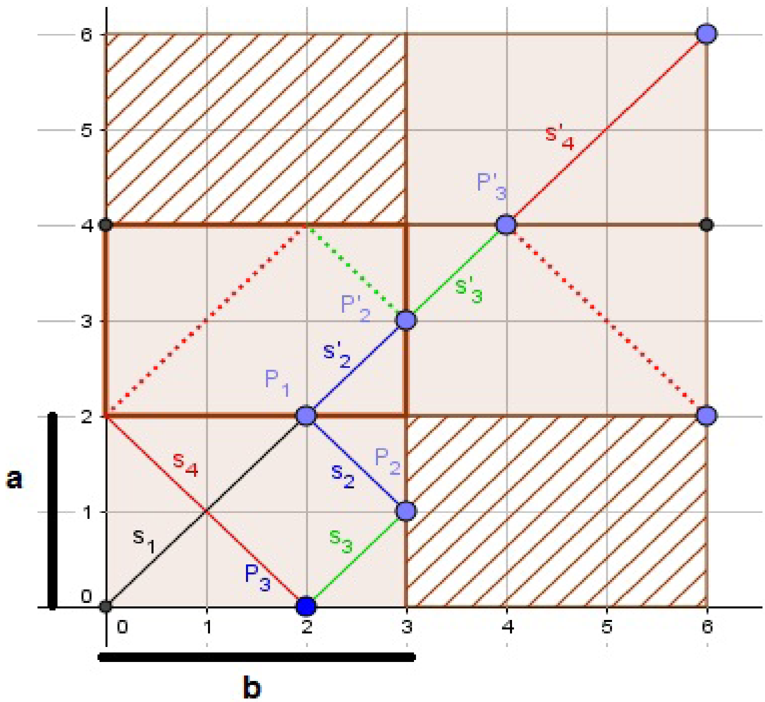


Figura 2. Resolución gráfica de la parte B del problema original

La obtención del segmento s’$_3$ se debe a la doble transformación del segmento s_3, por composición de la simetría horizontal anterior y la simetría vertical del eje que contiene a P’$_2$ que transforma la mesa de billar original al mismo tiempo. Análogamente se deduce el tramo s’$_4$. En la figura se destaca en línea discontinua las transformaciones progresivas de los segmentos de la trayectoria inicial. El proceso de resolución termina cuando la trayectoria transformada termina en una esquina de alguna de las copias de la mesa de billar, que equivale a la generación de la diagonal de un cuadrado.

A partir de la figura se obtienen las siguientes regularidades:

- El segmento final obtenido conserva el mismo ángulo del tiro y cada intersección, P_1, P’$_2$ y P’$_3$ del mismo con las bandas de las copias de la mesa de billar corresponde a los rebotes originales.
- Cada rebote en la banda superior o inferior requiere de una reflexión de eje horizontal de la mesa hacia arriba. Análogamente, cada rebote en la banda lateral derecha o izquierda, requiere una reflexión de eje vertical de la mesa hacia la derecha.
- Existe una relación entre el número de rebotes y el número de intersecciones del segmento que une el origen con el punto final. Los rebotes en las bandas horizontales se corresponden con las intersecciones en las rectas horizontales obtenidas al “copiar” la mesa de billar. Análogamente, las intersecciones con rectas verticales marcan los rebotes con las bandas verticales. Si llamamos n (m, respectivamente) al número de copias del billar en el eje horizontal (vertical, respectivamente), encontramos una curiosa relación. El número de rebotes en las bandas horizontales es m-1 y en las verticales n-1, por lo que el número de rebotes totales es $R = n + m - 2$.

Para que la bola haya tocado nuevamente una esquina, al ser el ángulo de 45 grados, es necesario que la trayectoria final sea la diagonal de un cuadrado y que se cumpla que $n \cdot a = m \cdot b$. Además es necesario que m y n sean primos relativos entre sí (mcd(n,m)=1) para que sea la primera esquina en la que cae la bola. La forma del billar únicamente depende del cociente entre a y b. Por la igualdad anterior, al considerar la fracción a/b, debe ser equivalente a n/m, lo que aporta una información relevante para la resolución del problema y otras posibles ampliaciones. Por ejemplo, en un billar de lados 1 y cualquier número irracional, sería imposible que la trayectoria acabase en una de las esquinas.

Podemos concluir que, en el caso de 10 rebotes, es necesario que las dimensiones a y b se correspondan con descomposiciones de $12 = n+m$ (n, m naturales primos relativos), siendo n-1 y m-1 los rebotes en las bandas horizontales y verticales respectivamente. Esto da lugar a los billares de dimensiones 1x11 y 5x7 (salvo cambios de escala).

Resolución del problema generalizado

Abordamos a continuación el problema general con ángulo de tiro α y dimensiones a y b, no apropiado para la etapa de Educación Primaria. La Figura 3 muestra la descripción geométrica asociada a elecciones específicas de estos parámetros.

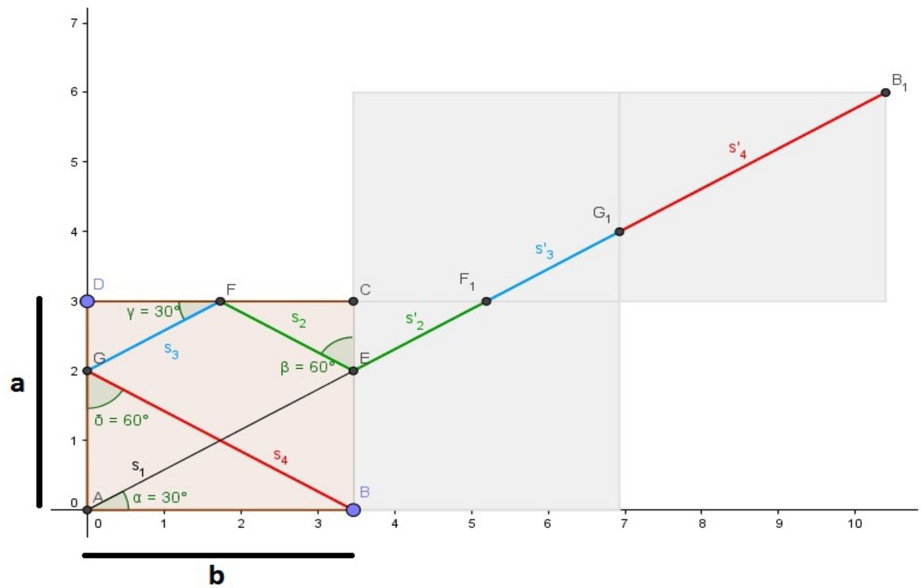


Figura 3. Resolución gráfica del problema general modificando el ángulo de tiro

La trayectoria rectilínea resultante tiene que ser la diagonal de un rectángulo generado por múltiplos de a y b. En particular se obtiene un triángulo rectángulo y se obtiene la siguiente ecuación que relaciona el ángulo α, y dimensiones a y b de la mesa de billar.

$$\exists\ n,\ m\ naturales\ tal\ que\ \tan(\alpha) = \frac{n \cdot a}{m \cdot b}$$

Para el caso mostrado en la figura 1, correspondiente a α = 30º, a = 3 u y b = $2\sqrt{3}$ u, cumple la relación para $n = 2$ y $m = 3$. El número de rebotes (R) vendrá dada por la elección de los valores de m y n más pequeños posibles (mcd (m, n) =1) y la relación:

$$R = m + n - 2$$

Obsérvese que R es invariante conservando la proporción de la mesa original o razón de las dimensiones a y b. El problema b. entraña dificultad debido a la singularidad del valor del ángulo α y de las ecuaciones que hay que resolver.

El arte de Escher

Partimos de la siguiente actividad propuesta por Francisco Ruiz:

El teselado de reptiles se ha obtenido a partir de un hexágono regular, modificado mediante isometrías por medio de un programa de geometría dinámica. Identifica el hexágono básico del mosaico y las transformaciones de esa figura que le dan origen (Figura 4).

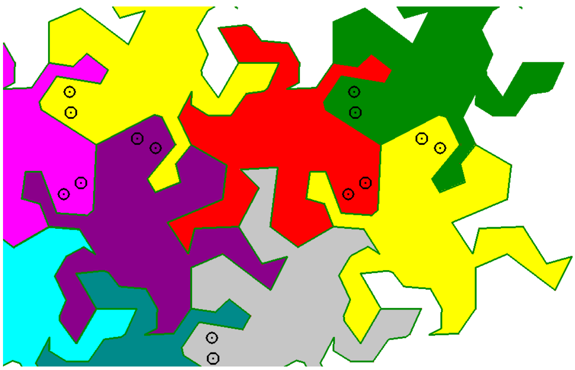


Figura 4. Mosaico tipo Escher con reptiles (Ruiz y Ruiz, 2011, p.322)

Vamos a abordar este problema, mediante una cadena de tareas propuestas en las prácticas a los estudiantes de Primero para familiarizarse con el uso de Geogebra. Simplemente esbozamos las pautas de resolución que se les plantea.

Estudio de la tarea 1

Simplifiquemos el proceso. Empecemos por un mosaico más sencillo y localicemos las transformaciones del cuadrado que dan lugar al hueso Nazarí. No pretendemos el estudio de mosaicos a través de la tesela básica o el motivo mínimo que la genera, sino "comprender" la teselación del plano a través del azulejo, es decir, la pieza de cerámica que, repetida, rellena el plano mediante isometrías.

El proceso puede quedar descrito como sigue:

Se divide el cuadrado en tres fragmentos. Uno no se mueve y sobre los otros dos se aplican sendos giros de 90 grados respecto a los puntos señalados P y Q. Se obtiene así el azulejo que llamamos Hueso Nazarí (Figura 5).

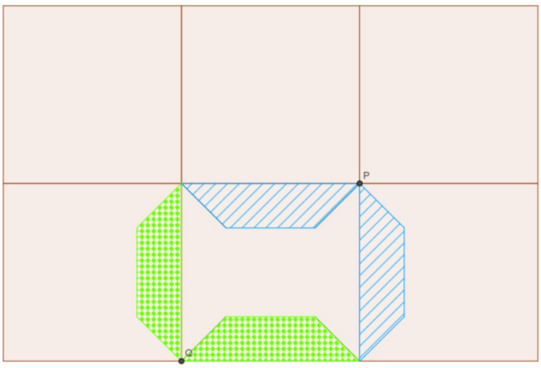


Figura 5. Construcción del hueso Nazarí a partir del cuadrado

Si ahora partimos del hueso Nazarí y localizamos los centros de giro anteriores y aplicamos los mismos giros que antes a todo el azulejo, se va construyendo el conocido mosaico de la Alhambra (Figura 6).

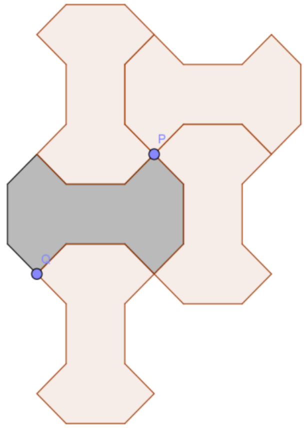


Figura 6. Construcción del mosaico a partir del azulejo en forma de hueso

Es decir, podemos concluir que aplicando giros de 90 grados al azulejo inicial y a sus respectivas imágenes por estos giros, se puede ir construyendo el mosaico. Esta propiedad es igualmente cierta si el azulejo de partida fuese el cuadrado inicial.

Estudio de la tarea 2

Podemos generalizar el proceso anterior para "comprender" la construcción de un mosaico a partir de su azulejo mediante la siguiente pauta:

a) Identificar el polígono regular (cuadrado, triángulo o hexágono) del que proviene
b) Localizar las transformaciones para convertir el polígono regular en el azulejo
c) Aplicar las mismas transformaciones al azulejo para construir el mosaico.
d) Aplicar las mismas trasformaciones al polígono regular de partida y estudiar si se produce una teselación del plano.

Utilizando cuadrados y giros de 90 grados también se pueden obtener otros mosaicos de la Alhambra (Figura 7).

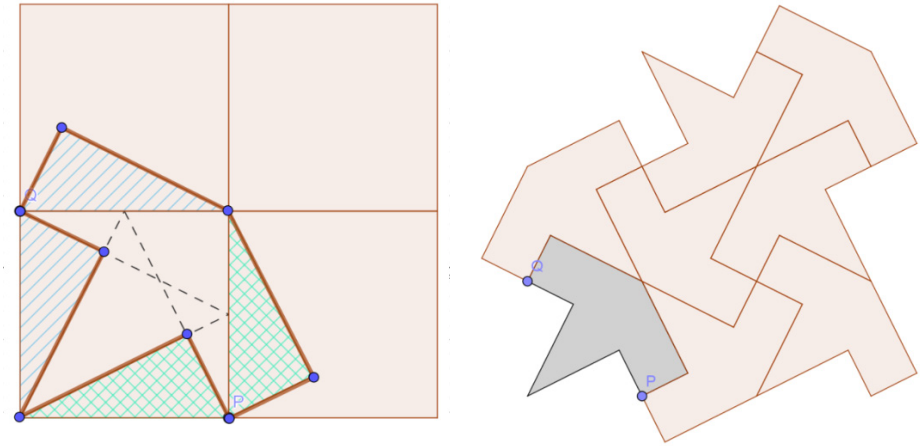


Figura 7. Construcción del mosaico tipo avión a partir del cuadrado

Si en vez de cuadrados, utilizamos triángulos equiláteros y giros de 180º, podemos obtener la conocida pajarita (Figura 8).

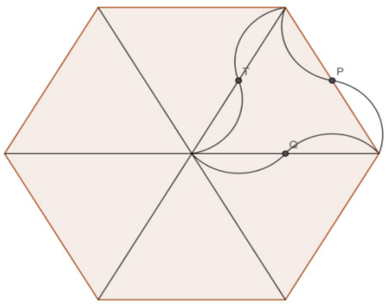


Figura 8. Posible construcción del azulejo correspondiente a la pajarita

Escher utilizó este procedimiento para construir algunas de sus obras más conocidas. Por ejemplo, partiendo de un cuadrado y utilizando únicamente traslaciones, se puede crear el siguiente mosaico (Figura 9).

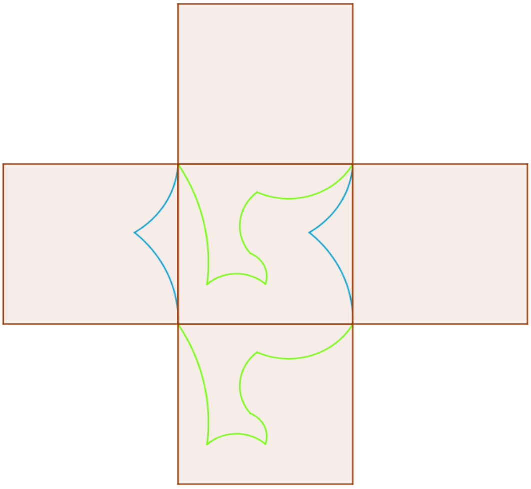


Figura 9. Azulejo en forma de flamenco

Estudio de la tarea 3

Vamos a utilizar Geogebra para particularizar el proceso anterior de construcción de mosaicos a la obra de reptiles de Escher.

Si partimos de un hexágono regular, los giros de 120 grados con centro en sus vértices van produciendo una teselación. Por la propiedad d) esto nos da una pista de que los giros de 120 grados pueden ser claves para comprender la construcción de la lagartija.

Vamos a localizar, en el hexágono regular, los fragmentos sobre los que se ha aplicado un giro de 120 grados y la parte del hexágono que no se ha transformado. En la figura 9 se observa que los giros de 120 grados, convierten los fragmentos construidos sobre cada lado del hexágono en figuras idénticas en el lado contiguo. Por ejemplo, el giro sobre el punto P convierte las regiones que forman el cuello de la lagartija (ralladas en la Figura 10) en la cabeza y una pata.

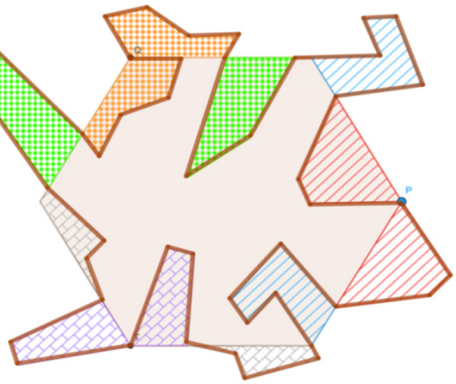


Figura 10. Construcción del azulejo "lagartija" a partir del hexágono.

El uso de la herramienta de arrastre permite desplazar los puntos interiores (extremos de los patas, cola, cabeza, etc.). Estas modificaciones favorecen el proceso creativo de construcción, dando libertad al estudiante para retocar las formas y medidas hasta conseguir el dibujo deseado. Esto Escher lo conseguía sin Geogebra, lo que engrandece más su arte.

Una vez localizados los centros de giro, y partiendo del azulejo formado por la lagartija, se puede construir el conocido mosaico (Figura 11).

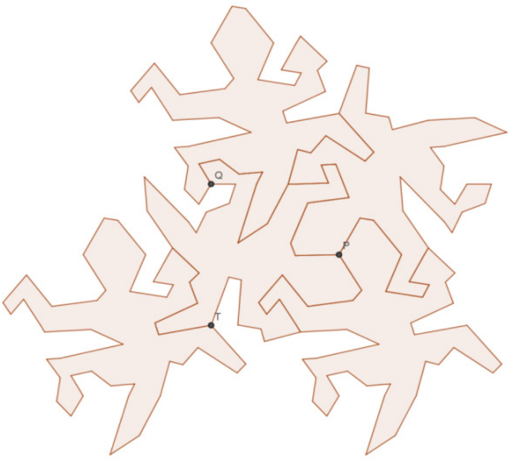


Figura 11. Construcción del mosaico reptiles a partir de puntos de giro de 120º

Explicar el proceso constructivo puede hacernos valorar más el valor artístico de la obra de Escher y su dominio de las propiedades geométricas. Las infinitas posibilidades de Geogebra pueden acercarnos a comprender los entresijos geométricos, pero aún nos queda mucho camino para alcanzar al artista (Figura 12).

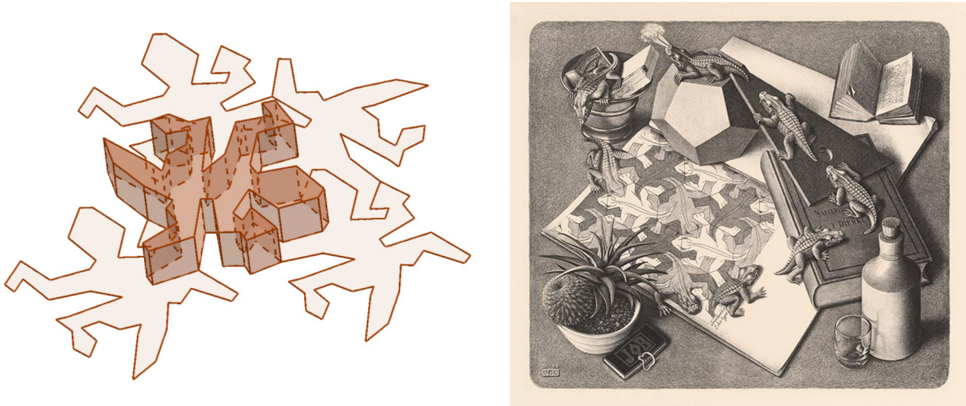


Figura 12. Nuestro salto a la tercera dimensión para la obra Reptiles de Escher.

Referencias

Flores, P. y Rico, L. (Coords.) (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid. Pirámide

Ruiz, F. y Ruiz, J. F. (2011). Movimientos geométricos en el plano. En I. Segovia y L. Rico (Coords.), *Matemáticas para Maestros de Educación Primaria* (pp. 301-327). Madrid. Pirámide.

Evolución del contenido del currículo de los estudios de magisterio en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Evolution of the content of the elementary teacher degree's curriculum in the mathematics education department of the University of Granada

Isidoro Segovia Alex, Rafael Roa Guzmán
Universidad de Granada

Resumen

Se describen los currículos de Didáctica de la Matemática de los planes de estudio, precedentes del actual de 2010, el de 1971 y el 1991. Ambos, muy contrapuestos, el primero por ser excesivamente formalista y el segundo por exiguo, sientan las bases del currículo actual; en todos ellos han estado muy implicados los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, planes de estudio, magisterio.

Abstract

In this paper the syllabus of the courses of education in mathematics are described. The mentioned syllabus correspond to the degree of primary education and are previous to the current one. They were created in 1971 and 1991. The former one was excessively formalistic and the latter one meager but both have set the bases for the current syllabus. Professors Francisco Fernandez and Francisco Ruiz have been very involved in the development of all of these syllabus.

Keywords: teaching, mathematics, syllabus, primary education teachers' degree.

Introducción

Describimos dos currículos de Didáctica de las matemática, el de los planes de 1971 y el de los planes de 1991, antecedentes de los actuales planes de 2010, con la intención de primero, dejar constancia del trabajo desarrollado por los miembros del departamento, entre los que se encuentran los profesores homenajeados con este libro, Francisco Fernández y Francisco Ruiz, a los que se deben algunos programas de las asignaturas que se describen y, segundo, poner de manifiesto, las condiciones, limitaciones y evolución de los mismos a lo largo de la historia del desarrollo del Departamento de Didáctica de la Matemática desde que se constituyó en 1985.

Los planes de estudio del 71

Los planes de estudio de 1971 se acomodan a la Ley General de educación (1970); en esa época las antiguas Escuelas Normales de Magisterio se integraron en la Universidad con la denominación de Escuelas Universitarias del Profesorado de EGB (Enseñanza General Básica); también a partir de la misma ley, los maestros comenzaron a denominarse Profesores de Enseñanza General Básica. La enseñanza obligatoria estaba asociada a la EGB que iba de los 6 a los 14 años y dividida en dos etapas: de primero a quinto curso y de sexto a octavo. El profesorado de EGB podía optar en su formación por las siguientes especialidades: Ciencias Físico-Naturales, Ciencias Humanas y Filología; con posterioridad se añadieron las especialidades de Preescolar, Pedagogía Terapéutica, Educación Física y Educación Musical.

La formación relativa al área de matemáticas de esa época tanto a nivel escolar como de formación de profesorado estaba fundamentada en la denominada entonces, Matemática Moderna o Teoría de Conjuntos.

En lo que se refiere a la EGB, trascurridos 10 años desde su entrada en vigor, se adujeron razones relativas al bajo rendimiento del alumnado, razones sociales y políticas (entrada de la democracia) para introducir reformas en 1981 a través de los que se denominaron Programas Renovados de la EGB. En el caso concreto de las matemáticas había una razón también muy poderosa, que Morris Kline ya había puesto de manifiesto en su libro

‘El fracaso de la matemática moderna’: ‘una generación de analfabetos en matemáticas, con un temor sin precedentes a este campo de la enseñanza, es la prueba más palpable del fracaso de la matemática moderna’ (Kline, 1976).

En el caso de la especialidad de Ciencias Físico-Naturales correspondiente al profesorado que se encargaba de impartir matemáticas en la segunda etapa en la Escuela Universitaria del Profesorado de EGB de Granada, la formación en el área de matemáticas era la siguiente:

Tabla 1

Curso	Cuatrimestre	Asignaturas obligatorias	Asignaturas optativas
1º	1º cuatrimestre	Matemáticas I	
	2º cuatrimestre	Matemáticas II	
2º	1º cuatrimestre	Matemáticas III; Didáctica de las Matemáticas	Estadística I; Estadística II; Álgebra lineal; Álgebra y Geometría; Didáctica de la Geometría
	2º cuatrimestre	Matemáticas IV	
3º	1º cuatrimestre	Matemáticas V	Didáctica de las Matemáticas II; Teoría de colas; Informática
	2º cuatrimestre	Matemáticas VI	

.

En el resto de las especialidades, la formación en el área de matemáticas se desarrollaba a través de las asignaturas Matemáticas I y Matemáticas II que tenían un matiz diferenciado de las de Ciencias Físico-Naturales y que luego describimos.

Debemos añadir que la diferenciación entre determinadas asignaturas de cada cuatrimestre era ficticia: por ejemplo, en el caso de primer curso, la asignatura se denominaba Matemáticas I y II y se impartía durante todo el año, aunque al final se cumplimentaban dos actas, una para Matemáticas I y otra para Matemáticas II, con las mismas calificaciones. Igual ocurría con las de segundo y tercer curso, exceptuando la Didáctica de las Matemáticas que estaba diferenciada de las otras dos.

Por tanto los programas[1] de las asignaturas referidas que presentamos a continuación tienen esa denominación: Matemáticas I y II, Matemáticas III y IV y Matemáticas V y VI.

Matemáticas I y II.

El programa que se presenta en la Tabla 2, corresponde al curso 1985-86 y quedaba registrado como Cuestionario de Matemáticas I y II.

Tabla 2. Matemáticas I y II

Tema	Contenidos
1. Lógica	Lenguaje matemático. Álgebra de proposiciones. Cuantificadores. Teoremas. Métodos de demostración.
2. Teoría de conjuntos	Introducción. Axiomática de la teoría de conjuntos. Diagramas y gráficos. Álgebra de clases. Recubrimiento y partición.
3. Producto cartesiano. Relación entre conjuntos	Par ordenado. Producto cartesiano de conjuntos. Representación gráfica. Conjunto inicial y final de una relación. Dominio y rango. Relación recíproca. Composición de relaciones. Asociatividad, no conmutatividad e inversa de una relación.
4. Aplicaciones	Correspondencias. Correspondencia unívoca o función. Campo de existencia de una función. Restricción y prolongación de una función. Composición de funciones. Aplicación. Composición de aplicaciones y propiedades. Tipos de aplicaciones. Inversa de una aplicación. Imagen directa y recíproca de un conjunto mediante una aplicación. Otras operaciones con aplicaciones.
5. Relaciones binarias	Relación en un conjunto. Propiedades posibles de una relación binaria. Relación de equivalencia. Clases de equivalencia. Propiedades de las clases de equivalencia. Partición. Equivalencia asociada a una partición. Relación de orden. Orden total y orden parcial. Elementos notables de un conjunto ordenado.

[1] Los programas de las asignaturas que se citan pertenecieron a la sección de Granada; en esa época estaban asociadas a esta, además de las Escuelas de Ceuta y Melilla que continúan, las de Almería y Jaén. No obstante los programas eran muy similares en todas las escuelas, salvo la optatividad.

6. El número natural	Construcción de N. Leyes de composición interna. Operaciones en N. Orden en N. Divisibilidad de N. Sistemas de numeración.
7. Estructura de grupo	Concepto de grupo. Subgrupo. Relación de equivalencia asociada a un subgrupo. Grupo cociente de un grupo conmutativo. Homomorfismos de grupos: descomposición canónica.
8. Estructura de anillo	Concepto de anillo. Subanillo. Ideales. Relación de equivalencia asociada a un ideal. Anillo cociente. Homomorfismos de anillos. Descomposición canónica de un homomorfismo entre anillos. Construcción de Z. Estructura algebraica de Z. Orden en Z
9. Divisibilidad en un anillo principal	Relación de divisibilidad en Z. Inclusión de los ideales de Z por la relación de divisibilidad. Máximo común divisor. Igualdad de Bezout. Elementos primos entre sí. Algoritmo de Euclides. Elemento primo. Ideal maximal. Descomposición de los elementos de un anillo en factores primos. Mínimo común múltiplo. Cálculo de m.c.d. y del m.c.m mediante factorización.
10. Estructura de cuerpo	Estructura de cuerpo. Ecuaciones no resolubles en Z. Construcción de Q. Estructura de Q. Orden en Q.

Como se puede observar, los contenidos de la asignatura se corresponderían con los contenidos de un álgebra básica que se aposentaba en la lógica y la teoría de conjuntos de plena vigencia en esos años en todos los niveles de la formación de los estudiantes, incluidos los de las etapas más básicas. La metodología estaba asociada fundamentalmente a la lección magistral y la evaluación se centraba en los exámenes escritos, tres parciales y un final de recuperación. Una referencia básica de esa época la constituía el libro Didáctica de la Matemática de Eugenio Roanes editado en 1969. Este autor, en el capítulo uno, presentaba ‘la Matemática actual’ comparada con las Matemáticas tradicionales indicando que, ‘la matemática moderna es más sencilla, por ser más simple, como consecuencia de estar más elaborada’ y debería llamarse, según este autor, Matemática Actual que será superada con los años y ‘llegará a ser, sin duda, Matemática Antigua’. Aunque se denominara Didáctica de la matemática el libro, que constituía una referencia en nuestro modelo de trabajo en el aula, era de matemáticas ‘puras y duras’ que añadía en cada capítulo un apartado que denominaba ‘didáctica de...’ que consistía en unas orientaciones de cómo enseñar o introducir el tema en la escuela sin establecer conexión alguna entre este apartado y lo anterior.

Muchos de los maestros que ejercen provienen de esta formación que, en muchas ocasiones, algunos la recuerdan con cierta añoranza. Comparada con la etapa actual, este profesorado especializado impartía docencia en la segunda etapa de EGB, que venía a ser, el final de la Educación Primaria y el primer ciclo de Secundaria actuales. Hay que decir que estos maestros especialistas adquirían un alto nivel en matemáticas que además les era muy necesario; por ejemplo, en octavo curso se explicaba la estructura de cuerpo para poner de manifiesto que Q con la suma y el producto era un cuerpo conmutativo.

Los Programas Renovados a nivel general y el fracaso de la matemática moderna a nivel particular generaron también reformas y adaptaciones de las asignaturas. En el caso concreto de las Matemáticas I y II, en el curso 1989-90 los temas fueron los siguientes: Conjuntos y relaciones, Correspondencias y aplicaciones, Números naturales y Sistemas de numeración, Aritmética, Fracciones y Decimales, Magnitudes y su medida, Geometría plana, Geometría del espacio e Introducción a la Estadística. Con adaptaciones posteriores que implicaron la desaparición total de la fundamentación conjuntista, estos contenidos constituirían después la asignatura de primer curso de los siguientes planes de estudio en la Universidad de Granada. En estas fechas ya se estaba publicando la colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje de la Editorial Síntesis, con más de treinta volúmenes sobre las diversas temáticas de matemáticas de la EGB que constituiría una referencia clave en la planificación de las diferentes asignaturas.

En la Tabla 3 se presenta el programa del curso 1985-86 de la asignatura de matemáticas de segundo curso, Matemáticas III y IV.

Tabla 3. Matemáticas III y IV

Tema	Contenidos
1. Sucesiones de números racionales	Valor absoluto en Q. Distancia en Q. El espacio métrico (Q,d). Sucesiones de números racionales. Operaciones con sucesiones. Tipos de sucesiones. Sucesiones extraídas o subsucesiones. Concepto de límite. Sucesiones convergentes. Estructura del conjunto de las sucesiones convergentes. Sucesiones nulas. Estructura del conjunto de las sucesiones nulas. Sucesiones de Cauchy. Estructura del conjunto de las sucesiones de Cauchy. El ideal de las sucesiones nulas.

2. Construcción de R	Necesidad de ampliación de Q. Relación de equivalencia en el anillo Sc respecto del ideal de las sucesiones nulas S_N. Clases de equivalencia. Conjunto cociente: R. Operaciones en R. Propiedades. Inverso en R. Isomorfismo de Q en R_Q. Relación de orden en R: cuerpo totalmente ordenado y arquimediano. Expresión decimal de los números reales. Teorema de la densidad: Q denso en R. Toda sucesión de Cauchy de racionales converge hacia el número real que define.
3. Funciones reales de variable real	Funciones reales de variable real. Funciones continuas. Teoremas básicos sobre continuidad: del Valor intermedio y de Bolzano. Discontinuidades: tipos. Continuidad uniforme. Continuidad y monotonía.
4. Derivadas de las funciones de variable real	Derivadas de las funciones reales de variable real. Interpretación geométrica. Extensión de la noción de derivada. Derivadas sucesivas. Regla de cálculo. Derivada de la función compuesta. Derivada de la función recíproca de otra. Crecimiento y decrecimiento. Introducción al concepto de diferencial. Interpretación geométrica.
4. Conjuntos compactos y conexos en R	Espacio separado. R es un espacio separado. Recubrimientos de R mediante abiertos: casos finitos e infinitos. Espacio compacto: R no es un espacio compacto. Conjunto de compactos. Propiedades de los conjuntos compactos en un espacio separado. Teorema de Heine-Borel. Conjuntos conexos. Caracterización de los intervalos de R. Condición necesaria y suficiente para que un subconjunto de R sea conexo. Conjunto denso.
5. Teoremas sobre derivación de funciones reales	Teorema de Rolle. Teorema de los incrementos finitos. Regla de L'Hôpital. Ampliación al cálculo de límites de funciones

La asignatura de Matemáticas III y IV se correspondería con una asignatura de Análisis matemático básico de los estudios de Matemáticas. En este caso la metodología también estaba basada en las clases magistrales y la evaluación se centraba en los exámenes escritos. En el curso 1989-90 los temas eran los siguientes: Los números naturales, números racionales y números decimales; Números reales; Funciones y gráficas; Límites de funciones; Funciones continuas; Derivación; e Integración.

En la Tabla 4 se presenta la asignatura de tercer curso Matemáticas V y VI del curso 1985-86.

Tabla 4. Matemáticas V y VI

Tema	Contenido
1. Magnitudes y medida	Introducción: Proceso de cuantificación. Concepto de magnitud. Cantidad. Magnitudes escalares. Magnitudes absolutas. Magnitudes discretas. La magnitud longitud. Estructura de módulo. Magnitudes relativas. Medida de magnitudes. Unidad de medida. Razón. Proporción: propiedades. Proporcionalidad entre magnitudes: proporcionalidad directa; proporcionalidad inversa; proporcionalidad compuesta.
2. Espacios vectoriales	Vectores libres del plano. Operaciones. Espacio vectorial. Combinación lineal de un conjunto de vectores. Subespacio vectorial. Características. Suma de subespacios. Dependencia e independencia lineal. Sistema de generadores de un subespacio. Teoremas. Teorema fundamental de los espacios vectoriales generados por un conjunto finito. Base. Dimensión. Coordenadas de un vector de un espacio vectorial de dimensión finita. Cambio de base. Subespacios complementarios. Prolongación de una base. Homomorfismo entre espacios vectoriales: aplicación lineal. Núcleo e imagen de una aplicación lineal. Ecuaciones de una aplicación lineal.
3. Matrices. Determinantes. Sistemas de ecuaciones	Matriz: definición, notación, tipos; igualdad de matrices. Operaciones entre matrices: estructura. Base y dimensión del espacio vectorial de las matrices de orden mxn. Trasposición de matrices. Producto de matrices: Propiedades. Determinantes: Concepto y propiedades. Rango de una matriz. Teorema del rango. Matriz inversa. Concepto de sistema de ecuaciones lineales y de solución. Sistemas equivalentes. Transformación de un sistema en otro equivalente. Regla de Cramer. Teorema de Rouché-Fröbenius. Sistemas homogéneos. Resolución. Conjunto de las soluciones de un sistema homogéneo. Aplicación de los sistemas de ecuaciones homogéneos para conocer la dependencia o independencia lineal de un sistema de vectores. Expresión matricial de una aplicación lineal y de un cambio de base. Resolución de las ecuaciones del núcleo y de la imagen.
4. Plano afín. Plano euclídeo. Transformaciones en el plano	Espacio afín. Sistema de referencia. Cambio de sistema de referencia. Dependencia lineal de puntos. Rectas en el plano. Incidencia. Problemas lineales en el plano afín. Ecuaciones de una variedad lineal afín. Transformaciones lineales. Producto escalar en el plano. Bases ortonormales. Transformaciones ortogonales. Las semejanzas en el plano euclídeo. Problemas de la linealidad. Razón simple. Teoremas de Menelao y Ceva.

La asignatura de Matemáticas V y VI era una mezcla de magnitudes, álgebra lineal y geometría vectorial. Como el resto de las asignaturas experimentó una evolución forzada por los programas renovados de la EGB y en el curso 1989-90 los contenidos eran: Magnitudes, longitud y amplitud, Medida de magnitudes, Proporcionalidad entre magnitudes, Superficie y volumen, Proporcionalidad geométrica y Resolución de problemas.

La tabla 5 presenta los contenidos y el esquema de trabajo de la asignatura Didáctica de la Matemática de segundo curso correspondiente al curso 1985-86.

Tabla 5. Didáctica de las matemáticas

Tema	Contenidos (enunciado de los objetivos terminales del ciclo superior de EGB recogidos en normativa curricular)
1	Emplear el sistema de numeración decimal para leer, escribir, comparar y representar comprensivamente números naturales y decimales (con un máximo de tres cifras decimales).
2	Aplicar correctamente las operaciones con números naturales, suma, resta, multiplicación y división, adquiridas de forma razonada a la resolución de situaciones referidas a la vida real.
3	Aplicar correctamente los números fraccionarios y los automatismos operatorios (suma, resta, multiplicación y división), adquiridos de forma razonada, a la resolución de situaciones problemáticas; por ejemplo: partes de un todo, aproximación de una medida, cociente indicado de dos números, probabilidad.... y otros casos que pudieran presentarse.
4	Aplicar correctamente las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) con una aproximación hasta la milésima, a la resolución de situaciones problemáticas.
5	Aplicar correctamente las operaciones (suma, resta, multiplicación y división) con números enteros a la resolución de situaciones problemáticas de la vida real, por ejemplo: temperaturas, ganancias y pérdidas, alturas respecto al nivel del mar, cotizaciones en bolsa, deportes...

6	Emplear correctamente las potencias y sus propiedades con exponente entero positivo y exponente entero negativo con base 10, para plantear y resolver situaciones matemáticas que requieran su expresión tales como: la divisibilidad, las relaciones entre magnitudes, la descomposición polinómica, etc. Aplicar la raíz cuadrada, realizada por tanteo o aproximación con radicandos menores que 1000 y una aproximación hasta las décimas a la resolución de situaciones problemáticas que requieran su cálculo; por ejemplo: aplicación del teorema de Pitágoras.
7	Resolver situaciones problemáticas de la vida real de porcentajes, intereses, repartos proporcionales, descuentos, desgravaciones, cambios de moneda..., aplicando los principios básicos de proporcionalidad aritmética.
8	Aplicar las unidades usuales de medida de longitudes, superficies, volúmenes, masas, capacidades, tiempo y amplitud de ángulos, a la resolución de problemas de la vida real, seleccionando la unidad adecuada. Utilizar instrumentos de medida (regla y probeta graduada, balanza...) para realizar mediciones de magnitudes en situaciones de la vida real.
9	Efectuar operaciones mentales exactas y aproximadas para desarrollar la agilidad de cálculo necesario para las relaciones de la vida diaria. Realizar estimaciones aproximadas de medida en situaciones reales con un margen de error aceptable.
10	Aplicar el teorema de Thales a la resolución de triángulos en situaciones geométricas y reales, como cálculo de distancias, cálculo de alturas... Construir e interpretar planos y mapas utilizando escalas.
11	Aplicar el teorema de Pitágoras y las propiedades del triángulo rectángulo a la resolución de situaciones problemáticas geométricas que lo requieran, como cálculo de altura de un triángulo equilátero, cálculo de la diagonal de un rectángulo, etc.
12	Utilizar la calculadora para comprobar resultados y para realizar operaciones complejas, por ejemplo: cálculo de raíces, operaciones con decimales no racionales... Utilizar los conocimientos básicos de informáticas para diseñar sencillos programas que se puedan ejecutar con una calculadora manual o con un ordenador simulado o real.
13	Elaborar e interpretar tablas y gráficos para estudiar y valorar situaciones reales, como variaciones de temperaturas, precipitaciones, elecciones, movimientos demográficos.... Aplicar los conceptos de media, moda y recorrido para analizar estadísticamente un determinado fenómeno científico o social

Esquema general de trabajo para cada uno de los objetivos terminales

1. **Objetivo general**
2. **Conocimientos previos: desglose de contenidos en los Ciclos Inicial y Medio y base de su metodología.**
3. **Necesidad del objetivo, su conexión con el resto y aplicaciones principales del mismo.**
4. **Contenidos: desglose por niveles**
5. **Recursos metodológicos básicos**
6. **Objetivos operativos**
7. **Evaluación**
8. **Consideraciones históricas sobre el tema**
9. **Material**
10. **Bibliografía y documentación distribuida en dos apartados: básica y complementaria**

Didáctica de las Matemáticas era la única asignatura obligatoria que estaba referida a la enseñanza de las matemáticas; sus temas lo constituían los trece objetivos terminales del currículo de matemáticas del Tercer Ciclo de la EGB (sexto, séptimo y octavo cursos); en mayo de 1984, en el marco de una reforma del Ciclo Superior de la EGB se estableció un nuevo listado de treinta objetivos terminales que resultaron del desglose y precisión de los trece objetivos iniciales; el Grupo de EGB de la APMA (asociación de profesores de matemáticas de Andalucía, coordinados por el profesor Luis Rico realizaron un análisis de esta nueva propuesta en el número 2 de la revista Épsilon (Grupo EGB de la APMA, 1984); este nuevo listado constituyó el nuevo temario de la asignatura Didáctica de la Matemática a partir del curso 1986-87.

El cambio posterior en todas las asignaturas generado por los Programas Renovados llevó a que los temas del 1989-90 en esta asignatura fueran los siguientes: El área de didáctica de la matemática: Institucionalización, aprendizaje, problemas y perspectivas, Diseño curricular de matemáticas para la enseñanza obligatoria, Medios, materiales y recursos para la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, Didáctica de la aritmética en la enseñanza obligatoria, Didáctica de la geometría en la enseñanza obligatoria y Didáctica de las magnitudes en la enseñanza obligatoria.

En cualquiera de las etapas de esta asignatura, los estudiantes trabajaban en grupos que se constituían desde el comienzo del curso y debía desarrollar el tema que le correspondiese siguiendo el guión de trabajo establecido; previamente el profesorado presentaba un ejemplo desarrollado de guía que solía coincidir con el objetivo primero referido a números y numeración.

La evaluación de la asignatura se centraba en el trabajo en grupo que realizaban los alumnos.

La tabla 6 presenta el programa de la asignatura optativa de segundo curso, Didáctica de la Matemática II, para el curso 1986-87.

Tabla 6. Didáctica de la Matemática II

Tema	Contenido
1. El currículo de matemáticas para la enseñanza obligatoria	Noción general de currículo. Elementos. Desarrollo del currículo de matemáticas. Tipo de desarrollo curricular. Estrategias de cambio. Fases del diseño. Papel de las matemáticas en la Educación. Formas generales de entender la enseñanza de la Matemática.
2. Números y operaciones en el currículo escolar	Aritmética y educación obligatoria. Metas de la enseñanza de la Matemática en la educación obligatoria. Tratamiento de la Aritmética en el currículo matemático para la EGB. Objetivos del aprendizaje de la Aritmética. Carácter parcial del currículo de Aritmética.
3. Contextos numéricos	Noción de contexto. La secuencia. El recuento. Cardinal. Medida. Ordinal. Códigos. Tecla. Operaciones básicas y contextos. Los contextos y las situaciones aritméticas.
4. Utilidad y uso social del número	Competencia numérica en la edad adulta. Analfabetismo aritmético. Competencia numérica para una enseñanza superior. Los números y el profesor de EGB
5. Aprendizaje y adquisición del conocimiento aritmético	La Aritmética y los procesos de pensamiento. Teorías del aprendizaje con influencia en la enseñanza de la aritmética. Piaget y el concepto de número natural. Aprendizaje de conceptos aritméticos.
6. Formación del concepto de número	Primeras experiencias numéricas. La habilidad para contar. Clasificar. Seriar. Aparición de los símbolos. Cardinación. Ordinales. Etapas en la adquisición del número. Números en contexto de medida. El cero.

7. Sistema decimal de numeración	Evolución histórica de la representación de números. Etapas fundamentales. Representación simple. Agrupamiento simple. Agrupamiento múltiple. Sistemas multiplicativos. Sistemas posicionales. Sistema decimal. Los signos. Materiales para el aprendizaje de la numeración.
8. Operaciones aritméticas	Carácter operativo de los números. Etapas en el aprendizaje: las acciones. Modelos para las operaciones. Simbolización. Hechos numéricos y tablas. Estrategias en las operaciones. Material para el aprendizaje.
9. Algoritmos de las operaciones aritméticas	Noción de algoritmo. Algoritmos para la suma. Algoritmos para la resta. Algoritmos para el producto. Algoritmos para la división. Importancia de los algoritmos en la EGB. El pensamiento algorítmico.
10. Resolución de Problemas Aritméticos	Concepto de problemas. Concepto de problema aritmético. Las variables de los problemas aritméticos. Los PAEV. Etapas en la resolución de problemas. Método IDEAL de solución de problemas. La elaboración de pruebas y la evaluación en la R. P.
11. Cálculo mental	Cálculo pensado. El aprendizaje de las tablas. Estrategias aditivas. Estrategias multiplicativas. Regularidades de los números. Búsqueda y justificación de patrones numéricos. Regularidades en las tablas. Cálculo rápido. Enigmas numéricos.
12. Estimación	Características de la estimación. Aproximación. Causas de la estimación. Necesidades de aprendizaje de la estimación. Estimación y resolución de problemas. Los contextos y la estimación. Hechos y destrezas de la estimación. Estructuras conceptuales. Estrategias de estimación. La estimación en el currículo de matemáticas para la EGB.

La asignatura optativa Didáctica de las matemáticas II constituía un complemento parcial, ya que estaba restringida a la Aritmética de la asignatura anterior, pues en este caso, se incluían referencias al aprendizaje; hay también un análisis profundo del contenido aritmético que pasaría a formar parte del contenido de las asignaturas de primer curso de planes de estudios posteriores. La evaluación estaba centraba en trabajos individuales y en grupo de los alumnos.

La tabla 7 presenta los contenidos de la asignatura optativa de Informática que comenzó a impartirse a partir del curso 1984-85 empleando como apoyo práctico el microordenador ZX Spectrum que se conectaba a un televisor a modo de pantalla y a una casete que actuaba de unidad de almacenamiento; previo a este ordenador, en la asignatura comenzó a usarse el ZX-81, de uso muy limitado, construido ambos por la casa Sinclair; en los dos casos el lenguaje de programación que admitían era el BASIC.

Tabla 7. Informática

Tema	Contenido
1. Conceptos generales	Introducción histórica. Clasificación de los ordenadores. Hardware y software. Componentes de un ordenador. Representación de datos en la U.C.P. Memoria central o principal. Entrada y salida de datos. Dispositivos de almacenamiento externo. Lenguajes de programación. El compilador y el intérprete. Diagramas de flujo.
2. Generalidades sobre el BASIC	Introducción al BASIC. Historia del BASIC. Versiones del BASIC. Estructura de un programa en BASIC. Algunas ventajas del BASIC
3. Constantes y variables	Constantes numéricas. Constantes alfanuméricas. Variables numéricas. Variables alfanuméricas.
4. Operadores	Operadores aritméticos. Operadores de relación. Operadores lógicos. Operadores con cadenas.
5. Sentencias básicas iniciales	Comentarios en el programa: REM. Sentencia de asignación: LET. Entrada de datos: INPUT. Presentación de datos: PRINT. Fin de programas: END.
6. Comandos de control	Ejecución en modo director e introducción de un programa: RETURN. Ejecución de un programa: RUN. Borrado de un programa: NEW. Borrado de pantalla: CLS. Detención de un programa: BREAK, STOP, CONTINUE.
7. Sentencias de trasferencia de control y bucles	Trasferencia incondicional: GO TO. Trasferencia condicional: IF-THEN. Construcción de bucles: FOR-T... NEXT
8. Funciones	Funciones numéricas. Funciones de cadena. Definición de funciones: DEF, FN.
9. Entrada-Salida de datos	Introducción de datos de entrada: READ, DATA. Relectura de datos: RESTORE. Presentación de datos
10. Matrices	Dimensionado de matrices: DIM. Matrices numéricas. Matrices de cadena.

11. Subrutinas	Definición de subrutina. Llamada a una subrutina: GOSUB. Fin de subrutina: RETURN.
12. Gráficos y movimientos	Gráficos de baja resolución. Gráficos de alta resolución. Gráficos animados por el teclado.
13. Informática y educación	Programación lineal: la máquina de aprendizaje de Skinner. Programación intrínseca: Los lenguajes de autor. Programas C.A.I. Un lenguaje para niños: LOGO. Los programas de simulación. Alfabetización informática. Los programas comerciales y la educación.

Los contenidos de la asignatura de informática estaban dirigidos a la enseñanza y aprendizaje del lenguaje de programación BASIC; este lenguaje no presentaba grandes dificultades para la su comprensión por los alumnos de magisterio de la especialidad de Ciencias Físico-Naturales; constituía un estupendo campo de reflexión sobre el funcionamiento preciso de los algoritmos matemáticos y permitía construir programas sencillos que emulaban diferentes procesos científicos. Este lenguaje compitió en la década de los ochenta con el lenguaje PASCAL, que se impondría en niveles de Secundaria; también en esa década y en niveles elementales se trabajó con el lenguaje de programación LOGO con el que se constituyeron seminarios y grupos de investigación, se publicaron libros y se leyeron algunas tesis doctorales. El programa de esta asignatura evolucionó posteriormente cuando se extendió el uso de los llamados ordenadores personales (PC) que utilizaban como sistema operativo el MS-DOS y admitían el uso de distintos programas como BASIC, LOGO y Pascal. Los contenidos de esta asignatura en el curso 1988-89 incluían como bloques temáticos: Introducción al MS-DOS; Programas de aplicación (Procesador de textos y Bases de datos) y Programación (LOGO y BASIC); en algunos de los temas se incluían contenidos relativos a las posibilidades didácticas del contenido. La evaluación se centraba en los trabajos realizados por los alumnos. En el curso 1989-90 cambión su denominación a Informática aplicada a la Educación con cuatro temas: Conceptos básicos, Ordenadores y educación, Aplicaciones de los ordenadores y Programación en LOGO.

En la tabla 8 se presentan los contenidos de la asignatura optativa de Didáctica de la Geometría correspondiente al curso 1988-89.

Tabla 8. Didáctica de la Geometría

Temas	Contenido
Tema 1	Material en la enseñanza-aprendizaje de la geometría
Tema 2	Geometría constructiva: modelos geométricos
Tema 3	Estudio de los poliedros regulares
Tema 4	Geometría visual: calidoscopios
Tema 5	El geoplano: polígonos en el geoplano
Tema 6	Geometría dibujada
Tema 7	Aprendizaje de la geometría: niveles de Van-Hiele
Tema 8	Entorno, razón y representación

La asignatura de Didáctica de la Geometría se centraba fundamentalmente en el trabajo con materiales geométricos como el geoplano y geoespacio, cuerpos geométricos, recortables y troquelados para la construcción de cuerpos geométricos y libro de espejos.

El contenido de esta asignatura, posteriormente, pasaría también a formar parte de la asignatura de primer curso, en la parte práctica de geometría.

En la tabla 9 se presentan los contenidos de la asignatura optativa Estadística I que se impartía en el curso 1988-89 y en la que ya comenzaban a incorporarse el uso de ordenadores que en cursos previos no se habían considerado. Se ofertaba a los alumnos en el primer cuatrimestre del curso y estaba dirigida fundamentalmente al alumnado de tercer curso.

Tabla 9. Estadística I

Tema	Contenido
1. Introducción	Significado de la palabra estadística. Aplicaciones de la Estadística. La Estadística como materia cultural. La Estadística en la Escuela. Papel de los ordenadores en el aprendizaje y la práctica estadística. Algunos conceptos básicos sobre informática

2. Recopilación y preparación de datos para el análisis estadístico	Poblaciones y muestras. Fases en la elaboración de encuestas. Casos prácticos de recogida de datos. Ejemplos de registros de datos. Organización de la información.
3. Distribución de frecuencias. Gráficos	El enfoque exploratorio en el análisis de datos. Tablas de frecuencias de variables estadísticas cualitativas. Diagramas de barras y gráficos de sectores. Variables cuantitativas: frecuencias acumuladas. Variables agrupadas: intervalos de clase. Histogramas y polígonos de frecuencias. Gráfico de tronco. Series cronológicas.
4. Características de una distribución de frecuencias	Características de posición central: la media. La moda. Estadísticos de orden. Características de dispersión. Características de forma. Curva de concentración.
5. Variables estadísticas bidimensionales	Dependencia funcional y dependencia aleatoria entre variables. Los conceptos de regresión y correlación. Variables estadísticas bidimensionales. Análisis de tablas de contingencia. Recta de regresión mínimo-cuadrática. Coeficiente de correlación lineal. Interpretación.
6. Índices, precios y aplicaciones	Los números índices: índices simples y compuestos: el índice de Laspeyres. El índice de precios al consumo; encuesta de presupuestos familiares. Cálculos con el IPC: obtención del aumento mensual; aumento mensual acumulado; cambio de base. Aplicación en el aula.
7. Series de tiempo	Definición. Componentes fundamentales de una serie de tiempo. Suavización de la serie. Movimientos medios centrados y no centrados. Métodos para la determinación de la tendencia. Determinación de la componente estacional. Variaciones cíclicas y aleatorias. Aplicaciones.

La asignatura de Estadística I estaba orientada a que los alumnos adquiriesen los conceptos básicos de Estadística Descriptiva y emplearlos en recogida, descripción e interpretación de conjuntos sencillos de datos, así como adquirir un conocimiento crítico de los materiales para la enseñanza y la metodología de su empleo en el aula.

En la tabla 10 se presentan los contenidos de la asignatura optativa Estadística II que se impartía también en el curso 1988-89 y ofertaba a los alumnos en el segundo trimestre del curso para alumnos de tercer curso.

Tabla 10. Estadística II

Tema	**Contenido**
1. Introducción	Estadística y Cálculo de Probabilidades: desarrollo histórico y perspectiva actual. Situación de la enseñanza obligatoria y relación con otras disciplinas. Fenómenos aleatorios: Azar y lenguajes. Azar en la realidad: el mundo biológico, físico, social y político.
2. Conceptos de probabilidad	Propiedades de las frecuencias relativas. Noción frecuencial de probabilidad. Otros conceptos de probabilidad: clásica, lógica, subjetiva. Probabilidad formal.
3. Desarrollo de la intuición probabilística	La intuición del azar y de la frecuencia relativa. Estimación de posibilidades y noción de probabilidad. Operaciones combinatorias. Sesgos más frecuentes en la estimación de probabilidades.
4. Metodología de la enseñanza de la probabilidad	Consideraciones generales. Estudio de experiencias en otros países. Objetivos, contenidos y secuenciación. Materiales y recursos.
5. Axiomas de probabilidad. Consecuencias	Modelo matemático del cálculo de probabilidades. Experimentos y sucesos aleatorios. Espacio muestral. Álgebra de sucesos. Axiomas de probabilidad y sus consecuencias. Regla de Laplace. Probabilidades geométricas.
6. Recuento sistemático de resultados: Combinatoria	El problema del muestreo. Muestras ordenadas y no ordenadas. Muestreo con reemplazamiento y sin reemplazamiento. Determinación del número de muestras a partir de un conjunto dado: variaciones con y sin repetición; permutaciones; combinaciones con y sin repetición. Aplicación al cálculo de probabilidades.
7. Probabilidad condicional. Dependencia	Probabilidad condicional. Probabilidad de la intersección de sucesos. Dependencia e independencia. Experimentos compuestos. Experimentos independientes. Teorema de la probabilidad total y de Bayes.
8. Variable aleatoria y esperanza matemática	Variables aleatorias y sus tipos. Distribución de probabilidad. Función de distribución. Esperanza matemática. Características de una variable aleatoria. El concepto de juego equitativo. Problemas elementales de decisión.
9. Distribución de probabilidad	Distribución uniforme discreta. Distribución binomial. Distribución geométrica. Distribución hipergeométrica. Distribución normal.
10. Introducción al muestreo e inferencia	Muestreo probabilístico. Principales tipos de muestreo. Distribuciones asociadas al proceso de muestreo. Distribución de estadísticos en el muestreo. Concepto de intervalo de confianza. Ejemplo de cálculo de intervalos de confianza.

La orientación de la Estadística II se dirigía a adquirir los conceptos elementales del Cálculo de probabilidades y su papel en la enseñanza obligatoria.

Las asignaturas optativas del plan 1971 Álgebra lineal, Álgebra y Geometría y Teoría de Colas, no han podido recuperarse de los archivos del departamento del que se han extraído el resto de las asignaturas.

Para concluir este apartado, la revisión de programas anterior, relativa al Plan de Estudios de 1971, pone de manifiesto, en primer lugar, que la formación en didáctica de la matemática del estudiante para profesor constituía fundamentalmente una formación con mucho contenido matemático y poco contenido didáctico, si bien es cierto que, en los casi 25 años que estuvo vigente el plan, experimentó una evolución impulsada por el movimiento renovador de las enseñanzas básicas que se trasladó a la enseñanza universitaria, aupada por la constitución de los departamentos que en el caso concreto de Didáctica de la Matemática, supuso una implicación de todo su profesorado en la investigación, publicación de artículos y edición de textos que tenían como fin la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Los planes de estudios del 91

La promulgación de la LOGSE en 1990 (desaparece la EGB como enseñanza obligatoria y surge la Educación Primaria de 6 a 12 años y Secundaria obligatoria de 13 a 16 años) requirió, como es lógico, del establecimiento de unos nuevos planes de estudio para la formación del profesorado y la LRU de 1983, fue el marco legal donde se produjeron estos cambios. En ese periodo, en muchas universidades, se inicia el cambio de las Escuelas Universitarias del Profesorado en Facultades de Ciencias de la Educación u otro término similar.

El Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, establece el título universitario, oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención.

El plan de estudios de Maestro en Educación Primaria de la Universidad de Granada fue aprobado por la Junta de Centro de la Facultad de Ciencias de la Educación el 6 de abril de 1994 y publicado en BOE el 24 de agosto de ese año, de forma que comenzó su andadura en el curso 1994-95; hubo una posterior modificación técnica de los títulos en 2001, que afectó principalmente al número de créditos (Segovia et al. 2005); los diferentes títulos de maestro estaban inspirados en 'acercar la formación universitaria a la realidad social y profesional actual' (FCE, 2000).

En el caso de la Didáctica de la Matemática, la formación del Maestro Especialista en Educación Primaria (maestro generalista) quedó reducida a una asignatura de 9 créditos[2] (inicialmente 8) de Matemáticas y su Didáctica en primer curso (asignatura troncal, obligatoria para toda España) y otra de 4.5 (inicialmente 4) en segundo, Currículo de Matemáticas en Educación Primaria (asignatura Obligatoria sólo para la Universidad de Granada). Los alumnos debían completar su formación con 17,5 créditos de asignaturas optativas específicas de la carrera y 19 créditos de libre configuración. Se produce así una reducción de más del 70 % en los créditos asignados a las matemáticas en la formación de maestros. El resto de las especialidades de Educación Primaria tenían una asignatura de 4.5 créditos, también denominada Matemáticas y su Didáctica.

En la tabla 11 se presenta el cuadro de asignaturas del departamento de Didáctica de la Matemática de la diplomatura de maestro en Educación Primaria.

Tabla 11. Asignaturas de la diplomatura de Maestro en Educación Primaria

<table>
<tr><th>Curso</th><th>Asignaturas troncales</th><th>Asignaturas optativas</th><th>Asignaturas de libre configuración</th></tr>
<tr><td>1º</td><td>Matemáticas y su Didáctica (9 c.)</td><td></td><td rowspan="3">Análisis de datos y su didáctica (9 c.).

Didáctica de las matemáticas y nuevas tecnologías de la información (9 c.).

Internet en didáctica de las Matemáticas (6 c.).</td></tr>
<tr><td>2º</td><td>Currículo de Matemáticas en Educación Primaria (4,5 c.)</td><td>Enseñanza y Resolución de Problemas en Matemáticas (6 c.)</td></tr>
<tr><td>3º</td><td></td><td></td></tr>
</table>

2 Se establece en estos planes el crédito, igual a diez horas lectivas, como nueva unidad de medida de la carga docente del profesorado. En los planes anteriores las asignaturas eran cuatrimestrales o anuales.

Con estos nuevos planes la Universidad de Granada y de manera particular la Facultad de Ciencias de la Educación, establece como norma que los programas de las diferentes asignaturas sean públicos y accesibles para los alumnos; así, se editaban antes del comienzo de cada un curso un dosier denominado Guía del Estudiante en el que se incluían los programas de todas las asignaturas que constaban de Introducción, Objetivos, Contenidos por temas, Metodología, Evaluación y Bibliografía. Describimos a continuación sólo los contenidos de las diferentes asignaturas tomados de la Guía del Estudiante del curso 2000-01 (Facultad de Ciencias de la Educación, 2000).

En la tabla 12 se presentan los contenidos de la asignatura Matemáticas y su Didáctica en la educación Primaria.

Tabla 12. Matemáticas y su Didáctica

Tema	Contenido
1. El número natural. Sistemas de numeración	Usos del número natural. Concepto de número natural. Ordenar y cuantificar. Sistemas de Numeración: antecedentes y evolución. Sistemas posicionales. El sistema de Numeración Decimal. Operaciones aritméticas en distintos sistemas. La construcción del número en el niño. Desarrollo de la comprensión del sistema de numeración decimal. Materiales y recursos.
2. Aritmética	Operaciones aritméticas en el conjunto N. Estructura aditiva: Suma y resta. Definiciones y propiedades. Situaciones y contextos de suma y resta. Representaciones de las operaciones de adición y sustracción: modelos, simbolización, hechos y tablas. Algoritmos. Problemas de estructura aditiva. La estructura multiplicativa: multiplicación y división. Definiciones y propiedades. Situaciones y contextos de multiplicación y división. Representaciones de las operaciones de multiplicación y división: modelos, simbolización, hechos y tablas. Algoritmos. Problemas de estructura multiplicativa. Cálculo mental. Estimación en cálculo. La calculadora en el aula. La Resolución de Problemas de aritmética. Materiales y recursos para la enseñanza de la aritmética.

3. Números racionales	Definición y significados del concepto de fracción. Modelización de las fracciones. Concepto de número racional. Operaciones con números racionales. Propiedades. Orden en el conjunto de los racionales. Los números decimales. Conceptos y representaciones. Operaciones con decimales. Algoritmos. La familia de los decimales.
4. Geometría	Geometría del plano: Primeros elementos geométricos: punto, recta, plano, espacio. Semirrecta. Semiplano. Segmentos. Ángulos. Medida de ángulos. Relaciones entre elementos: incidencia, paralelismo, perpendicularidad. Polígonos: diferenciación y clasificaciones. Triángulos. Elementos. Clasificación. Propiedades. Cuadriláteros. Elementos. Clasificación. Propiedades. Figuras curvilíneas; circunferencia y círculo. Geometría del espacio: Rectas y planos en el espacio. Ángulos diedros y poliedros. Cuerpos geométricos y sus elementos. Poliedros. Fórmula de Euler. Poliedros regulares. Prismas y pirámides. Cuerpos de revolución. Transformaciones geométricas: Traslaciones, giros y simetrías. Composición de movimientos. Materiales y recursos para la enseñanza de la geometría. Geometría en el entorno. Análisis geométrico.
5. Magnitudes y medida	Importancia social y cultural de la medida. Aproximación al concepto de magnitud; tipos de magnitudes y ejemplos. Situaciones y contextos asociados a las magnitudes. Noción de cantidad. Necesidad de la medida; soluciones históricas. Concepto de medida; unidad de medida; el Sistema Internacional de Medida (SI). Medida directa de magnitudes (longitud, amplitud, superficie, volumen, masa, capacidad, tiempo); instrumentos de medida. Medida indirecta de magnitudes. Longitudes: circunferencia y arco; Teorema de Pitágoras; Teorema de Tales. Amplitud: ángulos centrales de un círculo. Superficie: Áreas de figuras planas; áreas laterales y totales de cuerpos en el espacio. Volumen: volúmenes de cuerpos en el espacio. Estimación en medida. Materiales y recursos.
6. Introducción a la estadística y a la probabilidad	Introducción. Conceptos básicos: datos, poblaciones y variables. Herramientas estadísticas. Tablas y gráficas: diagrama de barras, polígono de frecuencias, diagrama de sectores, histograma. Descripciones numéricas de los datos: Medidas de Posición (media, mediana y moda) y medidas de Dispersión (rango y desviación típica). Probabilidad Azar. Fenómenos aleatorios. Noción de probabilidad. Asignación subjetiva de probabilidades. Probabilidades en sucesos elementales equiprobables. Regla de Laplace. Estimación de probabilidades a partir de las frecuencias relativas. Materiales y recursos.

Esta asignatura estaba orientada 'a consolidar y profundizar en la formación del profesor de Educación Primaria en los contenidos de las matemáticas básicas y de los procesos implicados en su enseñanza y aprendizaje' (FCE, 2000, p. 404). Como puede verse, esta asignatura resultaba de la evolución de la de Matemática I y II del plan anterior de la que se habían eliminado cualquier vestigio relacionado con la teoría de conjuntos. Hay que hacer notar que este proceso no fue del todo sencillo y que en el Departamento de Didáctica de la Matemática se generó un intenso debate acerca de la desaparición de los 'conjuntos' que impedían sustentar de manera formal conceptos como el de número natural o el de magnitud.

En la tabla 13 se presentan los contenidos de la asignatura Currículum de Matemáticas en Educación Primaria.

Tabla 13. Currículo de matemáticas en educación primaria

Tema	Contenidos
	Fundamentos teóricos
1	El aprendizaje de las matemáticas. Errores y dificultades
2	El área de matemáticas en el sistema educativo
3	Objetivos del área de matemáticas en la educación primaria
4	Contenidos del área de matemáticas en educación primaria. Fenomenología de los conocimientos del área. Aplicaciones. Situaciones.
5	Métodos de enseñanza de las matemáticas en educación primaria. Resolución de problemas.
6	Medios didácticos en el área de matemáticas e educación primaria
7	Procesos de evaluación en el área de matemáticas en educación primaria
	Aplicación práctica: diseño de unidades didácticas
Aritmética	El concepto de número natural. El sistema de numeración decimal. Adición y sustracción de números naturales. Algoritmos. Fracciones. Decimales. La calculadora. Cálculo mental y estimación. Resolución de problemas aritméticos.
Magnitudes y Medida	Longitud. Superficie. Amplitud. Volumen y capacidad. Masa. Tiempo. Dinero.

Geometría	Estudio de los elementos del plano y sus relaciones. Nociones topológicas. Sistemas de referencia en el plano. Elementos de la geometría del espacio. Poliedros. Cuerpos de revolución.
Estadística	Estadística descriptiva. Introducción la noción de probabilidad.

La asignatura anterior tenía como objetivo 'realizar un análisis del currículo de educación primaria desde la didáctica de la matemática' (FCE, 2000, p. 124) con un carácter eminentemente práctico para los alumnos que debían elaborar por grupos una unidad didáctica.

Con esta asignatura se completaba la formación en didáctica de la matemática de los estudiantes para profesor de Educación Primaria; el resto de la formación tenía carácter opcional.

En la tabla 14 se presentan los contenidos de la asignatura optativa Enseñanza y Resolución de Problemas en Matemáticas de 6 créditos.

Tabla 14. Resolución de Problemas en Matemáticas

Tema	Contenidos
1.	Introducción a la resolución de problemas en Matemáticas Escolares. Concepto de problema matemático. La enseñanza de las matemáticas y la resolución de problemas. Etapas en la resolución de problemas. Estrategias. Heurísticos
2.	Análisis y resolución de problemas aritméticos. Problemas aritméticos escolares (PAE). Estructura de los PAE. Variables. Problemas de estructura aditiva. Problemas de estructura multiplicativa. Problemas de varias etapas. Los PAE en el currículo de las matemáticas escolares.
3.	Análisis y resolución de problemas geométricos. Problemas geométricos escolares (PGE). Problemas de construcción. Problemas de contar. Problemas de transformaciones/relaciones. Los PGE en el currículo de las matemáticas escolares.
4.	Análisis y Resolución de problemas aritmético-Geométricos. Relaciones entre Aritmética y Geometría. Números figurados. Patrones geométricos en tablas numéricas. Los PGE en las identidades algebraicas y en las regularidades numéricas.

La asignatura anterior estaba dirigida al alumnado de segundo y tercer curso de las distintas especialidades de magisterio y trataba de constituir un complemento de formación de las asignaturas obligatorias así como realizar una oferta innovadora de enseñanza basada en la resolución de problemas. La metodología de trabajo en el aula estaba centrada en la clase magistral y la tutorización de grupos en los que estudiantes trabajaban aspectos prácticos de la asignatura. La evaluación se centraba en el trabajo de los grupos.

En la tabla 15 se presentan los contenidos de la asignatura Análisis de Datos y su Didáctica

Tabla 15. Análisis de Datos y su Didáctica

Tema	Contenido
1. Conceptos básicos	La estadística y sus campos de aplicación. Poblaciones, censos y muestras. Técnicas y métodos de obtención de datos. Fuentes de datos. Ejemplos de instrumentos de recogida de datos. Escalas de medida y tipos de variables. Propósito de los métodos de análisis: enfoque exploratorio y confirmatorio. Proyectos de análisis de datos. El laboratorio de estadística.
2. Introducción al 'Statgraphics'. Gestión de datos	Acceso al programa. Estructura general: opciones disponibles. El módulo de gestión de datos y utilidades del sistema. Ficheros de datos. Codificación, grabación y edición de datos.
3. Estudio de distribuciones de frecuencias	Distribución de frecuencias y su representación gráfica. Niveles de comprensión y errores en la construcción de tablas y gráficos. Descripción de distribuciones mediante estadísticos: Medidas de tendencia central y medidas de dispersión. Errores y dificultades sobre la media aritmética y otros estadísticos.
4. Relaciones entre variables estadísticas.	Clasificaciones cruzadas. Distribuciones asociadas. Representaciones gráficas: Diagramas de dispersión de dos o tres variables. Histogramas tridimensionales. Asociación estadística. Correlaciones. Ajustes de modelos: regresión lineal bivariante. Pensamiento causal y juicios de asociación. Correlación ilusoria.
5. Introducción al muestreo	Modelos teóricos para la descripción de poblaciones. Las distribuciones binomial y normal. Técnicas para la obtención de muestras. Sesgos en el muestreo. Distribución de estadísticos en el muestreo. Estimación de parámetros: media y proporción. Heurísticos y sesgos.
6. Contraste de hipótesis	Lógica global del contraste de hipótesis. Establecimiento de hipótesis. Tipos de errores. Nivel de significación. Regiones críticas de aceptación. Contraste de diferencia de medias y proporciones. Contrastes sobre relaciones entre variables. Problemas filosóficos asociados al razonamiento inductivo. Errores en el contraste de hipótesis. Uso de la simulación.

7. Currículum e instrucción	El análisis de datos en el currículo. Análisis de situaciones didácticas y libros de texto. Materiales didácticos, tablas estadísticas, calculadoras, conjuntos de datos. Instrumentos de evaluación del razonamiento estocástico. El ordenador y el análisis de datos: hojas electrónicas, bases de datos estadísticos, paquetes gráficos, software estadístico.

La asignatura de Análisis de Datos y su Didáctica, de libre configuración, estaba orientada a futuros maestros y profesores de secundaria como un complemento en su formación en el manejo de técnicas elementales de análisis de datos incluyendo una perspectiva de enseñanza. Constituía una reestructuración de las asignaturas de Estadística I y Estadística II del plan 71 con una incorporación contundente de las nuevas tecnologías y la reflexión sobre la enseñanza en los niveles obligatorios. La metodología estaba basada en la lección magistral y la realización de proyectos por parte de los alumnos. La evaluación se centraba en la calidad de los proyectos y en los exámenes.

En la tabla 16 se presenta la asignatura Didáctica de la Matemática y Nuevas Tecnologías de la Información.

Tabla 16. Didáctica de la Matemática y Nuevas Tecnologías de la Información

Tema	**Contenido**
1. Conceptos básicos	Introducción histórica de la informática. Partes y funcionamiento de un ordenador. Sistemas operativos. El MS DOS. El entorno Windows. Organización de archivos y manejo de discos.
2. Aplicaciones de los ordenadores	Procesadores de textos. Bases de datos. Hojas de cálculo. Diseños gráficos. Diseños de Presentaciones.
3. Ordenadores y educación matemática	La informática como cultura básica. El ordenador como recurso didáctico: programas de simulación; la enseñanza asistida por ordenador; utilización de programas para la Educación Matemática: LOGO y Cabri-Geometre. Evaluación del software educativo.
4. La conexión en red. Posibilidades educativas	Internet: Correo electrónico; consultas de bases de datos; prensa escrita; trasmisión de ficheros.

La asignatura Didáctica de la Matemática y Nuevas Tecnologías de la Información constituía una adaptación de la asignatura Informática del plan anterior al avance de la informática; se había consolidado el uso del ordenador como una herramienta imprescindible en educación que debía actualizarse de manera rápida. La metodología estaba centrada en la clase magistral y los trabajos en grupo; la evaluación valoraba los trabajos en grupo además de un examen final de los contenidos teóricos y prácticos de la asignatura.

En la tabla 17 se presenta la asignatura Internet en Didáctica de las Matemáticas.

Tabla 17. Internet en Didáctica de las Matemáticas

Tema	Contenidos
1. Internet y Educación Matemática	La red Internet. Conceptos básicos. Conexiones. Identificación de los ordenadores. Acceso a Internet. Software y conexiones. La World Wide Web. Conceptos básicos. Navegadores. Navegación por páginas Web. Búsqueda de información en la Web. Usos de Internet en Didáctica de la Matemática.
2. Diseños de unidades didácticas para la Web	Diseño formal: Nociones del lenguaje HTML: introducción al HTML; formato de texto; enlaces; listas; imágenes; formularios; botones y mapas; tablas: marcos (frames)
3. Scripts para la didáctica de la matemática	Nociones de JavaScript. Utilizar JavaScript en un documento HTML, expresiones y operadores. Instrucciones. Eventos. Objetos. Manejo de JavaSript para la didáctica de la matemática.
4. Manipula matemáticas en JAVA	Descripción del lenguaje JAVA. Noción de applet. Cómo insertar un applet en una página Web. Qué son los NIPPES y cómo utilizarlos. Empleo de Applets y NIPPES en didáctica de la matemática.
5. CabriJava	Objetivos de CabriJava. Uso de CabriJava: Parámetros de Java applets y de CabriJava. Operaciones avanzadas de CabriJava. Publicar figuras de Cabri en la Web.
6. Geometría dinámica con Internet con JavaSketchpad	Descripción de JavaSketchpad. Cómo funciona JavaSketchpad: Crear y ver Sketches utilizando Sketchpad. Publicar Sketches en la Web.

La asignatura Internet en Didáctica de las Matemáticas estaba orientada a introducir a los futuros docentes en el mundo de Internet y su relación con la Didáctica de las Matemáticas. Se trabajaba por proyectos y la evaluación se centraba en los trabajos realizados por los alumnos tutorizados por el profesor.

Para concluir, lo relativo al Plan de 1991, se hace necesario reiterar que, la formación en didáctica de la matemática del Maestro de Primaria se redujo a dos asignaturas, con un total de 13,5 créditos (inicialmente 12), de un total de 190, es decir, sólo el 7% de la formación del Maestro de Primaria estaba dedicada a las matemáticas, una de las dos áreas básicas junto con la Lengua, de las cinco que tiene a su cargo. Contrastaba esto con que, para las áreas de Educación Física, Música o Lengua Extranjera, por ejemplo, había una carrera entera dedicada a cada una de estas áreas. Es evidente que los planes de estudio de 1991 eran extraordinariamente deficitarios en matemáticas. Sin embargo, hay una cuestión que agrava aún más la situación; en realidad, todos los demás maestros especialistas, con sólo 4,5 créditos de formación en Didáctica de la Matemática, el 2,3% de su formación, son también maestros de Educación Primaria según la ley y por tanto maestros de matemáticas. Los maestros que en estos momentos ocupan las aulas de Educación Primaria provienen, en una gran parte, de los planes de estudio 1991; fueron 18 promociones de maestros con esta formación; la última fue la del curso 2010-11; estarán enseñando matemáticas en Educación Primaria hasta dentro de 30 años.

Desde la perspectiva del actual Grado de Maestro en Educación Primaria, en lo que respecta al área de Didáctica de la Matemática, las asignaturas de los planes de estudio que se han descrito, constituyen antecedentes de las actuales, que han ido evolucionando fruto de tres factores importantes: la experiencia docente del profesorado en esos planes durante más de cuarenta años, la investigación en el área que se desarrolla también durante esos años y la reflexión teórica que hacen esos profesores, fruto de la experiencia y la investigación y que queda plasmada en la publicación de multiplicidad de trabajos y especialmente en la edición de libros de texto para los maestros en formación; en todos los casos, los profesores Francisco Fernández García y Francisco Ruiz López han tenido un papel muy relevante.

Referencias

Facultad de Ciencias de la Educación (2000): *Guía de la Facultad.* Universidad de Granada. Granada.

Grupo APMA (1984). Objetivos terminales para el área de matemáticas en el ciclo Superior de la EGB: Una alternativa. *Épsilon 2, pp. 76-89*.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la matemática moderna*. Siglo XXI Editores. Madrid.

Roanes, E. (1969). *Didáctica de las Matemáticas I.* Anaya. Madrid.

Segovia, I., González, F. García, A.L., Zurita, F., Rodríguez, J. Medida, M.D., Márquez, I. (2005). *Evaluación de la titulación: Maestro especialista en Educación Primaria.* Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente. Universidad de Granada. Granada.

La resolución de problemas de final abierto en el aula de primaria y el cambio del profesor

Open ended problem solving in elementary school and teacher change

Mª. Victoria Martínez Videla, Leonor Varas Scheuch
Universidad de Chile

Resumen

La resolución de problemas ocupa un importante lugar dentro de la actividad matemática. Aun así, su implementación en la sala de clases no es una actividad trivial. En este capítulo compartimos una experiencia de implementación de resolución de problemas con un grupo de 11 profesores y sus aulas de escuelas públicas en Chile. Esta experiencia se desarrolló a lo largo de tres años, durante los cuales se trabajó en la implementación de resolución de problemas de final abierto una vez al mes en cada una de las aulas participantes. Describimos el trabajo que realizamos en ese período, ejemplificamos el tipo de tareas utilizadas, para luego centrarnos en indagar en cuales son los cambios vividos y percibidos por los profesores durante dicho periodo.

Palabras clave: resolución de problemas, problemas de final abierto, cambio del profesor.

Abstract

Problem solving has an important place in mathematical activity. Even so, its implementation in the classrooms is not trivial. In this chapter, we share a problem-solving implementation experience with a group of 11 public school teachers and their classrooms in Chile, experience developed over three years, during which time we implemented an activity of open ended problem solving once a month in each classroom. We describe the work made on this period, we exemplified the type of tasks to then focus on investigating what changes are experienced and perceived by teachers during this period.

Keywords: problem solving, open ended problems, teacher change.

Introducción

La introducción de la resolución de problemas en la enseñanza escolar de matemáticas ha cobrado una atención creciente desde que el marco de evaluación de la prueba PISA la incluyó como una de las ocho competencias matemáticas (OECD, 2004). Su descripción en este marco y en los trabajos originales de Mogens Niss (1999) resulta inspiradora y convincente de su valor formativo para desarrollar una alfabetización matemática para la vida, de utilidad clara para toda la población y no solo para aquellos individuos que vayan a especializarse en estudios superiores de base matemática. Sin embargo, su incorporación al aula escolar no ha sido fácil, como tampoco lo ha sido en la formación inicial y continua de profesores (Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. 2016; Felmer, P. y otros, 2015) y por lo mismo sigue siendo un desafío para el sistema educativo. En Chile, la concepción dominante en este ámbito concibe la "resolución de problemas" como la actividad de resolver problemas rutinarios pero contextualizados, con una descripción verbal, en la que aparecen números, con los cuales se deben realizar exactamente aquellos cálculos que se han practicado previamente. La distancia entre esta concepción y la descrita por el marco de evaluación de PISA se vuelve aún más evidente al considerar problemas de soluciones múltiples o incluso infinitas, que no se vinculan directamente con ningún contenido curricular escolar. Preguntar por muchas o incluso todas las soluciones de un problema de este tipo, preguntar si se está seguro de haber encontrado todas las soluciones y la fundamentación de tal certeza, caracterizar un conjunto solución se reconoce como una actividad matemática crucial. Pero ¿tiene sentido promover esto en la educación primaria? ¿no habrá que reservar este esfuerzo para niveles educacionales superiores? Mal que mal, PISA es una prueba destinada a jóvenes de 15 años y, por lo tanto, los ejemplos de problemas de este tipo más divulgados son demasiado difíciles para estudiantes de primaria. Nuestra convicción es que la enseñanza de la matemática debe incluir la actividad matemática genuina a lo largo de todo el trayecto educativo, desde el primer encuentro con la matemática. El razonamiento matemático y la resolución de problemas son esenciales en el desarrollo de la formación matemática para la vida y los niños, desde muy pequeños, las practican con naturalidad y entusiasmo.

Ahora bien, la consideración del desarrollo de competencias en la escuela, entre ellas la resolución de problemas, implican cambios profundos y muchas veces radicales, en el aula y fuera de ella, ya que conlleva un cambio de paradigma que son el resultado de las demandas de nuestra sociedad. Y como todo cambio de paradigma demanda cambios drásticos, de forma y sobre todo de fondo en las prácticas educativas. En este escenario los profesores y profesoras son actores principales para generar el cambio. Sobre ellos recae una responsabilidad mayor que involucra desde distintas formas de instrucción y hasta otras ideas de lo que es la matemática, su enseñanza y su aprendizaje.

Teniendo como base todo lo anterior, llevamos a cabo una experiencia para introducir la resolución de problemas de final abierto en clases de matemática de escuelas primarias, a partir del tercer grado y durante 3 años consecutivos, es decir, con niños desde los 9 años. En este capítulo, describimos la experiencia desarrollada, mostrando algunos de los problemas que utilizamos, para posteriormente detallar el trabajo realizado en torno a describir cómo este tipo de prácticas supone un cambio en los profesores, entendiendo que son ellos y ellas quienes impulsan realmente los cambios dentro del aula y, por tanto, se vuelve imprescindible comprender de qué manera este tipo de experiencias pueden llevar a redefinir y resignificar el trabajo en el aula de matemática.

Descripción de la experiencia

Entre los años 2011 y 2013 se desarrolló el proyecto "Desarrollo de la comprensión matemática y del desempeño a través de la resolución de problemas de final abierto", el que respondió a una iniciativa bilateral Chile–Finlandia. En este marco, los equipos de investigación de la Universidad de Chile y de la Universidad de Helsinki (Finlandia) construyeron y seleccionaron problemas que luego fueron utilizados en clases de matemática por 14 profesores chilenos y 10 profesores finlandeses con sus aulas de primaria. El proyecto partió cuando los niños iniciaban el tercer grado (9 años de edad) y concluyó cuando estos mismos niños terminaban el quinto grado de educación primaria (11 años de edad). Los profesores trabajaron de manera continua con estos grupos durante el desarrollo del proyecto, al menos impartiendo la asignatura de matemática. A lo largo de esos tres años, aproximadamente una vez al mes (siete veces en el año) se dedicó la clase de matemática a la resolución de un problema. Dichos problemas fueron diseñados por todos los profesores participantes y el equipo de investigación de ambas universidades, compuesto por investigadores en educación matemática y profesores. Dado que la implementación suponía ir modificando poco a poco la forma de presentar y gestionar la tarea propuesta, se filmó cada clase y se recogían los trabajos de los alumnos, de manera de poder analizar la puesta en escena en la reunión posterior, en la que además se planificaba la implementación del siguiente problema.

Cada clase de matemática que se dedicó a resolver los problemas planificados no pretendía el aprendizaje de contenidos, sino el desarrollo de competencias. Si bien esto es un aporte crucial a la Educación Matemática, no podemos desconocer la necesidad de cubrir el currículum escolar de contenidos que se han establecido por ley a nivel nacional. Así, promovimos con gran convicción y entusiasmo la realización de clases centradas en la resolución de problemas, pero no propusimos que ellas reemplacen la enseñanza de los contenidos curriculares, ni que toda esa enseñanza se realice de este modo.

Escuelas y salas de clases

Tal como mencionamos anteriormente, en Chile se inició la experiencia en marzo del 2011, al principio del año escolar. Comenzaron participando 14 profesores de 9 escuelas de la ciudad de Santiago. Llegaron al final del tercer año participando en el proyecto 11 profesores. En el caso de Finlandia comenzaron en el proyecto 10 profesores de escuelas cercanas a Helsinki (Vanta y Espoo) y llegaron al final del proyecto 8 profesores.

Algunos ejemplos de problemas

Los problemas implementados, que hemos llamado problemas de final abierto, fueron propuestos por los equipos de investigación de Chile y de Finlandia, y se escogieron considerando que debían permitir obtener más de una respuesta correcta, que pudieran ser abordados con distintos enfoques y que debían permitir posibilidad de dar soluciones diferentes, incluyendo como parte de la solución la estrategia utilizada. En este sentido, los 21 problemas trabajados tienen como característica común:

- tener infinitas o múltiples soluciones posibles
- puedan ser resueltos con distintas estrategias
- no depender el dominio de algún contenido en particular
- tener dentro del enunciado preguntas que permitieran generar argumentos

A continuación presentamos tres de los problemas utilizados a modo de ejemplo, con el fin de ejemplificar el tipo de tarea seleccionada. Partimos por el primer problema implementado, que se utilizó a modo de ensayo y que permite dar una idea de lo sencillo que pueden ser los problemas planteados. Posteriormente, adjuntamos otros dos problemas que son particularmente interesantes, dado que fueron muy valorados por los profesores, dieron pie a un número variado de respuestas de los estudiantes y presentan diferencias en la implementación, en tanto uno de ellos se resolvió son con papel y lápiz y el otro con material extra (cuadraditos de papel y tijera).

El primer problema planteado tuvo por objetivo enfrentar a los estudiantes y a los profesores a una situación que respondiera a las características de un problema de final abierto detalladas anteriormente, pero que fuera sencillo. El problema planteado fue:

Calentando motores

Inventa cálculos cuyo resultado sea 3

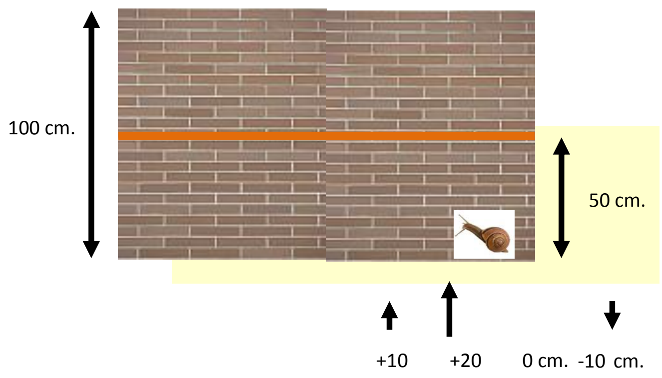
Una vez planteado el problema a los estudiantes se comenzó el trabajo en la búsqueda de diversas soluciones, dado que la situación invitaba a encontrar más de un cálculo. Posteriormente, los profesores trabajaron en la puesta en común, dejando que sean los estudiantes quienes expliquen sus producciones y procedimientos.

Otro problema implementado fue Gary el Caracol, con el que se esperaba trabajar principalmente en torno al desarrollo de representaciones del problema, ya que la creatividad para representar era tan importante como la capacidad de crear distintas soluciones. Por otra parte, en torno al desarrollo de la comprensión matemática, se espera que los estudiantes se acerquen al concepto de neutro aditivo, al trabajar con el 0 como una manera de representar los días que Gary no se mueve y el inverso aditivo, al combinar el subir 10 cm y con bajar 10 cm.

Gary el Caracol

Parte 1

Gary el caracol sube una muralla muy lentamente. Hay días que sube 10 cm, hay días que sube 20 cm, hay días que no se mueve, y hay días que se queda tan dormido que baja 10 cm. La muralla tiene 100 cm de altura.



Muestra una manera en que Gary pueda llegar desde el suelo hasta la mitad de la muralla.

Parte 2

Al final del día 10 Gary está en la mitad de la muralla. ¿Qué pudo haber ocurrido en esos 10 días? Muestra tantas formas como puedas.

El tercer ejemplo es El Cuadrado, problema para el cual los estudiantes recibieron cuadrados de papel y tijeras con los que trabajar de manera concreta. En particular, en este problema se esperaba que los estudiantes, a partir de la producción de varias respuestas, pudieran crear una estrategia para producir soluciones más complejas. Además la creatividad sería un factor clave para crear soluciones visualmente atractivas.

El Cuadrado
Divide un cuadrado en dos piezas que sean iguales.
Muestra todas las formas distintas que puedas.

El trabajo realizado en la implementación de los problemas fue recogido en un libro cuyos coautores fueron los profesores participantes del proyecto, en el que fue posible ejemplificar la implementación utilizando producciones de los estudiantes (Araya y Varas, 2013).

Cambio del profesor

Las expectativas con la experiencia descrita anteriormente eran que los niños desarrollarían una comprensión más profunda de la matemática estudiada a ese nivel escolar, mayores destrezas en la resolución de problemas, mayor confianza en sus capacidades y mayor creatividad para trabajar matemáticamente, además de ampliar y enriquecer sus ideas acerca de la matemática, su enseñanza y su aprendizaje. Los profesores, por su parte, también cambiarían sus ideas respecto de estos temas, ampliarían y enriquecerían su repertorio de prácticas pedagógicas, además de desarrollar mayores capacidades para escuchar a sus alumnos y seguir sus pensamientos, lo que les llevaría a elevar sus expectativas respecto de las capacidades de sus alumnos.

Es por eso que a partir del trabajo realizado con los profesores y estudiantes durante 3 años, surge como necesidad natural el identificar y entender qué cosas han variado en las aulas, en las formas de interacción profesor-alumno, en la interacción alumnos-matemática, en la gestión de tareas matemáticas, etc. Desde ese cuestionamiento, una forma de acercarse al fenómeno es colocar la mirada en los profesores, como uno de los protagonistas del trabajo realizado. Nos centramos en comprender cómo los profesores perciben el proceso de cambio experimentado en ellos mismos y en sus estudiantes. En consecuencia, nos planteamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Qué cambios perciben los profesores en sí mismos? ¿Qué cambios observan en sus estudiantes? ¿Cuáles son los factores que los profesores identifican como facilitadores u obstaculizadores de estos cambios?

En torno al cambio en los profesores, la literatura subraya el importante papel que juegan las creencias y actitudes en la capacidad de cambio que puedan tener, entendiendo las creencias como las disposición a actuar de una determinada manera y no solo como una verbalización de lo que se cree (Wilson y Cooney, 2003).

En educación matemática la investigación en torno a las creencias, ha definido tres categorías dentro de un sistema de creencias (Op´T Eynde et al, 2002): Creencias sobre la educación matemática (creencias sobre las matemáticas, creencias sobre la enseñanza y aprendizaje de la matemática, creencias sobre la enseñanza en general); Creencias sobre sí mismo (autoeficacia, control, orientación a la tarea); Creencias sobre el contexto social (normas sociales y socio-matemáticas dentro del aula).

Ahora bien, la literatura plantea que el sistema de creencias de los profesores es relativamente estable, o al menos, difícil de modificar, sobre todo las creencias referidas a la autoeficacia (Liljedahl, Oesterle y Bernèche; 2012). Además algunos autores atribuyen la dificultad de cambiar las creencias dependiendo de si son antiguas o nuevas, asumiendo que las creencias nuevas son más permeables al cambio, dado que están en formación. En este mismo sentido, otros autores como Kassila, Hannula, Laine y Pehkonen (2008) plantean que la dificultad radica en si las creencias son nucleares o periféricas, siendo éstas últimas las más propensas al cambio.

En el mismo sentido, y operacionalizando el proceso de cambio de creencias, Smith (1999) a partir de un estudio de casos y mediante la observación, el diálogo reflexivo y los procesos grupales a lo largo de un año escolar, elabora un modelo en que relaciona una nueva creencia (convencerse de un cambio) con un cambio en lo que se hace (práctica) y con un cambio en lo que se declara (verbalización).

Otro factor que incide en el cambio es quién lo promueve, es decir, los profesores se resisten al cambio cuando es impuesto o sugerido por otros, sin embargo se comprometen con él cuando es una iniciativa propia (Richardson, 1998; Freeman, 1992). Es decir, el profesor se compromete con una aproximación metodológica diferente e innovadora cuando ve que éstas funcionan en el aula con sus estudiantes y, por lo tanto, tiene sentido modificar el trabajo que venía haciendo hasta ese momento. Esto se condice con el planteamiento de Stuart y Thurlow (2000) que subrayan que para una persona el cambio en sus creencias significa renunciar a lo familiar y, por lo tanto, es puede ser complejo y desafiante.

Metodología

La investigación en torno al cambio del profesor respondió a un diseño exploratorio descriptivo, en el marco de describir el proceso de cambio experimentado por los profesores participantes en la experiencia de implementación de resolución de problemas de final abierto.

Una vez finalizada la experiencia, y con el fin de indagar en el proceso de cambio que puedan haber experimentado a lo largo de esos 3 años, se realizaron 2 entrevistas. La primera apenas había terminado la experiencia, que tenía como objetivo identificar y describir el cambio de los profesores dentro del aula y la segunda un año más tarde, que nos permitiera distinguir qué cambios habían sido sostenidos en el tiempo.

Para la primera entrevista se utilizó como herramienta metodológica el uso de una viñeta, herramienta que está ideada para indagar en procesos profundos y no consientes (Lieberman, 1987; Aliverti y otros, 2007; Sánchez y otros, 2008; Yañez y otros, 2012). Se utilizó este tipo de herramienta dado que el cambio del profesor es un cambio profundo que ocurre a nivel interno, en el sistema de creencias y actitudes del profesor. Y por otra parte, el cambio demandado a los profesores es "público y oficial" y por tanto, para identificar el cambio que realmente han experimentado es necesario traspasar la barrera de lo que es políticamente correcto declarar a momento de entrevistar al profesor.

En el caso de la segunda entrevista, los profesores evaluaron los elementos identificados como importantes en la primera entrevista y si se habían mantenido en el tiempo. Dado el tiempo transcurrido, cuatro años desde el inicio del proyecto y un año desde la primera entrevista, utilizamos el recuerdo estimulado, en un formato verbal, como herramienta metodológica que permite analizar una situación real en la que el sujeto es parte y le permite reflexionar, evaluar y comprender sus prácticas (Stouhg, 2001; Lyle, 2003). El recuerdo se hizo seleccionando algunos episodios de las reuniones de grupo en las que los maestros mostraron evidencia de sus expectativas sobre la capacidad de sus estudiantes para resolver los problemas. También a cada uno de los profesores presentamos un resumen de sus análisis de la primera entrevista, y realizamos la segunda entrevista tomando ambos materiales (recordatorio verbal y resumen).

Cambios identificados

El análisis de las entrevistas se hizo mediante la creación de categorías que permitieran responder las preguntas plateadas originalmente (Martínez, Araya y Berger, 2017). A continuación resumimos los elementos identificados en primer lugar relacionados con el cambio que los profesores identifican en sí mismo y en sus alumnos, que fueron organizados considerando los elementos listados en la Tabla 1, los cuales están organizados según la clasificación de Op´T Eynde et al. (2002) ya mencionada.

Tabla 1. Cambios identificados en los profesores y en los alumnos

Sujeto que cambia	Respecto de…
En sí mismos (profesor)	Visión de la Matemática
	Enseñanza / aprendizaje de la matemática
	Respecto de sí mismos
En sus alumnos	Visión de la Matemática
	Enseñanza / aprendizaje de la matemática
	Respecto de sí mismos

Respecto del cambio que los profesores perciben en sí mismos, una de las cosas que más subrayan es respecto de cómo consideran la matemática. Desarrollan una visión menos rígida de la disciplina, en donde se acepta más de una respuesta. Consideran la matemática como una asignatura más abierta y que permite diversidad. Esto se hace evidente en declaraciones como:

"…se te rompe el esquema de que hay una respuesta a las que tienes que saber llegar"

"…de parte del profesor hay un cambio de actitud hacia la asignatura (…) es más abierto o sea, es más, no es tan rígido, no es tan cuadrado, no es dos más dos cuatro y tiene que ser eso, puede ser *tres más uno*"

El cambio en el aula como contexto social se centra sobre todo en la forma de participar de los estudiantes, principalmente en elementos como el trabajo colaborativo y el comunicar explicaciones y argumentos al grupo completo. Para que esto suceda los profesores identifican no solo la importancia de que los estudiantes participen, también la de la gestión que ellos realizan:

"…ellos iban a la pizarra y colocaban sus respuestas, hacían sus ejercicios y llenaban la pizarra y uno lo único que hacía era dirigir un poco la orquesta".

"Claro que yo no soy la que da la respuesta, entonces cuando yo capto que alguno tiene un muy buen fundamento matemático "ya, a ver usted, adelante, explíquenos", porque a veces son tímidos (…) entonces los niños se empiezan a abrir y después dicen: "yo parece que también lo hice así" y ahí empiezan a enganchar entre todos, pero en el fondo es eso. Abrir, darles la oportunidad para que ellos puedan expresarse (…) pero no falta el que dice, "no tía, pero así no es porque puede ser de esta otra forma".

Por otra parte, tal como los profesores cambian su creencia respecto de la matemática, considerándola una disciplina más asociada a la creatividad y la flexibilidad, visualizan ese cambio en sí mismos identificándose como personas menos rígidas, es así como en sus discursos es posible identificar evidencia a través de frases como:

"…Pero yo te diría que antes de eso, yo era un profesor netamente esquemático, en ese sentido, las matemáticas tenían una lógica exacta, ya, y no permitía justamente que se abriera este campo de la diversidad de respuestas que podía dar un niño. Por lo cual, en eso creo que me ha permitido jugar mucho más, es decir, con la asignatura. No estoy tan esquematizado…"

Tal como identifican cambios en sí mismos, los profesores identifican claros cambios en sus estudiantes. En primer lugar, observan que sus estudiantes consideran la matemática de manera diferente, más cercana:

"…se les fue cambiando el rostro de la asignatura de matemática. Los chiquillos la encontraron más cercana, más afable, y a lo mejor es porque nosotros mismos como profesores lo dimos a conocer no tan formal, a lo mejor".

En cuanto a cómo los estudiantes trabajan en el aula como un nuevo contexto de aprendizaje, los profesores subrayan que hay una actitud positiva hacia el trabajo colaborativo, hacia el reconocimiento de las equivocaciones y la crítica, esto se traduce en descripciones como:

"súper valioso porque ellos se sienten comprometidos. "Yo! yo tengo una idea" y ellos mismo se dan cuenta "ah! Me equivoqué", entonces el resto dice, "no es que estaba bien, pero podrías hacerlo de otra forma" entonces se comparte ha sido enriquecedor".

En tercer lugar los profesores perciben que sus estudiantes se sienten capaces de resolver problemas, siendo conscientes de que son resolutores creativos. Uno de los profesores decía:

"La creatividad es importante para la resolución de problemas (…) después eso se desarrolló, entraron en confianza y vieron que "ya tengo más creatividad para ir resolviendo mis problemas, voy acumulando y tengo más caminos, y me atrevo más también".

Además de los cambios que los profesores identificaron en sí mismo y en sus estudiantes, identificamos aquellos elementos que los profesores y profesoras valoran como elementos que favorecen o dificultan el cambio (Tabla 2).

Tabla 2. Factores que facilitan o dificultan el cambio

Facilidad / dificultad	Factor identificado
Facilita el cambio	Larga duración del proyecto, que da tiempo de que sucedan los cambios y se valoren. Frecuencia no extenuante de la implementación (una vez por mes). Claridad de la estructura y duración del proyecto. Reuniones mensuales con compañeros y equipo investigadores que generó una comunidad de aprendizaje.
Dificulta el cambio	Cantidad de contenidos que deben cubrir en el curriculum nacional. Poco apoyo institucional, para incluir una práctica diferente en el aula. No se sienten capaces de inventar problemas por su cuenta y tener independencia.

Comentarios finales

La contribución de este trabajo va más allá de la evaluación del éxito de la implementación de la intervención. Este tipo de experiencias a pequeña escala permiten trabajar de manera comprensiva en torno a experiencias de desarrollo profesional. Poner especial atención, no solo en qué sucede, sino en cómo suceden los cambios, el desarrollo de habilidades en los estudiantes y en los profesores.

Además de evidenciar la importancia de trabajar en intervenciones sostenidas en el tiempo, con un objetivo claro de trabajo y que no tengan consecuencias evaluativas en el quehacer de los profesores, nos encontramos con la necesidad de diseñar metodológicamente herramientas que permitan acceder a la voz de los profesores, como actores centrales de esta experiencia. Dichas herramientas nos permitieron acceder al cambio vivido por los profesores, comprenderlo y por otro parte, permitió a los profesores hacerse consientes de dicho cambio. Ser consiente del cambio es parte del desarrollo profesional, y constituye una pieza fundamental para el mejoramiento continuo.

Finalmente, es importante destacar la relevancia de identificar factores que faciliten o dificulten el proceso de cambio, con el fin de desarrollar una intervención eficaz que promueva el desarrollo profesional de los maestros de primaria.

Agradecimientos

Se agradece el financiamento otorgado por la Academia de Finlandia y la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica de Chile mediante el financiamento del proyecto AKA09. También se agradece el financimiento del proyecto Fondecyt 3130702 y por el Proyecto Basal FB0003 del Programa de Investigación asociativa de Conicyt.

Referencias

Alberti, A., Amos, D., Bates, B., Brennan, C. y Carmak, C. (2007). *Study of teacher-consultants and leadership: Vignettes Study. National Writing Project*. (on –line inquiry 14.05.2012: http://www.nwp.org/cs/public/print/doc/results/leadership_vignette.html)

Araya, P. y Varas, L. (2013). *Resolución de problemas de final abierto en clases de matemática*. Santiago de Chile: Maval Editores.

Felmer, P. y Perdomo-Díaz, J. (2016). Novice Chilean secondary mathematics teachers as problem solvers. En P. Felmer, E. Pehkonen y J. Kilpatrick (Eds.), *Posing and solving mathematical problems: Advances and new perspectives* (pp. 287-308). Suiza: Springer. DOI 10.1007/978-3-319-28023-3

Felmer, P., Perdomo-Díaz, J., Cisternas, T., Cea, F., Randolph, V. y Medel, L. (2015). *La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente*. Estudios de Política Educativa, 1 (1), 64-103.

Freeman, D. (1992). Language teacher education, emerging discourse, and change in classroom practice. En J. Flowerdew, M. Brock, y S. Hsia (Eds.), *Perspectives on language teacher education* (pp. 1-21). Hong Kong: City Polytechnic.

Kaasila, R., Hannula, M. S., Laine, A. y Pehkonen, E. (2008). Socioemotional orientation and teacher change. *Educational Studies on Mathematics, 67*(1), 11–123.

Lieberman, A. (1987). *Documenting professional practice: The vignette as a qualitative tool*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association. (ERIC Document Reproduction Service N0. 5485215).

Liljedahl, P., Oesterle, S. y Bernèche, C. (2012). Stability of beliefs in mathematics education: a critical analysis. *Nordic Studies in Mathematics Education, 17*(3-4), 23-40.

Lyle, J. (2003). Stimulated Recall: A report on its use in naturalistic research. *British Educational Research Journal, 29*(6), 861-878.

Martínez, M., Araya, P. y Berger, B. (2017). Descripción del cambio del professor de matemática desde su propia perspectiva a partir de un experiencia en torno a resolución de problemas de final abierto. *Bolema*, v. 31, n. 59, 984 – 1004.

Niss, M. (1999). Kompetencer og Uddannelsesbeskrivelse (Competencies and subject description), *Uddanneise, 9*, 21-29.

OCDE (2004). The PISA 2003 assessment framework: Mathematics, reading, science and problem solving Knowledge and Skills. USA: OECD Publishing.

Op't Eynde, P., De Corte, E. y Verschaffel, L. (2002). Framing students´mathematics-related beliefs: a quest for conceptual clarity and a comprehensive categorization. In G. Leder, E. Pehkonen and G. Törner (Eds.), *Beliefs: a hidden variable in mathematics education?* (pp. 13-37). Dordrecht: Kluwer.

Richardson, V. (1998). How teachers change. What will lead to change that most benefits student learning? *Focus on basics, connecting, research and practice,* 2, issue C.

Sánchez, A. y Domínguez, A. (2008). Elaboración de un instrumento de viñetas para evaluar el desempeño docente. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 37*, 625-648.

Smith, E. (1999). Reflective reform in mathematics: the recursive nature of teacher change. *Educational Studies in Mathematics, 37,* 199 – 221.

Stough, L. (2001). Using stimulated recall in classroom observation and professional development. Paper presented at *the Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Seattle, WA, April 10-14.

Stuart, C. y Thurlow, D. (2000). Making it their own: preservice teachers´ experiences, beliefs, and classroom practices. *Journal of Teacher Education, 51*(2), 113 – 121.

Wilson, M. y Cooney, T. (2003). Mathematics teacher change and developments. The role of beliefs. In Leder, G., Pehkonen, E. y Törner, G. (Eds.), *Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 127-147). Dodrecht: Kluwer Academic Publicher.

Yáñez, R., Ahumada, H. y Rivas, E. (2012). La técnica de viñetas y su aplicación en investigaciones en enfermería. *Ciencia y Enfermería XVIII* (3), 9-15.

Resolución de problemas y tecnología en el desarrollo de la competencia STEM

Problem Solving and Technology for developing STEM competence

José Luis Lupiáñez Gómez
Universidad de Granada

Resumen

La educación STEM (Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemáticas) destaca la importancia de que los estudiantes se involucren en el análisis y la resolución de problemas auténticos, en la construcción de soluciones reales y en la reflexión acerca del papel de estas cuatro disciplinas en el mundo real. En este capítulo introducimos y ejemplificamos tareas que pueden suministrar a los escolares la oportunidad de desarrollar su competencia STEM.

Palabras clave: STEM, modelización, tecnología, tareas escolares

Abstract

STEM education (Science, Technology, Engineering and Mathematics) emphasizes the importance of involve students in analyzing and solving authentic problems, building real solutions and reflecting about the role of these four discipline in real world. This chapter introduce and give examples of tasks that promote opportunities to develop STEM competence in students.

Keywords: STEM, modelling, technology, school tasks

El arte de la enseñanza

Durante el desarrollo de la actividad docente que han desempeñado los profesores Francisco Fernández y Francisco Ruiz, ha sido muy sencillo constatar el entusiasmo y el compromiso de ambos por la educación matemática, por la innovación educativa y por crear y mantener un ambiente de clase cordial, animado y sin renunciar al rigor académico propio de su disciplina. Como señala Lemov (2017), "la enseñanza es un arte" (p. 33), y como tal, aglutina una serie de habilidades que evidencian el dominio y control de una serie de conocimientos, técnicas y recursos, y una predisposición a la creación basada en la expresión más sincera de lo que es hermoso y del quehacer reflexivo y nada arbitrario. Pero la calidad en la docencia rara vez es reconocida y por eso es necesario e importante dejar constancia de quién es merecedor de tal virtud. Los alumnos que han pasado por las aulas de estos dos profesores, también podrían ejemplificar muchas anécdotas que sostendrían estas aseveraciones. Como destaca Raúl Cremades (1999), nadie olvida nunca a un buen maestro. Por mi parte, espero que no les importe que me refiera a ellos aquí como lo hago cuando los veo: Paco Fernández y Paco Ruiz.

La actividad docente de Paco Fernández ha tenido un vínculo muy estrecho con la resolución de problemas. La búsqueda y el planteamiento de enigmas, retos y cuestiones, ha sido una constante en sus clases. Por otro lado, una de las grandes prioridades de Paco Ruiz en las suyas, ha sido la de poner de manifiesto que las matemáticas permiten interpretar, representar y comprender mucho de lo que tenemos a nuestro alrededor. El uso racional y práctico de la tecnología también ha tenido mucha presencia en sus clases. Resolución de problemas, comprensión del entorno y tecnología, son tres factores relevantes para la Educación Matemática y, recientemente, son tres elementos clave para caracterizar el significado de ser competente en STEM.

La competencia STEM responde a un modelo curricular en el que cuatro áreas se conjugan para promover un aprendizaje integrado con un amplio espectro de aplicaciones. Esta competencia enfatiza una estrategia educativa interdisciplinaria, donde los conceptos académicamente rigurosos se acoplan y complementan para responder a diferentes facetas del mundo real (Sanders, 2009). Es decir, se ponen en práctica la ciencia, la tecnología, la ingeniería y las matemáticas en contextos relacionados con la escuela, la sociedad el deporte o el trabajo, entre otros dominios (Tsupros et al, 2009). En este capítulo, y como conexión a algunas de las prioridades docentes de Paco Fernández y Paco Ruiz, concretaré el significado de la competencia STEM y sus antecedentes y ejemplificaré algunas tareas que pueden promover su desarrollo.

La Competencia STEM

La importancia y el reconocimiento de fomentar científicamente a los ciudadanos para sostener el avance social y económico de un país, se consolidó en Estados Unidos a partir de la carrera espacial que acabó la Unión Soviética con el lanzamiento del Sputnik en 1957. En la década de los 70 del pasado siglo, estas voces llegaron al ámbito educativo, y varias asociaciones, entre ellas el NCTM, destacaron también el valor de la formación de los jóvenes en áreas científicas (Berube, 2014). En los 90 se acuñó el término "SMET" para destacar esta formación integral y ya en el siglo XXI se reformuló, también en Estados Unidos, hasta el término que se ha manejado hasta nuestros días. La constitución en 2012 de la STEM Education Coalition[1] en Estados Unidos y en 2015 de la EU STEM Coalition[2] en Europa, que ha dado pie a diversas iniciativas europeas, atestigua el interés internacional de este enfoque curricular.

En los últimos años, son frecuentes las propuestas de intervención centradas en actividades del docente o en tareas que promueven el desarrollo de esta competencia, y que se encuentran tanto en publicaciones internacionales (Isabelle & Zinn, 2017; Rompella, 2015; Sahin, 2015) como en páginas y repositorios de internet: *STEM Education Centre*[3], *InGenious*[4] o *Scientix*[5], entre otros. También son numerosos los análisis y planteamien-

1 http://www.stemedcoalition.org
2 http://www.stemcoalition.eu
3 http://www.cehd.umn.edu/stem
4 http://www.ingenious-science.eu
5 http://www.scientix.eu/

tos curriculares que destacan el gran beneficio social de una “educación STEM” (Johnson, Peters-Burton & Moore, 2015; Felder & Brent, 2016), o cómo ésta puede minimizar brechas sociales (Babaci-Wilhite, 2016; Berube, 2014). Finalmente, también la investigación reciente analiza cuestiones como las anteriores en términos de la formación escolar (Benjumeda y Romero, 2017; Han, Capraro & Capraro, 2016; Taub et al, 2017).

La conjunción de las materias a las que se refiere la competencia STEM no es arbitraria. Las ciencias suministran un contexto de reflexión, organización y actuación. Proponen problemas, cuestiones y contrastes que invitan a la exploración y al descubrimiento y brindan criterios para clasificar y organizar el medio natural, y así profundizar en su riqueza y complejidad. La tecnología ofrece herramientas y técnicas y, junto a la ingeniería, permiten afrontar la construcción de modelos y artefactos que resuelven conflictos o minimizan impactos. El diseño en la actualidad emplea esos dos referentes de manera conjunta: se diseña lo que puede resolver un determinado fenómeno y se afronta su elaboración para después validar su eficacia y su eficiencia y estudiar sus limitaciones. Las matemáticas, finalmente, aportan un modo de expresión y representación, un conjunto de nociones y destrezas que permiten interpretar el entorno, suministran estrategias para inventar y resolver problemas y promueven el pensamiento lógico y crítico (Lupiáñez y Ruiz-Hidalgo, 2016). La competencia STEM permite a los estudiantes comprender el mundo e interactuar con él de manera crítica, constructiva y eficiente. Puede considerarse como una oportunidad de introducir el mundo real a la escuela y conectar los conocimientos impartidos con el contexto social y científico del momento.

Una práctica coherente en una educación que persigue el desarrollo de esta competencia, exige un protagonismo expreso de los escolares: fomentar en ellos la inventiva, la iniciativa y el interés científico y tecnológico pasa por brindarles una mayor autonomía. Además, la curiosidad y el pensamiento crítico son actitudes que ocupan un lugar preponderante y que sólo se desarrollan en un contexto práctico y participativo. Una estrategia docente que resulta muy provechosa para el desarrollo de la competencia STEM, es el aprendizaje basado en proyectos (Capraro, Capraro y Morgan, 2013). A continuación presento dos actividades dirigidas a promover el desarrollo de la competencia STEM.

Planteamiento de tareas para promover la competencia STEM

Las tareas matemáticas escolares constituyen el principal medio por el que un profesor puede incentivar en sus escolares el logro de unas expectativas de aprendizaje y, por tanto, contribuir al desarrollo de sus competencias. La función cognitiva de una tarea se centra en proporcionar un contexto en el cual proponer a los escolares determinadas actuaciones con sentido para ellos, mediante el ejercicio de una o varias habilidades. Una tarea es un reto para el alumno y sirve para motivar la comprensión de un contenido, movilizando conceptos y procedimientos y dotándoles de sentido. Asimismo, es un indicador para que el profesor valore el logro de uno o varias expectativas de aprendizaje. El desarrollo paulatino de las competencias en los escolares se estimulará mediante familias de tareas conexas, que también servirán como instrumentos para valorar el grado de su logro y alcance (Rico y Lupiáñez, 2008).

Las tareas que promueven el desarrollo de la competencia STEM articulan diferentes habilidades en virtud del grado de aplicación de las materias que se relacionan con ella. Los ejemplos que muestro a continuación, destacan sobre todo el vínculo entre la ciencias, las matemáticas y la tecnología. En ellas se emplean distintos tipos de sensores, y software o aplicaciones en diferentes dispositivos.

Siguiendo trayectorias por parejas

Esta propuesta se enmarca en el contexto de estudiantes de 3º de ESO, pero es fácilmente adaptable a otros niveles (Cruz, 2017). Su finalidad es que los escolares estudien, a través de su movimiento, el significado de la resolución de un sistema de ecuaciones lineales a partir de la simulación de la intersección de dos rectas que relacionan un espacio recorrido con un tiempo empleado. Para la puesta en práctica de esta tarea se usan dos sensores de movimiento conectados a un ordenador mediante el programa gratuito *Logger Lite*, ambos de Vernier[6]. Una vez conectados los sensores

6 http://www.vernier.com

por USB o por Bluetooth a un ordenador, el programa puede proponer una gráfica aleatoria que muestra la posición de un móvil con respecto al lugar ocupado por uno de los sensores. Cuando se activa, un sujeto debe posicionarse y desplazarse delante del sensor, mientras éste, en tiempo real, mide la variación de la posición con respecto al tiempo y la representa junto a la gráfica original. Al conectar dos sensores, el programa muestra simultáneamente dos gráficas en colores diferentes. En la Figura 1 se muestra la gráfica generada por el programa (poligonal) y la que genera un escolar cuando se mueve frente al sensor de movimiento. En la imagen se ve cómo un escolar consigue identificar los intervalos de decrecimiento y de crecimiento, aunque no acierta con precisión con la posición inicial y final.

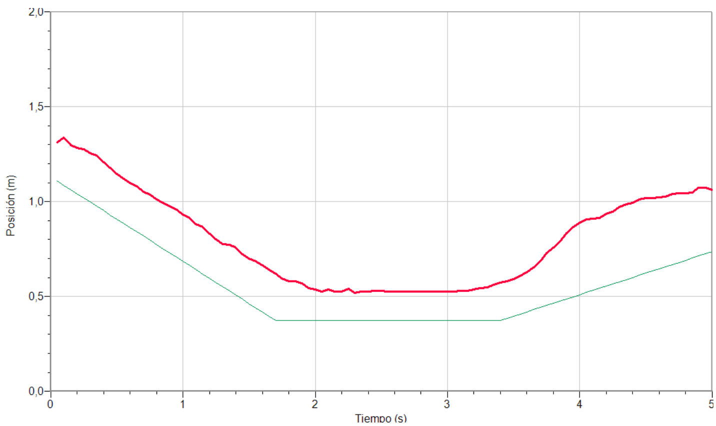
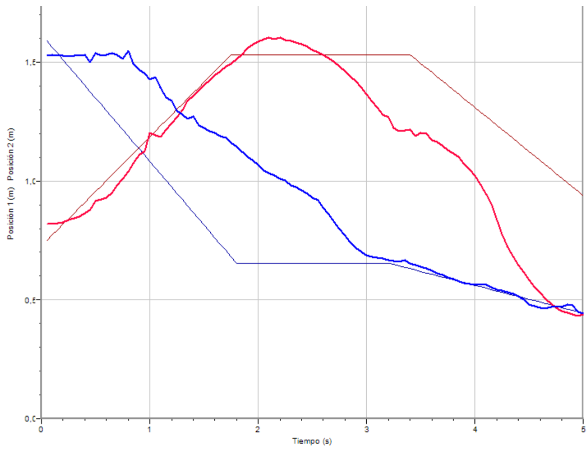


Figura 1. Siguiendo una trayectoria (Cruz, 2017, p. 28)

Tras varios intentos en los que varios escolares trataron de pulir esos errores y después de realizar pares de movimientos por parejas, respondieron una serie de cuestiones sobre el comportamiento de las funciones representadas y finalmente abordaron la reproducción de un punto de corte mediante su movimiento (Figura 2, a y b).

Como se observa en las imágenes, algunos estudiantes que consiguen comenzar en una posición acertada, evidencian ciertas dificultades para reproducir con su movimiento los intervalos de crecimiento (Figura 2a) mientras que a otros (Figura 2b), les cuesta identificar el crecimiento de las funciones en términos de la velocidad correcta de su cuerpo.



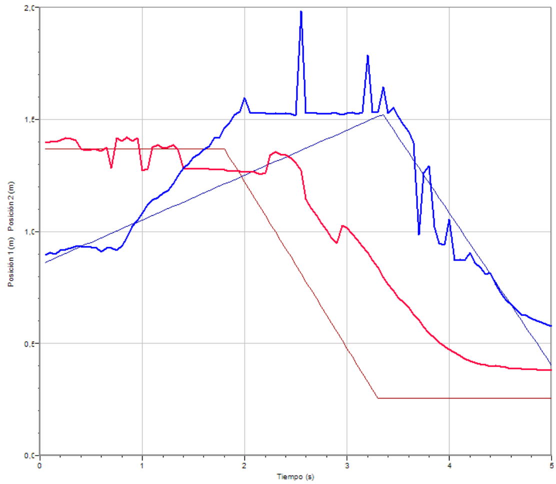


Figura 2 (a y b). Intersección de dos gráficas espacio-tiempo (Cruz, 2017, p. 30)

Esta actividad articula varias habilidades fundamentalmente propias de matemáticas, pero con un fuerte vínculo de actuaciones físicas y de manejo e interpretación de dispositivos tecnológicos. Los resultados evidenciaron un desempeño notable en destrezas técnicas y carencias claramente visibles en la argumentación en contextos aplicados. Esto último resulta clave en términos de la competencia STEM y pone de manifiesto la importancia de hacer más habituales propuestas didácticas con esa orientación y avanzar en su diseño.

¿Cómo voy de rápido?

En la actividad anterior la magnitud física velocidad juega un papel importante en la interpretación de la gráfica generada. En esta otra propuesta, introduciremos cómo se pueden usar otros programas informáticos gratuitos para modelizar matemáticamente un fenómeno de aceleración o de desaceleración cuando un sujeto realiza una carrera.

En la Figura 3 muestro la pantalla principal del programa Tracker[7], cuando se ha cargado en él un vídeo previamente grabado, en el que un estudiante realiza una carrera a lo largo del ancho de una pista deportiva acelerando desde un extremo y frenando en el otro (Hitt, 2018). Tracker permite situar un eje de coordenadas (izquierda de la imagen) además de incluir medidas reales de donde se han grabado las imágenes (15 metros de anchura de la pista en la imagen). Después de seleccionar cada cuantos fotogramas se desean capturas datos, se señalan marcas sobre el sujeto mientras realiza su carrera (círculo sobre la cadera del estudiante corriendo) y cuando esas marcas se compilan, se muestran los datos de tiempo y espacio recorrido y la gráfica consecuente (parte derecha de la Figura 3). Con esos datos, ya se pueden explorar aspectos como tiempo total de carrera, tiempos de aceleración y frenado o el momento en el que se alcanza la máxima velocidad, entre otros. Pero si esos datos se exportan a otro programa gratuito como GeoGebra[8], podemos además modelizar el movimiento del sujeto mediante alguna función.

En GeoGebra se crea una lista con los valores recogida con Tracker, se representan como una nube de puntos y ahora se explora qué función se ajusta mejor a ellos. Al observar un intervalo de concavidad y otro de convexidad, puede sugerirse una función polinómica de grado 3 (Figura 4), si bien la hipótesis de que puede vislumbrarse un movimiento periódico, invita también a probar con una función seno, con la que también se consigue un buen ajuste (Figura 5). En ambos casos, la aproximación debe restringirse al intervalo en el que se han tomado los datos. Si ahora se

[7] https://physlets.org/tracker/
[8] https://www.geogebra.org

construye la recta tangente a cualquiera de esas curvas, se puede abordar el estudio de la velocidad de un modo más preciso que con la exploración con Tracker.

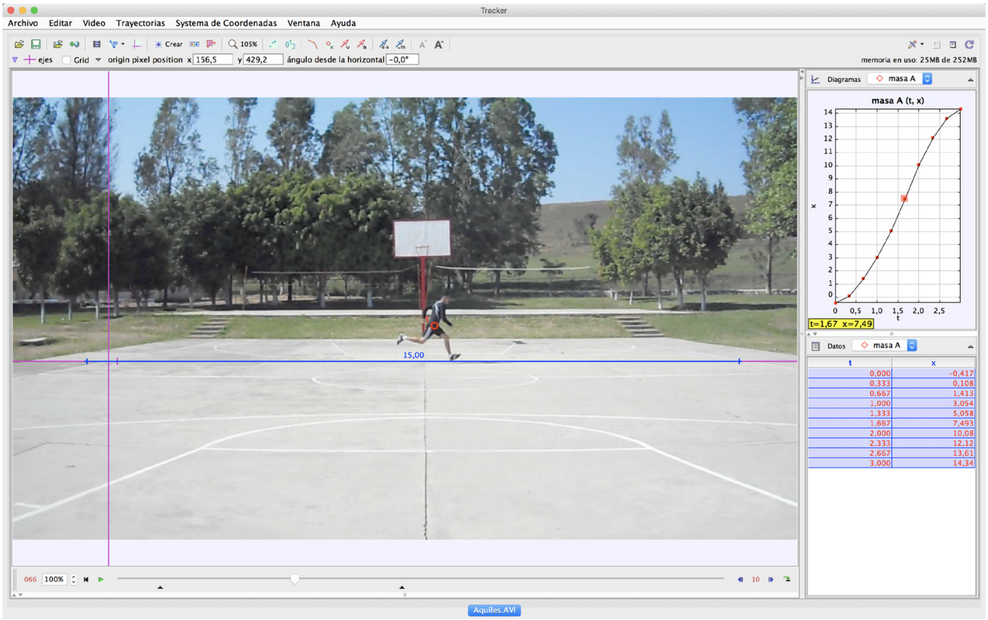


Figura 3. Recopilando y organizando datos con *Tracker* (Hitt, 2018)

En todo caso, el análisis del movimiento analizado desde la Física, permite concretar que ambos movimientos, el de aceleración y el de desaceleración, podrían modelizarse por separado con una función cuadrática, añadiendo otro punto de interés a la actividad. Al tratarse de usar programas informáticos libres, que además funcionan en entornos Linux, MacOs y Windows, su uso y aplicación en el aula es sencillo. Y el hecho de que el punto de partida sea un fenómeno real que se puede capturar incluso con la cámara de un teléfono móvil, brinda una oportunidad accesible de exploración de situaciones reales desde las herramientas de las Ciencias y las Matemáticas con un uso muy racional y práctico de la Tecnología.

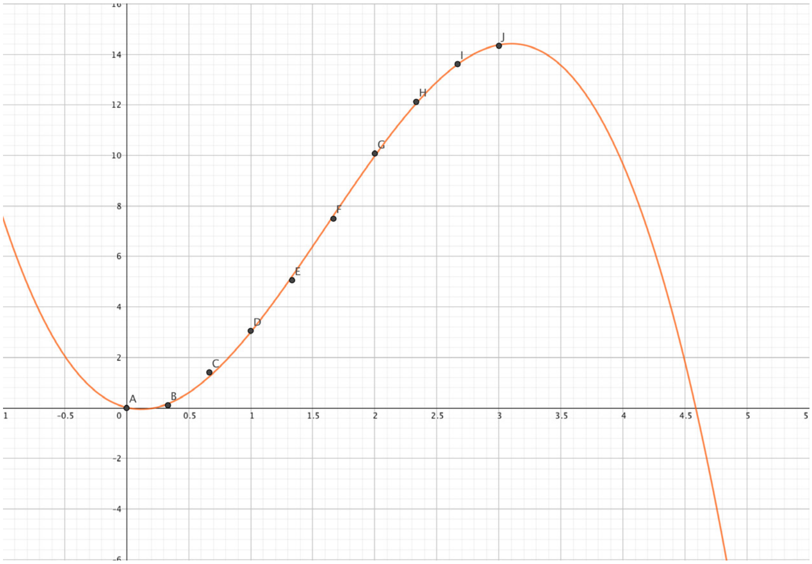


Figura 4. Aproximación de datos mediante un función polinómica

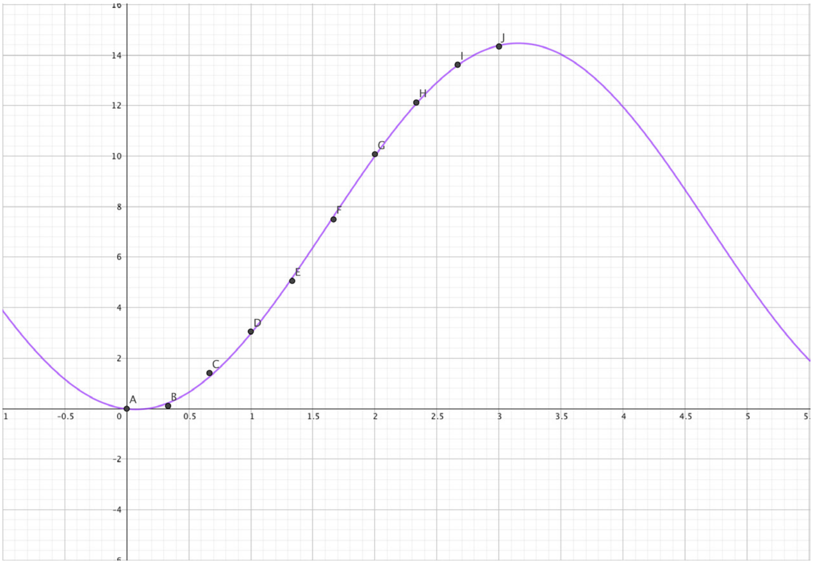


Figura 5. Aproximación de datos mediante una función trigonométrica

Una reflexión final

Aunque en el panorama educativo español no se considera de manera expresa la competencia STEM, el carácter integrador que aúna en el currículo como una sola competencia la formación en Ciencias, Matemáticas y en Tecnología, hace que sean especialmente prácticos y aplicables los recursos sobre STEM a los que es sencillo acceder. Con estas tareas he tratado de ejemplificar la orientación de esa formación holística. Por otro lado, he pretendido con mucha modestia pero con más ilusión, brindar un sencillo homenaje a dos de mis mejores amigos, de los que solo guardo buenos momentos en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada y los que realmente admiro como profesores. Yo tampoco olvido a los buenos maestros…

Referencias

Babaci-Wilhite, Z. (Ed.) (2016). *Human rights in language and STEM education: science, technology, engineering and mathematics*. Boston, MA: Sense Publishers.

Benjumeda, F. J. y Romero, I. M. (2017). Ciudad Sostenible: un proyecto para integrar las materias cientofico-tecnológicas en Secundaria. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias 14*(3), 621-637.

Berube, C. T. (2014). *STEM and the city: a report on STEM education in the great American urban public school system*. Charlotte, NC: Information Age Publisinhg.

Cremades, R. (1999). *Nadie olvida a un buen maestro*. Madrid: Espasa Calpe.

Cruz, A. (2017). *Activando y analizando la competencia STEM. Intervención en un aula de Secundaria*. Trabajo de Fin de Máster. Universidad de Granada.

Felder, R. M. & Brent, R. (2016). *Teaching and Learning STEM: a Practical Guide*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Isabelle, A. D. & Zinn, G. A. (2017). *STEP to STEM. A Science Curriculum Supplement for Upper Elementary and Middle School Grades – Teacher's Edition*. Boston, MA: Sense Publishers.

Han, S., Capraro, R. M. & Capraro, M. M. (2016). How science, technology, engineering, and mathematics project based learning affects high-need students in the U.S. *Learning and Individual Differences, 51*, 157-166.

Hitt, F. (2018). *La modelación matemática y nuevas tendencias en la enseñanza en ambientes TICE*. Conferencia en Seminario Tecnología y Educación Matemática, 22 de enero, Universidad de Granada.

Johnson, C. C., Peters-Burton, E. E. & Moore, T. J. (2015). *STEM Road Map: A framework for integrated STEM Education*. London: Routledge.

Lemov, D. (2017). *Aprende las 62 técnicas que utilizan los mejores profesores*. Madrid: Magister.

Lupiáñez, J. L. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). *Diseño de tareas para el desarrollo de la competencia STEM: los problemas de modelización matemática*. Blog Educ@conTIC. Disponible en: http://www.educacontic.es/en/blog/diseno-de-tareas-para-el-desarrollo-de-la-competencia-stem-los-problemas-de-modelizacion.

Rompella, N. (2015) (Comp.). *STEM*. Greensboro, NC: Carson-Dellosa Publishing Group.

Sahin, A. (Ed.) (2015). *A practice-based model of STEM teaching: STEM students on the Stage (SOS)*. Boston, MA: Sense Publishers.

Taub, M., Azevedo, R. Bradbury, A. E. & Millar, G. C. Using sequence mining to revel the efficiency in scientific reasoning during STEM learning with a game-based learning environment, *Learning and Instruction* (2017), http://dx.doi.org/10.1016/j.learninstruc.2017.08.005.