Investigación en Educación Matemática

Homenaje a Luis Rico

Encarnación Castro, Enrique Castro, José Luis Lupiáñez, Juan Francisco Ruiz y Manuel Torralbo (Eds.)

Luis Rico Romero

Encarnación Castro
Enrique Castro
José Luis Lupiáñez
Juan Francisco Ruiz
Manuel Torralbo
(Eds.)

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Homenaje a Luis Rico

Granada, 2016

Colección «Didáctica de la Matemática»

Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Este libro debe ser citado como:
Castro, E., Castro, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz, J. F. y Torralbo, M. (Eds.) (2016).
Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico. Granada: Comares.

Editorial Comares, S.L.
Polígono Juncaril
C/ Baza, parcela 208
18220 • Albolote (Granada)
Tlf.: 958 465 382
http://www.editorialcomares.com • E-mail: libreriacomares@comares.com
https://www.facebook.com/Comares • https://twitter.com/comareseditor

ISBN: 978-84-9045-389-6 • Depósito legal: Gr. 93/2016

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

ÍNDICE

HISTORIA

PENSAMIENTO NUMÉRICO

PRÓLOGO

Este libro ofrece al lector una síntesis de avances significativos de la investigación contemporánea en el campo de la educación matemática a lo largo de las últimas décadas. Se edita para ofrecer un homenaje al Profesor Luis Rico con motivo de su jubilación.

El Profesor Luis Rico representa una de las figuras clave en la historia de la educación matemática en España y uno de los agentes impulsores de la construcción, dinamización e institucionalización del área de Didáctica de las Matemáticas.

No es gratuito que sea la Universidad de Granada quien dote la primera cátedra de esta disciplina, constituya el primer Departamento del Área, organice el primer programa de doctorado específico sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, articule la defensa de las primeras tesis de este ámbito universitario e invite a investigadores de renombre a sus aulas.

Sin duda estas iniciativas han otorgado a esta Universidad un prestigio incuestionable y un protagonismo indiscutible en la consolidación de la Didáctica de las Matemáticas como disciplina reconocida al mismo nivel que otros campos de conocimiento, todo como consecuencia de su presencia en planes de estudio de titulaciones de Matemáticas, Magisterio y Ciencias de la Educación y el desarrollo progresivo de la investigación empírica, el desarrollo del conocimiento científico básico y la fundamentación epistemológica de un campo del saber joven y con poca tradición. Protagonismo que ha impuesto, a su vez, un nivel de responsabilidad institucional y un estándar de excelencia y exigencia en la institución universitaria y su entorno inmediato; y que ha debido mantener, cultivar y desarrollar a lo largo del tiempo, siendo modelo de referencia y objeto de inspiración en el que muchas otras disciplinas de las didácticas específicas afines del campo educativo han tomado como ejemplo de buenas prácticas universitarias.

Basta revisar algunos de los rankings al uso para constatar el lugar que ocupa la Universidad de Granada en el contexto de las Ciencias Sociales a nivel nacional, tercer puesto en 2014, y la progresión exponencial de productividad científica que ilustra su evolución y crecimiento en los últimos años respecto a otros ámbitos científicos. Destacar la posición que ha empezado a ocupar la investigación educativa en relación a la producción relativa dentro del estatus alcanzado en el seno interno de la propia institución respecto a disciplinas de una mayor visibilidad histórica, tradición universitaria y presencia sistemática en bases de datos internacionales como la psicología o la sociología[1].

Adjudicar la responsabilidad del progreso, desarrollo y evolución de un campo disciplinar es una tarea compleja que puede rozar la ingenuidad bajo los patrones contemporáneos de productividad científica compartida con los que se evalúa, se diseña, acomete y se difunde la ciencia en nuestros días, pero también resulta no menos banal pensar que la ausencia de liderazgos bien definidos sea capaz de generar frutos espontáneos a corto plazo y sin agentes singulares que dinamicen, impulsen y consoliden proyectos con señas de identidad propias y objetivos bien definidos. Esta doble tarea de construir y consolidar una disciplina como espacio de profesionalización y objeto no solo de enseñanza y aprendizaje, sino de convertirla a su vez en investigación y divulgación científica fértil con proyección en los diferentes niveles básico y avanzado del sistema educativo ha sido posible a partir de unos fundamentos sobre los que no había tradición, de unos lenguajes nuevos y de unos instrumentos de trabajo en continua revisión por parte del colectivo de profesores universitarios como el Profesor Rico que han trabajado incansablemente en alcanzar este propósito.

Más allá de convertir este homenaje en un encuentro ocasional de investigadores preocupados por un mismo objeto de estudio, la investigación sobre la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, el texto intenta articular un acopio documental de trayectorias investigadoras consolidadas en el tiempo y cercanas al pensamiento del Profesor Rico, de manera que contribuyan al análisis de su legado, por ello los textos están organizados conceptualmente en torno a las que vienen siendo sus principales líneas de investigación: pensamiento numérico y algebraico, currículum, evaluación, formación de profesores e historia de la educación matemática.

Respetamos así su deseo explícito de que esta actividad sea tal y como nos insinuaba en uno esos correos que habitualmente envía de madrugada: «organizar un espacio donde disfrutar de vuestras ideas y propuestas, de vuestra compañía y la de otros compañeros, donde hacer balance e ironizar un poco sobre una trayectoria como reconocimiento a nuestra profesión. También como pretexto y oportunidad para soñar de nuevo el futuro de nuestro campo profesional, a partir de unas circunstancias concretas de trabajo, docencia e investigación».

Si bien será el trabajo historiográfico minucioso y sosegado el que deberá poner las cosas en su lugar y explicar con mayor recorrido, sistematicidad, amplitud de miras, detalles y evidencias conceptuales el calado y transcendencia de los aportes del Profesor Rico. Estamos convencidos de que este compendio de aportaciones que

1 http://investigacion.ugr.es/ugrinvestiga/pages/doc_ugrcifras/hojabibliometrican7/!

presentamos supone un hito importante en la contextualización de los futuros trabajos del campo; y que los jóvenes investigadores podrán recurrir a él para encontrar ideas inspiradoras sin perder de vista algunas claves del contexto socio-histórico en el que se desenvuelven los procesos de creación científica; también del papel clave que juegan en ello determinadas personas que con su trabajo sistemático continuado han contribuido a perfilar las señas de identidad de una comunidad científica cualificada, a fundamentar un objeto de estudio, a consolidar líneas de investigación estructuradas y a otorgar respeto académico al área de conocimiento de Didáctica de las Matemáticas como campo de problemas propio; que se apoya en medios de difusión reconocidos y asociaciones estables; que promueve espacios de debate continuados y redes de intercambio de ideas que estimulan e incentivan el desarrollo profesional, el intercambio de información y la cualificación científica de sus socios.

A esto ha dedicado el Profesor Luis Rico todo su empeño con sus contribuciones periódicas en el Boletín de la Gaceta de la Real Sociedad de Matemáticas, de las revistas Enseñanza de las Ciencias, Suma, Épsilon, Números, … y tantas y tantas otra revistas del campo específico de la investigación educativa que han sentado las bases de un buen número de los hallazgos más sobresalientes de nuestro campo; ideas que han permitido continuar la indagación en vías de exploración complementaria, tomarlos como base de réplica y avanzar al mismo nivel que lo han hecho otros campos científicos del entorno universitario.

Fundador de la Asociación de profesores de matemáticas en Andalucía y de la Federación Nacional de Asociaciones de Profesores de Matemáticas; o de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática de la que fue primer presidente, espacios donde hemos podido crear, discutir, construir y avanzar sin pausa. Director de más de treinta tesis doctorales. Autor de más de un centenar de libros en los diferentes niveles del sistema educativo. Editor infatigable de colecciones y monografías como Síntesis, Comares y Pirámide y de las múltiples contribuciones de su obra y de sus aportaciones científicas, podemos hoy reconstruir una parte significativa de estas señas de identidad de nuestra comunidad, explicar la evolución de las agendas de investigación del campo a lo largo del tiempo, entender los patrones de interés de la comunidad, analizar los marcos de fundamentación, comparar los resultados de investigación y evaluar la productividad de las líneas de trabajo científico que se han ido abriendo en la enseñanza de las matemáticas en nuestro país.

La figura del Profesor Rico no es posible concebirla desligada de una intensa trayectoria de trabajo colaborativo: GranadaMaths, GrupoEGB de la SAEM-Thales, Seminario CIEM, Grupo de Investigación Pensamiento Numérico, SEIEM… En su obra destaca de forma sobresaliente la contribución compartida por encima del trabajo individual. Desde las herramientas de la cienciometría actual podemos encontrar unos índices elevadísimos de colaboración lo que ilustra y ensalza sus cualidades de liderazgo personal y su generosidad científica al compartir de forma permanente sus ideas y su trabajo con investigadores de geografías diversas.

Los jóvenes investigadores de la Didáctica de las Matemáticas que se acerquen hoy a este campo, cuentan con un patrimonio científico y un haber importante: asociaciones consolidadas, revistas reconocidas e instrumentos de difusión de resultados indexados, así como líneas de investigación asentadas con un recorrido y tradición que permiten seguir avanzando y cultivando para afrontar los retos de internacionalización y trabajo en red que nos impone la ciencia del siglo XXI.

Su papel en los trabajos de investigación evaluativa a nivel internacional como estudios PISA, TEDS-M y TALIS han arrojado luz a un necesario debate sobre la cualificación docente, la competencia de los profesores y los cauces de alfabetización matemática de generaciones de ciudadanos que han de habitar mundos cambiantes y emplear la matemática como instrumento de toma de decisiones personales o resolución de problemas en el ámbito profesional. Sin sus contribuciones al campo no podríamos entender los avances producidos ni explicar el protagonismo exterior que ha alcanzado la enseñanza de las matemáticas, tampoco la versatilidad con la que se ha ido modernizando y adaptando a las exigencias y demandas de nuestra sociedad. La Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada también le reconoció esta labor al nombrarlo académico numerario con la medalla 25.

Mencionaba el Profesor Rico en alguna de sus conferencias recientes que «enseñar y aprender son verbos transitivos que han de llevar algún predicado y que por ello, se articulan siempre sobre algún tipo de conocimiento», en nuestro caso el conocimiento matemático. Toda la arquitectura disciplinar que hay detrás le otorga legitimidad, credibilidad social y reconocimiento público de su valor y utilidad en la formación de ciudadanos con competencia matemática o de profesionales cualificados para llevar a cabo esta empresa. Lo que se le olvidó contarnos es que sin sujetos no hay historia, y que la narrativa de las disciplinas la construyen y reconstruyen las personas singulares que dedican en cuerpo y alma toda su vida a una causa.

Nos encontramos ante uno de estos personajes históricos, ante un científico y profesor sin cuyo legado la educación matemática no habría llegado a alcanzar las cotas de excelencia y reconocimiento que la caracterizan en este momento, un Profesor sin cuyo trabajo las herramientas disponibles, los marcos de fundamentación, las metodologías de investigación, los modos de producción y uso del conocimiento sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas no habrían avanzado en nuestro país al ritmo que lo han hecho en el resto de sociedades desarrolladas de nuestro entorno.

La presencia en este texto de contribuciones de colegas expertos de universidades españolas e internacionales de países como Estados Unidos, Dinamarca, Canadá, México o Italia de la mano de autoridades y referentes mundiales en la disciplina Didáctica de las Matemáticas como Jeremy Kilpatrick, Mogens Niss, Nicolina Malara, Vilma Mesa, Olimpia Figueras y Fernando Hitt, obedece simplemente a criterios de cercanía y proximidad con el homenajeado, en cuanto personas clave que también juegan un papel principal como sujetos históricos activos y dinámicos dentro de su contexto geográfico y con una proyección e impacto global. Profesores, que junto con otros muchos no referenciados, han realizado en algún momento de su vida profesional contribuciones compartidas con el Profesor Luis Rico en diferentes contextos y formatos ya sea en la modalidad de libros, artículos o ediciones de proceedings de congresos, seminarios y encuentros científicos. Un ejemplo más de las amplias vías de comunicación internacional y de conexión sistemática con una comunidad de investigación extensa que ha permitido enriquecer y alimentar en una doble dirección el progreso científico del campo aportando a las nuevas generaciones un caudal de desarrollo profesional y conexiones indiscutibles.

Confiemos que en este texto se pueda encontrar respuesta a algunas de las cuestiones que sistemáticamente nos viene formulando el Profesor Rico desde hace ya más de tres décadas acerca de preocupaciones tan relevantes como: el nacimiento de esta disciplina, las herramientas que dotan de significado nuestro trabajo en este área de conocimiento y la utilidad del esfuerzo que se realiza. Pero sobre todo, considerar y destacar la contribución del pensamiento numérico y algebraico en un contexto de alfabetización múltiple en el que las nuevas tecnologías juegan hoy un papel tan importante.

MANUEL TORRALBO RODRÍGUEZ
Secretario General de Universidades, Investigación y Tecnología
Consejería de Economía y Conocimiento de la Junta de Andalucía

CONFERENCIAS

MODELOS DE ENSEÑANZA DE LAS FRACCIONES EN LOS SIGLOS XVI A XVIII: EL CASO DEL DORADO CONTADOR[1]

Teaching Models for Fractions from the XVIth to XVIIIth Centuries: 'Dorado Contador' as a Case Study

Olimpia Figueras
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México

Resumen

Los modelos de enseñanza de las fracciones estructurados antes de la implantación del sistema métrico decimal, de la formalización de la aritmética y del uso del modelo del pastel y la recta numérica, como recursos didácticos, contienen los elementos de sistemas de cantidades usados para constituir magnitudes. Esos sistemas están asociados con fenómenos para los cuales la fracción actúa como medio de organización. La identificación de esos elementos, así como de los fenómenos utilizados por autores de libros escritos para la enseñanza de la aritmética son propósitos de un proyecto de investigación que se está llevando a cabo. En este capítulo se da cuenta de los hallazgos del estudio del libro Dorado Contador escrito a finales del siglo XVI.

Palabras clave: modelos de enseñanza, modelos teóricos locales, fenomenología de las fracciones, didáctica de las fracciones

Abstract

Teaching models for fractions structured before the introduction of the metric system, the formalisation of arithmetic and the use of the pizza model and the numerical line as didactical resources include components of quantities' systems used for the constitution of magnitudes. Those systems are associated with phenomena for which fractions act as a means of organization. The main purposes of a research study which is being carryied out are the identification of the aforementioned elements of the quantities' systems, as well as the description of those

Figueras, O. (2016). Modelos de enseñanza de las fracciones en los siglos XVI a XVIII: El caso del Dorado Contador. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 3-12). Granada: Comares.

[1] Parte de la investigación descrita en este documento se realizó durante un receso sabático del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN en 2015, en el cual la autora trabajó en la Universidad de Valencia en el marco del proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación, referencia: EDU2012-35638, Plan Nacional de I+D+i, y estudió libros de los siglos XVI a XVIII en las Bibliotecas Históricas de las Universidades de Salamanca y Valencia en España.

phenomena used by the authors of books meant for teaching arithmetic. In this chapter foundings about the study of the book known as 'El Dorado Contador', written during the last decade of the XVI*th Century, are described.*

Keywords: *teaching models, fractions phenomenology, local theoretical models, didactics for fractions*

Persistencia de una problemática

> NOTA, que para ſer buen Contador, conviene ſer quebratiſta, y entender los quebrados muy de raiz, y fundarſe en ellos; y aſsi podrá conſeguir, y aprender facilmente lo que pretendiere en eſta facultad: y porque

Miguel Geronimo Santa Cruz (1625, Folio 90; edición 1769, p. 163)

En la cita se pone de manifiesto una de las características de un usuario competente de la aritmética relacionada con el conocimiento de las fracciones. Miguel Geronimo Santa Cruz, natural de la Ciudad de Valencia y vecino de Sevilla, a finales del siglo XVI estaba convencido de que el conocimiento de los quebrados jugaba un papel relevante en la práctica del Aritmético. Siegler y colaboradores (2012), casi cuatro siglos después, mostraron a través de un estudio empírico longitudinal, realizado con datos de pruebas nacionales aplicadas en Estados Unidos y la Gran Bretaña, que el conocimiento de estudiantes de primaria acerca de las fracciones y la división predice de manera única su desempeño en matemáticas hasta cinco o seis años después.

Uno de los aspectos importantes de la reforma educativa que se puso en marcha en México en 1993, fue la introducción en la educación básica de los significados de fracción identificados por Kieren (1988) y de distintos tipos de problemas multiplicativos (Vergnaud, 1988). También se puso énfasis en el uso de cantidades adjetivales (Schwartz, 1988) y en la referencia obligada de la unidad en los problemas sobre las fracciones (Hiebert y Behr, 1988). Con la incorporación de estos elementos sustentados en resultados de investigación de la época, se tenía la hipótesis que los alumnos podían construir un conocimiento perdurable y lo podrían utilizar para resolver problemas. Empero, pese a las supuestas mejoras implementadas, hoy en día, se cuenta con datos de pruebas nacionales que muestran el poco éxito de estudiantes de secundaria al resolver problemas aritméticos que requieren el uso de las fracciones.

Con la intención de coadyuvar con el mejoramiento del aprendizaje de estos números que pueda repercutir en el desempeño de los estudiantes se retomó un proyecto de investigación iniciado al final de los ochenta (Figueras, 1995). La idea central es estructurar estudios encadenados para elaborar un modelo de enseñanza de las fracciones desde preescolar hasta final de la secundaria. Entre los estudios diseñados, se encuentra el de Real (2015) quien pretende poner a prueba una propuesta didáctica en Educación Secundaria.

Debido a que uno de los acercamientos teóricos y metodológicos empleado en el diseño de todos esos estudios es la construcción recursiva de Modelos Teórico Locales (MTL) (Filloy, Rojano y Puig, 2008), Real se propuso la construcción de un MTL de las fracciones y de los números racionales. Uno de los cuatro componentes del MTL, el de los modelos de competencia formal versa sobre el conocimiento matemático poniendo énfasis en la estructura y las propiedades de las fracciones como objetos matemáticos (Real y Figueras, 2015). Esa construcción ha servido como herramienta metodológica para caracterizar modelos de enseñanza (Real, Gómez y Figueras, 2013); en particular se está usando para estudiar los modelos subyacentes en libros de los siglos XVI a XVIII. Un ejemplo de esta caracterización está descrito en este capítulo. El siguiente apartado contiene una breve exposición de ese componente que sirve como punto de partida para construir subsecuentes MTL de las fracciones o de los racionales.

Fundamentos: la fenomenología didáctica de Freudenthal

Al proponerse caracterizar modelos de enseñanza existentes actualmente en el sistema educativo nacional, surgieron preguntas: ¿Con qué marco de referencia se pueden identificar fortalezas y debilidades de los modelos de enseñanza de las fracciones? ¿Cómo construir hilos conductores vinculados con los diferentes significados de las fracciones y niveles de abstracción gradual que permitan organizar la enseñanza a lo largo de doce años de educación obligatoria?

Con el propósito de encontrar respuestas a las preguntas se decidió volver a considerar el espécimen de fenomenología didáctica elaborado por Freudenthal (1983), el cual fue reinterpretado a través de la delimitación de clases de fenómenos: descripción y comparación de cantidades, valores de magnitud u objetos; división de sustancias medidas por magnitudes; distribución de cantidades; medición, y números como parte de sistemas numéricos. Para cada una de ellas se identificaron nociones y aspectos de la fracción y se vincularon con cinco procesos matemáticos: describir, comparar, dividir, distribuir y medir. Una sexta clase se determinó con fenómenos vinculados a las construcciones matemáticas de los números racionales y su formalización. Las caracterizaciones se estructuraron por medio de una red de nociones, conceptos y procesos que comprende desde el uso de las primeras ideas en el lenguaje cotidiano hasta las fracciones como números racionales, es decir como elementos de un campo totalmente ordenado. Con la red se muestran interrelaciones que existen entre los procesos y los diferentes aspectos de la fracción considerados por Freudenthal.

Las secciones siguientes contienen una breve reseña de los procesos/clases de fenómenos asociados con las fracciones y los números racionales; la atención se centra en aquellos aspectos de la fracción que juegan un papel relevante en el estudio del modelo de enseñanza del Dorado Contador. En Real y Figueras (2015) se encuentra una descripción más amplia de este marco de referencia teórico y las partes de la red correspondientes a procesos.

Describir

Expresiones tales como: 'la mitad de un real', 'las dos tercias de una arroba', 'gira la perilla dos tercios de vez' y 'se pagaron tres ducados por cada dos quintos de vara', en las cuales la fracción se usa para describir: i) una cantidad o un valor de magnitud por medio de otra cantidad o valor de magnitud, ii) una medida expresada por números, iii) procesos cíclicos o periódicos y iv) razones, son y han sido empleadas en el lenguaje cotidiano. Este tipo de expresiones se asociaron con el proceso de describir y se vinculan con cuatro tipos de fenómenos en diferentes contextos, en los cuales la fracción actúa como descriptor.

Comparar

Freudenthal identificó tres tipos de fenómenos asociados con el proceso comparar, en ellos la fracción actúa como comparador. Para expresar resultados de la comparación entre dos cantidades o valores de magnitud en el lenguaje cotidiano, también se usan las fracciones; éstas aparecen en expresiones en las cuales se emplean números multiplicativos, por ejemplo «el centímetro es el céntuplo del metro». Con frecuencia estos números se reemplazan por expresiones del tipo 'veces más que' o 'veces menor que', como en la frase «el centímetro es cien veces menor que el metro» que es más usual que la anterior. Ambas expresiones expresan la comparación de dos valores de magnitud. Este tipo de comparación está relacionado con un primer nivel de abstracción.

En un segundo nivel, diversos aspectos de la fracción se han incorporado: el operador fracturante, la relación de fractura, la relación razón, el operador razón y el de transformador. En este documento se hará referencia solamente al operador razón; este aspecto de la fracción actúa sobre una cantidad o valor de magnitud transformándola en otra cantidad o valor de magnitud. Por ejemplo, al obtener el costo de 2/5 de tonelada de maíz, sabiendo que el precio en pesos por tonelada es de 3920. Al obtener un porcentaje o un tanto por mil de una cantidad, la fracción también actúa como operador razón.

Dividir

Al dividir sustancias medidas por magnitudes, el todo se fragmenta en partes iguales y se relaciona con una o más de esas partes. En este sentido, las fracciones representan relaciones parte-todo y actúan como fracturadores. Los sistemas de cantidades para constituir magnitudes son un ejemplo de las relaciones que se pueden obtener al dividir un todo en partes iguales: i) un cahíz se divide en 12 fanegas, cada fanega representa un 1/12 de cahíz; ii) una fanega se divide en 12 almudes; cada almud representa un 1/12 de 1/12 de un cahíz; iii) 4 cuartillos equivalen a un almud, cada cuartillo es un 1/4 de 1/12 de 1/12 de un cahíz. Hay diferentes métodos de partir un todo en partes iguales: de manera reversible o irreversible y de forma simbólica. El todo puede ser continuo o discreto, definido o indefinido, estructurado o sin estructura. Las partes pueden ser conexas o no estar conectadas entre si.

Distribuir

El proceso de distribuir está asociado con tres tipos de fenómenos en los cuales se reparten pequeñas o grandes cantidades. Una vez que la distribución se llevó a cabo, la fracción representa el resultado del proceso, o bien lo que le corresponde a cada objeto o persona de la cantidad repartida. En este fenómeno la fracción actúa como descriptor. La distribución de grandes cantidades se puede hacer usando el algoritmo de la división; dos casos son posibles: el residuo es cero o distinto de cero. Cuando el residuo es cero, el proceso ha terminado y está asociado con el Modelo del conjunto finito. Mientras que, si el residuo es diferente de cero, se puede o no seguir distribuyendo según el tipo de objetos, la unidad puede ser inquebrantable. Sin embargo, cuando se distribuyen por ejemplo diez sacos de azúcar entre tres compañeros, se hace uso del Modelo de magnitud para distribuir el contenido del costal restante considerando su masa total.

Medir

El proceso medir se relaciona con tres tipos de fenómenos en los que se usa una unidad de medida para compararla con el objeto a medir; la fracción actúa como mensurador. Cada uno de los fenómenos se diferencia por la naturaleza de la unidad de medida, —no convencional, convencional o un segmento de la recta numérica usado para construir instrumentos de medición empleando escalas—.

La fracción como número

La fracción actúa como número en situaciones en las cuales se opera con ellas de forma simbólica, o bien al usar sus propiedades como objetos matemáticos en la resolución de problemas.

En la siguiente sección se describen resultados del uso del marco teórico de referencia descrito para caracterizar una parte del libro del siglo XVI.

ESTUDIO DE CASO: EL DORADO CONTADOR

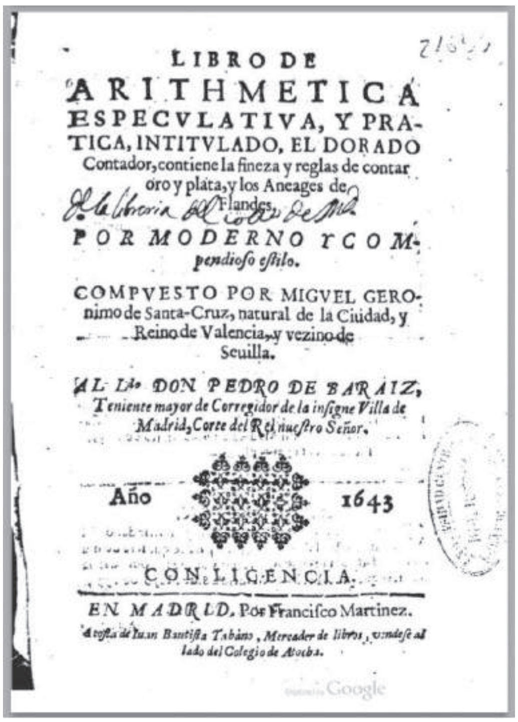
Los propósitos principales para caracterizar modelos de enseñanza de libros de aritmética escritos antes de la implantación del sistema métrico decimal, de la formalización de la aritmética y del uso del modelo del pastel y la recta numérica como recursos didácticos son: i) identificar fenómenos vinculados con diferentes aspectos de la fracción usados por los autores para estructurar su enseñanza y ii) precisar aquellos elementos de los sistemas de cantidades que sirvieron para constituir magnitudes. Esas ideas pueden servir para concretar situaciones útiles para la enseñanza de esos números ya que se estaba en una etapa en la cual las fracciones eran quebrados y no números racionales, todavía no se construían las cadenas fenómenos/medios de organización en el sentido de Puig (1997) que dieron origen a los números racionales y todavía no competían con los decimales.

Por ello se inició un estudio de casos con libros de aritmética de los siglos XVI a XVIII, el primero corresponde como se mencionó al Dorado Contador (Santa Cruz, 1625), libro que resistió el paso del tiempo.

Pedro Ambrosio Onderiz, catedrático de la Academia de Matemáticas fundada por Felipe II y cosmógrafo del Rey, da el aval por el consejo Real de Castilla el 8 de mayo de 1594 para darle licencia a la Vda. de Alonso Martín de imprimir ese libro en Madrid. El ejemplar revisado en la Biblioteca Histórica de la Universidad de Salamanca tiene fecha 16 de febrero de 1625, no es claro si es una primera edición (en www.mcnbiografías.com aparecen estos datos: 1625 (Madrid, s.i. 1594), reimpreso en Sevilla 1603 y en Madrid (1643, 1670, 1732, 1769, 1782 y 1794)). Hay copias digitales de las reimpresiones de 1643, 1732 y 1769 en la biblioteca de *Google Books*. En la reimpresión de 1643 todavía aparece la aprobación de Onderiz. Notará el lector el cambio de título de una reimpresión a la otra (ver la Figura 1), quizá el título distinguía al libro de otras aritméticas.

Para el estudio se usaron el ejemplar de 1625 y la copia digital de 1769 por la claridad de la digitalización y el uso más moderno del lenguaje.

El escrutinio del libro se ha hecho tomando en cuenta los siguientes componentes: i) La caracterización de expresiones lingüísticas en las cuales se hace referencia a nociones, procesos, fenómenos y aspectos de la fracción, o bien, aquellas asociadas con sistemas de cantidades en uso; ii) La clasificación de problemas o procedimientos reglados de acuerdo con tipos de números, de problemas y magnitudes, aspectos de la fracción y procesos matemáticos; iii) El reconocimiento de definiciones de los conceptos en juego y iv) El reconocimiento de las representaciones usadas.


LIBRO DE
ARITHMETICA
ESPECVLATIVA, Y PRA-
TICA, INTITVLADO, EL DORADO
Contador, contiene la fineza y reglas de contar
oro y plata, y los Aneages de
Flandes,
POR MODERNO Y COMPENDIOSO estilo.
COMPVESTO POR MIGVEL GERO-
nimo de Santa-Cruz, natural de la Ciudad, y
Reino de Valencia, y vezino de
Seuilla.
AL L.do DON PEDRO DE BARAIZ,
Teniente mayor de Corregidor de la insigne Villa de
Madrid, Corte del Rey nuestro Señor.
Año 1643
CON LICENCIA.
EN MADRID. Por Francisco Martinez.
A costa de Iuan Bautista Tabáno, Mercader de libros, vendese al
lado del Colegio de Atocha.


DORADO CONTADOR,
ARITHMETICA
ESPECULATIVA, Y PRACTICA.
CONTIENE LA FINEZA, Y REGLAS
de contar Oro, y Plata, y los aneages de Flandes,
por moderno, y compendioso estilo:
COMPUESTO
POR MIGUEL GERONIMO DE SANTA CRUZ,
natural de la Ciudad, y Reyno de Valencia,
y vecino de la de Sevilla.
DEDICADO
AL SEÑOR DON MIGUEL MARIA DE NAVA
y Carreño, Cavallero del Orden de Calatrava, del
Consejo de S. M. en el Real, y Supremo
de Castilla, &c.
CON LICENCIA.
En Madrid, en la Imprenta de Antonio Marin.
Año de 1769.
A costa de la Concordia de S. Geronymo de Mercaderes de Libros.

Figura 1. *Portadas del Dorado Contador de las reimpresiones de 1643 y de 1769*

Para los tres primeros componentes se hicieron tablas para organizar los datos e identificar regularidades o singularidades. En el siguiente apartado se describen los resultados del estudio de los primeros XII capítulos del libro Primero.

Sobre aritmética teórica o especulativa

Esta parte del libro corresponde al capítulo I, en el cual se incluyen distintas clasificaciones de los números asociadas con diferentes propiedades. En las definiciones se usan expresiones que refieren acciones que van a ser fundamentales en los procedimientos y razonamientos usados para argumentar las acciones y los resultados, pero que también son nociones vinculadas con el concepto de fracción y sus distintos aspectos, por ejemplo: En la segunda clasificación de número: la definición de número artículo hace referencia a la equipartición y a la exhaustividad del proceso: «… cualquier número *divisible en 10 partes iguales, en tal manera que ninguna cosa de superfluo resta …».*

Con la expresión «Para hallar partes alícuotas de los números perfectos, *demedia* el número perfecto tantas cuantas veces podrás, … y después *demedia* tantas veces aquel número, … y todas estas *demediaciones* son partes alícuotas de aquel número perfecto …» (p.10), se hace referencia por primera vez al proceso demediar, parte de la fenomenología de las fracciones, éstas aparecen de manera explícita (ver cita p. 7) para referirse a que el 6 tiene mitad, tercia y sexta; las partes alícuotas son los divisores y numerar es dividir. [Obsérvese las dificultades que se tenían para usar los símbolos].

> Los numeros perfectos, ſegun Euclides en la difinicion 22. del ſeptimo libro, ſon aquellos que ſon iguales à todas ſus partes aliquotas, ò numeros, de los quales es numerado, aſsi como el 6. que es numerado del 2. del 3. y de la unidad; quiero decir, que tiene $\frac{1}{2}\frac{1}{3}\frac{1}{6}$, que es igual à todo enteramente el 6. y lo miſmo ſe hallará en 28.

El aspecto de la fracción subyacente en esa expresión es de fracturante, el seis puede partirse en dos partes iguales, 2 veces 3 es 6 y se establece una relación de fractura con énfasis en la naturaleza multiplicativa de las propiedades de los números que juegan un papel central en el acercamiento didáctico.

Sobre aritmética práctica

Al iniciar el capítulo II, el autor afirma que la práctica de la aritmética está dada por nueve especies, entre ellas la demediación, pero agrega «y porque el doblar no se distingue de multiplicar, ni el mediar de partir, muchos han dicho que sólo son siete: numerar, sumar, restar, multiplicar, partir, progresiones y extracción de raíces.» (p. 16). Este es un ejemplo de cómo por medio de un concepto se organizan fenómenos diversos y se van estructurando las cadenas fenómenos/medios de organización; el demediar ha pasado a ser parte de los fenómenos que se organizan con el partir. Demediar es una de las primeras acciones que los niños hacen para resolver situaciones de partición (Figueras, 1995).

El uso de las fracciones aparece pronto en la aritmética práctica, está conectado con el partir (dividir) que surge como inverso de la multiplicación para satisfacer una necesidad, la de verificar la operación realizada. «La prueba real de esta regla de multiplicar es partir … el partir se prueba con su contrario, que es multiplicar …» (p. 44). Los procedimientos para verificar cálculos juegan un papel importante en las prácticas del 'Aritmético' o 'Contador'.

El estudio de la división está formado por 'el medio partir y el partir por entero'. El primero corresponde a dividir entre un dígito en la cual las fracciones surgen de manera natural, tanto en las explicaciones de los procedimientos empleados, como en las formas de representar los resultados. «Quiero partir 4507 maravedís a tres compañeros, que lleven partes iguales cada uno». Al explicar la forma de proceder el autor usa las siguientes expresiones: «Comienza a partir diciendo: el tercio de 4 es 1 o repartidos 4 a tres compañeros, cábeles a 1… *el tercio de 15 es 5*, … el tercio de cero es nada …, *el tercio de 7 es dos* … y habrás acabado la cuenta y dirás … a cada uno le cabe mil quinientos y dos y *un tercio números*.» [P72-74]. Los aspectos presentes en estas explicaciones son el de operador razón, de fracturador y el de descriptor que se usa por primera vez para describir un cociente.

Acerca del tipo de problemas o situaciones que el autor usa para explicar, se exponen los resultados obtenidos respecto a la multiplicación de quebrados. De los doce capítulos revisados, el de la multiplicación de quebrados es el que contiene más ejemplos de problemas 'verbales' con resoluciones, explicaciones, pruebas y representaciones gráfico-simbólicas de las acciones realizadas para registrar datos y cálculos. Esos se han dividido en seis tipos de multiplicaciones: de fracciones unitarias, de fracciones propias, de enteros por números mixtos (con fracciones unitarias o propias), de números mixtos y de números mixtos por quebrados simples. Se usan situaciones de compra y venta de distintos tipos de mercaderías, incluso de monedas de distintas denominaciones y regiones —España, Flandes y la Nueva España—. La mayoría de las 32 situaciones consideradas son de una etapa, isomorfismos de medidas con valor unitario, y tres se vinculan con partes de partes.

En términos generales, en los doce capítulos revisados, los aspectos de la fracción identificados son los de descriptor, fracturador, comparador, operador razón y la fracción como número. Los fenómenos considerados se asocian con los procesos de describir, comparar, dividir, distribuir y la fracción como número. Pese a que se usan varios sistemas de cantidades y en las situaciones de compra y venta que se consideran, la fracción actúa como descriptor de medidas expresadas por medio de números; la fracción como mensurador no está presente.

Comentarios finales

El estudio que se ha hecho del libro el Dorado Contador es parte de un análisis didáctico en el sentido de Rico y Fernández-Cano (2013) focalizado en las categorías, análisis conceptual y análisis de contenido. Por un lado, el marco de referencia teórico construido por Real y Figueras a partir del espécimen de la fenomenología didáctica de las fracciones elaborado por Freudenthal constituye una síntesis de nociones, conceptos y procesos de las fracciones y los números racionales asociada con un análisis conceptual. Ese marco permite la búsqueda de elementos que pudieran caracterizar una génesis epistemológica a través del análisis de textos correspondientes a distintos periodos de formalización de los conceptos matemáticos. Por otro lado, el análisis fenomenológico de esos textos, que en este caso se ha hecho con esa síntesis como herramienta metodológica, junto con la identificación de sistemas de representación constituyen un análisis conceptual del texto que se estudia. El proceso emprendido es cíclico, debido a que los resultados obtenidos de este estudio de caso, permiten reestructurar el Modelo Teórico Local que se utilizó inicialmente para caracterizar el modelo de enseñanza de los quebrados que subyace en el Dorado Contador.

Referencias

Figueras, O. (1995). Juntando partes. Hacia un modelo cognitivo y de competencia en la resolución de problemas de reparto. En F. Hitt (Ed.). *Investigaciones en Matemática Educativa I. XX Aniversario, Didáctica.* (pp. 173-196). México: Grupo editorial Iberoamérica.

Filloy, E., Rojano, T. y Puig, L. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Holland: D. Reidel Publishing Company.

Hiebert, J. y Behr, M. (1988). Introduction: Capturing major goals. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades. A reasearch agenda for matehmatics education*, Vol. 2, Parte II, (pp. 1-18). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM

Kieren, T. E. (1988). Personal knowledge of rational numbers. Its intuitive and formal development. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades. A reasearch agenda for matehmatics education*, Vol. 2, Parte II, (pp. 162-181). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.). La educación matemática en la enseñanza secundaria, (pp. 61-94). Barcelona: Horsori/ICE.

Real, R. (2015). *Las fracciones como recurso metodológico de los números racionales en modelos de enseñanza.* Documento predoctoral, Manuscrito interno del Departamento de Matemática Educativa, México: Cinvestav.

Real, R. Gómez, B. y Figueras, O. (2013). Aspectos de la fracción en los modelos de enseñanza: El caso de un libro de texto. *Epsilón*, *30*(3), 21-36.

Real, R. y Figueras, O. (2015). A network of notions, concepts and processes for fractions and rational numbers as an interpretation of didactical phenomenology. *Preproceedings of CERME 9.* Recuperado de www.cerme9.org/products/wg2/.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.). *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular,* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Santa Cruz, M. G. (1625). *Arithmetica especulativa, y práctica, intitulado, el Dorado Contador, contiene reglas de contar oro y plata, y los aneajes de Flandes, por moderno y compendioso estilo.* Madrid: Vda. Alonso de Martín.

Schwartz, J. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades. A reasearch agenda for matehmatics education*, (pp. 41-52). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

Siegler, R. S., Duncan, G. J., Davis-Kean, P. E., Duckworth, A. C., Engel, M., Susperreguy, Ma. I. y Chen, M. (2012). Early predictors of high school mathematics achievement, *Phsychological Science, 23*(7), 691-697.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades. A reasearch agenda for matehmatics education*, (pp. 141-161). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.

FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN SECUNDARIA Y USO DE TECNOLOGÍA EN QUEBEC

Mathematic' Training Teachers in Secondary Education and the use of Technology in Quebec

Fernando Hitt
Université du Québec à Montréal, Canadá

Resumen

La escuela secundaria en Quebec consta de 5 años (edades 12 a 16). Las nuevas generaciones de profesores, tienen que afrontar, un programa de estudios centrado en el desarrollo de competencias matemáticas sobre la resolución de situaciones problema, en un aprendizaje de corte socio-constructivista y en ambientes tecnológicos. Quebec ha puesto en marcha un programa en el aula de Tableros Blancos Interactivos (un TBI por cada 28 alumnos). ¿Cómo enfrenta la UQAM esta problemática en la formación de profesores de matemáticas? La formación de profesores de matemáticas en nuestra institución (UQAM) tiene tres componentes principales: cursos de pedagogía, de matemáticas y aplicaciones en ambientes tecnológicos. En este documento nos restringiremos a las variables: programas, libros de texto y cursos sobre tecnología.

Palabras clave: formación de profesores, didáctica de las matemáticas, tecnología

Abstract

The secondary school in Quebec included 5 ages (years 12-16). New generations of teachers have to implement, a curriculum focused on developing mathematics competences on problem solving situations in a socioconstructivist settings learning and technological environments. Quebec has launched a program of classroom use of Interactive White Boards (average of 28 students per IWB). How do the UQAM deal with this problem of teacher training in mathematics? The training of mathematics teachers at our institution (UQAM) has three main components; pedagogy courses, mathematics and mathematics in technological environments. In this paper we restrict us to the variables: programs, textbooks and technology courses.

Keywords: *teacher training, mathematics education, technology*

Hitt, F. (2016). Formación de profesores de matemáticas en secundaria y uso de la tecnología en Québec. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 13-31). Granada: Comares.

Introducción

El nacimiento de la didáctica de las matemáticas en Quebec en forma sistemática, se dio en la década de los 60, igual que en otros países, motivado por los problemas de aprendizaje de las matemáticas promovidos por la manera de enseñar los contenidos de matemáticas desde un punto de vista formal. Así, en el intento de reparar los problemas de aprendizaje de la escuela quebequense causado por ese movimiento denominado «Matemática moderna», se produjo un cambio en los programas de estudio de la época, iniciando una transformación particular en el sistema educativo en la provincia de Quebec. Decimos estructura particular por el hecho de que se distingue con respecto al resto de Canadá (ver Tabla 1).

Tabla 1. *Edad y nivel educativo*

Nivel de educación	*Edades*
Maternal (2 años)	de 4 a 5 años
Primaria (6 años)	de 6 a 11 años
Secundaria (5 años)	de 12 a 16 años
Cégep técnico (3 años)	de 17 a 19 años
Cégep pre-universitario (2 años)	de 17 a 18 años
Universidad	de 19 a 22 años

El avance de las diferentes corrientes en el mundo tuvieron una influencia, por un lado, en el tipo de investigación en didáctica de las matemáticas, y por otro, en la orientación que le proporcionaban a la educación de parte de las autoridades educativas. Efectivamente, podemos decir que los didactas de la matemática en Quebec y en particular en nuestra universidad (UQAM) consideraban varias corrientes, la escuela británica por parte del grupo «Shell Centre for Mathematics Education» de Nottingham (Allan Bell *et al.,* y su Matemática en contexto), el grupo del Instituto Frehudental de Holanda, la escuela francesa con Brousseau (con su Teoría de Situaciones Didácticas) y Vergnaud (Teoría de los Campos Conceptuales); también era considerado el acercamiento del Problem-Solving (Polya, 1945; Schoenfeld, 1985; Kylpatrick, 1985; Romberg, 1994; Carpenter *et al.,* 1993, entre otros). Estos acercamientos teóricos eran tratados por los miembros de la UQAM. Estos didactas, integraban estas corrientes teóricas en la formación de profesores, con una amplia visión de la enseñanza de las matemáticas y con características multivariadas sobre el acercamiento al problem-solving (tomando en consideración las diferentes escuelas mencionadas).

Del lado de las autoridades educativas, específicamente a partir de los 90, ellos se acercaron a un curriculum centrado al problem-solving ligado al contexto de los «Principios y Estándares para la Escuela de Matemáticas» de los Estados Unidos (Problema-solving, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones, Representación) y en consecuencia, los autores de libros de texto, seguían esa tendencia. En general, los profesores consideraban que los textos tenían un alto grado de calidad, y poco a poco se fue llegando a cierta estabilidad en la formación de profesores y en su práctica educativa.

Al inicio del presente siglo, las autoridades educativas dan un cambio radical. En 2001 se anuncia un nuevo acercamiento en educación, ligado a programas de estudio basados en la noción de competencia. Así, dio inicio en 2001 el programa por competencias en la escuela primaria y en 2004 en la escuela secundaria. En general, el ministerio decidió seguir un modelo de competencias utilizado por la escuela suiza. La definición de competencia elegida por el ministerio fue la de Perrenaud (1999):

> competencia es la capacidad de actuar de manera eficaz cuando uno se enfrenta a una familia de situaciones, que se llega a dominar porque se tiene a su disposición tanto los conocimientos necesarios y la capacidad de movilizar estos conocimientos de manera efectiva, en el momento apropiado, para identificar y resolver problemas reales. (p. 16)

Una comparación con la definición utilizada por Rico y Lupiañez (2008) nos muestra una gran similitud con el acercamiento de Perrenaud,

> Nuestro acercamiento es funcional. Sostenemos que las competencias, como expectativas de aprendizaje, se presentan contextualizadas, hacen uso de herramientas cognoscitivas y los sujetos las muestran mediante la puesta en práctica de una serie de actuaciones, decisiones y actitudes con las que dan respuesta a las demandas y problemas planteados. (p. 158)

La elección del ministerio de la definición de competencia tuvo grandes implicaciones. Perrenaud explicita su definición directamente ligada a la resolución de situaciones problema en contexto real. Así, quedó determinada la primera competencia en la disciplina de matemáticas, ligada a la resolución de situación problema (MELS, 2015):

Competencia 1. Resolver una situación problema.

— La situación no debe haber sido previamente presentada …
— La obtención de una solución satisfactoria requiere la combinación de reglas o principios que el estudiante ha adquirido o no …
— El producto o su forma esperada, no ha sido presentado anteriormente.

Competencia 2. Desarrollar un razonamiento matemático.

Competencia 3. Comunicar usando el lenguaje matemático. (p. 22)

El cambio no solo descontroló a profesores e investigadores, sino también a autores de libros de texto que no tenían experiencia ligada a un acercamiento por competencias y de resolución de situaciones problema. Una exigencia más del ministerio, fue que al inicio de cada capítulo se presentara una situación problema que hiciera referencia a un problema de la humanidad (por ejemplo la contaminación del medio ambiente, la falta de agua en algunos países).

El profesor de matemáticas cara a la reforma del 2001

El programa por competencias, trajo consigo problemas mayores en su interpretación y puesta en práctica en la escuela quebequense. La competencia 1 exige ser consciente de la diferencia entre ejercicio, problema y situación problema. Puesto que el ministerio de educación también propuso que la reforma educativa se apoyara en un acercamiento socio-constructivista de la educación, y se incorporara la noción de «Registro de representación» (Duval, 1993, 1995), ello añadió otra variable más a considerar en los procesos de enseñanza. Ahí no terminan las dificultades, como lo señalamos antes, el ministerio exigió a los productores de manuales escolares que cada capítulo se iniciara con una situación problema que hiciera referencia explícita a un problema relativo a la humanidad. Así, la acumulación de variables provocó el tratamiento de un problema muy complejo de enseñanza. Con respecto al profesor de la escuela secundaria, la situación no era del todo acogedora:

— Los profesores empezaban a tener un conocimiento estable relacionado a la resolución de problemas. La literatura del problem-solving y de manuales escolares se centraban más en la resolución de problemas de corte cerrado (solución única) que los problemas de tipo abierto (solución múltiple). El cambio produjo una desestabilización en los profesores.
— El paso de un contexto constructivista a uno socio-constructivista implicaba un cambio en las maneras de enseñar. El ministerio de educación no fue explícito en cómo realizar un tipo de enseñanza socio-constructivista en el aula de matemáticas y entonces, el profesor no sintió que debería cambiar sus hábitos de enseñanza. De hecho, el profesor estaba familiarizado con la competencia 2; y la 3 no fue interpretada bajo un acercamiento socio-constructivista. Se pensó que la competencia 3 debería evaluarse de acuerdo a la comunicación del estudiante con el profesor y análisis de sus producciones escritas.
— Se promovía la importancia del paso de una representación a otra y cambios de registro, pero no se hacía explícito las nociones de unidades significativas referentes al registro gráfico y sus correspondientes unidades simbólicas de las representaciones de corte algebraico (Duval, 1988).

En los primeros años de la implementación de un programa por competencias y resolución de situaciones problema, el ministerio inició una fase de concienciación proporcionando ejemplos de situaciones problema. El resultado fue que el ministerio implícitamente dejó entrever que el enunciado debería ser complejo. Los profesores en servicio, mencionan de forma informal, que en general la situación problema que se propone al inicio de cada capítulo de los textos, contiene una gran cantidad de datos, que la situación es demasiado abierta y que toma mucho tiempo para poder conciliar las ideas que afloran en clase. En cambio, los investigadores centrados en los problemas de aprendizaje de las matemáticas, precisamente proponían lo contrario; las situaciones problema deberían ser simples de entender (ello no quiere decir fáciles de resolver), que promuevan que el estudiante se comprometa y haga suya la situación (procesos de devolución) y se genere una reflexión profunda que genere el aprendizaje (Brousseau, 1997; Grenier y Payan, 2003, entre otros). Es decir, lo que promulgan los investigadores, es que la dificultad se presente de forma gradual en la actividad matemática de los alumnos y no en la compresión de un enunciado muy largo y complejo. Estas dos tendencias entre investigadores y el ministerio, todavía no logran llegar a un equilibrio en la época actual.

Otra característica particular de la reforma basada en competencias es que la tecnología no se especificó en las competencias disciplinarias sino que se enunciaron en las competencias transversales, como lo veremos enseguida.

Bajo todas estas variables, en 2013 llega a la universidad la primera generación de alumnos bajo una orientación por competencias. Hasta el momento no se cuenta con una evaluación formal de los resultados de la reforma por competencias y solo se tienen testimonios aislados de algunos profesores. Por ejemplo, algunos señalan que:

— las nuevas generaciones cuestionan más en clase que las anteriores,
— los alumnos parecen mostrar menos habilidades específicas en matemáticas, pero una actitud positiva hacia la comprensión de tareas complejas,
— cuentan con una visión más amplia de los problemas que afronta la humanidad.

Antes de la reforma, podemos decir también que la tecnología no tenía el impacto que tiene en estos momentos. Se utilizaba el retroproyector y la calculadora fundamentalmente. Se iniciaba en ese entonces con paquetes informáticos de geometría dinámica (Cabri-Géomètre, p.e.), pero la tecnología en general no era utilizada por los profesores en gran escala. En la siguiente sección veremos con más detalle qué pasó en la reforma con respecto al uso de tecnología.

La tecnología en el desarrollo de competencias matemáticas en la formación de profesores de secundaria (edades de 12 a 16 años)

En el caso de Quebec, el uso de la tecnología en el aula de matemáticas se refleja explícitamente en una de las competencias transversales: explotar la información, resolver problemas, ejercer un juicio crítico, poner en práctica su pensamiento creativo, proporcionar métodos de trabajo eficaces, *explotar las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC)*, actualizar su potencial, cooperar, comunicar de forma apropiada. Esta competencia relativa a la tecnología hace referencia a: utilizar las tecnologías apropiadas, sacar provecho de la tecnología, evaluar la eficacidad de su utilización.

Era un hecho que la propuesta del ministerio era difícil de implementar en el aula de matemáticas, ya que ellos mismos mostraban cierta ingenuidad en sus acercamientos antes de la reforma. Por ejemplo, el ministerio en la década de los 90 (antes de la reforma por competencias) afirmaba lo siguiente:

> Mientras que la tecnología afecta a las matemáticas y su uso, es necesario que los estudiantes utilicen hábilmente las herramientas electrónicas modernas, … La tecnología no garantiza el éxito de los estudiantes en matemáticas, ya que las calculadoras y los ordenadores, son como el procesador de texto para un escritor, son sólo herramientas. *Sin embargo, la tecnología permite al estudiante adquirir y comprender nuevos conceptos con mayor rapidez*. (Ministerio de Educación de Quebec, 1996, p. 6) [El énfasis es nuestro]

Esto muestra lo que Artigue señalaba en el 2000, acerca del *desconocimiento* de los procesos de instrumentación e instrumentalización de los artefactos tecnológicos. Los investigadores, posterior al artículo de Artigue, han realizado una gran cantidad de investigaciones al respecto, y la literatura en estos momentos, muestra muchos de los problemas de instrumentación e instrumentalización (Trouche, 2002) en el aula de matemáticas. Mientras los investigadores avanzaban en entender estos procesos, el ministerio de educación sorprendió a la comunidad de estudiantes, profesores e investigadores, al impulsar la tecnología tanto en la escuela primaria como secundaria dotando las aulas de un Tablero Blanco Iterativo (se estima un TBI por cada 28 alumnos). Una pregunta que emerge de inmediato es cómo se utiliza el TBI en el aula de matemáticas y qué proponen los autores de libros de texto. De hecho, en este documento, nosotros queremos señalar los problemas del uso de la tecnología tomando en consideración las propuestas explícitas del ministerio de educación y su interpretación en los libros de texto sobre un tema específico y su relación con el uso de la tecnología. En general, nuestro análisis de los libros de texto de Quebec nos muestran que la tecnología que se propone, tiene que ver con:

— apropiación de información presentada en Internet (en general sin especificación del sitio web a considerar),
— uso de un procesador de palabras y de correo electrónico,
— calculadora con pantalla gráfica,
— excel,
— uso de paquetes de geometría dinámica (Cabri-Géomètre y más recientemente GeoGebra),
— uso de applets que se encuentran en la Web.

En la sección siguiente nos proponemos proporcionar un ejemplo concreto con algunos contenidos de matemáticas, bajo varios puntos de vista:

— lo que los programas de estudio proponen,
— lo que los libros de texto presentan,
— lo que podemos encontrar en Internet,
— propuestas remediales locales a esos contenidos.

El Teorema de Pitágoras en la reforma y su tratamiento en los libros de texto

El ministerio de educación, propone el siguiente contenido para el tercer año de la escuela secundaria: *Relación Pitagórica* (MELS, 2013, p. 61). En la descripción de los programas de estudio se menciona frecuentemente la relación de Pitágoras, la interpretación que encontramos en los textos, es por ejemplo la de la Figura 1 (Vision, vol. 2, p. 246 y un sitio web).

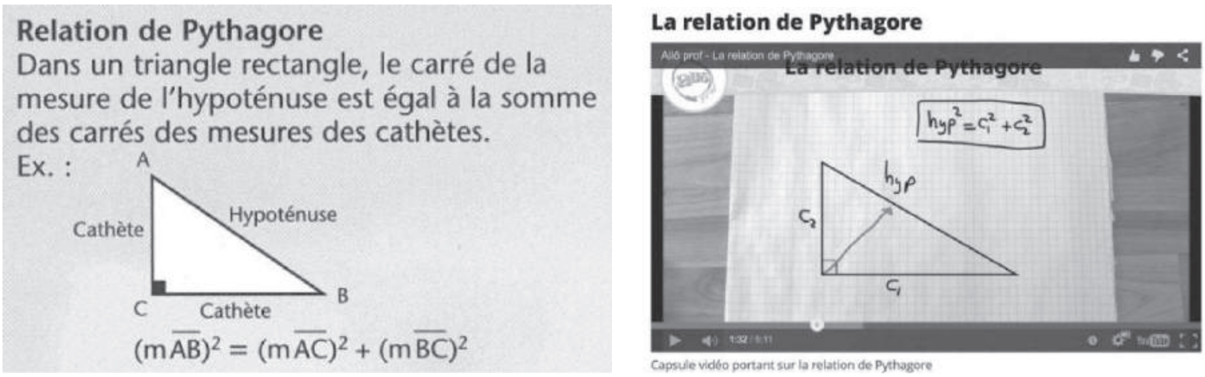


Figura 1. *Visión y http://www.alloprof.qc.ca/BV/Pages/vm1284.aspx*

El ministerio enfatiza la relación de Pitágoras, y los autores de textos y sitios web destacan esta relación desde un punto de vista algebraico. Si bien, este acercamiento tiene como objetivo el uso eficiente (competencia) de una relación de corte algebraica en la resolución de problemas, la presentación excluye procesos visuales de la relación. Pareciera que tanto las autoridades educativas como autores de textos y productores de sitios de Internet consideren superfluo otro tipo de representación en matemáticas y la importancia de pasar de una representación a otra. Recordemos que el ministerio ha tomado en consideración el acercamiento teórico de Duval sobre representaciones. Antes de la reforma, en el programa centrado en la resolución de problemas, era explícito los procesos de pasar de una representación a otra (influencia de Janvier, 1987, entre otros).

Los autores del mismo texto, proponen el uso de Cabri para verificar la relación pitagórica desde un punto de vista visual y numérico. Añaden a su uso de tecnología, una pregunta para que el alumno generalice la relación: si se utiliza un triángulo rectángulo y se construyen hexágonos regulares sobre los lados, ¿podemos establecer una relación entre las áreas de los hexágonos?

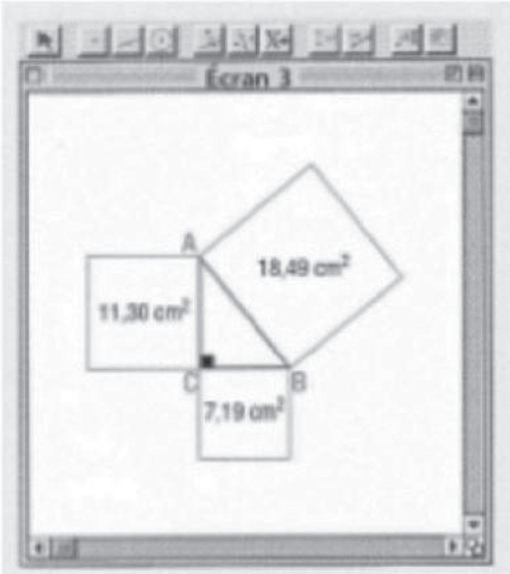


Figura 2. *Libro de texto: Vision (p. 36).*

Si bien se intenta promover el paso de una representación a otra, quedan olvidados aspectos importantes en el aprendizaje de las matemáticas como: anticipación, conjetura, sensibilidad a la contradicción y procesos de validación (Saboya, Bednarz y Hitt, 2015).

Un aspecto importante que señalan las autoridades educativas es sobre la importancia de incluir aspectos históricos relacionados con los contenidos de matemáticas tratados en el aula. Lo que encontramos en los textos es el uso de cápsulas históricas aisladas que no tienen un rol preponderante en su acercamiento a los contenidos tratados. Enseguida enfatizamos este aspecto.

Las representaciones visuales y sus consecuencias en el aprendizaje y desarrollo de competencias matemáticas

Es importante observar que un historiador de las matemáticas, Szabó (1960) señala que en la época de oro de los griegos, y precisamente en los Elementos de Euclides (siglo III a. C.), se dio un cambio radical de la presentación de la matemática para dar inicio a una ciencia deductiva, en donde es notoria la tendencia a evadir las representaciones visuales.

Szabó (Idem), nos muestra la importancia de la matemática griega y los esfuerzos para construir una matemática fundada en definiciones y axiomas. La matemática, siguiendo un principio de no contradicción, se ve en la necesidad de basar su fundamentación a la manera como la iniciaron los griegos, y las subsecuentes formalizaciones que ha tenido a través de la historia. Sin embargo, en el aprendizaje de las matemáticas, se debe priorizar el descubrimiento, la anticipación, la conjetura, la sensibilidad a la contradicción y los procesos de validación.

Hagamos un poco de historia. Buscando en las tabletas babilónicas que conocemos, contamos con la tableta de la Figura 3, que queremos relacionar con el Menon de Platón (427 a 347 a.C.).

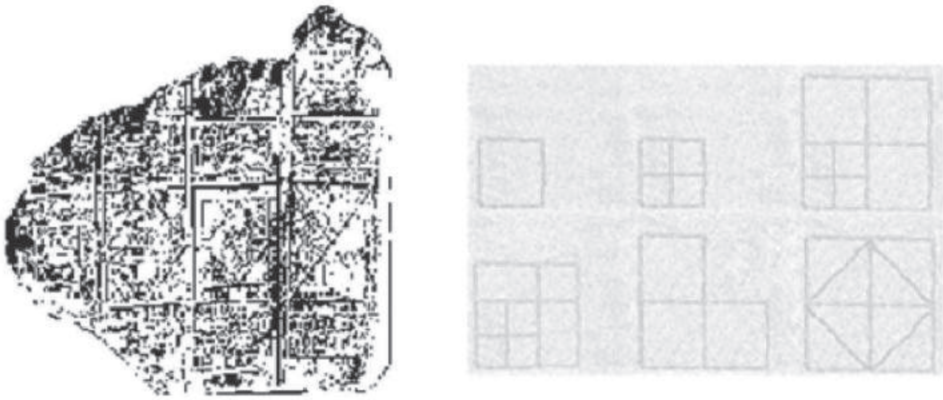
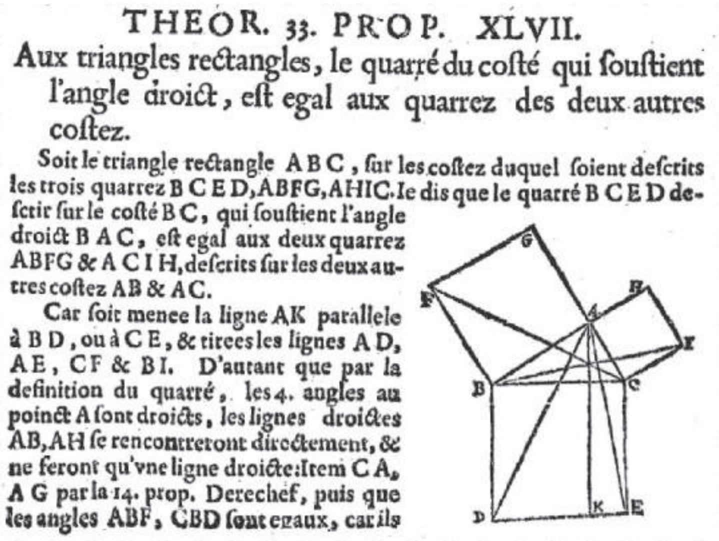


Figura 3. *Tableta babilónica y posibles dibujos sobre la arena en el Menon de Platón.*

La tableta y las posibles figuras del Menon en relación a la teoría de Sócrates sobre la reminiscencia (reduciéndola a unas palabras, estipula que todo lo sabemos, solamente es necesario contar con preguntas adecuadas para recordar algún contenido). Sin discutir en este documento sobre esta teoría, lo que queremos señalar es el uso de las probables figuras dibujadas en la arena. Las cuales, tienen relación directa en la resolución del problema de la duplicación de un cuadrado y figuras conocidas desde épocas muy remotas (Figura 4).

Figura 4. *Posible dibujo sobre la arena y su relación con el Teorema de Pitágoras.*

Todo parece indicar que el descubrimiento del Teorema de Pitágoras, seguramente tuvo que ver con un triángulo rectángulo isósceles, antes de llegar al enunciado que se encuentra en los Elementos de Euclides (Figura 5).



THEOR. 33. PROP. XLVII.

Aux triangles rectangles, le quarré du costé qui soustient l'angle droict, est egal aux quarrez des deux autres costez.

Soit le triangle rectangle ABC, sur les costez duquel soient descrits les trois quarrez BCED, ABFG, AHIC. Ie dis que le quarré BCED descrit sur le costé BC, qui soustient l'angle droict BAC, est egal aux deux quarrez ABFG & ACIH, descrits sur les deux autres costez AB & AC.

Car soit menee la ligne AK parallele à BD, ou à CE, & tirees les lignes AD, AE, CF & BI. D'autant que par la definition du quarré, les 4. angles au poinct A sont droicts, les lignes droictes AB, AH se rencontreront directement, & ne feront qu'vne ligne droicte: Item CA, AG par la 14. prop. Derechef, puis que les angles ABF, CBD sont egaux, car ils

Figura 5. *Teorema 33, proposición 47 de los Elementos de Euclides.*

La representación visual de Euclides, permite realizar un seguimiento de la demostración y en este caso, la representación intenta mostrar, «un caso general cualquiera». Como lo afirma Szabó (Idem), si realizáramos un análisis de la historia de las matemáticas sobre el rol de las representaciones visuales, nos podríamos percatar de la enorme importancia que han tenido en el descubrimiento de las matemáticas antes de llegar a Euclides.

Este ejemplo nos muestra que falta mucho para equilibrar un programa por competencias, lo que se encuentra en los libros de texto y lo que sugieren los investigadores.

¿Cómo la UQAM realiza la formación de profesores de matemáticas para la escuela secundaria, y en particular sobre el uso de tecnología?

A finales del siglo pasado, un grupo de profesores de la UQAM se dieron a la tarea de construir varios cursos para la enseñanza de las matemáticas en ambientes tecnológicos. Como lo señalamos en la Tabla I, la licenciatura en enseñanza de las matemáticas se realiza en 4 años. La obtención de su diploma les permite ejercer su profesión en la escuela secundaria (edades de 12 a 16 años). Los estudiantes se forman en 4 áreas generales:

— Formación disciplinar (11 cursos),
— Formación psicopedagógica y clientelas particulares (12 cursos),
— Formación didáctica (10 cursos),
— Formación práctica (4 estancias frente a un grupo en una escuela secundaria).

Entre los cursos antes mencionados, 4 de entre ellos tienen un acercamiento tecnológico:

— MAT1812: Programas profesionales en la enseñanza de las matemáticas I,
— MAT2812: Aplicaciones pedagógicas de la informática en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas,
— MAT3812: Programas profesionales en la enseñanza de las matemáticas II,
— MAT4812: Exploraciones matemáticas con la ayuda de la informática.

Dos de esos cursos tienen un acercamiento de apropiación de la tecnología y maneras de aplicarla MAT1812 y MAT3812; su contenido tiene que ver con el aprendizaje de procesadores de palabras, Excel, GeoGebra y elementos de programación Visual Basic y HTLM. En cambio, los otros dos cursos MAT2812 y MAT4812, tienen un acercamiento inverso; se plantean problemas y situaciones problemas (por parte de los profesores o por ellos mismos) y lo que se requiere es que los estudiantes seleccionen la tecnología pertinente como una herramienta para resolver lo planteado.

En el primer semestre de sus estudios ligado a la tecnología, se les propone, por ejemplo, que realicen un anuncio (poster) con las herramientas tecnológicas (Word y programación con Visual Basic ligado a un paquete LangageGraphique) que han llevado en las primeras 4 semanas (ver Figura 6).

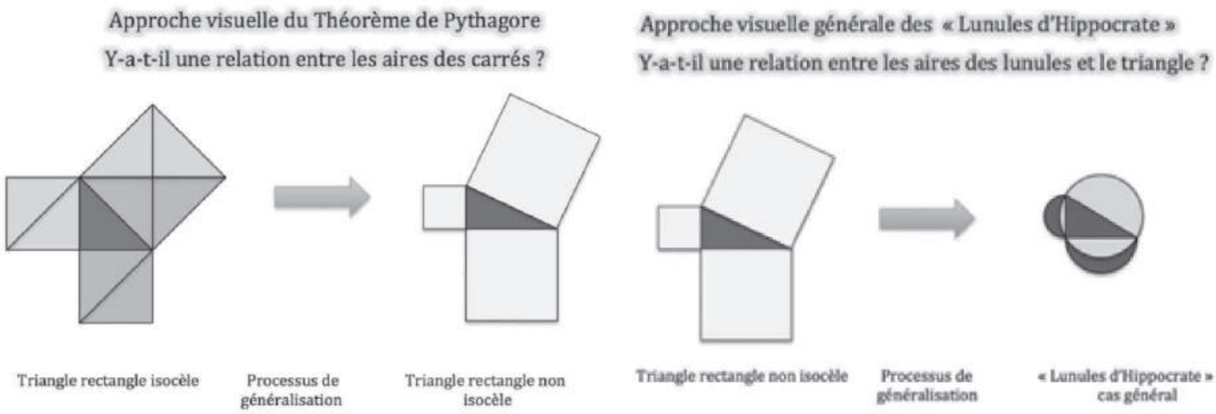


Figura 6. *Primeras actividades con tecnología de un profesor en formación.*

Con los estudiantes de este nivel (1er semestre de sus estudios), no se discute el artículo de Szabó (Idem), solamente se les solicita realizar un acercamiento visual al Teorema de Pitágoras utilizando herramientas tecnológicas. Como lo señalamos antes, los estudiantes en su primer curso aprenden a aplicar con problemas específicos, el uso de un procesador de palabras (Word), Excel y una introducción a Visual Basic en un contexto de un applet (LangageGraphique), GeoGebra y GeoGebra CAS. Una vez introducida la importancia de los aspectos visuales para el descubrimiento de conceptos y relaciones matemáticas, se hace explícito que un acercamiento visual tiene limitaciones, se les solicita presentar la demostración visual de que 64=65, según la proposición de Carrrol (1961).

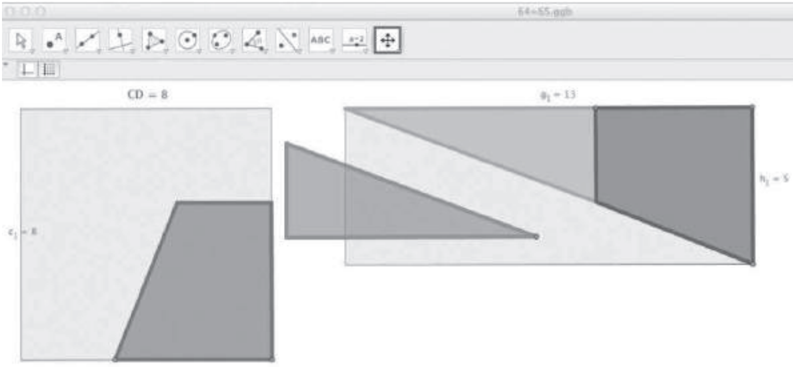


Figura 7. *Primeras actividades con tecnología de un profesor en formación.*

Una vez que los profesores en formación son conscientes de la importancia de los acercamientos visuales y de las limitaciones de estos procesos para ser considerados como pruebas, se les examina en un laboratorio, donde deben resolver problemas específicos con las herramientas tratadas en el curso. En estos exámenes, se hace referencia explícita a la tecnología que debe utilizar para resolver un problema planteado.

Modelación matemática y competencias en la resolución de situaciones problema

En el segundo curso sobre tecnología, los estudiantes son invitados a conocer características del programa de estudios en secundaria, analizando contenidos y su presentación en libros de texto. Es aquí en donde los alumnos discuten sobre ejercicios, problemas y situaciones problema. Así, se les solicita la transformación de ejercicios en situaciones problema. Por ejemplo, en un manual escolar (Point de Vue Mathématique, 3º año, Vol. 1, p. 185), se solicita lo mostrado en la Figura 8.

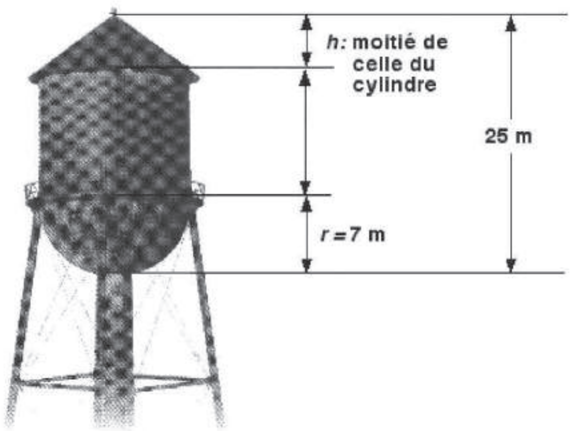


Figura 8. *¿Cuál es la cantidad máxima de líquido en el recipiente?*

Este ejercicio requiere del cálculo de la altura del cono, y aplicación de fórmulas sobre el volumen de una media esfera, volumen de un cilindro y de un cono. Por el contrario, dentro de los cursos de tecnología, los estudiantes al haber trabajado con GeoGebra se les invita a transformar el ejercicio en un problema en forma dinámica (ver Figura 9).

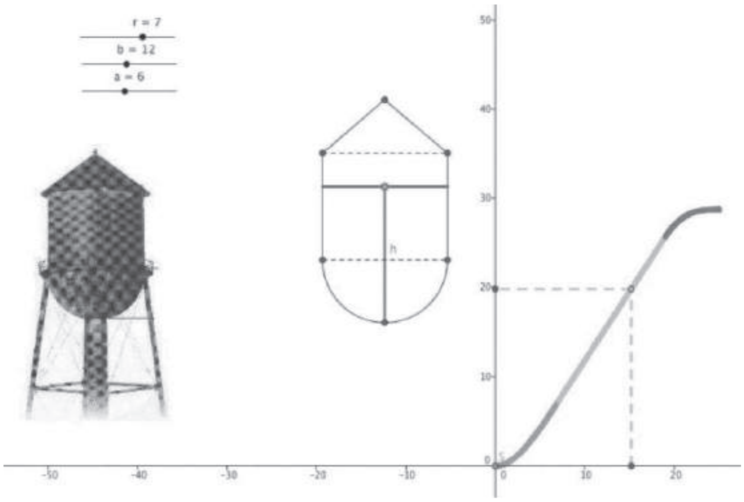


Figura 9. *Transformación de un ejercicio en un problema.*

El curriculum de matemáticas por competencias y centrado en la resolución de situaciones problema trajo consigo el impulso de la modelación matemática. En algunos de los manuales escolares, los procesos de modelación es central. Sin embargo, la tecnología sugerida en los libros de texto está muy lejos de ser un apoyo real en el aprendizaje de las matemáticas. Los profesores de la UQAM, en su programa de formación de profesores considera que los procesos de modelación matemática son esenciales. Así, una vez que los alumnos son competentes en el uso de GeoGebra, se les solicita realizar experimentos en equipo (proyectos) realizando un video y su análisis con el paquete Tracker (ver Figura 10) para la toma de datos. Esos datos se copian directamente en una tabla de GeoGebra, y los alumnos se inician así, en los procesos de la modelación matemática, que son muy importantes en un programa por competencias y resolución de situaciones problema.

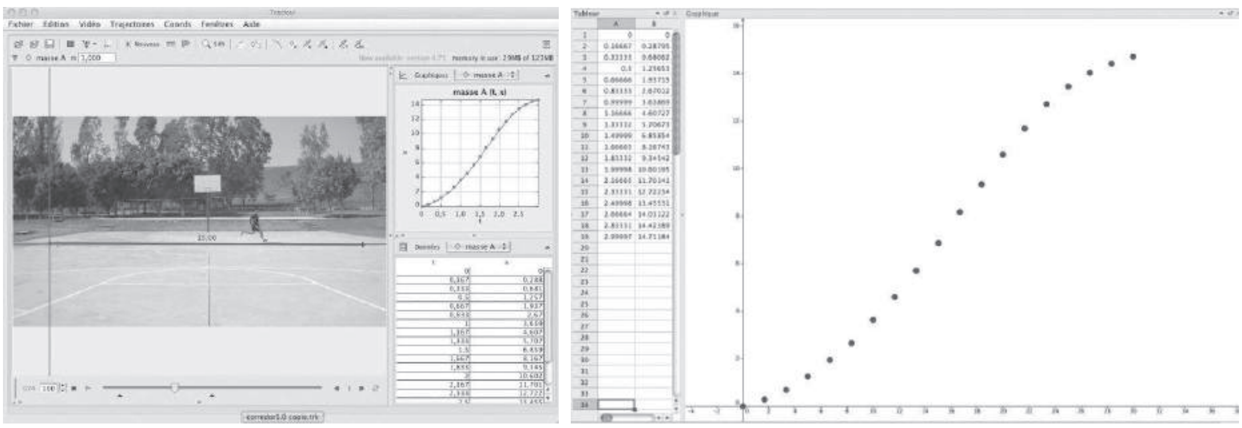


Figura 10. *Tracker y GeoGebra combinados*
(datos de una persona en movimiento, tiempo frente a distancia recorrida).

Formación de másters y su relación con el uso de tecnología

Los estudiantes de licenciatura, una vez terminados sus estudios, pueden continuar con uno de los tres tipos de máster. Uno que lleva al estudiante hacia la investigación y entonces tiene como objetivo prepararlo hacia un doctorado en didáctica de las matemáticas. Esta opción solicita una memoria (o tesis nivel maestría) que lo prepara hacia la investigación. Otra opción es una memoria profesional (ello implica que el estudiante lleve más cursos y realice un documento de investigación de limitada envergadura). La tercera opción es para aquellos que han realizado estudios en otra rama científica y que son profesores suplentes de matemáticas, pero que no tienen formalmente el diploma que les permite tener un empleo fijo (esta opción no tiene memoria, ver más adelante). Es el caso de muchos extranjeros que tienen, por ejemplo, un diploma de ingeniería y que ejercen como profesores suplentes en matemáticas en Quebec, la maestría en enseñanza secundaria con opción en matemáticas les permite obtener un diploma y el permiso respectivo para poder aplicar a un puesto definitivo. En esta maestría no es necesario realizar una memoria, pero incluye más cursos y, además en esta opción, es obligatorio realizar estancias de prácticas frente a un grupo que son evaluadas.

En estos cursos de maestría, dependiendo del curso, el uso de tecnología puede ser exigido. Por ejemplo, en un curso sobre didáctica de la función (en el programa de maestría con memoria o tesis), los estudiantes analizan artículos de investigación y desarrollan trabajos sobre ese contenido, que en algunos casos incluye la tecnología. En ese tipo de curso, por ejemplo, los estudiantes han seleccionado y analizado artículos de Duval (1988, 1993), de Arcavi y Hadas (2000) y de Hitt y González-Martín (2015), entre otros muchas lecturas. Los estudiantes deciden presentar un trabajo que relacione sus lecturas y una propuesta de enseñanza sobre el concepto de función. El ejemplo que presentamos a continuación, fue desarrollado por Tramblay y Ouellet (2014, documento interno no publicado). En ese trabajo, estos dos estudiantes han tomado como referencia teórica el trabajo de Duval y el de Hitt y González-Martín, proponiendo un acercamiento cualitativo al aprendizaje de las representaciones gráficas de las funciones en un contexto de una situación problema. Del marco teórico de Duval, los estudiantes han elegido los conceptos teóricos sobre:

— unidades significativas de una representación gráfica y su relación con las respectivas unidades simbólicas,
— registros de representación y la importancia de los procesos de conversión.

Del trabajo de Hitt y González-Martín, ellos han seleccionado la parte de enseñanza en un medio en colaboración (método ACODESA). La lectura de los artículos de investigación y en particular los arriba mencionados, les ha permitido a este par de estudiantes elaborar una actividad en un medio de papel y lápiz y tecnología. Ellos proponen la lectura de una página (ver Figura 11) para poner al estudiante en el contexto de la situación problema antes de la discusión en equipo y gran grupo.

Contexto. Un equipo de científicos observaron lo siguiente:

«Un Corvette azul está parado frente a un semáforo que cambia a verde. Entonces, el Corvette arranca y comienza a acelerar; un Yaris rojo llega justo al semáforo cuando cambia a verde, continuando con la velocidad que llevaba y pasando al Corvette.

A continuación presentamos las variables que han sido identificadas:

El tiempo, la distancia recorrida por cada auto, la distancia entre los autos, la velocidad de cada auto, la distancia que separa el auto de la gran tienda.

Los científicos han producido 4 gráficas. Sin embargo, ellos han olvidado identificar los ejes de acuerdo a cada gráfica. ¿Puedes ayudarles?

Identifica en cada una de las relaciones la variable independiente y la variable dependiente.

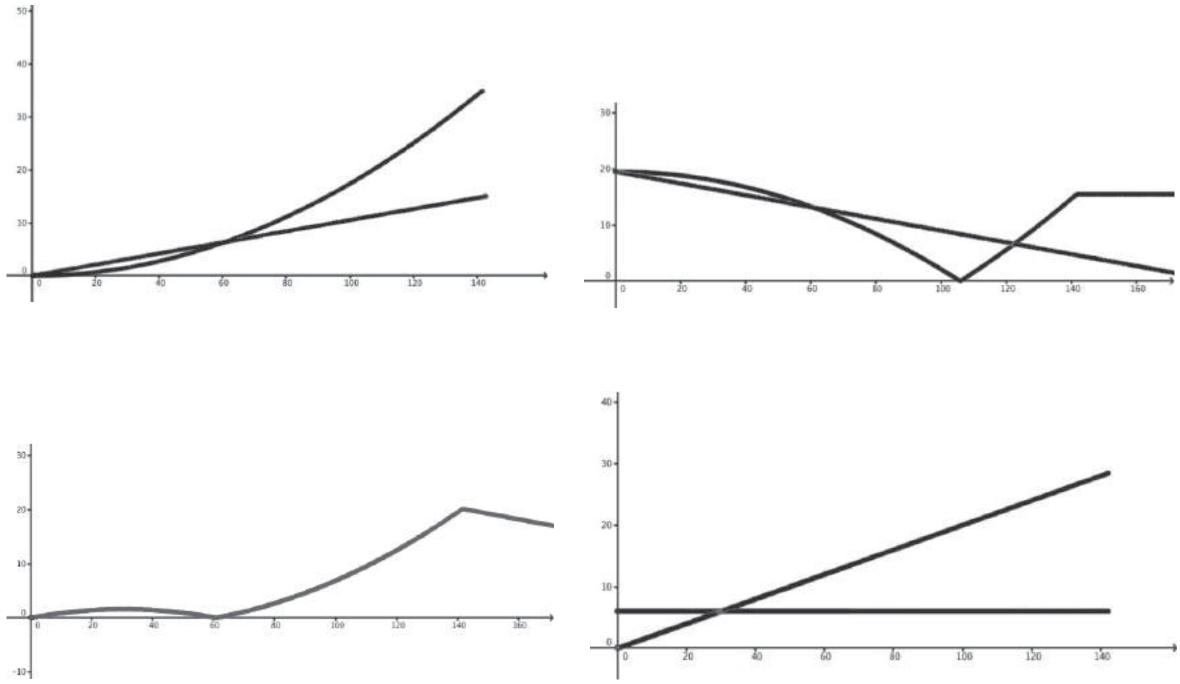


Figura 11. *Presentación de la situación.*

Una vez que los alumnos realizan una lectura individual y proponen diferentes variables para cada representación gráfica, pasan a una discusión en equipo, en donde se promueve la discusión, la anticipación, la conjetura, la sensibilidad a la contradicción y procesos de validación. Enseguida se les permite utilizar un micromundo elaborado por ellos con GeoGebra, para continuar la discusión y la reflexión (ver Figura 12).

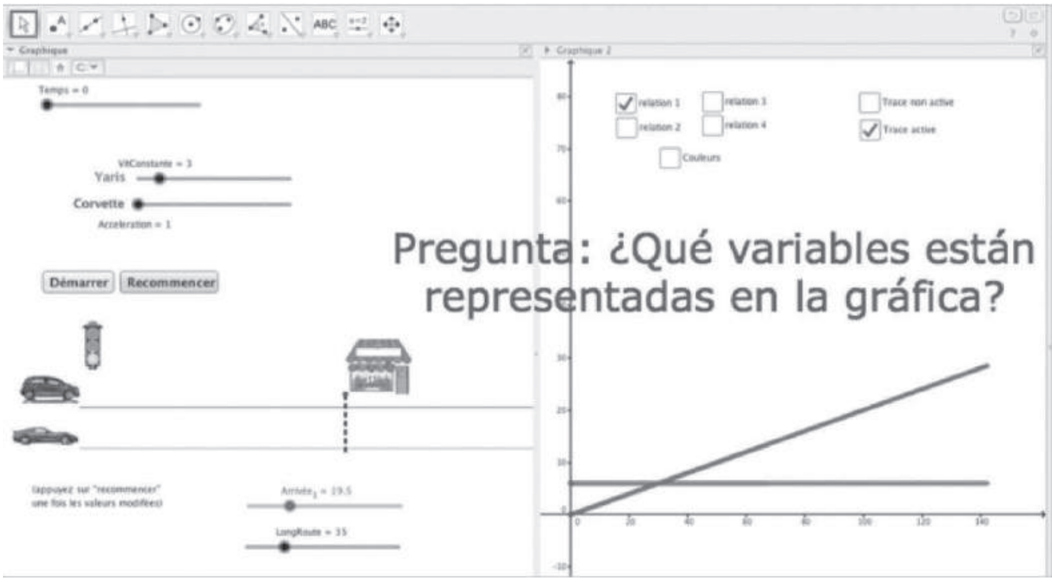


Figura 12. *Micromundo realizado con GeoGebra para la lectura de gráficas.*

Regresando a los aspectos generales de nuestro programa de licenciatura (ver sección 5 de este documento), la parte práctica de los profesores en formación es evaluada. Hemos tenido oportunidad de estar en algunas prácticas de algunos estudiantes que son entusiastas de la tecnología y que tienen grupos en donde utilizan el TBI. Hemos podido comprobar que algunos de los estudiantes utilizan el TBI como pizarrón clásico para escribir, pero hace falta motivarlos más para que realicen un uso eficiente de la tecnología en el aula. Es cierto que estos futuros profesores tienen que seguir el programa de estudios y el libro de texto que se ha elegido en la institución y les queda poco tiempo para dedicarlo a preparar una clase en un ambiente tecnológico rico. Incluso, podemos decir que el TBI en general está mal colocado, en medio del aula, dejando el pizarrón clásico por detrás. ¡Ello parece promover el uso del TBI como simple pizarrón!

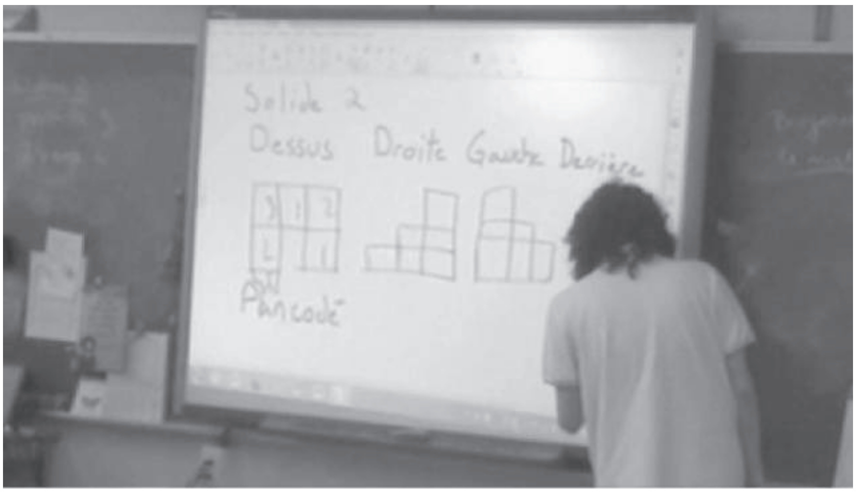


Figura 13. *Uso del TBI en el aula de matemáticas.*

A modo de reflexión

De acuerdo con Howson y Wilson (1986), un análisis curricular debe realizarse considerando los programas de estudio y materiales didácticos, lo que el profesor enseña, y lo que el alumno aprende, desde ese punto de vista de la investigación curricular, en Quebec se cuenta con la información de programas de estudio, libros de texto y sitios de Internet, no se sabe mucho sobre lo que el profesor enseña utilizando medios tecnológicos, ni lo que el estudiante aprende. Nosotros sabemos lo que nuestros estudiantes en formación aprenden, y contamos con poca información del uso de la tecnología que el profesor realiza en el aula, sin embargo, como lo hemos señalado, las autoridades educativas le han otorgado una gran importancia al uso de la tecnología. Las universidades que tienen a su cargo la formación de profesores de matemáticas, realizan esfuerzos para resolver este problema. Creemos que autoridades educativas e investigadores deben considerar políticas objetivas para la difusión permanente de los resultados de investigación que vayan en apoyo del profesor de matemáticas en ejercicio.

Como lo hemos señalado antes, el programa por competencias empezó desde el 2001. Después de década y media, sería conveniente contar con datos más precisos sobre las maneras de enseñar del profesor y de los resultados de aprendizaje de los alumnos. Con respecto a los libros de texto, una vez que ya han sido utilizados durante más de una década, sería conveniente proponer una nueva serie de libros que hagan un uso eficiente de la tecnología. En estos momentos, los esfuerzos de las editoriales es poner los libros de texto ya existentes en forma electrónica y estos ya empiezan a ser utilizados por los alumnos en tabletas electrónicas en algunas escuelas. Sobre todo en las escuelas privadas y en algunas escuelas públicas, cuyos alumnos provienen de padres de clase media.

La didáctica de las matemáticas ha avanzado de forma considerable en este siglo. Ahora se sabe más sobre los problemas de instrumentación e instrumentalización de las herramientas tecnológicas en el aula de matemáticas. La UQAM se preocupa de la formación de futuros profesores, pero el actual profesor en ejercicio al que se le solicita un uso eficiente de la tecnología y en particular del TBI, requiere de un apoyo de autores de libros de texto e investigadores que le proporcionen situaciones problema *ad hoc*.

Probablemente, ahora que está muy presente entre los investigadores la corriente del «Diseño de tareas» (Task design, por ejemplo ver Hitt y Kieran, 2010; Prusak *et al.,* 2013; Hitt, Saboya y Cortés, en proceso) ello dará como resultado contar con tareas experimentadas que podrán ser utilizadas por el profesor de matemáticas en ejercicio.

Referencias

Arcavi, A. y Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *5*, 25–45.

Artigue, M. (2000). Instrumentation issues and the integration of computer technologies into secondary mathematics teaching. *Proceedings of the Annual Meeting of GDM*. Potsdam. Retrieved from http://webdoc. sub. gwdg.de/ebook/e/gdm/2000.

Brousseau, G. (1997). *Theory of Didactical Situations in Mathematics*. 1970-1990, En N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland y Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht: Kluwer.

Carpenter, T., Ansell, E., Franke, M., Fennema, E. y Weisbeck, L. (1993). Models of problem-solving: A study of kindergarden children's problem-solving process. *Journal for Research in Mathematics Education*. *24*, 429-441.

Carroll, L. (1961). *The unknown Lewis Carroll. Eight major works and many minor.* New York: Dover Publications, Inc.

GeoGebra (software libre : http://www.geogebra.org/cms/).

Guay, S. (2007). *Point de vue mathématique.* Laval: Éditions Grand Duc - HRW.

Duval, R. (1988). Graphiques et equations: l'Articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1*, 235–253.

— (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 5*, 37–65.

— (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels.* Peter Lang, Suisse.

Grenier, D. y Payan, C. (2003). Situations de recherche en «classe», essai de caractérisation et proposition de modélisation. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz, 92*.

Hitt, F. y González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, acientific debate and aelf-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201–219.

Hitt, F. y Kieran, C. (2009). Constructing knowledge via a peer interaction in a CAS environment with tasks designed from a task-technique-theory perspective. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 14,* 121–152.

Hitt, F., Saboya, M. y Cortes C. (submitted). Task design in a paper and pencil and technological environment to promote inclusive learning: An example with polygonal numbers. En G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini y U. Guellet (Eds.), *Mathematics and technology*. Dordrecht: Springer.

Howson, G. y Wilson, B. (Eds) (1986). *School mathematics in the 1990's.* ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press.

Janvier, C. (Ed.) (1987). *Problems of representation in the reaching and learning of mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1985). A retrospective account of the past twenty-five years of research on teaching matematical problem solving. En E. A. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving : multiple research perspectives* (pp. 1–16). Hillsdale, New Jersey, London: LEA publishers.

Ledoux, A., Brousseau, B., Boivin, D. y Ricard, N. (2007). *Visions : Mathématique,* Vol. 2. Anjou: Les Éditions CEC.

Ministère de l'Éducation du Loisir et du Sport. Programme de Formation, Deuxième

Cycle du Secondaire. (Septembre, 2015). Retrieved from http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/ secondaire2/index.asp?page=math

PERRENOUD, P. (1999). Construire des compétences, tout un programme! *Vie pédagogique*, *112*, 16-20.

— (1999/2000). Transfér ou mobiliser ses connaissances? *Actes colloque de raisons éducatives*. Faculté de psychologie et des sciences de l'éducation. Recuperado de http://www.unige.ch/fapse/ SSE/teachers/perrenoud/php_main/php_1999/1999_28.rtf

POLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princetown: Princetown University Press.

PRINCIPLES AND STANDARDS FOR SCHOOL MATHEMATICS. (2000). NCTM. Reston: Virginia.

PRUSAK, N., HERSHKOWITS, R. y SCHWARZ B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, *15*(3), 266–285.

RICO L. y LUPIAÑEZ J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

SABOYA, M., BENARZ N. y HITT, F. (2015). Le contrôle en algèbre: analyse de ses manifestations chez les élèves, éclairage sur sa conceptualisation. Partie 1: La résolution de problèmes. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 20,* 61-100.

ROMBERG, T. (1994). Classroom instruction that fosters mathematical thinking and problem solving: Connections between theory and practice. En A. H. Schoenfeld (Ed.), *Mathematical Thinking and Problem Solving*. (pp. 287-304). Hillsdale, NJ Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

SCHOENFELD, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

SHELL CENTRE FOR MATHEMATICS EDUCATION. Retreived from http://mathshell.com/index.php

SZABÓ, Á. (1960). The transformation of mathematics into deductive science and the beginnings of its foundation on definitions and axioms. *Scripta Mathematica*, *XXVII* (I), 27-49, (II), 113–139.

TRACKER. Logiciel libre. *Video analysis and modeling tool* (version 4.87). Reference, 8-janvier-2015. Retrieved from http://www.cabrillo.edu/~dbrown/tracker/

TROUCHE, L. (2002). Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique. En D. Guin y L. Trouche (Dir.), *Calculatrices symboliques transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique* (p. 187–214). Grenoble: La Pensée Sauvage, 2002.

VERGNAUD, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, *10*(23), 133–170.

MÁS RICO: UNA HISTORIA ACTUALIZADA DE INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Más Rico: An Updated History of Research in Mathematics Education

Jeremy Kilpatrick
University of Georgia, USA

Resumen

Hace más de dos décadas, el volumen de Educación Matemática e Investigación, por Kilpatrick, Rico y Sierra fue publicado por Editorial Síntesis de Madrid. Formó una historia de la investigación en educación matemática y una descripción de la educación matemática en España del siglo XX. En este trabajo, ofrezco una actualización de la primera parte de ese volumen, el examen de varias formas en que la investigación en educación matemática se ha desarrollado desde 1994. La característica más llamativa es la creciente internacionalización de la investigación en nuestro campo. Una segunda característica es el amplio crecimiento en el uso de métodos de investigación cualitativa, a menudo mezclada con métodos cuantitativos. Ese cambio ha ido acompañado de un giro social: mayor atención a las teorías sociales, culturales y políticas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

Palabras clave: internacionalización, métodos cualitativos, giro social, matemáticas terciarias, conocimiento didáctico del contenido, tecnología en la educación matemática

Abstract

More than two decades ago, the volume Educación Matemática e Investigación, by Kilpatrick, Rico, and Sierra, was published by Editorial Síntesis in Madrid. It comprised a history of research in mathematics education and a description of mathematics education in twentieth-century Spain. In this paper, I offer an updating of the first part of that volume, examining several ways in which research in mathematics education has developed since 1994. The most striking feature is the increased internationalization of research in our field. A second feature is the extensive growth in the use of qualitative research methods, often mixed with quantitative methods. That change has been accompanied by a social turn: greater attention to social, cultural, and political theories of teaching and learning mathematics.

Keywords: *internationalization, qualitative methods, social turn, tertiary mathematics, pedagogical content knowledge, technology in mathematics education*

Kilpatrick, J. (2016). Más Rico: An updated history of research in mathematics education. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 33-43). Granada: Comares.

Since the publication of *Educación Matemática e Investigación* (Kilpatrick, Rico, & Sierra, 1994), research in mathematics education has grown enormously in volume and has developed in many different directions. That growth and development can be seen in the three *International Handbooks of Mathematics Education* published since 1994 (Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, & Laborde, 1996; Bishop, Clements, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2003; Clements, Bishop, Keitel, Kilpatrick, & Leung, 2013). The table of contents of the first handbook (Bishop *et al.,* 1996) had four sections that dealt with fairly standard topics: the mathematics curriculum, teaching and learning mathematics, contexts and perspectives, and social conditions and professional development. The second handbook (Bishop *et al.,* 2003) attempted to treat developments in the field after 1995, and its sections dealt with policy dimensions, technological developments, research issues, and professional practice —all seen as topics in which the field had shown substantial activity. A decade later, the four sections of the third handbook (Clements *et al.,* 2013) —social, political, and cultural dimensions of the field; mathematics as a field of study; technology in the mathematics curriculum; and international perspectives on mathematics education— were identified by the editors as offering the best potential to follow up the second handbook in light of activities since 2003. One can see in the lists of sections in the three handbooks both continuity and growth. The field has been giving greater attention to interdisciplinary work and to adopting broader perspectives.

The three editions of the *Handbook of International Research in Mathematics Education* (English, Bartolini Bussi, Jones, Lesh, & Tirosh, 2002; English *et al.,* 2008; English & Kirshner, 2015b) have kept their chapters in more or less the same categories: priorities in international mathematics education research; lifelong democratic access to powerful mathematical ideas (divided between learning and teaching, and learning contexts and policy issues); advances in research methodologies; and influences of advanced technologies. Nonetheless, although each new edition contains some revisions, most chapters are new, and all demonstrate how the field is growing and changing. English and Kirshner (2015a), in their introduction to the third edition, note that since the second edition, “there have been stimulating developments in research, as well as new challenges in translating outcomes into practice” (p. 3).

In his introduction to the third handbook, M. A. (Ken) Clements (2013) identifies three “major developments in mathematics education”: (1) the so-called social turn (Lerman, 2000) toward sociocultural theories and away from randomized experimental designs, (2) the challenges posed by technological changes, and (3) the globalization and internationalization of mathematics education. In what follows, I attempt to show how these and other developments in our field have enriched our theories and practices in research over the past two decades. Our research today exhibits a much greater variety of activities, stronger connections among researchers and the research they do, and more approaches to conducting research studies than was the case in 1994 (e.g., Rico, 2012). I cannot possibly do justice to any of those themes, but I hope I can at least suggest the richness of our field today.

Greater Variety

In my review of the history of research in mathematics education (Kilpatrick, 1992, p. 28), there were two figures that showed how the number of research studies in mathematics education had grown during the twentieth century. Although most of the studies in the first figure were done in the United States, some surveys counted work done in other countries. The graphs started out near zero and grew slowly during the first decades of the century. Between the 1960s and 1970s, after the new math appeared, the graphs showed a dramatic increase in the number of research studies each year (see also Kilpatrick *et al.,* 1994, p. 73). The second figure had two graphs recording the number of theses and dissertations in mathematics education from 1910 to 1988, one from the United States and the other from Britain and Ireland. Both graphs showed a sharp rise in the number of research studies being reported beginning about 1960 for the first graph and 1965 for the second. The common pattern of steep increase followed by some leveling off was the point I wanted to make.

My friend Heinrich Bauersfeld (1992) somewhat reluctantly reviewed for the *Journal for Research in Mathematics Education* the book in which my chapter on history appeared. He was reluctant because the book had been published by the National Council of Teachers of Mathematics —a largely North American organization— and Heinrich was from Germany. Almost all the references in the book were to work done in English, which he saw as a severe limitation. About my chapter, Heinrich wrote, "The data given about the number of publications and research studies (p. 27) and the nice diagrams (p. 28) suffer from being limited to mainly American publications and from the omission of recent data (with the exception of dissertations)" (Bauersfeld, 1992, p. 487). I was disappointed by his criticism because I had spent several years trying to locate yearly surveys in any language of how much research in mathematics education was being done in other countries. Since then, there have been such surveys —for example, in Spain and Portugal (see Kilpatrick, 2008b)— but as of 1992, I had not located any. I was somewhat annoyed that Heinrich criticized me for concentrating on the United States when I had little choice in the matter. As an aside, I should note that Heinrich, in an earlier report on research related to the process of learning mathematics (Bauersfeld, 1979), had acknowledged that about 85 percent of the research that he was reviewing had come from the United States (p. 203). So perhaps I was not as misguided in my handbook chapter as he thought.

Internationalization

Ken Clements (2013) says in his introduction to the third international handbook, "The nation which has the most qualified mathematics education researchers is probably the USA" (p. x). That dominance —if it ever existed— has been eroding, however, as research in our field increases in volume and spreads around the world. That the volume is increasing rapidly goes without question. In 2008, in connection with the centennial of the International Commission on Mathematical Instruction,

> I searched the Web for "mathematics education." Using Google, I got 1,280,000 hits; using Google Scholar, I got 129,000 (Kilpatrick, 2008a). . . . In February 2013, I conducted a similar search. Using Google, I got 3,100,000 hits; using Google Scholar, 287,000. In each case, the number had more than doubled in just 5 years. (Kilpatrick, 2014, p. 340)

The spreading of research in mathematics education across the world is more difficult to document, but it is occurring nonetheless. An example can be seen in the paper by Llinares (2008), who not only chronicles the development of mathematics education research in Spain but also maps the variety of topics being addressed by that research. Another example is the joint meeting of the three societies from Spain and Portugal at which Llinares presented his paper: the Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, the Grupo de Trabalho de Investigação of the Associação dos Professores de Matemática, and the Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação. Other examples include the European Society for Research in Mathematics Education, which was established in 1997 and continues its work today; the Nordic Graduate School in Mathematics Education, which functioned from 2004 to 2009 and yielded over 50 doctoral dissertations (Grevholm, 2009); the International Conferences on Science and Mathematics Education in Penang, Malaysia, that began in 2005 and have been held in alternate years ever since; and not least, the Joint European Doctorate (*Doctor Europaeus*) degree obtained at institutions like the University of Granada by scholars such as Pedro Gómez (2007). The astonishing number of international and multinational organizations in mathematics education has been analyzed by Hodgson, Rogers, Lerman, and Lim-Teo (2013).

One of the most striking developments of the past several decades has been the growth in large-scale studies comparing pupils' achievement across countries, from the First International Study of Mathematics through the multiple Trends in International Mathematics and Science (TIMSS) studies to the Programme for International Student Achievement (PISA) studies and beyond (for more information about these studies, see Niss, Emanuelsson, & Nyström, 2013; Rico, 2011; for their influence on the teaching and learning of mathematics, see Mesa, Gómez, & Cheah, 2013). In fact, Clements (2013) complained that despite the best efforts of the editors of the *Third Handbook* to restrict attention to such studies, they ended up being cited often "because many authors recognized the huge impact that TIMSS and PISA (and other international studies such as the Learner's Perspective Study— LPS) have had during the past decade" (p. x).

Social turn

In my review of the history of mathematics education (Kilpatrick, 1992), I identified mathematics and psychology as the two pillars supporting the development of the field. Although other social science disciplines such as anthropology and sociology were beginning to be incorporated into research in mathematics education, psychology —essentially the psychology of the individual child— was the basis on which most research was being done. In 1976, the International Group for the Psychology of Mathematics Education was established, and an affiliated North American branch was formed in 1978. Psychology seemed to be remaining in place, as it had been for some time, as the so-called master science of the school. Eventually, however, researchers in our field began to chafe at the idea that psychology was the only social science they could draw upon. They started to focus more of their attention on social aspects of learning, viewing cognition as situated in the social realm and the learning of mathematics as occurring within a sociocultural, political context. In 2005, PME changed its constitution to allow theoretical fields in addition to psychology to be used as justifications for research reported at its meetings. Lerman (2000) appears to have been the one to coin the term *social turn* to describe this shift.

Part of the social turn was a natural accompaniment to other shifts going on in mathematics education research. Early studies tended to focus principally on the learning of mathematics by primary school children and only gradually, during the middle of the twentieth century, began to address secondary school mathematics.[1] As the social turn occurred near the end of the century, researchers began increasingly to look at the teaching and learning of tertiary mathematics as well. Moreover, their attention began to shift from learners to teachers —not only how they teach but also how they are educated and what they know and believe. The special knowledge needed for teaching mathematics —sometimes termed *pedagogical content knowledge* or *mathematical knowledge for teaching* (Ball, Thames, & Phelps, 2008; Carrillo, Climent, Contreras, & Muñoz-Catalán, 2013)— became a new focus of researchers' attention. The social turn has continued to preoccupy researchers in mathematics education as they consider both the cultures in which school mathematics is embedded and the social practices of the classroom and school.

Stronger Connections

Over the past two decades, researchers have increasingly been able to meet and work with colleagues from across their countries and around the world. Cooperative research projects involving people with a variety of specializations have become common. In particular, the large-scale studies of student achievement mentioned above have required teams of researchers within participating countries as well as international governing boards and technical committees. These developments, along with the increased number of organizations of mathematics educators concerned with research (Hodgson *et al.,* 2013), have contributed greatly to the enrichment of our field.

[1] See Gómez (2007) for a recent treatment of didactic analysis in the preparation of secondary teachers in Spain and Colombia.

Advances in travel and communication

Today, researchers in mathematics education are easily able to travel to various countries and assist them in developing their research presence. Let me offer some examples from my own experiences in Latin America. The first time I went to South America was in March 1993. I gave a course entitled Assessment Techniques for Secondary Teachers at the University of Los Andes in Bogotá, along with Luis Rico, who gave a course entitled Errors and Difficulties in Learning Mathematics. The materials from those courses were published, together with materials from a symposium we gave there, in Kilpatrick, Gómez, & Rico (1998). In April–May 1996, I gave a course on research in mathematics education at the University of Campinas in Brazil, and in May–June 1996, I gave a master's course on research at the University of El Salvador in San Salvador. Finally, in December 2008, I gave a course Tendências em Educação Matemática at the Universidade Bandeirante de São Paulo (UNIBAN), Brazil. These are examples of efforts that I have made, in addition to conference presentations, to present material in various Latin American countries, trying to support Latin American colleagues as they do research in mathematics education.

It is no longer necessary to travel to another country, however, to interact with people there, as well as with others in one's own country. The Internet allows us to work collaboratively with colleagues at a distance. The editors of the three *International Handbooks of Mathematics Education* (Bishop *et al.,* 1996; Bishop *et al.,* 2003; Clements *et al.,* 2013), for example, have encouraged the formation of author teams composed of researchers from different countries as a means of increasing the scope and coverage of the handbook topics. Were it not for the Internet, these teams would not have been able to produce timely reports.

Developments in communication technology have enabled researchers in mathematics education to conduct searches of related literature much faster and more extensively than in the past, and they can easily locate other researchers working on topics related to their interests. Possibilities for collaborative research studies across institutions have blossomed not only as travel has helped people get acquainted but also as communication across long distances has become easier. Doctoral students in our program at Georgia can work not only with mathematics education researchers they meet at conferences or who visit our campus but also with students and faculty members in mathematics education they know only online.

Research and practice

The problem of connecting research to practice has been with us since the earliest days of research in mathematics education. We now have a field that has developed to the point where much stronger connections have been formed between theory, research, practice, and policy. The social turn has enabled the construction and appropriation of a variety of theories to support our research. Simultaneously, the notion of teachers as researchers is being increasingly realized, teachers have joined research teams, and more research studies are being informed by issues coming from practice. Also, researchers and teachers are contributing more to policy studies in mathematics education.

Llinares (2008) argues that a new objective for the community of researchers in mathematics education in Spain is to determine the extent to which research results are improving teaching-learning processes and school contexts. He notes that the "*transferencia del conocimiento*" to the educational system is a task still to be accomplished in Spain —and, he might have added, other countries as well. A "major theme" (English & Kirshner, 2015a, p. 6) of the third edition of the *Handbook of International Research in Mathematics Education* is what the editors call "the research/practice rift" (p. 6).

There is a long progression of elements from research to learner, with many mediators in between, and the potential impact of research on practice tends to become quite diluted or distorted along the way. Gutiérrez, Bazzini, Gálvez, Eng, and Sztajn (2008) report the results of an international survey they conducted on the impact that research findings in mathematics education have had on students' learning of mathematics. They argue that there is a difference between the impact of research results on students' learning when students are in experimental classrooms as opposed to "ordinary classrooms," and they argue that the latter classrooms are the ones to which attention should be paid. Gutiérrez et al. cite a variety of examples in which research results did or did not influence national policies, official or school curriculums, and textbooks. Those examples included a report by Guy Brousseau that French decision makers could not be convinced to adopt the use of the Russian lattice multiplication algorithm even after his research had demonstrated its advantages and the reported incorporation of Pólya's problem-solving phases into the Malaysian curriculums of the 1980s and into the 1992 curriculum of the region of Valencia, with companion effects on textbooks. Yet another example comes from Chile, where beginning in 2003 teaching units for the primary grades were constructed and implemented that were based on Chevallard's Anthropological Theory of Didactics and Brousseau's Theory of Didactical Situations. Finally, in the United States, a book published by the National Council of Teachers of Mathematics (Kilpatrick, Martin, & Schifter, 2003) attempted to spell out the research that had guided the content and recommendations of the so-called standards documents that the NCTM had published.

Gutiérrez et al. (2008) note the difficulty of tracing the impact of research on students' learning, claiming that teachers are the weak link in the chain because they need help if they are to implement changes in their classes. Teachers need not only to understand and agree with any proposed changes, they also need to be convinced that the changes are worth making and not too difficult for them to manage. The process is clearly a slow one. One example cited in the report is that of Cognitively Guided Instruction (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, & Empson, 1999) in the United States. The work began in the 1980s with professional development programs, and only recently have effects on students' learning been documented. Although we now have a much better appreciation of the research-to-practice process, it is still fraught with problems.

More Approaches

Research in mathematics education has been incorporating a variety of new methods as the field has moved further away from the dominance of quantitative methods two decades ago (Kilpatrick, 1992). The social turn in our field has meant that dimensions of knowledge, belief, thought, and behavior that do not lend themselves well to quantification have become increasingly prominent in research. Methods for gathering and analyzing data, therefore, have had to change.

Qualitative and mixed research methods

Whatever their source —tests, questionnaires, surveys, interviews, or observations— research data can be classified as quantitative (numerical) or qualitative (categorical). Research studies, therefore, can be quantitative, qualitative, or a mixture of the two. In the past two decades, qualitative studies have come to dominate research in mathematics education.

Hart, Smith, Swars, and Smith (2009) surveyed 710 articles published from 1995 to 2005 that reported research in mathematics education and found that qualitative studies were the most common, studies using mixed methods were the next most common, and a nontrivial number were quantitative studies. The classification of research as qualitative, quantitative, or mixed turned out to present some serious problems of interpretation. In particular, studies using mixed methods were seldom identified as such in the report of the study. Although they did not find clear trends in the fraction of studies using mixed methods, Hart et al. expected that more high-quality mixed methods research would be published in the coming years, seeing mixed methods as possibly "an appropriate response to calls for greater generalizability of results while maintaining enough detail about the processes of teaching and learning to be valid and useful" (p. 39). Quantitative data still have a place in our research, but improved ways to gather and analyze qualitative data have truly transformed the field.

Technology in research

The availability of unobtrusive video and audio recorders has changed research in mathematics education and, in particular, the study of mathematics teaching. Examples include the video studies conducted as part of the TIMSS. One of the hypotheses emerging from the 1995 TIMSS Video Study (Stigler & Hiebert, 1999), which involved eighth-grade mathematics classrooms in Germany, Japan, and the United States, was that lessons within countries tend to show greater similarity in such features as reviewing content or introducing a new topic than did lessons across countries. Some people suggested that there might be a cultural "script" for teaching eighth-grade mathematics within each country. The results of the 1999 TIMSS Video Study (Hiebert *et al.,* 2003), which involved eighth-grade classrooms in Australia, the Czech Republic, Hong Kong, Japan, the Netherlands, Switzerland, and the United States, were mostly consistent with the hypothesis from the earlier study, but the data did not support the conclusion that countries have a uniform mathematics-teaching script. "The variability within some countries suggests a more complicated picture" (Hiebert *et al.,* 2003, p. 147). For example, Switzerland had considerable variation across several aspects of lesson structure, and the researchers conjectured that language differences plus reform activities promoting two methods of teaching might have been responsible for that variation. The TIMSS video studies have raised important hypotheses that were not possible to test before the technology was available to gather and analyze data from "average" classrooms in different countries.

Conclusion

Spain presents an excellent example of ways in which mathematics education has been enriched over the past decades. According to Rico, Sierra, and Castro (2002), disciplines and departments within the university, by providing an institutional structure for implementing doctoral programs and research groups, have created the current community of Spanish researchers in mathematics education. That community has consolidated a program of teaching and research in the university, participated in training teachers for primary and secondary education, and developed programs of doctoral studies. Rico et al. identify continuing problems, however, with the initial training of primary school teachers, inadequate training of secondary school teachers, and barriers to developing such training further. Although problems remain —as they do in other countries as well— Spain has made a huge intellectual investment in the field of didactics of mathematics, which promises well for the future.

I know of no one who has contributed more to the development of mathematics education as a research field in Spain than Luis Rico Romero. He has established Granada as a center for that research, and through his collaborations and students he has enriched theory, research, and practice in the didactics of mathematics. I am privileged to count him as a friend and collaborator —a supreme academic and a fine human being.

References

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59,* 389–407.

Bauersfeld, H. (1979). Research related to the mathematical learning process. In B. Christiansen & H. -G. Steiner (Eds.), *New trends in mathematics teaching* (Vol. 4, pp. 199–213). Paris, France: UNESCO.

— (1992). A professional self-portrait [Review of the book *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* edited by D. A. Grouws]. *Journal for Research in Mathematics Education, 23,* 483–494.

Bishop, A. J., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Laborde, C. (Eds.) (1996). *International handbook of mathematics education.* Dordrecht. The Netherlands: Kluwer.

Bishop, A. J., Clements, M. A., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2003). *Second international handbook of* *mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics: Cognitively Guided Instruction.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013, February). *Determining specialized knowledge for mathematics teaching.* Paper presented in Working Group 17 at the Eighth Congress of European Research in Mathematics Education (CERME 8), Manavgat-Side, Antalya, Turkey.

Clements, M. A. (2013). Past, present and future dimensions of mathematics education: Introduction to the Third International Handbook of Mathematics Education. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. v–xi). New York, NY: Springer.

Clements, M. A., Bishop, A. J., Keitel, C., Kilpatrick, J., & Leung, F. K. S. (Eds.). (2013). *Third international handbook of mathematics education.* New York, NY: Springer.

English, L., Bartolini Bussi, M., Jones, G., Lesh, R., & Tirosh, D. (Eds.). (2002). *Handbook of international research in mathematics education.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

English, L. D., Bartolini Bussi, M. G., Jones, G. A., Lesh, R. A., Sriraman, B., & Tirosh, D. (Eds.). (2008). *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed.). New York, NY: Routledge.

English, L. D., & Kirshner, D. (2015a). Changing agendas in international research in mathematics education. In L. D. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed., pp. 3-18). New York, NY: Routledge.

English, L. D., & Kirshner, D. (Eds.). (2015b). *Handbook of international research in mathematics education* (3rd ed.). New York, NY: Routledge.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral, Universidad de Granada).

Grevholm, B. (2009). Nordic collaboration in mathematics education research. *Nordic Studies in Mathematics Education, 14*(4), 89-100.

Gutiérrez, A., Bazzini, L., Gálvez, G., Eng, L. S., & Sztajn, P. (2008, July). ICME-11 ST3: *Survey on the impact of research findings in mathematics education on students' learning of mathematics.* Survey team report Monterrey, Mexico.

Hart, L. C., Smith, S. Z., Swars, S. L., & Smith, M. E. (2009). An examination of research methods in mathematics education (1995-2005). *Journal of Mixed Methods Research, 3*(1), 26-41.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K. B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chui, A. M., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., & Stigler, J. (2003). *Teaching mathematics in seven countries: Results from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington, DC: National Center for Education Statistics.

Hodgson, B. R., Rogers, L. F., Lerman, S. & Lim-Teo, S. A. (2013). International organizations in mathematics education. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 901-947). New York, NY: Springer.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3–38). New York, NY: Macmillan. Reprinted in Spanish translation as Historia de la investigación en educación matemática in *Educación mate-*

mática e investigación, by J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (1994, pp. 13–96). Madrid, España: Síntesis.

— (2008a). The development of mathematics education as an academic field. In M. Menghini, F. Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.), *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908–2008): Reflecting and shaping the world of mathematics education* (pp. 25–39). Rome, Italy: Istituto della Enciclopedia Italiana.

— (2008b, September). *Research in mathematics education: Learning from each other.* Invited plenary address at the first joint meeting of the Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), the Grupo de Trabalho de Investigação (GTI) of the Associação dos Professores de Matemática (APM), and the Secção de Educação e Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação (SEM-SPCE), Universidad de Extremadura, Badajoz, España.

— (2014). We must cultivate our common ground. In M. N. Fried & T. Dreyfus (Eds.), *Mathematics & mathematics education: Searching for common ground* (pp. 337–343). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

— (2015). Border crossings. In B. Liu & H. Kim (Eds.), *Proceedings of the Conference on Mathematics Education in Latin America, Teachers College, Columbia University, October 13, 2014* (pp. 7–14). New York, NY: Program in Mathematics Education, Teachers College, Columbia University.

Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (Eds.). (1998). *Educación Matemática: errores y dificultades de los estudiantes, resolución de problemas, evaluación e historia.* Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Kilpatrick, J., Martin, W. G., & Schifter, D. (Eds.). (2003). *A research companion to principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Kilpatrick, J., Rico, L., & Sierra, M. (1994). *Educación matemática e investigación.* Madrid, España: Síntesis.

Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 19-44). Palo Alto, CA: Greenwood.

Llinares, S. (2008, September). *Agendas de investigación en Educación Matemática en España: Una aproximación desde "ISI-web of knowledge" y ERIH.* Plenary paper presented at the meeting on Research in Mathematics Education in Spain and Portugal: General Trends and Perspectives for the Future, Badajoz, Spain.

Mesa, V., Gómez, P., & Cheah, U. H. (2013), Influence of international studies of student achievement on mathematics teaching and learning. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 861-900). New York, NY: Springer.

Niss, M., Emanuelsson, J., & Nyström, P. (2013). Methods for studying mathematics teaching and learning internationally. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third international handbook of mathematics education* (pp. 975-1008). New York, NY: Springer.

Rico, L. (2011). El estudio PISA y la evaluación de la competencia matemática. *Matematicalia, 7*(1), 1-11.

— (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39-63.

Rico, L., Sierra, M., & Castro, E. (2002). El área de conocimiento «Didáctica de la matemática». *Revista de Educación, 328,* 35-58.

Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom.* New York, NY: Free Press.

EARLY ALGEBRA Y FORMACIÓN DEL PROFESORADO: EL CASO DEL PROYECTO ARAL

Early Algebra and Teachers Education: the case of the ArAl Project

Nicolina A. Malara
Department of Education and Human Sciences, Modena
& Reggio Emilia University, Italy

Resumen

Después de algunas indicaciones sobre los estudios que han determinado la génesis de la *early algebra,* presentamos el Proyecto ArAl —dirigido a la renovación de la enseñanza de la aritmética en perspectiva algebraica a través de un acercamiento lingüístico, socio-constructivo y metacognitivo. Discutimos acerca de aspectos teóricos del proyecto y de nuestras modalidades de trabajo con el profesorado para llevarles a adquirir formas de actuar en el aula en sintonía con los objetivos del proyecto. Presentamos un breve extracto de una discusión en clase que muestra la aparición de las primeras formas de pensamiento algebraico en los estudiantes y, más en general, discutimos acerca de las dificultades identificadas en los docentes. Concluimos con observaciones sobre las condiciones que dan lugar a cambios en los docentes y la dificultad de averiguar en el tiempo su incidencia en el desarrollo de una nueva visión del algebra en los estudiantes.

Palabras clave: early algebra, formación profesorado, pensamiento algebraico, práctica reflexiva, relación teoría-práctica

Abstract

After some indications on the studies which generate early algebra and on the socio-cultural aspects implied in its teaching, we present the ArAl Project—which proposes a renewal of the arithmetic teaching in an algebraic perspective through a linguistic, socio-constructive, and metacognitive approach. We discuss on its theoretical aspects and on our ways of working with the teachers in order to bring them to acquire ways of acting in the class in tune with the indications and aims of the project. We present a short excerpt of classroom discussion showing the appearing of first forms of algebraic thinking in the pupils and we discuss about the difficulties detected in the teachers. We conclude with some remarks on the conditions which can produce a change in teachers' performance, on the difficulties to spread these innovations at large and

Malara, N. A. (2016). Early algebra and teachers education: The case of the ArAl Project. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 45-59). Granada: Comares.

on the one to control in the time their incidence on the development of a new view of algebra in the students.

Keywords: *algebraic thinking, early algebra, reflective practice, teacher education, theory & practice relationship*

On Early Algebra

Early algebra is a recently born disciplinary area, appeared in the syllabuses of leader countries such as UK and USA, and presently studied at international research level as far as the didactical transposition of its principles is concerned. Its origins can be traced back in the studies that, in the Eighties, arised difficulties in algebra teaching and learning. Its constitution as a disciplinary area is the result of studies that we briefly recall in the following lines.

As already known, the modern mathematics of the Sixties abandons the idea of mathematics as an abstract, static and isolated discipline in favour of a dynamic and evolutionary vision of it, rooted in the concrete world and open to interactions with different disciplines and contexts. The contents in the syllabuses are renewed and expanded, while a deep methodological revolution shifts the attention from the passive learning of mathematical facts towards problem solving and mathematical discovery.

According to these developments, there is a widespread awareness of the importance of investing on studies dedicated to problems of teaching and learning and to improve the culture of teachers affected by the novelties.

As far as the teaching of algebra is concerned, the first studies concentrate on the definition of projects of curricular innovation. The pioneers in this area are the English projects for the teaching of mathematics in grades 6^{th} to 10^{th} (e.g., Bell *et al.*, 1985; Harper, 1987), which promote an approach to algebra centred, from the very beginning, on modellization. Beside these projects appear studies of diagnostic kind, in search for the most widespread wrong behaviours in the pupils. Particularly important are Kieran's studies (1989), which clearly show how the problems in the learning of algebra are mainly due to the arithmetic traditional teaching, completely regardless of the relational aspects and of the control of the meanings implied by calculus processes.

In those years, scholars have different opinions about the relationship between arithmetic and algebra teaching, as well as on the age at which pupils should be faced with algebra. As far as the first question is concerned, some scholars underline the epistemological rupture between the two areas (e.g., Filloy & Rojano, 1989; Hescoviz & Lincevski, 1994), others highlight the importance of looking at the two areas in a perspective of continuity, stressing their mutual synergies (e.g., Chevallard, 1989-1990). As to the ideal onset age for algebra, some scholars maintain that this should occur in the 8^{th} grade (e.g., Usiskin, 1987), while other authors state that it should be tackled earlier, at primary level (e.g., Davis, 1985). Nevertheless, there is general agreement on the need to set the foundations of the teaching of arithmetic in a relational and pre-algebraic perspective. The objectives are: (a) to overcome classical difficulties and stereotypes such as the directional equal sign, or the lack of closure in arithmetic expressions; (b) to induce a structural vision of arithmetic expressions, detecting equalities or analogies and differences; and (c) to open the way to generalization processes and modellization for the genesis of the objects of algebra.

The acknowledgement of the importance of these issues is highlighted at the WG on algebra at ICME VII (Laval, 1992) where the scholars get to envisage a specific area of teaching they call pre-algebra: as a bridge between arithmetic and algebra (Lincevski, 1995). This denomination turns then soon into early algebra. Moreover, the activities of syntactic transformation are no longer seen as isolated, but rather in their relationship with activities of representation and interpretation, Bell (1996) speaks of 'essential algebraic cycle'. Other scholars (Arcavi, 1994; Arzarello *et al.,* 1993; Boero, 2001) open to the metacognitive dimension, shifting the attention towards the control of the properties that legitimate the processes of syntactic transformation and the activation of anticipatory thinking, seen as the ability to foresee (without carrying out syntactic transformations) new possible forms of an expression, by checking its meanings with reference to a given aim, or to hypothesize formal writings to be reached in order to achieve specific results. With reference to generalisation, Mason maintains that pupils should be lead to conquer the double awareness of *seeing the general in the particular* and *seeing the particular in the general* and, most of all, become aware of the plurality of cases contained in a general statement. In this field, many studies are devoted to figural and numerical sequences (e.g., Stacey, 1989).

In the second half of the Nineties there is a flourishing of studies on these aspects mainly targeted at pupils aged 11 to 13. Some of the studies stand out for their theorising of models for a conceptual development in algebra of a socio-constructive type, which highlights the influence of the classroom environment on teaching within the framework of an algebraic vision of algebra as a language (e.g., Da Rocha Falcão, 1995; Meira, 1996; Radford, 2000). In the US area there is widespread agreement on the idea that primary school syllabuses should be re-arranged, according to the social needs of the 21st century, in the sense of early algebra (Kaput, 1998). Since 2000, early algebra issues have raised an increasing interest within the international scientific community, as testified by the many interventions devoted to this theme at international conferences, as well as by the production of specific monographs (Cai *et al.,* 2005; Caj & Knut, 2011; Kaput *et al.,* 2008). Many experimental studies of classroom implementation of early algebra tackle simultaneously the issue of teacher training (e.g., the reports by Carpenter *et al.,* 2003; Daugherty in Cick *et al.,* 2001; Kaput & Blanton, 2005).

Our research studies are located within this frame and develop within the *ArAl Project: Paths in arithmetic to favour pre-algebraic thinking,* a project that, as we shall clear later, develops through two merged educational paths: The first one is devoted to the planning and implementation of class activities and to the analysis of students learning; the second one is aimed at a renewal of teacher professionalism through individual and shared reflective practices on the activated didactical processes (Cusi & Malara, 2015; Cusi *et al.,* 2011; Malara & Navarra, 2003; Malara & Navarra, in press). Before concentrating on the ArAl Project, we recall here some questions related to the socio-constructive teaching and to teachers education.

Socio-Constructive Teaching and Teachers Education

The socio-constructive model of mathematics teaching sees the pupils as creators of their knowledge through activities of collective work on problematic situations that allow specific properties or mathematical concepts to arise. In this model, mathematical discussion has a central role, since it makes pupils express their ideas and debate on the different points of view that emerge in the classroom, conquering new knowledge while sharing their constructions and consolidating them by reflecting on their meaning and role. The coordination of a mathematical discussion requires in the teachers methodological skills that go beyond the mere disciplinary competence. First of all, teachers must foresee the development of classroom action; then, they should make hypotheses about pupils' conceptual constructs and on the possible didactical strategies to help them modify such constructs. From a social point of view, they must be able to create a good interaction environment, stimulating participation, mutual listening and facilitating the production of counter-arguments; they should avoid judgement and ask the students to validate the arguments; they should ask questions at metacognitive level so as to allow pupils to internalize the processes carried out.

In order to develop these skills, the consolidated key practice in research environment is based on the importance of teachers' critical reflection on classroom processes, particularly when these reflections are shared. To foster teachers' self-observation ability during classroom action, Mason (2002) suggests the constant practice of the '*discipline of noticing*' and he underlines that teachers have to become aware "not simply of the fact of different ways of intervening, but of the fact of subtle sensitivities which guide or determine choices between types and timings of interventions" (Mason, 2008, p. 49). Jaworski (2004) supports the efficacy of "inquiry communities" (mixed groups of teachers and university researchers) and she stresses that this dialogical model is particularly relevant to teacher professional development because it makes teachers research on their own practice and, consequently, develop a critical intelligence and an increasing awareness of the different aspects to be faced during the teaching processes. Recently, Schoenfeld (2013) underlines the importance of studying the interaction between teachers' knowledge, resources, goals, beliefs, and orientations and their in-the-moment decision making. This position is consistent with the studies which discuss the crucial role played by an investigation *in situ* of the interrelationships between teacher knowledge, beliefs and emotions because it allows the teachers to become aware of the mismatch between their espoused beliefs and the beliefs that emerge from practice (e.g., Sowder, 2007; Thames & Van Zoest, 2013).

In the last decade several research projects for teacher education are planned focused on a real teachers' involvement and their active collaboration with researchers but where the reference to the theory is considered fundamental (e.g., Potari, 2013). The teachers who collaborate in these project are motivated to undertake inquiry-based practice, to give time to collaboration with researchers, and to engage seriously with reflective developmental practice. We are in tune with these scholars (e.g., Malara & Zan, 2008): We believe that suitable research projects and teacher education programs should be conceived with the aim of actively involving teachers in the field of practice and, in the same time, motivating them to approach theory to elicit useful tools to promote their own practice and to become more sensitive in perceiving and interpreting class processes. We also agree with Thames and Van Zoest (2013), who stress the need of developing studies aimed at the analysis of the effects of specific teacher actions on students' learning. Therefore, in our educational programs we work with and for teachers with the aim of making them become more sensitive and able to consciously observe and control their behaviour, also in facing contingent actions and taking sudden decisions, but above all in controlling the incidence of how they teach the basic theoretical elements of our approach to early algebra, and the feedback of theoretical aspects on the pupils' attitude and arguments.

The ArAl Project

Our interest in early algebra derives from a broad study we carried out in the early Nineties, concerning didactic innovation on Algebra in middle school. In the beginning we detected in several students a certain rigidity which we could overcome only in long term, this fact motivated us towards the opportunity of operating in pre-algebraic key at primary school level. That's how the *Progetto ArAl* was born (Malara & Navarra, 2003).

Our perspective in the approach to early algebra is linguistic and metacognitive, based on the hypothesis that there is a strong analogy between the modalities of learning natural language and algebraic language. The specific hypothesis on which the ArAl Project is based is that the mental framework of algebraic thinking should be built right from the earliest years of primary school in arithmetic realm (but not only in it) through a didactical contract based on the principle *first represent then solve* and the construction of an environment which might informally stimulate the autonomous processing of that we call *algebraic babbling,* i.e. the experimental and continuously redefined mastering of a new language, in which the rules may find their place just as gradually, trough the production, the analysis and the discussion of initially imprecise representations. Within a game of translation and interpretation between sentences in natural language and in formal language the pupils: approach the use of letters; activate the construction and the elaboration of the first algebraic expression; construct and solve equations in a naive way, reflecting on the underlying processes; interpret the meaning of formal sentences as to specific questions. This way, they become aware of the meaning of signs and symbols and of their role in the formal writings.

The project develops within the classes through the exploration of situations with socio-constructive methods (discussion, argumentation, verbalization). Basic mathematical elements are: the symmetry of the equality sign; the plurality of representations of a number; the reification of the properties of the arithmetical operations through the analysis of problem solving ways; the comparison of the value of numerical expressions without doing calculations; the algebraic modelling and the solutions of verbal problems with unknown data; the individuation and the representation of numerical regularities and of correspondence laws[1].

In the ArAl Project, the image of early algebra is expressed through a set of keywords and concepts that refer to arithmetic and algebra, but it defines its areas evolving from both disciplines towards a different and original identity. We can consider it a meta-discipline, concerning not much the objects, processes and properties of arithmetic and algebra, but rather the genesis of a unifying language between the two, i.e. a meta-language. In order to control the meta-disciplinary knowledge of early algebra, the teacher acquires the meaning of words and linguistic constructs which represent new conceptions of intertwining between arithmetic and algebra. Here we shall only recall some of these terms that turned out to be fundamental in order to generate in the pupils ways of seeing that are functional to the development of algebraic thinking.

Some theoretical key elements of the ArAl Project

We present here some theoretical key elements in our approach to early algebra: the = sign. representing versus solving, canonical form/non-canonical form of the number; translations between languages and the respect to the rules.

The equal sign and the duality process-product. The usual reading of 5+6=11 is “5 plus 6 *is* 11”: What’s on the left to the equal sign is seen as an *operation,* whereas on the right it is seen a *result*. The two sides of the equal sign are interpreted as *ontologically different entities*. But the algebraic meaning is different: it indicates the equivalence between two representations of the same quantities, i.e. between two entities that are *ontologically equal*. We usually introduce this alternative perspective by discussing with

[1] Examples of classroom activities and related didactical processes, can be found in the *ArAl Units*. The Units can be seen as models of teaching/learning socio-constructive processes related to a specific arithmetic/algebraic theme. They are structured in such a way as to make the teaching process transparent to the teachers: methodological choices, activated class dynamics, key elements of the process, extensions, potential behaviour of pupils and difficulties they may encounter, ecc, all essential elements for their free reproduction. Moreover there are several materials (video of classroom activities, articles for the curricolar planning, commented classroom transcripts, …) which can be dawnloaded from the Project website www. progettoaral.it .

teachers the words of an 8-year-old pupil: “It is correct to say that 5 plus 6 makes 11, but you cannot say that 11 'makes' 5 plus 6; so, it is better to say that 5 plus 6 'is equal' to 11, because in this case the other way round is also true.”

Representing vs. solving. A widespread belief among pupils, favoured by the traditional teaching of arithmetic, is that solving a problem means identifying its result; this perspective focuses the attention on the operations. In order to bring about a change of perspective, it is necessary to move from the cognitive to the metacognitive level. In ArAl Project the pupils are brought to not immediately search the result of a problem but they are slowly guided forwards the metacognitive level, shifting the attention on its structure and represents it through algebraic language. The following example highlights the difference between the tasks Solve and Represent. Situation: Eva has 13 euros. She receives 9 more euros and spends 6 euros.

(a) ‘classical’ arithmetical task (procedural view): How many euros are left to Eva?

(b) Task in pre-algebraic view: Represent the situation in the mathematical language so that others can find out how many euros are left to Eva.

Task (a) emphasizes the search for the product (16), whereas (b) concentrates on the process (13+9–6), i.e. the representation of the relationships between the elements in play. This shift of perspective also favours the naming to the quantity to be determined: representations such as “Eva left euros = 13+9–6” often are simplified by the pupils introducing a letter for representing the euros left to Eva. This difference is connected to one of the most important aspects of the epistemological gap between arithmetic and algebra: While arithmetic implies an immediate search for solution, algebra delays it and begins with a formal transposition of the problem situation from the domain of natural language to a specific system of representation.

Canonical and non-canonical representation of a number. In order to promote the comprehension of these concepts we resort to the strategy of writing on the blackboard the name of a pupil and some information concerning him/her (e.g.: son/daughter of, friend / A, partner / a of bank, etc.). The class understands that those are different ways to *call* the pupil: one is his/her name, all the other definitions (*representations*) expand the knowledge on him/her by adding information that the first name does not give. The teacher leads pupils to understand that the situation is similar with numbers: A number, 12 for example, has its own name which we call *canonical form*, all other expressions quantitatively equivalent to 12 —such as 3×4, (2+2)×3, 36/3, 10+2, 3×2×2· …— are their *non canonical forms* and each of them has its *sense* with reference to the underlying process and to the context which determines it. The concept of canonical / non-canonical form has crucial implications for both pupils and teachers, also in order to reflect on the possible meanings attributed to the sign of equality. Moreover, it becomes a kind of “semantic ferry” towards generalization.

Transparent representations vs. opaque representations. A representation in mathematical language is made of symbols that convey meanings, the comprehension of which depends both on the representation in itself and on the ability of interpretation. For example: the non canonical form $2^2 \times 3^3 \times 5^2$ gives more information on the divisors of the number 1350 than its canonical form (1350). We can therefore talk of a higher *opacity* for writings such as 1350, of a higher *transparency* for those like $2^2 \times 3^3 \times 5^2$. Generally speaking, the process transparency favours the manage of meanings, highlighting the underlying properties; it allows to avoid possible errors and to clear up possible misconceptions which may arise.

Translations between languages and the respect of the rules. A key aspect is making students understand the importance of respecting the rules of algebraic language. While students start soon interiorizing the importance of respecting the natural language's rules in order to facilitate communication, it is difficult to make them develop a similar awareness in relation to algebraic language. It is therefore necessary to help them understand that algebraic language, too, is a finite set of arbitrary symbols which can be combined according to specific rules to be respected. In our project, this kind of conception is fostered through the creation of linguistic mediators which force the respect of rules in communicating, even advanced concepts by means of algebraic language, in a perspective which foster generalization. A mediator that teachers particularly appreciate for its efficacy (both in conveying the construction of the algebraic language and to motivate the interpretation of formal writings with reference to given contexts) is Brioshi, a virtual Japanese student who doesn't speak the Italian language but knows how to express himself using a correct mathematical language. He is an algebraic pen friend with whom students communicate using mathematical sentences which should be written through a correct application of syntactical rules in order to be understandable.

Teachers Education: Our Approach

At the basis of our project is the hypothesis that a fruitful exchange between theory and praxis can make teachers' competence evolve at two different levels. First, in picking up signals in everything that co-defines their professional setting, either *on the spot* or in the organization of their theoretical tools. Secondly, in processing the received signals to convert them into their own cultural patrimony.

In order to facilitate the teacher's approach to theory, we have conceived a glossary (see www.progettoaral.it), presently made up of almost 150 interconnected keywords referring to five areas (general, linguistic, mathematical, socio-didactical, and psychological). It is structured so as to avoid pre-defined approaches to the contained terms. The texts describing each term of the glossary show keywords in bold type, so that each term puts the teacher into a double process of conceptual scrutiny and expansion: scrutinizing the term through the relationships of the key terms mentioned in its definition; expanding, since their bold print offers a potential incentive to further reading. The ArAl glossary represents a reference system that allows the teacher to gradually attain a global vision of early algebra, combining theory and practice by pursuing a linguistic conception of algebra, within which he/she should construct with the pupils an convincing control over its meanings.

As to the teachers' ability to interpret signals when they are in the classroom, improvement can be obtained through the increasing awareness with which they learn to transform the manifold occasional observations and reflections into the tool of a personal methodology, resulting from the interlace of observation skills, motivation to action and knowledge of *how* it would be appropriate to intervene. Our aim is that *teachers* approaching early algebra become leaders of their own training: willingness to take a challenge and reflect on their own action within sharing practices that gradually generate a new *forma mentis* in them, deeply different from the previous one. A key aspect of the training process we propose lies in leading the teachers towards the ability to notice, by showing them on which aspects they should concentrate and, simultaneously, helping them understand how to intervene.

With this aim, we involve teachers in an activity of critical analysis, and consequent reflections, of the transcripts of audio and video-recordings of classroom sessions. The aim of this activity is highlighting the interrelation between the knowledge students' construction and the teacher's behaviours in guiding them. Teachers transcript the sessions and send them, together with the comments, to the e-tutors. The e-tutors provide feedback to the teachers and other team members, who can also add aditional comments. The transcripts so enriched become an interesting object for teachers education that we call multi-commented transcripts (MTs). Through the MTs, the teacher is guided towards re-reading his/her interventions with "theoretical glasses" on, referring both to the literature and to the ArAl Glossary. This process of analysis and reflection on the micro-decisions that the teacher makes during his/her lessons allows to objectify the limits and the problematic issues in his/her action, leading him/her to a conversion of his/her knowledge and beliefs on arithmetic teaching and algebra, towards a reconstruction of their personal attitudes in the classroom.

The comments in MTs highlight not only the positive aspects, but also the possible stereotypes, beliefs and behaviour that are often mistaken. Frequently, the comments underline that teachers need to have better control on using linguistic operative terms (*calculate, solve, find the result, it gives …)* that inhibit the development not only of a relational vision in arithmetic, but also of the introduction of pre-algebraic terms (*connect*, *translate*, *represent*, *interpret*). Furthermore, suggestions are given on how to guide and help the pupils translate from natural language into the symbolic language. For instance: on dealing with the problem (presented to the classroom) of expressing arithmetically the term "previous" —referred to a natural number— it sometimes happens that the pupils are only capable of linguistic paraphrases, such as 'that precedes', 'that comes before', without ever mentioning the number to which the term refers. This sometimes produces an empasse in the discussion and the teacher is led to give the solution to the question. Often, the comments —and even more the collective reflection— discuss on how teachers should guide the pupils to objectify the arithmetical connections between two natural subsequent numbers, so that they can get to express each of the two numbers through the other one. This kind of situations, asking the pupils to express number relationships in different ways, usually provides the identification of the productive point of view. Particular care is devoted to make teachers reflecting on their action in front of 'false discussions' focusing on a dialogue between the teacher and some or few pupils, where the teacher continuously rhetorically suggests the answers, possibly through pleonastic questions such as: Is everything clear? Do you understand? Do you agree? Is it true? Is it ok for everyone? without actually allowing the class to re-examine the whole discussion so as to check whether it has been effectively acquired. The general comments recommend that pupils be educated to argue thoroughly and coherently, with an appropriate use of language, underlining that the mathematics comprehension occurs also through its collective and appropriate usage. Moreover, teachers are recommended to provide peer-dialogue interaction and limit his/her role as much as possible, reflecting on the importance of asking thought-provoking questions in the classroom and drawing back during the answer phase: If the teacher is the constant pivot of the discussion, the social aspects of knowledge construction are weakened.

In this scenery, the teachers learn again to manage the socio-cognitive processes, comparing its epistemology with the reference frames that they are offered and gradually developing the outcomes of the debate, so as to consolidate them as a steady cultural heritage. This process aims making them to grasp aspects (of their behaviour as well as in the pupils' behaviour) that did not emerge at the beginning. Particularly effective is the collective debate on the classroom action of different teachers dealing with the same activity, since the action of one teacher can become a model of good practice for their colleagues.

The joint reflection on the MTs strongly influences the development of theoretical, methodological, instrumental, material aspects (Units of the ArAl Series, papers, articles, learning objects) and supporting elements (website, blog, Facebook Group) aimed at offering teachers a cultural background that can help them act differently in the classroom (see Figure 1. below).

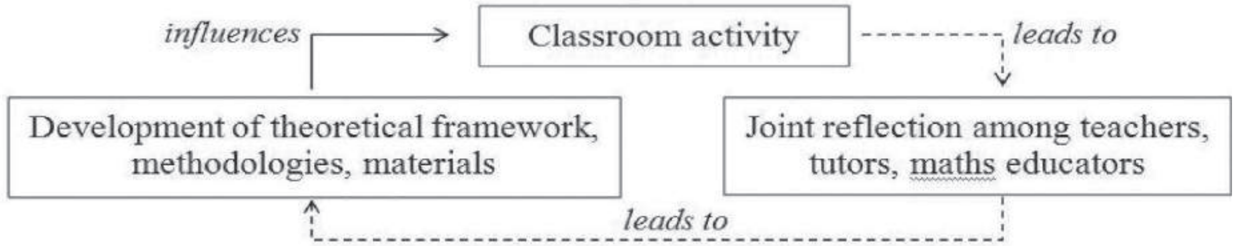
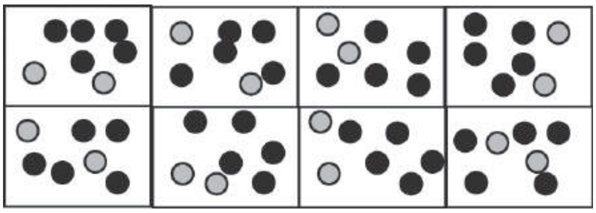


Figure 1. *The cycle of teachers' mathematics education.*

Moreover the MTs allow to ascertain whether the classroom-leading strategies have changed (and *how*) during the training. Among the factors that influence the assessment of the teacher growth there are, for example, the following issues: Does the teacher develop a wide range of roles in order to promote a refection onto mathematical processes or objects? Does he/she foster linguistic interactions by encouraging verbalization, argumentation, and collective discussion? Does he/she negotiate and share with the pupils the theoretical framework? Does he/she modify their initial points of view or does he/she seem insensitive towards meaningful changes in his/her initial attitude? For reasons of space, here we cannot offer sufficiently meaningful examples of the insights achieved by the teachers and of the evolution they underwent through these practices; we therefore refer to Malara (2008), Cusi *et al.* (2011), Cusi & Malara (2015). We limit ourselves to a small example drawn from Malara and Navarra (in press), which highlights the pre-algebraic approach attained by the pupils.

Episode (pupils 8 years old, grade 3)



The pupils have represented this situation in the mathematical language and reflect on the suggestions made by Alice n=5+2×8, Martina 5+2×8=n and Ada n=(2+5)×8.

Francesco: I think they are right because 5+2 represents the marbles that are in a box, by 8 which is the number of the boxes.

Maria: They are the same as Ada's but they don't have parentheses.

Teacher: Let's reflect on the presence of the parentheses. Do they change anything?

Andrea: I think they do, because 5+2×8 is equal to 21, while (2+5)×8 is equal to 56.

Bruno: It's true: the teacher said once that in a chain of operations you solve multiplications first.

Maria: This means they are not the same!

Francesco: That's right, the translation with the parentheses is the more correct one.

There are many elements here that let us appreciate positively, at different levels, the teacher's action: (a) *mathematically*: she has introduced the pupils to the use of letters, to the priority of operations within expressions, to the use of parentheses; (b) *linguistically*: she has fostered the organization of meaningful, complete sentences; (c) *metalinguistically*: she has promoted the reflection on the mathematical writings and their comparison; (d) *socially*: by inviting pupils into discussion, she has let them interact without her influence, listening to each other and having spontaneous dialogues; and (e) *methodologically*: she has shared the theoretical framework with the class, by spreading words such as 'represent' and 'translate'. On the other hand, we make the teacher notice and reflect on the fact that (2) Francesco has referred '5+2' *to the marbles* and not *to their number*; (2) Andrea's argument highlights a possible his diretional vision of the sign '=' focusing on the *result*, and pupils should be guided from the level of *calculations* to the level of *representations*.

Concluding Remarks

Implementing an aware and meaningful approach to early algebra implies that the teachers convert their beliefs not only on the subject itself, but also on its teaching. The socio-constructive approach requires didactical sensitivity, listening skills, polyphony management during the discussions and a great control of timing and classroom dynamics. Shifting the teachers' attention from results to processes and opening to relational activities and generalization in arithmetic require in the teachers a great revision of the teaching contents and a methodological renewal that allows pupils' group work and mathematical discussion in the class.

Thanks to the specific work methodology adopted with and for the teachers, some terms and theoretical constructs of our framework have proved themselves to be fundamental not only in the communication among teachers and between them and us, but also during classroom activities and in teacher-pupil communication. This represents a concrete example of the role played by theory in didactics of mathematics, when properly mediated: it contributes to re-founding a teacher's culture according to the current educational challenges and goals. Particularly, we refer to terms such as 'represent', 'translate', 'interpret' and their corresponding nouns with reference to the coordination of the verbal and algebraic registers; to terms such as 'canonical representation' and 'non canonical representation' with reference to numerical designations; to the attributes 'opaque and transparent' with reference to numerical representations concerning calculus processes; to the terms process / product with reference to the points of view arising in problem solving.

Our studies have shown a tight interconnection between the beliefs, attitudes and lexicon used by the teacher on one hand and the perspectives and language developed by the pupils on the other. When the teachers act in a conscious and effective way, the pupils' acquisitions become evident and increasing: from naive forms of algebraic babbling to a friendly attitude towards the use of letters for codifying and generalizing observed facts and, more generally, to the achievement of a vision and appreciation of mathematics as a constructive discipline. A critical aspect of the results concerns the possibility of observing in a more consistent way, and therefore —at least potentially— more significantly the component of continuity between primary and secondary school, in order to assess the relapses into an anticipated approach to algebraic thinking —or, in other words, of an approach to arithmetic in an algebraic key— on the evolution of the pupils' mathematical thinking.

Beside the successful aspects, the manifold analyses of the transcription of classroom processes have made us aware of the difficulties that the teachers meet on managing mathematical discussions, and how teachers need us to work beside them at a methodological and didactical level. The results obtained in more than a decade of study allow us to state that the refinement of the teachers' ability to observe and control themselves during classroom action cannot be achieved in the short term, since it develops slowly, provided that they interface constructively with colleagues, learning to constantly analyse the didactical processes in which they are involved and reflecting on the micro-decisions that determine their development and feeling of 'intellectual need' of referring to literature for support.

All these points can be hardly obtained extensively. From a social point of view, the problem is huge and would require strong investments. In Italy, the situation is dramatic because of to the lack of qualified pre-service education and for the discontinuity of in-service training. One should, on one hand, create professional trainings/ study paths that endow future teachers with mathematical knowledge for teaching, as indicated by Bass (2005), and at least biennial labs (thorugh triennial would be better) to train teachers to manage classroom action, to acquire higher skills in methodology and didactics, including an intelligent and critical usage of teaching tools (textbook, specific software, etc). On the other hand, universities should start long-life training courses for in-service teachers, so as to delete the institutional rift between school and university: a difficult goal to accomplish, owing to the static nature of our academic system and the slowness at which the regional school councils —that should represent a link between the two worlds— work. Our belief is that, from a social point of view, it is urgent to invest resources for an adequate and widespread teachers' professionalism. Owing to the socio-political situation in my country, our hope is weak. Still, it is important to believe that somehow, sooner or later, things will change for the better.

Referencies

Arcavi A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(3), 24-35.

Arzarello F., Bazzini L., & Chiappini, G. (1993). Cognitive processes in algebraic thinking: Towards a theoretical framework? In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F. L. Lin (Eds.), *Proceedings of 17th International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 138-145). Tokio (Japan).

Bass, H. (2005). Mathematics, mathematicians, and mathematics education. *Bulletin of the American Mathematical Society, 42*(4), 417-430.

Bell, A. W., Onslow, B., Pratt, K., Purdy, D., & Swan, M. B. (1985). *Diagnostic teaching: Teaching from long term learning*, Report of ESRC project 8491/1, Schell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Bell, A. (1996). Problem solving approaches to algebra: two aspects. In N. Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra. Perspectives for research and teaching* (pp.167-187). Kluwer Publishers.

Boero, P. (2001). Transformation and anticipation as key processes in algebraic problem solving. In R. Sutherland, T. Rojano, J. Bell, & R. Lins (Eds.). *Perspectives on School Algebra* (pp. 99-119). Kluwer Publishers.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically. Integrating arithmetic and algebra in the elementary school.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Cai, J., Lew, H. C., Morris, A., Moyer, J. C., Ng, S. F., & Schmittau, J. (2005). The development of students' algebraic thinking in earlier grades: A cross-cultural comparative perspective. *ZDM The International Journal of Mathematics Education, 37(*1), 5-15.

Cai, J., & Knuth, E. (Eds.) (2011). *Early algebraization, A global dialogue from multiple perspectives, Advances in mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Springer**.**

Chevallard, Y. (1989-90). Le passage de l'aritmetique a l'algebre dans l'enseignement des mathematiques au college, *Petit X*, (second part) n. 19, 43-72, (third part) n. 23, 5-38.

Chick, E., Stacey, K., Vincent, J. L., & Vincent, J. N. (Eds.) (2001). *Proceedings of the 12th ICMI Study: The future of the teaching and learning of algebra*, Univ. Melbourne, Australia.

Cusi, A., & Malara, N. A. (2015). The intertwining between theory and practice: influences on ways of teaching and teachers' education. In L. English & D. Kirshner (Eds.), *Handbook of International Research in Mathematics Education*, Third Edition (pp. 504-522) London, United Kingdom: Taylor & Francis group.

Cusi, A., Malara, N. A., & Navarra, G. (2011). Early algebra: Theoretical issues and educational strategies for promoting a linguistic and metacognitive approach to the teaching and learning of mathematics. In J. Cai, J., & E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, a global dialogue from multiple perspectives. Advances in Mathematics Education* (pp. 483-510). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Da Roca Falcão, J. T. (1995). A case study of algebraic scaffolding: From balance to algebraic notation. In L. Meira, & D. Carraher (Eds.). *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, 66-73). Recife (Brasil).

Davis, R. B. (1985). ICME-5 report: Algebraic thinking in early grades. *Journal of Mathematical Behaviour*, *4,* 195-208.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19-25.

Harper, E. (Ed.). (1987). *NMP Mathematics for Secondary School*, Essex, United Kingdom: Longman.

Herscovics, N., & Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *27*(1), 59-78.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co-learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In M. J. Hoines, & A. B. Fuglestad (Eds.). *Proceedings of the 28th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 17-36). Bergen (Norway).

Kaput, J. J. (1998). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K–12 curriculum. In National Council of Teachers of Mathematics, Mathematical Sciences Education Board, and National Research Council (Eds.), *The nature and role of algebra in the K–14 curriculum: Proceedings of a National Symposium* (pp. 25-26). Washington, DC: National Academies Press.

Kaput, J. J., & Blanton, M. L. (2005). A teacher-centered approach to algebrafying elementary mathematics. In T. A.

Romberg, T. P. Carpenter, & F. Dremock (Eds.*), Understanding mathematics and science matters* (pp. 99-125). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kaput, J. J., Carraher, D. W., & Blanton, M. L. (Eds.). (2008). *Algebra in the early grades*. New York, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, K. (1989). The Early Learning of Algebra: a Sctructurale Perspective. In S. Wagner & K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra* (pp. 33-56). Reston, Virginia: LEA.

Linchevski, L. (1995). Algebra with numbers and arithmetic with letters: a definition of pre-algebra. *Journal of Mathematical Behaviour*, *14,* 113-120.

Malara, N. A. (2008). Methods and tools to promote a socio-constructive approach to mathematics teaching in teachers. In B. Czarnocha (Ed.), *Handbook of teaching research*, University of Rzeszów press, Rzeszów, 89-102.

Malara, N. A., & Navarra, G. (2003). *ArAl Project: Arithmetic pathways towards favouring pre-algebraic thinking*. Bologna, Italy: Pitagora.

— (in press), Principles and tools for teachers' education and the assessment of their professional growth, to appear in *proceedings of CERME 9 – TWG 18.* Prague University.

Malara, N. A., & Zan, R. (2008). The complex interplay between theory and practice: Reflections and examples. In L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education- II Edition* (pp. 539-564).

Mason, J. (1996), Future for arithmetic & algebra: Exploiting awreness of generality. In J. Gimenez, R. Lins, & B. Gomez (Eds.), *Arithmetics and algebra education, searching for the future*, (pp. 16-33). Barcelona, Spain: Universitat Rovira y Virgili.

— (2002). *Researching Your Own Practice: the Discipline of Noticing*, London: The Falmer Press.

— (2008). Being mathematical with and in front of learners. In B. Jaworski, & T. Wood (Eds.), *The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31-55). Rotterdam: Sense Publishers.

Meira, L. (1996). Students'early algebraic activity: sense making and production of meanings in mathematics. In L. Puig, & A. Gutierrez (Eds.), *Proceedings of the 19th Annual Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 3, pp. 377-384), Valencia (Spain).

Potari, D. (2013). The relationship of theory and practice in mathematics teacher professional development: an activity theory perspective. *ZDM The International Journal of Mathematics Education*, *45,* 507-519.

Radford L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis, *Educational Studies in Mathematics*, *42*(3), 237-268.

Schoenfeld, A. H. (2013). Classroom observations in theory and practice, *ZDM, The International Journal of Mathematics Education*, *45,* 607-621.

Sowder, J. T. (2007). The mathematical education and development of teachers. In F. K. Jr. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, vol. I (pp. 157-223). Charlotte NC: Information Age Publishing.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems, *Educational Studies in Mathematics*, *20,* 147-164.

Thames, M., & Van Zoest, L. (2013). Building coherence in research on mathematics teacher characteristics by developing practice-based approaches. *ZDM International Journal of mathematics Education*, *45,* 583-594.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should, and must be an eighth-grade course for average students, *Mathematics Teacher*, *80*(9), 428-438.

EL CURRÍCULO DE CÁLCULO EN EL ESTUDIO NACIONAL DE CÁLCULO EN ESTADOS UNIDOS

The Calculus Curriculum in the National Study of Calculus in the U.S.A.[1]

Vilma Mesa[a] *y Helen Burn*[b]
[a]University of Michigan, Ann Arbor, USA
[b]Highline College, Des Moines, Washington, USA

Resumen

Describimos aspectos curriculares del primer curso de cálculo universitario usando datos recolectados en el Estudio Nacional de Calculo I en los Estados Unidos (Bressoud, Rasmussen, Carlson, Mesa y Pearson, 2010). El estudio se ejecutó en dos fases, primero utilizando cuestionarios sobre programas, enseñanza y aprendizaje de cálculo, y motivación y desempeño de los estudiantes, y segundo con estudios de casos de 18 instituciones cuyos programas se consideraron «exitosos» en términos de motivación y desempeño. Nuestro análisis, basado en la conceptualización curricular de Rico (1997), ilustra la estabilidad del currículo a pesar de los esfuerzos de reforma de los años 90. La conceptualización también ofrece posibles áreas para futura intervención.

Palabras clave: currículo, primer curso de cálculo universitario, contenido, objetivos cognitivos, enseñanza, valoración del aprendizaje

Abstract

We describe findings of an analysis of curricular aspects related to the teaching of first-year of university calculus in the US, based on data collected as part of the Mathematical Association of America's Characteristics of Successful Programs in College Calculus study (Bressoud, Rasmussen, Carlson, Mesa, & Pearson, 2010). The study was conducted in two phases, first via surveys and questionnaires on programs, teaching and learning of calculus, and student motivation and performance; and second via qualitative case studies of 18 institutions identified as "successful" in terms of student performance and motivation. Our analysis using Rico's concep-

Mesa, V. y Burn, H. (2016). The calculus curriculum in the National Study of Calculus in the U.S.A. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 61-73). Granada: Comares.

[1] The work reported in this article is supported in part by the National Science Foundation grant DRL REESE #0910240. Opinions expressed here are the sole responsibility of the authors and do not reflect the views of the Foundation. Parts of the article have appeared in Burn and Mesa (2015).

tualization of curriculum illustrates the stability of the calculus curriculum in spite of the reform efforts of the 90s. It also gives departments tools to propose possible more viable interventions.

Keywords: *curriculum, first-year university calculus, content, cognitive goals, features of teaching, assessment of student learning*

Introduction

First-year Calculus (Calculus I) provides the basic mathematical tools to study change. Different from other countries in the world, calculus is usually a first year university course in the United States and it is normally required for any science, technology, engineering, or mathematics (STEM) major. Indeed in Fall 2010, over 300,000 students nation wide were taking a calculus course at their college or university (Blair, Kirkman, & Maxwell, 2013). While these numbers are impressive, a persistent problem of the teaching of university calculus is the high failure rate in the course. Students' disengagement is usually a major reason: lectures are uninspiring or unimaginative, the curriculum is "over-stuffed" and taught at too fast a pace, and instructors show little concern for student understanding (Seymour & Hewitt, 1997). When students fail the course, their opportunities to pursue STEM fields are curtailed. A country with a high demand of technical jobs can't afford this situation (President's Council of Advisors on Science and Technology —PCAST—, 2012). Added to this mix is the large influx of students interested in pursuing a college degree, a direct consequence of President Obama's initiative for increasing college graduation rates in the country.

This dramatic growth in incoming students aspiring to pursue STEM careers has been pitted against the drastic budget cuts that have forced departments to reduce the number of full-time faculty and to teach calculus in ever larger classes. Mathematics departments have also been slow to adapt to the changing demographics of college age students and who want to go into STEM fields. Success rates in calculus for women, students from underrepresented minorities, economically disadvantaged students, and first generation college students continue to be disappointingly low relative to those of Caucasian and Asian students (Linn & Kessel, 1996; Seymour, 2002; Wake, 2011).

Over 35 years ago several mathematicians, confronted with similar issues called for calculus to be a pump, not a filter (Steen, 1988). Such call for action resulted in an unprecedented effort to reform the calculus curriculum to bring more technology, more real world problems, and a more conceptual approach to the subject (e.g, using multiple representations) (Harver, 1998). One wonders about the extent to which the initiatives proposed then are now part of the first year of Calculus curriculum in American universities: the "rule of four" (always using verbal, tabular, symbolic, and graphical representations), spread use of technology (notably graphing calculators and computer algebra systems), contextualized problems, and emphasis on conceptual understanding.

In this chapter, an extension of a chapter we wrote for a Mathematical Association of America (MAA) publication reporting major findings from the National Study of

Calculus (Bressoud, Mesa & Rasmussen, 2015), we start to answer that question. We do so by using Luis Rico's conceptualization of curriculum to analyse data that would allow us to describe the U.S. Calculus I curriculum and then discuss the description with what the reformers had in mind. We organize the chapter into four sections. We begin by a short description of the notion of curriculum followed by a brief description of the study and the data used to conduct the analysis presented in this chapter. We then present the major features of the Calculus I curriculum using Rico's (1997) four curricular dimensions: conceptual, cognitive, formative, and social. We conclude with a discussion of the findings and the affordances and challenges of studying curriculum in this way.

Rico's Curriculum

From the Latin *currere*—to run—the word *curriculum* is a broad term used in education with multiple meanings (Stein, Remillard & Smith, 2007). Curriculum can refer to the sequences of courses that a student can take, the topics that are covered in a given grade, or the content, skills, competencies, and habits of mind that a person needs to acquire through schooling in order participate successfully in the society (Lattuca & Stark, 2009). The classical distinction between intended, implemented, and attained curricula (Travers & Westbury, 1989) is useful to describe how the curriculum is transformed from intention to execution to assessment, but it is insufficient to define a curriculum.

In *Bases Teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*, Luis Rico, using among others Stenhouse's (1975) work, proposes a definition of curriculum as an educative plan[2] that describes the group of people that will be educated or trained, the type of education or training that needs to be done, the institution where education or training takes place, the goals that need to be achieved, and the means of control and assessment (Rico, 1997, p. 27). Rico affirms that any educative plan needs to reconcile the theoretical and practical aspects that support it, in ways that acknowledges the professionalism of the teachers who are in charge of putting the plan into action. To this effect, he proposes a theoretical and practical conceptualization of curriculum that is well-suited for empirical studies of curriculum. This conceptualization responds to four core questions that the plan must address—what is the nature of knowledge, what is learning, what is teaching, and what constitutes useful knowledge?—each addressing the four dimensions of the curriculum: conceptual, cognitive, formative, and social (p. 381).

The *conceptual* dimension refers to content and topics that are specific to a given discipline; it defines those elements particular to a discipline (e.g., mathematics) that are a synthesis of historical and cultural traditions; this dimension is informed by epis-

[2] In Spanish Rico uses "plan de formación." A direct translation would be "formative plan" yet this wording seems more restrictive than educative plan, the wording chosen here.

temology and the history of mathematics and defines larger cultural aims. This paper examined the content of Calculus I. The *cognitive* dimension refers to learning and the learner, and deals with understanding what learning is, how it happens, and how do different people learn; it also has particular manifestations depending on a given discipline; it is directly informed by learning theories and defines specific expectations, development, and learning aims. We examine faculty's stated goals for the course. The *formative* dimension refers to teaching and the teacher; it deals with aspects such as what teaching is and what mathematics teaching is; it specifies practices that are believed to be useful for teaching (e.g., differentiating instruction) and it provides the basis for generating programs for preparing teachers; it is informed by pedagogical theories and defines formative aims. The formative dimension is explored by examining ways in which teaching was enacted in calculus lessons. The *social* dimension refers to the value that the society places on the utility and usefulness of the mathematical knowledge. This dimension addresses the mechanisms that need to be used in order to determine when an individual has useful knowledge or that he or she has mathematical capabilities, and the appropriateness of the curriculum itself (p. 385). We examined this dimension by analysing demands of graded and ungraded work in one college.

The CSPCC Study

In 2010, the Mathematical Association of America launched a project funded by the National Science Foundation, the *Characteristics of Successful Programs in College Calculus*, with the purpose of studying how calculus contributed to students' academic goals fulfilment and to understand other features of calculus. The project had five goals:

— To improve our understanding of the demographics of students who enrol in calculus,

— To measure the impact of the various characteristics of calculus classes that are believed to influence student success,

— To conduct explanatory case study analysis of exemplary programs in order to identify why and how these programs succeed,

— To develop a theoretical framework that articulates the factors under which students are likely to succeed in calculus, and

— To use the results of these studies and the influence of the MAA to leverage improvements in calculus instruction across the United States.

The project was conducted in two phases. In Phase 1 surveys (Fall, 2010) were sent to a stratified random sample of 521 institutions. At these institutions, all instructors teaching a calculus course designed to prepare students for the study of engineering, the mathematical, or physical sciences, and their students, were invited to participate. There were five surveys in total, pre- and post- surveys of students and instructors administered at the beginning and the end of their Calculus I course, and one sent at the beginning of the course to the course administrator. The surveys were designed to gain an overview of the various calculus programs nationwide, and included questions on the department, the teaching, the learning, and the assessment of calculus; resource availability for students and instructors (e.g., technology, or tutoring and teaching centers), and student and instructor background. In addition, the surveys collected information on intention to take Calculus II (a proxy for persistence in a STEM major); affective aspects, including enjoyment of math, confidence in mathematical ability, interest to continue studying math; and self-reported performance (expected grade in course). We obtained full information for 3,103 students, 308 classrooms, and 168 calculus programs.

In Phase 2 of the project (Fall, 2012), we conducted explanatory case studies at 18 institutions selected because they had more successful calculus programs. Success was defined by a combination of student variables: persistence in calculus and positive change in affective variables and program variables (e.g., passing rates). We conducted nearly 300 interviews with instructors and administrators, 45 focus groups with over 600 students, 76 classroom observations, and collected over 500 artifacts (syllabi, exams, quizzes, and institutional information).

For the purposes of this paper we relied on both the data from the surveys and the data from the case studies. In order to describe the four curricular elements (content, cognitive goals, features of teaching, and assessment) we worked with different sources. The content of Calculus I presented in this chapter derives from a synthesis of four sources, the course description for the Advanced Placement (AP) calculus (The College Board, 2012); Sofronas et al.'s (2011) "brain trust" study with 24 calculus experts who identified content and goals critical for student understanding of first-year calculus; the topics included in Khan Academy website (http://www.khanacademy.org/math/calculus), and Johnson, Ellis, and Rasmussen (2014) analysis of course content listed in master syllabi collected from the PhD-granting universities selected for case study. Data for the analysis of cognitive goals and assignments in Calculus I derive from the faculty surveys. The sample included all faculty who responded to pre- or post-course instructor survey (N = 503). Faculty response rates to survey questions analysed ranged from a minimum of 65% to a maximum of 84%, with an average response rate across the survey questions of 72%. For the analysis of features of teaching we used the field notes of observations made of 67 calculus lessons across the case study institutions. All the tasks recorded in the observation protocol (N = 497) were characterized according to four features: who was the main actor in solving the problem, which representations were used, what technology was used, and what other complexity characteristics were present (e.g., using multiple methods, requiring a proof). Finally, to characterize assessment we used the tasks assigned in graded and ungraded homework, quizzes, and exams assigned by five instructors in one college (N = 4,953). The analysis centred on the cognitive orientation of the tasks used in these contexts (White & Mesa, 2014).

As with any survey research, limitations due to construct validity need to be considered. For example, Calculus I faculty were not asked directly about cognitive goals for Calculus I; instead, selected survey questions served as proxies. A second limitation in any study using self-report data relates to potential differences between what faculty say they do and what they actually enact in classrooms—that is, between the intended and the enacted curriculum. However, there is no reason to believe that faculty would respond to questions without accuracy, given that there were no repercussions for the responses provided, and the case study data suggest that for the most part, instructors and students accurately described their practices. Thus, we have confidence that the self reported data accurately describe practice.

The Calculus Curriculum in the CSPCC study

We now present a synthesis of the analysis of the four dimensions defining curriculum as we interpreted them in the data collected in the study.

Conceptual dimension: The content of Calculus I

A course of calculus I includes four major content areas: limits and continuity, derivatives, integration and sequences and series (see Figure 1) with some courses starting with a review of the function concept. We note that although δ-ε proofs are no longer considered a standard part of the Calculus I curriculum, the "rule of four" (emphasizing the combination of graphical, numerical, algebraic, and verbal approaches) has had a lasting impact on Calculus I textbooks and that technology, particularly in the form of graphing calculators and computer algebra systems (e.g., Maple, Mathematica) that enables increased emphasis on visualizing graphs of functions and their derivatives and other graphical connections, are usually part of the labs offered to calculus students. Further, Calculus I courses now more often than in the past attend to employability or transfer skills, such as communication, teamwork, and technology skills (Houston, 2001).

Limits and Continuity

- Develop an intuitive understanding of the limiting process, calculate limits using algebra, estimate limits from graphs or tables, and limits at infinity
- The limit concept is necessary for the limit definition of the derivative and the integral
- Continuity (intuitive understanding and in terms of limits)

Derivatives

- The concept of derivative as the instantaneous rate of change of a function, as the limit of the difference quotient, and a measure of sensitivity of one variable to another when linked by an equation
- Computation of derivatives of basic functions (power, exponential, logarithmic, trigonometric, and inverse trigonometric), derivative rules (sum, power, product, quotient, chain), and implicit differentiation. Some Calculus I courses may include hyperbolic trigonometric functions
- Visualizing derivatives sand other graphical connections (e.g., using secant lines to approximate tangent slope, approximating rates of change from graphs or tables, analysis of f, f' and f'' and graphical connections)
- Applications of derivatives including analysis of curves, modelling, and interpreting rates of change, optimization, and relate rates. The Mean Value Theorem (assumptions and geometric interpretations), L'Hôpital's Rule, and numerical solution via Euler's method

Integrals

- Indefinite integral as antiderivative
- Definite integral as a limit of Riemann sums (Riemann sums are used to approximate the definite integral)
- Interpretation and application of the definite integral (e.g., integral as area, as net change/accumulated total change
- Fundamental Theorem of Integral Calculus and techniques of integration (computing antiderivatives following from basic functions and substitution of variables)

Sequences and series (generated through the Advanced Placement Calculus and the Khan academy website)

- Series of constants (e.g., geometric series with application) and Taylor series

Figure 1. *Calculus I content identified in CSPCC study (Burn & Mesa, 2015).*

Cognitive dimension: The learning goals of Calculus I

To discern the cognitive goals for students in Calculus I, we explored faculty expectations for student learning suggested by the types of problems they reported they assign students and by their expectations for students to explain their thinking. Maintaining higher levels of cognitive demand has been associated with higher levels of student achievement in mathematics (Boaler & Staples, 2008; Silver & Stein, 1996; Stigler, Givvin & Thompson, 2010). Figure 2 shows the median response to the percentage of different types of problems faculty assign in exams and other assignments. The percentages were nearly identical for both.

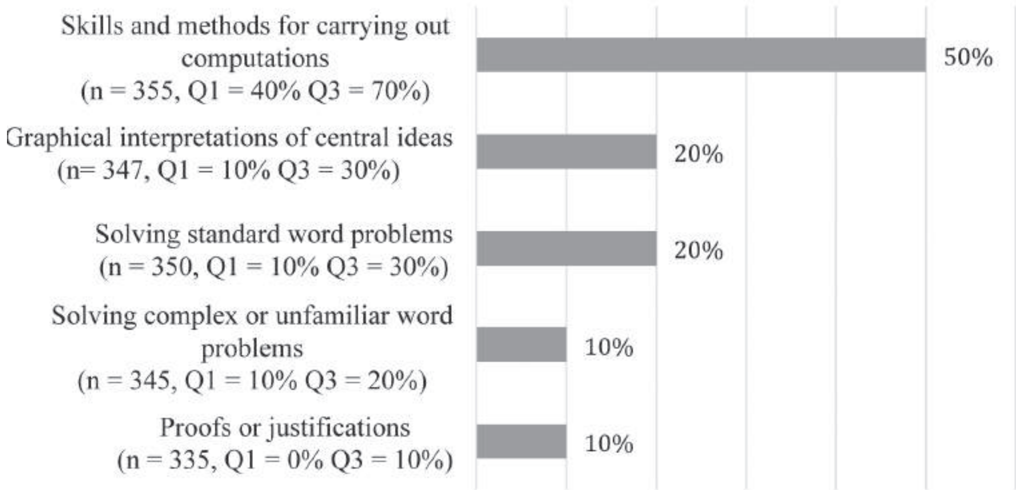


Figure 2. *Median responses to the percentage (0% to 100%) of different problem types faculty include on exams and assignments. Q1 = 25th percentile; Q3 = 75th percentile.*

Figure 2 suggests that instructors tend to include a larger number of problems focused on skills and computations (50%) over other types of problems (problems involving graphical interpretations of central ideas, standard word problems, complex or unfamiliar word problems, or proofs and justifications). This tendency might be partially explained by the fact that 66% of faculty agreed somewhat or strongly with the statement: *Understanding ideas in calculus typically comes after achieving procedural fluency.*

Faculty were asked to report how frequently they asked students to explain their thinking during class or required them to explain their thinking on exams or assignments on a scale that ranged from 1 (*Not at all*) to 6 (*Very often*). Overall, 44% of faculty reported that they *Often*[3] or *Very often* required students to explain their thinking on exams and 41% of faculty reported that they *Often* or *Very often* asked students to explain their thinking during class. In contrast, a smaller 34% of faculty reported that they *Often* or *Very often* required students to explain their thinking on assignments. These findings

[3] A response of 5 is interpreted to mean *Often.*

suggest that faculty privilege student practice with skills as a way to build understanding as a core feature of learning expectations in the course. Faculty do expect however that students explaining their thinking in class and in exams.

Formative dimension: The features of calculus teaching

The analysis of the ways in which the problems used during the classroom were enacted revealed several interesting patterns. First, we found that the instructor lectured or used direct instruction in 82% of the problems. In these lessons student presentations, group work, or students working in pairs was observed in less than 10% of the problems; work individually was observed in 15% of the problems. Symbolic representations were used in 65% of the problems and it was used in conjunction with other representations; a sizable proportion of problems, 43%, relied on other non-symbolic representations. The lessons observed did not appear as technologically adventurous as the reformers would have liked. Only 9% of the problems used some form of technology: basic calculator, graphing calculators, or computer algebra systems. Finally, 66% of problems sought to develop proficiency with procedures, 12% were contextualized in real world situations, 9% required a proof or a justification, 3% were open-ended, and only 2% showed different solution methods. Figure 3 shows an example of a coded entry in the observation protocol.

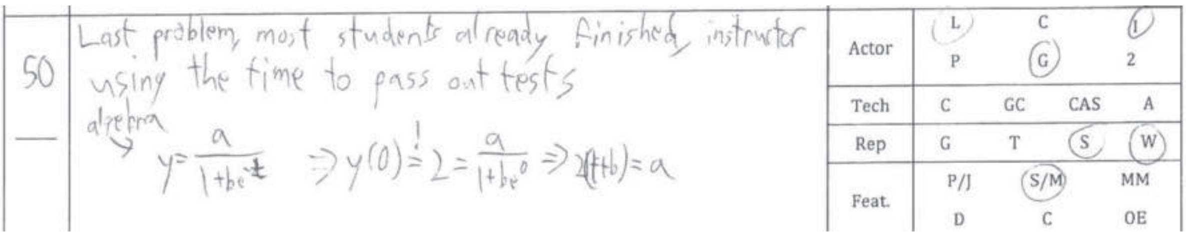


Figure 3. *Problem log entry (White, Blum, & Mesa, 2013)*

Social dimension: The assessment of student learning in Calculus I

The analysis of the problems that instructors in one college assigned suggest differences in the cognitive orientation by type of course work assigned (graded vs. ungraded) and differences by the instructors who assigned the course work. About half of the problems assigned were what we called simple procedure tasks[4], about 20% were complex procedures tasks[5], and about 30% were rich tasks[6]. The homework, which was ungraded,

[4] Students are prompted to retrieve information or carry out recalled procedures (e.g., Find the derivative of f at $x = a$).

[5] Students must recognize knowledge or procedures called for in a situation without being prompted (e.g., At what value of x does f attain a minimum?).

[6] Students are prompted to make interpretations, give explanations, recognize when to apply a procedure, analyse a situation, or judge based on certain criteria (e.g., Is it reasonable to use this model to predict the winning height [of the high jump] at the 2100 Olympics?).

tended to include more simple procedure tasks than exams, which were graded (54% vs. 40% respectively), more complex procedures tasks than exams (21% vs. 11% respectively) but less rich tasks than exams (25% vs. 49% respectively). Thus exams tended to have a higher level of complexity than homework. In addition we found that while the instructors assigned homework with similar levels of complexity, some instructors assigned more rich tasks than others in the exams, which suggests that instructors had different values in deciding what counts as calculus work (White & Mesa, 2014).

Discussion

Our analysis of the various dimensions of curriculum suggests that the calculus course is less reformed than what could have been anticipated. In terms of content, the topics included show remarkable stability (Steen, 1998) regardless of efforts to create a "lean and lively calculus" (Douglas, 1986), the reform movement of the 1990s (Hughes Hallett, n. d.), or general attempts to reduce the breadth and to increase the depth of topics included in mathematics courses in the United States (Hillel, 2001). Likewise, the cognitive goals espoused by the faculty seem to continue to privilege the development of proficiency with procedures under the assumption that one must master basic information before moving to more complex ideas, which is an implicit behaviourist assumption about how one learns. That said, the sizable interest in having students explain their thinking in class and in exams suggest a possible turn towards more discursive-based notions of learning. Moreover, small group work, use of multiple representations and technology and inclusion of contextualized problems that would emphasise the development of understanding of calculus notions over technical proficiency have not yet made it to all lessons in which calculus is taught. The dominant teaching paradigm still seems to be lecture and demonstration. Finally, we identified differences in emphasis instructors put on their exams. Instructors make the exams—the space where students show proficiency and their knowledge of the course content appraised—much harder than the un-graded homework. Overall the analyses along the four dimensions provide a richer picture of the calculus curriculum and supports that it has not changed much over time.

Curriculum usually gets described in terms of its content dimension, and this is clearly an insufficient description. In the case of a university course, one has to take into account institutional and societal demands. Universities in the United States are facing tremendous difficulties documenting their value, especially when they have a difficult time demonstrating that students learn (Arum & Roksa, 2011) and federal and state support for higher education is at an all-time low. Societal pressures on universities to demonstrate that they indeed make a difference have sparked inward reflection and examination of specific programs that might not support students in their goals to pursue STEM careers. Mathematics departments have been the major target of these critiques (PCAST, 2012) and, from the analyses reported here, some of these critiques might be well founded: the opportunities for students to experience a more lively calculus, one that uses more collaborative forms of learning and teaching, supported by technology, and valuing complex work are not uniformly offered. However, Rico's richer conceptualization of curriculum provides departments with specific dimensions to look at when thinking about possibilities for change. Leaving aside the potential need to evaluate the content in Table 1, a behaviourist approach to student learning with its accompanying pedagogy might be at odds with the potential of a course such as calculus to expand students' mathematical opportunities. Working to address how the visions of calculus learning and teaching might be made more current with recent research findings about the importance of inquiry might be a an important starting point. Likewise, attending to how students' calculus learning is appraised could be an area that has potential to boost the calculus curriculum in ways that might better satisfy the students' interests and the demands of the society.

References

Arum, R., & Roksa, J. (2011). *Academically adrift: Limited learning on college campuses*. Chicago: University of Chicago Press.

Blair, R., Kirkman, E. E., & Maxwell, J. W. (2013). *Statistical abstract of undergraduate programs in the mathematical sciences in the United States. Fall 2010 CBMS Survey*. Washington DC: American Mathematical Society.

Boaler, J., & Staples, M. E. (2008). Creating mathematical futures through an equitable teaching approach: The case of Railside School. *Teachers College Record, 110*(3), 608–645.

Bressoud, D. M., Mesa, V., & Rasmussen, C. L. (2015). *Insights and recommendations from the MAA National Study of College Calculus*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Bressoud, D. M., Rasmussen, C. L., Carlson, M., Mesa, V., & Pearson, M. (2010). *Characteristics of successful programs in college calculus*. (NSF DRL REESE #0910240).

Burn, H. (2012). Factors that shape curricular reasoning about college algebra reform. *MathAmatyc Educator, 4*(1), 23–28.

Burn, H., & Mesa, V. (2015). The Calculus I curriculum. In D. M. Bressoud, V. Mesa, & C. L. Rasmussen (Eds.), *Insights and recommendations from the MAA National Study of College Calculus* (pp. 45–57). Washington, DC.

Douglas, R. G. (Ed.). (1986). *Toward a lean and lively calculus. MAA Notes #6*. Washington, DC: The Mathematical Association of America.

Harver, W. E. (Ed.). (1998). *Calculus: Catalyzing a national community for reform*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

Hillel, J. (2001). Trends in curriculum: A working group report. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 407–422). Dordrecht: Kluwer.

Houston, K. (2001). Assessing undergraduate mathematics students: A working group report. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level* (pp. 59–69). Dordrecth: Kluwer.

Hughes Hallett, D. (Producer). (n. d.). What have we learned from calculus reform? The road to conceptual understanding. Retrieved from http://math.arizona.edu/~dhh/NOVA/calculus-conceptual-understanding.pdf

Johnson, E., Ellis, J., & Rasmussen, C. (2014). *How to make time: The relationship between concerns about coverage, material covered, instructional practices, and student success in college calculus*. Paper presented at the Annual Conference on Research in Undergraduate Education, Denver, CO.

Kaput, J. J. (1997). Rethinking calculus: learning and thinking. *The American Mathematical Monthly, 104*(8), 731–737.

Lattuca, L. R., & Stark, J. (2009). *Shaping the college curriculum: Academic plans in action*. San Francisco: Jossey-Bass.

Linn, M. C., & Kessel, C. (1996). Success in mathematics: Increasing talent and gender diversity among college majors. In J. J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education* (Vol. II, pp. 101–144). Washington: American Mathematical Society and Mathematical Association of America.

President's Council of Advisors on Science and Technology (PCAST). (2012). *Engage to excel: Producing one million additional college graduates with degrees in science, technology, engineering, and mathematics*. Washington, DC: The White House.

Rico, L. (Ed.). (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria [Theoretical base for mathematics curriculum in secondary education]*. Madrid: Síntesis.

Seymour, E. (2002). Tracking the processes of change in US undergraduate education in science, mathematics, engineering, and technology. *Science Education, 79*, 79–105.

Seymour, E., & Hewitt, N. (1997). *Talking about leaving: Why undergraduates leave the sciences*. Boulder, CO: Westview.

Silver, E. A., & Stein, M. K. (1996). The QUASAR project: The "revolution of the possible" in mathematics instructional reform in urban middle schools. *Urban Education, 30*, 476–521.

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & C., H. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 23 experts. *Journal of Mathematical Behavior, 30*(2), 131–148.

Steen, L. A. (1988). *Calculus for a new century: A pump, not a filter*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

— (1998). Core curriculum in context: History, goals, models, challenges. In J. Dossey (Ed.), *Confronting the core curriculum* (Vol. 45, MAA Notes, pp. 3–13). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Stein, M. K., Remillard, J. T., & Smith, M. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook for Research in Mathematics Teaching and Learning* (pp. 319–369). Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Stenhouse, L. (1975). *An introduction to curriculum research and development*. London: Heineman.

Stigler, J. W., Givvin, K. B., & Thompson, B. J. (2010). What community college developmental mathematics students understand about mathematics (Vol. Accessed March 19, 2010). Stanford, CA: Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching (Accessed March 19, 2010, http://www.carnegiefoundation.org/elibrary/problem-solution-exploration-papers)

The College Board. (2012). *Calculus AB, Calculus BC course descriptions*. AP Central. http://apcentral.collegeboard.com/apc/public/courses/teachers_corner/2178.html.

Travers, K. J., & Westbury, I. (1989). *The IEA Study of mathematics I: Analysis of mathematics curricula*. Oxford: Pergamon Press.

Wake, G. (2011). Introduction to the Special Issue: Deepening engagement in mathematics in pre-university education. *Research in Mathematics Education, 13*(2), 109–118.

White, N. J., Blum, C., & Mesa, V. (2013). *A task analysis protocol for coursework for the Characteristics of Successful Programs in College Calculus*. [Manuscript in preparation]. School of Education, University of Michigan, Ann Arbor.

White, N. J., & Mesa, V. (2014). Describing cognitive orientation of calculus I tasks across different types of coursework. *ZDM The International Journal on Mathematics Education, 46*(4), 675–690. doi: 10.1007/s1185801405889

ASSESSMENT OF MATHEMATICAL COMPETENCIES
Evaluación de Competencias Matemáticas

Mogens Niss
Roskilde University, Denmark

Resumen

El presente texto ofrece una presentación y análisis de los cambios en la evaluación de competencias matemáticas, en la acepción dada en el Proyecto KOM de Dinamarca, y de las capacidades básicas en el sentido dado en PISA 2012. Se caracterizan estos dos tipos de cambio. El cambio holístico consiste en la evaluación de una única competencia (capacidad) del conglomerado entretejido de todo el conjunto de las competencias matemáticas que normalmente están involucradas en la auténtica actividad matemática. El cambio atomista consiste en la evaluación de una sola competencia matemática en contextos en los que deliberadamente se han eliminado o reducido las otras competencias. El documento sugiere modos e instrumentos de evaluación que pueden satisfacer estos retos sin comprometer la interconexión intrínseca de las competencias matemáticas. El documento termina con una reflexión sobre la necesidad de formar a los profesores en formación y en ejercicio en estos aspectos.

Palabras clave: competencias matemáticas, capacidades matemáticas básicas, alfabetización matemática, evaluación, PISA

Abstract

The present paper offers a presentation and analysis of challenges to the assessment of mathematical competencies, in the sense of the Danish KOM Project, and of the funamental mathematical capabilities in the sense of PISA 2012. Two such challenges are identified. The holistic challenge consists in assessing a single mathematical competency (capability) from the interwoven conglomerate of the entire set of mathematical competencies that are typically involved in authentic mathematical activity. The atomistic challenge consists in assessing a single mathematical competency in contexts in which the other competencies have deliberately been removed or reduced. The paper suggests modes and instruments of assessment that may

Niss, M. (2016). Assessment of mathematical competences. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 75-88). Granada: Comares.

meet these challenges without jeopardising the intrisic interwovenness of the mathematical competencies. The paper finishes by a few reflections on the need for teacher pre- and in-service education in these respects.

Keywords: *mathematical competencies, fundamental mathematical capabilities, mathematical literacy, assessment, PISA*

Foreword

My great colleague and friend of long standing, Luis Rico, whose accomplishments we are celebrating with this volume, has always invested serious interest in the assessment of mathematics. The spirit and thrust of his position is expressed clearly in the following quote (Rico 1993, p. 19), which I have chosen as a motto for this contribution:

> "First we should consider assessment as a continuous and interdependent process with the other components in the curriculum; contents, objectives and methdology cannot be dealt with as isolated questions in the process of assessment, but rather must be contemplated as interconnected. Assessment is not an isolated single element but one that should impregnate all the stages that make up mathematics teaching and learning."

Introduction: The Notion Of Mathematical Competency

Roughly since the turn of the millenium, the notion of mathematical competency has gained considerable momentum in several aspects of research, development and practice of mathematics education. This notion has been put on the agenda of curriculum development and design in several countries, including Spain, of research projects, of international comparative studies of student achievement, e.g. PISA, and – more broadly – of mathematics assessment at large. This is true, as well, of its closer relatives such as mathematical proficiency and mathematical practices, and of its slightly more distant relatives mathematical literacy, quantitative literacy and numeracy.

The notions of mathematical competence and mathematical competenc*y* are complex notions, involving a high level of aggregation and integration of its components and elements. It is not surprising, therefore, that the issue of assessment of mathematical competenc*y* and competencies is necessarily a complex and tricky one as well.

In the Danish KOM Project (Niss & Jensen 2002, Niss & Højgaard 2011) the notion of mathematical competence is defined as an individual's ability to act purposefully and insight-based in a wide variety of intra- or extra-mathematical situations and contexts, which actually or potentially give rise to the activation of mathematics in order to answer questions, solve problems, understand phenomena, relationships and mechanisms, or to take a stance or make a decision, whilst the notion of a mathematical competenc*y* is defined as a major constituent of mathematical competence, more specifically as an individual's ability to act purposefully and insight-based in situations and contexts, which actually or potentially give rise to *a specific kind of activation* of mathematics in order to answer questions, solve problems, understand phenomena, relationships and mechanisms, or to take a stance or make a decision.

The Project identifies eight well-delineated *mathematical* competencies:

— Mathematical thinking
— Problem handling
— Modelling
— Reasoning
— Representation
— Symbols and formalism
— Communication
— Aids and tools,

each with its own identity, or "centre of gravity" if you prefer, but the entire collection of the competencies has a non-empty intersection. This reflects the fact that usually several — if not all — competencies have to come into play in dealing with any sort of non-routine mathematical activity, even though one or two competencies may sometimes form the centrepiece of such an activity whilst the others play subsiduary or auxilliary roles. In this context it is crucial to note that the mathematical competencies, by their very nature, concern the practising and enactment of mathematics, i.e. doing mathematics, applying mathematics and investigating and analysing mathematics. Needless to say, knowledge of mathematical concepts, definitions, theorems, processes, methods, procedures etc. is necessary for the practising and enacting of mathematics, which, however, goes far beyond possessing stored, "passive" knowledge of mathematics, irrespective of how extensive, deep and rich one's knowledge may be.

Assessing Mathematical Competencies – What are the Challenges?

It follows from the above that assessing someone's mathematical competencies must consider and be based on that individual's enactment and practising of mathematics, his or her "mathematics in action", and not only on his or her knowledge of mathematics. If we focus our attention on the assessment of students in different parts of the education system, from Kindergarten to university, we have to take a look at typical mathematical activities that students may engage in within that system. Activities typically include – among other things: 'doing routine exercises'; 'exploring mathematics-laden situations'; 'solving pure mathematical problems'; 'solving applied mathematical problems'; 'analysing mathematical models of extra-mathematical situations'; 'constructing mathematical models of extra-mathematical situations'; 'presenting, explaining or analysing mathematical proofs'; 'presenting and explaining organised mathematical subject matter, methods or procedures to others'; 'reflecting on aspects of mathematical theory, methodology, or philosophy'; 'providing accounts or analyses of aspects of the history of mathematics'; and so on and so forth. All this can take place in a variety of different ways in forms directly or indirectly addressing other people, including 'written' forms (e.g. test or exam papers, questionnaires, essays, notes, activity logs, dissertations), 'oral' forms (e.g. making statements, presentations or suggestions in class, answering questions, responding to interviews, giving talks, undertaking conversations or discussions), 'gestural' forms (e.g. pointing, posing, showing processes by way of bodily motions, dancing, playing), 'pictorial' forms (e.g. producing or using drawings, figures, diagrams, charts, be they static or dynamic, animations) or 'practical' forms (e.g. making use of concrete materials, e.g. building blocks, creating objects, physical constructions such as instruments and machines, designing schemes for decision making or following procedures, writing computer programs, playing games), just to mention a few. Moreover, activities can be done by individuals working alone, or by smaller or larger groups of students, including classes or institutions.

The holistic and the atomistic challenges

In the far majority of these activities, the eight competencies occur in highly complex and intertwined ways. As to assessment of the competencies, this gives rise to significant challenges to the design and implementation of suitable and effective modes of assessment.

Given the intrinsic intertwinedness of the competencies in proper, complex mathematical activities, can we find ways to disentangle each competency from the others forming part of the activties so as to become able to assess it? If not, we would only be able to assess the entire set of competencies as a package, which would almost jeopardise the very notion of well-defined, distinct and discernable competencies, at least as far as assessment is concerned. Borrowing terms from (Blomhøj & Jensen 2003, p. 128) introduced in a different context, I call this *the holistic challenge*: whilst preserving the holistic integrity of complex and intertwined mathematical activities, we want, at the same time, to assess the students' possession of each of the competencies from such activities.

From a dual perspective, are we able to design and implement assesment modes and instruments focusing on activities in which a single or a very few competencies are present in isolation from the others, without fundamentally compromising the intrinsic holistic integrity of proper, complex and intertwined mathematical activities? I call this *the atomistic challenge*.

These two challenges are combined into one if we ask: Are we able to design and implement *sets* of modes and instruments for the assessment of mathematical competencies which combine the holistic and the atomistic approach in a satisfactory manner?

Engaging in this endeavour, there is an overarching lesson we have to keep in mind. In an environment which does make use of explicit assessment "what you asssess is what you get" (WYAWYG). In other words, the things — for instance mathematical competencies — that are assessed are the entities that end up receiving attention and emphasis in teaching and learning. Conversely, things — including competencies —

which in an assessment-oriented environment are not assessed in an appropriate manner will lose attention and eventually disappear from the agenda of teaching and learning.

Different purposes and kinds of assessment

As is always the case, it is important to distinguish between — and consider — different kinds of assessment. *Formative* assessment has the purpose of providing feedback on the mathematical learning processes, current learning outcomes and competencies of the individual student to that student (and to his or her teacher(s)), both from a snapshot (static) perspective and from a developmental (dynamic) perspective, in order to help the student monitor and control his or her work in and learning of mathematics so as to foster progression and development of the student's mathematical competencies. There is a wide variety of different approaches, modes and instruments available for formative assessment, so its purpose does not determine its form. In contradistinction, the purpose of *summative* assessment is to take stock of — and oftentimes mark — the accumulated mathematical learning outcomes, achievements and resulting competencies of the individual student so as to provide information on these matters to a variety of stakeholders (the student; his or her parents; teachers and home institution; potential recipients of the student for further education, employment, scholarships and awards; and so on). For summative assessment, too, a multitude of different forms of assessment are available, so, once again, the forms of summative assessment are not determined by its purpose.

Whilst both formative and summative assessment focuses on the *individual* student, there are other sorts of evaluation of the outcomes of mathematics teaching and learning that operate at a *population* or *system* level. The purpose of such evaluation is to look into the extent to which given polities (i.e. politico-administrative units) like regions, countries, education systems or subsystems thereof, municipalities, institutions and so on and so forth produce and obtain satisfactory outcomes of their efforts and investments, whether in absolute (criterion referenced) terms or in relative (norm referenced) terms. More often than not, such evaluation is conducted by means of surveys of the performance and achievement of populations of students, aiming at characterising and measuring the state (or development) of the population at large, based on some way of aggregating summative assessment outcomes concerning the performance and achievements of the individual students. Here, the intrinsic interest is not in the individual student *per se* but in using characteristics of several individual students as a means, a vehicle, for obtaining aggregate evaluation results for the population(s) or system(s) under consideration. The large-scale international comparison studies, like TIMSS, PISA and PIAAC, all are based on this approach, even though the data bases do contain information that allows for charting individual students' achievement across the pool of items they were given.

Mathematical Competencies, Mathematical Literacy and Pisa

We shall now pay particular attention to the role of mathematical competencies in one of the international comparative studies, PISA. For this to make sense, we first have to consider the relationship between mathematical competencies and the key notion in all PISA cycles as far as mathematics is concerned, the notion of *mathematical literacy*. Mathematical literacy has been given slighly different definitions in the PISA frameworks for the cycles from 2000 to 2015. The differences between the definitions are, however, differences in articulation and emphasis rather than in spirit and substance.

The 2000 definition of mathematical literacy reads: "…an individual's capacity to identify and understand the role that mathematics plays in the world, to make well-founded mathematical judgements and to engage in mathematics, in ways that meet the needs of that individual's current and future life as a constructive, concerned and reflective citizen." (OECD, 1999, p. 41)

The 2012 and 2015 definition reads: "Mathematical literacy is an individual's capacity to formulate, employ and interpret mathematics in a variety of contexts. It includes reasoning mathematically and using mathematical concepts, procedures, facts, and tools to describe, explain and predict phenomena. It assists individuals to recognise the role that mathematics plays in the world and to make the well-founded judgments and decisions needed by constructive, engaged and reflective citizens." (OECD, 2013, p. 25)

A question frequently asked (e.g. Stacey & Turner, 2015, pp 15–16) is whether mathematical competence and mathematical literacy are two different words for the same thing, or one is a "subset" of the other. The answer to this question determines the role of the mathematical competencies in PISA. As stated in the definitions just quoted, mathematical literacy is the ability to put mathematics to functional *use* in situations and contexts that are significant to students' current and future lives in society. In contrast, mathematical competence is the "ability to act purposefully and insight-based in a wide variety of intra- or extra-mathematical situations and contexts, which actually or potentially give rise to the activation of mathematics". Even though closely related, there are significant diferences between the two notions. Mathematical literacy focuses on the *use* of mathematics in *extra-mathematical* situations and contexts, whereas mathematical competence focuses on the *enactment* of mathematics in *all sorts* of situations and contexts, be they extra- or intra-mathematical. This implies that it is possible to be mathematically literate without possessing full mathematical competence, but someone who is (fully) mathematically competent will also be mathematically literate. This means that mathematical literacy is a "proper subset" of mathematical competence.

However, the relationship between literacy and competence is trickier than that. For even though mathematical competence does have a wider scope and a wider range than mathematical literacy, mathematical literacy draws upon the mathematical competencies in a crucial manner, albeit not in all their aspects.

To elucidate this relationship, let us consider the PISA 2012 framework more closely (the PISA 2015 mathematics framework differs only marginally from the 2012 framework). In this framework (OECD 2013), mathematical literacy is characterised by way of what in mathematics education research is normally called the mathematical modelling cycle (see, e.g., Blum et al. 2007, Niss 2010) but is called mathematical processes in the PISA framework, because the OECD insisted on terminological uniformity across the different assessment domains. By focusing explicitly on the modelling process and the modelling cycle (though under a different name), the framework emphasises that mathematical literacy is indeed to be understood as applicational functionality with respect to mathematics.

The 2012 framework (OECD 2013, p. 18) emphasises three categories of mathematical processes: formulating situations mathematically (in the modelling literature usually called "mathematising"); employing mathematical concepts, facts procedures, and reasoning (in the modelling literature usually called "obtaining mathematical outcomes" or equivalent); interpreting, applying and evaluating mathematical outcomes (in the modelling literature usually called "de-mathematising" and "validating").

What, then, is the role of the mathematical competencies in these three processes, all of which are actually sub-processes of the modelling cycle, keeping in mind that the modelling cycle is meant to capture the active side of the modelling competency, which in turn is one of several competencies? For successful completion of typical PISA tasks, the process *formulating* draws upon crucial (albeit not all) aspects of the 'mathematical thinking' competency, of the 'representation' competency, of the 'symbols and formalism' competency, and of the 'communication' competency . The process *employing* draws upon crucial (albeit not all) aspects of the 'mathematical thinking' competency, of the 'problem handling' competency of the 'reasoning' competency, of the 'representation' competency, of the 'symbols and formalism' competency', of the 'communication' competency, and of the 'aids and tools' competency. The process *interpreting* draws upon crucial (albeit not all) aspects of the 'thinking' competency, of the 'reasoning' competency, of the 'representation' competency and of the 'communication' competency. Moreover, all processes draw upon the student's previous experiences with mathematical models and modelling, and hence on the state and condition of his or her already established 'modelling competency'. It follows that the entire spectrum of the eight mathematical competencies is in play in dealing with PISA tasks, but not all aspects of these competencies are involved in this undertaking. As the ability to succcessfully deal with the collection of PISA tasks is meant to be an expression of mathematical literacy, it further follows that mathematical literacy is underpinned by mathematical competence and competencies, whereas mathematical literacy does not exhaust mathematical competence.

Assessing Mathematical Literacy by Making Use of Mathematical Competencies

Now, the place and role of mathematical competencies in the different PISA frameworks have actually greatly changed through the different cycles. These changes pertain to substance as well as to terminology. A detailed account of the development is offered in (Niss 2015, 46–52). In the first several cycles (PISA 2000, 2003, 2006 and 2009), the eight mathematical competencies were present to varying degrees in the asessment frameworks — sometimes under other names, though, such as "skills" or "processes" — but they never formed part of the official reporting of the PISA results by OECD.

In the PISA 2012 framework, OECD wanted to reserve the notion of "competency" for something other than what the mathematics education community terms "mathematical competency", for instance (general) problem solving competency. In the mathematics framework, the term "fundamental mathematical capabilities" was therefore adopted instead. However, and more importantly, as a consequence of a long-term research project conducted by members of the PISA Mathematics Expert Group (the MEG), including the author of this paper, the fundamental mathematical capabilities were defined in the framework (OECD 2013, pp 30–31) in a way that differed somewhat from the eight mathematical competencies of the KOM Project and of the previous PISA frameworks. The reason for this was the following.

For a long time it was an issue of great interest to PISA MEG members to identify the intrinsic key factors of difficulty in PISA items. At some point it was decided to try to focus on the mathematical competency demands of these items as the most significant variables to help explain empirical item difficulty. In this work, due to nature of the PISA items, the mathematical thinking competency and the mathematical reasoning competency were amalgamated into one, whereas the aids and tools competency was left out. After quite an amount of work, on which participating MEG members' rated the competency demands of a pool of selected items, results turned out to be rather promising (Turner *et al.,* 2013). However, when attempting to involve new people in producing competency ratings of PISA items, we noticed that it required a lot of training for people to be able to get accustomed to and come to grips with this approach. We therefore concluded that it was necessary to come up with a set of very clear and detailed definitions of the competencies so that the assignment of competencies and ratings to an item could be undertaken not only by specialised, experienced MEG experts but also by outsiders with basic rater training only. In the course of unfolding this endeavour, a need was felt, in the research project, to "disjunctify" the competencies as much as was possible without destroying the fundamentals of the whole enterprise.

Six fundamental capabilities underpinning PISA items – the holistic approach

This resulted in set of six, supposedly disjoint, revised competencies, which were soon to be re-named fundamental mathematical capabilities. Although this term was primarily chosen in order to accommodate OECD's ban on the term "mathematical competency", it actually turned out to be helpful in avoiding confusion with the original eight mathematical KOM competencies. So, while the mathematical competencies are still meant to be overlapping, the fundamental mathematical capabilities are, in contrast, meant to be mutually disjoint, even though there are clear links between the competencies and the capabilities.

Part of the approach taken in defining the fundamental capabilities was to order them so as to emulate the sequence of steps and measures that a PISA problem solver would encounter and undertake when working his or her way through an item. Apart from the wish to communicate clearly both the essence of the fundamental capabilities and the demarcation lines between them, also psychometric needs called for clear distinctions between the capabilities. The six fundamental capabilities then are (Turner, Blum & Niss, 2015):

- Communication.
- Devising strategies.
- Mathematising.
- Representation.
- Using symbols, operations and formal language.
- Reasoning and argument.
- Detailed definitions and descriptions of these capabilities at different levels are offered in (Turner, Blum & Niss 2015).

Using the scheme to rate items then amounts to assigning a 6-vector of capability ratings, at levels 0, 1, 2, or 3, to each item. Even though more work still needs to be done, so far the scheme has proved rather successful in explaining and predicting difficulty of PISA items. This provides a pretty substantial corroboration of the crucial part played by the six fundamental mathematical capabilities (and behind these, the eight mathematical competencies) in constituting mathematical literacy as defined in PISA.

Conversely, the pool of PISA items offers one significant way to assess the fundamental mathematical capabilities, and hence the underlying competencies. More specifically, if we wanted to assess an individual student's possession of a given fundamental capability, say "devising strategies", an obvious approach would be to choose a suffciently varied set of PISA or PISA-like items in each of which the level of the "devising strategies" component is at least as high as the levels of the all the other components, and such that there are items representing any level of rating with regard to "divising strategies". The profile of the student's achievement on such a set of items would then give an indication of his or her "devising strategies" capability. Similar remarks pertain to the other capabilities.

What we have just looked at is an example of an attempt to assess a single fundamental capability by zooming in on its particular role in a pool of items in which several other capabilities are present as well. In other words, it can be seen as one way to meet *the holistic challenge*. As it stands it is an example pertaining to summative assessment. However, it may be turned into an instrument for formative assessment if used as a basis for feedback conversations with individual students about their competency profiles, especially if the instrument is put to use at regular intervals, e.g. every six months.

Assessing individual competencies atomistically

When it comes to meeting *the atomistic challenge*, i.e. assessing a given competency in contexts and situations in which the other competencies are not present or play only a very minor role, without having jeopardised the intrinsically interwoven nature of the competencies, the first task is to design suitable such contexts and situations. Going into great detail with examples of this is beyond the scope of this paper. Some brief outlines of a very few examples have to suffice.

As regards the *mathematical thinking* competency, one of its elements is the ability to 'make conjectures'. Depending on the educational level of the student being assessed, he or she can, for example, be presented with statements indicating the sums of angles in triangles and convex quadrangles and pentagons, respectively, and then be asked to make a conjecture (without proof) concerning the sum of angles of a convex *n*-gon. As a possible next step, the student may be asked to make conjectures concerning non-convex *n*-gons without self-intersection. Or the student can be reminded that, say, the sums 2+6, 4+16, 8+6, 1+7, 13+5, 3+19 are all even, whereas the sums 3+8, 6+15, 31+4 are all odd, and then be asked to formulate a conjecture (without proof) on the even-ness or odd-ness of the sum of any two natural numbers. Then analogous questions may be posed concerning the products of two natural numbers. The conjectures just referred to all involve another key component of the mathematical thinking competency, the ability to 'generalise' statements. Furthermore, upper secondary or university students may be asked to propose conjectures concerning sums and products of even or odd real functions, defined on set of the real numbers, which also involves 'abstraction' of notions from one domain (natural numbers) to another (real functions). As another example, students are reminded of the Pythagorean theorem (*if* a triangle is right-angled, *then* the square of the hypotenuse equals the sum of the squares of the smaller legs) and then invited to state conjectures (without proof) about a triangle whose sides fulfil the Pythagorean identity. In other words students are challenged to consider the possibility of reverting an established implication so as to obtain a bi-implication. If this proves successful, the students can be asked to come up with mathematical examples of implications that cannot be reverted.

Next, let us consider the *modelling competency*. For example, a student may be shown two tables, one for adult males and one for adult females, each composed of large sets of corresponding values of foot length and body height for individual males or females. The student is then asked to identify a possible relationship between foot length and body height. Depending on the educational level of the student, this task may be approached in a variety of ways, ranging from simly inspecting the tables leading to qualitative conclusions only, over converting the tables into points in one or two coordinate systems, trying to fit function graphs to the data points by visual or formal means, perhaps using CAS tools, or further to conducting a regression analysis, through to statistical tests of model validity and tests for homogeneity of the male and female data at more advanced levels. As an other example, a student is presented with an authentic photo of a building in a city, in an environment containing other buildings, people, cars, lamp posts, etc., and is then asked to estimate the height of the building. This, too, can be approached in a variety of different ways, ranging from sheer guessing, over counting the number of floors of the building and multiplying by an estimated average height of one floor, over scaling activities based on measures of reference objects — e.g. persons or cars — in the photo, through to more sophisticated estimates involving uncertainties.

These two examples are to do with students 'active mathematical modelling', which is a key component of the modelling competency. 'Dealing with already existing models' is another key component of the modelling competency. Here, students can be assessed by inviting them to analyse and assess proposed models by way of specific questions. For example, a student may be shown a graph of a linear function with negative slope as an alleged model of the average temperature of a point in the atmosphere as a function of the point's distance from the surface of the Earth and be asked to assess the model based on the conclusions it gives rise to, e.g. that arbitrarily low negative temperatures can be encountered if you move far enough away from the Earth. Or an upper secondary or tertiary student may be asked to assess the range of validity of the rough rule of thumb for the doubling time of a fortune (or a debt) at interest rate i% per year - $70 / i$ years - after having been shown that $(1+i/100)^n = 2$ is fulfilled for $n = ln\ 2 / ln\ (1+i/100) \sim ln\ 2 / (i/100) \sim 70 / i$, using that $ln\ 2 \sim 0.7$ and that $ln\ (1+x) / x = [ln\ (1+x) - ln\ 1] / x \longrightarrow ln'(1) = 1$, whence $ln\ (1+x) \sim x$ for small x. Even though the student is only expected to be able to follow this exposition (with further details added) and not to perform the modelling him- or herself, it is, however, necessary that the student knows some elementary calculus.

As a final example we shall consider the *mathematical reasoning* competency, which is to do with the justification of mathematical statements. In order to disentangle the assessment of a student's mathematical reasoning competency from his or her general reasoning competency, it has proven fruitful to ask the student to consider and make inferences in everyday contexts where logical relationships concerning implications, bi-implications, negations, conjunctions, disjunctions, universal and existence quantifiers, all in verbal form only, are in the centre, and then ask the student to subsequently consider and make inferences concerning the very same logical structure but in mathematical contexts. Mathematical examples may include "justify that amongst rectangles with a fixed circumference there exist rectangles with arbitrarily small areas", "do the following two statements say the same thing: 'if m and n are even integers then $m+n$ is even' and 'if for two integers m and n, $m+n$ is even then m and n are both even'?", and "is any of these statements actually true?". Also the student may be asked to answer the following question: "Consider the argument 'Since we have that $1 – 1 = 1^2 – 1^2 = (1 – 1)(1 + 1)$, then we have that $1 = (1 – 1) / (1 - 1) = (1 – 1)(1 + 1)/(1 - 1) = 1 + 1 = 2$, and we conclude that $1 = 2$'. Is this argument correct? If not, where and how is it wrong?".

In order to really assess a student's possession of one of these or any other competencies in an atomistic setting, it is essential that the student is asked to deal with a wide variety of tasks in which the competency in focus predominates. It is further important that the tasks are varied with respect to the three dimensions of competency possession identified in the KOM Project: 'degree of coverage', which refers to the degree to which the individual masters the entire set of aspects involved in the definition of the competency, 'radius of action', which refers to the range of contexts in which the individual can activate the competency, and finally 'technical level', which refers to the mathematical domains and levels of conceptual and technical complexity at which the individual masters the competency (for further details, se Niss & Højgaard 2011).

The actual assessment of individual competencies by an atomistic approach can be carried out in several different ways, e.g. paper work submitted by the students, questionnaires, interviews with students while at work, observations of students' work. Moreover, the unit of assessment can range from an individual student, over pairs and small groups of students, to whole classes.

The Ultimate Challenge: The Teacher - Conclusion

Formative assessment of a student is, almost by definition, conducted by the student's own teacher(s). Depending on place, level and context, also parts – or all - of summative assessment may be undertaken by the student's teacher. At any rate, the mathematics teacher is a protagonist in the assessment of his or her students. Evidently, this means that if the focus is (meant to be) on the assessment of the student's mathematical competencies, the teacher needs to be able to conduct assessment of such competencies. This further requires that the teacher has to both possess an appropriate and clear understanding of the nature and specifics of the competencies and a knowledge of the modes and instruments of assessment that are available for the assessment of mathematical competencies.

Experience shows that these two prerequisites are hard to obtain for the majority of "ordinary" teachers. Coming to grips with the notion and unfolding of mathematical competencies is in itself demanding and time consuming for teachers who have often been trained and enculturated with an emphasis on specific mathematical concepts, results, procedures and skills as the primary object of mathematical teaching and learning. Similarly, many teachers have limited knowledge of and experience with modes and instruments of assessment that go beyond classical forms of written tests involving exercises and problems or of oral quizzes and presentations. This is aggravated by the fact that seriously uncovering and assessing students' possession of a given mathematical competency resembles an empircal research investigation, in which control of variables is a key component, once again something with which most teachers have limited, if any, experience.

So, enabling teachers to assess their students' mathematical competencies cannot be expected to result automatically from their everyday teaching practice, not even for excellent and very experienced teachers. Therefore , if we want teachers to be able to undertake this task we have to instigate pre-service and in-service programmes that foster this capability. This is costly in terms of time and effort – and hence of finances – which may well constitute a bottleneck in many places. However, as is always the case, if one is unwilling to invest available means so as to achieve a goal, it is because the goal does not really have a high priority with the potential investor. I, for one, plead for assigning high priority to the goal of making teachers able to assess their students' mathematical comptencies. For that purpose investments are needed.

References

Blomhøj, M., & Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and its Applications, 22*(3), 123–139.

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. -W., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York, NY: Springer.

Niss, M. (2010). Modeling a crucial aspect of student's mathematical modeling. In R. Lesh, P.L. Galbraith, C.R. Haines & A. Hurford (Eds.), (pp. 43–59). New York: Springer.

— (2015). Mathematical competencies and PISA. In K. Stacey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience,* (pp. 35–55). Heidelberg: Springer.

Niss, M., & Højgaard, T. (Eds.) (2011). *Competencies and mathematical learning. Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. (IMFUFA Tekst nr.485). Roskilde: Roskilde University: IMFUFA.

Niss, M., & Jensen, T. H. (Eds.) (2002). *Kompetencer og matematiklæring. Ideer og inspiration til udvikling af matematikundervisning i Danmark*. Uddannelsesstyrelsens temahæfteserie Nr. 18. Copenhagen: Ministry of Education.

Organisation for Economic Co-operation and Development (1999). *Measuring student knowledge and skills: A new framework for assessment*. Paris: OECD.

Organisation for Economic Co-operation and Deelopmend (2013). *PISA 2012 assessment and analytical framework. Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy*. Paris: OECD.

Rico, L. (1993). Mathematics assessment in the spanish educational system. In M. Niss (Ed.), *Cases of Assessment in Mathematics Education. An ICMI Study*, (pp. 9–20). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Stacey, K., & Turner, R. (2015). The evolution and key concepts of the PISA mathematics framework. In K. Stracey & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience*, (pp. 5–33). Heidelberg: Springer.

Turner, R., Blum, W., & Niss, M. (2015). Using competencies to explain mathematical item demand: A work in progress. In K. Stracey, & R. Turner (Eds.), *Assessing Mathematical Literacy. The PISA Experience*, (pp. 85–115). Heidelberg: Springer.

Turner, R., Dossey, J., Blum, W., & Niss, M. (2013). Using mathematical competencies to predict item difficulty in PISA: A MEG Study. In M. Prenzel, M. Kobarg., K. Schöps, & S. Rönnebeck (Eds.), *Research on PISA. Research Outcomes of the PISA Research Conference 2009*, (pp. 23–37). Dordrecht: Springer.

EVALUACIÓN

PONIENDO LAS BASES PARA UNA EDUCACIÓN DE CALIDAD EN ESPAÑA

Setting – Up the Basis for Quality Education in Spain

Ismael Sanz y M. Ángeles Díez
Dirección General de Innovación, Becas y Ayudas a la Educación
de la Comunidad de Madrid, España

Resumen

La calidad de la educación es uno de los factores determinantes del bienestar social del futuro por su impacto en la productividad laboral y el crecimiento económico, como bien refleja el proyecto pionero de la OCDE denominado PIAAC (Programme for the International Assessment of Adult Competencies. Las competencias adquiridas a lo largo del periodo escolar influyen de forma decisiva en el desempeño laboral futuro de los individuos y del conjunto de la sociedad. Un sistema educativo más exigente y de calidad puede contribuir a que un país se especialice en ramas de actividad económica más intensivas en capital humano y tecnológico. Estos sectores, que por lo demás, generan un alto valor añadido, están generalmente asociados a puestos de trabajo bien remunerados. El proceso de globalización de la actividad económica y la revolución que suponen las nuevas tecnologías de la información y la comunicación, impiden la necesidad de que los países puedan producir bienes y servicios de calidad, diferenciados del resto, que les permitan huir de la competencia en precios (y crecientemente también en calidad) de los «tigres» asiáticos.

Palabras clave: competencia, productividad, capital humano, calidad, bienestar

Abstract

The quality of education is one of the factors determining the future welfare because of their impact on labor productivity and economic growth. As the pioneering OECD project called PIAAC reflects, (Programme for the International Assessment of Adult Competencies) the skills acquired during the school year have a decisive influence on the future job performance of individuals and of society as a whole. A quality and more demanding education system can help a country to specialize in more intensive industries focusing on human and technological capital. These are sectors that generate high added value and generally associated with well-paid jobs. The economic globalisation process and the revolution brought about by the new information and

Sanz, I. y Díez, M. A. (2016). Poniendo las bases para una educación de calidad en España. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 91-101). Granada: Comares.

communications technologies exacerbate the need for countries to produce quality goods and services different from the rest which allow them to escape price competition (and increasingly also quality) of the Asian "tigers".

Keywords: *competence, productivity, human capital, quality, wellness*

Pruebas externas y estandarizadas

Las pruebas externas y estandarizadas permiten evaluar a todos los alumnos con el mismo test y conocer su grado de logro de las competencias y la de sus centros educativos.

La introducción de pruebas externas y estandarizadas es una de las transformaciones más relevantes de los sistemas educativos con la finalidad de mejorar los resultados de los estudiantes. Los efectos positivos de la puesta en marcha de las evaluaciones externas y estandarizadas se pueden concretar en los siguientes puntos:

— En 24 de los 34 países de la OCDE existe una prueba externa y estandarizada. Dos de cada tres alumnos de los países más desarrollados del mundo se encuentran en sistemas educativos en los que se realizan este tipo de pruebas.

— Todas estas pruebas tienen consecuencias académicas para los estudiantes, bien sea para lograr un certificado o para pasar de un nivel de educación a otro. El Informe del PISA 2009, define también las pruebas externas como las que tienen consecuencias académicas.

— En un estudio de 2011 que trabaja con los artículos de investigación que han analizado la relación entre la existencia de estas pruebas y el rendimiento académico de los alumnos, Eric Hanushek (U. Stanford) y L. Woessmann (CesIFO de Munich) concluyen que los test externos y estandarizados mejoran los resultados académicos de los alumnos tanto como si hubiesen estudiado medio curso escolar más al llegar a 4.º de la ESO.

— El Panorama de la Educación de la OCDE de 2012 concluye que «en los países en cuyos sistemas de evaluación incluyen exámenes externos estandarizados, la puntuación de Lectura es 16 puntos superior de media que en los que no se aplican pruebas de estas características».

— Los estudios resumidos en el artículo de los profesores Hanushek y Woessmann (2011) señalan que aquellos países o regiones en donde existe un examen nacional externo y estandarizado obtienen mejores resultados en pruebas internacionales muy diferentes a ese examen nacional como son PISA, TIMSS y PIRLS. La evidencia empírica mencionada por Antonio Cabrales, Catedrático de University College London, es que las pruebas externas y estandarizadas no reducen actividades como leer por placer o ver programas científicos. Y aumentan actividades como hacer experimentos, que no «entran en el examen».

— Es importante que el rendimiento medio alcanzado por los centros se sitúe en relación a la situación socioeconómica y características de sus alumnos. Es decir, centrarse en el valor añadido del centro educativo o lo que es lo mismo, a los resultados medios que logra una vez descontado el contexto en el que se encuentra. Hablaríamos por tanto, de si un centro obtiene mejores o peores resultados de los que le *correspondería*. Como concluye, Panorama de la Educación de la OCDE de 2012 «la existencia de pruebas externas y estandarizas no perjudica la equidad».

La evaluación es un instrumento aliado del docente, que tiene como finalidad la mejora de los procesos de enseñanza aprendizaje y la mejora en el nivel educativo de nuestros alumnos. Por todo ello, la consolidación de una cultura de evaluación en nuestro país, en todos y cada uno de los agentes implicados se antoja esencial. Es una tarea de todos.

Dentro de esta práctica de transparencia, es importante señalar algunos de los problemas que se han encontrado los países o regiones que han introducido estas pruebas, y que son:

— El *"score inflation"*: el hecho de que los resultados promedio en las propias pruebas externas introducidas han mejorado sustancialmente mientras que el rendimiento en otro tipo de pruebas se ha incrementando en menor medida, o ni siquiera se ha alterado. En su survey Figlio y Loeb (2011) señalan que el Estado de Texas mejoró mucho los resultados en sus pruebas externas y estandarizadas entre 1994 y 1998. En otro tipo de pruebas, las nacionales de la NAEP, sin embargo, esas ganancias fueron de 1/3 de magnitud.

— Cambios en el pool de alumnos a realizar la prueba, haciendo repetir a alumnos en mayor medida el curso previo al que se realiza el test, clasificando a más estudiantes como de necesidades educativas especiales o evitando que tomen el examen (Figlio, 2006).

— Existe la preocupación de que los centros se centren en mejorar el aprendizaje a corto plazo y reduzcan el curriculum a aquellas áreas que son evaluadas a costa de las que no se incluyen en las pruebas externas y estandarizadas o la creatividad o habilidades no-cognitivas como la motivación o la sociabilidad que son más relevantes a largo plazo.

— El diseño de las pruebas tiene efectos importantes en su efecto en el aprendizaje de los alumnos. Así por ejemplo Deming et al. (2013) muestran que los centros educativos de Texas en los que todos sus subgrupos étnicos y socioeconómicos se encontraban claramente por encima del umbral requerido para no ser catalogado como de «Bajo Rendimiento», se dejaron llevaron llevar y no reaccionaron a la rendición de cuentas.

Evaluación centrada en valor añadido

Las evaluaciones educativas suelen criticarse por dos motivos. El primero es porque provoca un efecto de «teaching to the test». Es decir, que las pruebas generan un incentivo a que los profesores se concentren en entrenar a sus alumnos a obtener buenos resultados en los exámenes estandarizados. Los estudios resumidos en el artículo de los profesores Hanushek y Woessmann (2011) señalan que aquellos países o regiones en donde existe un examen nacional externo y estandarizado obtienen mejores resultados en las pruebas internacionales de PISA, TIMSS y PIRLS, que son diferentes.

En un artículo que he realizado junto con los profesores Brindusa Ánghel, Jorge Sainz y Antonio Cabrales, se muestra que la Comunidad de Madrid ha mejorado sus resultados en lectura en PISA entre el año 2000 y el 2009 en 16 puntos más de lo que le correspondería una vez descontados todos los factores socioeconómicos y de entorno. Y se llega a la conclusión de que una parte importante de esta buena evolución de la educación en Madrid se puede atribuir a la introducción de la CDI en 2005.

La segunda crítica es que las pruebas perjudican a aquellos centros que se encuentran en zonas desaventajadas. Por eso es importante que el rendimiento medio alcanzado por los centros se sitúe en relación a la situación socioeconómica y características de sus alumnos. Es decir, centrarse en el valor añadido del centro educativo o lo que es lo mismo, a los resultados medios que logra una vez descontado el contexto en el que se encuentra. Hablaríamos por tanto, de si un centro obtiene mejores o peores resultados de los que le correspondería.

Una forma más sencilla de aproximar el valor añadido de un centro es compararle consigo mismo en los años anteriores, dado que la situación socioeconómico de un colegio o instituto no cambia significativamente entre un año y otro. De este modo todos los centros tienen las mismas oportunidades, e incluso tendrían más margen de mejora aquellos que parten de peor situación. Precisamente, la evidencia empírica de Hanushek y Woessmann (2011) concluye que las pruebas externas y estandarizadas mejoran en mayor medida a los centros y alumnos con peor rendimiento académico.

En un magnífico paper los profesores de la Universidad de Harvard y Columbia RajChetty, Jonah Rockoff y John Friedman estiman el valor añadido que proporcionan los profesores a la educación de los alumnos «Thelong-termimpacts of teachers: teacher value-added and student outcomes in adulthood», http://obs.rc.fas.harvard.edu/chetty/value_added.pdf. Es decir que esos autores van más allá y no sólo calculan el valor añadido del centro, sino el individualizado de cada profesor. No se trata de llegar a ese nivel, es posible que España no esté preparada aún para aceptar que se mida la productividad de cada docente, pero sí que indica que técnicamente es posible.

En definitiva, para que la rendición de cuentas pueda ser valorada correctamente deberá realizarse teniendo en cuenta tanto el contexto de los centros, y sus recursos humanos y materiales, como las características de la población de alumnos que escolarizan, entre las que el nivel socioeconómico y cultural de sus familias ocupa un papel especialmente relevante.

Sin embargo, muchos estudios comprueban que los alumnos que alcanzan buenos resultados en las pruebas externas y estandarizadas tienen un desempeño educativo y laboral posterior mejor que aquellos otros estudiantes que tienen peores resultados o que acuden a centros donde no hay pruebas externas y estandarizadas.

A modo de conclusión

Los centros rezagados mejoran su rendimiento académico promedio cuando se introducen pruebas externas y estandarizadas y lo hacen en mayor medida que el resto de centros (Ash y Vidgor, 2014; Deming *et al.,* 2014). Además, esta mejora se produce por incrementos en los resultados educativos de los alumnos de minorías o de entornos socio-económicos desfavorecidos. A ello contribuye que la «No Child Left Behind» se centra de forma prioritaria en el rendimiento académico del subgrupo racial o socio-económicos y exige mejoras en la proporción de aprobados de aquellos subgrupos con más dificultades de aprendizaje. Esta legislación ha provocado que los centros educativos hayan prestado aún mayor atención a los alumnos y subgrupos rezagados, pues de ellos depende que superen el umbral de proporción de aprobados requerido.

Algunos países anglosajones han introducido incluso sanciones para aquellos centros que repetidamente no alcanzan un mínimo de porcentaje de aprobados en todos los subgrupos raciales y de carácter socio-económico y que además no mejoran con el paso de los años. Entre estas sanciones se encuentra la de permitir a los alumnos de estos centros cambiarse de Instituto o Colegio (con ayudas públicas al transporte), cambios en la dirección de los profesores o directores y en algunos casos (raramente utilizados) el cierre de los centros.

Aproximando la evaluación PISA a nuestro sistema educativo

¿Qué es PISA? Es un estudio internacional organizado por la OCDE que evalúa a los alumnos de 15 años —en España, la mayoría se encuentran en 4.º ESO— en las competencias de lectura, matemáticas, ciencias y resolución de problemas en grupo. Además, a través de estos resultados y con la ayuda de cuestionarios diseñados ad hoc, se consiguen datos demográficos de alumnos y profesores, de percepción de su personalidad, de su formación y sus prácticas docentes, de la organización de los centros escolares, etc., con lo que se traza además una fotografía multidimensional de los sistemas educativos en conjunto, comparable internacionalmente. Por eso, resulta un estudio clave para ayudar a mejorar la calidad, equidad y eficiencia de nuestros sistemas educativos.

Es trienal y comenzó en el año 2000. Los últimos resultados publicados son de la edición de 2012, en la que participaron más de 70 países. España lleva participando desde su primera edición. Todos los países miembros de la OCDE y un número aún mayor de países asociados han realizado de nuevo este estudio, en 2015. En España la aplicación se llevó a cabo entre abril y mayo, en más de 50 centros de cada comunidad autónoma. En total, unos 30.000 alumnos en más de 900 centros españoles.

Lo destacado de la prueba PISA es su contenido, ya que evalúa competencias claves como lectura, matemáticas y ciencias. Se miden también competencias opcionales, como la financiera o la resolución de problemas. La competencia que se ha explorado con más profundidad en esta sexta edición es Ciencias. Y la novedad es que los alumnos han realizado la prueba íntegramente por ordenador, algo completamente innovador hasta el momento en la realización de evaluaciones en centros escolares en España.

PISA viene mostrando que las mejoras en la educación dependen de un esfuerzo cooperativo de los alumnos, los profesores, los centros, las familias y la sociedad en general. De ese esfuerzo nacen los informes internacionales y nacionales que analizan y difunden los resultados del estudio y que se publicarán en diciembre de 2016.

Evolución de los resultados en PISA

La Evolución de los resultados de España en PISA muestra un estancamiento en las competencias de Lectura y Matemáticas, en donde nuestro país no ha logrado aún superar la puntuación que obtuvo en las primeras ediciones. Algo mejor es la situación en Ciencias, donde se ha producido una mejoría en 2006 y 2012, que no es estadísticamente significativa, pero que deja a España en una posición no muy lejana de la medida de la OCDE.

La OCDE concluye que 40 puntos en PISA equivalen a lo que un alumno aprende en un curso escolar. Por lo tanto, los alumnos españoles se encontrarían un trimestre por debajo de la media de la OCDE.

Tabla 1. *Evolución de los resultados de España y OCDE en las tres competencias en PISA*

		2000	2003	2006	2009	2012
Lectura	España	493			481	488
	OCDE	500			493	496
Matemáticas	España		485			484
	OCDE		500			494
Ciencias	España			488		496
	OCDE			500		501

Fuente: Instituto Nacional de Evaluación Educativa: PISA 2012 MECD. Informe Español.

En cuanto a los resultados por Comunidades (Figuras 1-3), se puede observar que hay Regiones que tienen un rendimiento superior a la media de la OCDE y UE en todas las competencias, como Navarra y Madrid, mientras que otras se encuentran muy por debajo de ese promedio.

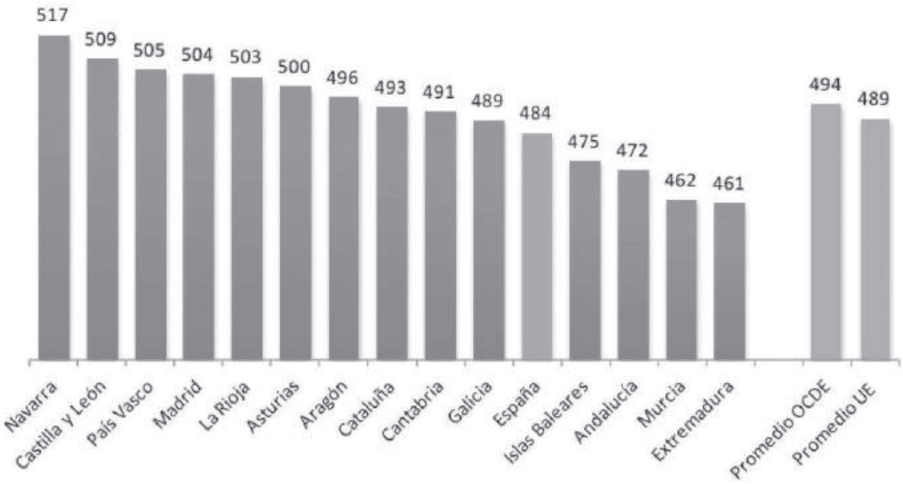


Figura 1. *Rendimiento de las Comunidades Autónomas de España en Matemáticas en PISA 2012.*
Fuente: Instituto Nacional de Evaluación Educativa: PISA 2012 MECD. Informe Español.

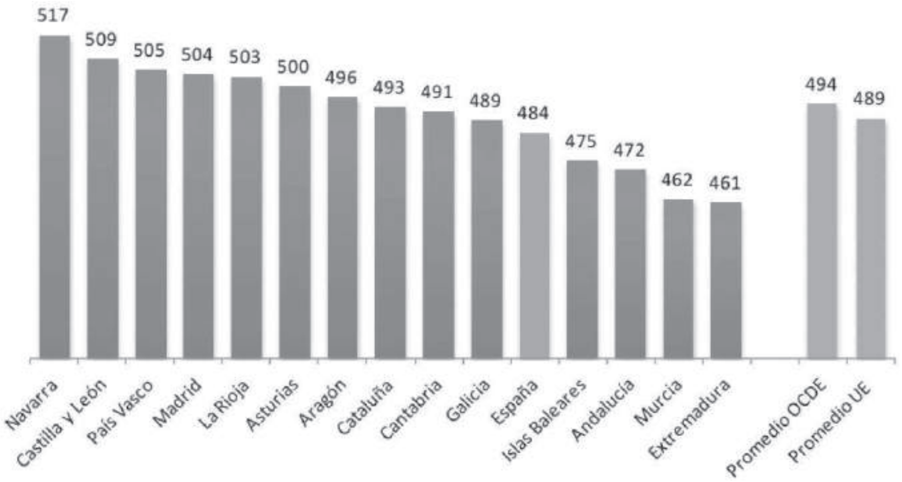


Figura 2. *Rendimiento de las Comunidades Autónomas de España en Ciencias en PISA 2012.*
Fuente: Instituto Nacional de Evaluación Educativa: PISA 2012 MECD. Informe Español.

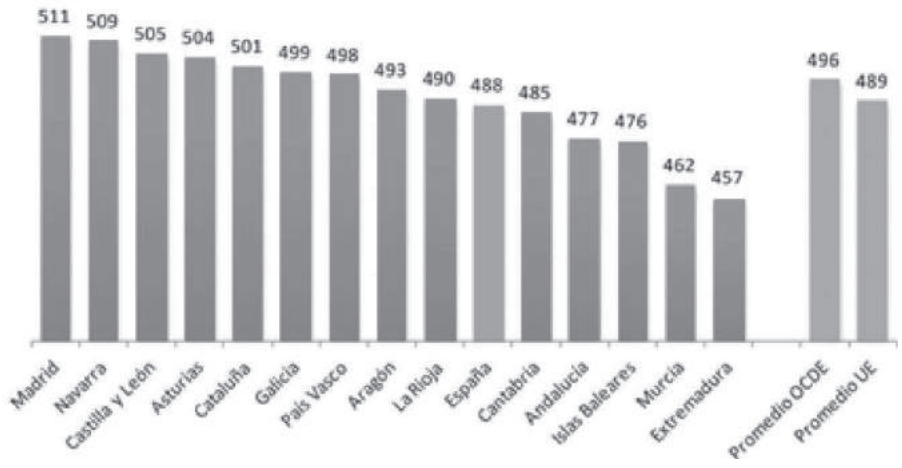


Figura 3. *Rendimiento de las Comunidades Autónomas de España en Lectura en PISA 2012* .
Fuente: Instituto Nacional de Evaluación Educativa: PISA 2012 MECD. Informe Español.

Pues bien, los indicadores internacionales sobre la calidad de la educación de España no invitan al optimismo sobre el futuro del bienestar social. Los resultados del Programa de la OCDE de PISA (Programme for International Student Assessment) sitúan a España en los 484 puntos, significativamente por debajo de los 494 del promedio de los países más desarrollados. Dado que la OCDE señala que 40 puntos equivalen a un curso escolar, se puede concluir que los alumnos españoles de 15 años se encuentran en media casi un cuatrimestre de retraso con respecto a sus colegas. Tampoco la tendencia es positiva.

En el año 2000, la primera edición de PISA, nuestro país obtuvo 493 puntos por los 500 de la OCDE. Nueve años más tarde, cuando de nuevo PISA se centró en lectura, nuestro país disminuyó su puntuación en 12 puntos, lo que le convierte en el quinto Estado con peor evolución entre 2000 y 2009 de toda la OCDE (*Informe PISA. Capítulo V: Learning Trends*). Esta tendencia descendente se produjo a pesar de que durante esos 9 años España duplicó el gasto público en educación hasta situar el gasto público por alumno público un 21% por encima del promedio de la OCDE y la UE.

Más recientes son los resultados de las pruebas realizadas por la IEA *«International Association for the Evaluation of Educational Achievement»*, publicados el pasado mes de diciembre, sobre las competencias de los alumnos de 4.º de Primaria de 45 países en Lectura y 50 en Matemáticas y Ciencias. España ocupa la posición 23 del total de 26 países de la OCDE que participan en estas pruebas en Lectura y Matemáticas, y el 21 en Ciencias, con unos resultados similares a los de pruebas anteriores en 1995 y 2006. Resulta sorprendente que los alumnos españoles se encuentren ya rezagados nada más empezar su vida escolar, en 4.º de Primaria, a pesar de que España es uno de los países con mayores tasas de escolarización en educación infantil.

Si los indicadores de calidad educativa no son positivos para nuestro país, tampoco resultan optimistas los de cantidad. La tasa de abandono temprano educativa es inferior a la de la UE, con el agravante de su marcada distribución inequitativa: los jóvenes de madre con estudios superiores tienen seis veces menos de probabilidad de abandonar los estudios. En definitiva, hay que llevar a cabo medidas educativas que permitan mejorar la calidad de la educación así como aumentar el porcentaje de alumnos que finaliza estudios de Bachillerato o FP de Grado Medio, el umbral a partir del cual los jóvenes podrán insertarse con garantías en el mundo laboral y desarrollar una vida profesional satisfactoria.

Teniendo presentes estos resultados y las consideraciones que las organizaciones internacionales especializadas en educación y múltiples expertos han señalado como muy útiles en la mejora de los sistemas educativos, es de interés la siguiente propuesta de mejora:

— La introducción de pruebas externas y estandarizas: la práctica de transparencia y rendición de cuentas está muy extendida ya entre los países más avanzados del mundo. En 24 de los 34 países de la OCDE existe una prueba externa y estandarizada. Dos de cada tres alumnos de los países más desarrollados del mundo se encuentran en sistemas educativos en los que se realizan este tipo de pruebas. Los exámenes externos y estandarizados se han mostrado como una herramienta muy eficaz para mejorar el aprendizaje de los alumnos. Los profesores de la Universidad de Stanford Eric Hanushek y el del Instituto CesIfo de Munich Ludger Woessmann, resumen en el *Handbook of the Economics of Education*, 2011, hasta 29 estudios publicados en revista de gran reputación que encuentran que las pruebas externas y estandarizas mejora el rendimiento académico de los alumnos entre un 20% y un 40% de la desviación típica, tanto como de medio a un curso escolar entero.

— Dotar de autonomía a los centros educativos. La autonomía permite a los centros tomar decisiones organizativas, de recursos y de curriculum al mismo tiempo que facilita que padres y alumnos pueden elegir entre una oferta variada aquel centro que mejor se ajusta a sus intereses o sensibilidades (Banco Mundial, 2011: *School Autonomy and Accountability*). La autonomía de los centros en España se encuentra rezagada con respecto a la OCDE y la UE (*Education at a Glance*, 2012). Tan solo un 25% de las decisiones que se toman en la ESO las realizan los propios centros por el 41% de la OCDE y el 46% de la UE. Este desfase se centra sobre todo en la gestión de recursos, de personas y en la planificación y estructuras. La escasa autonomía de los centros españoles puede explicar parte de nuestro peor desempeño pues la toma de decisiones por parte de los propios centros tiene una relación positiva y significativa con el rendimiento de los alumnos, sobre todo en los países más desarrollados (PISA 2009, Volume IV, *What Makes a School Successful?*; Hanushek, Link y Woessmann, 2011 *Does School Autonomy Make Sense Everywhere? Panel Estimates from PISA*, Documento de Trabajo del NBER). El siguiente gráfico extraído de la página 147 de Hanushek y Woessman, *Handbook of the Economics of Education* 2011, muestra que la combinación entre autonomía de los centros y pruebas externas y estandarizadas puede mejorar los resultados en TIMSS/PIRLS hasta en 76 puntos.

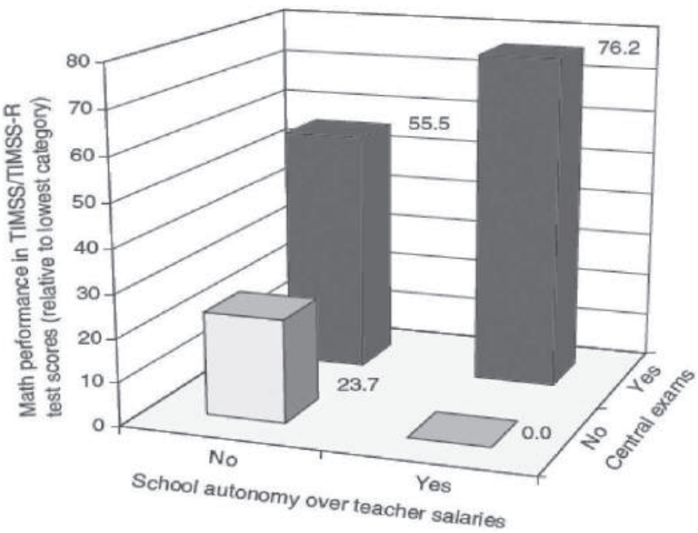


Figura 4. *Relación entre la Autonomía de los centros y rendimiento en pruebas externas (TIMSS).*
Fuente: Eric Hanushek: «The Economics of international differences in educational achievement» .

— Reforzar las materias instrumentales de lengua y matemáticas. Actualmente, España es uno de los países con más horas de clase lectiva para los alumnos al año y, sin embargo, es de los que menos horas de clase dedica a matemáticas y lengua. Es decir, que se dedican muchas horas lectivas a otras materias diferentes a las instrumentales. De nuevo, existe evidencia empírica de que un aumento de las horas de clase mejora los resultados en las asignaturas correspondientes (Levy, 2012. Do Differences in School's Instruction Time Explain International Achievement Gaps in Math, Science, and Reading? Evidence from Developed and Developing Countries. Documento de Trabajo de Universidad de Warwick). Estas tres medidas que contempla la LOMCE ayudarán a mejorar de forma significativa la calidad de la educación en nuestro país contribuyendo a encarar con mejores garantías lo retos que suponen globalización de la actividad económica y las introducción de nuevas tecnologías.

Referencias

Anghel, B., Cabrales, A., Sainz, J. y Sanz, I. (2015). Publicizing the results of standardized external tests: soes it have an effect on school outcomes? IZA *Journal of European Labor Studies 2015*, 4–7 (26 March 2015).

Burgess, S., Wilson, D. y Worth, J. (2013). A natural experiment in school accountability: the impact of school performance information on pupil progress. *Journal of Public Economics*, *106*, 57–67.

Consejo Escolar del Estado (2015). *Informe 2015 sobre el estado del sistema educativo*. Madrid: Consejo Escolar del Estado.

Deming, D., Cohodes, S., Jennings, J. y Jencks, J. (2013). *School Accountability, Postsecondary Attainment and Earnings,* NBER Working Paper No. 194444.

Figlio, D. y Loeb, S. (2011). School Accountability. En E. A. Hanushek, S. Machin, y L. Woessmann (Eds.), *Handbook of the Economics of Education,* Vol. 3, (pp. 383-423). Amsterdam: North-Holland.

Hanushek, E., Linl, S. y Woessmann, L. (2013). Does school autonomy make sense everywhere? Panel estimates from PISA. *Journal of Development Economics*, *104*(C), 212–232.

Hanushek, E. y Woessmann, L. (2011). The economics of international differences in educational achievement. Rejected definida por ECM.

Hanushek, E., Schewerdt, G., Wiederhold, S. y Woessmann, L. (2015). Returns to skills around the world: Evidence from PIAAC. *European Economic Review, 73,* 103–130.

INEE: PISA 2012. (2013). *Programa para la evaluación internacional de los alumnos. Informe español*. Volumen I: Resultados y contexto. Madrid: INEE.

OCDE, *Education at a Glance*, varias ediciones. París: OCDE.

— (2013). PISA 2012. *Results: What students know and can do student performance in mathematics, reading and science*. Volume I. París: OCDE.

PIAAC (2013). *OECD skills outlook 2013*. First results from the survey of adult skills. París: OCDE.

Piopiunik, M., Schwerdt, G. y Woessmann, L. (2013). Central school exit exams and labor-market outcomes. *European Journal of Political Economy*, *31*, 93–108.

PIRLS-TIMSS (2011). *International Study on Progress in Reading Comprehension, Mathematics and Sciences.* Volumen II. Spanish Report Secondary Analysis. IEA.

— *Estudio Internacional de progreso en comprensión lectora, matemáticas y ciencias.* Volumen I: Informe español. IEA.

Temple, J. (2001). Growth effects of education and social capital in the OECD countries. OECD *Economic Studies*, 2001, *33,* 57–101.

LA RELACIÓN VERBO-OPERACIÓN REVISITADA 30 AÑOS DESPUÉS: ESTUDIO DE LA RÉPLICA SOBRE VARIABLES LINGÜÍSTICAS EN PROBLEMAS ARITMÉTICOS ESCOLARES

The Word-Operation Relation Revisited 30 Years Later: A Reply on Linguistic Labels in Schoolar Arithmetic Problems

Antonio Tortosa[a], *Belén González*[b], *Evaristo González*[c] *y José Gutiérrez*[d]
[a]Centro de Educación Secundaria y Formación Profesional
«Santiago Ramón y Cajal», Granada, España
[b]I.E.S. CUME, Granada, España
[c]Colegio Público Sierra Nevada, Granada, España
[d]Universidad de Granada, España

Resumen

Con motivo de la preparación de nuestra contribución en el libro Homenaje al cumpleaños de Luis, se nos ocurrió reunirnos, con propósito académico, para llevar al aula nuevamente uno de los trabajos seminales que más marcó nuestro proceso de formación como maestros, sembrando en nosotros un interés por la investigación en educación matemática que aún perdura.

1. Hace 30 años que en las II Jornadas de Educación Matemática Thales (Almería, 1985) presentamos un trabajo empírico sobre verbos y problemas escolares.

2. El estudio partía de la idea de que los verbos tienen un papel relevante en el aprendizaje de las matemáticas e inciden y condicionan significativamente los procesos de enseñanza y resolución de problemas aritméticos.

3. ¿Y por qué no hacemos una réplica del trabajo verbo-operación, a ver qué sale?

Bajo estas tres premisas ofrecemos aquí los resultados de la aplicación de la misma prueba a tres décadas de su creación. Nos preguntamos hoy qué cosas han permanecido inamovibles y cuáles han cambiado a lo largo de este trance y cómo ello ha afectado a esta relación entre verbos, problemas y educación matemática.

Palabras clave: problemas aritméticos escolares, invención de problemas, verbo y operación, variables lingüísticas

Abstract

On the occasion of the preparation of our contribution in the Proceeding to the birthday of Luis, we meeting, for academic purposes, to bring to the classroom again one of the seminal

Tortosa, A., González, B., González, E. y Gutiérrez, J. (2016). La relación verbo-operación revisitada 30 años después: Estudio de réplica sobre variables lingüísticas en problemas aritméticos escolares. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 103-118). Granada: Comares.

works most marked our training as teachers, sowing in us a interest in research in mathematics education that still exists.

1. 30 years in the Second Conference on Mathematics Education Thales (Almería, 1985) present an empirical work on verbs and school problems.

2. The study was based on the idea that verbs play an important role in learning and influence of mathematics and significantly condition the processes of teaching and solving arithmetic problems.

3. Why do not we make a replication of the verb-operation work, to see what comes up?

Under these three premises we offer here the results of the application of the same test three decades of creation. We wonder today how things have remained immovable and which have changed throughout this ordeal and how it has affected the relationship between verbs and mathematics education problems.

Keywords: *schoolar arithmetic problems, invention problem, word and operation, linguistic labels.*

Introducción

> «Un problema es una situación standard en donde hay que calcular un dato desconocido mediante operaciones aritméticas ya estudiadas, realizadas a partir de los datos de una información. Pero el problema responde difícilmente a una situación real, tal y como está, y además su desarrollo en paralelo y simultáneo con el aprendizaje de las operaciones aritméticas, hace que se estudien situaciones puramente convencionales y muy distintas de las que se dan en la vida real» (Rico y col. 1985, p. 31).

El presente texto constituye un estudio de réplica de un trabajo realizado allá por el año 1985 en el seno de un Seminario de maestros donde trabajábamos colaborativamente con los profesores del Dpto. Didáctica Matemáticas compartiendo inquietudes y buscando respuestas desde la investigación en el aula a cuestiones reales del día a día de las clases de matemáticas (Rico y col., 1984; 1985; 1986a; 1987a; 1988). Sin ordenador, sin teléfono móvil, sin taxonomías de referencia a los tipos de problemas aritméticos que se proponían en las clases de matemáticas, sin paquetes estadísticos de análisis de datos cuantitativos ni software informático de apoyo al análisis cualitativo del contenido semántico de los problemas inventados por los escolares. Sin *PowerPoint* para defender y apoyar la argumentación de resultados presentábamos en septiembre un primer avance de resultados de un trabajo original que estaba a la altura de los referentes mundiales de lo que en ese momento empezaban a proponer otros autores de contextos culturales no hispanos (Nesher, 1982; Vergnaud, 1982; Carpenter y Moser, 1982). *Épsilon* publicó en esta época dos artículos que recogían la filosofía de trabajo del grupo y el enfoque dado a la resolución de problemas como metodología activa (Rico y col., 1985; 1986a). Nos situamos en los inicios de lo que sería una arquitectura incipiente de la investigación sobre aritmética escolar y más concretamente sobre invención, resolución y caracterización de tipologías de problemas aritméticos escolares. Referencias recientes a este estudio y sus variantes atienden al uso de palabras clave e indicios verbales directos o inversos como variables determinantes de la apuesta por un tipo de operación. Por ejemplo, Castro (2014) forzó a sus estudiantes de profesores a emplear el verbo «faltar» para formular problemas de suma y «añadir» para resolver problemas con una resta. Idea que ya habíamos explorado en nuestro estudio, descubriendo que «robar» era un verbo de suma dependiendo del colegio y la clase social de las familias del mismo. Esta línea de trabajos ratifica el valor posicional de aquella idea seminal en la comunidad científica y nos lleva a preguntarnos por la relevancia e interés de esta aportación al campo de la educación matemática cuya vigencia sigue arrojando citas a día de hoy. El trabajo ha sido ampliamente referenciado y usado con frecuencia en los programas de formación de profesores a lo largo de estas últimas décadas (Puig y Cerdá, 1988). Actualmente el estudio sigue recibiendo citas recientes que sin lugar a dudas muestran el valor de perdurabilidad de una idea motriz, de indiscutible calado e interés en resolución de problemas digna de mayor atención. Resulta curioso constatar el incremento que ha experimentado este tópico con la implantación de los grados y másteres que han convertido este ámbito en un campo empírico fértil donde ejercitar tareas vinculadas al TFM o TFG que favorecen la iniciación a la investigación.

Antecedentes

El estudio se inicia en el curso 83-84, en el contexto de arranque y constitución del *Grupo EGB de la APMA*. En ese momento nos preguntábamos por la relación entre la resolución de problemas y la educación matemática (Rico y col., 1988), así como su tratamiento en el currículum escolar (Rico y col., 1985; 1986a; 1987a; Rico y col. 1996); los criterios que determinaban las variables de los problemas aritméticos (Castro, Rico y Gil, 1992), destacando entre otras: la información proporcionada (Rico y col., 1986b; Rico y col., 1987d); la cuestión o pregunta planteada (Tortosa y Rico, 1995); el papel de los verbos afines o contrarios (Rico y col., 1986a); la secuencia operatoria que relacionaba la información con la pregunta (Castro, Rico y col. 1988; 1993a,b; Castro, Rico y col. 1994; Rico y col, 1995a,b; Castro, Castro, Rico y col., 1998). El trabajo partía de algunas premisas tales como: que la resolución de problemas es un método con entidad propia; que los problemas surgen de situaciones reales; que la pregunta de un problema debe tener sentido para quien ha de responder y para el que la plantea; que el alumno puede y debe plantear cuestiones significativas dentro de un contexto; que la respuesta no tiene por qué ser única, puede haber soluciones múltiples; que el debate y la discusión entre los alumnos sobre la forma adecuada de localizar y manejar una información, mejora la capacidad de expresión, de plantear cuestiones y buscar respuestas, obliga a estos a justificar sus actuaciones, permite conocer cuáles son los procedimientos puestos en juego, capacitando al alumno para enfrentarse a las consecuencias de su elección y mejorar sus actuaciones; que el profesor favorece el pensamiento creativo y consigue que los alumnos se sientan motivados con esta metodología. Evidentemente todos estos planteamientos iban contra una visión cautiva, estrecha y cerrada imperante en las aulas, orientada a ocupar el tiempo de los alumnos resolviendo listas interminables de problemas tipo al final de cada tema.

A lo largo de una década, llevamos a cabo una investigación sistemática inspirada en una didáctica activa para la resolución de problemas. El trabajo del grupo se planteaba con metodologías abiertas que daban la palabra al estudiante y otorgaban al profesor un papel creativo en la elaboración de materiales de apoyo y complementación al libro de texto ordinario y al modelo de enseñanza-aprendizaje, que convertían el día a día en una aventura innovadora y constructivista. El Seminario se construye como un espacio apropiado donde confrontar tres perfiles de competencias sin caer en la tentación de considerarlas categorías excluyentes ni exclusivas: hacer investigación, planificar el currículum e intervenir en el aula (Rico, 1995). La fórmula, a priori, podría haber sido un cóctel explosivo, si bien las interacciones prolongadas en el tiempo hicieron posible que cada cual aprovechara a su modo aquel espacio de crecimiento profesional. La motivación añadida que conllevaba el compartir tareas de resolución de problemas aritméticos hizo posible que los autores de este trabajo nos conociéramos, y empezáramos a trabajar con Luis cada martes. Como una grata obligación y con una férrea disciplina de militancia con la enseñanza de las matemáticas, el grupo empieza a reunirse cada martes de 6 a 8. Diseñamos situaciones de aprendizaje que fueron ensayadas como experiencias de investigación acción en el aula que actuaban de revulsivo al esquema clásico de problemas: la tableta de chocolate; el supermercado; las botellas de refresco; el periódico; mido mi cuerpo y objetos de mi clase; hago el plano de la clase y del patio del colegio; construimos el plano de una casa. Y en paralelo iniciábamos estudios de casos (Rico y col., 1987b) en profundidad e investigaciones empíricas locales más acotadas como la que nos ocupa en este texto. Entre los cambios más relevantes que experimentamos los profesores implicados en aquella investigación destacamos (Rico y col., 1987c; 1987e): i) la necesidad de introducir los problemas desde el inicio de cada tema, y no esperar a las aplicaciones; ii) enfatizar el papel del alumno como autor de su propio aprendizaje y no como un receptor más o menos pasivo de la información previamente seleccionada por el profesor; iii) se modifica significativamente la visión tradicional del conocimiento como algo ya elaborado y preparado para su consumo, y se reemplaza por la conceptualización de que existen situaciones reales ante las que una persona se plantea unas cuestiones según sus intereses y necesidades, donde el conocimiento matemático sirve para dar respuesta a algunas de esas cuestiones; iv) el trabajo en equipo por parte de los alumnos, se considera tan importante como el trabajo individual, la discusión de las técnicas de resolución y de los valores obtenidos se considera un método de trabajo a potenciar; v) la invención de los problemas por los alumnos se presenta como el método más adecuado para elaborar enunciados; vi) elaboración de esquemas de trabajo en tres fases, con sus tareas y material (preparación, desarrollo práctico, análisis y valoración); vii) la determinación de criterios para clasificar las preguntas inventadas por los alumnos y el trabajo con verbos afines o no afines a una determinada operación; viii) análisis de la interacción verbal profesor/alumno para detectar los principales errores cometidos por los alumnos e incidencia que tienen las intervenciones del profesor; viii) análisis sobre el proceso seguido por los alumnos en la resolución de problemas.

Problemas de ayer y hoy

Desde los avances de investigación contemporánea en la campo de la educación matemática, se admite que es discutible considerar como tareas de resolución de problemas las propuestas en libros de texto, que ofrecen textos verbales que se resuelven con simples ejercicios de cálculo aritmético de dos o tres números, que más potencian la repetición mecánica de una regla, carente del reto y la creatividad que requiere toda acción de resolución de problemas (Castro, Rico y col., 1995; Gerofsky, 1996; Castro, Rico y col., 1998). Las ideas preconcebidas que tiene un escolar de las matemáticas son fruto de sus experiencias previas en el aprendizaje. Esas ideas están relacionadas con concepciones ingenuas sobre la resolución de problemas, y con su manera de concebir las matemáticas, por eso muchos escolares consideran las matemáticas como una disciplina rígida, con escaso margen de creatividad, no susceptible de cambios, gobernada por reglas que no tienen que ver son su propia experiencia, y donde la memorización y la rutina importan más que la comprensión (Castro y Ruiz, 2015: 93). Una definición de problema más reciente es esta: «una tarea para la cual el individuo o grupo que se enfrenta con ella quiere o necesita encontrar una solución, y no hay un procedimiento fácilmente accesible que garantice o determine completamente la solución, y el individuo o grupo debe realizar intentos para encontrarla» (Flores y Rico, 2015: 92)

Hay pruebas empíricas suficientes de la fuerza que ejerce este círculo vicioso en el aprendizaje, en cuanto actividades y tareas escolares monótonas y repetitivas centradas exclusivamente en la búsqueda mecánica de una solución, rutinas que a medio plazo vician y contaminan los procesos de enseñanza-aprendizaje reduciéndolos a procesos estereotipados de los que es difícil escapar. En parte los resultados obtenidos en esta investigación de réplica a treinta años de la primera aplicación constatan este círculo vicioso y esta inercia insoslayable de nuestros sistemas escolares. Como actores cautivos de este círculo los estudiantes preguntan al profesor: —«¿maestro, éste de qué es?», con la esperanza de que el profesor los saque del atolladero respondiendo: —«de sumar». La conducta de los escolares ante estas situaciones es la misma que la de los animales del zoológico que dan vueltas circulares al interior de su celda sin ninguna esperanza por ampliar el horizonte de su estrecha trayectoria carcelaria. Incluso si un día aparece la puerta abierta, la inercia de la conducta repetitiva es tan fuerte que no contempla la posibilidad de dar vueltas en sentido contrario o simplemente aprovechar la salida para escapar y explorar nuevas rutas en el exterior del recinto que los cautiva. El clásico problema de «la edad del capitán» propuesto por CNR en los años 80, refuerza esta metáfora con evidencias empíricas de estudios con distractores. Los escolares parten del supuesto e idea preconcebida creada por la propia escuela de que solamente hay un tipo de problemas, que todos tienen una solución única, que la clave de dicha solución reside en acertar con alguna de las cuatro operaciones y sus posibles combinaciones. Buscan la solución fuera del propio problema: en la libreta del compañero, preguntando reiterada y compulsivamente uno tras otro la misma pregunta al profesor o empleando el lenguaje gestual y no verbal para obtener la certeza de que van por buen camino sin necesidad de leer el texto en profundidad; o simplemente al vislumbrar que algún indicio o palabra clave les permite aventurar una solución con probabilidad de éxito azaroso. Tan mecánico es el proceso que no se lee la pregunta para dar sentido a la posible respuesta ni se articula ningún mecanismo de control sobre la calidad del resultado (Castro y Ruiz, 2015).

La búsqueda de indicios verbales en los textos de los problemas arroja evidencias acerca de esta inercia generalizada a resolver problemas de manera estereotipada (Puig y Cerdá, 1998). A ello se añade otra idea motriz ampliamente extendida que radica en la creencia de que los problemas aritméticos escolares y las soluciones que en ellos se dan no tienen ningún sentido real en la vida (Gerofsky, 1996). Romper estos mitos, creencias y prácticas ancestrales ampliamente arraigados en la enseñanza es uno de los retos principales de la investigación contemporánea sobre resolución de problemas y aprendizaje matemático en la formación de nuevas generaciones de profesores. Por eso algunos autores nos ofrecen claves prácticas sobre resolución de problemas que permiten desterrar estereotipos y favorecer una enseñanza-aprendizaje de las matemáticas más creativa, estimulante y divergente (Castro y Ruiz, 2015, 89-106):

- Los estudiantes pueden empezar a planificar y resolver problemas desde los primeros niveles educativos. No hay que esperar a que aprendan algoritmos de cálculo para empezar a plantear y resolver problemas.
- Los estudiantes de primaria poseen un bagaje previo sobre resolución de problemas que debe tenerse en cuenta para construir nuevo conocimiento.
- Los problemas que se propongan deben estimular a los estudiantes y ser adecuados a su nivel.
- La interacción y la discusión entre los estudiantes, las intuiciones que movilizan y las propuestas que hacen para la solución de problemas contribuyen a la construcción de significados compartidos y a mejorar sus aprendizajes.
- Asignar a grupos de estudiantes una tarea retadora o un problema interesante y observar y tomar nota de las propuestas para su solución que surgen en los grupos pequeños, es una estrategia de instrucción útil.
- Los estudiantes pueden trabajar en pequeños grupos, y después compartir sus interpretaciones y soluciones con todo el grupo. Posteriormente expondrán las estrategias al gran grupo de estudiantes, y el maestro las jerarquizará desde las básicas a las más sofisticadas.
- La resolución de problemas es una buena estrategia para el aprendizaje matemático escolar, pues contribuye a que los estudiantes aprendan nuevos conceptos y habilidades.
- La enseñanza de estrategias para la resolución de problemas debe ser hilo conductor de la planificación para las matemáticas escolares. Conviene arraigar la idea de que no hay una estrategia óptima que resuelva todos los problemas.

— La resolución de problemas es un buen método para la enseñanza de las matemáticas escolares. Desarrollar habilidades y destrezas y resolver problemas no son actividades consecutivas, ya que ambas se pueden trabajar simultáneamente.
— Los maestros deben proporcionar a los estudiantes oportunidades para interactuar sobre situaciones problemáticas, así como a alentarlos a redactar enunciados de problemas y métodos propios para su solución. Deben promover la comparación de sus propuestas y el intercambio de ideas con sus compañeros.
— Se deben resolver distintos problemas con una misma estrategia y reflexionar con los estudiantes sobre por qué unas estrategias son más adecuadas para resolver cierto tipo de problemas.
— También se debe practicar la resolución de un mismo problema con distintas estrategias y comparar las ventajas relativas de cada una de ellas.
— Es necesario proponer a los estudiantes problemas que no tengan solución inmediata, donde ensayen distintas aproximaciones para lograr la solución.
— Las dificultades que tienen los estudiantes en resolución de problemas se pueden agrupar en función de factores de conocimiento, creencias y afectos, de control y de factores socio-culturales.
— La evaluación de la resolución de problemas debe destacar el progreso y dominio de procedimientos y estrategias por encima del logro de un resultado exitoso de cálculo, exclusivamente.

Objetivos del estudio sobre verbos y operaciones

La intención de romper este círculo vicioso y cautivo de los problemas aritméticos escolares y aportar ideas sólidas a las metodologías de trabajo en el aula la iniciamos en 1984 con el estudio *Didáctica Activa para la Resolución de Problemas en el Tercer Ciclo de la EGB* (Rico y col., 1988). El trabajo con verbos se planteó como un diagnóstico pionero de estas prácticas endémicas y a la vez trataba de romper moldes buscando escenarios metodológicos alternativos que permitieran formar a los profesores en resolución de problemas para que ayudasen a sus estudiantes a escapar de los anclajes y creencias sobre la resolución de problemas como camino circular, buscando alternativas que ayudasen a superar esta visión limitada bajo un nuevo enfoque que invita a inventar preguntas, proponer problemas abiertos en los que hay que tomar decisiones que cambian la solución final o simplemente trabajar con problemas que tienen más de una solución. Bajo este supuesto se invitaba a los estudiantes a que inventaran y construyeran problemas de suma con verbos que habitualmente eran de resta como quitar, robar y perder o problemas de resta con verbos que habitualmente eran de suma como ganar y juntar. O un problema de suma y resta un mismo verbo.

Un buen número de acciones cotidianas da sentido mental y manipulativo a los problemas aritméticos que nos plantean los libros y profesores de matemáticas. Acciones aditivas como: agregar, acumular, ampliar, añadir, aumentar, dar, disminuir ingresar, quitar, recibir, regalar, retirar o reunir representan un reflejo directo alineado con problemas de un determinado tipo que se resuelven con una suma. Acciones de sustracción como: coger, quitar, perder, sacar, cortar, retirar, representan un reflejo directo y alineado con problemas que se resuelven con una resta. Dichas acciones responden en unos casos a transformaciones físicas directas o inversas cuando un sujeto en primera (yo) o tercera persona (Juan, Margarita, mi amigo) manipula y desarrolla una actividad real (doy, gano, compro, pierdo); y otras mental relativa a propiedades de los objetos generando situaciones finales de cambio o combinación de cualidades que derivan en una situación de aumento (suma) o disminución (resta). Algunas acciones multiplicativas están ligadas a verbos que conllevan una cuantificación implícita como duplicar, triplicar, y otros expresan cualidades incuestionables de reparto, fraccionamiento o división. Con sus variantes, son también variables influyentes: el sujeto de la acción (primera o tercera persona), el tiempo verbal (tengo-tendré; tenía-tengo; tengo-doy; pierde-tiene; gana-tendrá, falta-tener,…). En algunas situaciones un mismo verbo puede implicar varias acciones. Robar, por ejemplo, tiene un sentido de aumento para el sujeto que realiza la acción, o de disminución para el que la sufre. Hay verbos que indican claramente una de las cuatro operaciones (unir, quitar, duplicar o repartir). La distinción entre problemas con verbos directos, coincidentes o consistentes, y problemas con verbos indirectos, no coincidentes, inconsistentes, o contrariados permite articular procesos de formación integrados, complejos y más completos que ayudan a los profesores a superar los obstáculos, rutinas y mimetismos; estimulando a los alumnos a entender los problemas desde una perspectiva no superficial ni un mero recurso estereotipado y al aprendizaje de las operaciones más allá de su estrecha relación semántica con una acción o grupo de acciones. Si bien es ingenuo asociar exclusivamente una operación a una acción verbal aditiva o multiplicativa, la tendencia mayoritaria muestra la naturalidad con que alumnos y estudiantes para profesores los asocian en la práctica y la dificultad de formular, de forma espontánea, problemas con acciones inversas a la operación de mayor afinidad semántica.

Esto nos llevó en su momento a elaborar una clasificación de verbos (Rico y col., 1986) y a plantear cuestiones como: ¿depende la resolución de un problema del verbo que expresa la acción en el enunciado?, ¿evoca cada verbo concreto una operación específica a nuestros escolares cuando lo encuentran en el enunciado de un problema?, ¿cuál es el verbo más representativo para cada una de las cuatro operaciones?, ¿qué otros verbos alcanzan un porcentaje de elección elevado?, ¿qué verbos no son elegidos, estando a priori en el campo semántico de influencia de esa operación y por el contrario cuáles sí, sin ser a priori representativos de ella?, ¿qué verbos no presentan problemas al plantear enunciados y cuáles entrañan dificultades al forzar un contexto?, ¿con qué operación aparecen más fracasos y en qué circunstancias aparecen situaciones más artificiales vinculadas a contextos irreales?, ¿qué verbos nuevos incorporan en el contexto del problema o en la pregunta?, ¿corresponden los verbos elegidos con la clasificación realizada?, ¿qué verbos se eligen con mayor frecuencia para más de una operación?, ¿cómo se distribuyen las respuestas inventadas en las taxonomías actuales de problemas aritméticos?

Presentamos aquí una selección de algunos de los verbos inventados por la muestra y constatamos que aparecen verbos distintos a los clásicos de acción asociados a cada operación aritmética que siguen manteniéndose fieles a su condición numérica de verbos estigmatizados de suma, resta, producto y división. Pero hoy encontramos otros verbos inéditos a los de aquella etapa, fruto de la transformación que ha sufrido nuestra sociedad y de la evolución lingüística que ello conlleva. Especialmente encontramos un sinfín de «acciones» (virtuales en su mayoría) ligadas a una actividad electrónica, que no es mismamente una acción en su sentido clásico pero que incorpora nuevos escenarios de exploración del verbo-operación en contextos ligados a pantallas, aplicaciones móviles y nuevas tecnologías. Nos preguntamos si los nuevos problemas y los nuevos verbos que han ido aceptándose por la RAE en estas tres décadas, incluidos los verbos de acción virtual, influyen de alguna manera en todo esto y si realmente han mejorado las metodologías de enseñanza para convertir el problema en un reto motivador e intrigante que estimula el pensamiento del alumno del siglo XXI.

Instrumento y muestra

A partir de una selección de 24 verbos se planteó a los alumnos que los clasificaran, eligiendo el verbo más adecuado para cada operación. Seguidamente se les pedía que nombraran cinco verbos para cada operación, diferentes a los dados. A continuación se les solicitaba que eligieran un verbo para cada operación e inventaran un problema. Finalmente se les invitaba a que eligieran verbos con los se pudiesen plantear problemas de sumar y restar a la vez y que plantearan un problema. Se ha trabajado con muestras de dos grupos de Educación Primaria con clases de 4.º y 6.º

Resultados

Pregunta 1. Se solicita clasificar un listado de 24 verbos en alguna de las cuatro operaciones resultando un agrupamiento natural de 4 grupos de verbos cuyo campo semántico se vincula de forma mayoritaria a estructuras aditivas (7 verbos para suma y 7 para resta) o multiplicativas (5 para multiplicación y 5 para división). La Figura 1 muestra cómo algunos verbos son «exclusivos» de una determinada estructura aritmética (barras monocolor de la izquierda de cada grupo) pues aparecen vinculados únicamente a una operación (añadir/juntar; perder/sacar/descontar; duplicar/triplicar y repartir/distribuir); y en otros casos compartiendo un porcentaje minoritario de su campo semántico con el resto de operaciones (barras multicolor de la derecha de cada grupo).

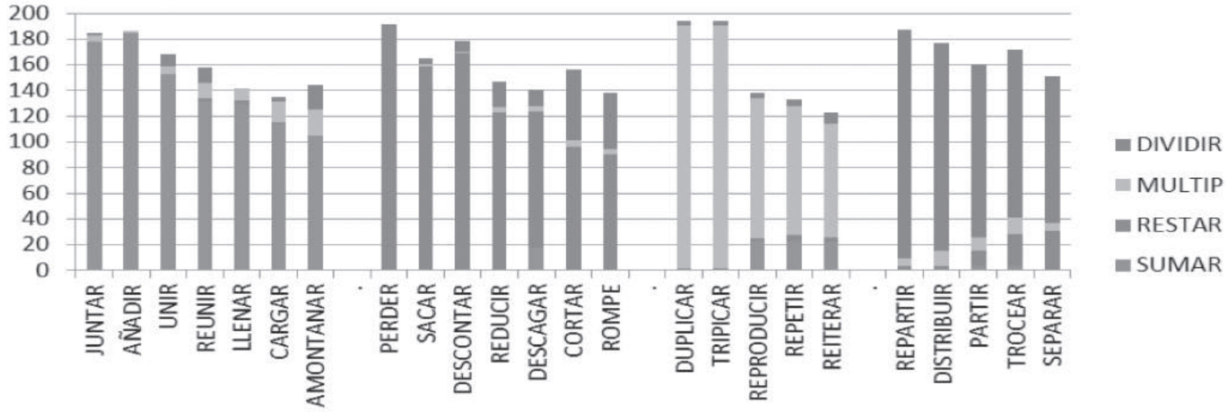


Figura 1. *Clasificación de verbos según tipo de operación.*

Pregunta 2. Se solicita que aporten verbos diferentes a los anteriores para cada una de las operaciones. El número de verbos aditivos (22) es considerablemente más amplio en los dos cursos que el de los multiplicativos (12). Los verbos aportados son muy similares a los del estudio anterior, sin que aparezcan verbos de nueva generación ligados a acciones cotidianas distintas a las clásicas que contemplan los libros de matemáticas. Una representación en nube de los campos semánticos muestra la dominancia visual de unos verbos sobre otros según el tipo de operación (Figura 2)

Pregunta 2. Verbos de SUMAR

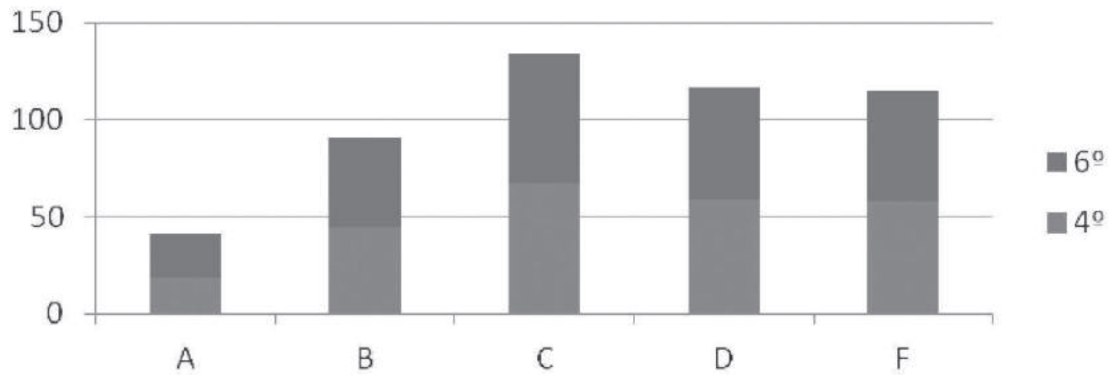
Pregunta 2. Verbos de RESTAR

Pregunta 2. Verbos de MULTIPLICAR

Pregunta 2. Verbos de DIVIDIR

Figura 2. *Nubes de campos semánticos de los verbos propuestos por los escolares por operaciones.*

Pregunta 3-6. Se solicita elegir un verbo e inventar un problema de suma, resta, multiplicación o división. La estructura gramatical de los enunciados siguen siendo muy uniformes, como sucedía en el estudio de 83-84. La gama de estructuras es muy reducida, predominando los de suma y resta en situaciones de cambio. Se constata que el porcentaje de errores en suma y resta ha disminuido ligeramente con relación a los resultados de 83-84. Al plantear enunciados de multiplicación y división se produce un incremento de problemas mal planteados muy similar a la que también se observaba en el estudio anterior. El mayor número de errores al formular problemas aparece en los de resta de cambio con disminución, con la incógnita en la cantidad final (C), seguidos de los de producto y división con la incógnita en la medida/tasa. No se aprecian diferencias significativas en relación al curso. El 90% de problemas enunciados mal formulados se agrupan en una sola categoría para cada una de las operaciones de resta, multiplicación y división (C, D y F). Para la suma, 132 enunciados de los 144 se agrupan en dos categorías A y B.



A-SUMA	Combinación, con la incógnita en el todo
B-SUMA	Cambio de aumento, con la incógnita en la cantidad final
C-RESTA	Cambio de disminución, con la incógnita en la cantidad final
D-PRODUCTO	Incógnita en medida de la segunda magnitud
F-DIVISIÓN	Incógnita en tasa

Figura 3. *Enunciados mal de «+,-,x,/».*

Pregunta 7. Dado un listado de verbos se pide elegir aquellos con los que se podría formular un problema de suma y resta a la vez.

Los verbos dar y coger en las dos investigaciones son elegidos por el mayor número de alumnado.

El porcentaje en la elección de los verbos robar, quitar, tomar y perder ha sido superior en las pruebas realizadas para este estudio de réplica.

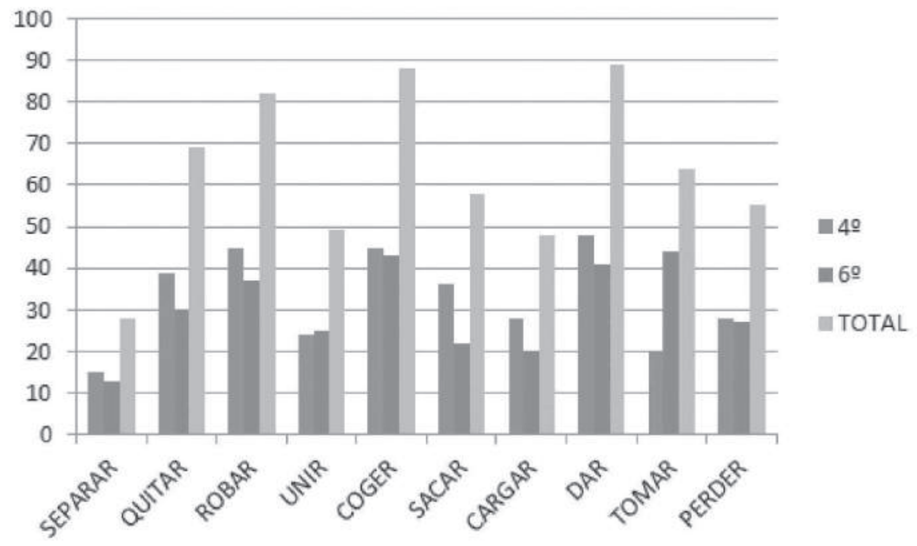


Figura 4. *Verbos para «+ y-«.*

Pregunta 8. Elige un mismo verbo e inventa un problema de suma y otro de resta.

El número total de problemas inventados ha sido de 288, 36 de los cuales estaban mal formulados. Entre los verbos más elegidos destacamos: dar, robar, coger, quitar, unir, cargar, tomar, sacar, separar y juntar en un intervalo [4-68] elecciones. La Figura 5 muestra la distribución de problemas bien y mal formulados según el verbo elegido. Unir, separar y juntar son los verbos que acumulan mayor % errores [entre 40 y 75]. La Figura 6 muestra la distribución de errores por curso: sacar, separar y unir acumulan % entre [50 y 85]. La Figura 7 muestra los problemas mal planteados por curso y operación, destacando como verbos que más errores suscitan al inventar problemas: coger-resta, sacar-suma/resta, separar suma/resta u unir-suma/resta. Resultados bastante coincidentes con el estudio previo.

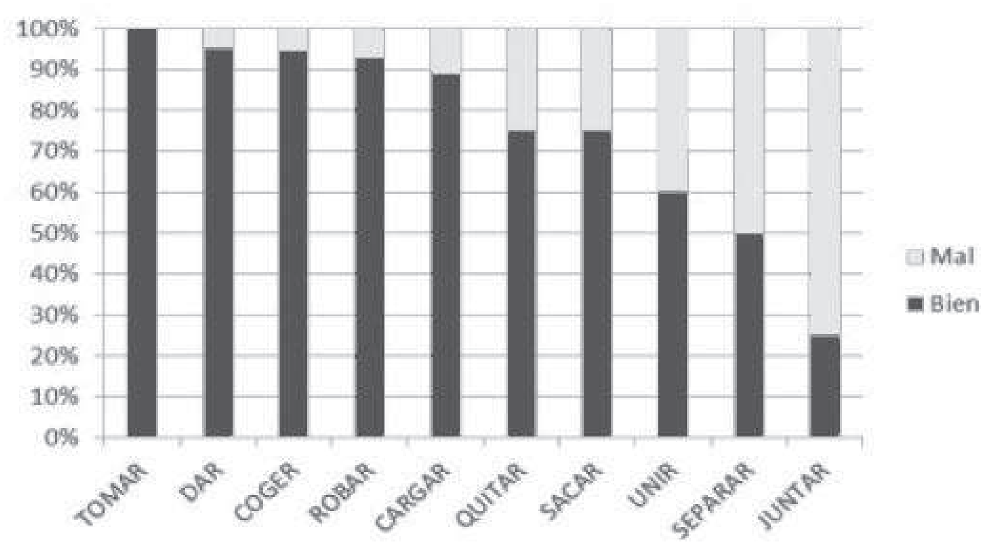


Figura 5. *% Problemas bien y mal formulados*

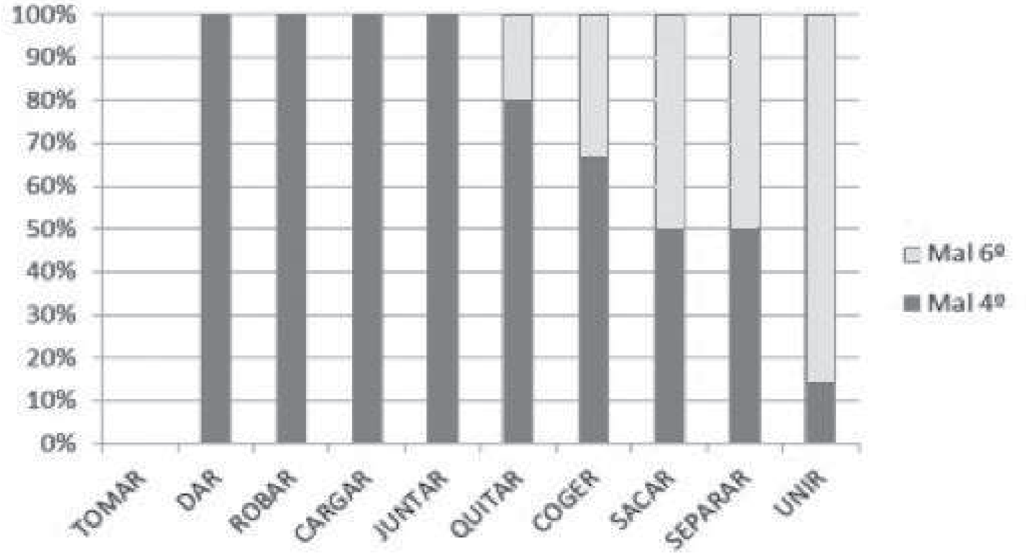


Figura 6. *% Problemas mal formulados por curso.*

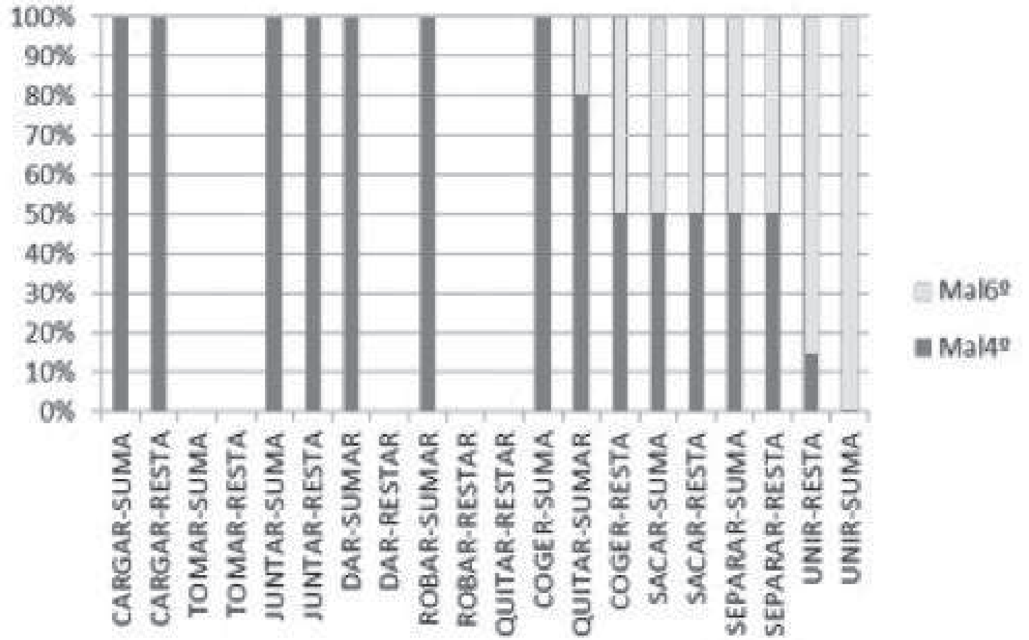


Figura7. *% Problemas mal por curso y operación.*

Conclusiones

No todas las palabras de un problema juegan el mismo rol a la hora de resolverlo. Los verbos inducen y condicionan de forma determinante la elección de la operación a emplear, máxime cuando el proceso de invención y resolución de problemas se aborda como una tarea orientada a la búsqueda de una solución exenta de control de calidad posterior en el marco global del contexto general del problema. La invención de problemas ligada a verbos saca a la luz la prevalencia de dominios semánticos predominantes que asocian de forma espontánea, natural y generalizada determinados «verbos clásicos» a una de las cuatro operaciones con cierta exclusividad. Cuando la solución pasa por emplear otra operación diferente que no sea la de su campo semántico directo aparecen errores que ilustran el grado de superficialidad con que se abordan este tipo de tareas y las secuelas que provoca. También el incremento del número de errores en la formulación de problemas es inversa al campo semántico que representa cada verbo, mostrando la necesidad de incrementar actuaciones docentes significativas que permitan abordar los problemas sistemáticamente en direcciones cruzadas. El estudio muestra la pesada inercia que ejercen los aprendizajes escolares estereotipados y su impacto en la formulación de problemas aritméticos tipo, con estructuras gramaticales estigmatizadas por una baja creatividad, sujetas a los clásicos problemas de libro, así como al limitado uso de elementos y contextos de referencia a magnitudes discretas del tipo canicas, cromos, caramelos, bombones, piruletas, y objetos escolares (lápices, libros, cuadernos o libretas); junto a los elementos fraccionables clásicos como tartas, dinero, espacio y tiempo. Sorprende la escasa referencia que hacen hoy los escolares a otros contextos más novedosos y actuales mediatizados por pantallas y nuevas tecnologías, pues ni siquiera mencionan en sus problemas acciones virtuales, como si el registro de los problemas tuviese un formato atemporal. Tal vez sea esta réplica una nueva coartada para retomar, junto a nuestro maestro y amigo Luis, aquel viejo tópico de estudio y seguir reencontrándonos algún martes con el pretexto del verbo-operación, las funciones y las gráficas, la invención de problemas y la búsqueda de sus soluciones en la vida real.

Referencias

Castro, A., Gorgorió, N. y Prat, M. (2014). *Indicios verbales en los PAEV aditivos planteados por estudiantes para maestro.* En González, M. et al. (Eds.), Investigación en educación matemática (pp. 217–226). Salamanca: SEIEM.

Castro, E., Rico, L. y Gil F. (1992). Enfoques de investigación en problemas verbales aritméticos aditivos, *Enseñanza de las Ciencias*, *10*(3), 243–253.

Castro, E., Castro E., Rico, L. y col. (1998). Problemas aritméticos compuestos de dos relaciones. En L. Rico y M. Sierra (Eds.). Primer Simposio Nacional de la SEIEM. Granada: SEIEM, 69–82.

Castro, E., Rico, L. y col. (1988). Resolución de problemas en el tercer ciclo de E.G.B. Granada: Dep. Didáctica Matemática-SAEM-Thales.

— (1994). Two-step addition arithmetic problems. En N. Malara & L. Rico (Eds.), *First Italian-Spanish research symposium in Mathematics Education: Problems of the teaching and learning of mathematics* (pp. 139–146). Módena, Italy: Dipart. Di Matematica.

Castro, E. y Ruiz, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Coords.) *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 89-106). Madrid: Pirámide.

Carpenter, T. P. y Moser, J. (1982). The development of addition and sustraction problem-solving skills. En T. Carpenter, J. Moser, y T. Romberg, (Eds.), *Addition and sustraction: A cognitive perspective* (pp. 9-24). New Jersey: Law Erlbaum Ass.

Gerofsky, S. (1996). A linguistic and narrative view of word problems in mathematics education, *For the Learning of Mathematics,* 16(2), 36-45.

González, E., Gutiérrez, J., Rico, L. y Tortosa, A. (1986). Relación verbo-operación en los problemas de aritmética del tercer ciclo de E.G.B. *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*. SAPM-Thales (pp. 258-267). Almería. Artes Gráficas Gutenberg.

Nesher, P. (1982). The development of semantic categories for addition and subtraction. *Educational Studies in Mathematics*, *13,* 373-394.

Puig, L. y Cerdá, E. (1998). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. y col. (1984). Objetivos terminales para el área de matemáticas en el ciclo superior de la EGB: una alternativa. Grupo EGB de la APMA, *Épsilon 2*, 76–89.

— (1985). Aritmética elemental para la resolución de problemas en el tercer ciclo de la E.G.B (I). Grupo EGB de la APMA, *Épsilon 5,* 11-31.

— (1986a). Aritmética elemental para la resolución de problemas en el tercer ciclo de la E.G.B. (II). Grupo EGB de la APMA, *Épsilon 6/7*, 55-72.

Rico, L. (1986b). Las situaciones reales de los problemas aritméticos. *Actas de las II Jornadas Andaluzas de Profesores de Matemáticas*. Sociedad Thales (pp. 249-257). Almería: Gráf. Gutenberg.

Rico, L. y col. (1987a). La resolución de problemas como fundamento del curriculum de matemáticas en el tercer ciclo de la EGB aproximación mediante estudio experimental. *Enseñanza de las Ciencias, 5,* 367-368.

— (1987b). Estudio de casos en la resolución de problemas mediante una didáctica activa. *Actas III Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas,* Soc. Andaluza de Prof. de Matemáticas Thales (pp. 232-241). Huelva: Gráficas Puerto.

— (1987c). Modificación en el pensamiento y toma de decisiones del profesor al aplicar un plan de trabajo sobre resolución de problemas. *Enseñanza de las Ciencias, 5,* 385–386.

— (1987d). Estudio sobre resolución de problemas aritméticos. *Actas III Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas,* (pp. 198-207) SAPM-Thales. Huelva: Gráf. Puerto.

— (1987e). El seminario de profesores como medio para modificar el pensamiento y la actuación en el aula: diseño para una metodología activa en la resolución de problemas. *Actas III Jornadas Andaluzas sobre Did. Matemáticas,* (pp. 217-231) SAPM-Thales. Huelva: Gráficas Puerto.

— (1988). *Didáctica activa para la resolución de problemas. Sexto nivel de EGB*. Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática.

Rico, L. y otros (1993a). Dificultad debida al orden de operaciones en problemas aditivos de dos etapas con estructura semántica duplicada. *Actas VI Jornadas Andaluzas sobre Didáctica de las Matemáticas,* SAPM-Thales. Sevilla.

Rico, L. y col. (1993b). Problemas aditivos de dos etapas con igual operación y estructura semántica duplicada. Estudio preliminar en 5.º de Primaria. *VI Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas*. Badajoz: FNPM.

Rico, L. (1995). El seminario de profesores como estrategia de investigación en el aula de matemáticas. *Actas Seminario Investigación en el Aula* (pp.19–32). Granada: SAPM-Thales-Dpto. Did. Matemática.

Rico, L. y col. (1995a). Estructura semántica de los cuantificadores verbales de una relación entre variables gráficamente representadas. *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales*. Córdoba: SAPM-Thales.

— (1995b). Two step addition problems with duplicatic semantic structure. En J. P. da Ponte & J. F. Matos (Eds.) *Proceedings of the 8th Int. Conf. PME*, vol. 4 (pp. 121-128). Lisbon: Univ. Lisbon.

— (1996). Evaluación de la resolución de problemas aritméticos en Primaria, *Revista de investigación educativa*, *14*(2), 121-139.

TORTOSA, A. y RICO, L. (1995). Invención de problemas aritméticos. *VII Jornadas Andaluzas de Educación Matemática Thales* (pp. 325-334). Córdoba: SAPM-Thales.

VERGNAUD, G. (1982). A classification of cognitive task and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. Carpenter, J. M. Moser y T. A. Romberg (Eds.), *Addition and subtraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). New Jersey: Lawrence Erlbaum.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA INDEXADA EN LA BASE CONFERENCE PROCEEDINGS CITATION INDEX SOCIAL SCIENCE & HUMANITIES

Research in Mathematics Education Indexed in Conference Proceeding Citation Index-Social Science & Humanities database

Mónica Vallejo[a], Manuel Torralbo[b] y Antonio Fernández-Cano[c]
[a]Universidad de Murcia, España
[b]Universidad de Córdoba, España
[c]Universidad de Granada, España

Resumen

En este estudio se presenta un análisis cienciométrico basado en palabras clave sobre el tópico científico de la producción internacional en educación matemática contenidas en actas de congresos (conference proceedings) e indexadas en la base Conference Proceedings Citation Index Social Science & Humanities perteneciente a la Web of Science del conocido Institute for Scientific Information (ISI) de Filadelfia (USA). Se realiza un análisis detallado sobre los aportes congresuales en el campo de la investigación en educación matemática contenidos en dicha base desde el año 1986 hasta la actualidad. Los hallazgos son presentados siguiendo la siguiente estructura: categorías temáticas de la Web of Science, conferencias/congresos más productivos, producción diacrónica, producción por países e instituciones y datos de citación afines.

Palabras clave: educación matemática, comunicaciones a congresos, Conference Proceedings Citation Index base de datos, estudio cienciométrico.

Abstract

In this study, we present a scientometric analysis based on keywords about the scientific topic of international production in mathematical education contained in conference proceedings indexed in the Conference Proceedings Citation Index Social Science Humanities database belonging to the Web of Science from the well-known Institute for Scientific Information (ISI) from Philadelphia (USA). It is a detailed analysis on the conference papers in the field of research of mathematics education contained in this database since 1986 to the present. The findings are presented according to the following structure: subject categories of Web of Science, more productive conferences, diachronic production, production by countries and institutions and citation data related.

Keywords: *mathematic education, conference papers, Conference Proceedings Citation Index database, scientometrical study*

Vallejo, M., Torralbo, M. y Fernández-Cano, A. (2016). Investigación en educación matemática indexada en la base Conference Proceedings CitationIndex-Social Science & Humanities. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 119-127). Granada: Comares.

Introducción

En el ámbito anglosajón se habla de *fully fredged research* para designar a aquella investigación relevante por visible, con riqueza conceptual, rigor metodológico y de impacto demostrado por su citación posterior. Tal investigación contribuye a la génesis y desarrollo de una disciplina científica pues acapara la atención de los miembros de una comunidad o «colegio invisible». En el ámbito de la información científica suelen ser documentos con formatos de artículo o estudios de revisión; mientras que otros documentos como revisión de libro, comunicación congresual, nota, carta, corrección o bibliografía, quedan omitidos y por ende son escasamente considerados en investigaciones sobre información científica.

Las escasas investigaciones cienciométricas disponibles sobre actas de congresos plantean un enfoque innovador y poco común, y comienzan a ser una incipiente línea de investigación. Algunos de los estudios y trabajos realizados entienden que esta producción puede interpretarse como indicadores tempranos de desarrollo científico, que se plasmará en futuros artículos (Lisee, Lariviere y Archambault, 2008). Mientras que otros, consideran que las actas de congresos son una fuente menor de conocimiento científico, en la medida que su importancia no se ha medido de manera sistemática; e incluso, las engloban en lo que se ha denominado —un tanto despectivamente— como «literatura gris» (García-Santiago, 1998).

Las bases de Thomson Reuters (antiguas bases del ISI, ahora también conocidas con el dúo en acrónimo ISI-WOS) se han consolidado en la red como las fuentes básicas de información y evaluación científicas que denotan el estado y el vigor investigador de un sistema nacional, de sus agentes e instituciones (ver Fernández-Cano, 1999; 2011; para el subsistema de investigación educativa en España), de una disciplina (como la educación multicultural en Vallejo, Ocaña, Bueno, Torralbo y Fernández-Cano, 2005) o, incluso, de un determinado método de investigación (por ejemplo, el estudio de caso, en Delgado y Fernández-Cano, 2002). Con este afán de ampliación de fuentes de información, en 1986 ISI-WOS instituye otra nueva base: Conference Proceedings Citation Index Social Science & Humanities (en adelante, CPCI-SS&H); esta base será la base de referencia de este estudio que indexa las actas *(proceedings)* de congresos *(conferences)* a partir de las comunicaciones *(conference papers)* a ellos remitidos desde el año 1986 hasta la actualidad.

Procedimiento de Búsqueda Documental

La base CPCI-SS&H permite realizar búsquedas diversas utilizando campos relativos a: tópico, título, autor, nombre de la publicación, año, dirección, idioma, DOI, tipo de documento y algunos otros más. Para localizar la investigación en educación matemática indexada en esta base, se utilizaron como secuencia de búsqueda los tópicos: (*mathem* or arithm* or geome*) and (educat* or teach* or learn**). Los resultados de búsqueda identificaron 5612 comunicaciones o ponencias, de las cuales 441 consiguen ser editadas —después— como artículos. Este hecho se debe a que ciertas revistas aún mantienen esa «improcedente costumbre» de convertirse en libros de actas.

Adicionalmente, se realizó otra búsqueda incorporando el tópico de Estadística educativa (*Statist* and educat**); lo que supuso un resultado de 9524 documentos. Dicho resultado pone de manifiesto que la educación estadística merece una consideración especial y diferenciada dentro del campo de la educación matemática, y que aquí no se considerará.

Análisis de Resultados

El análisis de resultados queda estructurado en seis grandes apartados: categorías de la Web of Science, conferencias/congresos más productivas, producción diacrónica, por países e instituciones, idiomas y datos de citación.

Categorías de Web of Science

Se ha de advertir que un mismo documento puede pertenecer a dos o más categorías temáticas de ISI-WOS, visibles en los Journal Citation Reports (JCR).

Tabla 1. *Producción científica en educación matemática según categorías WOS indexada en la base CPCI-SS&H*

R.º	Categoría temática de los JCR	# Documentos	%
1.º	Education & Educational Research	4892	87.38
2.º	Education Scientific Disciplines	1727	30.85
3.º	Mathematics	971	17.34
4.º	Computer Science Interdisciplinary Applications	467	8.34
5.º	Psychology Educational	349	6.23
6.º	Computer Science Information Systems	330	5.89
7.º	Social Sciences Interdisciplinary	279	4.98
8.º	Management	196	3.50
9.º	Information Science Library Science	153	2.73
10.º	Economics	141	2.51

Estos primeros resultados muestran como la categoría general vinculada al campo educativo (*Education & Educational Research*) es donde se recoge la mayor producción científica de aportes congresuales al campo de la educación matemática; estableciéndose una clara distinción entre los campos de Educación y Matemáticas (aunque relegándose este último a un tercer puesto en productividad).

Por otro lado, es preciso poner de manifiesto la afinidad central de estas 10 categorías al converger, todas ellas, en la educación matemática y, tangencialmente con otras 40 categorías de la WOS (que aquí se omiten por brevedad). Esta afinidad es predominante con el mundo de los ordenadores, por lo que pareciera que la investigación sobre educación matemática ha encontrado en las nuevas tecnologías su mejor aliado. De hecho, a las categorías aquí señaladas habría que añadir la categoría *Computer Science Theory & Methods* que ocupa el puesto 11.º con 124 aportaciones (2.21%) o la categoría *Computer Science Artificial Intelligence* que ocupa el puesto 13.º con 92 aportaciones (1.64%).

Tabla 2. *Conferencias en educación matemática con más aportes indexados en la base CPCI-SS&H*

R.º	Conferencia/Congreso	Año	N	%
1.º	33rd Conference of the International Group for The Psychology of Mathematics Education	2009	256	4.57
2.º	30th Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education	2006	218	3.89
3.º	35th Annual Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education	2011	192	3.43
4.º	34th Conference of The International Group for the Psychology of Mathematics Education	2010	156	2.78
5.º	36th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education	2012	123	2.19
6.º	Annual Conference of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education	2008	101	1.8
7.º	2nd World Conference on Educational Sciences	2010	89	1.59
8.º	Annual Meeting of the American Educational Research Association	2009	88	1.57
9.º	4th World Conference on Educational Sciences	2012	85	1.51
10.º	International Symposium on Elementary Mathematics Teaching	2009	77	1.37

Como resultado anecdótico destacar la afinidad con la categoría *Hospitality Leisure Sport Tourism* que ocupa el 14.º con 87 documentos, suponiendo un 1,55% de la producción científica de este campo.

En general, los resultados muestran como la educación matemática (según sus aportes congresuales) es un campo de estudio e investigación con núcleo en educación, investigación educativa y una serie de capas periféricas concéntricas relativas a múltiples disciplinas científicas algunas tan dispares como la medicina, la ingeniería o la computación.

Top 10 Congresos más Productivos. Con una pretensión orientativa se muestran aquellas conferencias/congresos en educación matemática que han incorporado un mayor número de aportes en sus correspondientes actas (*proceedings*) y que, posteriormente, fueron indexadas en la base CPCI-SS&H. Concretamente, a lo largo del periodo analizado, han sido indexadas más de 1000 actas de conferencias/congresos; en concreto, 1121 actas .

Del total de esta producción, las diez conferencias más productivas serían las dadas en la Tabla 2. Cabe destacar *las Conferences of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, también conocidas como congresos PME, como los congresos con una mayor publicación de aportes en el campo de la educación matemática. El PME es un grupo de investigadores, establecido en 1976 en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME3) en Karlsruhe (Alemania), cuyos principales objetivos serían:

— Promover contactos e intercambio de información científica en el campo de la educación matemática internacionales.
— Promover y estimular la investigación interdisciplinaria en el área antes mencionada.
— Promover una comprensión más profunda y correcta de la psicología y otros aspectos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y de las consecuencias de los mismos.

Producción diacrónica

Realizando un análisis longitudinal desde finales del siglo XX (en concreto, desde 1986 hasta la actualidad) se observa que la realización de encuentros de carácter científico y, por tanto, la producción derivada de ellos, ha ido incrementándose paulatinamente hasta 2010.

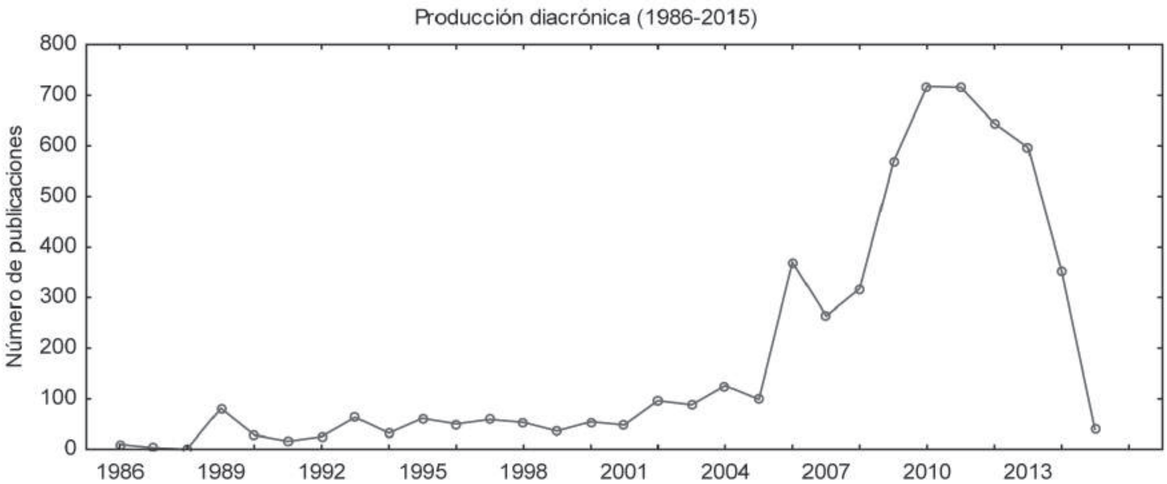


Figura 1. *Producción diacrónica de aportes congresuales sobre educación matemática indexados en la base CPCI-SS&H.*

El mayor aumento de esta producción se desarrolla en el año 2010. A partir de ese año, esta producción se reduce drásticamente.

Por otro lado, destacar que hasta el año 2013 (Año Internacional de las Matemáticas) la producción científica de actas de congresos oscila por encima de 600 publicaciones por año. A partir de esta conmemoración, la producción se reduce paulatinamente. Tal abrupta caída es preocupante y debiera ser indagada en profundidad; tal vez sea debida a falta de actualización de la base, algo que no ocurre con las bases principales de ISI-WOS (Science Citation Index y Social Sciences Citation Index).

Productividad institucional: Países

Si analizamos esta producción atendiendo a países, según las respectivas instituciones académicas de los diversos autores, se denota una amplia dispersión geográfica. A los 20 países representados en la figura 2, habría que sumar otros 75 países más; aparte de 366 aportes que aparecen indexados sin identificación nacional.

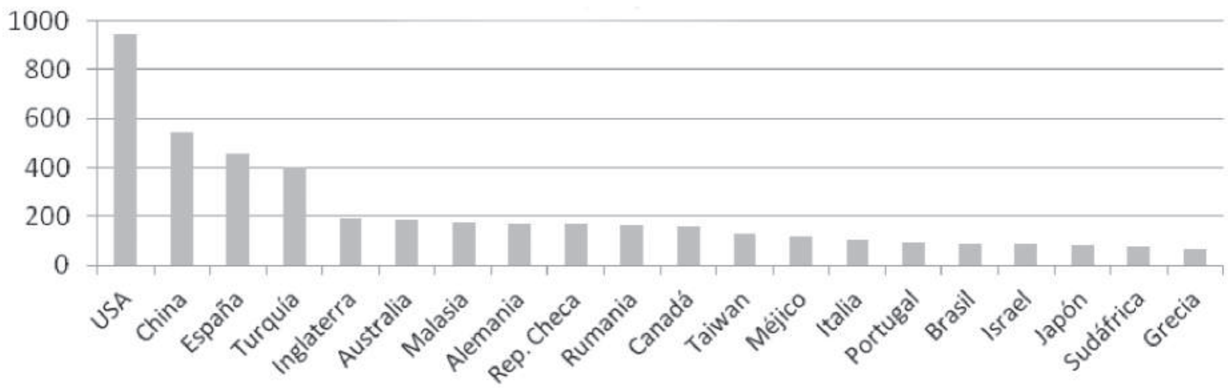


Figura 2. *Productividad según países de aportes congresuales en educación matemática indexados en la base CPCI-SS&H.*

Como se observa, USA es el país con mayor producción sobre aportes congresuales en educación matemática. Este resultado debe ser contextualizado por la base de referencia utilizada. Otros países como China, España o Turquía tienen una notable producción, que sería ampliable si consideráramos la producción en la lengua oficial del país que no suele estar indexada en la base CPCI-SS&H.

Productividad institucional: Organizaciones/universidades

La producción científica analizada se desarrolla en 1137 centros/universidades diferentes. Al desglosar la información de las 20 instituciones más productivas, se obtienen los datos que aparecen reflejados en la siguiente Tabla 3.

Tabla 3. *Producción por universidades de aportes congresuales en educación matemática indexados en la base CPCI-SS&H*

R.º	Organización	País	N	%
1.º	Universidad de Granada	España	66	1.17
2.º	Universidad Charles Praga	R. Checa	65	1.15
3.º	Universidad Kebangsaan Malaysia	Malasia	50	0.89
4.º	Universidad de Alicante	España	36	0.64
5.º	Universidad de Marmara	Turquía	35	0.62
6.º	Universidad de Michigan	USA	35	0.62
7.º	Universidad Putra Malaysia	Malasia	33	0.58

R.º	Organización	País	N	%
8.º	Universidad de Wisconsin	USA	30	0.53
9.º	Universidad KaradenizTech	Turquía	28	0.49
10.º	Universidad IslamicAzad	Irán	25	0.44
11.º	Universidad de Valencia	España	25	0.44
12.º	Universidad Monash	Austalia	24	0.42
13.º	Universidad Nacional Taiwan Normal	Taiwan	24	0.42
14.º	Universidad Autónoma Barcelona	España	23	0.41
15.º	Universidad Nacional Autónoma México	México	23	0.41
16.º	Universidad Ataturk	Turquía	21	0.37
17.º	Universidad Middle East Tech	Turquía	21	0.37
18.º	Universidad de Nottingham	Gran Bretaña	21	0.37
19.º	Universidad de Cyprus	Chipre	20	0.35
20.º	Universidad de Witwatersrand	Sudáfrica	20	0.35

Es destacable que la institución con una mayor producción en este campo sea la Universidad de Granada (España); y con una producción muy similar la Universidad checa de Charles Praga (República Checa). Otras instituciones españolas que ocupan algunos de los primeros 15 puestos son: la Universidad de Alicante (4.º puesto), la Universidad de Valencia (11.º) y la Universidad Autónoma de Barcelona (14.º).

La importante productividad de la Universidad de Granada en el campo de la educación matemática es coincidente con otros estudios que han analizado su producción de tesis doctorales (Vallejo, 2005; Vallejo et al. 2007) o artículos indexados en ISI (Fernández-Cano, 1999; 2011). Hallazgo que muestra la alta productividad y por ende la relevancia de los grupos de investigación en el campo de la educación matemática de la Universidad de Granada.

A destacar, también, la producción de instituciones de países emergentes a la ciencia como Turquía, Irán y Malasia.

Idiomas

En relación a los idiomas de estas publicaciones, lógicamente, el inglés es el idioma mayoritario, en un total de 5180 comunicaciones (92.3 %); obviamente es la *lingua franca* de la comunicación científica y el idioma de «referencia» de la base seleccionada. El segundo lugar lo ocuparía el español, con un total de 228 aportaciones (4.06 %) y, en tercer lugar, el chino con 154 documentos (2.74 %). Estos resultados son concordantes con los datos aportados en el tercer apartado (producción por países). En un segundo nivel de importancia se ubicarían otros nueve idiomas que no superan el 1% de los aportes analizados.

Datos de Citación

El análisis de los datos de citación permite evidenciar el impacto que tiene esta producción científica como fuente de referencia para otros productos científicos (artículos, fundamentalmente).

Tabla 4. *Datos generales de impacto por citación de los aportes congresuales sobre educación matemática indexados en la base CPCI-SS&H*

Datos de productividad y citación	*Número*
Aportes congresuales encontrados	5612
Total de veces citados	14202
Total de veces citados sin citas propias	13594
Artículos en que se cita	12144
Artículos totales en que se cita sin citas propias	11692
Promedio de citas por aporte	2.53
Índice *h* de Hirsch	56

Los resultados encontrados revelan que los aportes congresuales son documentos de escasa referencia para la producción de la ciencia en el campo de la educación matemática. El promedio de las citas (2.53) es algo bajo, acorde con las escasas páginas dedicadas a las actas de congresos y su inicial análisis de resultados y conclusiones. El índice *h* de Hirsch para tan ingente producción es 56; o sea, al menos 56 aportes han recibido 56 citas.

Estos resultados son concordantes con las conclusiones extraídas por Hofer, Smejkal, Bilgin et al. (2010) quienes determinaron que las actas de congresos (*proceedings*) representan sólo el 1,7% de las referencias que se hacen en las Ciencias Naturales y la Ingeniería, y el 2,5% en las Ciencias Sociales y las Humanidades. El único campo, donde según estos autores las actas de congresos desempeñan un papel particularmente importante, es en el campo dela informática, donde representan cerca del 20% de las referencias citadas, y resultados similares también han constatado González-Albo y Bordons (2011) en el campo de la Información científica y Bibliotecas.

Conclusiones

Los aportes congresuales, pese a su heterogeneidad, cuestionable calidad científica, dificultad de acceso y su visión gris, emergen como una fuente de información científica primaria, cuyo estudio no debiera desconsiderarse. En concreto, y tras analizar esta producción en el campo de la educación matemática, este estudio permite establecer nexos de unión entre dicho ámbito educativo y el campo de la medicina, la ingeniería o el emergente campo de la computación. Asimismo, es destacable la investigación desarrollada en territorio nacional, pudiéndose equiparar a países como EEUU o China; concretamente, es la Universidad de Granada la institución de enseñanza superior cuyos investigadores acopian los mayores índices de producción. Otras de las instituciones españolas que merecen distinción, aunque con menor presencia, serían la Universidad de Alicante, la Universidad de Valencia y la Universidad Autónoma de Barcelona. Por último, y con relación a la cantidad de citas recibidas por este tipo de producciones, concluir que los aportes congresuales tienen un bajo impacto de citación en comparación con otros aportes científicos, si bien es cierto que este bajo índice queda condicionado a la naturaleza de las disciplinas.

Referencias

Delgado, E. y Fernández-Cano, A. (2002). El estudio de casos en las bases del Science Citation Index, Social Sciences Citation Index y Arts and Humanities Citation Index. *Arbor. Ciencia, Pensamiento y Cultura*, *CLXXI*(675), 609–629.

Fernández-Cano, A. (1999). Producción educativa española en el Social Sciences Citation Index (1988-1997). *Revista Española de Pedagogía*, *LVI*I(214), 509–524.

— (2011). Producción educativa española en el Social Sciences Citation Index (1998-2009). II. *Revista Española de Pedagogía*, *LXIX*(250), 427–444.

García Santiago, M. D. (1998). *Manual básico de literatura gris. El lado oscuro de la documentación*. Gijón: Trea.

González-Albo, B. y Bordons, M. (2011). Articles vs. proceedings papers: Do they differ in research relevance and impact? A case study in the Library and Information Science field. *Journal of Informetrics*, *5*(3), 369–381.

Hofer, K. M., Smejkal, A. E., Bilgin, F. Z. y Wuehrer, G. A. (2010). Conference proceedings as a matter of bibliometric studies: the Academy of International Business 2006-2008. *Scientometrics*, *84*(3), 845–862.

Lisee, C., Lariviere, V. y Archambault, E. (2008). Conference proceedings as a source of scientific information: A bibliometric analysis. *Journal of the American Society for Information Science and Technology*, *59*(11), 1771–1784.

Vallejo, M. (2005). *Estudio longitudinal de la producción española de tesis doctorales en Educación Matemática (1975-2002).* Granada: Universidad de Granada.

Vallejo, M., Ocaña, A., Bueno, A., Torralbo, M. y Fernández-Cano, A. (2005). Producción científica sobre Educación Multicultural contenida en las bases de datos Social Science Citation Index y Arts & Humanities Citation Index (1956-2003). *Revista Española de Documentación Científica*, *28*(2), 206–220.

Vallejo, M., Fernández-Cano, A.,Torralbo, M., Maz, A. y Rico, L. (2007). History of Spanish Mathematics Education focusing on PhDs Theses.*International Journal of Science and Mathematics Education*, *6*(2), 313–327.

FORMACIÓN DEL PROFESOR

CUATRO DÉCADAS FORMANDO MAESTROS DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Four Decades Training Teachers from Mathematics Education

Luis Carlos Contreras[a], *Lorenzo Blanco*[b] *y José Carrillo*[a]
[a]Universidad de Huelva, España
[b]Universidad de Extremadura, España

Resumen

Este capítulo hace un recorrido por la evolución del papel de la educación matemática en la formación inicial de maestros en España en las últimas décadas. El punto de partida se sitúa en los años previos a la promulgación de la Ley de Reforma Universitaria de 1984, que supuso la creación del área de Didáctica de la Matemática. El desarrollo cronológico sirve, a continuación, de hilo conductor para mostrar los distintos enfoques bajo los que se ha ido abordando la formación de los maestros para la enseñanza de las matemáticas. En esta evolución, matemáticas, didáctica de las matemáticas o enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, ni han tenido siempre el mismo significado, ni esos significados han sido compartidos por la comunidad de profesores de la mencionada área, ni han sido elementos de igual peso en esa formación.

Palabras clave: formación inicial de maestros, educación matemática

Abstract

We approach the evolution of the role of mathematics education in the context of primary teacher training in Spain in the last decades. We start coming back to the period before the promulgation of the Law of University Reform in 1984, which meant the creation of the Didactics of Mathematics Area. Next we use a chronological development as a means to show several perspectives in the training of primary teachers to teach mathematics. In this evolution, mathematics, mathematics pedagogy or teaching and learning mathematics have not got the same meaning, nor these meanings have been shared by the teachers community of the above mentioned area, nor have their weight been homogeneous in teacher training.

Keywords: *primary teachers' training, mathematics education*

Contreras, L. C., Blanco, L. y Carrillo, J. (2016). Cuatro décadas formando maestros desde la educación matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 131-139). Granada: Comares.

Introducción

El título del capítulo conduce al relato de un tiempo que, en nuestro caso, ha estado centrado en la formación y el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en el ámbito de la docencia y en el de la investigación, periodo compartido con Luis Rico en el terreno personal y en el académico, debido, particularmente, a su contribución en la línea de investigación sobre la formación de profesores de matemáticas. Mostramos la evolución de nuestra comprensión y experiencia profesional sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, un conocimiento que, al principio, estaba exclusivamente centrado en el contenido matemático y que luego se ha desvelado mucho más complejo.

En la formación de un profesor de matemáticas intervienen muchos aspectos no directamente relacionados con la matemática, en los que no entraremos. Pondremos nuestro foco en aquello que se puede analizar y comprender desde la matemática, desde su estructura, su epistemología, su sintaxis, sus modelos de representación o desde la interacción de estos elementos con los otros dos actores del triángulo didáctico.

El recorrido se iniciará en los años previos a la promulgación de la Ley de Reforma Universitaria (L.R.U.) en 1984, tras la cual nace el área de Didáctica de la Matemática, que se integra en departamentos universitarios. A partir de este momento se pasa de un trabajo individualizado o en pequeños grupos a un trabajo conjunto a nivel estatal, donde la creación de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), el 12 de marzo de 1996, juega un papel crucial. Los resultados actuales de nuestra investigación en el conocimiento del profesor de matemáticas constituirán la parte final del itinerario.

Los años previos a la L.R.U.

Comenzamos nuestra andadura en la formación de maestros, antes de la promulgación de la LRU, que supuso un hito en el devenir de las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB. Los profesores de Matemáticas de estos centros seguíamos una tradición docente, en métodos y en contenidos, muy similar a la que habíamos recibido en nuestra formación como matemáticos. A ello ayudaba el hecho de que el plan de estudios de 1971, vigente en ese momento, tuviera materias como Análisis Matemático, Álgebra o Estadística. Era también un momento en el que la Matemática Moderna había dejado su huella en la enseñanza de las matemáticas, de forma que, incluso las Matemáticas Básicas que se impartían en las Especialidades que no eran de Ciencias estaban inspiradas en la teoría de conjuntos, y asignaturas como Metodología de las Matemáticas consistían en poco más que en un elenco de recomendaciones de uso de recursos como los Bloques Lógicos o los bloques multibase.

La Didáctica de la Matemática estaba más cerca de ser Arte que Ciencia, e investigar en este área en España no era concebible, entre otras cosas porque los pocos doctores que había entre los de nuestro gremio, lo eran en Matemáticas. No había programas de Doctorado específicos, y los únicos encuentros de profesores de matemáticas eran promovidos por asociaciones repartidas por el Estado para tratar, en general, temáticas de interés para profesores no universitarios (Gutiérrez, 1991; Rico y Sierra, 1994).

Las publicaciones a las que teníamos acceso en las bibliotecas de nuestros centros eran, fundamentalmente, libros cuyos contenidos respondían a los mismos enfoques citados de la Matemática Moderna, cuyo trasvase prematuro a la enseñanza primaria era ya prevenido por otros libros que marcaron la evolución de nuestro pensamiento y que constituían un viento fresco que entraba en nuestras bibliotecas: *El fracaso de la Matemática Moderna. ¿Por qué Juanito no sabe sumar?*, de Morris Kline, o *La enseñanza de las matemáticas modernas,* selección de Jesús Hernández de artículos de Piaget, Choquet, Dieudoné y Thom, entre otros.

No creemos que podamos hablar de un modelo explícito de maestro que amparara aquella formación, pero, de haberlo, habría estado fundamentado en que un sólido conocimiento matemático (Blanco, 2013) era la esencia exclusiva de un buen profesor.

Los primeros encuentros de profesores de matemáticas de Escuelas de Magisterio

Con la creación del área de Didáctica de la Matemática, los profesores de matemáticas de las Escuelas de Magisterio tuvimos que optar por Didáctica de la Matemática (como hicimos nosotros), Análisis Matemático o Matemática Aplicada, entre otras áreas. Ello nos condujo a una nueva realidad: algunos formadores de maestros mostramos nuestro convencimiento de que algo muy particular y específico caracterizaba el contenido matemático que debía formar parte del conocimiento del profesor de matemáticas, y que este contenido era diferente del contenido matemático de otras profesiones o titulaciones universitarias, y nos mostrábamos dispuestos a explorar esas diferencias desde unas perspectivas epistemológicas, ontológicas y metodológicas sustancialmente diferentes a las propias del conocimiento matemático formal.

Un segundo hito lo componen las primeras reuniones de profesores de Didáctica de la Matemática (Almería, 1985 y Valencia, 1982, 1987) en las que se comienza a debatir la naturaleza de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica y, en lo que a nosotros nos concierne, sobre el conocimiento específico del profesor de matemáticas. Los programas de las asignaturas impartidas por los profesores del área de conocimiento fueron también objeto de análisis, iniciándose cierto proceso de convergencia en la manera de entender la formación de maestros. Conviven en este periodo diversos modelos de formación, desde los que intentan conjugar los conocimientos puramente matemáticos con los derivados de la enseñanza y el aprendizaje de la matemática escolar, hasta los que los abordan de forma separada.

Coincide en el tiempo con los trabajos de Shulman (1986, 1987) que, aunque no son específicos sobre la educación matemática, aportan un nuevo concepto, *Pedagogical Content Knowledge*, que permite ver el conocimiento del contenido disciplinar desde la perspectiva específica de ser enseñado.

Las investigaciones desarrolladas en España sobre procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas y, específicamente, sobre la formación del profesorado de Matemáticas, indicaban la necesidad de modificar la estructura y contenidos de los programas de formación de maestros, incidiendo en la relación entre el Conocimiento Matemático y el Conocimiento Didáctico de Contenido Matemático (Llinares, 2003). Ello motivó la celebración de diferentes simposios o encuentros nacionales, organizados en torno a los problemas sobre la formación del profesorado de matemáticas (León 1997, Logroño 1998, Huelva 1999, Oviedo 2000, Alicante 2002).

Simultáneamente, al final de esta década aparecen los primeros programas de doctorado, de Didáctica de la Matemática o en colaboración con otras didácticas específicas; en paralelo, muchos profesores del área de conocimiento desarrollan sus tesis doctorales. Algunos de ellos las realizan dirigidas por doctores de otras áreas, en particular en Didáctica y Organización Escolar, como es el caso de las realizadas en la línea de trabajo de Pensamiento del Profesor, en las que los citados trabajos de Lee Shulman eran especialmente relevantes. En este sentido, hemos de destacar el congreso internacional que, sobre esta temática, se desarrolló en La Rábida (Huelva), en 1986. Esas investigaciones fueron el germen de un grupo importante de trabajos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas que permitieron ver en la formación contenidos relativos al conocimiento didáctico del contenido matemático (traducción común del *Pedagogical Content Knowledge*, referido a las matemáticas, que convive con la traducción como conocimiento pedagógico del contenido), que no es de naturaleza matemática pero emerge de ella, y no de otras ciencias de la educación.

También al final de este periodo, y en parte como consecuencia de lo anteriormente descrito, a iniciativa de Luis Rico, se publica la colección *Matemáticas, cultura y aprendizaje*, de la editorial Síntesis, que se puede considerar la primera producción colectiva, en España, de un material que aúna productos transferibles de la investigación internacional en educación matemática con aportaciones relevantes y fundamentadas para la formación inicial.

Tras la aprobación, en 1990, de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (L.O.G.S.E.), asistimos a la elaboración de nuevos planes de estudio en la formación de maestros y, por primera vez, con unas directrices comunes, lo que no significa de igual diseño. Estos planes mostraron de forma clara la diversidad de enfoques coexistentes en esta formación desde la Educación Matemática (Abraira, Gómez, Blanco y Martín, 1997). Algunos programas mantenían un claro énfasis en la formación matemática formal; otros, de forma separada o no, incluían resultados de experiencias de innovación o investigación en educación matemática. Estas diferencias se acrecentaban cuando se analizaban los diseños, donde, por ejemplo, se contraponían propuestas en las que teoría de Didáctica de la Matemática formaba parte de los contenidos de los futuros maestros, con otras propuestas en las que los contenidos teóricos del área estaban implícitos.

Para debatir sobre estos modelos, la SEIEM organizó en 2011 el Seminario sobre la Formación Inicial del Profesorado de Matemáticas ante la implantación de los nuevos

Grados en Infantil y Primaria y el Máster de Formación del Profesorado de Secundaria. En sus ponencias y mesas redondas se debatió el contenido de las asignaturas de nuestro área, señalando algunos modelos y proponiéndose ejemplos concretos para desarrollar en las aulas de formación de profesores.

El desarrollo de la investigación en Educación Matemática en relación con el profesor

Los programas de doctorado específicos potenciaron el desarrollo de líneas de investigación en educación matemática, al amparo de proyectos nacionales e internacionales, siendo la SEIEM un foro en el que se compartían los resultados y se establecía un *corpus* teórico sobre la investigación en educación matemática, los problemas propios, los métodos para abordarlos, los criterios de calidad y transferencia y los procesos de elaboración de informes. Consecuentemente, las publicaciones españolas en revistas nacionales e internacionales se incrementaron de forma sustancial.

La cantidad y diversidad de la producción contribuyó a que, desde muy pronto, la SEIEM se organizara en grupos de trabajo, algunos de los cuales han puesto en marcha canales nuevos de publicación de la producción científica y han contribuido a que grupos como el *International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), o la asociación *European Research of Mathematics Education* (ERME) crearan grupos de trabajo sobre los contenidos de sus ámbitos de investigación. Este es el caso del grupo sobre Conocimiento y Desarrollo Profesional del Profesor de Matemáticas, en el que tratamos de comprender el conocimiento del profesor a través del análisis de la práctica.

Ya Brown y Borko (1992) diferenciaban tres líneas de investigación en los distintos estudios sobre el desarrollo profesional: aprender a enseñar, socialización del profesor y desarrollo del profesor. Estas líneas reflejan diversos aspectos de interés cuando el profesor es objeto de estudio, incluyendo formación, conocimiento y desarrollo. En particular, la consideración del profesor como aprendiz ha dado lugar a algunas investigaciones y propuestas formativas donde se ha integrado la noción de *mirar con sentido* (Fernández, Valls y Llinares, 2011) como competencia profesional.

Actualmente, un referente esencial en el ámbito del conocimiento del profesor es el *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), de la Universidad de Michigan (Ball, Thames y Phelps, 2008). Este grupo ha analizado la práctica de los profesores para extraer de ella claves del conocimiento para la enseñanza de las matemáticas. Algunos investigadores han empleado el MKT en sus investigaciones o en sus propuestas formativas; podemos destacar el empleo del MKT desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Ruiz, Sierra, Bosch y Gascón, 2014) o la adaptación del MKT por parte de Godino (2009), proponiendo el modelo de Conocimiento didáctico-matemático.

Al igual que ellos, nuestra investigación emerge del trabajo con profesores de matemática de Educación Primaria y Secundaria, en el que estamos inmersos desde hace más de veinte años, y en Educación Infantil, en los últimos años, y es deudora de trabajos muy relevantes realizados en las tres últimas décadas, en las que ha existido una preocupación creciente por profundizar en los elementos que han de formar parte del conocimiento de los profesores de matemáticas. Partiendo del presupuesto indiscutible de que una parte sustancial de ese conocimiento es el relativo a la propia disciplina —no parece razonable que alguien sea capaz de enseñar aquello que no conoce en profundidad (Fennema, Carpenter y Peterson, 1989)—, hemos tratado de definir con precisión qué significa conocer en profundidad el contenido que se pretende enseñar.

El carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas

Como se ha señalado, en nuestra comprensión del conocimiento del profesor de matemáticas hay un momento clave en el que tomamos consciencia de que el conocimiento de las matemáticas que necesita el profesor es diferente del conocimiento matemático formal y que no es una mera simplificación de este. Por otro lado, reconociendo el papel de otras ciencias de la educación en la formación de profesores de matemáticas, hemos sentido que el contenido de esta formación, más allá de las matemáticas, no era una yuxtaposición de los contenidos matemáticos y la pedagogía. Los trabajos del grupo de Ball, inspirados en las aportaciones de Shulman, realizaron una aportación esencial. La contribución de Shulman supuso considerar la especificidad del contenido que se está enseñando. Con la idea de «paradigma desaparecido», Shulman (1986) insta a enfocar el conocimiento necesario para enseñar a través de la lente de la propia disciplina, generando el concepto de conocimiento didáctico del contenido (Blanco, Mellado y Ruiz, 1995). Desde la investigación en educación matemática, el conocimiento didáctico del contenido tuvo una gran acogida, aunque no estaba exento de dificultades de identificación en la práctica. La aportación fundamental del grupo de Ball es la posibilidad de organizar y operativizar el conocimiento del profesor de Matemáticas a través de investigaciones sobre la práctica. El MKT pretende ser útil para «representar el conocimiento matemático, las habilidades, los hábitos de la mente, la sensibilidad que se necesitan para el trabajo concreto de enseñar […] tareas especializadas en las que los profesores necesitan conocer y usar las matemáticas de varios modos» (Bass, 2007, p. 704). Del trabajo de Shulman asumen dos de los dominios más importantes desde el punto de vista matemático: el Conocimiento de las Matemáticas y el Conocimiento Didáctico del Contenido Matemático. Estos dominios, a su vez, están divididos en subdominios, destacando, dentro del primero, el subdominio del Conocimiento Especializado del contenido, que es un conocimiento «estrictamente matemático […] que los profesores capacitados necesitan y usan, y sin embargo no es del dominio de otros muchos profesionales con formación matemática […y que] no es un subconjunto reducido de lo que los matemáticos conocen» (Bass, 2007, p. 705).

Coincidimos con la idea de que este conocimiento, solo en propiedad y uso del profesorado, puede llamarse especializado, pero, a la hora de determinar la naturaleza especializada del conocimiento del profesor, nos encontramos con el obstáculo generado por el carácter extrínseco de la naturaleza de la especialización (Flores, Escudero, Carrillo, 2013), pues, según las caracterizaciones que aparecen en la literatura de investigación, debemos discutir si un conocimiento es o no compartido con otros profesionales que también son usuarios de la matemática.

Con la idea de aportar una caracterización intrínseca de especialización, proponemos unas asunciones sobre las que construir dicha caracterización:

— La naturaleza especializada del conocimiento del profesor de matemáticas posee dos fuentes complementarias: las matemáticas y la actividad de enseñanza.
— Un profesor comprende las matemáticas de un modo especializado. Es decir, un profesor es un sujeto que conoce las matemáticas desde el punto de vista de alguien que las usa en un contexto profesional específico: la enseñanza.
— Para determinar la especialización, no debería ser necesario mirar fuera del dominio de las matemáticas. Pretendemos evitar cuestiones sobre si un determinado conocimiento es puramente matemático (compartido con matemáticos), si comprender algo concreto es exclusivo del profesorado, etc.

Como consecuencia, para asignar el adjetivo «especializado» a una evidencia de conocimiento, ha de estar relacionado con la matemática, implementado en un contexto de enseñanza y aprendizaje (aula, planificación, etc.); el conocimiento pedagógico general no se considera especializado en nuestra propuesta.

Saber que un polígono tiene lados y ángulos es conocimiento matemático, compartido con matemáticos y muchas personas. Ahora bien, en general, los profesores poseen este conocimiento junto al conocimiento de las principales dificultades de los estudiantes cuando definen y trabajan con polígonos, al conocimiento de algunas unidades didácticas y recursos útiles para que los alumnos mejoren su aprendizaje, y a otros conocimientos. Consideramos esto como un conglomerado de conocimiento especializado: un conglomerado de *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas* (MTSK) (Carrillo, Climent, Contreras y Muñoz-Catalán, 2013). Es el MTSK como un todo lo que es especializado. Este modelo, manteniendo la división entre los dominios del conocimiento matemático y del conocimiento didáctico del contenido, considera tres subdominios en cada uno de ellos, así como un dominio de creencias y concepciones sobre la matemática y la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Carrillo, Flores y Contreras, 2013). El conocimiento profundo de la matemática escolar se encuentra en el *conocimiento de los temas*, el de las conexiones, la visión avanzada de un conocimiento elemental o viceversa, se encuentra en el *conocimiento de la estructura*, y el *conocimiento de la práctica matemática* se ocupa del modo de proceder en matemáticas. En el dominio del conocimiento didáctico del contenido se hallan los subdominios del *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas* (estrategias de enseñanza, recursos, ejemplos…), el *conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas* (errores, dificultades, obstáculos…), y el *conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas* (conocimiento del currículo institucional, de producciones de las distintas investigaciones en educación matemática respecto a los logros de aprendizaje esperados en cada etapa…).

La contribución de Luis Rico y colaboradores, en particular en relación con el Análisis Didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), se ha visto reflejada también en investigaciones en el campo del conocimiento especializado del profesor de matemáticas, donde se han realizado integraciones entre el análisis mencionado y las categorías de los subdominios del modelo MTSK (Rojas, Flores y Carrillo, 2013, 2015).

Otras generaciones de investigadores en Educación Matemática escribirán las páginas que han de seguir a esta narración.

Referencias

Abraira, C., Gómez, M. D., Blanco, L. J. y Martín, M. C. (1997). Análisis de los planes de estudio del título de maestro de la especialidad de Educación Primaria. En C. Abraira y A. De Francisco (Eds.), *II Simposio. El currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el área de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 15–24). León: Universidad de León.

Ball, D. L., Thames, M.H. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Bass, H. (2007). Matemáticas, matemáticos y educación matemática. *La Gaceta de la RSME*, *10*(3), 689–706.

Blanco, L. J. (2013). La formación inicial de los maestros en España en los últimos 40 años. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia, I. (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 217–224). Granada: Comares.

Blanco, L. J., Mellado, V. y Ruiz, C. (1995). Conocimiento didáctico del contenido de ciencias y matemáticas y formación de profesores. *Revista de Educación, 307,* 427–446.

Brown, C. y Borko, H. (1992). Becoming a mathematics teacher. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 209–239). New York: Macmillan.

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C. y Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialized knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser, y M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 2985–2994). Antalya, Turquía: ERME.

Carrillo, J., Flores, P. y Contreras, L.C. (2013). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 193–200). Granada: Comares.

Fennema, E., Carpenter, T. P. y Peterson, P. L. (1989). Teachers' Decision making and cognitively guided instruction: a new paradigm for curriculum development. En K. Clements y N. F. Ellerton (Eds.), *Facilitating Change in Mathematics Education* (pp. 174–187). Geelong, Victoria: Deakin University Press.

Fernández, C., Valls, J. y Llinares, S. (2011). El desarrollo de un esquema para caracterizar la competencia docente «mirar con sentido» el pensamiento matemático de los estudiantes. En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática, XV* (pp. 351–360). Ciudad Real: SEIEM.

Flores, E., Escudero, D. y Carrillo, J., (2013). A theoretical review of specialised content knowledge. En B. Ubuz y M. A.

Mariotti (Eds.), *Proceedings of CERME 8* (pp. 3055–3064). Antalya, Turquía: ERME.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN*, *20*, 13–31.

Gutiérrez, A. (1991). *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Síntesis.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En C. Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas* (pp. 3–30). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Granada: Comares.

Rico, L. y Sierra, M. (1994). Educación matemática en la España del siglo xx. En J. Kilpatrick, L. Rico y M. Sierra (Eds.), *Educación Matemática e investigación* (pp. 97–207). Madrid: Síntesis.

Rojas, N., Flores, P. y Carrillo, J. (2013). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza de los números racionales. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *4*, 47–64.

— (en prensa). Conocimiento especializado de un profesor de matemáticas de educación primaria al enseñar los números racionales. *Bolema*, *29*(51).

Ruiz, A., Sierra, T., Bosch, M. y Gascón, J. (2014). Las matemáticas para la enseñanza en una formación del profesorado basada en el estudio de cuestiones. *Bolema, 28*(48), 319–340.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(*2*), 4–14.

— (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1–22.

EL ANÁLISIS DIDÁCTICO EN LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE PRIMARIA, EN EL ÁREA DE MATEMÁTICAS

Didactical Analysis in Initial Primary School Teacher Training in Mathematics

Pablo Flores, Antonio Moreno y Aurora del Río
Universidad de Granada, España.

Resumen

Los aportes de Luis Rico, en forma de organizadores curriculares, se han convertido progresivamente en la idea de análisis didáctico, para generar un proceso de profundización en las matemáticas, que va más allá de dominar las destrezas habituales y contempla la didáctica de la matemática desde una perspectiva funcional. En la Universidad de Granada llevamos a cabo la formación inicial de profesores de primaria en el área de Matemáticas, teniendo como uno de los objetivos que los estudiantes comprendan y den significado a los contenidos matemáticos. En este artículo describimos el proceso formativo que estamos llevando a cabo desde el Departamento de Didáctica de la Matemática, basado en la aplicación de las ideas de Luis, sobre análisis didáctico. Describimos las dimensiones sobre las que se aposenta el curso, el papel profesional del docente, el análisis didáctico y el conocimiento matemático para la enseñanza.

Palabras clave: análisis didáctico, conocimiento del profesor de matemáticas, formación inicial de profesores de primaria

Abstract

Luis Rico contributions in the form of curricular organizers, have increasingly become the idea of didactical analysis, to generate a process of deepening in mathematics, which goes beyond dominating the usual skills and to contemplate the teaching of mathematics from a functional perspective. At the University of Granada, we conducted the initial primary school teacher training in the area of mathematics, having as an objective that students understand and give meaning to the mathematical content. In this article we describe the training process we are carrying out from the Department of Mathematics Education, based on the application of Luis's ideas, on didactical analysis. We describe the dimensions on which the course is seated, the role of teachers, the training analysis and mathematical knowledge for teaching.

Keywords: *didactical analysis, knowledge mathematics teacher*

Flores, P., Moreno, A., y Del Río, A. (2016). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de primaria, en el área de matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 141-151). Granada: Comares.

Introducción

¿Cómo hacer que los futuros maestros *comprendan y den significado* a las matemáticas para poder enseñarla a sus estudiantes? La formación de los futuros profesionales de la educación que se lleva a cabo en la Facultad de Educación de la Universidad de Granada persigue los siguientes objetivos:

- Favorecer la comprensión de los conceptos matemáticos.
- Poner al estudiante para profesor en contacto con lecturas y resultados alcanzados en las didácticas de los temas matemáticos. Hacer que lo refleje profundizando en el significado de los contenidos matemáticos, para comprenderlos y programar su enseñanza.

El Análisis Didáctico

Desde finales de los años 90, Luis Rico (1997a y b), da fundamento a la teoría curricular, estableciendo cuatro dimensiones (dimensión cultural/conceptual, cognitiva, ética o formativa y social), que se manifiestan en diferentes niveles de desarrollo del currículo.

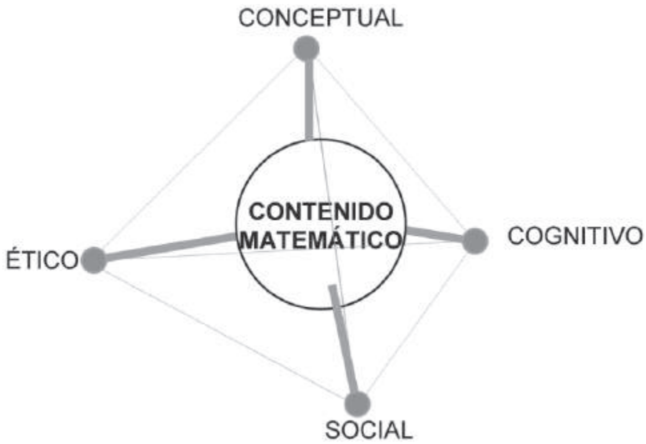


Figura 1. *Análisis curricular de un contenido matemático*

En la formación inicial hay que abordar especialmente el diseño de unidades didácticas para la enseñanza de un contenido. Para ello, Rico (1997a) define cuatro análisis sobre la enseñanza del contenido, correspondientes a las dimensiones anteriores. El currículo refleja un aspecto cultural/conceptual que se concreta en el contenido matemático a enseñar, para lo que el profesor necesita realizar un *análisis del contenido*. Al focalizar su atención sobre el alumno, sus posibilidades y obstáculos de aprendizaje, se realiza un *análisis cognitivo*. Para llevar a cabo la enseñanza, el profesor atiende a la dimensión ética o formativa, que requiere *analizar la instrucción*, determinando tareas matemáticas escolares. Por último, el profesor realiza el *análisis de actuación*, valorando tanto los logros como el proceso.

El *significado del contenido* matemático queda definido para Rico (1997a) mediante el triángulo semántico de Frege, cuyos vértices son referencia, signo y sentido. En el primer vértice (referencia), se sitúa la *estructura conceptual*, que requiere examinar los conceptos y procedimientos matemáticos, tanto actuales como en otros momentos de la historia de las matemáticas (*evolución histórica*). El segundo vértice (signo) está ocupado por las representaciones empleadas para expresar el contenido y los modelos que pueden emplearse para materializar los conceptos. El sentido de un contenido lo marcan los términos que se emplean para referirse al contenido, las situaciones en que se ponen en marcha, los usos que se les dan en estas situaciones y los fenómenos que históricamente se han organizado a través de dicho contenido. Por tanto el *análisis de contenido* abarca el estudio de las *estructuras conceptuales*, *evolución histórica*, *sistemas de representación y modelos*, y *análisis fenomenológico*.

El profesor planifica el aprendizaje del alumno a partir de la dimensión *cognitiva* del contenido. Examinando las cualidades cognitivas del alumno en relación al contenido, así como los requerimientos que el entorno hace de aprendizaje de este contenido, llega a establecer las finalidades de aprendizaje, formuladas en forma de objetivos y competencias, así como las limitaciones, considerando qué errores y dificultades se detectan habitualmente en el aprendizaje del tema matemático. Expectativas y limitaciones de aprendizaje permiten construir secuencias de capacidades que los alumnos tienen que aprender a poner en juego para resolver las tareas y llevar a cabo los aprendizajes previstos.

La profesión docente es una tarea práctica, en el sentido aristotélico. La acción es tan importante como los fines. La dimensión ética o formativa debe llevar al profesor a examinar qué tareas, medios, recursos y prácticas, son las más adecuadas para alcanzar los objetivos de aprendizaje. El análisis de *instrucción* se centra en buscar tareas matemáticas escolares significativas.

Prever instrumentos, criterios y formas de poner en práctica la evaluación, de forma que se aprecien logros en forma de competencias, da la ocasión al profesor de cerrar el proceso formativo de manera coherente, con lo que se constituye en el análisis de *actuación*.

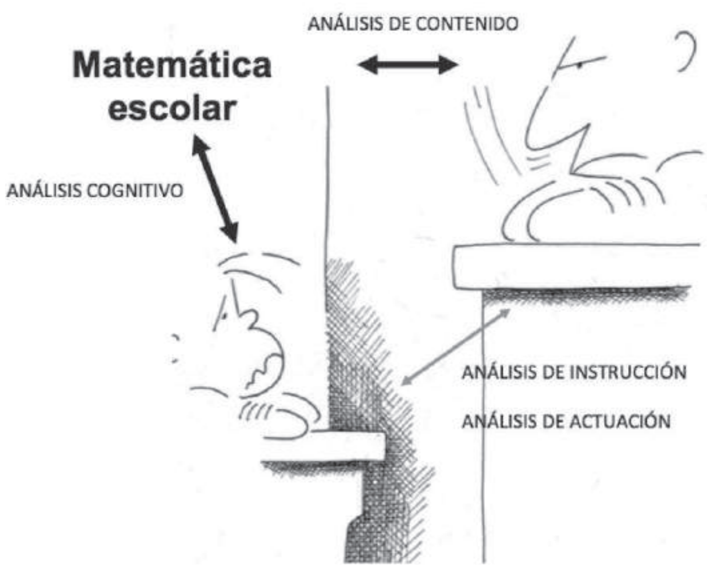


Figura 2. *Análisis Didáctico en el proceso de enseñanza/aprendizaje matemático*

Formar profesores profesionales que comprendan

El genial Francesco Tonucci ha dibujado una viñeta (Figura 3, origen de las restantes figuras del artículo), en la que enfatiza le papel ambiguo del profesor en formación, en el centro de un sistema doble, ya que siempre tiene que tener de referencia su actuación en el sistema didáctico de la educación Primaria. Tonucci pone de manifiesto que para describir un plan de formación hay que clarificar dos componentes al menos, el proceso formativo y su contenido.

Establecer dos premisas (comprender y profesionalizar), mediante una herramienta (el análisis didáctico), ha dado lugar a un proceso formativo que se ubica en la tradición profesional de formación (Zeichner, 1983), concibiendo al maestro de educación primaria como un educador con intención instructiva, que pueda lograr que el alumno de 6 a 12 años desarrolle competencias básicas relacionadas con las matemáticas, sobre las que poder continuar su formación como ciudadano para afrontar los retos de la sociedad actual.

Se trata de un plan de formación profesional, que parte del conocimiento matemático de la educación primaria, concibiéndolo como problemático, no completamente definido (Zeichner, 1983), y completado con conocimiento de Didáctica de la Matemática, concebida como instrumento para el desempeño profesional, con lo que interesa más ahondar en sus problemas que en sus resultados.

El contenido de los cursos de formación matemática de los futuros maestros, se centra, fundamentalmente, en «conocimiento profesional del profesor de matemáticas», entendido tal como lo hace Deborah Ball y su equipo de la Universidad de Michigan (Hill *et al.,* 2008), el Conocimiento del Profesor de Matemáticas (Mathematical Knowledge Teaching). En este modelo se distinguen dos componentes, la primera de conocimiento matemático, que tiene tres subdominios (conocimiento común de las matemáticas, conocimiento especializado de las matemáticas y conocimiento del horizonte matemático) y la segunda el conocimiento didáctico del contenido matemático, con otros tres (conocimiento de las matemáticas y la enseñanza, de las matemáticas y los alumnos, y el conocimiento curricular).

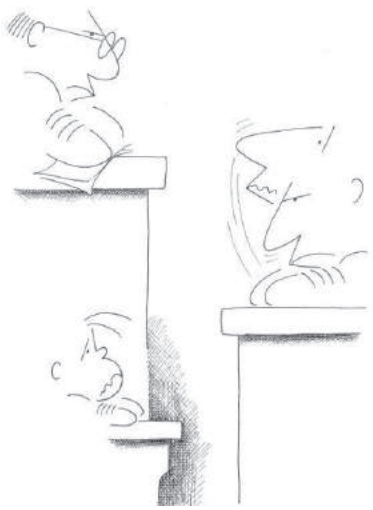


Figura 3. *Formación de formadores. Tonucci, 1989*

La formación inicial de profesores de Primaria, en la Universidad de Granada, abarca 4 cursos (8 semestres), durante los cuales se imparten asignaturas por áreas educativas generales (Didáctica y Organización Escolar, Psicología de la Educación y Evolutiva, Sociología Pedagogía y MIDE), asignaturas impartidas por áreas de didácticas específicas instrumentales (Didáctica de la Lengua española, de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales, de las Ciencias Experimentales y de la Formación artística), y didácticas específicas de especialidad (Didáctica de lengua extranjera, de la Educación Física y de la Música).

La formación matemática de profesores de Primaria, en la Universidad de Granada se cubre de manera obligatoria, por 3 asignaturas (Figura 4): Bases Matemáticas, Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas y Diseño y Desarrollo del Currículo, siempre de Matemáticas en Educación Primaria. La formación se complementa con una optativa, Competencias Matemáticas en la Educación Primaria.

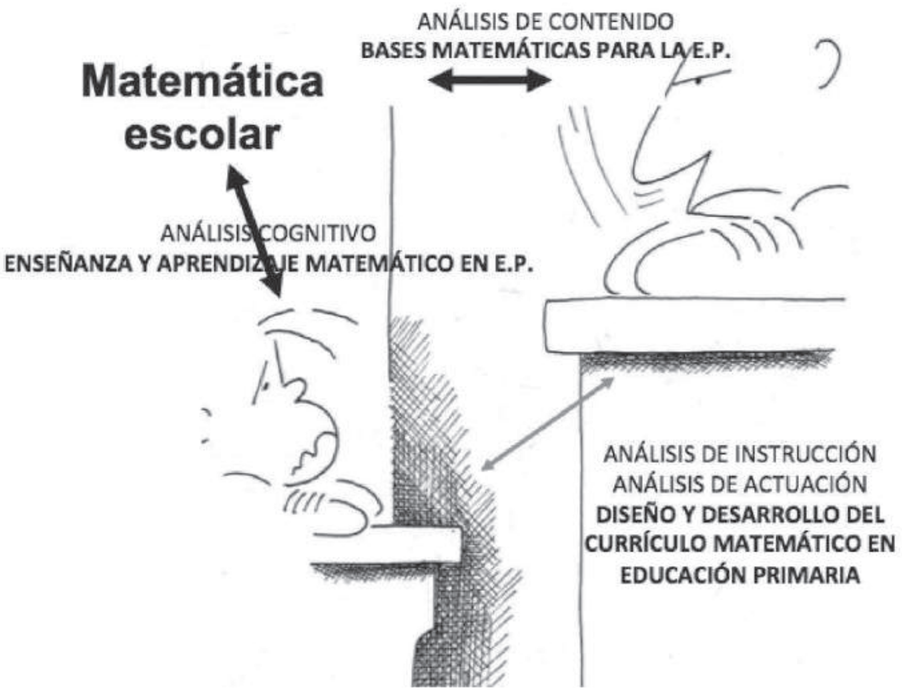


Figura 4. *Análisis Didáctico en el Plan de Formación de Maestros*

Bases Matemáticas para la Educación Primaria

Para poder planificar la enseñanza de las Matemáticas en Educación Primaria, el maestro necesita conocimientos matemáticos, especialmente los contenidos que se imparten en dicho ciclo educativo. Determinar qué tipo de conocimiento se requiere para este desempeño ha sido objeto de trabajos compartidos en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, desde hace más de 20 años, en los primeros de los cuales ha tenido una intervención destacada Luis Rico. La decisión sobre qué conocimiento matemático requiere el futuro maestro se ha fundamentado en el Análisis Didáctico es decir, el conocimiento matemático resultante de realizar un análisis del contenido de los núcleos temáticos de las Matemáticas de Primaria. El análisis didáctico nos ha llevado a enfatizar que el maestro tiene que dar significado a los contenidos matemáticos de educación Primaria. Dar significado consiste en profundizar en los tres aspectos que forman el triángulo semántico (Frege): el conceptual, el representacional y el sentido.

El estudio del sentido arranca de considerar el papel instrumental de las matemáticas. El análisis de contenido nos aclara estos términos, tanto en un conocimiento común, como examinando sentidos, formas de representar y estructuras conceptuales (conocimiento especializado).

La asignatura Bases Matemáticas trata el conocimiento matemático especializado para que el futuro maestro comprenda y de significado a los conocimientos matemáticos que va a enseñar. Como apoyo a esta asignatura, desde el Departamento de Didáctica de la Matemática, se ha elaborado un libro de texto (Segovia y Rico, 2011) que recoge los contenidos de la asignatura, atendiendo a este enfoque de las matemáticas de Primaria.

Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria

Los estudiantes que dan significado y comprenden el contenido tienen mayores oportunidades para enseñarlo, pero no basta con ello. Para completar la formación, las otras asignaturas de Matemáticas hacen que los futuros maestros se relacionen con la Didáctica de la Matemática, profundizando en el conocimiento didáctico del contenido matemático. La Didáctica de la Matemática ha llegado a consensuar un cuerpo de conocimiento específico, pero hay que reconocer que su origen y desarrollo obedecen más a la lógica de la investigación que a la de los profesores que están enseñando Matemáticas en la enseñanza obligatoria. Falta mucho para que la Didáctica de la Matemática atienda a las necesidades de los profesores en su trabajo, por lo que no podemos pretender formar maestros eruditos en un saber que los va a distanciar de sus pares, cuando se incorporen a la escuela.

Tomando en cuenta esta circunstancia, el proceso formativo en Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada, se hace más profesionalizador, con un contenido menos definido, más problemático. Trata de responder a cuestiones como: ¿Qué debemos lograr que aprendan los alumnos de primaria? ¿Cómo podemos salvar sus dificultades y errores? Son cuestiones que afrontamos en la asignatura «Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas», cuyo foco de atención es la profundización en aspectos cognitivos del aprendizaje matemático. Esta asignatura se propone una intención más práctica, sin pretender ser exhaustivos.

Las herramientas, en forma de textos sobre didáctica de cada contenido, están al servicio de los estudiantes, quienes tienen que localizarlos, darle sentido y aplicarlos a la enseñanza y aprendizaje de temas concretos. Otras asignaturas generales (Psicología del Aprendizaje, Psicología Evolutiva y de la Educación, etc.), suministran referentes que ayudan a comprender los resultados que encontrarán en textos de didáctica del tema que corresponde a cada equipo de trabajo.

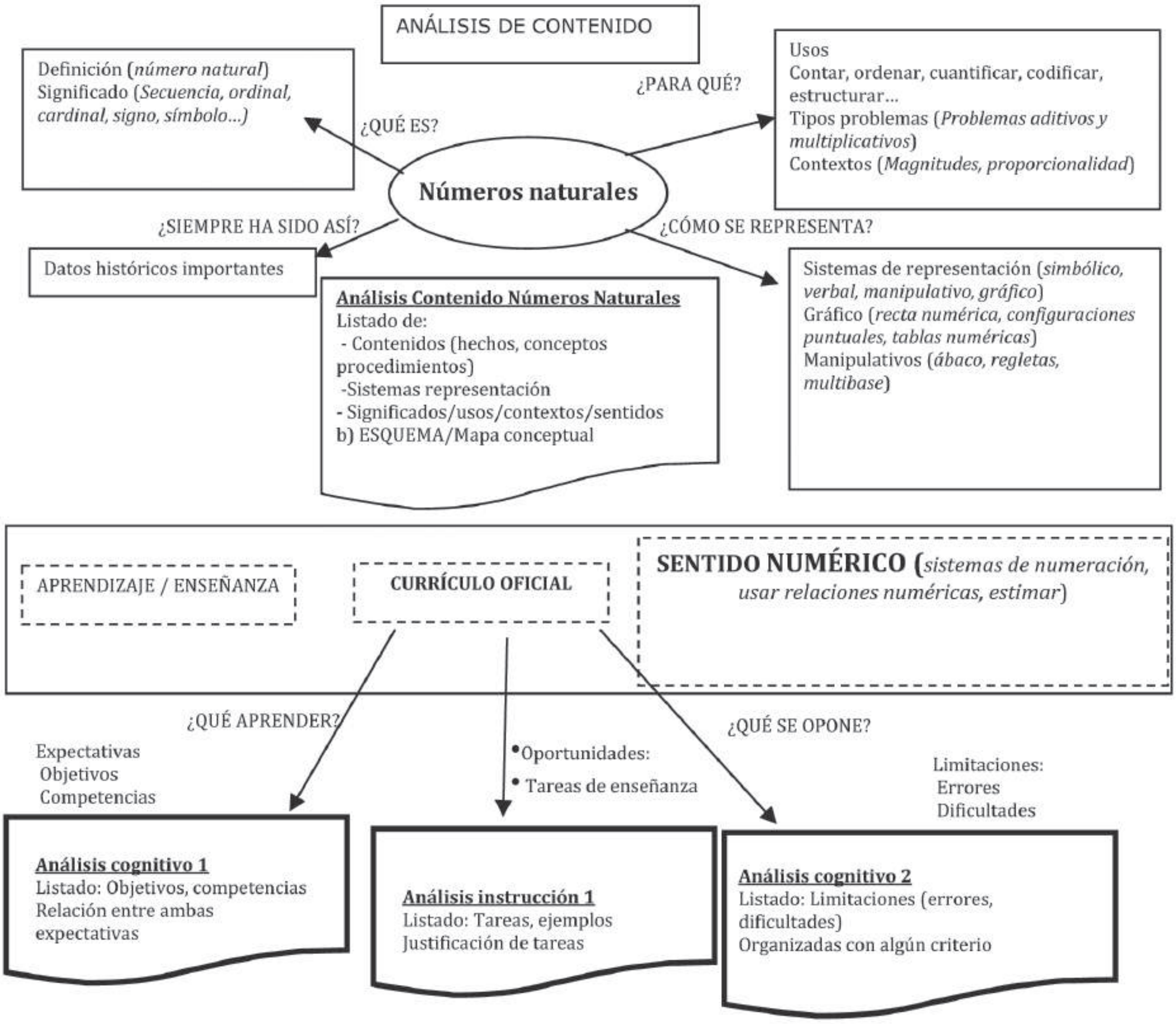


Figura 5. *Esquema de actuación en Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*

El resultado de este curso debe ser un análisis cognitivo en profundidad de un tema de matemáticas de Primaria (como «Unidad, decena y centena», para 7 años, «Los polígonos», para 9 años, etc.). Los futuros maestros, trabajando en grupos, tienen que buscar fuentes de información sobre la didáctica del tema que les corresponde, examinar qué objetivos de enseñanza pueden pretender en el curso o ciclo adecuado, qué limitaciones (dificultades y errores), son más frecuentes para los alumnos. Este trabajo final, que se va completando a lo largo de las 15 semanas del cuatrimestre, cubrirá una parte del desempeño profesional para el que se están preparando. En la Figura 5 aparece el esquema de actuación con los números naturales como ejemplo para niños de 6-7 años.

Esta asignatura se enfoca en el conocimiento profesional del profesor sobre las Matemáticas y los alumnos.

¿Cómo conjugar la profundización en la didáctica de un tema con una visión más amplia sobre las didácticas de los demás temas? Este interrogante nos ha llevado a frecuentes debates entre los profesores, especialmente porque nuestras raíces se aposentan en tierra enciclopédica, en la que la enseñanza tiene que barrer todo lo que se sabe de un tema. Una solución de consenso ha tomado en cuenta la orientación actual de la enseñanza de las Matemáticas en los niveles obligatorios, en los que predomina una pretensión funcional, es decir, encaminada a desarrollar competencias (Segovia y Rico, 2011). Una manera de ver al niño como sujeto matemáticamente competente, es considerarlo como alguien que emplea las matemáticas «con sentido» (Rico, Flores y Ruiz, 2015). Esta idea de «sentido matemático» está inspirada en aportes recientes sobre «sentido numérico», «sentido espacial», «sentido de medida» y «sentido estocástico» (Flores y Rico, 2015). En esta asignatura se ha introducido un tema llamado «Sentido matemático», que muestra esta orientación en el aprendizaje matemático, cubriendo las componentes de cada uno de estos sentidos, pero realzando la importancia de desarrollarlas de manera coordinada. Esto hace que en la parte práctica de este curso se realicen análisis de hasta qué punto se logra desarrollar sentido matemático resolviendo tareas matemáticas escolares, y se utilicen estas componentes para decidir qué objetivos de aprendizaje se deben pretender.

Entender que para manejar los números naturales con sentido hay que tomar en consideración tanto el concepto y la representación de los números naturales, como el significado de las operaciones y los procesos de obtención de resultados, lleva a enfatizar objetivos que abarquen todos estos campos, además de ayudar a buscar dificultades y errores asociados a cada uno de ellos.

Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria

Una vez comprendido el contenido y examinado los objetivos de aprendizaje, se pasa a estudiar cómo enseñarlo. Para ello se emplean los análisis realizados en cursos anteriores, dándoles una nueva vuelta de tuerca, que consiste en apreciar las cualidades educativas que tienen los recursos didácticos, así como la forma de llevar a cabo una enseñanza constructivista, siguiendo las ideas de asignaturas generales (Didáctica General, Psicología de la enseñanza, etc.).

Distinguir tareas matemáticas escolares para enseñar los números naturales, identificar en ellas sus elementos, percibir si promueven que el alumno ponga en juego sus conocimientos anteriores, si le lleva a realizar acciones con varias formas de representar los números naturales y las operaciones, si le obliga a explicar a otros los procedimientos ejecutados, a mostrar su lógica y relación con el problema planteado (que tiene que estar bien seleccionado), requiere entender ideas como «enseñanza significativa», «resolución de problemas», «comprensión de un concepto», etc.

En esta asignatura los estudiantes tienen que planificar una unidad didáctica sobre un tema matemático específico de primaria. Para ello deben llevar a cabo los dos análisis realizados en cursos anteriores. El análisis de contenido emplea como referentes libros de Matemáticas para maestros. El análisis cognitivo utiliza textos específicos de didáctica del bloque de contenido que le corresponda.

Posteriormente deben buscar tareas matemáticas escolares, desmenuzarlas para apreciar sus cualidades educativas, analizarlas en relación a las teorías del aprendizaje propuesto, y organizarlas para facilitar que los alumnos lleven a cabo la secuencia de aprendizaje adecuado a sus objetivos. Requiere poner en juego y comenzar a familiarizarse con el conocimiento didáctico del contenido matemático, concretamente del conocimiento de Matemáticas y enseñanza, del conocimiento curricular, ya que, como en las asignaturas anteriores, el estudiante para maestro tiene que examinar los documentos oficiales, tanto nacionales como de otros lugares para ubicar su responsabilidad profesional.

Para completar la unidad didáctica, los alumnos tienen que planificar cómo van a evaluar el aprendizaje, interpretando los criterios que se proponen en los documentos oficiales, y diseñando instrumentos de evaluación. Con ello realizan un análisis de actuación, que pueden apoyar en las experiencias de enseñanza que han llevado a cabo en la práctica pedagógica, que se desarrolla en el semestre anterior (Figura 6).

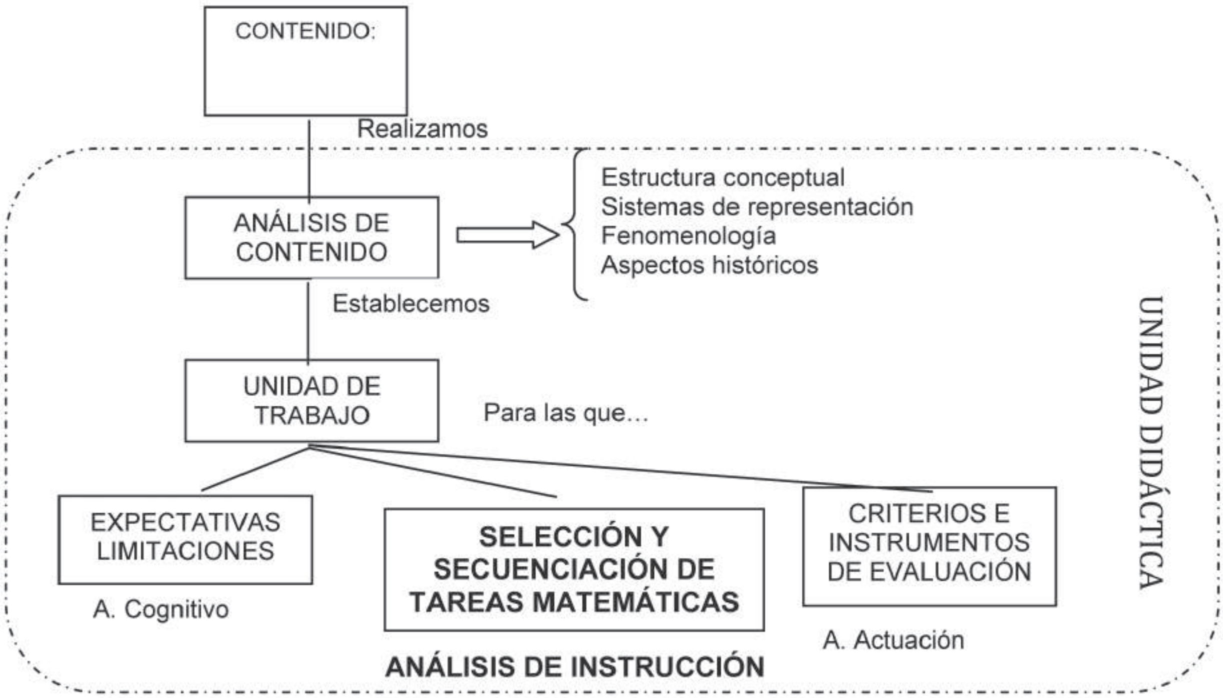


Figura 6. *Esquema de la elaboración de Unidad Didáctica en Diseño y Desarrollo Currículo Matemáticas*

Es importante apreciar el papel destacado que juegan los créditos prácticos de formación, que ocupan, al menos, el 50% de la carga de créditos total. Entendemos por preparación práctica la que hace que los estudiantes sean protagonistas de su trabajo. Para desarrollarla, se descompone cada grupo (de unos 70 alumnos), en tres partes de unos 23 alumnos, que trabajan en equipos de 4, para resolver de manera personal, tareas relacionadas con cada uno de los cursos.

A partir de la experiencia de formación se han elaborado varios libros para apoyarla (Castro, 2001, Segovia y Rico, 2011 y Flores y Rico, 2015). Igualmente se han publicado los trabajos prácticos, especialmente de Bases Matemáticas. Durante su implementación hemos llevado a cabo 6 proyectos de innovación docente, lo que ha supuesto muchas horas de compartir, revisar y poner al día, el diseño de las asignaturas. Fruto de ello es la elaboración de 3 artículos de revista, y de la presentación en varios congresos.

Conclusiones

A lo largo de este artículo hemos querido mostrar un proceso formativo que atiende a la formación inicial de profesores de niños de 6 a 12 años, en el área de Matemáticas, que se está aplicando en la Universidad de Granada. En este proceso se han conjugado la intención de que los estudiantes comprendan los contenidos matemáticos del ciclo educativo que impartirán, desde una perspectiva que favorezca su profesionalización.

Se aprecia que dicho modelo abarca todos los componentes del conocimiento matemático para la enseñanza, según el modelo MKT (Hill *et al.,* 2008). En el primer curso se atiende a la formación matemática de los estudiantes, promoviendo una profundización en el significado de los contenidos en aritmética, medida, geometría y estadística. El conocimiento común, que ha formado parte de la formación anterior de estos estudiantes, se ve reforzado por la búsqueda de significados de los contenidos trabajados, profundizando en el conocimiento especializado. La poca alusión al conocimiento del horizonte matemático, la reconocemos como una debilidad que tenemos que abordar. Los cursos de Didáctica de las Matemáticas cubren todas las componentes del conocimiento didáctico del contenido matemático, aunque la propuesta formativa comienza con el análisis cognitivo, que lleva a profundizar en el conocimiento del alumno. Posteriormente, el diseño de unidades acarrea una revisión sobre el conocimiento de las Matemáticas y la enseñanza. Durante toda la formación se atiende al currículo de Matemáticas de la Educación Primaria, con lo que el conocimiento del currículo está presente en todo el plan formativo.

El proceso formativo da mucho protagonismo a los estudiantes, quienes tienen que ir realizando los diferentes análisis que componen la herramienta idiosincrática de nuestro plan. Esto da lugar a que la formación en Didáctica de la Matemática no sea exhaustiva, concibiéndola más como herramientas que prepara para el desempeño profesional, que como contenido erudito.

Como se aprecia, el proceso formativo está muy centrado en el contenido matemático, aunque tome en consideración apreciaciones sobre su enseñanza y aprendizaje, siempre basadas en resultados suficientemente afianzados en la investigación en la didáctica de la matemática, que hemos ejemplificado en la de la aritmética para el caso de los números naturales.

Esperamos que los estudiantes comprendan los contenidos de las matemáticas de Primaria, en nuestro ejemplo, que comprendan los números naturales, así como sus distintas formas de representación, sus significados y sus usos y la relación que existe entre ellos. Y que basen todas estas apreciaciones en su comprensión y en las informaciones didácticas que los han investigado.

Referencias

Castro, E. (Ed.) (2001). *Didáctica de la matemática en educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Flores P. y Rico L. (2015). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Hill, H. C., Ball, D. L. y Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372–400.

Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas*. Madrid: Síntesis.

— (1997b). *La enseñanza de las matemáticas en educación secundaria*. Barcelona: Horsori.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz, J. F. (2015). Sentido matemático de los conceptos para enseñar las matemáticas con sentido. *UNO, 70,* 48-54.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Granada: Comares.

Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Bases matemáticas para la educación primaria*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Tonucci, F. (1989). *Cómo ser niño*. Barcelona: Barcanova.

Zeichner, K. (1983). Alternative paradigms of teacher education. *Journal of Teacher Education, XXXIV*(3), 3–9.

LA DIMENSIÓN AFECTIVA Y EL ANÁLISIS COGNITIVO EN UN MODELO DE FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS BASADO EN EL ANÁLISIS DIDÁCTICO

The Affective Dimension and the Cognitive Analysis in a Mathematics Teacher Education Model Based on the Didactic Analysis Model

María José González-López[a] *y Pedro Gómez*[b]
[a]Universidad de Cantabria, España
[b]Universidad de Los Andes, Colombia

Resumen

El análisis cognitivo se ha desarrollado con bastante profundidad en los diferentes modelos del análisis didáctico. No obstante, se ha trabajado menos el papel y lugar de la dimensión afectiva dentro del modelo. En este capítulo, describimos cómo hemos incluido la dimensión afectiva en el análisis cognitivo de la versión del modelo del análisis didáctico que utilizamos como fundamento para el diseño e implementación de un programa de formación de profesores de matemáticas en ejercicio en Colombia.

Palabras clave: análisis cognitivo, análisis didáctico, dimensión afectiva, formación de profesores de matemáticas

Abstract

Cognitive analysis has been profusely developed in the several didactic analysis models known. Nevertheless, very little work has ben done on the role and place of the affective dimension in the model. In this chapter, we describe how we have included the affective dimension within the cognitive analysis in the version of the didactic analysis model that support the design and implementation of a mathematics teacher education program in Colombia.

Keywords: *affective dimension, cognitive analysis, didactic analysis, mathematics teacher education*

González, M. J. y Gómez, P. (2016). La dimensión afectiva y el análisis cognitivo en un modelo de formación de profesores de matemáticas basado en el análisis didáctico. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 153-162). Granada: Comares.

La dimensión afectiva en el análisis cognitivo

Si bien el análisis cognitivo se centra fundamentalmente en aspectos relacionados con el conocimiento matemático —lo que solemos llamar lo cognitivo—, su propósito es contribuir a mejorar el rendimiento de los estudiantes. El origen del bajo rendimiento de los estudiantes en matemáticas no solo se explica desde una dimensión puramente cognitiva centrada en la falta de conocimiento. También intervienen otros factores de tipo afectivo. El dominio afectivo aglutina un «extenso rango de sentimientos y humores (estados de ánimo) que son generalmente considerados como algo diferente de la pura cognición, e incluye como componentes específicos de este dominio las actitudes, creencias y emociones» (McLeod y Adams, 1989, p. 245).

El estudio del dominio afectivo es complejo puesto que las interacciones entre lo cognitivo y lo afectivo constituyen un imbricado mosaico de factores y particularidades en cada persona. En el ámbito educativo, la consideración de lo afectivo es relativamente reciente (unos 30 años). Se sabe que lo afectivo influye de forma importante en el rendimiento de los estudiantes, pero no se ha logrado establecer correlación fuerte entre los factores analizados y dicho rendimiento, y distintos autores reportan inconsistencias en este campo (Andrews, Diego-Mantecón, Vankúš y Op 't Eynde, 2011). Lo que el estudiante cree sobre las matemáticas influye en sus emociones al estudiar matemáticas, y esto lo predispone a tener distintas actitudes. Por ejemplo, un estudiante que tenga una creencia negativa sobre sí mismo ante el aprendizaje de las matemáticas, tenderá a sentir inseguridad al resolver problemas de matemáticas y ello podrá llevarle a tener una actitud de rechazo hacia las mismas. Pero también puede ocurrir que un estudiante con una creencia positiva sobre las matemáticas, como por ejemplo, su utilidad, no se sienta bien ante tareas matemáticas concretas y, como consecuencia, también tienda a rechazarlas. Igualmente, resulta paradójico que, aunque el estudiante se muestre confiado y seguro de sus capacidades, no llegue a implicarse en el futuro: «Me encantan, pero no soy capaz de hacer una carrera que lleve muchas Matemáticas» (Báez, 2007, p. 304). También se sabe que la cognición y el afecto se influyen uno a otro de forma recíproca: por una parte, la experiencia que tiene el estudiante cuando aprende matemáticas le provoca emociones e influye en su actitud y en la formación de sus creencias. A su vez, las emociones, creencias y actitudes del estudiante influyen en su rendimiento académico (Diego, 2011).

Nuestra preocupación sobre el papel del dominio afectivo en el análisis cognitivo surge del trabajo que hemos venido realizando en un programa de formación de profesores de matemáticas basado en el modelo del análisis didáctico. En este programa, los grupos de profesores realizan un ciclo de planificación, implementación y evaluación de una unidad didáctica sobre un tema concreto de las matemáticas escolares. En la fase de planificación, los grupos analizan el tema que han escogido con base en una versión de los análisis que componen el modelo del análisis didáctico (Gómez y González, 2013): análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación.

Al final de esta primera fase, los grupos de profesores en formación producen un diseño curricular para su tema y la implementan en el aula. Ellos analizan la información que recogen durante la implementación para establecer las fortalezas y debilidades de su propuesta y mejorarla.

A continuación, mostramos cómo hemos incluido el dominio afectivo dentro del análisis cognitivo, a través de un constructo que tiene gran influencia en el rendimiento de los estudiantes y al que consideramos especialmente útil desde el punto de vista de la planificación: la motivación.

La Motivación

El término motivación se viene definiendo desde hace años en la literatura sobre investigación educativa. Lejos de haberse llegado a un consenso sobre su significado, se pueden encontrar descripciones muy diversas y un amplio abanico de recomendaciones para el profesor. En todo caso, asumiremos la definición de motivación dada por González y Tourón (1992) como el «proceso que explica el inicio, dirección, intensidad y perseverancia de la conducta encaminada hacia el logro de una meta, modulado por las percepciones que los sujetos tienen de sí mismos y por las tareas a las que se tienen que enfrentar» (p. 285). En situaciones educativas, la motivación hace referencia al grado de participación y perseverancia de los estudiantes al enfrentarse a una tarea.

La motivación se ha analizado en la literatura desde distintos puntos de vista teóricos. Eccles y Wigfield (2002) realizan un compendio. Mencionamos aquí algunos de los que nos resultan más interesantes para abordar la planificación de un tema de las matemáticas escolares.

Teorías centradas en las expectativas sobre uno mismo («expectancy»)

Estas teorías analizan las creencias de los sujetos sobre su propia competencia, sobre su eficacia, sobre las expectativas que tienen de tener éxito y sobre su sentido de control sobre los resultados de un proceso. En el ámbito del aprendizaje de las matemáticas, se analiza la apreciación del estudiante sobre sus posibilidades para resolver problemas. Cuando los estudiantes responden afirmativamente a la pregunta «¿puedo resolver esta tarea?», tienen más garantías de éxito para resolverla y aumenta su interés por resolver tareas más complejas. Las siguientes frases expresan creencias sobre uno mismo como estudiante de matemáticas.

- — Se me dan bien las matemáticas.
- — Cuando me enfrento a un problema de matemáticas tengo confianza en que encontraré la solución.
- — Aunque me esfuerce mucho tratando de resolver problemas de matemáticas no lograré encontrar la solución.

Teorías centradas en los factores que influyen en el compromiso

Algunos estudiantes creen que sí pueden lograr resolver una tarea, pero, de hecho, no encuentran interés en resolverla. Por tanto, algunas teorías analizan las razones por las cuales un estudiante se compromete con su propio aprendizaje. Estas teorías separan los factores en intrínsecos (disfrute personal, curiosidad, ganas de mejorar) y extrínsecos (recibir algún tipo de recompensa: aprobar, recibir el reconocimiento de la familia o de los compañeros). Algunas de estas teorías analizan los objetivos que quiere lograr el estudiante. Por ejemplo, Ames (1992) distingue entre objetivos que implican a la tarea —que se refieren a la apreciación del estudiante sobre la utilidad, interés o importancia de una tarea— y objetivos que implican al ego, similares a los factores intrínsecos. Los estudiantes que tienen objetivos que implican al ego disfrutan al competir con otros y prefieren tareas que saben que están a su alcance. Los estudiantes que tienen objetivos que implican a la tarea prefieren tareas retadoras y están más interesados en su propio progreso que en superar a otros.

Teorías que entrelazan la motivación y la cognición

La característica principal de estas teorías es que analizan cómo los sujetos regulan su comportamiento para lograr los objetivos de aprendizaje (Schunk y Zimmerman, 1994). Además de tratar la motivación como elemento que conduce a tomar la decisión de actuar, observan cómo el sujeto se involucra en la acción. Así, se proponen estrategias cognitivas de control que ayudan a los sujetos a centrarse en la información pertinente, a evitar distractores, a optimizar la toma de decisiones, etc. Las estrategias cognitivas se complementan con estrategias de control emocional, que consisten en inhibir estados emocionales como la ansiedad y fortalecer estados emocionales positivos hacia la resolución de una tarea.

Enfoques y expectativas de tipo afectivo

El vínculo de la motivación del estudiante con el contenido matemático se expresa a través de varios aspectos generales del dominio afectivo que el profesor también debe prever al planificar un tema de las matemáticas escolares. Teniendo en cuenta que el enunciado de expectativas de aprendizaje es uno de los propósitos principales del análisis cognitivo, debe complementarse mediante el enunciado de expectativas de tipo afectivo. De esta forma, incluimos el dominio afectivo dentro del análisis cognitivo. A continuación, presentamos la estructura y los niveles de concreción con los que esas expectativas de tipo afectivo se pueden formular.

Cada uno de los enfoques teóricos que enunciamos en el apartado anterior tiene unos focos de atención preferentes en el ámbito educativo que nos permiten expresar expectativas de tipo afectivo asociados a cada enfoque. Además, dentro de cada enfoque, consideraremos distintos niveles de concreción de los enunciados.

Enfoque centrado en las expectativas sobre uno mismo

El enfoque teórico que centra su interés en las expectativas sobre uno mismo pone el foco de atención en analizar la autoestima del estudiante y su confianza al resolver los problemas que se le proponen. Así pues, las expectativas de tipo afectivo que podemos enunciar asociadas a este enfoque son

— EG1: desarrollar la autoestima y
— EG2: desarrollar la confianza en uno mismo.

Además, es importante manejar un nivel de concreción más concreto que sea útil para poder analizar posteriormente cómo y porqué las tareas matemáticas que formen parte de la propuesta docente sirven para desarrollar las expectativas de tipo afectivo enunciadas. Para ello, una vez decidido que se desea desarrollar la confianza en el estudiante, es necesario identificar acciones concretas en las que el estudiante debe desarrollar esa confianza. Estas acciones pueden estar asociadas al nivel superior de expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo (competencias, procesos generales o capacidades matemáticas fundamentales). Por ejemplo, se pueden enunciar las siguientes expectativas de tipo afectivo:

— Desarrollar confianza para comunicar información.
— Adquirir seguridad al proponer y llevar a cabo estrategias de resolución de problemas.

Adicionalmente, se puede aumentar más el nivel de concreción, al identificar las acciones del tema matemático específico en las que es importante que el estudiante desarrolle confianza. Por ejemplo, una acción significativa en el tema Teorema de Pitágoras es calcular longitudes en triángulos. Así pues, podemos enunciar la expectativa de tipo afectivo siguiente.

— Desarrollar confianza en las propias habilidades para calcular longitudes en triángulos al utilizar el Teorema de Pitágoras.

Enfoque centrado en factores personales intrínsecos y extrínsecos

El enfoque teórico que centra su interés en considerar los factores personales intrínsecos y extrínsecos que intervienen en la motivación del estudiante pone el foco de atención en analizar el interés del estudiante por aprender. Así pues, las expectativas de tipo afectivo que podemos enunciar asociadas a este enfoque son del siguiente tipo.

— EG1: desarrollar interés por aprender.
— EG2: desarrollar curiosidad por aprender.

Esta expectativa general puede concretarse, al identificar expectativas de aprendizaje de nivel superior en las que el profesor desea que el estudiante desarrolle interés y curiosidad. Las siguientes son ejemplos de este tipo de expectativas.

— Desarrollar interés por matematizar una situación real.
— Desarrollar interés por formular conjeturas o hipótesis.

Y, si concretamos aún más, se pueden identificar los aspectos más significativos de un tema matemático sobre los que es importante que el estudiante desarrolle su interés y curiosidad. Por ejemplo,

— desarrollar curiosidad por descubrir relaciones no conocidas entre figuras geométricas o
— incrementar el interés por conocer las aplicaciones del cálculo de áreas sombreadas.

Enfoque que entrelaza motivación y aprendizaje

El enfoque teórico que entrelaza la motivación y la cognición pone el foco de atención en analizar las actitudes y los hábitos favorables al aprendizaje. Así pues, las expectativas de tipo afectivo más generales que podemos enunciar asociadas a este enfoque se refieren, en relación con el aprendizaje, a desarrollar las siguientes expectativas.

— EG1: actitud.
— EG2: predisposición.
— EG3: hábitos.

También se puede concretar este enunciado general, al vincularlo al nivel superior de expectativas de aprendizaje de tipo cognitivo. Las siguientes son expectativas de tipo afectivo de este tipo.

— Valorar positivamente la precisión y utilidad del lenguaje matemático.
— Desarrollar una predisposición favorable a emplear distintos sistemas de representación.
— Desarrollar el hábito de verificar los resultados obtenidos al resolver problemas.
— Desarrollar perseverancia en el planteamiento y resolución de situaciones relacionadas con las matemáticas.
— Ser cuidadoso y preciso al expresar el resultado de un problema.
— Desarrollar voluntad y gusto por el razonamiento y la justificación de las propiedades matemáticas.

Si concretamos aún más, se pueden identificar los aspectos más significativos de un tema matemático sobre los que es importante que el estudiante desarrolle buenas actitudes, predisposición y hábitos. Los siguientes son ejemplos de este tipo de concreción.

— Tener disposición favorable para realizar, estimar y expresar correctamente medidas de objetos, espacios y tiempos, adaptados al contexto en que se realiza la medición.
— Desarrollar disposición favorable para realizar las tareas de subdivisión de polígonos en partes iguales.
— Desarrollar cuidado y precisión en el uso de los diferentes instrumentos de medida y en la realización de mediciones.

- Valorar la utilidad de la geometría para conocer y resolver diferentes situaciones relativas al entorno.
- Valorar el orden que aportan las diferentes representaciones para mostrar conjuntos de permutaciones (especialmente la aportación del diagrama de árbol como forma de pasar de lo particular a lo general).
- Desarrollar gusto por la precisión, el orden y la claridad en el tratamiento y presentación de datos y resultados relativos a observaciones, experiencias y encuestas.

Enunciado de las expectativas de tipo afectivo

Las ideas anteriores sugieren un procedimiento para redactar expectativas de tipo afectivo relacionadas con un tema de las matemáticas escolares. Hemos establecido tres enfoques teóricos. Para cada uno de ellos, hemos establecido una o más expectativas de carácter general. Estas expectativas generales se pueden concretar en términos de una o más expectativas de aprendizaje de nivel superior. A su vez, cada una de estas expectativas de tipo afectivo se puede concretar en términos del contenido del tema. Describimos este procedimiento en el esquema de la Figura 1 y lo ejemplificamos parcialmente con el primer enfoque teórico.

Figura 1. *Redacción de expectativas de tipo afectivo.*

El esquema de la Figura 1 pone de manifiesto la complejidad del dominio afectivo y la multiplicidad de expectativas de tipo afectivo que un profesor puede formular para un tema de las matemáticas escolares. Se aprecia que hay una gran cantidad de combinaciones posibles. No obstante, en un proceso de planificación, es necesario controlar la complejidad de las expectativas de tipo afectivo que se enuncian, puesto que deben ser útiles para analizar posteriormente cómo y porqué las tareas matemáticas que forman parte de la unidad didáctica sirven para desarrollar las expectativas enunciadas. Con el propósito de lograr ese control y así ser más eficaces en la consideración de lo afectivo en los otros análisis del análisis didáctico, proponemos que se maneje un número controlable de expectativas de tipo afectivo asociadas al tema matemático concreto.

Por ejemplo, para el tema de Áreas sombreadas, un profesor puede seleccionar el segundo enfoque teórico, centrarse en la expectativa general de desarrollar interés y curiosidad por aprender, y concretarla (desde la perspectiva de la capacidad matemática fundamental de matematizar) en desarrollar interés por matematizar una situación real. Finalmente, puede concretar esta expectativa en su tema en términos de

— EA1: incrementar el interés por conocer las aplicaciones del cálculo de áreas sombreadas.

De la misma forma, puede seleccionar el tercer enfoque teórico con la expectativa general de desarrollar actitud, predisposición y hábitos favorables al aprendizaje, y concretarla, para la capacidad matemática fundamental de representación, en desarrollar una predisposición favorable a emplear distintos sistemas de representación. En términos de su tema matemático, esta expectativa se puede concretar en, por ejemplo, las dos expectativas de tipo afectivo siguientes.

— EA2: valorar la utilidad del lenguaje algebraico para expresar relaciones entre cantidades de área de figuras geométricas.
— EA3: desarrollar una actitud favorable a interpretar en términos geométricos las expresiones simbólicas referidas a áreas de figuras geométricas.

Una vez que el profesor ha redactado las expectativas de tipo afectivo relacionadas con su tema, puede describir la estructura de esa selección, al indicarlo como en la tabla 1. Cada fila de la tabla corresponde a una de las expectativas de tipo afectivo que él ha redactado para su tema concreto. Por ejemplo, en la tabla 1, la segunda fila identifica la expectativa afectiva EA2 del ejemplo que hemos venido presentando sobre Áreas sombreadas (valorar la utilidad del lenguaje algebraico para expresar relaciones entre cantidades de área de figuras geométricas). En las siguientes columnas, el profesor puede indicar el origen de esa expectativa dentro de la estructura de enfoques y niveles de expectativas que hemos mencionado. En el caso de la expectativa EA2, el profesor indica en la tabla que esa expectativa corresponde al segundo enfoque teórico (marca en la columna 3) y, dentro de ese enfoque teórico, a la segunda expectativa general (marca en la columna 6) que, en este caso, se refiere a desarrollar curiosidad por aprender. Para cada enfoque teórico, las expectativas generales son diferentes, como lo indicamos anteriormente. Finalmente, en las columnas encabezadas por el título Capacidades matemáticas fundamentales, el profesor indica en qué capacidad matemática fundamental se concreta la expectativa afectiva (en este caso, en la capacidad matemática fundamental Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico, formal y técnico).

Tabla 1. *Estructura de las expectativas de tipo afectivo*

	Enfoque			*Generales*			*Capacidades matemáticas fundamentales*						
EA	1	2	3	EG1	EG2	EG3	DRP	M	C	Ra	U	Re	H
1		+		+			+						
2			+		+						+		
3			+	+							+		

Nota. EA: expectativa de aprendizaje; EG: expectativa general;
DRP: diseño de estrategias para resolver problemas; M: matematización; C: comunicación;
Ra: razonamiento y argumentación; U: Utilización de operaciones y un lenguaje simbólico,
formal y técnico; Re: representación; H: utilización de herramientas matemáticas

Conclusión

En este capítulo, mostramos cómo hemos incluido la dimensión afectiva en el análisis cognitivo. Para ello, nos centramos en la idea de motivación. Establecemos tres enfoques con base en las teorías sobre este tema. Proponemos un procedimiento para formular expectativas de tipo afectivo de acuerdo con una estructura que tiene en cuenta el enfoque, la expectativa de aprendizaje de nivel superior y el contenido matemático específico que se quieren abordar.

La formulación de expectativas de tipo afectivo es importante en los demás análisis del modelo del análisis didáctico. Estas expectativas se convierten en criterios para el análisis y modificación de las tareas que configuran la unidad didáctica. Hemos desarrollado un procedimiento para este propósito (que no describimos aquí) en el análisis de instrucción. Con base en ese procedimiento, los grupos de profesores en formación pueden establecer a priori en qué medida cada tarea contribuye a las expectativas de tipo afectivo que han propuesto. Los resultados de ese análisis los puede llevar a modificar una o más tareas para mejorar su contribución a esas expectativas. Finalmente, y de acuerdo con otro procedimiento, los grupos de profesores en formación establecen, durante la implementación, la contribución en la práctica de su unidad didáctica a las expectativas de tipo afectivo que formularon inicialmente.

Referencias

Ames, C. (1992). Classrooms: Goals, structures, and student motivation. *Journal of educational psychology, 84*(3), 261–271.

Andrews, P., Diego-Mantecón, J., Vankúš, P. y Op 't Eynde, P. (2011). Construct consistency in the assessment of students' mathematics-related beliefs: a three-way cross-sectional pilot comparative study. *Acta Didactica Universitatis Comenianae - Mathematics, 11*, 1–25.

Báez, A. (2007). *El autoconcepto matemático y las creencias del alumnado: su relación con el logro de aprendizaje, un estudio exploratorio, descriptivo e interpretativo en la ESO.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Oviedo, Oviedo.

DIEGO, J. M. (2011). *Clarifying the field of student mathematics-related beliefs: developing measurement scales for 14/15-year-old students across Bratislava, Cambridgeshire, Cantabria and Cyprus.* Tesis de doctorado no publicada, Universidad de Cambridge, Cambridge.

ECCLES, J. S. y WIGFIELD, A. (2002). Motivational beliefs, values, and goals. *Annual review of psychology, 53*(1), 109–132.

GÓMEZ, P. y GONZÁLEZ, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121–139). Granada: Comares.

GONZÁLEZ, M. C. y TOURÓN, J. (1992). *Autoconcepto y rendimiento escolar. Sus implicaciones en la motivación y en la autorregulación del aprendizaje*. Pamplona, España: EUNSA.

MCLEOD, D. B. y ADAMS, V. (1989). *Affect and mathematical problem solving: A new perspective*. Berlin: Springer-Verlag.

SCHUNK, D. H. y ZIMMERMAN, B. J. (Eds.). (1994). *Self-regulation of learning and performance*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

HISTORIA

SOBRE EL ANÁLISIS DIDÁCTICO DE LA RAZÓN

On the Didactic Analysis of the Ratio

Bernardo Gómez
Universidad de Valencia, España

Resumen

Se presentan aquí los principales aportes que la investigación educativa en Didáctica de las Matemáticas nos ofrece sobre el constructo razón. Con este documento se presenta el marco teórico que nuestro grupo de investigación de PNA del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valencia utiliza para delimitar las subunidades del análisis de contenido y de instrucción propios de un análisis didáctico del modelo de enseñanza de la razón.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, razón, cantidades relativas, práctica educativa

Abstract

The main contributions of the educational research in Didactic of the Mathematics on the ratio construct are presented here. With this document we expose the elements of the theoretical frame that our group of PNA of the Didactic of Mathematics Department of the Valencia University, uses to delimit the subunits of the analysis of content and of instruction own of a didactic analysis to the teaching model of the ratio.

Keywords: *Didactics, mathematics, ratio, relative quantities, educational practice.*

Introducción

En la vida diaria hay cantidades que no se consideran en términos absolutos, sino relativos, como por ejemplo, cuando hablamos de que un coche corre más o consume más que otro, no por que ande más kilómetros o por que gaste más litros, sino por que anda más kilómetros por hora o gasta más litros por km.

Gómez, B. (2016). Sobre el análisis didáctico de la razón. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, M. y Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 165-174). Granada: Comares.

La capacidad para pensar las cantidades de esta manera relacional amplía el rango de aplicabilidad de ciertas palabras que inicialmente se han asociado a los conceptos aditivos, como sucede en este caso con la palabra «más» que adquiere dos significados, uno absoluto y otro relativo, ambos pertinentes y con sentido. En estas situaciones lo esencial es saber distinguir cuando es más apropiado el significado relativo que el absoluto de las cantidades y en ese caso cual es el referente con el que se comparan.

Esta comparación cantidad/referente involucra al concepto matemático de razón, pero no en el sentido griego o interno, de comparación de cantidades de una misma magnitud (Libro V de los Elementos de Euclides), sino en el sentido externo, de comparación de magnitudes de diferente especie.

La ampliación de la noción griega de razón, al permitir comparar cantidades de magnitudes diferentes, es decir, al constituirse la razón no solo como una relación en una magnitud sino también entre magnitudes, desplaza el énfasis de la acción de medir a la producción de cantidades de naturaleza intensiva en el sentido de Schwartz (1988). Estas son fácilmente reconocibles porque, a menudo, contienen la palabra «por» (km por hora, litros por km, personas por m^2, euros por ítem, etc.) y porque suelen generar una tercera magnitud derivada pero diferente a las dos que se comparan (velocidad, consumo, densidad, precio, etc.).

La algoritmización de estas razones da el tanto por uno o el tanto por cien; que es la forma escolar de tratar con ellas, pero esto eclipsa el verdadero significado de la razón, lo que para Freudenthal la hace valiosa. Esto es, no el de cociente de enteros que resulta de considerar la razón como una función de un par ordenado de números o de valores de magnitud; eso lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, pero éstos lo son en el sentido algorítmico: hay una receta para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido – ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3 de cada 4 diciendo ¾?, o ¿qué se ha obtenido si se contesta transformando la razón en cociente, esto es si se lee 3 es a 4 como si dijera 3 dividido por 4?, uno puede interpretarla así, pero es la forma equivocada.

El significado propio de la razón no reside pues en el proceso por el que se le asigna un valor, sino en hablar de igualdad o desigualdad de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir a es a b como c es a d, sin anticipar que a es a b puede reducirse a un número o valor de magnitud a/b de modo que entonces ya que c es a d es lo mismo: $a/b=c/d$ (Freudenthal, 1983, p. 180).

La razón en la enseñanza

En la enseñanza, la razón no está bien tratada ya que a menudo lo que se fomenta es la manipulación sin sentido de símbolos y fórmulas (Hoffer, 1988, p. 285 y 288). Sobre esta misma idea, Streefland (1985, p. 86) señala que la enseñanza de la razón tiene un enfoque precario, pobre y breve, por su desconexión de la realidad, por la falta real de aplicaciones, que son esporádicas, a posteriori e inútiles para la construcción del concepto.

En el ámbito de la formación inicial y permanente de los profesores también se ha constatado que la razón es un tema pobremente comprendido, que a menudo es técnico, esquemático, desconectado e incoherente, y que cuando se aplican métodos efectivos en su enseñanza el impacto es [positivo] tanto para los estudiantes como para los profesores (Ben-Chaim, Ilany y Keret, 2002).

En el estudio de qué tipo de problemas han sido los protagonistas principales en la historia y en los libros escolares de matemáticas de primaria y secundaria, relativos a la razón y cómo estos problemas se han encargado de organizar el proceso de enseñanza aprendizaje, se puede observar la importancia otorgada a la relación de igualdad, tener la misma razón, por su carácter definitorio de la proporción y cuya generalización es la proporcionalidad. Este hecho, podría explicar el escaso interés del curriculum implementado por mostrar la razón en la relación de desigualdad, tener mayor o menor razón, a pesar de sus múltiples e importantes aplicaciones en la vida diaria de los ciudadanos.

En relación con la razón en la relación de igualdad, las situaciones escolares más habituales en que interviene son las que se agrupan en los contextos de proporcionalidad. Por su parte, las situaciones más habituales en las que interviene la razón en la relación de desigualdad son las cotidianas de las ofertas comerciales, como por ejemplo aquellas en las que interesa saber cuál es la mejor compra. En estas situaciones, que no son proporcionales, interviene el objeto mental «relativamente», cuyo uso más extendido lo sitúa Freudenthal (1983) en los contextos de comparación de parejas de exposiciones y composiciones (más adelante).

La razón y sus contextos de uso

Los contextos curriculares más habituales de la relación de igualdad son: proporcionalidad numérica, escalas, pendiente y Tales (Fernández y Gómez, 2007).

1. Proporcionalidad numérica. Se incluyen aquí aquellos problemas o situaciones que en la Aritmética corresponden al estudio de las magnitudes proporcionales. Estos incluyen los problemas aritméticos clásicos de las aplicaciones de las reglas de tres simple y compuesta.

2. Escala. Se incluyen aquí aquellos problemas o situaciones que corresponden a fenómenos que se pueden modelar o representar por medio de transformaciones del plano en el plano con las siguientes propiedades: Las medidas de ángulos correspondientes se conservan, y las relaciones entre las medidas (longitudes) de segmentos de recta homólogos entre dos figuras semejantes se pueden expresar mediante un número entero o fraccionario que es constante. Fenómenos de este tipo son reducciones o ampliaciones y representaciones planas de objetos reales, tales como planos de casas, mapas, y cosas por el estilo.

3. Pendiente. Aquí se incluyen los fenómenos asociados a la proporcionalidad que se pueden visualizar a través de representaciones en un plano cartesiano cuyos ejes se construyen con aquellas cantidades que se relacionan, tales como distancia medida en

kilómetros y el tiempo en horas para representar de forma gráfica el movimiento rectilíneo y uniforme. Esa representación de situaciones de proporcionalidad por medio de una línea recta que pasa por el origen pone el énfasis en la relación entre las dos cantidades en juego y en aquello que se mantiene constante, el factor de proporcionalidad, en este caso la pendiente de la recta.

4. Tales. Se incluyen aquí los problemas que tradicionalmente se han llamado «Aplicaciones del Teorema de Tales»: partición de un segmento en n partes iguales, cálculo de longitudes de segmentos proporcionales, triángulos en situación de Tales y medición de distancias inaccesibles, etc., y sus implicaciones en la semejanza.

La amplitud de contextos de que es susceptible la razón lleva a Freudenthal a agruparlos en *Exposiciones, Composiciones* y *Constructos*, este último constructo al ser para situaciones preferentemente geométricas no se aborda en este documento.

Una exposición o una composición es una terna (Ω, M,) donde Ω es un conjunto, y a cada uno de sus elementos se le asocia una magnitud o una medida en M mediante una función ω. Lo que diferencia a las exposiciones de las composiciones es que en un caso el conjunto lo forman objetos, y en el otro, clases o partes de un universo. A menudo estos contextos aparecen por parejas, definidas sobre el mismo conjunto, y es ahí donde se puede requerir de la comparación de razones en situaciones de desigualdad.

1. Pareja de exposiciones. Sea, por ejemplo, Ω un conjunto de países y las funciones ω_1 y ω_2 son las que a cada país le asignan una población y una medida de su superficie, la razón externa ω_1:ω_2 es la densidad de población. La comparación de razones externas o densidades permite afirmar si un país tiene relativamente más, menos o igual número de habitantes.

Tabla 1. *Ejemplo de una pareja de exposiciones*

Ω= {países}	México	España
ω_1: Ω población	120.000.000 h	40.000.000 h
ω_2: Ω superficie	4.500.000 km2	500.000 km2
ω_1/ω_2 densidad	1200/45=26,6 h/km^2	400/5 =80 h/km^2

2. Pareja de composiciones. Si Ω es el conjunto de metales cuya aleación es el bronce, y las funciones ω_1 y ω_2 son las funciones de masa ω_1 (cobre, zinc) = (20 kg, 10 kg), ω_2 (cobre, zinc) = (40 kg, 25 kg), la comparación de razones internas (cobre, zinc) permite saber qué aleación tiene relativamente más, menos o igual cobre que zinc.

Tabla 2. *Ejemplo de una pareja de composiciones*

Ω={bronce}={cobre, zinc}	cobre	zinc	$\omega_i(x_1)/\omega_i(x_2)$
ω_1: Ω → masa	20 kg	10 kg	2/1=2
ω_2: Ω → masa	40 kg	25 kg	40/25=1,6

Así que la razón puede usarse para comparar multiplicativamente las cantidades de una exposición o composición, formando cantidades relativas que permiten contestar a la pregunta «de qué o donde hay tantas veces más, menos o igual» que …

Razón y cognición

La investigación precedente sobre razón y proporción ha permitido identificar un cuerpo de conocimientos que ofrece fundamentos para el análisis cognitivo de las dificultades y desafíos que los estudiantes y profesores tienen que hacer frente cuando abordan su enseñanza y aprendizaje. Destacamos lo siguiente:

1. Tipos de problemas, estrategias y métodos. A saber, problemas de valor perdido[1], comparación numérica[2] y comparación y predicción cualitativa[3]; estrategias correctas como la razón unitaria[4], factor de cambio[5], fraccion[6], algoritmo del producto cruzado, y construcción progresiva (building-up)[7]; y métodos para comparar razones, como el de la unidad[8] y el del múltiplo común[9].

2. Formas de la razón. Hay dos formas principales de plantear las razones: una es por comparación de dos cantidades multiplicativamente y la otra es por unión o composición, juntándolas para hacer una unidad compuesta cuya iteración o equipartición preserva la relación multiplicativa. Un ejemplo del primer caso es cuando decimos que una cosa es tantas veces mayor o menor que otra[10], y un ejemplo del segundo es cuando

[1] En *Missing-value problems* three pieces of numerical information are given and one piece is unknown (Cramer y Post, 1993, p. 404).

[2] En *Numerical comparison problems* two complete rates are given, the rates are to be compared (Cramer y Post, 1993, p. 404).

[3] *Qualitative prediction and comparison problems*. These types of problems require comparisons not dependent ton specific numerical values (Cramer yPost, 1993, p. 405).

[4] The unit rate strategy. As the name implies this is a «how many for one?» strategy (Cramer y Post, 1993, p. 406).

[5] This is a «times as many» strategy. A student using this method would reason as follows: «It takes twenty minutes to drive four miles. Since Mark is driving three times as far, it should take him three times as long (Cramer y Post, 1993, p. 406).

[6] Students treated the rates as fractions, applying the fraction rule for equivalence fractions (multiply the numerator and denominator) (Cramer y Post, 1993, p. 405 y 406).

[7] A short of «pattern recognition and replication» strategy (Lesh, Post y Bher, 1988, p. 105).

[8] The unit method consists of scaling both ratios (up and down) to obtain ratios that are equivalent to ones reported in terms of a single unit, if possible. It is because of this technique of scaling down to a single unit that this is called the unit method (Hoffer, 1988, p. 298).

[9] The method consists of finding a common multiple of one of the units for both of the ratios involved in the problem; scaling the ratios to utilize that common multiple; and comparing the other values in the two ratios (Hoffer, 1988, p. 298).

[10] A multiplicative comparison involve asking, «how many times greater is one thing to another» (Lobato y Ellis, 2011, p. 18).

decimos que una persona corre 900 metros en 5 minutos, o equivalentemente, 90 m. en 30 s, o 9 m. en 3 s.

3. Esquemas de pensamiento. La razón como unidad compuesta suele expresarse en las formas coloquiales «de cada» o «por cada», como en «2 de cada 3 personas fuman» o «hay 2 fumadores por cada 3 no fumadores». Estas formas de expresión llaman a dos esquemas de pensamiento: parte/todo y parte/parte. De acuerdo con Singer y Resnick (1992, p. 231-232), la forma «de cada» llama a un razonamiento basado en el esquema «parte/todo» y la forma «por cada» llama a uno basado en el esquema «parte/parte». La primera forma es directamente convertible a fracción: «2/3 de las personas fuman» pero la segunda no, ya que las cantidades son de naturaleza diferente y forman partes separadas de un todo, una no está contenida en la otra. No obstante, se puede pasar de parte/parte a parte/todo y de ahí a fracción cambiando el referente. Por ejemplo, contestando a la pregunta: ¿qué parte de las personas fuman?, que en «2 fumadores por cada 3 no fumadores» es 2/5.

4. «Ratio» y «rate». A veces las razones se plantean entre elementos de conjuntos distintos y no pueden plantearse mediante esquemas de pensamiento parte/parte o parte/todo, aunque admitan expresiones coloquiales «de cada» o «por cada». Es el caso, por ejemplo, de la velocidad, la densidad o el precio, pero en general a estas relaciones no se les llama «ratio» sino «rate» (tasa). Aunque en las razones, «rate», se suele poner una cantidad en relación con otra de diferente magnitud estas cantidades suelen referirse a una misma situación, como ocurre, por ejemplo, con el precio y el peso en una oferta comercial, o la distancia y el tiempo de un viaje. «Rate» también puede ser la razón de una misma cantidad expresada en unidades diferentes, como millas y kilómetros (1 milla, 1,6 km), e incluso la razón entre dos cantidades de la misma magnitud, pero sin ser una comparación parte/parte o parte/todo, como cuando se compara lo que cuesta una objeto en dos tiendas diferentes·.

Esta distinción dual entre las razones: «ratio» y «rate», también llamadas interna y externa, o dentro y entre, se sigue de la naturaleza de la relación multiplicativa entre las cantidades, que son valores de magnitud. Vergnaud (1983) sustenta esta dualidad en el carácter escalar o funcional de la relación multiplicativa que se da entre las cantidades, ya sea de un mismo espacio de medida, o bien de dos espacios de medida diferentes.

5. Covariación. La relación multiplicativa en una magnitud y entre magnitudes puede referirse a cantidades variables, entendidas en el sentido de la posibilidad de elección de un valor en un conjunto de ellos o de todos ellos. Esta posibilidad de elección entre los valores de una magnitud significa la posibilidad de cambiar de valor y esto es una apariencia de la variación. La cantidad que varía es la que cambia de valor. En el sistema escolar el estudio de relaciones entre cantidades variables por medio de la razón se hace en situaciones que implican covariación; esto es, el cambio simultáneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas, de tal modo que, en la covariación el concepto de razón se enlaza con los conceptos de proporción, a través de los de similitud estructural y dependencia lineal. La similitud estructural se

refiere a la igualdad de razones entre cantidades homogéneas, de una misma magnitud, especie o espacio de medida, y la dependencia lineal se refiere a la existencia de una ley de variación que liga el cambio de cantidades heterogéneas: las de una magnitud con las de otra. Este es el caso de que exista una relación entre ellas tal que dado un elemento o valor de una de las magnitudes se pueda obtener como consecuencia de esa relación un elemento o valor de la otra magnitud.

6. Invariancia y constancia de la razón. En las situaciones de covariación propias de la proporcionalidad, la razón de dos cantidades homogéneas, o lo que es lo mismo, del mismo espacio de medida, es equivalente a la razón de sus imágenes: $x_i/x_j= f(x_i)/f(x_j)$ para todo i, j natural (aunque dicha razón puede diferir de la que se forme entre otra pareja x_r/x_s del mismo espacio de medida). Freudenthal (1983, p. 184) se refiere a esta conservación de la razón como invariancia de la razón interna. Pero, también hay una cantidad que no cambia, que permanece constante y que surge como resultado de la razón generada por una cantidad de un espacio de medida y su imagen: $x_i/f(x_i)=k$. A esa propiedad de las razones externas Freudenthal (1983, p. 184) la llama constancia de la razón externa y a la cantidad k se la conoce como constante de proporcionalidad.

Cuando la constancia de la razón se da entre cantidades que son parte de un todo se presenta una relación independiente del todo, que no se necesita conocer, porque dicha relación no cambia de valor cuando cambia la cantidad de ese todo. En el ejemplo del zumo de naranja la constancia de la razón entre el zumo y el agua se manifiesta en que el sabor a naranja es el mismo tanto en un vaso como en una jarra de zumo, siendo por tanto independiente de la cantidad total de líquido que se considere. Esto es algo que a menudo no se tiene en cuenta al plantear razones, porque desde el punto de vista de los procesos cognitivos realizados por los estudiantes, «el todo» es un referente que guía y da sentido a la resolución.

7. «Unitizing». Lamon (1993, p. 58), al referirse a las capacidad de los estudiantes de pensar las cantidades en términos absolutos o relativos, según las asocien al pensamiento aditivo o multiplicativo, señala que los estudiantes, no solo necesitan reconocer que la comparación relativa es alternativa a su punto de vista aditivo, sino que necesitan desarrollar criterios para juzgar cuál de las dos perspectivas es la apropiada según sea el caso. A tal fin señala que aunque en el sistema escolar se pone el énfasis en enseñar a resolver los problemas de comparación de cantidades relativas mediante el método del valor unitario hay otras alternativas que se basan en pensar una cantidad de un modo diferente a como viene dada. Esto se puede ver con los problemas de las ofertas comerciales, por ejemplo, supóngase que la oferta es 3 botellines por 2€, y el «pack»es de 24 botellines, ¿cuál es el coste total del «pack». Para contestar a esta pregunta el método escolar habitual es el de hallar el coste unitario 2/3 y multiplicarlo por 24. Como alternativa al método del valor unitario escolar se puede pensar en 24 como 8 veces 3, por lo que para obtener la respuesta a la pregunta del problema basta con multiplicar 2 por 8. Esta manera de ver la cantidad total 24, en vez de en unidades simples, descompuesta en 8 unidades múltiples de 3 elementos, es un proceso denominado por Lamon «unitizing»,

que define como la habilidad de construir una unidad de referencia y reinterpretar la situación de acuerdo con esa unidad (1994, p. 93).

Hay una ligazón entre «unitizing» y pensar con flexibilidad acerca de una cantidad dada. De hecho, tiene ventajas poder pensar una cantidad así, ya que a menudo el contexto hace que sea mejor una manera que otra de mirar la cantidad. Una persona que es flexible en esto, y elige o anticipa la mejor manera de hacerlo es evidente que tiene ventaja sobre aquella que solo puede hacer las cosas de una sola manera. Sin embargo los libros de texto raramente estimulan esa flexibilidad, incluso favorecen procedimientos que van en contra del desarrollo flexible del uso de las unidades (2012, p. 105) o de la forma en que están compuestos los números.

8. «Norming». Otro proceso clave en la comparación de razones con referentes distintos, es el que Freudenthal denomina «norming». Bajo este nombre incluye las técnicas para transformar el referente de una determinada manera que favorezca la visualización de la comparación. Una de las formas de «norming» se da a través de la unificación de los antecedentes o de los consecuentes de las razones que se quieren comparar. Así, por ejemplo, la normalización se puede ligar a la unidad, bien sea simple o múltiple, como en las verbalizaciones «uno o varios de cada … o por cada…», y también se puede ligar al sistema de numeración decimal, en este caso el consecuente de la razón suele ser 100 y la razón un porcentaje o un decimal. Es evidente que estas técnicas también están supeditadas a la flexibilidad de pensamiento, ya que permiten elegir a conveniencia la forma de representar la razón: fracción, decimal, porcentaje o razón compuesta.

Ejemplos cotidianos donde es necesario aplicar el pensamiento relativo, y las técnicas de «norming», se encuentran en muchas situaciones de la vida real, especialmente en aquellas que afectan al ciudadano como consumidor reflexivo. Concretamente las ofertas comerciales que ofrecen descuentos sobre un mismo producto, a menudo normalizadas a porcentajes, fracciones, decimales, o a formas compuestas de la razón: «70% en la segunda unidad», por el mismo precio puedes elegir un 40% más de volumen o un 30% de descuento, «segunda unidad a mitad de precio», 3x2, etc. Por su tipología, se trata de tareas de comparación numérica multiplicativa, en donde hay que juzgar cuál de dos o más razones es mayor o menor, o tal vez iguales. La demanda para el consumidor reflexivo es la de comparar las ofertas para ver cuál es la más ventajosa, para ello hay que percatarse de que se trata de cantidades relativas y que por tanto hay que tener en cuenta a qué se refieren, es lo que comúnmente se llama «el referente». También hay que darse cuenta de cómo están presentadas las razones, y de cómo están normalizadas.

Estas diferencias, obligan a plantear procesos de homogeneización, reformulando la manera de enunciar las ofertas para unificar los referentes y mediante algún procedimiento algorítmico, ya sea del cociente, regla de tres, fracciones equivalentes, múltiplo común o construcción progresiva para normalizar de la misma forma, bien como porcentajes, decimales o fracciones.

Epílogo

Los aspectos señalados son aportes de la investigación que pueden ser tomadas como subdimensiones para el análisis didáctico de la razón, tanto para el análisis de contenido y descripción de los elementos constitutivos o definitorios de los modelos de enseñanza, como para la observación de los procesos cognitivos de los estudiantes cuando están intentando ser competentes en la resolución de las tareas que involucran esta noción, y a partiendo de esta información, diseñar y validar tareas que sean útiles para una fenomenología didáctica de la razón en el sentido de Freudenthal.

En relación con los proceso cognitivos, se ha podido constatar (Fernández, 2001, Valverde, 2012, Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, M., 2013, Gómez y García, 2015) que la escasa atención que presta el curriculum implementado a las relaciones de desigualdad tiene como efecto que la mayoría de los estudiantes y futuros profesores evidencian un escaso desarrollo del pensamiento relativo.

En un trabajo reciente con estudiantes de magisterio (Gómez, Monje, Pérez-Tyteca y Rigo, M., 2013, Gómez y García, 2015) a los que se les presentaron folletos de ofertas comerciales se observó que casi la mitad de una amplia muestra hicieron comparaciones propias del pensamiento aditivo, calcularon diferencias entre cantidades con independencia de sus referentes o ignoraron una parte relevante de la información, dando respuestas de carácter afectivo o subjetivo. Entre los que dieron indicios de pensamiento relativo, más de la mitad de ellos tropezaron con dificultades que no radicaron en los aspectos algorítmicos propios de las técnicas de normalización, sino que radicaron principalmente en el manejo de los referentes. Específicamente tuvieron dificultades con los referentes de las razones normalizadas a porcentajes mediante las que se expresan los descuentos y que son los que identifican las cantidades a comparar. La dificultad en el manejo de los referentes de las razones normalizadas a porcentajes concuerda con lo señalado por otros investigadores (ver Parker, 1997), y se puede interpretar como un efecto del modelo de enseñanza dominante que prioriza los aspectos procedimentales.

Referencias

Ben-Chaim, D., Ilany, B. S. y Keret, Y. (2002). Mathematical and pedagogical knowledge of pre-and in-service elementary teachers before and after experience in proportional reasoning activities. *Proceedings of the 26th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 81–88, Norwich, U.K.

Cramer, K. y Post, T. (1993). Proportional Reasoning. *The Mathematics Teachers,* vol. 86, pp. 404–407.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria*. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Fernández, A. y Gómez, B. (2007). Una organización de tareas de razón en semejanza para el diseño de un modelo de enseñanza. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.). *Investigación en Educación Matemática.*

Comunicaciones de los Grupos de investigación. XI Simposio de la SEIEM. Tenerife: SEIEM y U. de La laguna

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematics structures*. Dordrecht: D. Reidel. Hay una versión en español de algunos capítulos de este libro en Freudenthal, H. (2001). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados.* Traducción introducción y notas de Luis Puig. México, DF: Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN.

GÓMEZ, B. y GARCÍA A. (2015). What is a better buy? Precongress paper CERME 9 (9 Congress of the European Society for Research in Mathematics Education). Praga. TWG2.

GÓMEZ, B., MONJE, J., PÉREZ-TYTECA, P. y RIGO, M. (2013). Performance in ratio realistic discount task. En B. Ubuz, Ç. Haser y M.A. Mariotti (Eds.) *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, (pp. 293–302). Middle East Technical University. Manavgat-side/Antalya. Turquía: ERME.

HART, K. M. (1981). Children´s understandings of mathematics, 11–16, London: Murray.

HOFFER, A. (1988). Ratios and proportional thinking. En T. Post (Ed.) *Teaching mathematics in grades K-8: Research based methods*, (pp. 285–313). Boston: Allyn and Bacon.

LAMON, S. J. (1993). Ratio and proportion: connecting content and children's thinking. *Journal of Research in Mathematics Education*, *24*(1), 41–61.

LAMON, S. J. (1994). Ratio and proportion: Cognitive foundations in unitizing and norming. En G. Harel y J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics*, (pp. 89–120), Albany, NY: SUNNY Press.

LAMON, S. J. (2012). Teaching fractions and ratios for understanding. Essential content knowledge and instructional strategies for teachers (3.ª ed.). New York: Routledge.

LESH, R., POST, T. y BEHR, M. (1988). Proportional reasoning. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades*, (pp. 93–118), Reston, VA: NCTM.

LOBATO, J. y ELLIS, A. (2011). Developing essential understanding of ratios, proportion and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6–8 (2.ª ed.). Reston VA: NCTM.

PARKER, M. (1997). The ups and downs of percent (and some interesting connections). *School Science and Mathematics*, *97*(8), 406–412.

SCHWARTZ, J. L. (1988). Intensive quantity and referent transforming arithmetic operations. En J. Hiebert y M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades (*pp. 41–52). Reston,VA: NCTM; Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

SINGER, J. A. y RESNICK, L. B. (1992). Representations of proportional relationships: are children part-part or part-whole reasoners? *Educational Studies in Mathematics 23*, 231–246.

STREEFLAND, L. (1985). Search for the roots of ratio: some thoughts on the long term learning process (towards a theory), *Educational Studies in Mathematics, 16,* 75–94.

VALVERDE, G. (2012). Competencias matemáticas promovidas desde la razón y la proporcionalidad en la formación inicial de maestros de educación primaria. Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada, España.

VERGNAUD, G. (1983). Multiplicative structures. En R. Lesh y M. Landau (Eds.). *Acquisitions of mathematics concepts and processes, (*pp. 127–194), New York: Academic Press.

LOS LIBROS DE TEXTO COMO FUENTES PRIMORDIALES PARA LA INVESTIGACIÓN EN HISTORIA DE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Textbook as Primordial Sources for Research in History of Mathematics Education

Alexander Maz-Machado[a] *y Miguel Picado*[b]
[a]Universidad de Córdoba, España
[b]Universidad Nacional de Costa Rica, Costa Rica

Resumen

Este capítulo destaca los libros de texto de matemáticas como fuentes primarias de información en la investigación histórica y para su análisis en los estudios sobre Historia de la Educación Matemática. Se presentan propuestas de técnicas alternativas para el estudio de estos documentos. Particularmente, se ilustra la aplicación de estas técnicas con el estudio del concepto de fracción, y el análisis de conceptos vinculados al Sistema Métrico Decimal, en libros de texto de aritmética publicados en España en el siglo xix. Se destaca la manera no tradicional de abordar este tipo de investigación y algunos resultados sobresalientes para evidenciar el alcance del uso de estas técnicas.

Palabras clave: fracción, historia de la educación matemática, libros de texto de matemáticas, técnicas de análisis, sistema métrico decimal

Abstract

This chapter highlights mathematics textbooks as primary information sources in research about history and for their analysis in studies about History of Mathematics Education. It presents alternative techniques for the study of these documents. Specifically, it shows the application of these techniques for the study of the concept fraction and the analysis of the concepts linked to the Metrical Decimal System, in textbooks about arithmetic published in Spain during the xix *century. It is highlighted the non-traditional way of doing this kind of research and some outstanding results that show the scope of these technique*

Keywords: *fraction, history of mathematics education, mathematics textbooks, analysis techniques, Metrical Decimal System*

Maz-Machado, A. y Picado, M. (2016). Los libros de texto como fuentes primordiales para la investigación en historia de la educación matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 175-187). Granada: Comares.

La investigación en historia de la educación matemática

La investigación histórica en educación tiene una reconocida tradición e importancia (Cohen y Manion, 1990). La Educación Matemática, por su naturaleza, también ha sido objeto de análisis en las últimas décadas. Algunos ejemplos de esta tendencia la encontramos en estudios como Schubring (1987, 1991), Katz (1997), Barbin, Kronfellner y Tzanakiz (2012), entre otros.

En este marco, destacan numerosas publicaciones seriadas que han dedicado monográficos especiales a la historia de la educación matemática, como *For the learning of Mathematics y Plot;* y sobresale la existencia de revistas como *Revue d´Histoire des Mathematiques, Revista Brasileira de História da Matemática, International Journal for the History of Mathematics Education y BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics*, y de grupos de investigación como The International Study Group on the Relations between History and Pedagogy of Mathematics que abordan con exclusividad esta temática.

En España son frecuentes los trabajos sobre historia de la educación matemática en artículos publicados en revistas, congresos y varias tesis doctorales (Carrillo, 2005; López, 2011; Maz, 2005; Picado, 2012). Todo esto aunado a la existencia de un grupo de investigación en el seno de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). Esta proliferación de estudios, que continua en aumento tanto en España como a nivel internacional —visible en las contribuciones presentadas en eventos como el Congreso Ibero-americano de Historia de la Educación Matemática y el Congreso Internacional sobre Historia de la Educación Matemática—, conducen a tres cuestiones generales que interesa abordar: ¿qué se investiga sobre historia de la educación matemática?, ¿para qué se investiga? y ¿cómo se investiga?

A la luz de los trabajos publicados, las investigaciones en historia de la educación matemática han enfocado los conceptos matemáticos y su enseñanza, y los sistemas de medida, los libros de texto de matemáticas, las instituciones educativas, los autores de textos (y libros de texto) y matemáticos, la normativa educativa y los dictámenes curriculares que inciden y afectan a la enseñanza de las matemáticas y, entre otros, los métodos de enseñanza, en contextos y épocas específicas.

En cuanto a los propósitos, este tipo de investigación se hace, entre otras razones, porque el conocimiento de las dificultades que han afrontado matemáticos, profesores y estudiantes a través del tiempo, respecto a determinados conceptos, es útil para identificar y atender algunos de los problemas actuales en su enseñanza. También, porque permiten conocer cómo determinados entornos sociales, políticos, culturales, científicos o económicos han influenciado el desarrollo de las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, y su utilidad —de las matemáticas—. Así mismo, a través de estas investigaciones, ha sido posible conocer el proceso de flujo en la construcción y transmisión de los conocimientos matemáticos en las sociedades. Esto representa un intento por recuperar «la historia de las ideas para el provecho de la Didáctica de las matemáticas» (Gómez, 2003, p. 83).

En cuanto a cómo se investiga, Fox (1981) ha señalado que la experiencia y el conocimiento del investigador son fundamentales en las investigaciones históricas. Sin embargo, algunos investigadores iniciarán su carrera investigadora sin contar con los conocimientos y la experiencia que sólo se adquieren mediante profundas lecturas sobre el tema y el trabajo arduo. Este es el gran escollo para un investigador novel, porque cada investigador aplica su propio «método» y los manuales de investigación educativa son genéricos.

Así, cada investigación histórica, sobre historia de las matemáticas o sobre educación matemática, presenta especificidades (temáticas y contextuales) que la hacen particular y única; sin embargo, todas estarán caracterizadas por sus fuentes primarias: los registros documentales. Actualmente, el auge de los repositorios y la digitalización de ingentes volúmenes de documentos y libros de matemáticas (textos matemáticos o manuales educativos) facilitan esta labor.

Gómez (2003) afirma que la tendencia de los estudios histórico-epistemológicos en España se ha orientado por cinco enfoques: (a) la enseñanza desde una perspectiva histórica, (b) los obstáculos epistemológicos, (c) el modelo teórico-local, (d) el análisis de libros de texto, y (e) la reproducción en los estudiantes de las etapas en la historia y el enfoque cultural. Más de una década después no parece haberse alterado esta clasificación. En lo que sigue se acentúa el enfoque sobre el análisis de libros de texto, que forma parte del fundamento teórico y metodológico de las dos investigaciones mostradas en los apartados siguientes.

El análisis de libros de texto históricos de matemáticas

Los libros de texto de matemáticas presentan una diversidad de conceptos matemáticos, significados, procedimientos, representaciones y estrategias didácticas. Como registros históricos, «reflejan los hábitos y costumbres, la organización de las ideas, la actividad intelectual, las relaciones publicas de apropiación y exclusión del saber […] las modas y tendencias imperantes de una época» (Maz-Machado y Rico, 2015, p. 51). Son fuentes primarias para conocer el estado del conocimiento científico y cómo este se incardina en los planes de formación (Maz y Rico, 2009). Su análisis arroja información valiosa sobre las matemáticas, su difusión y enseñanza a través del tiempo. El estudio de estos documentos constituye «una actividad acertada en la investigación en didáctica de la matemática» (Picado, 2012, p. 113)

El lenguaje escrito asume un importante papel mediador entre el conocimiento matemático y el lector en determinada época; en esto radica la importancia epistemológica del análisis de los libros de texto de matemáticas desde el punto de vista histórico.

El estudio de libros de texto propicia un análisis de contenido. Este tipo de análisis puede ser cuantitativo o cualitativo. El primero, puede ser semántico, de cocitación, de aplicación de la ley de Zipf, entre otros. Desde el segundo enfoque, se orientar a lo conceptual, los significados, lo fenomenológico, los sistemas de representación, incluso a aspectos didácticos. También puede ser mixto, como por ejemplo el análisis de correspondencias.

Generalmente, el análisis de libros de texto se enmarca dentro de las pautas o «dimensiones» propuestas por Schubring (1987): el análisis de los cambios reconocidos en distintas ediciones de un libro de texto, la identificación de estos cambios en otros textos de la misma temática y la relación entre estos cambios y los cambios en el contexto.

Por su parte, Picado y Rico (2011a) proponen diversos criterios e indican procesos utilizados para seleccionar libros de texto de matemáticas de cara a realizar una investigación histórica. Picado, Rico y Gómez (2013) y Maz (2009) establecen una serie de criterios y pautas para el análisis de contenido de los libros de texto en este tipo de investigaciones vinculadas con la elección de las unidades de análisis, la elaboración de los indicadores o categorías y el fundamento lógico que guía la asignación de datos en cada categoría.

Los apartados siguientes muestran propuestas metodológicas para el análisis de libros de texto históricos de matemáticas. Primero, se presentan técnicas metodológicas alternativas para el análisis histórico de estas fuentes, y, segundo, se ejemplifica un análisis de libros de texto subrayando las tendencias conceptuales, procedimentales y didácticas identificadas en manuales de aritmética para la segunda enseñanza en la segunda mitad del siglo XIX, enfatizando en la implantación del SMD.

El concepto de fracción en los libros de aritmética de España en el siglo XIX

Como se ha señalado, la investigación de los libros de texto en la Historia de la Educación Matemática permite diferentes enfoques de acuerdo al objeto que se pretenda analizar, por ejemplo los autores, los tipos de problemas, los conceptos, las representaciones, los modelos, etc. En este apartado se muestra la utilización del análisis conceptual para obtener una visión de un concepto determinado en un periodo histórico y en un marco geográfico específico. Para ello se utiliza el concepto de fracción y los tipos de fenómenos en los que se usaba en España durante el siglo XIX y que se plasman en los libros publicados en el Reino, en ese siglo por autores españoles.

Se realizó un estudio exploratorio con una muestra de 15 libros, centrando el análisis únicamente en la parte de Aritmética cuando estos incorporan también Álgebra. En este se fijaron como unidades de análisis las definiciones de fracción y los problemas que incluyen fracciones en su enunciado. De esta forma se descartaron aquellos en los que las fracciones solo aparecen en los procesos de resolución. El propósito es presentar cuatro tratamientos u opciones diferentes a la hora de utilizar la información obtenida de los manuales para su análisis. En primer lugar se expone un análisis descriptivo tabular a partir del estudio de los significados explícitos por los autores, esta forma de análisis es frecuente en este tipo de estudios (Maz y Rico, 2015; Madrid y Maz-Machado, 2015).

En segundo lugar, se muestra un ejemplo de análisis de correspondencias para los tipos de fenómenos en los que se presentaban las fracciones. Este tipo de análisis se apoya en las interpretaciones tabulares que luego se transforman en variables nominales que son tratadas por un programa informático, *SPSS* en este caso, y arrojan una representación visual bidimensional. Esta técnica es más útil cuanto mayor sea el número de valores nominales que puedan adquirir las variables a analizar.

A continuación, se presenta una red de cocitación de los términos utilizados en las definiciones dadas por lo autores para la fracción y, finalmente, la representación de la red conceptual.

La primera opción de análisis de los resultados y su interpretación se presenta en la Tabla 1. Se hallaron ideas de fracción como medida, parte todo y cociente. Algunos autores presentan las tres, otros dos y algunos solamente una. Ocho de los 15 autores dan una definición basada en la idea de la fracción como parte todo. También ocho lo hacen recurriendo a la idea de cociente, mientras que sólo dos, Vallejo y Varas, también definen fracción como una medida, siendo esta idea propia de principios del siglo XIX. Varas es el único que utiliza las tres ideas.

Tabla 1. *Definición e interpretación de fracción en manuales del siglo* XIX

Unidad de análisis	*Noción*
«[…] quebrado es una cosa que tiene una parte, ó dos, ó tres ó muchas de algún entero, y no todas.» Atienza (1803, pp. 34-35)	Parte-todo
«Para formar juicio cabal de los quebrados, se debe considerar que la cantidad que se tomo como unidas, se compone ella misma de cierto número de unidades más pequeñas, […] Una ó muchas de estas partes forman lo que llamamos quebrado o fracción de la unidad. Se da también este nombre á los números que representan dichas partes.» «Puedes considerar también de otro modo un quebrado: se puede considerar el numerador como que representa cierta cantidad, que debe dividirse en tanta partes quantas unidades hay en el denominador» Varas, (1801; pp. 34-35)	Medida Parte-todo Cociente
«P. De donde toma su origen el quebrado? R. De la partición de un número menor por otro mayor» Ferer (1821, p. 44)	Cociente
«La fracción ó quebrado toma su origen de las partición de un número por otro mayor, y así se expresará por dos números uno sobre otro con una línea intermedia» Poy y Comes (1819 p. 47)	Cociente
«Para medir un quebrado se divide la unidad en cierto número de partes que contiene el quebrado» «Todo quebrado es el cociente de su numerador partido por su denominador» Lista (1823, p. 29)	Parte-todo Cociente
«Para formar un quebrado se considera dividida la unidad en un número de partes iguales […]»Oriol (1862, pp. 55-56)	Parte-todo
«Son unos números que expresan parte o partes de la unidad y no llegan a expresar unidades enteras» Mandry (1887, p. 69)	Parte-todo

Unidad de análisis	*Noción*
«[…] números quebrados son aquellos que resultan de comparar la unidad con la muchedumbre, ó una muchedumbre con otro muchedumbre mayor; y que son aquellos números que constan solo de partes de la unidad.»	Medida
«[…] Todo quebrado se puede considerar como el quociente de una división del numerador por el denominador.» Vallejo (1813, p. 97)	Cociente
«Llamaremos pues quebrado á los números que expresan una ó muchas de las partes en que se puede concebir dividida la unidad.» García (1814, p. 27)	Parte-todo
«En este segundo modo de enunciar las cantidades numéricas se considera la unidad, u otra cantidad cualquiera, dividida en un cierto número de partes iguales, y se expresa de cuántas de dichas partes consta la cantidad que se quiere representar ó enunciar.» Ciscar (1822, p. 13)	Cociente
«Se ha dicho que quebrado es un número que expresa parte ó partes de un entero, y se escribe con dos números con una línea intermedia. […] El de arriba se llama numerador y manifiesta las partes que se tomaron del entero.»	Parte-todo
«Un quebrado es un cociente indicado, que el numerador es el dividendo y el denominador el divisor.» Nunell y Espona (1852, p. 100)	Cociente
«La división, pues puede considerarse como un medio de medir el dividendo, tomando para ello por unidad ó tipo el divisor; si es incompleta, es el origen aritmético de los números fraccionarios». De Bajo Ibañez (1877, pp. 34-35; p. 100)	Cociente
«Es, pues, el quebrado un número de partes ó unidades inferiores referidas á una unidad superior por una denominación cualquiera» Fernández y Cardin (1884, p. 47)	Parte-todo
«Número fraccionario es la reunión de varias partes iguales de la unidad» Vallín (1866, p. 101)	Parte-todo
«Se llama fracción a un número formado por varias partes de la unidad» Picatoste (1871, p. 55)	Parte-todo

La siguiente técnica a utilizar es el análisis de correspondencias. Se determinaron todos los fenómenos en los que se utilizaban las fracciones a partir de revisar la totalidad de ejercicios y ejemplos que los autores presentan en cada libro. Se hallaron seis tipos de fenómenos: matemáticos, de medida, monetarios, deudas/ganancias, compra/venta y salarios. A partir de esta información se determinan dos variables nominales, autores y tipo de fenómenos y se utiliza el SPSS para realizar el análisis que arroja resultados numéricos mediante tablas de pesos dimensionales para las variables y la representación gráfica (Figura 1).

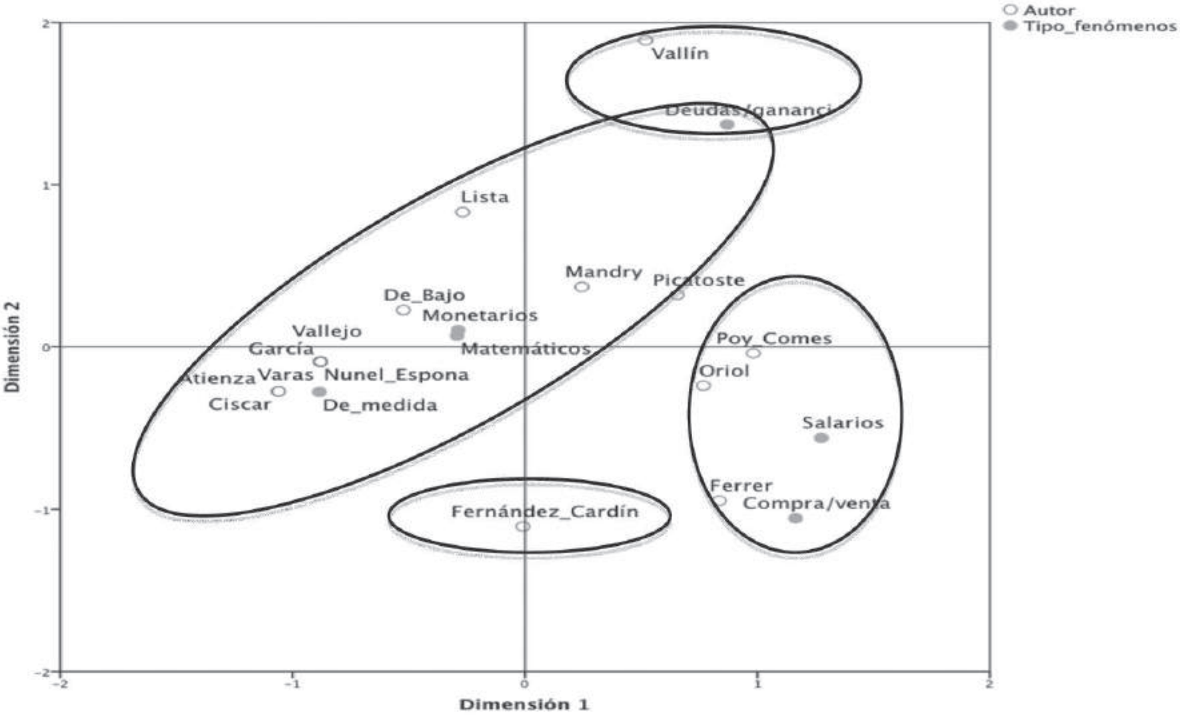


Figura 1. *Análisis de correspondencias entre autor y tipos de fenómenos.*

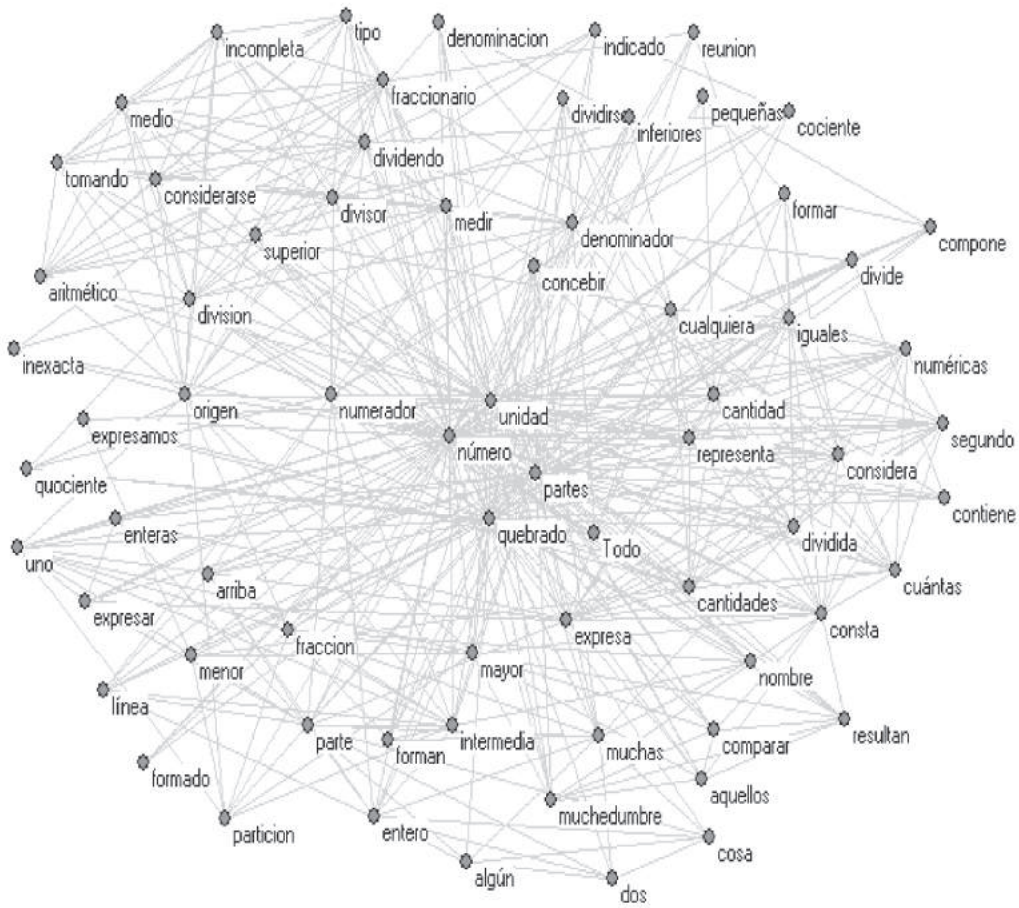


Figura 2. *Red de cocitación de términos.*

Así se tiene que, si bien todos los autores recurren a fenómenos matemáticos en el uso de las fracciones, podemos comprobar que Vallín y Bustillo hace uso de fenómenos no tan cercanos a los demás autores de la época. Los autores Poy y Comes, Oriol y Ferrer recurren a fenómenos semejantes entre ellos así en la Figura 1 se les asocian los mismos atributos. Estos son los autores que adquieren mayor puntuación en la dimensión 1. Por otro lado, Fernández Cardín se halla en una posición intermedia respecto a los fenómenos utilizados por los anteriores y el grupo de autores cercanos a los fenómenos matemáticos y de medida.

La Figura 2 muestra la red de cocitación de los términos utilizados en las definiciones. Para su elaboración se ha determinado la frecuencia de cada palabra eliminándose las preposiciones, las conjunciones coordinantes y subordinantes. Luego se establecen las relaciones entre los términos y mediante una matriz cuadrada donde se otorga 1 si hay relación y 0 si no la hay. Esta matriz puede realizarse manualmente o con un programa informático.

Se observa como aparecen grupos de términos asociados con las diferentes ideas de fracción. Así se tienen: divide, dividida, división, divisor, quociente, número dividendo, cociente, dividirse que son cercanas a una interpretación de *Cociente*. También se distingue otro grupo: Todo, cantidad, unidad, uno, contiene, partes, iguales, tomando, entero, enteras, partición que se asocian a la idea de *Parte-todo.* Por otra parte tenemos: línea, medida, compone, origen, cantidades que se pueden asociar a una interpretación de *Medida*.

Finalmente, en la Figura 3 tenemos una red conceptual de la definición de fracción a partir de los datos obtenidos de los manuales en el siglo XIX. Los ejes centrales del concepto de fracción son los conceptos de Número, Partes y División.

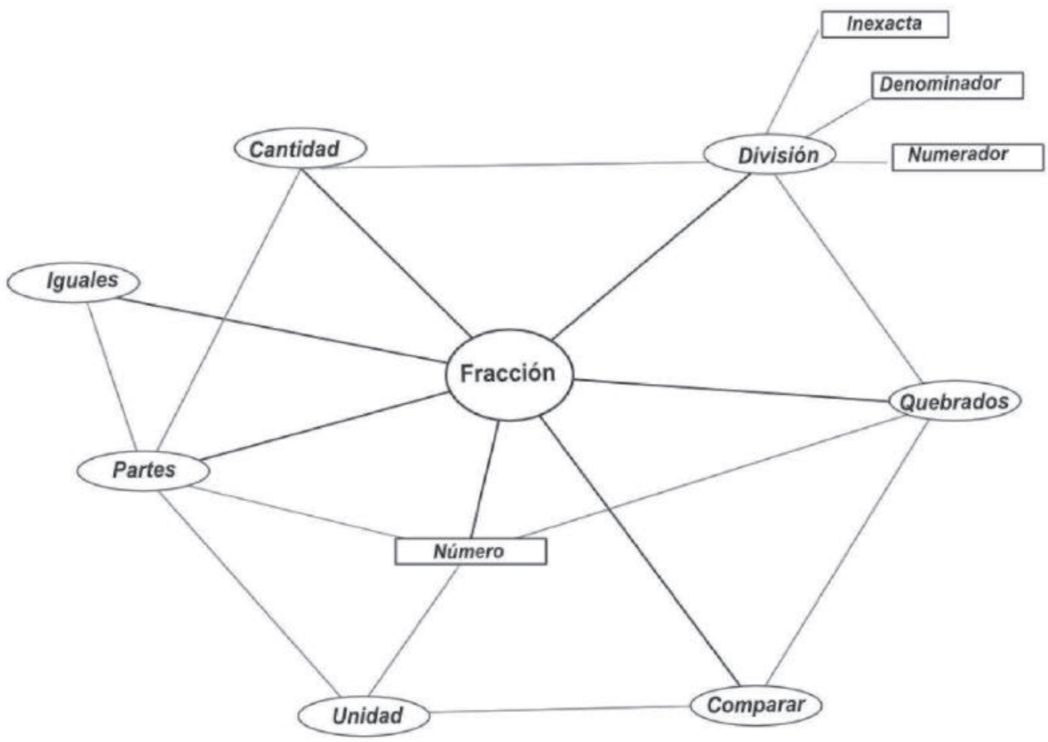


Figura 3. *Red conceptual de fracción en el siglo XIX.*

El cambio metrológico en España y su repercusión en libros de texto para la segunda enseñanza en el siglo xix

El análisis y la reflexión histórica sobre los diversos fenómenos o sucesos sociales, que inciden en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en determinados contextos, constituyen procesos latentes en la actividad profesional de los investigadores en educación matemática. Estudiar estos acontecimientos y sus implicaciones en los sistemas educativos y planes curriculares, en periodos temporales específicos, conduce a profundizar en aspectos como su origen e historia, destacando modificaciones que caracterizan su desarrollo y explican los efectos y alcances de su incidencia en determinados escenarios y realidades.

Desde el contexto histórico del cambio en la metrología mundial en el siglo xix, delimitado a la implantación del Sistema Métrico Decimal (SMD) en España, se han estudiado los cambios conceptuales y procedimentales (matemáticos) y didácticos acaecidos en la enseñanza secundaria, con la incorporación de las unidades métrico-decimales en el currículo de matemáticas durante 1849-1892. Esto a partir de los análisis de una serie de libros de texto de matemática editados en la época, principalmente de aritmética (Picado, 2012).

El estudio, delimitado entre la promulgación de la *Ley de Pesas y Medidas del 19 de julio de 1849*, para el establecimiento en España de un único sistema de pesas y medidas, hasta la *Ley del 8 de julio de 1892* que oficializó la declaración de obligatoriedad de uso de las unidades de pesas y medidas de este sistema, inició con una aproximación en el año 2009 donde se establecieron diversos criterios para la selección de las fuentes (Picado y Rico, 2011a) y se propusieron categorías de análisis desde los principios del análisis de contenido (Picado y Rico, 2011b). En 2012, después de un proceso de selección de nuevas fuentes y la implementación de los análisis de contenido, cognitivo, de instrucción y de evaluación —componentes del análisis didáctico (Picado, Gómez y Rico, 2013)—, se culminó la investigación. El proceso de indagación y los resultados de este, condujeron a la definición de tres etapas históricas que particularizan el proceso de implantación, difusión y legalidad del nuevo sistema metrológico en España; a una caracterización de los conceptos matemáticos vinculados al SMD presentes en los libros de textos; y, al establecimientos de indicadores sobre las representaciones utilizadas para mostrar estos conceptos, las situaciones y contextos que evidenciaban la utilidad de la unidades metrológicas adoptadas, las finalidades de su enseñanza, la diversidad de tareas propuestas para su aprendizaje y las limitaciones identificadas por los autores, que caracterizan su inclusión en los libros de texto como resultado de su adopción en el sistema educativo español.

En este apartado se muestra el tratamiento dado a los conceptos matemáticos vinculados a las unidades de pesas y medidas del SMD a partir del análisis de libros de texto para la segunda enseñanza, según las etapas históricas definidas en el estudio. Se acentúan las descripciones realizadas a partir de las categorías y unidades de análisis definidas para el estudio, y el reconocimiento de tendencias en las propuestas didácticas a lo largo del periodo (1849-1892).

Tendencias para la enseñanza de unidades métrico-decimales

La Tabla 2 muestra los datos vinculados a las representaciones de conceptos y los aspectos fenomenológicos propios del SMD reconocidos en los textos analizados. Sobre los sistemas o modos de representación, en las tres etapas se reconoce un uso común de las representaciones verbal, simbólica y tabular. Destaca el predominio del texto en prosa (representación verbal) para presentar los contenidos aritméticos, complementado con la escritura simbólico-numérica. El uso de tablas facilitaba la exposición de las relaciones entre las unidades de medida de los dos sistemas metrológicos (Sistema de pesas y medidas de Castilla y SMD). Cabe indicar que la presentación de ilustraciones (representación icónica) es notoria en los textos editados en las dos últimas décadas del siglo.

Tabla 2. *Representaciones y contextos en los textos para segunda enseñanza*

Etapa de promulgación e inserción estatal (1849-1867)	Etapa de generalización del sistema (1868-1879)	Etapa de legalidad y obligatoriedad (1880-1892)
	Sistemas de representación	
Verbal, simbólico y tabular	Verbal, simbólico y tabular. Instrumentos de medición (descripción)	Verbal, simbólico, tabular, gráfico. Instrumentos de medición (litro, recipiente)
	Contextos y situaciones	
Natural: elementos físico-naturales. Matemático: cálculo aritmético. Comercial: compra y venta. Científico: movimiento	Natural: elementos físico-naturales. Matemático: cálculo aritmético. Científico: movimiento. Comercial: costos. Técnico: construcción de caminos y textiles	Natural: elementos de la Naturaleza. Comercial: intercambio de productos. Técnico: construcción y transporte de mercancía

Fuente: Picado (2012).

Los aspectos fenomenológicos, examinados desde las situaciones que exponen la utilidad de las unidades métrico-decimales, se reconocen en los contextos natural, matemático, comercial, técnico y científico. Esta diversidad de contextos amplió el uso del sistema a campos del conocimiento y la práctica cotidiana, inicialmente no considerados, como introducción de su uso en las especialidades profesionales de los estudiantes al terminar la secundaria.

A lo largo del periodo, los conceptos cantidad, unidad y número, mostraron en los documentos un posicionamiento sólido como fundamentos de la aritmética en los preliminares de la metrología. En la tercera etapa se reconoce una discrepancia sobre la forma de interpretar la cantidad según las concepciones matemáticas tradicionales de la época. Esta particularidad es un indicador de un compromiso hacia la originalidad de contenido, de rechazo a una ideología generalizada o de la adquisición de un nuevo paradigma conceptual para los autores de los libros de texto.

Sobre el número, el estudio ha permitido apuntar una similitud en la clasificación de este concepto. Se distingue al número entero, quebrado, quebrado decimal, concreto y complejo, tipologías a las que se vinculaban las unidades de pesas y medidas. El SMD se concibió como una nomenclatura novedosa a partir de la etapa de generalización. Su organización conceptual para la segunda enseñanza conservaba los conceptos y procedimientos básicos que lo componían, diferenciada entre las etapas por aspectos como la definición de la unidad para la ponderación (peso), los enfoques para la presentación del metro —científico e instrumental como los fundamentales— o la introducción de múltiplos y submúltiplos. En síntesis, se reconoce una unificación o continuidad en cuanto a la presentación de hechos, conceptos y estructuras matemáticas; salvo algunas variaciones menores.

Los procedimientos enfatizaron los cálculos aritméticos con unidades métrico-decimales, realizar reducciones entre unidades de la misma especie y las conversiones entre unidades homólogas de los dos sistemas, en el marco de la resolución de ejercicios (tareas) en situaciones particulares. La lectura y escritura de estas unidades sobresalieron como procesos a llevar a cabo en los textos de la tercera etapa. La tendencia en los libros de texto de segunda enseñanza era fomentar el desarrollo de destrezas y el desarrollo y aplicación de estrategias de resolución con aproximaciones al nivel de razonamiento a partir de soportes gráficos. Esto concuerda con la presentación de una metrología novedosa para el tratamiento de las pesas y medidas en España y con su incorporación en los contenidos aritméticos para la educación matemática. En cuanto a las tareas (identificadas en ejemplos y ejercicios), se pretendía del estudiante un mayor entendimiento de los conceptos y su aplicación en la atención de situaciones-problema matemáticas y en entornos cotidianos.

Con la implementación del análisis didáctico, se lograron reconocer propósitos educativos específicos establecidos en los documentos desde los fines político, formativo, cultural y social. Se identificó que, por parte de los autores, existió la intención de elaborar textos para la enseñanza y el aprendizaje de la aritmética, que integraran el SMD en la preparación de los jóvenes para su incorporación a la formación profesional. Con la incorporación del SMD al sistema educativo español, la segunda enseñanza se vio impregnada de opciones metodológicas centradas en la práctica, el razonamiento y la construcción del conocimiento. El aprendizaje memorístico dejó de ser la estrategia de enseñanza prioritaria (sin desaparecer por completo), los nuevos conocimientos ya no eran tan novedosos; la enseñanza buscaba la puesta en práctica de lo aprendido. En las tres etapas el SMD fue un contenido que se abordaba desde su utilidad práctica.

A pesar de ser libros para un segundo ciclo de enseñanza, la identificación de dificultades y errores en el aprendizaje del SMD propias en la enseñanza primaria no formó parte de las observaciones de los autores, salvo algunas puntualidades sobre el reconocimiento de dificultades en la interpretación de enunciados como parte de la resolución de problemas.

Los libros de texto analizados proporcionan información sobre las formas de abordar el SMD, desde su incorporación inicial a la educación de los españoles en el siglo XIX, su desarrollo y consumación parcial en el periodo 1849-1892. Las tendencias reconocidas durante este periodo (Figura 4) exponen no solo similitudes en la enseñanza a partir de los textos, sino también las variaciones didácticas realizadas para una mejor comprensión y difusión de su utilidad.

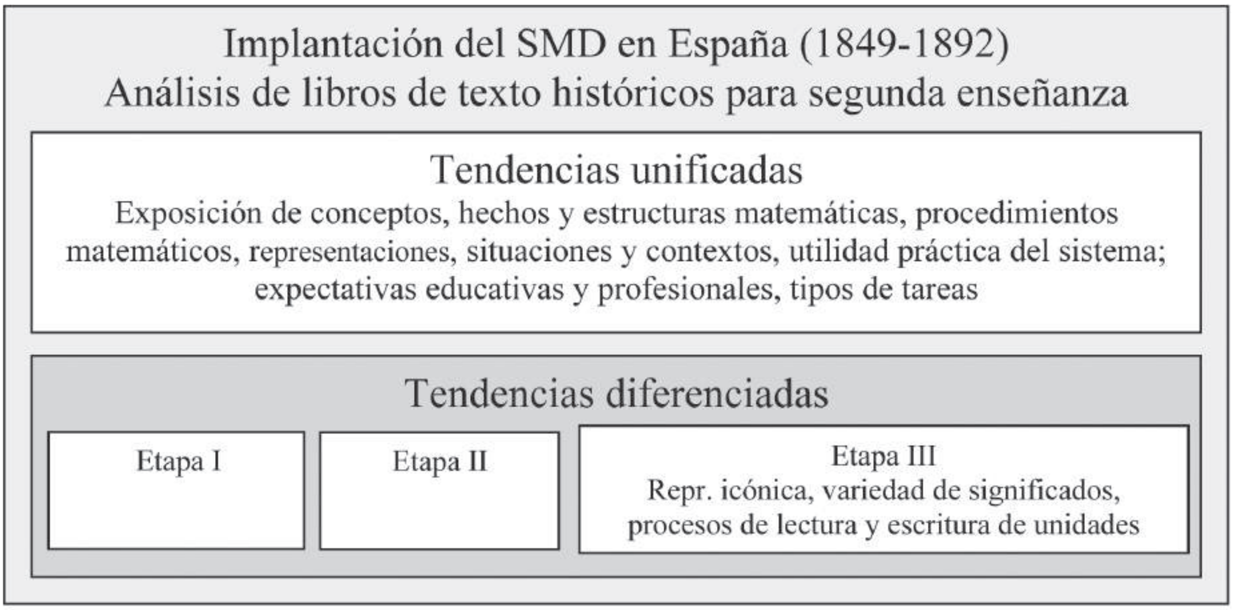


Figura 4. *Tendencias reconocidas en los libros de texto para la enseñanza del SMD*

Conclusiones

El análisis de los libros de texto es una línea de investigación en auge en España. Cada vez es posible extraer información diversa y útil de estas fuentes, que conduce a establecer nuevas formas para su aprovechamiento.

Hemos presentado opciones diferentes de tratamiento de la información que pueden ser utilizadas para distintos estudios sobre el análisis de contenido en historia de la educación matemática. Si bien no hemos profundizado en los análisis es porque el propósito era ejemplificar estas técnicas acerca de un mismo concepto: interpretación conceptual, análisis de correspondencias, estudio de cocitación de términos de conceptos y red conceptual.

Por su parte, se ha mostrado la utilidad de los datos extraíbles de los libros de texto para el reconocimiento de aspectos vinculados al aprendizaje y la enseñanza de conceptos matemáticos particulares como expectativas, fines, dificultades, errores y la elaboración de tareas, y la definición de secuencias de tareas y la selección de recursos y materiales, enfatizando su utilidad en el estudio de cambios curriculares y reformas educativas acaecidas en el sistema educativo español.

Consideramos que para los investigadores del área es útil conocer diferentes alternativas metodológicas y valorar su aporte en el planteamiento y desarrollo de investigaciones basadas en el análisis de textos matemáticos o manuales escolares del pasado. Son estudios que amplían el conocimiento sobre el crecimiento y la madurez educativa de un país y explican los cambios curriculares para su alcance.

Referencias

Barbin, E., Kronfellner, M. y Tzanakiz, C. (2012). History and epistemology in mathematics education. *Proceedings of the 6th European Summer University* Viena: HPM.

Carrillo, D. (2005). *La metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes*. Murcia: Universidad de Murcia.

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa.* Madrid: La Muralla.

Fox, D. (1980). *El proceso de investigación en educación.* Pamplona: Universidad de Navarra.

Gómez, B. (2003). La investigación histórica en didáctica de la matemática. En Castro, E. (Coord.), *Investigación en Educación Matemática: Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 79–86). Granada: SEIEM.

Katz, V. (1997). Some ideas on the use of history in the teaching of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 17*(1), 62–63.

López, C. (2011). *La formación de maestros en aritmética y álgebra a través de los libros de texto*. Tesis doctoral, Universidad de Salamanca.

Madrid. M. J. y Maz-Machado, A. (2015). Analysis of two Spanish arithmetic books written in the xvi-century. *Journal of Education, Psychology an Social Sciences, 3*(2), 117–121.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España en los siglos xviii y xix.* Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

— (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 5–20). Santander: SEIEM.

Maz, A. y Rico, L. (2009). Negative numbers in the 18th and 19th centuries: Phenomenology and representations. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 17*(1), 537–554.

Maz-Machado, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos xviii y xix. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación Educativa, 18*(1), 49–76.

Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemática en España durante la segunda mitad del siglo xix*. (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Picado, M., Gómez, B. y Rico, L. (2013). El análisis didáctico en el estudio del sistema métrico decimal en un libro de texto histórico de matemáticas. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 403–414). Granada: Comares.

Picado, M. y Rico, L. (2011a). La selección de libros de texto en una investigación histórica en educación matemática. *Epsilon, 28*(1), 99–112.

— (2011b). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11-27.

Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbooks authors. *For the Learning of Mathematics, 7*(3), 41–51.

— (1991). Categorías teóricas para la investigación en la historia social de la enseñanza de la matemática y algunos modelos característicos. *Épsilon, 19*, 100–104.

LA HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS EN SU ENSEÑANZA

The History of Mathematics in Teaching

Isidoro Segovia y Francisco Fernández
Universidad de Granada, España

Resumen

La historia de las matemáticas puede tener un papel relevante en la enseñanza de las matemáticas; para el profesor constituye una fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación que le genera una actitud positiva que puede trasladar al alumno y a este último le permite dejar de considerar a las matemáticas como una ciencia terminada de construir mostrando su estatus de actividad cultural y humana y le motiva y, en algunos casos, le permite comprender mejor los conceptos a través de su desarrollo y cambio.

Palabras clave: historia, matemáticas, enseñanza, aprendizaje

Abstract

The history of mathematics can play an important role in the teaching of mathematics; It constitutes a source of vocation, motivation, guidance, inspiration and self-education for the teacher that generates a positive attitude which can be transferred to the student. Additionally, this allows the student to see the mathematics under a new perspective, as a evolving science. By showing its status as a cultural and human activity, the student is motivated and, in some cases, understand better the concepts through their development and change.

Keywords: *history, mathematics, teaching, learning*

Segovia, I. y Fernández, F. (2016). La historia de la matemática en su enseñanza. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 189-196). Granada: Comares.

Introducción

Los conceptos o procedimientos matemáticos, especialmente los que forman parte de la enseñanza obligatoria, son el resultado de un amplio proceso de evolución a lo largo de los años, en muchos casos de siglos y que ha implicado la intervención de un cúmulo de escuelas y personalidades dentro del desarrollo de las matemáticas. Dentro de este proceso hay aspectos que tienen una gran utilidad para mejorar la enseñanza de las matemáticas.

La Historia de la Matemática en el Análisis Didáctico

La Historia de las Matemáticas tiene un papel de carácter trasversal en el Análisis Didáctico. Es parte del Análisis de Contenido en cuanto que, el desarrollo histórico de un tema puede ser útil para determinar el origen de algunas nociones, comparar diferentes sistemas de representación o localizar problemas clásicos (Lupiáñez, 2013). También es parte del Análisis Cognitivo si admitimos el punto de vista genético según el cual el conocimiento de cada persona sigue el mismo proceso que el conocimiento de la humanidad (Fauvel, 1991); y algo de esto debemos admitir si observamos que los conceptos matemáticos más complejos y que mayor dificultad tienen para los alumnos se han desarrollado con posterioridad a otros que son más fáciles en su aprendizaje. «No se puede dudar de que las dificultades que los grandes matemáticos encontraron son también los obstáculos en los que tropiezan los estudiantes y no puede tener éxito ningún intento de acabar con estas dificultades a base de palabrería lógica» (Klein, 1978, pp. 48-49). Por último, forma parte del Análisis de Instrucción pues la historia constituye un recurso para la enseñanza como elemento de motivación y como modo de mostrar que las matemáticas constituyen un producto humano en constante evolución al cual se pueden seguir haciendo aportaciones.

El papel de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza

Al profesor de matemáticas, la historia de las matemáticas le permite conectar con un conjunto de medios que pueden hacer más asequible al alumno el conocimiento matemático; también le ayuda a descubrir las dificultades y errores que se han presentado en el desarrollo de los conceptos (Sierra, 1997). González Urbaneja (2004) ve la historia de las matemáticas como fuente de vocación, motivación, orientación, inspiración y autoformación que genera en el profesor una actitud positiva que puede trasladar al alumno y ésta es la más importante de las enseñanzas. Los argumentos que, en este sentido, da González Urbaneja (2004) sobre el papel de La Historia de las Matemáticas son:

- Su conocimiento favorece la comprensión profunda de los problemas matemáticos.
- La fuerza creativa que genera puede ser proyectada en el aula propiciando un clima de investigación.

- Pone de manifiesto las dificultades que han tenido el nacimiento y desarrollo de los conceptos y su conocimiento, además de enriquecer la actividad docente del profesor, le hacen más cauto y paciente ante las dificultades de aprendizaje que puedan presentar sus alumnos.
- Proporcionan al profesor una motivación hacia una autoformación continua.
- Trasmite unidad en las matemáticas y permite dirigir las investigaciones por las vías más fructíferas.
- Subvierte la creencia de que el rigor es el supremo valor de la Matemática que impone una vía única de razonamiento.
- Evita percibir la Matemática como un lenguaje al servicio de las demás ciencias o como una herramienta de selección del alumnado, para considerarla como una disciplina cultural.
- Es fuente de inspiración para la matemática recreativa.

Para el alumno, la Historia de las Matemáticas le permite dejar de considerar las matemáticas como una ciencia terminada de construir restableciéndose su estatus de actividad cultural y humana y le motiva y, en algunos casos, le permite comprender mejor los conceptos a través de su desarrollo y cambio (Sierra, 1997). González Urbaneja (2004) recoge la reivindicación del método genético como modo de enseñanza de las Matemáticas que han propuesto grandes matemáticos y profesores, por el que, para la comprensión de un concepto, el alumno debe repetir el proceso histórico que se ha desarrollado hasta la formulación actual del concepto.

Fauvel (1991) presenta un abanico de posibilidades del uso de la Historia de las Matemáticas en su enseñanza:

- Mencionando anécdotas matemáticas del pasado.
- Presentado una introducción histórica de los conceptos nuevos para los alumnos.
- Fomentando en los alumnos la comprensión de los problemas históricos cuya solución ha dado lugar a los conceptos.
- Impartiendo lecciones de historia de las matemáticas.
- Ideando ejercicios utilizando para ello textos matemáticos del pasado.
- Fomentando la creación de carteles, exposiciones u otros proyectos con temas históricos.
- Realizando proyectos en torno a una actividad matemática local del pasado.
- Usando ejemplos del pasado para ilustrar técnicas o métodos.
- Usando ejemplos del pasado para ayudar a comprender y resolver las dificultades del aprendizaje.
- Ideando aproximaciones pedagógicas al tópico de acuerdo con su desarrollo histórico.
- Ideando el orden de la estructura de los temas dentro del programa, de acuerdo con su desarrollo histórico.

La indagación histórica en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada

Además de los libros sobre historia de las matemáticas, el uso de la misma en su enseñanza, requiere que la investigación proporcione información, acerca de cómo evolucionaron los conceptos y procedimientos matemáticos desde el momento en que surgen hasta su formato actual, qué dificultades tuvieron en su desarrollo, qué fenómenos hicieron surgir cada concepto, qué variedad de problemas resolvieron y qué escuelas y personalidades los desarrollaron. Es el marco del área de Didáctica de la Matemática donde se incide en este tipo de indagaciones y en el caso del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, la historia de las matemáticas y de la educación matemática constituye una línea de investigación dirigida por Luis Rico, en la que se han desarrollado algunos trabajos cuyas aportaciones principales resumimos:

— Los números negativos en España en los siglos XVIII y XIX (Maz, 2005).

En este trabajo se hace una revisión del tratamiento de los números negativos por autores de textos publicados entre 1700 y 1900 y en el mismo, el número negativo se manifiesta como un catalizador de determinadas ideas científicas de la época como los conceptos de cantidad, número y cantidad negativa. Así Maz (2005) registra cuatro nociones de cantidad (aristotélica, empirista, fenoménica, euleriana y positivista), cinco de número (euclidea, relacional, inductiva, cardinal o preconjuntista y algebraica o formalista) y ocho nociones de cantidad negativa (falsas, de negación lógica, resultado de operaciones, magnitudes relativas, de naturaleza dual aritmético-algebraica, geométrica, algebraica y como ampliación de los naturales). También el trabajo se analizan los significados de los símbolos + y –, y los conceptos de suma y producto de negativos. Por último, el trabajo presenta una categorización sobre los fenómenos asociados a los negativos (físicos, contables, temporales y matemáticos) y sus formas de representación (verbales, numéricas, gráficas y algebraicas). En las conclusiones del trabajo, Maz sugiere indagar cómo afectan los conflictos detectados sobre las nociones de cantidad, número y negativos en los alumnos de secundaria.

— La enseñanza de las matemáticas en Andrés Manjón (Real, 2008).

En el trabajo se describen los elementos característicos de la didáctica de las Matemáticas llevada a cabo por el fundador de las Escuelas del Ave-María entre 1889 y 1923 dentro del particular modelo de educación que él propugna, integral y teocéntrico, en el que además incorpora una metodología activa y lúdica que recuerda a la de la Escuela Nueva. La búsqueda, selección y análisis de diversas fuentes (entre ellas fuentes primarias, como las lecciones de Matemáticas que el pedagogo confeccionó para sus Escuelas), permite situar la enseñanza de las Matemáticas dentro del pensamiento educativo de Andrés Manjón y sugiere que sus planteamientos y métodos didácticos contienen elementos originales e innovadores para la época, y vistos desde una perspectiva actual, son relevantes y enriquecedores para la Didáctica de la Matemática.

— El Sistema Métrico Decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo XIX (1849-1892) (Picado, 2012).

El trabajo constituye un estudio sobre la introducción del sistema de pesas y medidas del Sistema Métrico Decimal en el sistema educativo español en la primera mitad del siglo XIX a través de los textos de la época. Se muestran las limitaciones de su enseñanza al incluirse en libros de aritmética elaborados con anterioridad, basada en el aprendizaje memorístico, en los primeros niveles y más práctico en niveles superiores. Se describen los conceptos y procedimientos empleados en los textos, sus formas de representación, los contextos y modos de uso así como las aplicaciones de las unidades de medida.

— La historia de las matemáticas en los libros de texto (Amo, 2015)

El trabajo estudia el tratamiento que le dan, a la historia de las matemáticas, los libros de texto. Utilizando como categorías de análisis las formas de enseñanza establecidas por Fauvel (1991) obtiene como resultados que a pesar de que las orientaciones curriculares sugieren el empleo de la historia de las matemáticas en su enseñanza (ver decreto de desarrollo del currículo de primaria andaluz), el tratamiento es escaso, depende de la editorial y que las formas de uso de la historia más destacadas son la introducción histórica en los temas nuevos y el empleo de anécdotas asociadas a grandes matemáticos.

Algunos ejemplos del uso de la historia en la enseñanza, en la formación de maestros

Un ejemplo del uso de la historia de las matemáticas siguiendo la propuesta de Fauvel (1991), relativo a realizar una aproximación pedagógica a los temas de acuerdo con su desarrollo histórico, se lleva a cabo en los estudios de Maestro de Educación Primaria en la Universidad de Granada cuando se trabaja el Sistema de Numeración Decimal: se hace una presentación de los sistemas de numeración antiguos comenzando por los vestigios encontrados en un hueso del Paleolítico del uso de marcas representando cantidades y se pasa por la reflexión sobre los sistemas de numeración egipcio y babilonio, griego y romano. El estudio de estos sistemas permite comprender el sistema de numeración decimal de carácter posicional como el resultado de una evolución así como comprender por qué dichos sistemas no tenían cero.

Otro ejemplo de uso de la historia en la formación de maestros es el referido al uso de ejemplos del pasado para comprender y justificar los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas. Los algoritmos de la Figura 1 como el de 'la celosía' que aparece en un libro de aritmética impreso en Treviso (Italia) en 1478, permiten comprender el mecanismo del algoritmo usual de la multiplicación. También resulta muy motivador para los estudiantes descubrir cómo funcionan estos antiguos algoritmos como los que se presentan.

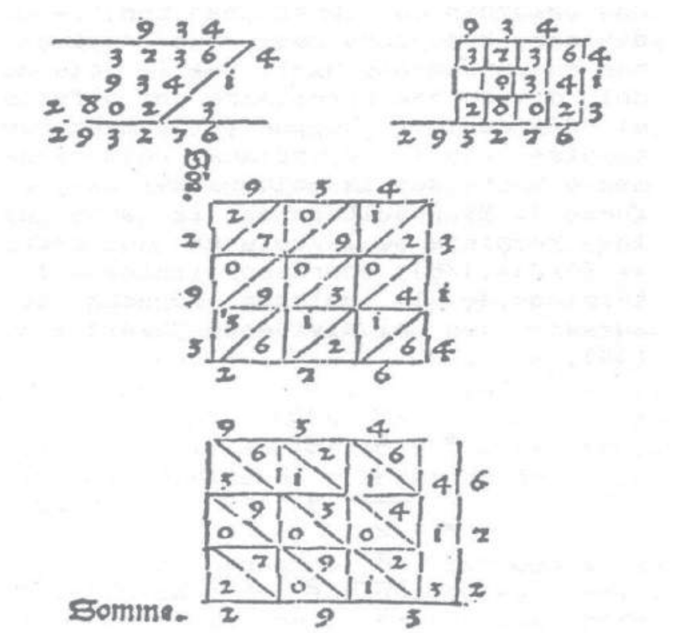
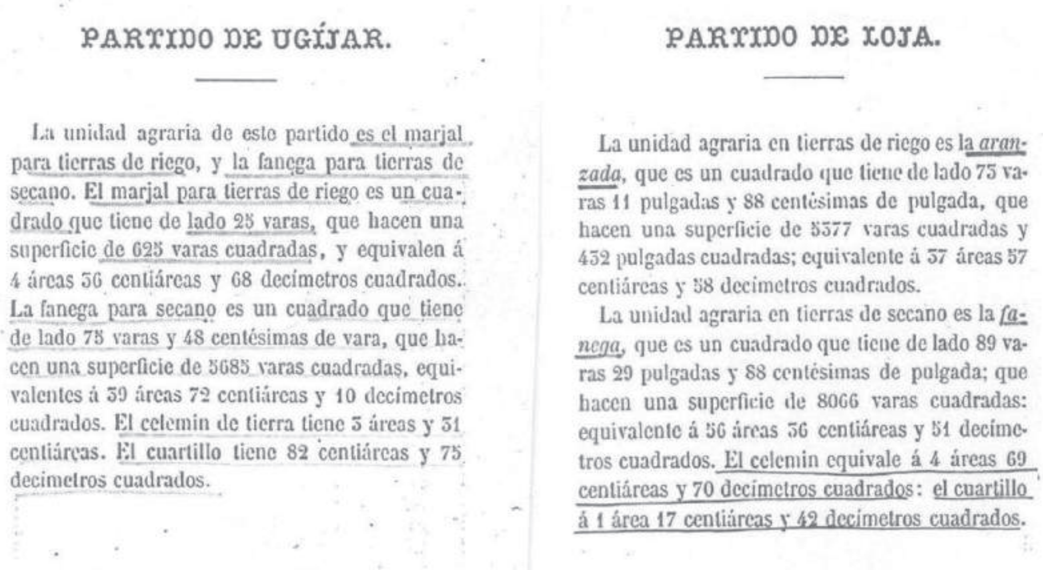


Figura 1. *Algoritmos de la multiplicación 934x314 de la aritmética de Treviso (1478).*

También, la historia de la construcción e implantación del SMD permitirá a los futuros maestros tener un acercamiento cultural, social y político en momentos importantes de nuestra historia reciente y su repercusión en la enseñanza de las matemáticas. En la Figura 2 tomada de las páginas de '*El Agrimensor Métrico. El nuevo Sistema Decimal de cada una de las medidas antiguas agrarias*' de 1878, se muestran ejemplos de unidades de medida de difícil manejo y cómo, en dos pueblos de la provincia de Granada, estas unidades agrarias eran diferentes y de ahí la necesidad de un sistema común y más sencillo de manejar.



PARTIDO DE UGÍJAR.

La unidad agraria de este partido es el marjal para tierras de riego, y la fanega para tierras de secano. El marjal para tierras de riego es un cuadrado que tiene de lado 25 varas, que hacen una superficie de 625 varas cuadradas, y equivalen á 4 áreas 56 centiáreas y 68 decímetros cuadrados. La fanega para secano es un cuadrado que tiene de lado 75 varas y 48 centésimas de vara, que hacen una superficie de 5685 varas cuadradas, equivalentes á 39 áreas 72 centiáreas y 10 decímetros cuadrados. El celemin de tierra tiene 3 áreas y 31 centiáreas. El cuartillo tiene 82 centiáreas y 75 decímetros cuadrados.

PARTIDO DE LOJA.

La unidad agraria en tierras de riego es la *aranzada*, que es un cuadrado que tiene de lado 73 varas 11 pulgadas y 88 centésimas de pulgada, que hacen una superficie de 5377 varas cuadradas y 432 pulgadas cuadradas; equivalente á 37 áreas 57 centiáreas y 58 decímetros cuadrados.

La unidad agraria en tierras de secano es la *fanega*, que es un cuadrado que tiene de lado 89 varas 29 pulgadas y 88 centésimas de pulgada; que hacen una superficie de 8066 varas cuadradas: equivalente á 56 áreas 36 centiáreas y 51 decímetros cuadrados. El celemin equivale á 4 áreas 69 centiáreas y 70 decímetros cuadrados: el cuartillo á 1 área 17 centiáreas y 42 decímetros cuadrados.

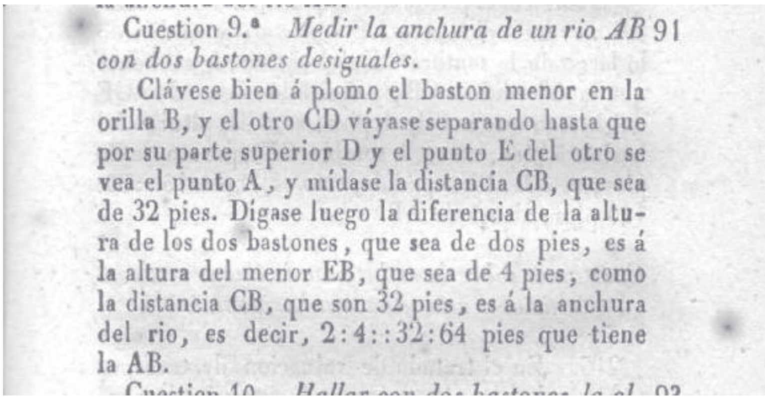
Figura 2. *Unidades agrarias de superficie premétricas en dos pueblos de Granada.*

En este sentido, la Ley de Pesas y Medidas, sancionada por la reina Isabel II el 19 de julio de 1849, enuncia en sus artículos la trascendencia de la enseñanza del SMD en la vida moderna española. Recogemos, como ejemplo, alguno de sus artículos:

> Artículo 1.º En todos los dominios españoles habrá un solo sistema de medidas y pesas.
>
> Artículo 11.º En todas las escuelas públicas o particulares en que se enseñe o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas, será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde 1.º de enero de 1852, quedando facultado el gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no se cumpla con aquella obligación.
>
> Artículo 13.º Desde la misma época serán también obligatorios en la redacción de las sentencias de los tribunales y de los contratos públicos.
>
> Artículo 14.º Los contratos y estipulaciones entre particulares en que no intervenga escribano público, podrán hacerse válidamente en las unidades antiguas mientras no se declaren obligatorias las nuevas de su clase.
>
> Artículo 17.º Los contraventores a esta ley quedan sujetos a las penas que señalan o señalaren las leyes contra los que emplean pesas y medidas no contrastadas.

Actualmente el SMD es una herramienta, un sistema y un lenguaje extendido por todo el mundo y forma parte del sistema oficial de medición en todos los países, salvo en tres que todavía no lo han adoptado legalmente: Estados Unidos, Liberia y Myanmar.

Un ejemplo de uso de la historia a partir de una actividad del pasado, como medir la anchura de un rio con dos bastones (Fig. 3), consiste en plantear una tarea de aula en la que se pide a los alumnos que identifiquen los conceptos y procedimientos matemáticos que hay implicados y los justifiquen.



Cuestion 9.ª *Medir la anchura de un rio AB* 91
con dos bastones desiguales.

Clávese bien á plomo el baston menor en la orilla B, y el otro CD váyase separando hasta que por su parte superior D y el punto E del otro se vea el punto A, y mídase la distancia CB, que sea de 32 pies. Dígase luego la diferencia de la altura de los dos bastones, que sea de dos pies, es á la altura del menor EB, que sea de 4 pies, como la distancia CB, que son 32 pies, es á la anchura del rio, es decir, 2:4::32:64 pies que tiene la AB.

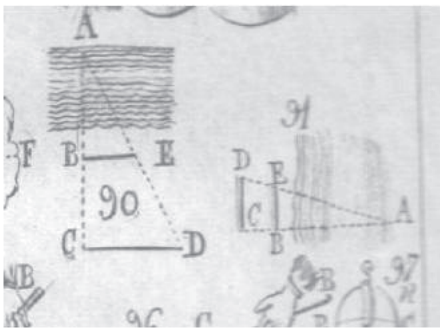


Figura 3. *Tomada del libro 'Tratado completo de agrimensura y aforage' de 1845.*

Referencias

Abella (1930). *Manual del arbitrio de pesas y medidas* por la redacción de El Consultor de los Ayuntamientos y de los Juzgados Municipales (3.ª Ed.Tercera). Madrid: Imprenta de El Consultor.

Amo, M. (2015). *La historia de las matemáticas en los libros de texto*. Trabajo Fin de Máster. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fauvel, J. (1991). Using history in mathematics education. *For the Learning of Mathematics. 11*(2), Montreal, 13–16.

González Urbaneja, P. M. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Revista SUMA, 45.*

Kline, M. (1978). *El fracaso de la matemática moderna*. Madrid: Siglo XXI.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.). *Análisis didáctico en educación matemática.* Granada: Comares.

Maz, A. (2005). *Los números negativos en España los siglos xviii y xix.* Tesis doctoral. Universidad de Granada. España.

Picado, M. (2012). *El sistema métrico decimal en libros de texto de matemáticas en España durante la segunda mitad del siglo xix (1849-1892).* Tesis doctoral. Universidad de Granada. España.

Real, I. (2008). *La enseñanza de las matemáticas en Andrés Manjón*. Centros de Estudios Pedagógicos y Psicológicos Andrés Manjón. Granada.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.), (2013). *Análisis didáctico en educación matemática*. Granada: Comares.

Sierra, M. (1997). Notas de historia de las matemáticas para el currículo de secundaria. En L. Rico (Coord.). *La educación matemática en la enseñanza secundaria*. Horsori: Barcelona.

Verdejo, F. (1845). *Guía práctico de agrimensores y labradores o Tratado completo de agrimensura y aforage* (4.ª Ed.), Madrid: Imprenta de D. José Repollés.

PENSAMIENTO NUMÉRICO

CONOCIMIENTO MATEMÁTICO DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN ALUMNOS DEL MÁSTER DE SECUNDARIA (MATEMÁTICAS)

Mathematical Knowledge of the Limit Concept in Students of the Master in Teaching in Secondary School (Mathematics)

Matías Arce, Laura Conejo, Tomás Ortega y Cristina Pecharromán
Universidad de Valladolid, España

Resumen

Se presenta una investigación sobre la comprensión del concepto de límite funcional finito en un punto que los futuros profesores de matemáticas podrían transmitir a sus alumnos de bachillerato. Para ello se determina qué tipo de conceptualización (intuitiva, aproximación óptima, métrica) está asociada a su comprensión. Finalmente, se descubre que entre las coordinaciones intuitiva y métrica de las aproximaciones de los valores de la variable independiente y sus imágenes, aparece una coordinación numérica asociada a una tabla de valores convergentes.

Palabras clave: aproximación, tendencia, límite, aproximación óptima, coordinación

Abstract

A research focused on the understanding of the concept of finite limit of a function at a point in prospective secondary teachers of mathematics is presented. It is determined the type of conceptualization (intuitive, optimal approximation, metric) of limit, related to their understanding, that they could transmit to their students. Finally, it is found *that among the intuitive and metric coordination of the approximations of the values of the independent variable and their images, it appears a numerical coordination linked to a table of convergent values*.

Keywords: *approximation, tendency, limit, optimal approximation, coordination*

Arce, M., Conejo, L., Ortega, T. y Pecharromán, C. (2016). Conocimiento matemático del concepto de límite en alumnos del Máster de Secundaria (Matemáticas). En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 199-207). Granada: Comares.

Planteamiento inicial

En nuestra experiencia como docentes hemos observado la dificultad del concepto de límite para los alumnos y cómo lo olvidaban fácilmente. Ya en los años 80, uno de los autores escribió un programa de ordenador para ayudarlos a comprender el concepto. Este programa de ordenador generaba una tabla de aproximaciones numéricas que surgían al evaluar funciones (de uno o dos criterios, que se introducían a voluntad) en el entorno del punto en el que se estudiaba la existencia de límite y, a partir de esta tabla, los alumnos debían encontrar el valor de $\delta>0$ a partir de un $\varepsilon>0$ dado que cumpliera la definición métrica de límite en los valores de la tabla generada (se trataba de establecer lo que Cottrill, Dubinsky, & Nicholls (1996) posteriormente denominaron coordinaciones).

Lamentablemente, el fenómeno del olvido, como hemos comprobado en repetidas ocasiones y lo avala el trabajo de Blázquez, Gatica y Ortega (2008), también es común en los alumnos universitarios de Ciencias (matemáticas, físicas, ingenierías, arquitectura), y pocos alumnos que cursan estos estudios son capaces de escribir una definición del concepto si ha pasado cierto tiempo desde su estudio.

Desde hace unos cuantos años se han prodigado numerosísimas investigaciones sobre el concepto de límite tanto en España como en el extranjero, que no voy a citar por ser sobradamente conocidas, y que aparecen bien referenciadas en la tesis doctoral de Fernández-Plaza (2015). Aquí se presenta una investigación realizada con alumnos del master de Secundaria en la que se analiza el nivel de coordinación que alcanzan los alumnos entre las variables dependiente e independiente y el conocimiento matemático para la enseñanza que poseen sobre dicho concepto

Marco teórico y objetivos

Tanto Cottrill et al. (1996) como Valls, Pons y Llinares (2011), aplicando el marco APOE, a partir de una descomposición genética del concepto, consideran que la función es la que organiza la coordinación entre las aproximaciones de la variable independiente y los valores de la función, poniendo en juego el tipo de definición del concepto que se considere. La apreciación del nivel de la coordinación de las aproximaciones es la que marca la comprensión del concepto de límite por los alumnos. Cottrill et al. tratan de establecer esta coordinación a través de la definición métrica y concluyen que sólo la logran algunos alumnos. Valls et al. no analizan más allá de la coordinación de las aproximaciones de las variables independiente y dependiente.

Por otra parte, después de que Shulman (1986) considerara tres grandes componentes sobre conocimiento profesional del profesor (Conocimiento del Contenido, Conocimiento Didáctico del Contenido y Conocimiento Curricular), varios autores han desarrollado esta teoría. Entre ellos destacan Ball, Thames y Phelps (2008), quienes propusieron un modelo que llamaron *Conocimiento Matemático para la Enseñanza* (MKT) que considera tres subdominios del Conocimiento del Contenido de Shulman: *Conocimiento Común del Contenido, Conocimiento Especializado del Contenido* y *Conocimiento sobre el Horizonte Matemático*. Posteriormente, Rowland, Turner, Thwaites, & Huckstep (2009) interpretan el conocimiento del contenido de Shulman como un *conocimiento contextualizado en acciones* y, por terminar, en la Universidad de Huelva, Carrillo, Contreras, Climent, Escudero-Ávila, Flores-Medrano y Montes (2014), desarrollan los modelos anteriores y proponen el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) en el que sobre el conocimiento del contenido destaca el *Conocimiento de la estructura de las matemáticas (KSM).* Para el análisis que se realiza en este trabajo es suficiente considerar dos de los subdominios del MKT: el *Conocimiento Común del Contenido* (conocimiento matemático que ha alcanzado cualquier graduado con suficientes estudios en matemáticas y, como profesor, el conocimiento que necesita saber para transmitir el contenido que enseña) el *Conocimiento Especializado del Contenido* (conocimientos y habilidades propias de la enseñanza: ¿Por qué?, ejemplos, relaciones, explicaciones, elecciones, evaluaciones,…) y la estructura del concepto.

Entre los dos planteamientos considerados cabe un tercero que está ligado a la definición de límite como aproximación óptima, y que consiste en establecer la dependencia de la aproximación, H, de la variable independiente en un punto, $x=a$, cuando se fija una aproximación arbitraria, K, del límite de la función en dicho punto. Precisamente, el primer objetivo de esta investigación consiste en averiguar si los alumnos del máster de secundaria (módulo de matemáticas) son capaces de establecer coordinaciones entre las variables optimizando y controlando las aproximaciones. Un segundo objetivo consiste en averiguar cuál es la comprensión del concepto de límite funcional finito en un punto que muestran los futuros profesores de matemáticas, y que podrían transmitir a sus alumnos de bachillerato, y determinar qué tipo de conceptualización (intuitiva, aproximación óptima, métrica) está asociada a su comprensión.

Metodología

El trabajo que se presenta es de tipo práctico y en él se describe el análisis de las respuestas que han dado los 12 alumnos del Máster de Secundaria de la Universidad de Valladolid (4 arquitectos, 4 ingenieros y 4 matemáticos), que ya habían completado su formación matemática del grado y del máster (sólo les faltaba cursar las asignaturas de Innovación Docente en Matemáticas e Iniciación a la Investigación Educativa en Matemáticas). Se ha aplicado una metodología de diseño (Bakker & Van Eerde, 2015), refinando el diseño a lo largo de las siguientes fases:

1. Se parte de dos cuestiones previas: en la primera debían escribir la definición del concepto de límite que recordaban; en la segunda se les pidió que respondieran si una sucesión monótona creciente se aproximaba a 1000. En esta fase se les entregó un cuadernillo autoformativo de trabajo que cumplimentaron fuera del aula y del que se analizaron sus respuestas. Entre otros objetivos, se

buscaba que reflexionaran sobre qué definición de límite, de todas las reflejadas, era la más adecuada para la docencia en bachillerato.

2. Se grabó en vídeo el debate que se estableció sobre las respuestas que los alumnos escribieron en el cuadernillo de trabajo. Este debate, que también tuvo carácter formativo, fue transcrito y analizado.
3. Los alumnos cumplimentaron una nueva versión refinada del cuadernillo de trabajo, donde se reformularon algunas cuestiones y se incluyeron otras, destacan la 28 y la 32 que se incluyen para analizar la aplicabilidad y las coordinaciones a través de tablas numéricas.

Desarrollo de la investigación

Los dos cuadernillos de trabajo analizados constituían, en sí mismos, textos de aprendizaje reflexivo, ya que al avanzar en su cumplimentación los alumnos tenían que reflexionar sobre los contenidos que iban presentándose en los ítems. Aparte del análisis realizado sobre las dos cuestiones previas, aquí sólo se presenta un resumen de los análisis realizados sobre 4 ítems del primer cuadernillo y 3 ítems del segundo. Con ellos se trató de averiguar la familiaridad de los alumnos con las diferentes definiciones y la facilidad que perciben, qué definición creen que se debe utilizar en bachillerato y la coordinación numérica.

Respuestas a las preguntas previas

1. La mayor parte de los 12 alumnos respondieron que *2-1/n, n=1, 2,…* es una sucesión que se aproxima a *2* y que tiende a *2*, pero todos afirmaron que no se aproxima a *1000.*
2. Ningún alumno escribió una definición correcta de límite. La más acertada es ésta:

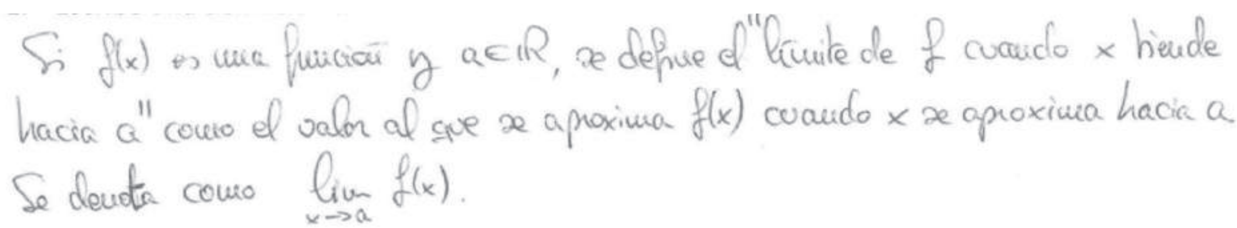

Si $f(x)$ es una función y $a \in \mathbb{R}$, se define el "límite de f cuando x tiende hacia a" como el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando x se aproxima hacia a.
Se denota como $\lim_{x \to a} f(x)$.

Figura 1. *Definición dada por un alumno del grado de matemáticas.*

Todos los alumnos del máster identificaron aproximación con tendencia, y todas las definiciones que escribieron del concepto de límite se quedan en una concepción intuitiva. Se estableció un debate previo al primer cuadernillo de trabajo para discriminar aproximación y tendencia, y reflexionar sobre la no validez de la definición intuitiva. El cuadernillo, que nos ayuda a analizar el grado de comprensión del concepto que poseen los alumnos, parte de los conceptos de aproximación y tendencia, y de las formulaciones del concepto de límite finito de una sucesión. Posteriormente, se les plantean las siguientes definiciones de límite funcional finito en un punto:

I. La función *f* tiende hacia el límite *L* en *a* significa: para todo $\varepsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que, para todo x, si $0<|x-a|<\delta$, entonces $|f(x)-L|<\varepsilon$.

II. La función *f* tiende hacia el límite *L* en *a* significa: para todo $\varepsilon>0$ existe algún $\delta>0$ tal que para todo x de $(a-\delta, a+\delta)^*$ se verifica que $f(x)\in(L-\varepsilon, L+\varepsilon)$.

III. *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$ (se lee límite de f(x) cuando x tiende a a es L), si, y solo si, cuando x tiende a a, siendo x distinto de a, sus imágenes, f(x), tienden a L.

IV. El número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$, si, y solo si, para cualquier aproximación K de L (distinta de L) existe otra aproximación H de a (distinta de a) tal que las imágenes, f(x), de todos los puntos, distintos de a, que mejoran esta aproximación, H de a, mejoran la aproximación K de L

V. El número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$, si, y solo, si para cualquier aproximación K de L (distinta de L) existe un entorno reducido de a tal que las imágenes de todos sus puntos mejoran la aproximación K de L.

VI. El número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$, si, y solo si, para toda sucesión $\{x_n\}$ con límite a, la sucesión de sus imágenes, $\{f(x_n)\}$, tiene límite L.

VII. El número *L* es el límite de la función *f* en el punto *a*, y se escribe $\text{lím}_{x\to a}f(x)=L$, si, y solo si, $\text{lím}_{x\to a^-}f(x)= \text{lím}_{x\to a^+}f(x)=L$

Sobre ellas se les preguntó por su familiaridad para ellos, su equivalencia, su veracidad o falsedad y cuáles consideraban más apropiadas para la docencia en bachillerato. Las definiciones consideradas más familiares fueron I y II, y las menos III, IV y V, curiosamente las más parecidas a sus definiciones en la cuestión previa. Los matemáticos e ingenieros marcan un mayor número de definiciones como familiares. Sobre su equivalencia y su veracidad o falsedad, 5 alumnos no respondieron nada, 4 alumnos resaltaron la veracidad de todas ellas, indicando 2 de ellos que «es reescribir lo mismo con otras palabras» y 3 alumnos indican que la VII es una propiedad, no una definición. Además, un alumno indica la equivalencia de las cinco primeras, dos consideran que I es equivalente a II, y IV a V, y para otros 2 sólo son equivalentes las dos primeras. Las definiciones que marcan como más apropiadas para la docencia de bachillerato, por este orden, son: III, IV, V, VI, I, II y VII, fijándose para ello en su carácter intuitivo y su mayor claridad y sencillez.

Además, en el ítem que pedía demostrar que si el límite de una función en x=a es positivo, dicha función es positiva en un entorno reducido de x=a, dos alumnos lo realizan aplicando la definición V (Figura 3); 5 intentan aplicar la definición I (Figura 2), pero sólo uno lo hace bien; 2 lo intentan, pero no escriben nada bien y 3 lo dejan en blanco.

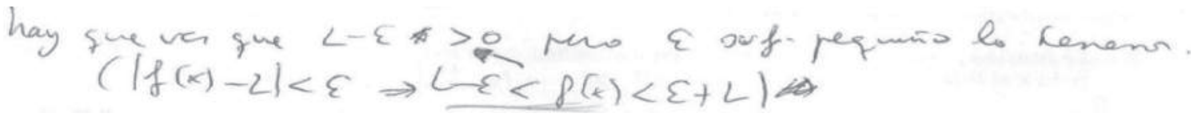


Figura 2. *Intento de demostración aplicando la definición métrica (I).*

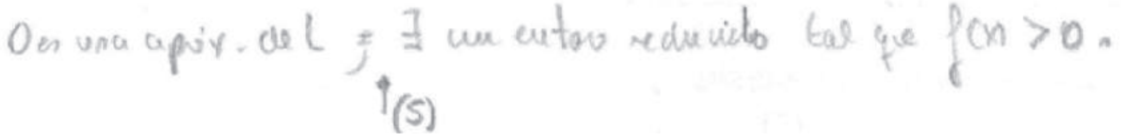


Figura 3. *Demostración aplicando la definición como aproximación óptima (V).*

El análisis de las respuestas del cuadernillo y del debate posterior puso de manifiesto que los alumnos se han ido afianzando en los conceptos de aproximación, tendencia y límite finito de una función en un punto. No se han encontrado diferencias sustanciales entre las respuestas de los graduados en matemáticas, ingeniería y arquitectura, todas ellas caracterizadas por su alto grado de deficiencia. Los alumnos fracasan al utilizar las definiciones más familiares para ellos (las métricas), interpretando la equivalencia entre definiciones más por su forma que por su significado. Sólo 1/3 de los alumnos considera correctas las definiciones presentadas. En suma, poseen un conocimiento común bastante deficiente y están muy lejos de poseer un conocimiento especializado sobre el concepto y su estructura. El debate posterior tuvo un carácter formativo, dado que se fueron analizando con ellos las respuestas que los alumnos habían escrito en el primer cuadernillo, y corrigiendo de forma explicativa las respuestas erróneas, como pone de manifiesto la siguiente transcripción, sobre la idea de tendencia:

P: Habéis escrito que $K \to L \Rightarrow Q<K<L$: ¿Qué está mal puesto ahí? ¿Qué es K?

A: Una aproximación de L.

P: Un número, ¿no?

A: Sí.

P: Vale.

A: Claro, no tiene por qué ser cierto.

P: Pero, ¿cuál no tiene por qué ser cierto?

A: Que $Q <K<L$.

P: Si escribimos $K \to L$, ¿tiene sentido eso?

A: No.

P: K es una constante fija, ¿no?

A: Bueno claro, también podríamos tener $L<K$.

P: Bueno, bien. Dejemos la desigualdad por ahora, veamos qué significa $K \to L$.

A: Sí.

P: ¿Qué?

Hablan entre sí las 3 alumnas del grupo.

A: Que K es un número.

P: Pues si K es un número no puede tener tendencia.

Todos los alumnos: Claro, claro.

P: ¿Tiene sentido decir que $3 \rightarrow 5$?

Todos: No, claro, no,…

Tras este debate se diseñó un nuevo cuadernillo en el que se incluyeron los dos ítems, cuyo enunciado y resumen del análisis de sus respuestas se presenta a continuación:

Ítem 28. Demuestra que si $lím_{x \rightarrow a} f(x)$ es positivo existe un entorno reducido de a en el que $f(x)>0$.

Ítem 32. Construye tres tablas numéricas con GeoGebra que ilustren la convergencia y determina sobre ellas la aproximación H de a ($H \neq a$) para una aproximación K de L dada ($K \neq L$) en los valores de la tabla. Adjunta los ficheros de GeoGebra.

Los alumnos arquitectos se codifican con Ai, los ingenieros con Ij y los matemáticos con Mk (i, j, k son enteros entre 1 y 4). Sus respuestas permiten apreciar que los alumnos han evolucionado en la opinión sobre la creencia acerca de qué definición es la más apropiada en Bachillerato. Ahora, por este orden, creen que la definición más adecuada es: V, I, II, IV, VII y III. Sin embargo las razones que justifican sus elecciones son muy diferentes. Para A1, la definición V porque es una definición rigurosa exenta de formalismo. A2, M3 y M4 escriben algo similar. Para A4, la II es la más sencilla de comprender. Este mismo argumento utiliza I1 para la VII e I4 para la I, añadiendo además que «es la más corta». Para I3, la I porque es la más formal. Para M1 la II porque se puede dibujar bien…

Respecto del ítem 28, casi todos los alumnos que contestan salvo dos (A1 y A2), utilizan la definición V. En estas respuestas distinguimos cuatro niveles:

Nivel 1. Respuestas correctas. Fijan una aproximación $K>0$ de L y deducen que existirá un entorno reducido de a tal que todas sus imágenes $f(x)>K>0$. Alumnos I1, M3 y M4.

Nivel 2. Respuestas con el error de omisión $K \geq 0$. Alumnos I4, M1 y M2 (Figura 4).

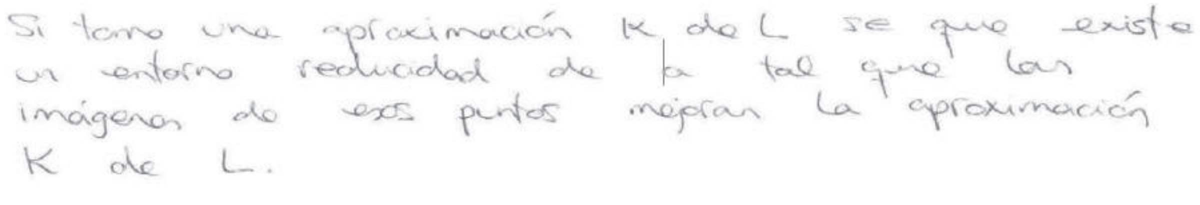

Si tomo una aproximación K de L se que existe un entorno reducidad de a tal que las imágenes de esos puntos mejoran la aproximación K de L.

Figura 4. *Respuesta del alumno M2.*

Nivel 3. Respuesta que no llega al final, porque usa valores absolutos (que son innecesarios) y se pierde en el simbolismo. Alumno A3.

Nivel 4. Respuestas que mezclan las definiciones I y V, y no llegan a establecer el resultado. Alumnos A4, I2 e I3. Concretamente, el alumno A4, como se aprecia en la Figura 5, escribe K y ε sin relación alguna.

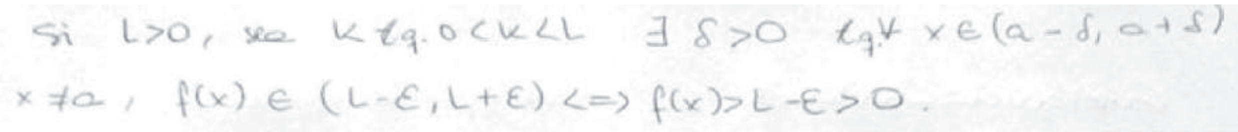


Figura 5. *Respuesta del alumno A4.*

Sobre el ítem 32, aparte de una respuesta en blanco y otras dos sin sentido, se producen tres tipos de respuesta que dan sentido a las coordinaciones numéricas.

1. Respuestas que sólo reproducen aproximaciones numéricas de ambas variables. Estos alumnos se quedan en las coordinaciones señaladas por Valls *et al.* (2011).

2. Los alumnos que generan una tabla de aproximaciones numéricas al punto y al límite y calculan varias aproximaciones de H y K, pero no establecen que para una aproximación arbitraria K de L se deba encontrar un entorno reducido de a tal que todas las imágenes de los puntos de este entorno mejoran la aproximación K de L.

3. La mayor parte de los alumnos (6 de 12) aplican correctamente la definición V, construyen la tabla de aproximaciones y obtienen la aproximación H de a que determina un entorno reducido de la variable independiente tal que todas sus imágenes mejoran la aproximación K de L prefijada en los valores de la tabla. Ejemplo: El alumno A4 conjetura que $\lim_{x\to a} f(x)=4$. Además, escribe que *para K=3.9, las imágenes de cualquier x∈ (1.9, 2.1) mejoran la aproximación K dada.*

Conclusiones

Inicialmente los alumnos del máster, que ya habían completado su formación matemática, no discriminaban entre aproximación y tendencia. Sólo acertaban a reproducir una definición intuitiva en términos de aproximación, y casi siempre incompleta o errónea. El carácter formativo del cuadernillo de trabajo y el desarrollo de los debates les ha afianzado progresivamente en la discriminación entre aproximación y tendencia y en la insuficiencia de la definición intuitiva. La evolución de todos ellos es positiva, pero desigual, y son los alumnos de matemáticas quienes más han progresado durante el desarrollo de la metodología.

En este estadio formativo, los alumnos del máster han mostrado poseer un conocimiento común para la enseñanza del concepto del límite bastante deficiente. Para varios tiene más significación la forma que el contenido, y que más de la mitad consideren incorrectas algunas de las definiciones de límite presentadas pone de manifiesto que están muy alejados del conocimiento específico del concepto y que no poseen la estructura del mismo.

No hay diferencias sustanciales entre los alumnos de los distintos grados y, como pone de manifiesto la grabación del debate, tienen obstáculos tan arraigados que es difícil que se percaten de sus errores. Se constata que unos y otros conceden más valor a sus creencias formativas pasadas que al razonamiento. Esto se pone de manifiesto en el contraste entre las creencias sobre las definiciones más apropiadas para transmitirlas en Bachillerato y la definición aplicada para dar respuesta al ítem 32.

Finalmente, las respuestas dadas por los alumnos al ítem 32 ponen de manifiesto que sí que se producen coordinaciones numéricas de las variables independiente y dependiente asociadas al concepto del límite, y que estas coordinaciones pueden garantizar la comprensión del concepto. Esto supone un avance respecto de la posición de Valls et al. (2011) que sólo se quedan en aproximaciones y de la de Cotrill el al. (1996), ya que la dependencia $\delta=\delta(\varepsilon, f, a)$ utilizando la definición métrica solo puede determinarse en funciones muy sencillas.

Referencias

Bakker, A., & Van Eerde, D. (2015). An introduction to design-based research with an example from statistics education. En A. Bikner-Ahsbahs, C. Knipping y N. C. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education.* Dordrecht, Holanda: Springer.

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes its special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389–407.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2008). Concepto de límite funcional: Aprendizaje y memoria. *Contextos Educativos. Revista de Educación, 11*, 7–21.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO, 30,* 67–82.

Carrillo, J., Contreras, L. C., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. y Montes, M. (Eds.) (2014). *Un Marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de matemáticas.* Huelva: Ed. Bonanza.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated Process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167–192.

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand. Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4–14.

Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A., & Huckstep, P. (2009). *Developing primary mathematics teaching: reflecting on practice with the knowledge quartet*. Londres: SAGE.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación en los procesos de aproximación en la comprensión de límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias. 29*(3), 325–338.

UNA APROXIMACIÓN AL MARCO CONCEPTUAL Y PRINCIPALES ANTECEDENTES DEL PENSAMIENTO FUNCIONAL EN LAS PRIMERAS EDADES

An Approach to the Conceptual Framework and Background of Functional Thinking in Early Ages

María C. Cañadas y Marta Molina
Universidad de Granada, España

Resumen

En este capítulo abordamos dos aspectos relacionados con el pensamiento funcional. En primer lugar, hacemos una aproximación al marco conceptual del pensamiento funcional. Consideramos este tipo de pensamiento como un modo de pensamiento algebraico dentro de la propuesta curricular early algebra. Para este enfoque, las funciones son el contenido matemático protagonista. En este marco, justificamos el interés de investigar sobre el pensamiento funcional en las primeras edades y particularizamos el interés al caso de España. En segundo lugar, presentamos y describimos los principales estudios desarrollados sobre pensamiento funcional en las primeras edades en los contextos internacional y español. Concluimos este capítulo con algunas reflexiones finales.

Términos clave: álgebra escolar, early algebra, pensamiento funcional

Abstract

In this chapter, we address two aspects concerning functional thinking. Firstly, we present an approach to the conceptual framework of functional thinking. We consider this kind of thinking as a way of algebraic thinking within the curricular proposal early algebra. From this perspective, functions are the protagonist mathematics topic. In this framework, we justify the interest of researching on functional thinking on early years, and we particularize this interest in the case of Spain. Secondly, we present and describe the main studies developed about functional thinking in early years in the international and Spanish contexts. We conclude this chapter with some final reflections.

Keywords: *early algebra, functional thinking, school algebra*

Cañadas, M.C. y Molina, M. (2016). Una aproximación al marco conceptual y principales antecedentes del pensamiento funcional en las primera edades. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 209-218). Granada: Comares.

Introducción

La propuesta *early algebra* propugna integrar el pensamiento algebraico en los niveles educativos previos a la educación secundaria, como ocurre tradicionalmente. Surge en Estados Unidos, con base en el trabajo de Kaput (1998), si bien ya en 1985 Davis destacó el potencial del álgebra para proveer a los alumnos de educación primaria de oportunidades para desarrollar una comprensión profunda de las matemáticas y promover su creatividad. Esta propuesta parte de la evidencia mostrada en diversos estudios de que los niños de educación primaria tienen capacidades innatas para realizar razonamientos algebraicos así como de la consideración de una amplia concepción del álgebra, y del pensamiento algebraico, no restringida al uso de simbolismo (Molina, 2009).

Kaput (2008) reconoce que no es fácil definir el pensamiento algebraico, especialmente cuando nos centramos en los primeros cursos. Según este autor, este tipo de pensamiento considera las formas de hacer, de pensar y de hablar sobre el álgebra como contenido matemático. Este contenido se considera caracterizado por la expresión de la generalidad, relativa a relaciones, la cual conduce a la descripción o captura de cierta estructura (Molina, 2006). Cuando el foco matemático del pensamiento algebraico se sitúa en las funciones, se habla del enfoque funcional del *early algebra*. En este enfoque el concepto de función, las relaciones entre las cantidades involucradas, y la variación conjunta entre cantidades son contenidos clave que permiten desarrollar el pensamiento algebraico en estudiantes de primeros niveles educativos. No se trata de introducir las funciones en niveles educativos previos tal y como se trabajan en educación secundaria, sino de aprovechar el potencial de este contenido matemático para promover capacidades en los niños que les sean útiles para el razonamiento en general y el matemático en particular, tanto en el nivel educativo en el que se encuentran como en los sucesivos.

Desde el enfoque funcional se sugiere un estudio del álgebra centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real en las que relaciones cuantitativas pueden explicarse por medio de estos modelos (Heid, 1996). Esta aproximación es recomendada para los estudiantes de los primeros cursos de educación primaria, ya que permite el uso del álgebra en situaciones concretas de una forma significativa (Drijvers, Dekker y Wijers, 2011).

En este contexto, surge como proceso cognitivo clave el pensamiento funcional, entendido como un componente del pensamiento algebraico basado en la construcción, descripción, representación y razonamiento con y sobre las funciones y los elementos que las constituyen.

En este trabajo recogemos ideas que justifican el interés del pensamiento funcional como tema de investigación, presentamos algunos elementos centrales de su marco conceptual que nos permiten caracterizarlo y sintetizamos los principales estudios llevados a cabo. Concluimos con algunas reflexiones finales.

Justificación del interés del pensamiento funcional en las primeras edades

Justificamos el interés de estudiar el pensamiento funcional en las primeras edades desde dos perspectivas: investigadora y curricular.

El trabajo con funciones depende de y aporta comprensión sobre las variables, la manipulación de fórmulas y la relación entre diferentes representaciones. Las tablas, los gráficos y el simbolismo algebraico son sistemas de representación clave para este contenido matemático (Doorman y Drijvers, 2011). Las funciones se consideran una potente herramienta en matemáticas (además de en otras disciplinas) y pueden servir como una temática que conecta e incluso unifica contenidos en el currículo (Schwartz, 1990). Sin embargo, hasta hace menos de una década, su estudio —cuya comprensión se consideraba que requería una pensamiento formal y abstracto por parte del estudiante— estaba relegado a la educación secundaria.

En la últimas décadas, investigaciones en el marco de la propuesta *early algebra* ponen de manifiesto que los niños tienen capacidades relacionadas con el pensamiento funcional desde antes de lo que se les presuponía (e.g., Brizuela, Blanton, Sawrey, Newman-Owens y Gardiner, 2015). El pensamiento funcional promueve en los estudiantes la identificación de patrones y la generalización a través de las relaciones funcionales. Esto hace que fomente el razonamiento inductivo y, como consecuencia, facilite herramientas a los estudiantes para la adquisición de conocimiento matemático (Castro, Cañadas y Molina, 2010).

En la actualidad la propuesta early algebra está ya incluida en currículos de países tan diversos como Australia, Canadá, China, Corea, Estados Unidos o Portugal (Merino, Cañadas y Molina, 2013a). En la mayoría de los casos mencionados, la inclusión se ha producido después del año 2000, por lo que se puede considerar reciente. El enfoque funcional, como presentamos al inicio, se enmarca dentro de esta propuesta pero se ha incluido posteriormente. En España ha sido en la última ley de educación (Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa, 2013) cuando se ha hecho explícita en el currículo la necesidad de desarrollar en esta etapa la capacidad de los escolares «de describir y analizar situaciones de cambio, encontrar patrones, regularidades y leyes matemáticas en contextos numéricos, geométricos y funcionales, valorando su utilidad para hacer predicciones» (Ministerio de Educación y Ciencia, 2014, p. 193879).

Caracterización del pensamiento funcional

En este apartado describimos el pensamiento funcional como constructo cognitivo y presentamos los principales elementos con los que se relaciona.

La función, entendida como una relación de dependencia entre cantidades co-variantes, es el foco de contenido matemático en el que se centra el pensamiento funcional. Rico (2007) define este tipo de pensamiento como el acto de pensar en términos de y acerca de relaciones, destacándolo como una meta disciplinar fundamental en la enseñanza de las matemáticas. El pensamiento funcional es una actividad cognitiva de las personas que se centra en la relación entre dos o más cantidades que varían (Smith, 2008).

Freudenthal (1983) resalta la importancia fenomenológica de la función, considerando que es la relación entre algo que varía libremente y algo que varía bajo determinadas limitaciones (p. 496). Este autor destaca que el origen de la función está en enunciar, postular, producir y reproducir dependencia o conexiones entre variables que tienen lugar en y entre los mundos físico, social y mental.

Las cantidades variables, sus relaciones, la recursividad, la correspondencia entre valores de las variables o la utilización de diferentes sistemas de representación en un contexto de resolución de problemas, son elementos clave para el desarrollo del pensamiento funcional desde los primeros cursos. Este tipo de pensamiento implica la generalización de relaciones entre cantidades co-variantes, la representación de esas relaciones de diferentes formas utilizando el lenguaje natural, las expresiones simbólicas, tablas y gráficos, y razonar de manera fluida con esas representaciones para interpretar y predecir el comportamiento de las funciones (Blanton, Levi, Crites y Dougherty, 2011).

Confrey y Smith (1991) proponen la resolución de problemas contextualizados para la enseñanza de las funciones, involucrando representaciones múltiples y transformaciones entre estas representaciones. Estos autores consideran dos aproximaciones para la enseñanza de las funciones para la educación secundaria: (a) co-variación y (b) correspondencia. Smith (2008) retoma esta estructura y propone tres ideas para clasificar el tipo de actividades que conectan con las relaciones implicadas en las funciones y que pueden realizar en los primeros niveles para fomentar el pensamiento funcional: (a) patrones recursivos, que implica encontrar el patrón de variación que se puede identificar en una secuencia de valores, (b) pensamiento covariacional, que se basa en el análisis de cómo dos cantidades varían simultáneamente y en cómo los cambios en los valores de una variable producen cambios en otra variable y (c) correspondencia de la relación, que se basa en la identificación de una correlación entre variables.

En la Figura 1 recogemos los principales elementos relacionados con el pensamiento funcional señalados.

Figura 1. *Mapa conceptual del pensamiento funcional.*

Principales estudios

Estudios previos, desarrollados en su mayoría en otros países, ponen en entredicho las limitaciones que tradicionalmente se han supuesto a la capacidad de los alumnos de educación primaria para el trabajo con elementos funcionales (e.g., Blanton y Kaput, 2011; Brizuela y Martínez, 2012). El énfasis en la actualidad se centra en poner de manifiesto capacidades de dichos estudiantes para identificar y expresar relaciones entre variables, razonar sobre funciones, e incluso generalizar. Algunos estudios también buscan aportar evidencias de que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales contribuyen al aprendizaje formal posterior de estas nociones. En este apartado mencionamos las principales investigaciones realizadas sobre esta temática a nivel internacional y a nivel nacional.

Contexto internacional

En el contexto internacional, diversos estudios concluyen que los estudiantes de educación primaria pueden describir las relaciones recursivas, la covariación y la correspondencia de cantidades, y pueden llegar a utilizar diferentes sistemas de representación para razonar sobre funciones así como modelizar y resolver ecuaciones de cantidades desconocidas (e.g., Moss *et al.,* 2008). Estudios como los de Mason, Stephens y Watson (2009) o Warren y Cooper (2005) evidencian la capacidad de estudiantes de educación primaria para identificar propiedades generales a partir de situaciones particulares en las que existe una relación entre dos cantidades cambiantes. Carraher, Martínez y Schliemann (2008) señalan cierta tendencia de los estudiantes de ocho años a pensar recursivamente sobre relaciones funcionales en tareas con figuras geométricas. Mediante un estudio longitudinal, Brizuela y Martínez (2012) confirman que experiencias tempranas con tareas que involucran relaciones funcionales son positivas a largo plazo. Las autoras concluyen que estos alumnos manejan un lenguaje matemático caracterizado por el uso de letras para representar variables y cantidades generalizadas con fluidez.

Algunos estudios (Blanton y Kaput, 2004, 2011; Brizuela y Alvarado, 2010) sugieren que el uso de diferentes representaciones puede servir como mediador y apoyo para el desarrollo del pensamiento funcional. Este es, por ejemplo, el caso del uso de la tabla que hacen los estudiantes de primero de educación primaria, que les permite establecer relaciones de correspondencia entre la cantidad y el numeral (Brizuela y Alvarado, 2010). Estas autoras constatan que estos estudiantes pueden crear tablas de valores como herramientas para organizar la covariación de los datos. Moss, Beatty, Shillolo y Barkin (2008) dan muestras de la capacidad de estudiantes de segundo de educación primaria para utilizar la tabla de forma transparente, pudiendo comprender y pensar sobre los datos que la tabla con valores de dos variables que contiene. En esta línea, Blanton y Kaput (2011) señalan que la representación tabular produce diferencias en los procesos cognitivos que producen los estudiantes de diferentes edades.

En relación con el uso de representaciones y evidencias sobre pensamiento funcional en estudiantes de educación primaria, el proyecto *Early Algebra Project* es uno de los principales antecedentes de actualidad, liderado por Bárbara Brizuela y María Blanton en Estados Unidos. Este proyecto parte de investigaciones previas como la de Blanton y Kaput (2004), que destacan que los niños de 4 a 8 años son capaces de pasar de imágenes icónicas al lenguaje natural en educación infantil y llegan a utilizar sistemas de representación simbólicos en tercero de educación primaria (Blanton y Kaput, 2004).

Contexto español

El trabajo de Merino (2012) es el primer antecedente a nivel nacional que se centra en el pensamiento funcional de estudiantes de educación primaria. Este autor indaga sobre las estrategias y representaciones que utilizan estudiantes de 10-11 años cuando abordan una tarea de generalización basada en un ejemplo genérico. Se observa que el tipo de representación más usado es la verbal, si bien en la mayoría de los casos estas representaciones aparecen acompañadas de los sistemas de representación pictórico y, puntualmente, el sistema de representación simbólico. La variedad de sistemas de representación y de patrones identificados por los estudiantes, pone de manifiesto que disponen de los conocimientos y las herramientas necesarias para que este tipo de tareas se trabajen en el aula de educación primaria. Así mismo, se observa que el tipo de estrategia empleada por los escolares en el trabajo con casos particulares condiciona su éxito en la generalización de la relación funcional (Merino, Cañadas y Molina, 2013a, 2013b).

Fuentes (2014) y Cañadas y Fuentes (2015) indagan sobre el pensamiento funcional de estudiantes de segundo de educación primaria en España. Estas autoras destacan las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes para representar la relación entre las variables de un problema contextualizado que involucra la relación funcional f(x)=5x. Entre las estrategias que les llevan a una relación correcta destaca el conteo de dibujos, la respuesta directa multiplicando por cinco el valor de la variable independiente o la asociación de elementos en grupos de cinco.

Estos trabajos marcan el inicio de la línea de investigación en la Universidad de Granada en la que en la actualidad, las autoras de este trabajo están liderando un proyecto de investigación I+D que aborda el pensamiento funcional como aproximación al pensamiento algebraico en los primeros niveles. Con este proyecto se pretende contribuir a la caracterización del pensamiento funcional de los estudiantes de los primeros niveles educativos en España, mostrar evidencias del pensamiento funcional que pone de manifiesto dicho alumnado y producir materiales que sean útiles para promover el pensamiento funcional en las aulas de educación primaria.

De este modo, con un enfoque de actualidad a nivel internacional, se da continuidad a investigaciones sobre las ideas de representaciones, generalización, patrones y *early algebra* en las que se viene trabajando en otros niveles educativos en el grupo de investigación FQM-193 «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» (e.g., Cañadas, Castro y Castro, 2008; Castro, 1995; Castro, Cañadas y Molina, 2010; Molina, 2006; Trujillo, Castro y Molina, 2009).

Reflexiones finales

Los resultados de las investigaciones previas sugieren que los estudiantes de educación infantil establecen relaciones de covariación entre cantidades variables a partir de una relación aditiva. Además, son capaces de descubrir el patrón de la paridad entre esas cantidades. Los estudiantes de primero de primaria identifican y utilizan patrones basados en las relaciones aditivas y multiplicativas para predecir cantidades. También emplean estrategias como conteos sobre dibujos y utilizan diversos sistemas de representación predominando el pictórico y el simbólico (números) para dar respuesta a preguntas sobre cantidades variables, y verbal para expresar generalizaciones lejanas. Los antecedentes recogidos ponen de manifiesto que los estudiantes de educación primaria, son capaces de dar respuestas a tareas de pensamiento funcional. Además, coinciden en destacar la necesidad de profundizar en el pensamiento funcional de los estudiantes de primeras edades, particularmente en educación infantil y primero de educación primaria.

Así mismo, de la revisión de literatura presentada se desprende la actualidad de la investigación sobre pensamiento funcional en estas edades y la necesidad de llevar a cabo más estudios que, por un lado, clarifiquen los descriptores del pensamiento funcional y, por otro, muestren evidencias sobre son capaces de hacer los estudiantes de educación primaria en relación con este tipo de pensamiento. Esto aportaría información de utilidad para la toma de decisiones docentes en las aulas de este nivel educativo, y para la formación de maestros de primaria. Aunque hay diversos estudios a nivel internacional que se han preocupado por el pensamiento funcional de los estudiantes de educación primaria, son escasas y necesarias más investigaciones que indaguen sobre este aspecto. Estos intereses se ven acentuados en el contexto español, donde variadas investigaciones ponen de manifiesto las dificultades de los estudiantes cuando abordan el estudio formal del álgebra en educación secundaria, y no se ha realizado hasta el momento ningún estudio que aborde la introducción del álgebra desde una aproximación funcional desde la etapa de educación primaria.

La incorporación del pensamiento funcional en el currículo de educación primaria recientemente hace que el interés por la investigación sobre este tipo de pensamiento se extienda al ámbito docente. Es deseable que los resultados puedan llegar a las aulas, aportando ideas sobre cómo promover este tipo de pensamiento en educación primaria y guiando así la implantación de esta componente en las nuevas directrices curriculares.

Agradecimiento

Este trabajo ha sido realizado dentro del proyecto de investigación del Plan Nacional I+D con referencia EDU2013-41632-P, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

Blanton, M. L. y Kaput, J. J. (2011). Functional thinking as a route into algebra in the elementary grades. En J. Cai y E. Knuth (Eds.), *Early algebraization, advances in mathematics education* (pp. 5–23). Nueva York, NY: Springer.

— (2004). Elementary grades students' capacity for functional thinking. En M. Johnsen y A. Berit (Eds.), *Proceedings of the 28th International Group of the Psicology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 135–142). Bergen, Noruega: Bergen University College.

Blanton, M., Levi, L., Crites, T. y Dougherty, B. (2011). *Developing essential understanding of algebraic thinking for teaching mathematics in Grades 3-5*. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Alvarado, M. (2010). First graders' work on additive problems with the use of different notational tools. *Revista IRICE Nueva Época, 21*, 37–44.

Brizuela, B. M., Blanton, M., Sawrey, K., Nweman-Owens, A. y Gardiner, A. M. (2015). Children' use of variables and variable notation to represent their algebraic ideas. *Mathematical Thinking and Learning, 17*(1), 34-63. DOI: 10.1080/10986065.2015.981939

Brizuela, B. M. y Martínez, M. (2012). Aprendizaje de la comparación de funciones lineales. En M. Carretero y J. A. Castorina (Comps.), *Desarrollo cognitivo y educación [II]* (pp. 267–289). Buenos Aires, Argentina: Paidós.

Cañadas M. C. y Fuentes, S. (2015). Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio. *Investigación en Educación Matemática XIX*.

Cañadas, M. C., Castro E. y Castro, E. (2008). Patrones, generalización y estrategias inductivas de estudiantes de 3.º y 4.º de Educación Secundaria Obligatoria en el problema de las baldosas. *PNA, 2*(3), 137–151.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann, A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3–22.

Castro, E, Cañadas, M. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO, 54*, 55–67.

Castro, E. (1995). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Confrey, J. y Smith, E. (1991). A framework for functions: Prototypes, multiple representations, and transformations. En R. G. Underhill (Ed.), *Proceedings of the 13th annual meeting North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 57–63). Blacksburg, VA: Conference Committee.

Doorman, M. y Drijvers, P. (2011). Algebra in functions. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 119–135). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Drijvers, P., Dekker, T. y Wijers, M. (2011). Algebraic education: Exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5–26). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Fuentes, S. (2014). *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. Trabajo Fin de Master. Universidad de Granada, España. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/6263/

Gobierno de España (2013). Ley Orgánica para la Mejora de la Calidad Educativa. *BOE, 295*, 97858-97921.

Heid, M. K. (1996). A technology-intensive functional approach to the emergence of algebraic thinking. En A. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 239–255). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer Academic Publishers.

Kaput, J. J. (1998). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.

— (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5–17). Nueva York, NY: Routledge.

Mason, J., Stephens, M. y Watson, A. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal, 21*(2), 10–32.

Merino, E. (2012). *Patrones y representaciones de alumnos de 5.º de educación primaria en una tarea de generalización*. Trabajo Fin de Máster, Universidad de Granada. Disponible en http://funes.uniandes.edu.co/1926/

Merino, E., Cañadas, M. C. y Molina, M. (2013a). Uso de representaciones y patrones por alumnos de quinto de educación primaria en una tarea de generalización. *Edma 0–6: Educación Matemática en la Infancia, 2*(1), 24–40.

— (2013b). Estrategias utilizadas por alumnos de primaria en una tarea de generalización que involucra relaciones inversas entre dos variables. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 383–392). Bilbao: SEIEM.

Ministerio de Educación y Ciencia (2014). Real Decreto 126/2014 de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria. *BOE, 52*, 19349-19420. Madrid, España: Autor.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de Pensamiento Relacional y Comprensión del Signo igual por Alumnos de Tercero de Educación Primaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/544/

— (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA, 3*(3), 135–156.

Moss, J., Beatty, R., Shillolo, G. y Barkin, S. (2008). What is your theory? What is your rule? Fourth graders build their understanding of patterns and functions on a collaborative database. En C. Greenes (Ed.), *Algebra and Algebraic thinking in school mathematics: the National Council of Teachers of Mathematics 70th Yearbook (2008)* (pp. 155–168). Reston, VA: NCTM.

Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA, 1*(2), 47–66.

Schwartz, J. (1990). Getting students to function in and with algebra. En G. Harel y E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy* (pp. 261-289). Washington, DC: Mathematics Associations of America.

Smith, E. (2008). Representational thinking as a framework for introducing funcions in the elementary curriculum. En J. J. Kaput, D. W. Carraher y M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 133–160). Nueva York, NY: Routledge.

Trujillo, P., Castro, E. y Molina, M. (2009). El proceso de generalización: un estudio con futuros maestros de primaria. *Indivisa, Monografía XII*, 73–90.

Warren, E. y Cooper, T. (2005). Introducing functional thinking in year 2: A case study of early algebra teaching. *Issues in Early Childhood, 6*(2), 150–162.

LA COMPARACIÓN E INVESTIGACIÓN COMPARATIVA

Comparison and Comparative Research

Elena Castro-Rodríguez y Enrique Castro-Martínez
Universidad de Granada, España

Resumen

Abordamos la comparación como constructo teórico y como proceso fundamental tanto en la actividad docente como investigadora del profesor Rico. Realizamos en primer lugar un análisis conceptual de la comparación y mostramos distintas tipologías y modelos de comparación atendiendo a la naturaleza de los objetos que se comparan y al ámbito al que se aplican. Por último, presentamos investigaciones realizadas por el profesor Rico dentro del área de la educación matemática en los que la comparación ha tenido un papel relevante.

Palabras clave: análisis conceptual, comparación, educación matemática, investigación comparativa

Abstract

We board the comparison as theoretical construct and as a fundamental process in the teaching and research of professor Rico. First we perform a conceptual analysis of the comparison and show different types and models of comparison based on the nature of the objects being compared and the scope to which they apply. Finally, we present some research performed by professor Rico within the area of mathematics education in the comparison has played an important role.

Keywords: *comparative research, comparison, conceptual analysis, mathematics education*

Castro-Rodríguez, E. y Castro, E. (2016). La comparación e investigación comparativa. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 219-226). Granada: Comares.

Introducción

Un breve repaso de nuestra historia pasada como componentes del grupo de investigación coordinado por el profesor Rico, pone de manifiesto que la comparación ha estado presente de formas variadas en su quehacer investigador. Unas veces como objeto de investigación en trabajos realizados bajo su dirección (Castro, 1991; Castro, 1995), otras veces como instrumento de metodología didáctica en la construcción de conceptos matemáticos como las magnitudes (véase la colección Matemáticas, cultura y aprendizaje de la colección síntesis de la que es editor) y, en todos los casos, y desde su inicio, la comparación se ha tratado desde un punto de vista de la lógica científica (Rico y Fernández, 1988).

La ciencia en general, considerada como un proceso de indagación, conlleva una serie de actividades cognitivas básicas generales tales como observación, comparación, inferencia y predicción. La comparación, como actividad básica de pensamiento se haya presente en distintos ámbitos de la ciencia y, particularmente, tiene una presencia importante en la construcción y adquisición del conocimiento matemático. Durante los últimos cincuenta años la comparación ha estado presente en la investigación sobre aprendizaje de las matemáticas y ha sido incluida de un modo u otro en los currículos escolares: la comparación y la clasificación como conceptos lógico-matemáticos en educación infantil, como categoría semántica de problemas aritméticos enunciados verbalmente, como componente del proceso de construcción del concepto de magnitud (longitud, superficie, capacidad, peso, etc.) y de la medida. Así pues, en Educación Matemática se utiliza la comparación en distintos contextos, con fines diversos, con distinto nivel de generalidad y con distinta complejidad matemática. A pesar de esta ubicuidad de la comparación en la investigación y el currículo escolar de matemáticas, se le ha prestado poca atención a su análisis como constructo teórico y científico. Por ello, con este trabajo queremos contribuir a cubrir esa laguna, nuestra intención es reflexionar sobre la comparación desde el ámbito de la investigación en Educación Matemática y realizar de la misma un análisis conceptual (Rico, 2001). Desde el ámbito de la investigación nos hacemos eco de la importancia de este análisis:

> Parte inicial del trabajo de un investigador en educación matemática es el análisis de los conceptos sobre los que va a trabajar y que sostienen la investigación, lo cual debe conducir a una delimitación adecuada del problema (Rico, 2001, p. 179).

La comparación, considerada como actividad cognitiva, es uno de los rasgos centrales de la empresa científica (Piovani, 1998). Pero también está presente de un modo continuo en nuestra vida cotidiana. La comparación es una de las actividades que da forma a la experiencia humana y los seres humanos hacen comparaciones continuamente entre objetos y eventos que encuentran durante su vida (de Nardis, 2014). Explorar entonces, como indica Fideli (1998), el modo en que la comparación se realiza en la vida cotidiana puede ser útil para comprender los procedimientos mediante los cuales organizamos nuestros conocimientos. La comparación que se realiza durante un proceso de investigación tiene connotaciones distintas. La comparación en la vida diaria se configura como una observación rápida, mientras que en la ciencia es más compleja. Obviamente, depende del contexto y los objetivos de comparación (de Nardis, 2014).

Primera aproximación

Llegados a este punto nos planteamos cómo definir la comparación, qué aspectos caracterizan al acto de comparación. Al margen del nivel de complejidad que puede acarrear el acto de comparar hay unos aspectos subyacentes en toda comparación que deben aparecer explícitos en la caracterización de la misma. La primera aproximación que realizamos es la que se tiene en el lenguaje ordinario, la definición oficial que se da de la comparación en el diccionario de la Real Academia de la Lengua define el término comparar como el acto de «Fijar la atención en dos o más objetos para descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanza» (RAE, 2014). Esta definición incluye someramente tres aspectos que son tratados de forma general, como no podía ser de otra manera, dada la fuente. El primer aspecto es un acto de voluntad (fijar la atención) que requiere por tanto de un sujeto, de una persona que la realice; el segundo aspecto que incluye son los elementos lógicos de la comparación (dos o más objetos y la relación entre ellos) y, el tercero, la finalidad de la comparación (descubrir sus relaciones o estimar sus diferencias o semejanzas).

Aproximación epistemológica

Una segunda aproximación realizada desde el punto de vista epistemológico, considera que lo que se compara no son los objetos sino estados en lo que se encuentran esos objetos con respecto a una propiedad en un momento dado, «la comparación es una operación cognitiva a través de la cual se cotejan los estados de uno (o más) objetos sobre la base de al menos una propiedad de los mismos» (Fideli, 1998; Marradi, 1991). Para estos autores en la comparación intervienen cuatro elementos: el objeto o los objetos (que pueden ser sujetos, grupos, instituciones, etc.), al menos una propiedad de los objetos, los estados de los objetos sobre dicha propiedad y el punto del tiempo en el que fueron relevados dichos estados (Piovani, 2001). Así pues, en el análisis lógico de Marradi (1991) comentado por Fideli (1998) y Piovani (2001), encontramos que «objetos», «estados», «propiedades» y posiblemente «puntos en el tiempo» deben ser considerados como los elementos lógicos de la comparación.

Para explicar y justificar la definición anterior, Marradi (1991) observa en primer lugar que la comparación se da en distintos ámbitos sociales, científicos y culturales: en la vida cotidiana (Juan es más alto que Antonio), en las ciencias sociales (Europa es menos liberal que América), en las ciencias físicas (el cobre es mejor conductor de la electricidad que el hierro). Observa que las tres frases anteriores tienen una estructura lógica idéntica: en cada una de ellas hay dos objetos (Juan y Antonio, Europa y América, diamante y cristal), y una propiedad que los relaciona (altura, liberalidad, dureza).

Así pues, concluye que hay dos clases de elementos básicos en una comparación: los objetos y la propiedad que se toma para comparar los objetos. Pero analizado con más precisión, en la relación que se establece no se comparan los objetos globalmente entre sí —y ni siquiera sus propiedades, sino los *estados* en la *misma* propiedad. Tales estados son pues, para Marradi (1991), una tercera clase de elementos necesarios para la estructura lógica de la comparación.

Una consecuencia del hecho de que se comparen los estados y no los objetos es que, para que exista comparación, no es preciso que los objetos sean dos con tal de que los estados sean dos. Es decir, se pueden comparar dos estados del mismo objeto en la misma propiedad, con tal de que se distingan utilizando el tiempo como criterio diferenciador. Por ejemplo «María está más alta que el año pasado». En este caso se comparan los dos estados de la altura de María en dos momentos distintos. Esto último, conlleva la necesidad de precisar el papel del tiempo en la comparación. Los puntos del tiempo en el momento del establecimiento de los diferentes estados en las propiedades son el cuarto tipo de elementos (junto con los objetos, propiedad y estados relativos) necesarios para la estructura lógica de la comparación.

Comparación cualitativa

La comparación es consustancial con la investigación científica en general, pero también en la denominada investigación cualitativa. En la investigación se utiliza la comparación de forma inductiva para detectar propiedades comunes de los objetos que se comparan o de forma deductiva partiendo de una propiedad preestablecida y clasificando los objetos de acuerdo a esa propiedad. Por ejemplo, si la propiedad es el color de los objetos, podemos decidir si dos objetos tienen o no el mismo color o tienen distinto color. Esta forma de deducción es el tipo de comparación más básica, sirve para formar clasificaciones de objetos según su color. Los objetos se agrupan según el color que poseen y se obtienen tantos grupos como colores tienen los objetos comparados. Cuando desconocemos la propiedad que comparten los objetos intentamos averiguar si hay algo que los une. A este tipo de comparación se le denomina *cualitativa,* se utiliza en la investigación cualitativa tratando de encontrar categorías de modo inductivo mediante una comparación constante y sistemática de los hechos observados.

Modelos de comparación

Además de que la comparación puede tener una proyección cualitativa o cuantitativa en los estudios inferenciales, también en la investigación comparativa se han distinguido tipologías de modelos de comparación. Entre los distintos modelos, Fideli (1998) y Marradi (1991) destacan dos de ellos: la comparación macro-analítica y la comparación micro-analítica, las cuales adquieren especial relevancia en la investigación en el campo de las Ciencias Sociales. Aunque ambos modelos tienen sus propias características, la diferencia entre ellos es a menudo una cuestión de matices, como se demuestra comparando las dos frases: «Finlandia tiene alumnos más estudiosos que Alemania» y «los finlandeses son más estudiosos que los alemanes».

La comparación macro-analítica incluye aquellos casos en los que la naturaleza del objeto no influye en la estructura de la comparación. En este modelo se comparan objetos enteros, no sus partes, o bien se comparan sistemas en base a sus propiedades globales. Este estilo de comparación, muy usual en investigación socio-política, suele presentar como objetos de comparación sistemas complejos como sociedades o culturas, donde es difícil establecer partes o propiedades simples.

En el caso contrario, la comparación micro-analítica, abarca aquellos casos en los que la naturaleza del objeto sí es importante. En este modelo se comparan los objetos en base a propiedades más simples, considerando sus partes o miembros, o bien son objetos simples, que antes de ser comparados, se agrupan en base a su pertenencia a un objeto más complejo.

En el área de las Ciencias Sociales, se han desarrollado diversos estudios e investigaciones donde destacan las comparaciones micro-analíticas. Particularmente, en el siguiente apartado, mostramos algunas investigaciones del área de Educación Matemática donde se establecen comparaciones entre distintos tipos de elementos y que han sido desarrollados por el profesor Luis Rico.

La comparación en los trabajos del profesor Luis Rico

La comparación, como objeto de estudio (Rico y Fernández, 1983) o como método de análisis (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011; Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez, 2015), ha sido un elemento presente en los trabajos del profesor Luis Rico. Como muestra de ello, presentamos algunos de estos trabajos que agrupamos según su temática en estudios sobre comparación internacional, estudios sobre comparación curricular, estudios sobre comparación de textos y estudios sobre comparación científica.

Tabla 1. *Algunos trabajos relativos a la comparación desarrollados por el profesor Luis Rico*

Comparación internacional	Gutiérrez-Gutiérrez, A. Gómez, P. y Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación, 26*(2), 265–297.
	Gutiérrez-Gutiérrez, A., Rico, L. y Gómez, P. (2015). Conocimiento didáctico sobre números y operaciones: una comparación internacional. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 13*(1), 47–72.
	Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español*. Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Comparación curricular	Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Díez, A. (en prensa). Matemáticas escolares y cambio curricular. (1945–2014). El caso de los números racionales. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado.* Díez, A., Cañadas, M. C., Picado, M., Rico, L. y Castro, E. (en prensa). Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945–2013). Profesorado. *Revista de Currículum y Formación de Profesorado.* Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de Matemáticas para la Educación obligatoria en España durante el periodo 1945–2010. *Educatio Siglo XXI, 29*, 141–167.
Comparación de textos	Maz, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos xviii y xix. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 49–76. Picado, M., y Rico, L. (2012). La introducción del sistema métrico decimal y los libros de texto en España. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 7,* 9–18.
Comparación cientimétrica	Rico, L., Torralbo, M., Gutiérrez, M. P., Fernández, A. y Maz, A. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21*(2), 295–305.

Comparaciones internacionales

El estudio TEDS-M *(Teacher Education and Development Study in Mathematics)*, llevado a cabo durante los años 2006-2010, fue el primer estudio internacional comparativo a gran escala sobre los planes de formación inicial y sobre el conocimiento adquirido por los futuros profesores de matemáticas en educación primaria y secundaria obligatoria al acabar su formación inicial.

España colaboró en TEDS-M a través del Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación (INEE). La Universidad de Granada participó en el estudio por medio del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación (PAIDI), dentro del Proyecto de Excelencia de la Junta de Andalucía P07-FQM03244 —TEDS-M España— y del proyecto EDU2009-10454 del Ministerio de Ciencia e Innovación. El propósito de la participación española fue analizar y describir la formación inicial en matemáticas del profesorado de educación primaria, compararla con la de otros países y establecer propuestas de trabajo y posibles líneas de actuación que contribuyeran a mejorar dicha formación (INEE, 2012).

Como consecuencia de este estudio, surgieron diversas publicaciones entre las que destacan Gutiérrez-Gutiérrez, Rico y Gómez (2014), Gutiérrez-Gutiérrez, Gómez y Rico (2014) entre otras.

Comparaciones curriculares

Otro ámbito a destacar en la investigación en educación es la comparación curricular. Particularmente, centrados en el área de matemáticas, encontramos varios trabajos que comparan programas de matemáticas vigentes en diferentes momentos históricos.

Estas comparaciones se realizan en base a las dimensiones curriculares (Rico, Díez, Castro y Lupiáñez, 2011) o en base a contenidos matemáticos específicos, como son los números raciones (Castro-Rodríguez, Lupiáñez, Ruiz-Hidalgo, Rico y Díez, en prensa) o las magnitudes y su medida (Díez, Cañadas, Picado, Rico y Castro, en prensa). Las comparaciones realizadas en tales trabajos ponen de manifiesto la importancia en cada momento del contexto social, las expectativas formativas y el modo de entender las matemáticas escolares.

Comparaciones de textos

Dentro del área de historia de la educación matemática, se incluyen varias contribuciones centradas en la comparación de libros o textos educativos de siglos pasados. Centrándose en tópicos como los números negativos (Maz y Rico, 2015) o el sistema métrico decimal (Picado y Rico, 2012; Rico y Picado, 2011), estos estudios identifican determinados criterios didácticos que los textos ponen de manifiesto en la organización de tales contenidos.

Comparaciones cienciométricas

Finalmente, encontramos estudios cienciométricos que tienen el fin de comprobar la consolidación de la Didáctica de la Matemática en España como disciplina científica (Rico, Torralbo, Gutiérrez, Fernández y Maz, 2003). Para ello, se llevó a cabo un análisis y comparación de la investigación en Educación Matemática en España mediante las tesis doctorales realizadas entre 1976 y 1998. Los análisis ciencimétricos y conceptuales realizados, detectaron patrones, tendencias y tópicos de gran actividad investigadora que confirmaron la consolidación del área como disciplina.

Referencias

Castro, E. (1991). Resolución de problemas aritméticos de comparación multiplicativa. *Epsilon, 20*, 105–107.

— (1995). Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa. Granada: Comares.

Castro-Rodríguez, E., Lupiáñez, J. L., Ruiz-Hidalgo, J. F., Rico, L. y Díez, A. (en prensa). Matemáticas escolares y cambio curricular (1945–2014). El caso de los números racionales. *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado.*

Díez, A., Cañadas, M. C., Picado, M., Rico, L. y Castro, E. (en prensa). Magnitudes y su medida en el currículo de primaria en España (1945–2013). *Profesorado. Revista de Currículum y Formación de Profesorado.*

Fideli, R. (1998). *La comparazione*. Milán: Angeli.

Gutiérrez-Gutiérrez, A., Gómez, P. y Rico, L. (2014). Conocimiento didáctico de los estudiantes españoles de Magisterio sobre números: resultados en TEDS-M. *Cultura y Educación, 26*(2), 265–297.

— (2015). Conocimiento didáctico sobre números y operaciones: una comparación internacional. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 13*(1), 47–72.

— (en prensa). Conocimiento matemático sobre números y operaciones de los estudiantes de Magisterio. *Educación XX1*.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) (2012). *TEDS-M. Estudio internacional sobre la formación inicial en matemáticas de los maestros. Informe español.* Madrid: Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Marradi, A. (1991). Comparación. En R. Reyes (Ed.), *Terminología científico-social* (pp. 65–84). Barcelona: Antropos.

— (1991). Clasificación. En R. Reyes (Ed.), *Terminología científico-social* (pp. 45–58). Barcelona: Antropos.

Maz, A. y Rico, L. (2015). Principios didácticos en textos españoles de matemáticas en los siglos xviii y xix. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 49–76.

Nardis, de F. (2014). The logical structures of comparison. *The Open Journal of Sociopolitical Studies, 7*(3), 576–615.

Picado, M. y Rico, L. (2012). La introducción del sistema métrico decimal y los libros de texto en España. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 7,* 9–18.

Piovani, J. I. (2001). Los estudios comparativos: estrategias de investigación empírica en relaciones internacionales. *Relaciones Internacionales, 10*(20), 97–108.

Rico, L. (2001). Análisis conceptual e investigación en didáctica de la matemática. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L., Díez, A., Castro, E. y Lupiáñez, J. L. (2011). Currículo de Matemáticas para la Educación obligatoria en España durante el periodo 1945–2010. *Educación Siglo XXI, 29*, 141–167.

Rico, L. y Fernández, A. (1983). De la comparación a la medida. En *Actas I Jornadas de la Asociación Andaluza de Profesores de Matemáticas.* Cádiz: Universidad de Cádiz.

Rico, L. y Picado, M. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA, 6*(1), 11–27.

Rico, L., Torralbo, M., Gutiérrez, M. P., Fernández, A. y Maz, A. (2003). Tesis doctorales españolas en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas, 21*(2), 295–305.

Scriven, M. (1988). Philosophical inquiry methods in education. En M. Jaeger (Ed.), *Complementary Methods for Research in Education* (pp. 131–183). Washington: AERA.

REPRESENTACIONES GRÁFICAS DE CANTIDADES DISCRETAS EN CONTEXTOS DE COMUNICACIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

Graphical Representations of Discrete Quantities in Contexts of Communication and Problem solving in Early Childhood Education

Carlos De Castro[a] *y Asunción Bosch*[b]
[a]Universidad Autónoma de Madrid, España
[b]Universidad de Almería, España

Resumen

En este trabajo proponemos un esquema de clasificación para las representaciones de cantidades discretas. Este esquema se ha utilizado para analizar las representaciones gráficas elaboradas por dos grupos de alumnos de 4-5 y 5-6 años al abordar dos tareas matemáticas que implican procesos de comunicación y de resolución de problemas. Se han encontrado gran cantidad de representaciones, la mayoría dentro del esquema de clasificación propuesto, cuya variedad muestra la potencialidad de las tareas para el desarrollo de la competencia matemática de representación en la educación infantil.

Palabras clave: cantidad, comunicación, educación infantil, representación, resolución de problemas aritméticos verbales.

Abstract

We propose a classification scheme for children representations of discrete quantities. This scheme has been used to analyze the representations, made by two groups of students of 4-5 and 5-6 years, to solve two mathematical tasks involving processes of communication and problem solving. We have found a large number of representations, most of which were within the proposed classification scheme, which variety shows the potential of the tasks for the development of the mathematical competence of representation in early childhood education.

Keywords: *communication, kindergarten, quantity, representation, verbal arithmetic problem solving.*

De Castro, C. y Bosch A. (2016). Representaciones gráficas de cantidades discretas en contextos de comunicación y resolución de problemas en educación infantil. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 227-236). Granada: Comares.

Introducción

Desde la década de los 80 del siglo pasado, la noción de representación comienza a usarse de forma sistemática en la Educación Matemática y su interés didáctico va en aumento. Esto se debe a que las representaciones hacen presentes los conceptos y procedimientos matemáticos, permiten registrar y comunicar el conocimiento matemático, asignar significados y comprender las estructuras matemáticas (Rico, 2009).

Dentro del ámbito del pensamiento numérico, el conocimiento del sistema decimal de numeración es fundamental en nuestra cultura, pero una asociación rígida entre número y numeral impone limitaciones en el conocimiento de los números naturales. Hay otros sistemas de representación como el análisis aritmético de los números, la recta numérica, o las configuraciones puntales. Entre los números y sus representaciones en distintos sistemas se establecen un gran número de relaciones, cuyo dominio determina la comprensión que los alumnos tienen de los números naturales (Castro, Rico y Romero, 1997).

El análisis aritmético, en que cada número se descompone en sumas o productos de números, favorece la comprensión de los números naturales (Castro, Rico y Romero, 1997). Investigaciones desarrolladas con alumnos en las primeras etapas educativas muestran cómo los niños realizan este tipo de análisis. Badillo, Font y Edo (2015) analizan las representaciones de niños de 7-8 años al resolver un problema de distribución de una cantidad en partes. Estos problemas cuentan con varias soluciones, pues en ellos no se determina el número de partes, ni el número de objetos en cada parte (si tienes 18 ruedas, ¿cuántos juguetes con ruedas puedes tener?). Las representaciones se clasifican en verbales, simbólico/numéricas e icónicas. En este trabajo, al igual que en Schulman y Eston (1999), en que niños de 5 años resuelven problemas de descomposición aditiva, se pone de manifiesto que los problemas en que un todo se separa en partes son particularmente apropiados para que los niños representen el tipo de objeto, además del número. Además, las representaciones que aparecen en los trabajos citados enfatizan la relación parte-todo aditiva (Castro-Rodríguez y Castro, 2013). Otro ejemplo de análisis aritmético es la descomposición factorial, planteada desde educación infantil (Bosch, 2012; Bosch, Castro y Segovia, 2007; De Castro y Hernández, 2014) que subraya la relación parte todo multiplicativa (Castro-Rodríguez y Castro, 2013).

Dentro de la educación infantil, el tema de la iniciación a la representación de números y cantidades ha recibido mucha atención en la investigación. Un ejemplo reciente es el trabajo de Alsina (2011), que estudia las notaciones numéricas elaboradas por niños de 3 a 6 años en tareas de dictado de números, encontrando que estas evolucionan desde la ausencia de código simbólico, con representaciones icónicas del número (un 69,9% en 3 años), hasta el uso de código simbólico (un 89% a los 5 años). Si nos referimos a las representaciones de números pequeños, hasta 3, mediante marcas, a través de una correspondencia uno a uno, algunos niños de 2-3 y de 3-4 años son capaces de utilizar este tipo de representaciones, aunque otros tienen dificultades, tanto con el uso de este tipo de representación, como con la comprensión de las instrucciones de las tareas

(Carruthers y Worthington, 2008; De Castro, Flecha y Ramírez, 2015; Martí, Scheuer y De la Cruz, 2013).

Los aspectos didácticos de la representación de números en educación infantil constituyen también un tema de gran interés para la formación de maestros (Alsina y Llach, 2012; Llach y Alsina, 2012), así como, más en general, el estudio de los sistemas de representación lo es para los profesores y la planificación de la enseñanza (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008).

Al centrar el trabajo en la etapa de educación infantil, se hace pertinente la distinción entre número y cantidad. Consideramos "las cantidades como un par ordenado (*x*, *u*) en el que *x* es un número y *u* una unidad de una magnitud: por ejemplo, 4 canicas, 3,5 kg, 120 km/h." (Puig y Cerdán, 1995, p. 125). En particular, dado que en los problemas aparecen sólo cantidades discretas, cada cantidad está formada por un número y un tipo de objeto (o nombre de objeto, Alvarado, 2005). Así, hay trabajos como el citado de Alsina (2011), que se centra en las notaciones numéricas, y por tanto en la representación del número a través de numerales, Alvarado (2005) habla de cantidades discretas, compuestas por un número y un nombre de objeto, y revisa trabajos previos sobre la representación de dichas cantidades. En un trabajo clásico, Hughes (1987) clasifica las representaciones de cantidades en idiosincrásicas —Carruthers y Worthington (2008), las llaman "expresivas" y tienen sentido para el niño, pero no tienen valor para comunicar cantidades con eficiencia o para resolver problemas, y no las consideramos—, pictográficas, icónicas y simbólicas (incluyendo las del tipo 1 2 3 o 3 3 3, a las que Hughes llama "representaciones simbólicas creativas").

En una línea diferente, otro resultado notable de investigaciones anteriores es que las tareas juegan un papel decisivo en el tipo de representación infantil. Así, mientras en trabajos clásicos como el de Hughes (1987) los niños escribían en papel el contenido de una caja, en una tarea descontextualizada, Alvarado (2005) propone como ejemplo el estudio de El Bouazzaoui (1982), en el que los alumnos debían solicitar por escrito las piezas necesarias para construir una casita, una tarea más contextualizada y dotada de sentido para los niños, inmersa en un contexto de comunicación, en la que surgía mayor variedad de representaciones que en estudios anteriores.

Dentro de nuestro trabajo, orientado al diseño, desarrollo y evaluación del currículo de educación infantil, pensamos que en los primeros años hay que dar prioridad a las cantidades sobre los números (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; Resnick, 1992) y a éstas dentro de una situación significativa para los niños, a través de tareas de peticiones (El Bouazzaoui, 1982) o de problemas que implican descomposiciones (Badillo y otros, 2015; Schulman y Eston, 1999) y convenientemente contextualizadas, en nuestro caso, a través de la literatura infantil (De Castro y Hernández, 2015).

Este trabajo se enmarca dentro de una investigación orientada al desarrollo del currículo matemático de la educación infantil. Las tareas propuestas formaron parte de un estudio piloto y han sido finalmente incluidas en un material curricular para el aula de Educación Infantil (De Castro y Hernández, 2015) con la expectativa de que su realización contribuya a la iniciación en el desarrollo de la competencia matemática, en especial, en su aspecto de "representación y uso de operaciones y lenguaje técnico, simbólico y formal" tal como sugiere el marco teórico de PISA (De Castro, Pastor, Pina, Rojas y Escorial, 2009; Rico y Lupiáñez, 2008).

Objetivo

Planteamos dos objetivos: (1) Clasificar las representaciones gráficas de cantidades discretas realizadas por alumnos de educación infantil de 4 a 6 años en tareas de peticiones y en problemas aritméticos de descomposición aditiva; y (2) Estudiar las diferencias entre las representaciones utilizadas en el aula de 4-5 años y 5-6 años, así como el número de soluciones propuestas en cada edad para el problema de descomposición aditiva.

Método

Participantes

Han participado dos grupos de alumnos de dos colegios públicos: un grupo de alumnos de 4-5 años de San Sebastián de los Reyes (Madrid) y otro, de último curso de educación infantil (5-6 años), de la localidad de Guillena (Sevilla).

Las tareas

Hemos utilizado dos tipos de tareas:

Tareas de peticiones. En ellas se presenta al alumno una figura modelo decorada con formas geométricas. El alumno cuenta con una figura igual, sin decorar, y debe pedir en su cuaderno (escribiendo, dibujando, sin comunicación oral) las pegatinas necesarias para reproducir el modelo original. En la Figura 1 vemos un ejemplo de este tipo de actividad en el cuaderno del alumno.

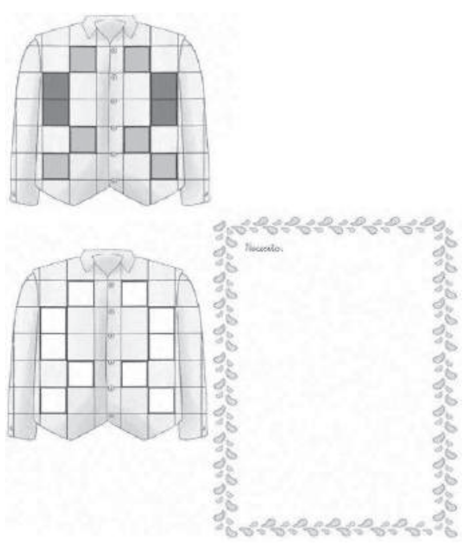


Figura 1. *Hoja del cuaderno para la tarea de peticiones en 4-5 años.*

Tareas de resolución de un problema verbal. Los alumnos tenían que resolver un problema aritmético verbal de descomposición aditiva. Tras resolver el problema con ayuda de materiales manipulativos, los alumnos debían utilizar un dibujo para resolver el problema y anotar la solución en su cuaderno de trabajo. Los enunciados son los siguientes: (a) Si el rey dio 7 regalos a la anciana y a Valentina, ¿Cuántos regalos se quedó cada una? (problema en 4-5 años). (b) En el arroyo había 10 cerdos negros y rosados. ¿Cuántos cerditos negros crees que había? ¿Y cuántos cerditos rosados? (problema en 5-6 años).

En cuanto a la forma de presentar las tareas, estas se proponen a partir de la literatura infantil. Utilizamos, en el grupo de 4-5 años y en el de 5-6, respectivamente, las adaptaciones de los cuentos populares rusos de Alekandr Afanasiev [1826-1871] "Valentina la costurera" y "El príncipe cabrito" (Santillana, 2015), pertenecientes al proyecto "¡A contar! Matemáticas para pensar" (De Castro y Hernández, 2015). Cada uno de los cuentos se había leído varias veces antes de las actividades para contextualizarlas y favorecer que los niños pudieran imaginar las situaciones y elaborar representaciones de las mismas.

Recogida de datos

Se han recogido todas las hojas de trabajo, correspondientes a las cuatro actividades, de los cuadernos de trabajo de ambos grupos. Dado que en el grupo de 4-5 años las representaciones gráficas son más difíciles de interpretar, el maestro entrevistó a cada uno de los niños pidiéndoles que explicaran lo que habían representado en su cuaderno y escribiendo notas aclaratorias.

Resultados

Para analizar las representaciones gráficas de cantidades discretas de los participantes, hemos seguido el siguiente esquema de clasificación (Tabla 1). Este esquema recoge ideas de trabajos citados en la introducción, especialmente el de Hughes (1987), añadiendo la consideración de la cantidad como par número-nombre de objeto. En el contexto de la tabla 1, los aspectos icónicos (marcas, dibujos) los tomamos como conocimientos informales, mientras que los simbólicos (numerales escritos con cifras y con palabras, y palabras) tienen un estatus de conocimiento formal (De Castro, Flecha y Ramírez, 2015).

Tabla 1. *Esquema propuesto para las representaciones de cantidades discretas*

<table>
<tr><th></th><th colspan="4">Representación del número</th></tr>
<tr><th>Representación del tipo de objeto</th><th>1. Icónica</th><th>2. Con aspectos icónicos y simbólicos</th><th>3. Simbólica (con cifras)</th><th>4. Simbólica (con palabras)</th></tr>
<tr><td>A. Sin representación</td><td>||||</td><td>1 2 3 4 o 4 4 4 4</td><td>4</td><td>cuatro</td></tr>
<tr><td>B. Icónica</td><td>
|||| </td><td>1 2 3 4 
4 4 4 4 
4 </td><td>4 </td><td>cuatro </td></tr>
<tr><td>C. Simbólica</td><td>|||| perros</td><td>1 2 3 4 perros</td><td>4 perros</td><td>cuatro perros</td></tr>
</table>

En la tarea de resolución de problemas de descomposición aditiva de los regalos, en el grupo de 4 años, 11 de los 24 niños resolvieron correctamente el problema. Todos los niños (los que dan respuestas correctas y los que no) utilizan representaciones de tipo B1 (ver Tabla 1), es decir, icónicas de número y de tipo de objeto. Ningún niño propuso más de una solución diferente para el problema. Solo un niño de la clase utilizó numerales, sin representar el tipo de objeto (A3), pues en la Figura 2, a la derecha, consideramos que hay dos representaciones diferentes.

Figura 2. *Respuestas en los problemas de descomposición en el grupo de 4-5 años.*

En el problema de descomposición de los cerdos, de los 20 alumnos de 5-6 años, solo 1 no resolvió el problema; 5 hallaron 1 solución; otros 5, 2 soluciones; 5 más, dieron 3 soluciones; y finalmente, 4 alumnos encontraron 5 soluciones correctas. Aparece alguna representación "redundante" no prevista en el esquema de clasificación, como la de la Figura 3 a la derecha, en que el tipo de objeto se representa a la vez de forma simbólica e icónica. A la izquierda, el tipo B2, que comunica el número de forma icónica y simbólica. Al contrario que en el grupo de 4-5 años, en que solo un niño utilizó numerales, en el grupo de 5-6 años, todos los niños los utilizaron espontáneamente.

Aparecen 4 tipos de representaciones: B2, en 2 casos; B3, en 7 casos; C3, en 7 casos; y los restantes 4 casos, como el de la Figura 3, a la derecha, que podemos considerar un caso intermedio entre los tipos B3 y C3.

Figura 3. *Respuestas en los problemas de descomposición en el grupo de 5-6 años.*

En las tareas de petición de 4-5 años, muchos niños no entendieron bien en qué consistía la actividad al ser la primera vez que hacían una de ese tipo. Así, junto a diversas peticiones en las que los niños dibujan un número variado de objetos sin tener en cuenta la forma o el color de las figuras del modelo, vemos peticiones correctas que corresponden sobre todo a las categorías B1 y B2 (ver Figura 4, a la izquierda y centro). Un niño trató de escribir la petición y, ante la pregunta del maestro, acabó escribiendo los numerales 6 y 4 en la tercera línea (Figura 4, derecha).

Figura 4. *Respuestas en las tareas de peticiones en el grupo de 4-5 años.*

En las tareas de peticiones en 5-6 años todos los niños utilizan numerales escritos con cifras y dan la respuesta correcta. Salvo en tres casos (dos representaciones B2, Figura 5 en el centro, y una C3, Figura 5 a la derecha), todas las representaciones son del tipo B3 (Figura 5, izquierda). Los tipos de representaciones, y sus frecuencias, son bastante coincidentes con los de los problemas de descomposición, salvo en el tipo C3, mucho menos frecuente en las tareas de peticiones.

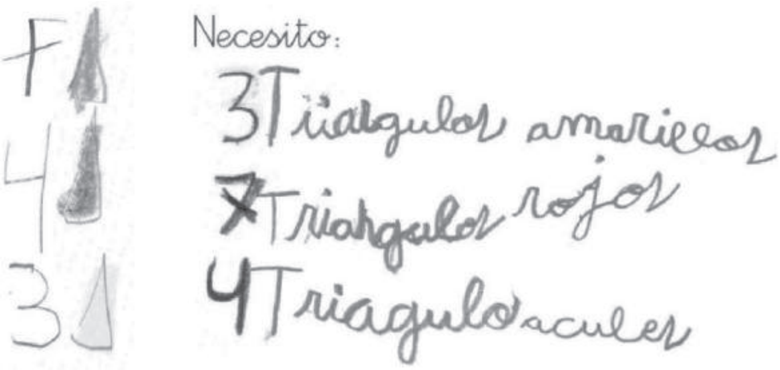


Figura 5. *Respuestas en las tareas de peticiones en el grupo de 5-6 años.*

Viendo globalmente los resultados, en las tareas de peticiones se observa en 4-5 años un uso mayor de la representación simbólica del número con cifras, que casi no se da en los problemas a esa edad, y un uso mayor de la representación simbólica de número y de tipo de objeto (4 triángulos) en las peticiones de 5 años, que en la resolución de problemas. En general, hay un grado más avanzado de simbolización en las peticiones que en los problemas, lo que atribuimos al tipo de tarea. En la resolución de un problema los niños modelizaban directamente con dibujos, lo que implica una representación icónica del número, de carácter informal, mientras que para escribir una cantidad resultado del conteo en un modelo dado, se puede directamente apuntar la cantidad de forma simbólica. Se hace también evidente en este trabajo la evolución de las representaciones de 4-5 años al grupo de 5-6 años.

Discusión y conclusiones

Una característica del esquema de clasificación que lo hace interesante es que, mientras que las representaciones icónicas de número se corresponden con estrategias de modelización directa para resolver el problema, y con representaciones informales mediante dibujos o marcas, las representaciones simbólicas de número se utilizan más para escribir las soluciones y tienen un carácter más formal. Las representaciones de números con aspectos icónicos y simbólicos son estrategias de transición de un conocimiento informal al formal, resultan poco eficientes, por redundantes, al utilizar dos representaciones diferentes que transmiten la misma información. Además, pueden denotar una falta de dominio del principio de cardinalidad. Como hemos visto, el tipo de representación varía según la edad y la tarea, siendo más elevado el grado de simbolización en el grupo de 5-6 años y en las tareas de peticiones.

Las representaciones en problemas de descomposición son similares a las que figuran en Schulman y Eston (1999), aunque en aquel trabajo, al plantear problemas de descomposición a lo largo de todo el curso de 5-6 años, se ve más la evolución en las representaciones y en el número de descomposiciones dado. A cambio, en nuestro trabajo aparecen las representaciones intermedias entre los tipos B3 y C3, no descritas en Schulman y Eston (1999). Un aspecto llamativo de estas representaciones es que el tipo de objeto consta de dos atributos: cerdo, que es representado de manera icónica, y color, que aparece reflejado de forma simbólica (con palabras). En conjunto, conforman una representación "mixta" del tipo de objeto.

Cada sistema de representación enfatiza un determinado aspecto de un concepto. Para el sistema de los números naturales destacan las modalidades de representación simbólica, verbal, gráfica y manipulativa (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008). En las tareas que hemos presentado en este trabajo, están presentes todas estas modalidades. Al centrarnos en las representaciones gráficas, no hemos descrito la fase de resolución de problemas con materiales manipulativos, previa al trabajo en el cuaderno del alumno. Los problemas de descomposición de cantidades suponen un antecedente del análisis aritmético de números y las representaciones que aparecen en ellos remarcan las relaciones parte-todo (Castro-Rodríguez y otros, 2013).

Para finalizar, una implicación de este trabajo para la planificación de la enseñanza en el aula de educación infantil, es que debemos seleccionar cuidadosamente y variar las tareas que planteamos desde los 4 años, para potenciar al máximo el desarrollo de las capacidades de representar cantidades discretas.

Referencias

Alsina, A. (2011). Consideraciones didácticas para la enseñanza de los números escritos en las primeras edades. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, 67,* 21-26.

Alsina, A. y Llach, S. (2012). La enseñanza de los sistemas externos de representación matemáticos y lingüísticos en la educación infantil. *Revista de investigación educativa, RIE, 30*(1), 131-144.

Alvarado, M. (2005). La representación gráfica de cantidades discretas. Entre las posibilidades infantiles y las restricciones de la tarea. En M. Alvarado y B. M. Brizuela (Comps.), *Haciendo números: Las notaciones numéricas vistas desde la psicología, la didáctica y la historia* (pp. 81-108). México, DF: Paidós.

Badillo, E., Font, V. y Edo, M. (2015). Analyzing the responses of 7-8 year olds when solving partitioning problems. International *Journal of Science and Mathematics Education, 13,* 811-836.

Bosch, M. A. (2012). Apuntes teóricos sobre el pensamiento matemático y multiplicativo en los primeros niveles. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia, 1*(1), 15-37.

Bosch, M. A., Castro, E. y Segovia, I. (2007). El pensamiento multiplicativo en los primeros niveles: una investigación en curso. *PNA, 1*(4), 179-190.

Castro, E., Rico, L. y Romero, I. (1997). Sistemas de representación y aprendizaje de estructuras numéricas. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(3), 361-371.

Castro-Rodríguez, E., y Castro, E. (2013). La relación parte-todo. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 85-92). Granada, España: Comares.

Carruthers, E. y Worthington, M. (2008). *Children's mathematics: Making marks, making meaning* (2nd ed.). London: Sage.

De Castro, C., Flecha, G. y Ramírez, M. (2015). Matemáticas con dos años: Buscando teorías para interpretar la actividad infantil y las prácticas docentes. *Tendencias Pedagógicas, 26,* 89-108.

De Castro, C., Molina, E., Gutiérrez, M. L., Martínez, S. y Escorial, B. (2012). Resolución de problemas para el desarrollo de la competencia matemática en Educación Infantil. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 80,* 53-70.

De Castro, C. y Hernández, E. (2014). Problemas verbales de descomposición multiplicativa de cantidades en educación infantil. *PNA, 8*(3), 99-114.

— (2015). *¡A contar! Matemáticas para pensar.* Madrid: Santillana.

De Castro, C., Pastor, C., Pina, L. C., Rojas, M. I. y Escorial, B. (2009). Iniciación al estudio de las matemáticas de las cantidades en la Educación Infantil. *Unión: Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 18,* 105-128.

El Bouazzaoui, H. (1982). *Etude de situations scolaires des premiers enseignements du nombre et de la numération : Relations entre divers caractères de ces situations et le sens, la compréhension de l'apprentissage de ces notions.* Bordeaux: Université de Bordeaux.

Hughes, M. (1987). *Los niños y los números: Las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas.* Barcelona: Planeta.

Llach, S. y Alsina, A. (2012). ¿Cómo enseñar la notación lingüística y matemática? Un triple enfoque: epistémico, interdisciplinar y sociocultural. *Revista Española de Pedagogía, 70,* 252, 321-336.

Martí, E., Scheuer, N. y De la Cruz, M. (2013). Symbolic use of quantitative representations in young children. En B. M. Brizuela y B. E. Gravel (Eds.), *Show me what you know: Exploring student representations across stem disciplines* (pp. 7-21). New York: Teachers College Press.

Puig, L., y Cerdán, F. (1995). *Problemas aritméticos escolares.* Madrid: Síntesis.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA, 4*(1), 1-14.

Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria: el caso de los números naturales. *Suma: Revista sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, 58,* 7-23.

Resnick, L. B. (1992). From protoquantities to operators: Building mathematical competence on a foundation of everyday knowledge. En G. Leinhardt, R. Putnam y R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 373-429). Hisdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Schulman, L. y Eston, R. (1999). *Growing mathematical ideas in kindergarten.* Sausalito, CA: Math Solutions Publications.

CREENCIAS QUE MUESTRAN PROFESORES ESPAÑOLES, ARGENTINOS Y CHILENOS SOBRE LAS MATEMÁTICAS, SU ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE

Beliefs that Spanish, Argentinian and Chilean Teachers Show about Mathematics, its Teaching and Learning

Paola Donoso, Nuria Rico y Encarnación Castro
Universidad de Granada, España

Resumen

Se presenta en este trabajo una comparación de los resultados obtenidos sobre creencias hacia las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, por grupos de docentes de España, Argentina y Chile, con el objetivo de constatar semejanzas y diferencias en dichas creencias. La recogida de los datos se efectuó a través de un cuestionario de valoración tipo Likert. Además de ejercer la docencia en diferentes países, el número de docentes perteneciente a cada país es diferente, y desarrollan su trabajo en niveles educativos distintos. Entre los hallazgos encontramos que los docentes muestran creencias compartidas, independientemente del nivel educativo y del país donde desarrollan su labor profesional.

Palabras clave: concepciones, creencias, educación matemática, profesores.

Abstract

In this work we present a comparison between the obtained results about the beliefs of teachers, about mathematics, its teaching and learning for teachers from Chile, Argentina and Spain. The objective is to verify the similarity and difference about these beliefs. The data collection was carried out through a evaluation survey with a Likert scale. For each country, teachers practice in different educational levels and the sample size is different. Between results, we find that teachers show some same beliefs, independently the educational level or the country where they practice.

Keywords: *conceptions, beliefs, mathematical education, teachers.*

Donoso, P., Rico, N. y Castro, E. (2016). Creencias que muestran profesores españoles, argentinos y chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 237-251). Granada: Comares.

Introducción

Un vasto cuerpo de investigación se ha realizado en las últimas décadas sobre el pensamiento del profesor. Una parte importante de esta investigación se ha basado en el estudio de las creencias de los profesores de matemáticas sobre dicha materia y su proceso de enseñanza y aprendizaje (Blanco, 1997; Dodera, Burroni, Lázaro y Piacentini, 2008; Ernest, 1989; Flores, 1998; Flores, 2008; Gil, 1999; Gil y Rico, 2003; Handal y Herrington, 2003; Llinares, Sánchez, García y Escudero, 1995; Moreno y Azcárate, 2003; Ponte, 1999; Thompson, 1992).

En esta investigación no existe unanimidad, entre los investigadores, sobre la relación que guardan las creencias y las concepciones, presentándose dos puntos de vista diferentes. Un punto de vista mantiene que no existen diferencias substanciales entre concepciones y creencias, por lo que pueden ser tomados indistintamente (ej. Thompson, 1992). Otro punto de vista sostiene que la distinción es posible y útil (ej. Ponte, 1999). Para algunos autores las creencias son consideradas verdades personales indiscutibles, generadas por la experiencia o la fantasía, con un fuerte componente evaluativo y afectivo y las concepciones son marcos implícitos de organizadores de conceptos, de naturaleza esencialmente cognitiva, que condicionan la forma de abordar las tareas (Pajares, 1992). Las concepciones estarían asociadas a las creencias, y constituirían un sistema organizado, que permitiría comprenderlas en términos de su formación, consistencia y organización (Moreano, Asmad, Cruz y Cuglievan, 2008). Las creencias ponen de manifiesto verdades consideradas en algún ámbito, y las concepciones constituyen una noción más amplia que abarca significados, conceptos, proposiciones, reglas e imágenes mentales.

A su vez, por lo general, no se hace distinción entre conocimientos y creencias por lo que cuando los profesores responden a cuestiones sobre su actuación docente (Zheng, 2009) no se puede distinguir si responden sobre sus conocimiento o sobre sus creencias.

En este trabajo utilizamos los términos creencias y concepciones, indistintamente, y los consideramos como constructos que forman parte del conocimiento (Pajares, 1992), que tienen su origen en las experiencias de vida de cada persona, en la observación directa de la realidad, en la información recibida o ser inferidas por otras creencias. Son estructuras mentales dinámicas que pueden cambiar influidas por las experiencias (Thompson, 1992), en cuyo desarrollo desempeñan un papel fundamental los factores culturales (McLeod, 1992).

La consideración de que las creencias y concepciones condicionan las prácticas de enseñanza de las matemáticas está presente en los diferentes estudios analizados. La justificación para realizar estos estudios se basan en que los hallazgos de esta exploración constituyen un primer paso para generar prácticas más adecuadas a planteamientos pedagógicos ya trasnochados (Blanco, 1997). Se señala que numerosas reformas curriculares de matemáticas se han intentado, en muchos países y durante varias décadas, y han sido en gran medida infructuosas (Yates, 2006). Ha sido en matemáticas donde se ha dado el mayor número de intentos fugaces de innovación (Handal y Herrington, 2003), achacándose este hecho a la falta de interés del profesorado, influenciado por sus creencias. En numerosos trabajos se plantean interrogantes a los que dar respuesta en nuevas investigaciones, entre esos interrogantes están: ¿Hay creencias que juegan un papel más fuerte que otras?, es decir, ¿algunas de ellas influyen más en la práctica docente? ¿Es posible poseer creencias contradictorias? ¿Todos los profesores de matemáticas presentan las mismas creencias? (Ponte, 1999). Este último interrogante ha constituido el impulso para realizar el estudio que reportamos.

Estudio

En este trabajo se realiza una comparación entre las concepciones y creencias mostradas por profesores españoles, argentinos y chilenos sobre las matemáticas, su aprendizaje y su enseñanza. En los tres casos se utilizó el mismo instrumento para la recogida de datos. No obstante existen algunas diferencias entre estos tres estudios: el nivel educativo en el que desarrollaban la docencia los profesores que formaron parte del estudio, el número de sujetos que en cada caso compone la muestra y la manera de elegir dicha muestra.

Objetivo

Nos planteamos, estudiar si existen coincidencias en las concepciones y creencias mostradas por profesores españoles, argentinos y chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, a través de las respuestas dadas a un mismo cuestionario.

Metodología

La investigación es de tipo transversal. Se lleva a cabo mediante la aplicación de un cuestionario cerrado de escala valorativa, elaborado y aplicado en España (Gil, 1999), aplicado posteriormente en Argentina (Dodera *et al.,* 2008) y en Chile (Donoso, Rico y Castro, en 2014, trabajo aceptado para su publicación).

El instrumento utilizado para la recogida de datos ha sido un cuestionario cerrado (recogido en el Anexo). El cuestionario consta de diez preguntas, cada una de ellas incorpora varias respuestas posibles a las cuales hemos denominado ítems. El docente encuestado ha de valorar cada uno de dichos ítems con una puntuación de una escala, manifestando su nivel de acuerdo o desacuerdo respecto al mismo. Las preguntas contemplan aspectos sobre epistemología de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje.

Las preguntas 1 y 4 se refieren al por qué y al cómo se aprenden las matemáticas, es decir, aspectos epistemológicos sobre la enseñanza de las matemáticas. Las preguntas 2, 3 y 7 aportan información sobre los contenidos, las actividades, y el proceso de preparación de materiales. Las preguntas 5 y 6 se centran en las dificultades de la enseñanza y la utilidad del error. Las preguntas 8, 9 y 10 valoran aspectos específicos sobre: el alumnado, satisfacción y formación del profesorado.

Sujetos

En España la muestra estuvo constituida por un grupo de 163 docentes de enseñanza secundaria en ejercicio, en la comunidad andaluza. La muestra del estudio realizado en Argentina la constituyeron dos grupos de docentes en ejercicio, 26 docentes de nivel universitario (Argentina 1) y 14 de enseñanza secundaria (Argentina 2) elegidos intencionalmente. En Chile la muestra estaba constituida por 418 docentes en ejercicio que enseñan matemáticas en los niveles de Educación General Básica, elegidos por muestreo aleatorio bietápico por conglomerados. La muestra obtenida recoge docentes pertenecientes a 84 centros de la Región Metropolitana de Chile, distribuidos en las provincias de Chacabuco, Maipo, Santiago y Talagante.

Tabla 1. *País, región y nivel educativo de los sujetos de la muestra*

País	*Ciudad o Región*	*Nivel educativo*	*N*
España	Comunidad andaluza	Educación Secundaria	163
Argentina	Buenos Aires	Universitario o superior	26
		Educación Secundaria	14
Chile	Región Metropolitana	Educación Primaria	418

En los tres estudios se ha realizado un análisis descriptivo de las valoraciones otorgadas por los docentes a los diferentes ítems, tomando la media y la desviación típica. Partiendo de estos datos estadísticos hemos realizado una comparación para indagar sobre las posibles coincidencias en las creencias que ponen de manifiesto sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje, los docentes participantes en estos estudios, atendiendo de este modo al objetivo que nos hemos propuesto.

Análisis de datos

A continuación se presenta un gráfico para cada una de las preguntas del cuestionario, y se comentan los resultados. En estos gráficos se compara las medias de las puntuaciones obtenidas en los cuatro grupos que han intervenido en los diferentes estudios. Se ha tomado como referencia los datos de Chile, ordenando los ítems de mayor a menor puntuación media.

Preguntas 1 y 4

En relación a las preguntas 1 y 4 (por qué y cómo se aprenden las matemáticas) al observar las medias de los ítems registradas en las Figuras 1 y 2 podemos inferir que los docentes de Arg.1 y España manifiestan igual manera de pensar. Lo mismo sucede con los grupos de Arg.2 y Chile. Los ítems de mayor valoración por Arg.1 y España se refieren a que las matemáticas se deben aprender por su carácter formativo y se aprenden mediante el esfuerzo y trabajo personal. A diferencia de lo que piensan los docentes de Arg.2 y Chile, que coinciden en que las matemáticas se deben aprender por razones de utilidad social y profesional, y se aprenden estimulando procesos cognitivos y fomentando ciertas actividades.

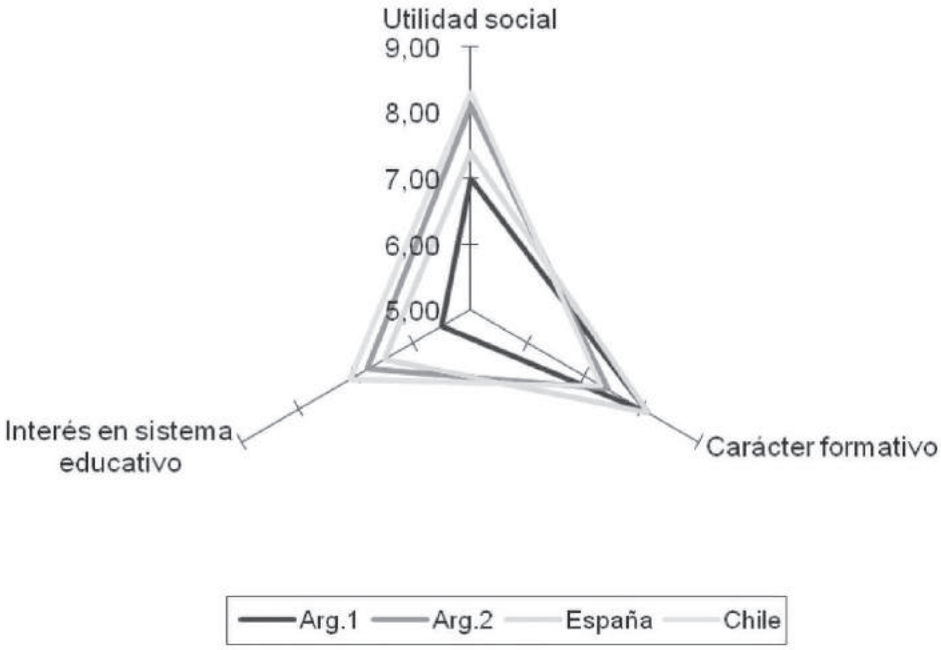


Figura 1. *Respuestas a la pregunta ¿por qué los escolares han de aprender matemáticas?*

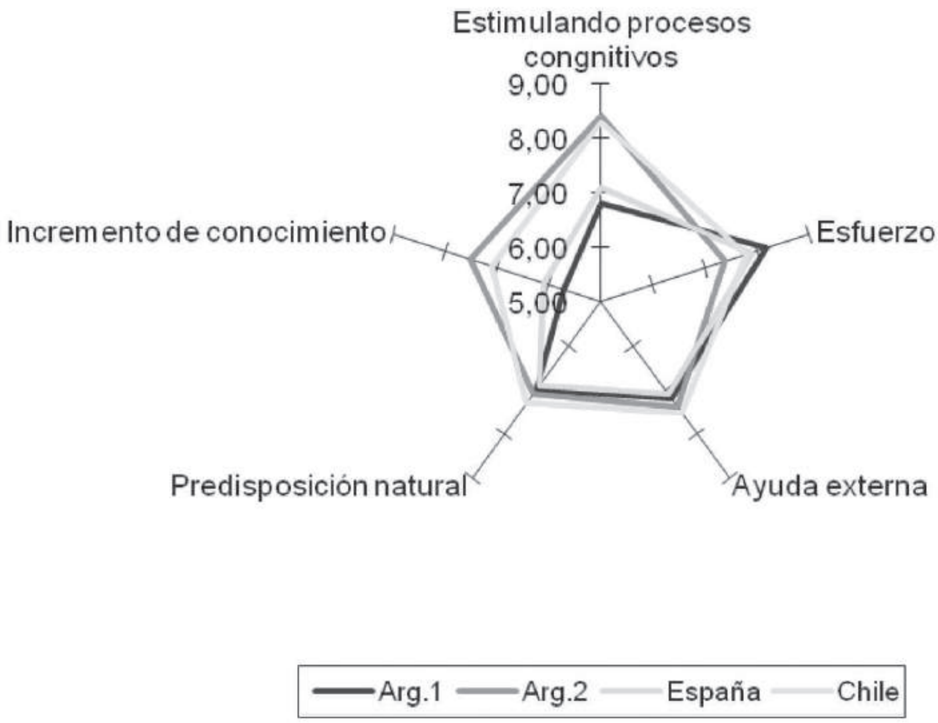


Figura 2. *Respuestas a la pregunta. Cuarta pregunta ¿cómo se aprenden las matemáticas?*

Preguntas 2, 3 y 7

Las preguntas 2, 3 y 7 aportan información sobre los contenidos, las actividades, y el proceso de preparación de materiales. Se observa en las Figuras 3, 4 y 5 que las respuestas otorgadas por los docentes de Arg.1 y España en las preguntas 3 y 7 son bastante similares, pudiéndose interpretar que ambos grupos de docentes comparten las mismas creencias respecto a las actividades y procesos que siguen para preparar materiales.

Los cuatro grupos de docentes coinciden en otorgar menor valor a los contenidos pertenecientes a determinadas disciplinas matemáticas, esta creencia predomina en la totalidad de los docentes. Existe semejanza en puntuar con una valoración alta a las actividades que destacan el trabajo intelectual de los alumnos. Aunque para los docentes de Chile, recibe mayor valoración las actividades que destacan la utilidad y conexión con situaciones reales, la puntuación otorgada al ítem 11 es alta.

Otra similitud que se observa en la Figura 5 es que los cuatro grupos otorgan mayor valor a reflexionar sobre el proceso de aprendizaje cuando preparan materiales. Sin embargo, los grupos de Arg.1 y España restan valor a elaborar documentos sobre contenidos y otros materiales, mientras que Arg.2 y Chile desvalorizan pedir información a los compañeros en el proceso de preparación de materiales.

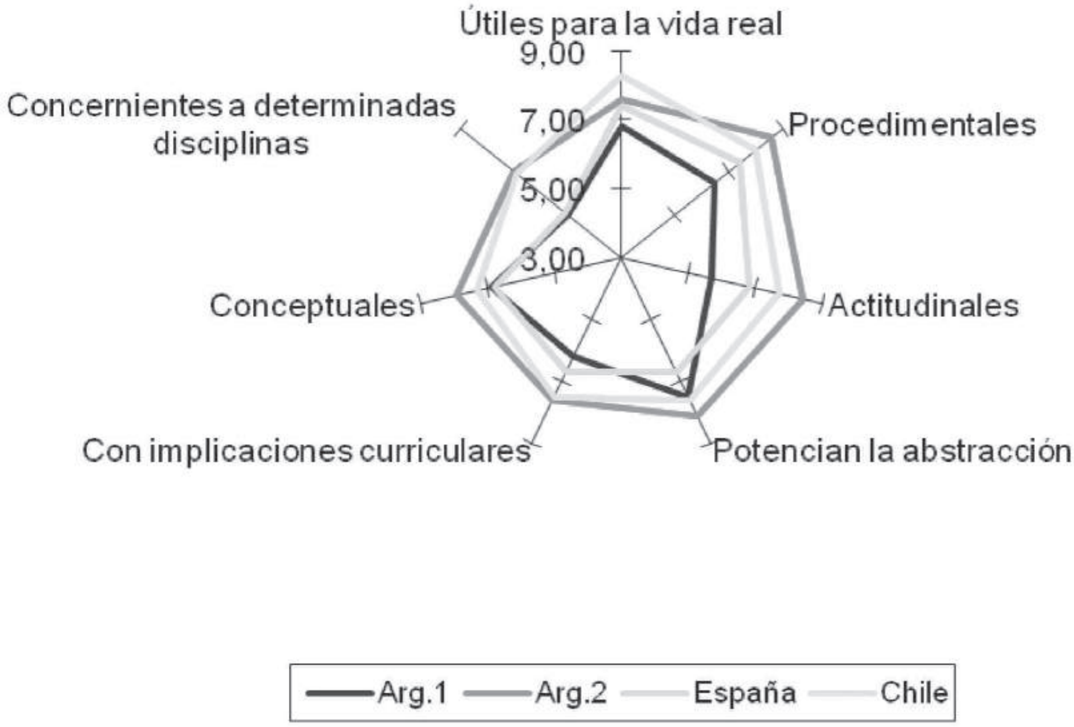


Figura 3. *Respuestas a la pregunta ¿qué contenidos son los más importantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas?*

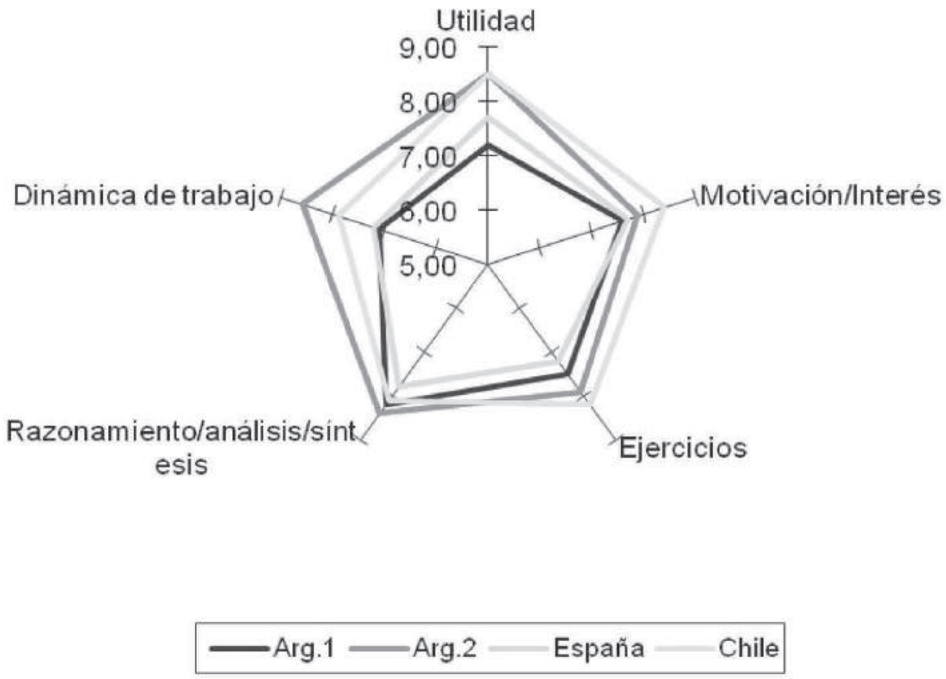


Figura 4. *Respuestas a la pregunta ¿Qué actividades son más recomendables para enseñar matemáticas?*

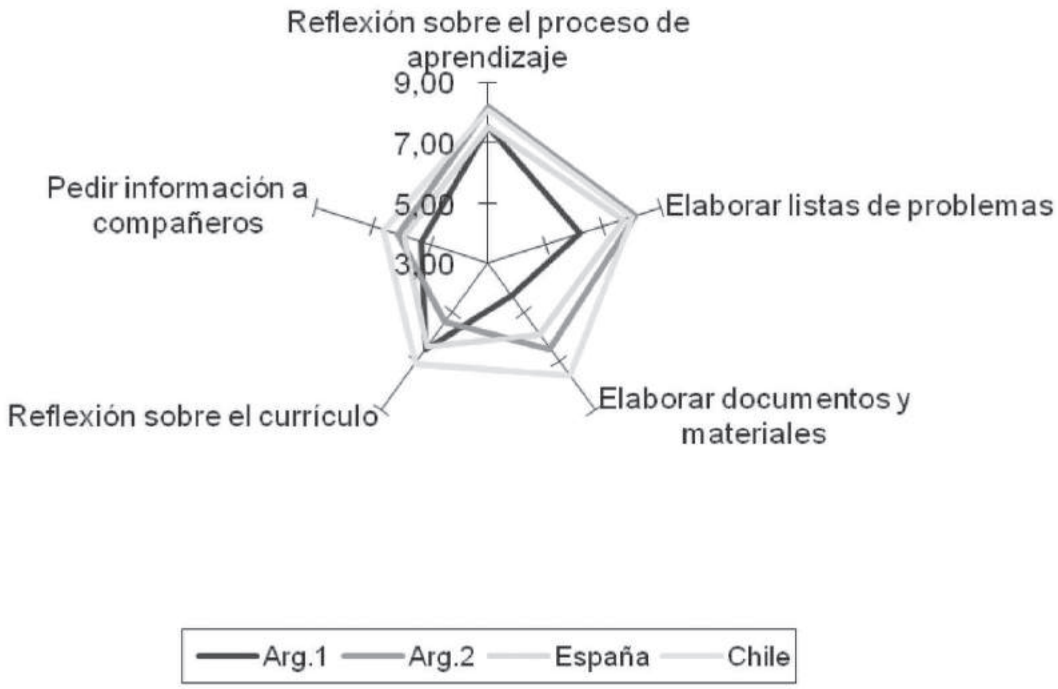


Figura 5. *Respuestas a la pregunta ¿Qué procesos sigues cuando preparas materiales para la clase de matemáticas?*

Preguntas 5 y 6

Estas preguntas se centran en las dificultades de la enseñanza y la utilidad del error. Nuevamente se observa que los grupos de Arg.1 y España comparten sus creencias con respecto al papel que juega el error en la enseñanza de las matemáticas, puesto que en la Figura 7 las líneas de ambos grupos mantienen igual forma.

Existe semejanza en los cuatro grupos de docentes en pensar que el sistema educativo es el principal elemento donde se encuentran las dificultades en la enseñanza de las matemáticas, siendo el ítem más valorado en la Figura 6. Lo mismo sucede con respecto al papel que juega el error en la enseñanza de las matemáticas, todos los grupos otorgan mayor puntuación a la creencia de que los errores sirven para diagnosticar el conocimiento y corregir las deficiencias.

Figura 6. *Quinta pregunta ¿A qué se deben las dificultades de la enseñanza de las matemáticas escolares?*

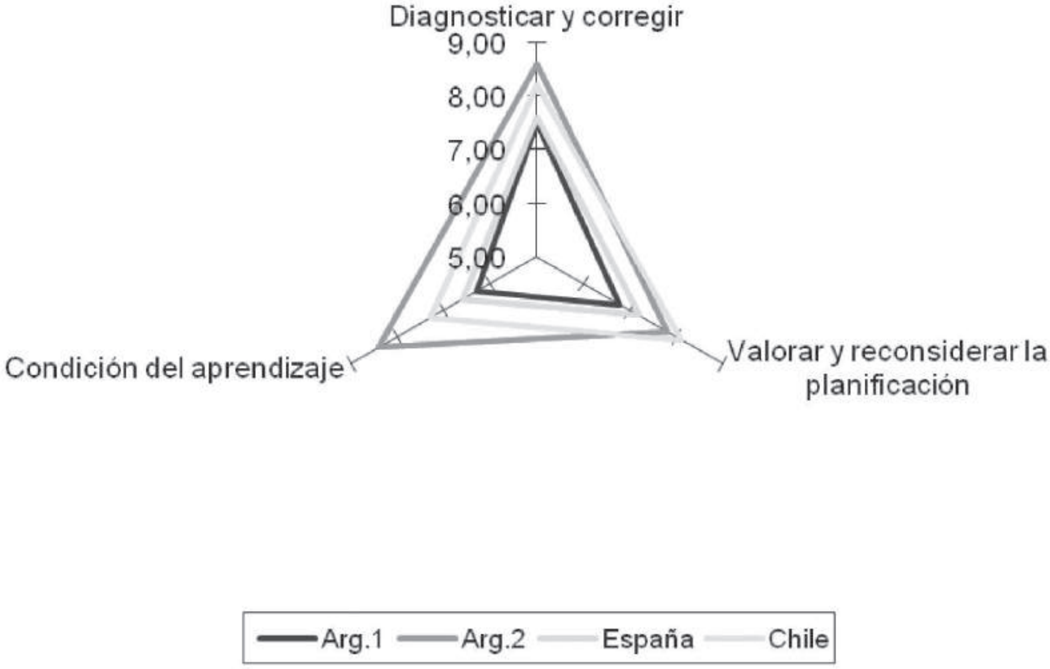


Figura 7. *Sexta pregunta ¿qué papel juega el error en la enseñanza de las matemáticas?*

Preguntas 8, 9 y 10

Las preguntas 8, 9 y 10 valoran aspectos específicos sobre: el alumnado, satisfacción y formación del profesorado.

Una vez más se registran similitudes significativas en las creencias de los grupos de Arg.1 y España, al observar las Figuras 8 y 9 las líneas de ambos grupos de docentes son casi paralelas, por tanto, se puede inferir que las creencias sobre qué es un buen alumno, y cuándo se sienten satisfechos con su trabajo son las mismas.

En la figura 8 se registra que los cuatro grupos de docentes coinciden en estar en desacuerdo en que un buen alumno es aquel que tiene buenas capacidades intelectuales. Coincidiendo en estar altamente de acuerdo en que un buen alumno es aquel que se esfuerza y trabaja. Aunque el grupo Arg.2 valora aún más al estudiante que es responsable, solidario y participativo.

A su vez, los cuatro grupos de docentes se sienten satisfechos con su trabajo cuando observan avances en el aprendizaje de sus alumnos. Esta creencia obtiene una valoración alta por todos los docentes, seguido en orden de puntuación por la creencia de sentirse satisfechos cuando aprecian interés y participación de los alumnos, por tanto, todos los docentes están de acuerdo en ambas creencias.

Existe similitud respecto a las creencias sobre en qué deberían aumentar o perfeccionar su formación entre los grupos de Chile, Arg.1 y Arg.2. Estos tres grupos otorgan una valoración similar a los cuatro ítems, siendo valorados como medio alto. Sin embargo, el grupo de España se asemeja a los otros grupos, exceptuando en el ítem 41, al cual le resta total importancia a mejorar su conocimiento de las matemáticas.

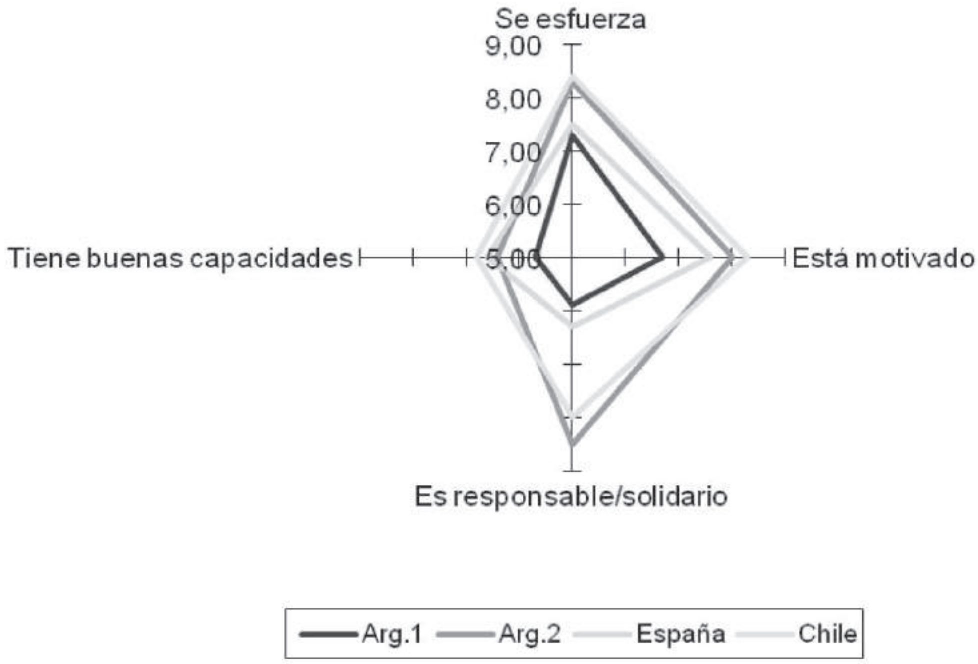


Figura 8. *Octava pregunta ¿Qué es un «buen» alumno en matemáticas?*

Figura 9. *Novena pregunta ¿Qué hechos te hacen sentir que has realizado una buena labor con tus alumnos en su aprendizaje de las matemáticas?*

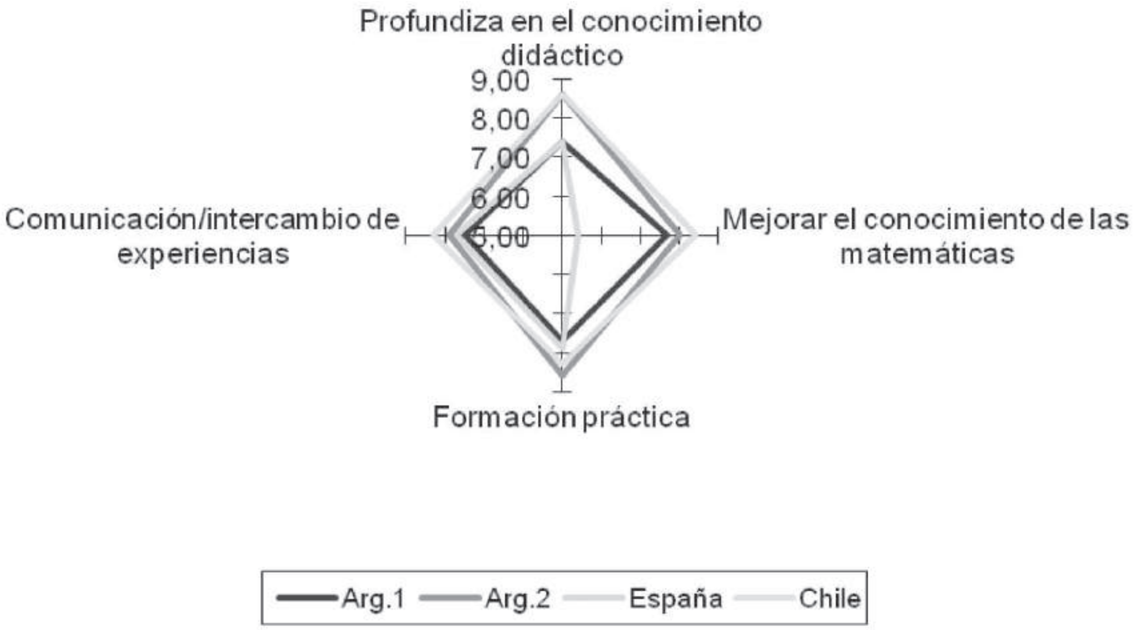


Figura 10. *Décima pregunta ¿en qué aspectos deberían aumentar o perfeccionar su formación los docentes que enseñan matemáticas?*

Discusión y conclusiones

En el análisis de los datos recogidos encontramos algunas creencias que son compartidas por la totalidad de los docentes. Sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas manifiestan no estar de acuerdo en que las matemáticas se deben aprender por su interés dentro del sistema educativo, sino que obedece a otras razones. Siendo coherentes con este pensamiento, todos ellos expresan estar en desacuerdo en que los contenidos pertenecientes a determinadas disciplinas matemáticas sean los más importantes de enseñar. Además, sus creencias coinciden en que el sistema educativo es el principal elemento donde se encuentran las dificultades en la enseñanza de las matemáticas. También muestran acuerdo en considerar que un buen alumno no es aquel que tiene buenas capacidades intelectuales, sino aquel que se esfuerza y trabaja. Por último, existe consenso en todos los docentes en que se sienten satisfechos con su trabajo cuando observan avances en el aprendizaje de sus alumnos y cuando aprecian interés y participación de sus estudiantes.

Los cuatro grupos de docentes coinciden en valorar altamente la idea de que las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas se deben al sistema educativo y en menor medida también a los profesores. Coinciden en valorar medianamente la idea de que en el aprendizaje de las matemáticas es necesario que el estudiante reciba asistencia externa y que una buena disposición hacia la materia ayuda al aprendizaje de la misma.

Han aparecido coincidencias entre las siguientes parejas de grupos:

— España y Argentina 1 coinciden en considerar, con valoración alta, el interés de los estudiantes y la participación como indicio de un trabajo bien hecho por parte del profesor. Muestran una puntuación media al considerar que las matemáticas deben de ser estudiadas por su interés para el sistema educativo y una valoración muy baja a la idea de que las matemáticas se aprenden por incremento de capacidades.

— España y Argentina 2 coinciden en considerar el carácter formativo de las matemáticas como razón para su aprendizaje escolar y asociar las buenas capacidades intelectuales para caracterizar el buen alumnado de matemáticas.

— Argentina 2 y Chile coinciden en muchos de los ítems que hemos considerado: Las razones de utilidad social y profesional son para estos dos grupos, con valoración alta, las que se consideran para la enseñanza de las matemáticas escolares y es necesario el estímulo de los procesos cognitivos para aprender matemáticas, sentirse satisfechos cuando se aprecia participación en el aula y cuando se muestran avances en el aprendizaje del alumnado. Con una valoración media, los docentes de estos grupos coinciden en considerar que las matemáticas se aprenden mediante aumento de conocimientos y capacidades, coinciden así mismo en todos los ítems de la pregunta ocho que se refiere a qué es un buen estudiante de matemáticas y se recoge las capacidades intelectuales, el esfuerzo y trabajo personal, el que está motivado y el que es solidario, también coinciden en una valoración media el que los estudiantes obtengan buenos resultados en las evaluaciones como criterio para sentirse satisfecho con su trabajo.

No hay coincidencias, por parejas, entre los grupos Argentina1 y Argentina 2 ni España y Chile, ni Chile y Argentina 1.

Los datos presentados en este estudio muestran que los docentes manifiestan algunas creencias similares con respecto a aspectos específicos de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, sin importar su nacionalidad y el contexto en que se encuentran. En los tres países la encuesta se aplicó en un periodo de reforma en leyes educativas a nivel nacional. Los docentes de Argentina 1 y España coinciden en su manera de pensar con respecto a cómo se aprenden las matemáticas, qué consideran que es un buen alumno y cuándo se sienten satisfechos con su labor. Aunque sus pensamientos son bastante similares, ambos grupos de docentes ejercen en diferente nivel, los de Argentina 1 enseñan en la universidad y los de España en secundaria. Podríamos suponer que los docentes que ejercen en el mismo nivel deberían manifestar creencias similares, sin embargo en este caso no sucede, puesto que España y Argentina 2 ejercen en secundaria y sus creencias no son tan similares como lo son Argentina 1 y España. Por tanto concluimos que las creencias no llegan a ser totalmente unánimes y no parece que influya ni el país en que desarrollan su docencia ni el nivel educativo en el que lo hacen.

Referencias

Blanco, L. (1997). Concepciones y creencias sobre la resolución de problemas de estudiantes para profesores y nuevas propuestas curriculares. *Quadrante. Revista Teórica e de Investigaçao, 6*(2), 45–65.

Dodera, M., Burroni, E., Lázaro, M., y Piacentini, B. (2008). Concepciones y creencias de profesores sobre enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Premisa, 10*(39), 5–16.

Donoso, P., Rico, N., y Castro, E. (en prensa). Creencias de profesores chilenos sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. *Mathematics Teaching: the state of the art*. 249–254

Flores, F. (2008). *Las competencias que los profesores de Educación Básica movilizan en su desempeño profesional docente.* Tesis Doctoral, Universidad Complutense de Madrid, Departamento de Psicología Evolutiva y de la Educación, Madrid.

— (1998). *Creencias y concepciones de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza.* Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Didáctica de la Matemática, Granada.

Gil, F. (1999). *Marco conceptual y creencias de los profesores sobre evaluación en matemáticas* Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Gil, F., y Rico, L. *(2003). Concepciones y creencias del profesorado de secundaria sobre enseñanza y* aprendizaje de las matemáticas. *Enseñanza de las ciencias, 21*(1), 27–47.

Handal, B., y Herrington, A. (2003). Mathematics teachers` beliefs and curriculum reform. *Mathematics Educational Research Journal, 15*(1), 59–69.

Llinares, S., Sánchez, V., García, M., y Escudero, I. (1995). Creencias y aprender a enseñar matemáticas. Una relación entre la reforma y la cultura matemática escolar. En L. M. Villar Angulo, y J. Cabero (Eds.), *Aspectos críticos de una reforma educativa* (pp. 149–166). Universidad de Sevilla: Servicio de Publicaciones.

McLeod, D. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. En D. Grows (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575–596). New York: Macmillan Publishing Company.

Moreano, G., Asmad, U., Cruz, G., y Cuglievan, G. (2008). Concepciones sobre la enseñanza de matemática en docentes de primaria de escuelas estatales. *Revista de Psicología, XXVI*(2), 299–334.

Moreno, M., y Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias, 21*(2), 265–280.

Pajares, M. (1992). Teachers beliefs and educational research: cleaning up messy construct. *Review of Educational Research, 62*(39), 307–332.

Ponte, J. (1999). Teachers` beliefs and conceptions as a fundamental topic in teacher education. En K. Krainer, y F. Goffree (Eds.), *On research in teacher education. From study of teaching practices to issues in teacher education* (pp. 43–50). Osnabrück: Forschungsintitut für Mathematikdidaktik.

Thompson, A. (1992). Teacher`s beliefs and conceptions: a synthesis of the Research. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* (pp. 127–146). Nueva York: Macmillan.

Yates, S. M. (2006). Primary teachers' mathematics beliefs, teaching practices and curriculum reform experiences. *Paper presented al the AARE Annual Conference.* Recuperado de http://www.aare.edu.au/ data/publications/2006/yat06450.pdf

Zheng, H. (2009). A review of research on EFL pre-Service teachers´ beliefs and practices. *Journal of Cambridge Studies, 4*(1), 73–81.

Anexo

Cuestionario cerrado de escala de valoración

Pregunta 1. ¿Por qué los escolares han de aprender matemáticas?

Los estudiantes han de aprender matemáticas por:

1. El carácter formativo de la materia.
2. Razones de utilidad social y profesional.
3. Su interés dentro del propio sistema educativo.

2. ¿Qué contenidos son los más importantes en la enseñanza/aprendizaje de las matemáticas escolares?

   Los contenidos matemáticos más importantes en las matemáticas escolares son:

   1. Aquellos que potencian la abstracción, la simbolización o algún otro rasgo del conocimiento matemático.
   2. Los que son útiles para la vida real.
   3. Los que tienen implicaciones curriculares posteriores.
   4. Los pertenecientes a determinadas disciplinas matemáticas.
   5. Los conceptuales.
   6. Los procedimentales.
   7. Los actitudinales.

3. ¿Qué actividades son más recomendables para enseñar matemáticas?

   Las actividades más adecuadas para enseñar matemáticas son las que destacan:

   1. El trabajo intelectual de los alumnos y alumnas: razonamiento, análisis, síntesis.
   2. La dinámica de trabajo de los alumnos.
   3. La utilidad y conexión con situaciones reales.
   4. La realización de ejercicios y prácticas para adquirir destrezas.
   5. La motivación y el interés.

4. ¿Cómo se aprenden las matemáticas?

   Las matemáticas se aprenden:

   1. Mediante el esfuerzo y trabajo personal.
   2. Mediante ayudas externas, correcciones y explicaciones.
   3. Por predisposición natural del alumno o alumna o por motivación.
   4. Mediante incremento de algún tipo de conocimiento o capacidad.
   5. Estimulando procesos cognitivos y fomentando ciertas actividades.

5. ¿A qué se deben las dificultades de la enseñanza de las matemáticas escolares?

   Las principales dificultades en la enseñanza de las matemáticas escolares se encuentran en:

   1. Los alumnos y alumnas.
   2. La materia.
   3. Los profesores.
   4. El sistema educativo.

6. ¿Qué papel juega el error en la enseñanza de las matemáticas?
   Los errores sirven:
   1. Para diagnosticar el conocimiento y corregir las deficiencias.
   2. Como factor o condición para el aprendizaje.
   3. Para valorar y reconsiderar la planificación o programación.

7. ¿Qué proceso sigues cuando preparas materiales para la clase de matemáticas?
   Cuando preparo materiales para la clase de matemáticas:
   1. Elaboro documentos sobre contenidos y otros materiales.
   2. Reflexiono sobre el currículo.
   3. Reflexiono sobre el proceso de aprendizaje.
   4. Pido información a los compañeros o compañeras.
   5. Elaboro listas de problemas, ejercicios y actividades de motivación.

8. ¿Qué es un «buen» alumno o «buena» alumna en matemáticas?
   Un buen alumno o buena alumna en matemáticas es aquel o aquella que:
   1. Tiene buenas capacidades intelectuales.
   2. Se esfuerza y trabaja.
   3. Está motivado o motivada por las matemáticas.
   4. Es responsable, solidario/a y participativo/a.

9. ¿Qué hechos te hacen sentir que has realizado una buena labor con tus alumnos y alumnas en su aprendizaje de las matemáticas?
   Me siento satisfecha, o satisfecho, de mi trabajo cuando
   1. Observo un buen ambiente en el aula.
   2. Aprecio interés y participación de los alumnos y alumnas en el aula.
   3. Hay avances en el aprendizaje de los alumnos y alumnas.
   4. Los alumnos y alumnas obtienen buenos resultados en las evaluaciones.

10. Los profesores y profesoras que han de enseñar matemáticas ¿en qué aspectos deberían aumentar o perfeccionar su formación?
    Los profesores y profesoras que enseñan matemáticas, deberían aumentar o perfeccionar su formación en:
    1. Mejorar su conocimiento de las matemáticas.
    2. Profundizar en el conocimiento didáctico.
    3. La formación práctica y el conocimiento de recursos.
    4. La comunicación e intercambio de experiencias.

PARADOJA DE LA DICOTOMÍA
UNA REVISIÓN DESDE LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA
Dichotomy Paradox. A Review from Mathematics Education

José Antonio Fernández-Plaza, Juan Francisco Ruiz-Hidalgo y José Luis Lupiáñez
Universidad de Granada, España

Resumen

Las paradojas de Zenón han sido objeto de reflexión a lo largo de la historia por multitud de pensadores y, en particular, por muchos matemáticos. En este trabajo indagamos sobre la paradoja de la dicotomía, su historia, el papel que juega en la educación matemática actual y qué papel pueden jugar los modelos numéricos escolares en su interpretación.

Palabras clave: paradojas, dicotomía, Zenón, modelos numéricos

Abstract

Zeno's paradoxes have been the subject of reflection throughout history by many thinkers and, in particular, for many mathematicians. In this paper we reflect on the paradox of the dichotomy, its history, its role in the current mathematics education and what role that numerical models can play in interpreting it.

Keywords: *paradoxes, dichotomy, Zeno, numerical models*

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Lupiáñez, J. L. (2016). Paradoja de la Dicotomía. Una revisión desde la educación matemática. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 253-262). Granada: Comares.

Introducción

> «No hay problemas en los fundamentos de las matemáticas que sean tan viejos y que despierten un interés tan perenne, alcanzando las más recientes conjeturas de la filosofía de las matemáticas, como son los argumentos de Zenón sobre el movimiento» (Cajori, 1915, pte. 1, p. 1).

Con estas palabras, Florian Cajori comienza una serie de 10 artículos dedicados a la historia de los argumentos sobre el movimiento de Zenón de Elea publicados en 1915 en la revista *The American Mathematical Monthly*. En ellos hace un recorrido histórico de más de 2000 años de reacciones, interpretaciones y explicaciones a las conocidas paradojas de Zenón de Elea sobre el movimiento.

En este trabajo ceñimos nuestra atención a la conocida como paradoja de la dicotomía y a la repercusión que ha tenido en los últimos años en la Educación Matemática. Para ello, en primer lugar, presentamos una introducción a la paradoja junto con unas breves notas históricas. Posteriormente, realizamos una revisión bibliográfica detallada de los trabajos recientes publicados sobre dicha paradoja que están relacionados con la educación matemática. Para terminar, hacemos una lectura de la paradoja mediante el uso de modelos matemáticos escolares.

Paradoja de la Dicotomía

No puedes recorrer un número infinito de puntos en un tiempo finito. Debes recorrer primeramente la mitad del todo, después la mitad de lo que te resta, y así sucesivamente. Por tanto, dado que hay un número infinito de distancias por recorrer, esto no se puede hacer en un tiempo finito.

A lo largo del desarrollo histórico de la matemática se han señalado épocas y personajes que con más o menos reservas, superaron los obstáculos sugeridos por esta paradoja. Una primera fase es la que se denomina negación de los infinitesimales. Demócrito es un referente de los matemáticos griegos que negaron los infinitesimales y adoptaron una perspectiva atomista de la materia y las magnitudes.

Un segundo momento, está protagonizado por Arquímedes. El método de exhausción diseñado para el cálculo de áreas, se basa en la conocida propiedad arquimediana de las magnitudes. Supone una ruptura preliminar con la paradoja de la Dicotomía.

San Agustín y Santo Tomás admiten la existencia del infinito actual al aceptar la existencia de puntos. Sin embargo, los puntos no constituyen la recta, dado que ésta sólo se compone de segmentos por división, pero sostienen que la recta puede ser un punto en movimiento. Bacon critica la existencia de indivisibles diferentes a puntos, porque todos ellos tendrían un tamaño uniforme que convertiría la diagonal de un cuadrado conmensurable respecto del lado.

En los siglos XV y XVI, Galileo percibe la existencia de infinitos del mismo tamaño que contradicen la afirmación euclídea «El todo es mayor que la parte», sin embargo, no profundiza en la existencia de infinitos de diferente tamaño. Bayle, en el siglo XVII, justifica que el tiempo no puede dividirse de manera infinita, pero sí admite la infinita divisibilidad del espacio.

Newton, en el siglo XVIII, es el máximo exponente en el desarrollo del cálculo infinitesimal, no obstante, su definición de límite de razones de infinitesimales, o como él las llamaba, «cantidades evanescentes», fue criticada por Berkeley por falta de precisión en lo que entraña el hecho de que el límite es a lo que se aproxima la razón de las cantidades «en proceso» de anularse, pero no en su justo momento. Newton sostiene además la alcanzabilidad del límite, pero no la posibilidad de rebasarse.

Con posterioridad, las ideas acerca de las cantidades y los indivisibles evolucionaron hasta la formalización de los números en el siglo XIX, en el que se desarrolla una teoría axiomática de los números naturales, enteros, racionales y reales. Por otro lado, la teoría de Cantor sobre los números transfinitos junto con la teoría de la medida de Lebesgue establecen la ruptura definitiva entre magnitud y cardinal.

Lectura dual y argumentos de Aristóteles

La paradoja tiene una lectura dual: *No puedes recorrer una cantidad de longitud dada porque primeramente has de recorrer la mitad, pero antes de este paso has de recorrer la mitad de ese recorrido, y así sucesivamente. Por tanto, dado que hay un número infinito de distancias a recorrer previas, ¿cuándo se inicia el movimiento?*

Se observa que las dos paradojas no pueden ser ciertas al mismo tiempo. Existen dos argumentos sugeridos por Aristóteles que resuelven en cierta medida la primera versión de la paradoja, si bien, incurren en la negación del infinito actual. El primero de ellos sostiene que el espacio y tiempo son divisibles infinitamente pero niega que estén compuestos por puntos (indivisibles), sino que únicamente están compuestos por segmentos. El segundo sostiene que a pesar de que el espacio y tiempo son divisibles infinitamente, si el tiempo fuera infinito, tendría una parte finita T. En dicha parte finita se ha de recorrer una parte de espacio finita S. La propiedad arquimediana permite afirmar que «manteniendo la velocidad constante» existe una reiteración finita de espacios de valor S, que se corresponden con la misma reiteración de tiempos T, tal que se supera cualquier espacio de longitud finita prefijada, luego ha de haber una parte de dicho tiempo en la que se ha recorrido exactamente el espacio prefijado. Sin embargo, este argumento contradice la infinita divisibilidad del tiempo, dado que el tiempo invertido en recorrer la diagonal de un cuadrado de lado S aunque finito es inconmensurable respecto del tiempo T, y posiblemente Aristóteles no admitiría partes inconmensurables con la unidad. Por otro lado, la versión dual de la paradoja no podría ser superada por Aristóteles debido a que no podría ser capaz de justificar la causa del movimiento, que es en definitiva lo que la paradoja dual de Zenón niega.

Revisión de la literatura existente

Con el objetivo de revisar la bibliografía, se realiza un análisis detenido en las bases de datos más conocidas y que proporcionen información de revistas especializadas en Educación matemática. Este tipo de estudios se pueden considerar descriptivos (Colás y Buendía, 1998). El análisis está basado en la búsqueda de términos clave en diferentes campos de búsqueda de las bases de datos para, posteriormente, realizar un análisis de contenido de los textos seleccionados.

Diseño de la búsqueda

La perspectiva conceptual de la búsqueda pretende ofrecer una visión general de las investigaciones sobre la paradoja de la dicotomía en revistas especializadas de educación matemática. La planificación recoge los siguientes aspectos que comienzan con la búsqueda de referencias en bases de datos: Se analizan exhaustivamente bases de datos sobre Ciencias Sociales, Educación y Educación Matemática, tanto nacionales como internacionales.

Seguidamente se determinan la población y muestra. Por acuerdo de los autores se seleccionan las bases de datos internacionales: Scopus, SSCI, ERIC (las tres de carácter general para Ciencias Sociales) y MathEduc (del área específica de Educación Matemática). Como bases de datos nacionales se consideran Dialnet e ISOC, ambas de carácter general.

Utilizando las herramientas de búsqueda de las bases de datos, se introdujeron los términos: Zenón, Zenón de Elea, Paradojas, Dicotomía y su equivalentes en inglés Zeno, Zeno of Elea, Paradoxes y Dichotomy. La búsqueda se realizó en diferentes campos de la herramienta de búsqueda: autor, título, resumen y palabras clave.

Los resultados se recogieron en una hoja de cálculo que contenía información sobre la base de datos en la que se había encontrado, el autor o autores, título, revista, disponibilidad (en línea, en papel o sin disponibilidad) y si eran trabajos específicos de educación matemática. Finalmente, la organización de resultados dio lugar a la selección de algunos de los trabajos.

Resultados de la búsqueda

La Tabla 1 resume el número de trabajos que se obtienen con los parámetros de búsqueda descritos en el epígrafe anterior.

Tabla 1. *Recuentos en la búsqueda de documentos (las palabras se usaron en español e inglés)*

Base de datos	*Zenón*	*Zenón+Paradoja* *Zenón + Dicotomía*	*Zenón+Paradoja+Dicotomía*
ERIC	25	**4**	0
Scopus	985	511	7
SSCI	1679	384	7
MathEduc	38	**18**	5
Dialnet	276	**12 inglés + 15 español**	0
ISOC	87	**2**	0

Algunos de los trabajos recogidos en la Tabla 1 se repiten en varias bases de datos. El total de trabajos que superan el primer filtro de repetición es de 51 (destacados en negrita en la Tabla 1). Estos trabajos se filtran por su contenido, seleccionando aquellos que tienen que ver con aspectos didácticos o de educación matemática. El resultado de este segundo filtro es 6 trabajos: Nuñez (1994), Peled y Hershkovitz (1999), De la Torre y Pérez (2000), Martínez (2001), Hong (2013) y Sprows (2015).

Descripción de los trabajos

De la Torre y Pérez (2000) diseñan una propuesta metodológica para el estudio de las magnitudes espacio y tiempo cuyo rendimiento se espera describir en términos de niveles de Van Hiele. El tránsito entre un nivel y otro se caracteriza mediante la superación de ciertas paradojas de Zenón o de otras paradojas relacionadas con las estructuras de las magnitudes espacio y tiempo.

Hong (2013) dedica una reflexión al tratamiento matemático y filosófico de la paradoja de Aquiles y la Tortuga. Critica en primer lugar que la aplicación inmediata de las propiedades del límite de series no resuelve la estructura que subyace en el razonamiento de Zenón, dado que la resolución de dicho límite no justifica la alcanzabilidad del mismo. Una segunda crítica es la suposición a priori de que la velocidad del atleta es doble de la de la tortuga lo cual permite resolver la paradoja de forma algebraica, en consecuencia, se obtiene el instante y distancia en la que Aquiles alcanza a la tortuga.

Martínez (2001) implementa la paradoja de Aquiles y la tortuga dentro de un contexto de resolución de problemas con estudiantes de secundaria y universidad. Identifica en los estudiantes la aplicación de estrategias algebraicas y analíticas para abordar la resolución de la paradoja.

Nuñez (1994) realiza una investigación acerca de la paradoja de la dicotomía con estudiantes de diferentes rangos de edad (8, 10, 12, 14 años). El alumnado de 8 años manifiesta una concepción finitista motivada por las limitaciones del espacio y la percepción. El alumnado de 10 años es consciente de la infinitud del proceso ideal, pero mantienen una postura finitista en la práctica, afirmando que el recorrido ha de completarse. En relación al alumnado de 12 y 14 años, no encuentra diferencias significativas.

Algunos estudiantes perciben que el resultado del proceso dependerá de la escala del problema (distancias grandes o cortas), manteniendo que en distancias grandes no se alcanzará el final y en distancias cortas sí se alcanzará. Otros estudiantes sostienen que jamás se completará el recorrido dado que siempre quedarán distancias por recorrer.

Peled y Hershkovitz (1999) investigan los modos en que los estudiantes relacionan una expresión decimal infinita con su representación en la recta real, en particular, observa que algunos estudiantes consideran que 0,333333… o $\sqrt{5}$ no pueden ser representados en la recta real, lo cual relaciona con la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga.

Sprows (2015) realiza un tratamiento de las paradojas de Zenón basadas en el sistema de numeración binario, pero encuentra cierta resistencia de los escolares a sustituir el sistema decimal por el binario en sus razonamientos.

Modelos numéricos en la matemática escolar

Desde la educación matemática planteamos la lectura de la paradoja de la dicotomía mediante el uso de modelos numéricos. Estos modelos corresponden con los conjuntos numéricos, pero a su vez están relacionados con la percepción de la realidad y la precisión de los instrumentos de medida. Así, agrupamos los modelos en tres clases:

1. *Modelo discreto*. Da respuesta al fenómeno de las mediciones de magnitudes en la práctica debido a que todo instrumento de medición tiene una precisión limitada, por tanto, genera medidas que tienen una cantidad finita n de cifras decimales. Se denota por D_n para cada n natural al conjunto de los decimales que tienen como máximo n cifras decimales. El conjunto de los números naturales equivale a D_0. Una regla graduada escolar tiene estructura D_3 (tomando como unidad de medida el metro), un cronómetro D_2 (tomando como unidad de medida el segundo). La *recta discreta* está formada segmentos de longitud mínima denominados *indivisibles* y la noción punto no se puede definir.

2. *Modelo denso (numerable)*. Entre los conjuntos numéricos que cumplen la propiedad de densidad, entre cualesquiera dos elementos hay otro elemento, el conjunto de los decimales que tienen una cantidad finita de cifras decimales es el menor de ellos que denotamos por D. Sin embargo, este conjunto no es cerrado para el límite de sucesiones. Una ampliación natural de D es el conjunto de los números racionales, considerando las expresiones decimales periódicas, pero aún así el conjunto de los números racionales no es cerrado para el paso al límite de sucesiones. La *recta racional* es el conjunto de segmentos conmensurables con el segmento unidad. Los segmentos únicamente se pueden descomponer en segmentos mediante división en partes iguales. Según Aristóteles este conjunto carece de elementos indivisibles dado que excluye el paso al límite. De un modo análogo, no se puede admitir la existencia de puntos en el modelo denso numerable. No obstante, en una representación gráfica no podemos percibir la diferencia entre la recta racional y la real.

3. *Modelo continuo*. Es el conjunto numérico que cumple con la condiciones de clausura para el paso al límite aparte de la característica de densidad, dotándolo de idoneidad para la modelización de los fenómenos físicos habituales. La *recta continua*

es la unión de todos los *puntos* que se obtienen como paso al límite de familias de segmentos racionales. Es la única que se puede afirmar de estar compuesta de puntos, en este caso los puntos se pueden considerar como *elementos primitivos*.

Modelizaciones del movimiento

Dotando a las magnitudes espacio y tiempo de alguna de estas tres estructuras definimos el movimiento como toda función que relaciona cada «elemento» de tiempo (instante o duración) con un «elemento» de espacio (posición o espacio recorrido), siendo el reposo la existencia de un intervalo de instantes o duraciones que le corresponde una misma posición. Cada uno de estos modelos provee al movimiento resultante de unas propiedades deducidas de manera lógica y que pueden, o no, contradecir la observación empírica del fenómeno real.

Movimiento discreto-discreto. Si modelamos espacio y tiempo de forma discreta, se puede deducir que existirá un único movimiento sin reposo a velocidad constante 1, dado que en cada indivisible de tiempo únicamente se puede recorrer un indivisible de espacio. De lo contrario, si existiera un indivisible de tiempo T en el que se recorren al menos dos indivisibles de espacio, el tiempo que se invierte en recorrer el primer indivisible de espacio es estrictamente menor que el que invierte en recorrer los dos, por lo tanto, contradice la indivisibilidad de T. La Figura 1 muestra que la relación gráfica entre espacio y tiempo se presenta por «bloques».

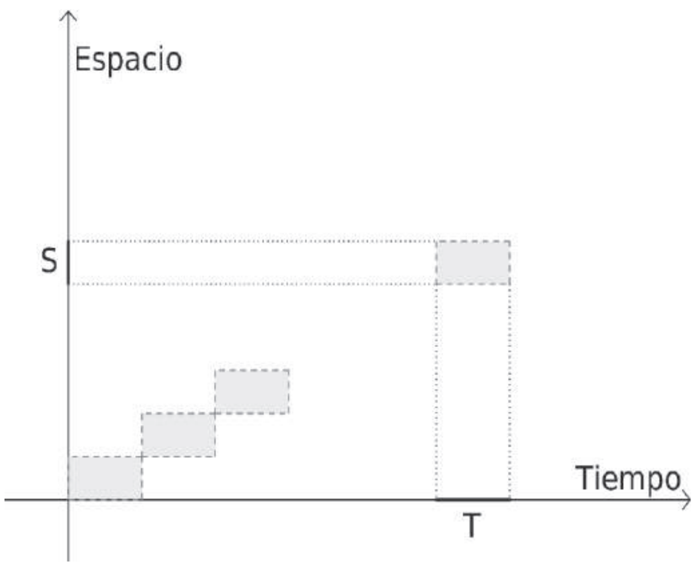


Figura 1. *Gráfica de la relación espacio-tiempo en un modelo discreto-discreto.*

Presentamos como ejemplo de movimiento discreto-discreto el «caballo de Muybridge». Los indivisibles de espacio (fotogramas captados) dependen de la velocidad máxima de obturación de la cámara, mientras que los indivisibles de tiempo (periodo entre fotogramas) dependen de la velocidad de reproducción.

Figura 2. *Serie de Fotografías del «Caballo de Muybridge».*

Para explicar la modelización de movimientos a diferente velocidad, tomemos como ejemplo el movimiento que se genera en la proyecciones cinematográficas del caballo de Muybridge. Supongamos que reproducimos a velocidad normal una cinta cinematográfica con 16 fotogramas. Si la velocidad de proyección es fija, la forma de ralentizar el desarrollo de la película es «replicando» fotogramas, es decir, insertando una cinta cinematográfica con los 16 fotogramas duplicados. En cambio, si se desea duplicar la velocidad del movimiento, la solución es eliminar fotogramas, dejando la cinta en 8 fotogramas. La única limitación de este procedimiento es el umbral de percepción. Si se desean conservar «todas las fases» del movimiento, entonces el único procedimiento viable es la reducción de velocidad.

Imposibilidad de movimiento discreto-denso. Si consideramos un modelo denso en tiempo y un modelo discreto en espacio, para lo cual podemos emplear los fotogramas del «caballo de Muybridge», se observa que no existiría un movimiento sin reposo, aunque habría movimientos de diferente velocidad. También existirían movimientos con nitidez cada vez mejor hasta donde el indivisible de espacio permita, de ahí que existan intervalos de reposo, es decir, la velocidad de obturación puede ser tan grande como queramos pero siempre fija y debido a la naturaleza discreta del espacio ha de haber un fotograma indivisible.

La reflexión acerca de un movimiento con estructura discreta en tiempo y densa en espacio, hace que esta combinación sea inviable, porque al ser el espacio recorrido durante el indivisible de tiempo, divisible, ha de existir una parte de tiempo en el que el móvil ha recorrido una parte propia del espacio.

Imposibilidad de movimiento denso-continuo. Si el tiempo es denso y el espacio es un continuo, entonces a velocidad constante no se puede medir el tiempo en que un móvil recorre la diagonal de un cuadrado de lado unidad, pero sí se puede acotar, y en realidad, el móvil ha de ocupar esa posición porque no se podría detener en ningún «punto racional» anterior. En cambio, si el tiempo es continuo y el espacio es denso, entonces la cámara fotográfica ideal puede tomar «puntos» del movimiento del caballo, lo cual contradice la densidad racional del espacio.

Uso de modelos en los artículos seleccionados y en Aristóteles

De la Torre y Pérez (2000) aunque sostienen una modelización continua del espacio-tiempo describen niveles de Van Hiele que se caracterizan por la persistencia o superación de diferentes modelos, así el nivel 0 se caracteriza como el predominio del modelo discreto-discreto en el razonamiento del escolar. El nivel 1 se caracteriza como el uso del modelo continuo-continuo, con una superación de la discretización pero existe resistencia a admitir la independencia lógica entre longitud y cardinal. El nivel 2 lo caracterizan como la consideración del modelo continuo (naturaleza del segmento matemático) ideal y las limitaciones en la práctica (no se pueden obtener fracciones de materia y tiempo arbitrariamente pequeñas). Finalmente el nivel 3, corresponde a la consideración plena del modelo continuo, aceptando que Aquiles alcanza a la tortuga recorriendo igual cantidad de posiciones durante todo el trayecto en un tiempo dado, sin embargo, no en la misma razón.

Martínez (2001) señala las estrategias algebraicas empleadas por los estudiantes para resolver la paradoja de Aquiles, lo cual establece que el modelo subyacente de espacio y tiempo es el denso/denso, dado que la solución temporal obtenida es racional.

Los resultados de Nuñez (1994) se pueden interpretar en términos de los modelos numéricos antes mencionados. Los estudiantes de 8 años interpretan el espacio con un modelo discreto dado que en la práctica no se pueden obtener las divisiones que plantea Zenón. Por otro lado, los estudiantes de 10 años son conscientes del modelo denso, sin embargo, en la práctica adoptan una perspectiva discreta. Los estudiantes de 12-14 años sostienen sorprendentemente un modelo discreto en pequeñas distancias y un modelo denso en grandes distancias, aunque hay estudiantes en los que persiste el modelo denso durante todo el proceso.

Los resultados de Peled y Hershkovitz (1999) que se relacionan con la representación de los números reales en la recta, destacan que 0,3333… no puede representarse en la recta, lo cual manifiesta una percepción basada en el modelo denso proporcionado por los decimales exactos (que no incluye la división de la unidad en tercios), desligado del modelo denso racional (que sí la incluye). Por el mismo motivo, $\sqrt{5}$ no es representable en la recta, por disponer de una representación decimal infinita no periódica.

Conclusiones

Las paradojas de Zenón han sido eje central en la formalización de los conceptos numéricos a lo largo de la historia. Los problemas referentes a los conjuntos numéricos considerados para explicarla, así como los problemas de formalización de dichos conjuntos han supuesto un obstáculo para obtener explicaciones satisfactorias. Destacamos el trabajo de Cajori (1915) en los que se recoge una revisión exhaustiva de los argumentos utilizados desde Aristóteles.

En la actualidad, y desde una perspectiva de la educación matemática, nos sorprende encontrar pocos trabajos dedicados a la paradoja de la dicotomía. La lista obtenida mediante un procedimiento cienciométrico los reduce a seis.

Para terminar, hemos proporcionado argumentos sobre modelos numéricos que pueden ser utilizados tanto para interpretar los razonamientos de otros autores como para proponer explicaciones escolares a la paradoja de la dicotomía.

Referencias

Cajori, F. (1915). The history of Zeno's arguments on motion: phases in the development of the theory of limits. Parts I-X. *The American Mathematical Monthly*, XXII, Nos. 1–9.

Colás, M. y Buendía, L. (1998). *Investigación educativa*. Sevilla: Alfar.

De la Torre, A., y Pérez, P. (2000). La modelización del espacio y del tiempo. *Divulgaciones Matemáticas, 8*(1), 57–68.

Hong, F. T. (2013). Pattern recognition in creative problem solving: a case study in search of new mathematics for biology. *Progress in Biophysics and Molecular Biology*, *113*(1), 181–215.

Martínez, J. G. R. (2001). Thinking and writing mathematically: «Achilles and the Tortoise» as an algebraic word problem. *Mathematics Teacher, 94*(4), 248–252.

Nuñez, R. (1994). Cognitive development and infinity in the small: paradoxes and consensus. En A. Ram y K. Eiselt (Eds.), *Proceedings of the 16th Annual Conference of the Cognitive Science Society* (pp. 670–674). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Peled, I. y Hershkovitz, S. (1999). Difficulties in knowledge integration: revisiting Zeno's paradox with irrational numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *30*(1), 39–46.

Sprows, D. (2015). Sometimes binary is better. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(3), 477–479.

MAGNITUD Y SU MEDIDA EN LA FORMACIÓN INICIAL DE MAESTROS DE PRIMARIA. DISEÑO DE UNA INVESTIGACIÓN

Magnitude and its Measurement in Pre-Service Primary school Teacher Training. Design of a Research

Francisco Gil[a], *Ana Belén Montoro*[b] *y María Francisca Moreno*[a]
[a]Universidad de Almería, España
[b] Universidad Camilo José Cela, España

Resumen

En este trabajo se presenta el diseño de un experimento de enseñanza para evaluar la eficacia de un modelo instruccional sobre la comparación de magnitudes utilizado en la formación de Maestros de Primaria en la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida en la Universidad de Almería. Este diseño surge del desarrollo previo de varios ciclos donde se han puesto en práctica y valorado secuencias de tareas.

Concretamente, se parte del modelo para la enseñanza de la medida y adecuamos la metodología a las características del grupo-clase y el número de horas presenciales. Se aplica a los estudiantes una prueba inicial de conocimientos sobre medida, se prevén las lagunas que presentan y los errores y dificultades, se diseñan tareas que hacen aflorar concepciones erróneas, favorecen la discusión y la modificación y/o elaboración de estrategias propias, así como la evaluación de la validez de estrategias distintas de las propias.

Palabras clave: magnitudes y su medida, formación de maestros, Educación Primaria, experimento de enseñanza.

Abstract

This work presents the design of a teaching experiment to evaluate the efficacy of an instructional model about measurement comparison used in primary school teachers´ training during a subject called Teaching and Learning of Geometry and Measurement at Almeria University. This design arises from the (prior) development of several instructional cycles in which the model was used and sequences of tasks were evaluated.

Specifically, based on the teaching model we consider more appropriate for measurement, the methodology was adapt to our groups of students and their characteristics, as well as to

Gil, F., Montoro, A. B. y Moreno, M. F. (2016). Magnitud y su medida en la formación inicial de maestros de Primaria. Diseño de una investigación. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 263-271). Granada: Comares.

the number of in-person classes. An initial knowledge test about measurement was developed. Likewise, possible gaps in their knowledge, difficulties and mistakes were anticipated. Moreover, we designed tasks to make misleading ideas arise, to favor discussion and the modification or creation of their own strategies in order to solve the tasks. Finally, it was important to evaluate the validity of strategies different from ours.

Keywords: *Magnitude and its measurement, teacher training, Primary Education, teaching experiments.*

Contextualización del problema. Justificación de la investigación

Al recibir la invitación de colaboración en la publicación de un libro como parte del homenaje al profesor Dr. Luis Rico, nos planteamos varias posibilidades pero rápidamente nos inclinamos hacia un tema en el que comenzamos a trabajar a raíz de la publicación de uno de los libros de la colección 'Matemáticas: cultura y aprendizaje'. Se trata de las magnitudes y su medida, un tema que ha sido una constante en nuestro trabajo.

Antecedentes

Las magnitudes y su medida forman parte de los currículos de las diferentes etapas educativas y existe consenso en el destacado papel que juega la medida, como habilidad práctica importante en la vida diaria, en el desarrollo de la competencia matemática de los escolares. Sin embargo, es constatable que en sus actividades cotidianas muchos adultos muestran un dominio insuficiente de la medida y a ello probablemente contribuye una limitada experiencia con el aprendizaje de estos contenidos durante su paso por la educación obligatoria. En este sentido también existe acuerdo en que es mejorable el modo en que se abordan los procesos de enseñanza aprendizaje que se planifican para los escolares. Por ejemplo, se suele incidir en el dominio de determinadas habilidades aisladas más que en el desarrollo de conceptos y comprensión que faciliten un verdadero sentido del proceso de medida en el que se integren varias componentes. Con frecuencia se omiten las implicaciones que tendría reflexionar sobre desarrollo histórico de la medida, lo que conlleva, para empezar, que no se ofrezca la oportunidad de percibir la necesidad misma de medir, ni de cómo la medida emerge de una «noción de igualdad socialmente aceptada», al comparar el tamaño, la duración, el valor, etc., en situaciones comerciales o de trueque.

De este modo, la naturaleza de las tareas habituales en el ámbito escolar sobre magnitudes y medida provocan que muchos escolares no tengan conciencia, por ejemplo, de la noción de replicación de la unidad, es decir, la repetición de una única unidad de medida, a partir de lo cual el hombre ha llegado al recuento y al número. Esto es relevante puesto que de este hecho nació la necesidad de patrones de medida fijos. Las experiencias escolares con las medidas comienzan normalmente con el número, y están frecuentemente restringidas a él, con pocas posibilidades de explorar otros aspectos en los cuales se fundamenta la medición.

Consideramos imprescindible modificar hábitos deficientes en la enseñanza de estos contenidos que se han mantenido de manera persistente, incluso a pesar de las indicaciones incluidas en las distintas normativas curriculares. Esta necesidad de mejora detectada en la compresión y manejo de la medida por parte de los escolares nos conduce, inmediatamente, a centrar nuestra atención en los responsables de las planificaciones realizadas sobre estos contenidos. Aunque este tipo de consideraciones se podrían realizar para el profesorado de cualquier nivel educativo, en nuestro caso nos centraremos en el futuro profesorado de primaria que debe diseñar, desarrollar y evaluar tareas que promuevan en los escolares un dominio significativo de la medida. Cobra por tanto especial relevancia la formación de los futuros profesores de Primaria. Incluso es conveniente y/o necesario, como paso previo, valorar la competencia de los futuros profesores en lo relativo al dominio de las magnitudes y su medida.

Actualmente es amplio el esfuerzo realizado sobre el tratamiento de las magnitudes y la medida dentro de la formación en matemática y su didáctica en el ámbito de maestros de Primaria. En Castro (2001) se realiza un primer tratamiento de estos contenidos a través de los organizadores del currículo y constituyen una contribución al análisis de contenido, al cognitivo y al de instrucción. Estos contenidos están integrados en Segovia y Rico (2011) donde se aporta una introducción sistemática de los significados de los conceptos convencionales y de las estructuras matemáticas en la Educación Primaria. Además se le dedican dos capítulos en Flores y Rico (2015), orientado a recopilar el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares y profundizando en el conocimiento requerido por el profesor de matemáticas de Primaria.

Es necesario reflexionar sobre el proceso de medir una magnitud para poder diseñar y trabajar en el aula tareas que impliquen un aprendizaje significativo de la medida. A continuación resumimos este proceso.

Marco de referencia

La medición de una magnitud es un proceso que se inicia con la construcción de la magnitud y se completa con su medida y su estimación. Este no es un proceso lineal, ni se desarrolla de modo secuencial según sea la magnitud: longitud, masa, capacidad, volumen… etc. Es un proceso complejo que comienza con la percepción de los atributos en los objetos y el aislamiento de la cualidad que se va a medir. Posteriormente se comparan objetos que comparten este atributo común medible mediante los términos relacionales 'más que', 'menos que' y 'tanto como'. Al considerar 'equivalentes' todos los objetos que se han comportado igual frente a la comparación y responden al 'tanto como', surge la noción de cantidad de magnitud. Estas cantidades se pueden sumar y ordenar. Diferentes circunstancias, por ejemplo, dificultad en la comparación, necesidad de precisión, etc., hacen conveniente asignar un número a una cantidad de magnitud. Este hecho, de enorme utilidad práctica, es lo que denominamos medir y se desarrolla en varias etapas:

— Escoger una cantidad fija, que se denomina unidad de medida.
— Reiterar esta unidad, tantas veces como sea preciso, sobre el objeto a medir.
— Contar el número de veces que se ha iterado.
— Asignar al objeto ese número, indicando la unidad utilizada.

Todos los demás objetos que sean 'equivalentes' al dado, es decir, que compartan la misma cantidad de magnitud (sean iguales de…) medirán lo mismo. Resaltar también que la medida de un objeto depende de la unidad escogida y por esa razón es imprescindible indicar, junto al número asignado como medida, de qué unidad se trata.

Con esto se destaca 'qué se va a medir', mediante la necesidad de la percepción y la comparación, así como la importancia de la elección y fijación de una unidad de medida. El proceso se completa con la estimación, es decir, la posibilidad de apreciar 'a ojo' sin la ayuda de instrumentos de medida, la medida de la cantidad de magnitud. Esta es una habilidad que debe fomentarse por su indudable interés práctico y que requiere el haber interiorizado unos referentes y el haber desarrollado unas estrategias.

La enseñanza de los conceptos de atributo/cualidad y medida es esencial en Educación Primaria pero son numerosos los estudios que ponen de manifiesto las dificultades que tienen los escolares para aprenderlos. Recientemente, Passelaigue y Munier (2015) consideran que para enseñar estos conceptos los profesores deben dominarlos y después de analizar el nivel de dominio de los estudiantes para profesor en Francia, concluyen que los futuros profesores no diferencian estos conceptos, siendo la noción de atributo/cualidad la menos comprendida.

Nuestro interés se centra en investigar sobre el modelo del proceso de medida orientado a conseguir su dominio por parte de los futuros maestros de Primaria. Inicialmente este modelo se apoya en la percepción, comparación, medida y estimación (Olmo, Moreno y Gil, 1989), que acabamos de describir brevemente. En Frías, Gil y Moreno (2001) y Moreno, Gil y Frías (2001) están ampliamente desarrolladas las fases de percepción y comparación de cualidades de los objetos así como su tratamiento numérico mediante la medida y la estimación. Este es un intento de resaltar las cualidades de los objetos, aislar la que interesa cuantificar y desarrollar el proceso de medirla o estimarla.

Más concretamente, nuestros objetivos instruccionales se orientan a conseguir que los estudiantes para maestro desarrollen las competencias necesarias para enfrentarse, con ciertas garantías, a la enseñanza de las magnitudes y su medida. Como autores justificamos la elección del contenido en que lo hemos mantenido, tradicionalmente, como un ámbito de trabajo constante y porque la mayor parte de nuestra actividad docente se desarrolla en la formación de maestros, habiendo tenido oportunidad de constatar las deficiencias de los estudiantes para maestro en estos contenidos.

La investigación

Para propiciar el logro de dicho objetivo planificamos una investigación de diseño, que resumimos en este documento. Hemos implementado el modelo en sucesivos cursos en la asignatura Enseñanza y aprendizaje de la Geometría y la Medida de segundo de Maestro de Educación Primaria de Almería, en concreto en el cuatrimestre dedicado a la medida. El proceso ha sido cíclico, cada curso hemos rediseñado la asignatura en función de los datos recogidos el curso anterior, reformulando o cambiando actividades que no habían producido los resultados deseados, introduciendo otras nuevas y otros planteamientos metodológicos para desarrollar aspectos que antes no lo estaban lo suficiente, etc.

Todo ello en aras de alcanzar nuestro objetivo: formar maestros capaces de afrontar con competencia la tarea de enseñar a los escolares las magnitudes y su medida. Una parte importante de nuestra actividad, para alcanzar este fin, se centra en desarrollar en los estudiantes para maestros aquellas capacidades que deben fomentar en los escolares y que ellos mismos no poseen, por ejemplo, la capacidad de comparar o la de estimar.

Metodología

Se ha elegido el diseño de experimento de enseñanza porque «más allá de crear diseños efectivos para algún aprendizaje, se persigue explicar por qué el diseño instruccional propuesto funciona y sugerir formas con las que puede ser adaptado a nuevas circunstancias» (Molina y otros, 2011, p. 76).

Para explicar el diseño de nuestro experimento de enseñanza vamos a seguir los pasos señalados por Molina y otros (2011), comenzando por la fase de preparación del experimento.

A nivel general pretendemos probar la utilidad de nuestro modelo de enseñanza de las magnitudes y su medida en la formación de maestros. Tras varios ciclos de experimentación en los que se ha ido adaptando una secuencia de actividades para articular el modelo, para el presente experimento de enseñanza, pretendemos por una parte comprobar, adaptar o en su caso modificar la secuencia de actividades que proponemos a los estudiantes, y por otra contrastar los aspectos globales a trabajar dentro de cada apartado.

Nuestro experimento de enseñanza va a tener por objetivo contrastar la utilidad del modelo teórico para formar maestros competentes para enseñar las magnitudes y su medida. Inicialmente nos vamos a centrar en la primera parte del modelo: percepción y comparación. La percepción de las distintas cualidades es algo bastante superado por nuestros estudiantes, aunque algunos siguen mostrando confusiones como la del área con el perímetro o la del volumen con la masa; por ello vamos a realizar un tratamiento conjunto de estos apartados con actividades que afloren las dificultades en cualquiera de ellos.

Concretamente, nos proponemos constatar el grado de desarrollo de la competencia de comparación de cantidades (con o sin medida) que alcanzan los estudiantes para maestro, entendiendo esta competencia como básica para su posterior tratamiento docente con los escolares. Para esto pretendemos:

O1: Identificar las estrategias utilizadas en la resolución de situaciones relacionadas con la comparación (con o sin medida) de magnitudes.

O2: Analizar los errores y dificultades que surgen a la hora de resolver esas situaciones.

O3: Estudiar la evolución del conocimiento de los estudiantes a lo largo de las distintas sesiones.

Hemos optado por un experimento de enseñanza que se desarrollará con los cuatro grupos-clase de estudiantes de la asignatura Enseñanza y aprendizaje de la Geometría y la Medida en la Educación Primaria de segundo del Grado de Maestro. Restringimos nuestro estudio al cuatrimestre de medida y lo hacemos extensivo a todos los estudiantes, sobre 300.

La fase de preparación se ha basado en la recogida y elaboración de la documentación a presentar en el aula, de los documentos de trabajo y de referencia de los estudiantes y de las actividades prácticas de aula-taller; para ello hemos tenido en cuenta los trabajos de: Olmo, Moreno y Gil (1989), Frías, Moreno y Gil (2001), Moreno, Gil y Frías (2001), González y Gómez (2011) y Moreno, Gil y Montoro (2015).

En todos los cursos se ha aplicado una prueba para conocer el nivel inicial de los estudiantes que incluye cuestiones para ver si se diferencia unas magnitudes de otras, por ejemplo, la superficie del perímetro, relaciones entre unidades, la resolución de problemas sencillos de medida, por ejemplo, diferencias de edades, o algunas cuestiones de estimación, como estimar la longitud de la pizarra. Esta prueba nos ha permitido comprobar a lo largo de los años lagunas de los estudiantes, por ejemplo, la distinción de magnitudes o la estimación. Una posible causa de estas deficiencias puede ser haberlo trabajado muy poco o nada durante sus etapa escolar, pero lo más llamativo es que también presentan dificultades en la conversión de unidades y la resolución de problemas clásicos, aun siendo aspectos que reconocen haber trabajado intensamente en la etapa escolar.

Nuestra metodología de enseñanza se basa en el desarrollo del modelo descrito anteriormente para trabajar las magnitudes y su medida, partiendo siempre de actividades grupales en las que los estudiantes muestren su dominio del concepto que se estudia. Ello permite que cada uno descubra sus errores y lagunas y aprenda de los demás. En principio los estudiantes ven el tema como muy sencillo, no muestran reticencias iniciales y ello hace que a menudo surjan controversias sobre el modo correcto de comparar, medir o estimar y que los estudiantes descubran estrategias más eficientes que las suyas.

Tras varios ciclos puestos en práctica anteriormente en los que se ha incluido una valoración de las secuencias, contrastando empíricamente (en cada ciclo) alguno de los aspectos que entendemos funcionaba bien, se ha perfilado una secuencia de actividades que produce buenos resultados. Como ejemplo, en el diseño que presentamos vamos a contrastar el grado de desarrollo de la competencia de comparación.

En base a la experiencia acumulada en cursos anteriores podemos conjeturar que los estudiantes, al enfrentarse a tareas de comparación de distintas magnitudes, reproducirán muchos de los errores que ya se han visto en clase que cometen los niños cuando se enfrentan a estas tareas en la escuela. La interacción con los compañeros de grupo, cuando están resolviendo la tarea, les permitirá en muchos casos tomar conciencia del procedimiento erróneo que están siguiendo y cambiarlo.

Entre las estrategias erróneas que aparecen se encuentran: usar una falsa transitividad a la hora de ordenar objetos respecto de una magnitud, por ejemplo su masa o su capacidad; para comparar dos superficies irregulares de cartulina recurrir a medir con una cuerda su perímetro; afirmar que el cuerpo que más pesa es el que más volumen tiene; no sumergir totalmente un cuerpo para medir el volumen de agua que desplaza.

Como hemos mencionado anteriormente, aunque los estudiantes han visto en clase que los niños presentan estas dificultades, ellos consideran que las tienen perfectamente superadas y solo cuando se enfrentan a tareas concretas y empiezan a cometer errores toman conciencia de las limitaciones de su conocimiento y de la utilidad de estas tareas para fomentar el desarrollo de estrategias o poner a prueba las que se poseen.

Hay que señalar que las tareas de comparación se han ido seleccionando en función de la experiencia acumulada de varios cursos de modo que a los estudiantes les parezcan sencillas y no les bloqueen por no saber por dónde empezar, pero a la vez no sean triviales, sino que durante su desarrollo les surgen dificultades que trabajando colaborativamente pueden superar. Es decir, durante el desarrollo de la tarea los estudiantes se verán obligados a reelaborar las estrategias de comparación que tenían para incluir estas nuevas situaciones. Se producirá un aprendizaje tanto del contenido matemático, como de contenido didáctico de la comparación de magnitudes: conocimiento de los errores, uso de esos errores para plantear actividades que hagan que los niños tengan que reelaborar sus estrategias y cambiarlas por otras de mayor nivel, uso de materiales y recursos, gestión de aula en sesiones de trabajo en grupo, etc.

Nuestra propuesta de trabajo parte de las magnitudes lineales (longitud, masa, capacidad) para pasar posteriormente a la superficie y al volumen. En las primeras se pide una ordenación a ojo de varios objetos atendiendo a la cualidad y luego tienen que comprobar su ordenación utilizando estrategias de comparación directa o indirecta pero sin recurrir a la medida. En las segundas sí se les permite medir, pero los objetos que tienen que ordenar tienen formas irregulares que no facilitan su medida directa, por ejemplo, para comparar el volumen de dos piedras sin forma precisa y de un bote de desodorante vacío, y el único recipiente donde caben los objetos no está graduado.

Nuestra recogida de datos comienza con una prueba inicial de conocimientos de magnitudes y medida. Durante el transcurso de la asignatura se elabora un diario donde se reflejan las incidencias del desarrollo del trabajo en al aula.

Se recogen todas las producciones de los estudiantes: las tareas que resuelven de manera autónoma, los trabajos en grupo de los talleres, los trabajos voluntarios de profundización que realizan, los exámenes,… Además se realizan grabaciones en video de distintos grupos de estudiantes resolviendo las tareas de los talleres (se seleccionan los grupos a grabar entre voluntarios procurando que haya una gran diversidad respecto a sus destrezas matemáticas, el género de los integrantes, etc.).

Se analizan los vídeos y extraen distintas formas de resolver las tareas propuestas en los talleres y se analiza su validez, así como las ventajas e inconvenientes de cada una de las respuestas correctas. Se trata de proporcionar retroalimentación, a la vez que se hace consciente a los futuros maestros de la gran variedad de respuestas que pueden aportar sus alumnos, de la importancia de evaluarlas, y de que deberán ser capaces, no sólo de resolver las tareas, sino de juzgar la validez de sus razonamientos.

También se reflexiona con los estudiantes sobre la posibilidad de realizar en la escuela tareas semejantes a las que ellos han experimentado en los talleres y cómo adecuarlas a los distintos niveles.

Conclusiones

En este trabajo hemos presentado el diseño de una investigación que siguiendo los planteamientos de un experimento de enseñanza pretende recoger evidencias empíricas que nos permitan validar parcialmente un modelo de enseñanza de las magnitudes y su medida en la formación inicial de maestros.

Hemos partido de una planificación instruccional que se basa en trabajar los siguientes aspectos de las magnitudes: la percepción, comparación, medida y estimación. Concretamente nuestro estudio se centra en la comparación de magnitudes.

El experimento de enseñanza que hemos presentado se ha diseñado para implementarlo en la formación de Maestros de Primaria, en concreto en la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría y la Medida en la Universidad de Almería. Este diseño surge del desarrollo previo de varios ciclos donde se han puesto en práctica y valorado unas secuencias de tareas, se aplica una prueba inicial de conocimientos sobre medida, se diseñan actividades para hacer aflorar las lagunas que presentan los estudiantes así como sus errores y dificultades. Además, estas actividades favorecen la discusión y la modificación y/o elaboración de estrategias propias, así como la evaluación de la validez de estrategias distintas de las propias.

Está prevista su implementación en cuatro grupos-clase durante 26 horas presenciales dedicadas a grupo docente (70 estudiantes por clase aproximadamente) y siete horas de prácticas con grupos de trabajo (de 35 estudiantes) (la carga docente de un cuatrimestre de una asignatura de nueve créditos).

Somos conscientes de la necesidad de describir con precisión todas las condiciones en las que se realiza la experiencia, así como las actividades y las orientaciones que se dan para favorecer la transferencia de los resultados que se obtengan.

También admitimos que este diseño de investigación solo va a permitir contrastar la parte del modelo de formación que es objeto de estudio y que serán necesarios nuevas investigaciones para contrastar las apartados restantes, incluso una posterior para contrastar el modelo en su conjunto. En ciclos posteriores se realizarán estas distintas fases.

Referencias

Frías, A., Gil, F. y Moreno, M. F. (2001) Introducción a las magnitudes y la medida. Longitud, masa, amplitud, tiempo. En E. Castro (Coord.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

Moreno, M. F., Gil, F. y Frías, A. (2001) Área y volumen. En E. Castro (Coord.). *Didáctica de la matemática en la educación primaria*. Madrid: Síntesis.

González, M. J. y Gómez, P. (2011) Magnitudes y medida. Medidas directas. En I. Segovia y L. Rico (Coords.). *Matemáticas para maestros de Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Olmo, M. A., Moreno, M. F. y Gil, F. (1989). *Superficie y volumen: ¿algo más que el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis.

Passelaigue, D. y Munier, V. (2015). Schoolteacher trainees' difficulties about the concepts of attribute and measurement. *Educational Studies in Mathematics*, *89,* 307–336.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias*, *29*(1), 75–88.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid: Pirámide.

Vergnaud, G., Rouchier, A., Desmoulieres, S., Landre, C., Marthe, P., Ricco, G., Samurcay, R., Rogalski, J. y Viala, A. (1983). Une experience didactique sur le concept de volume en classe de cinquieme - 12-13 ans. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *4*(1), 71–120.

RASTROS DE COMPRENSIÓN, ESTRATEGIAS Y ERRORES SOBRE EL SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

Traces of Understanding, Strategies and Errors about Decimal Numeration System

Antonio Luis Ortiz y José Luis González
Universidad de Málaga, España

Resumen

Mediante la aplicación de un modelo operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático se establecen unas pautas generales sobre la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración en sujetos futuros docentes y en graduados con una elevada formación matemática. En particular, se analizan las estrategias que se utilizan y los errores que se cometen en el uso de las propiedades básicas de la numeración para justificar algunos aspectos de la estructura y el funcionamiento del algoritmo de la sustracción. Entrevistas individuales ponen de manifiesto la existencia de diversos rastros de comprensión y de diferencias apreciables entre sujetos con formación matemática diferente.

Palabras clave: comprensión, sistemas de numeración, algoritmo de la sustracción

Abstract

By means of the application of an operative model for the interpretation of understanding mathematics a few general guidelines on the comprehensionof the systems of numeration have been identified in subjects of a teacher training program and also in graduates with a high mathematical formation. Especially, there are analyzed the usual strategies and the mistakes that are committed in the use of the basic properties of the numeration to justify some aspects of the structure and functioning of the algorithm for subtraction. Individual interviews reveal the existence of diverse traces of comprehension and apreciable differences between subjects with different mathematical formation.

Keywords: *understanding, numeration systems, substraction algorithm*

Ortiz, A. L. y González, J. L. (2016). Rastros de comprensión, estrategias y errores sobre el sistema de numeración decimal. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 273-283). Granada: Comares.

Introducción

En el campo de la formación de Maestros y profesores de Matemáticas existe el principio ampliamente admitido de que la «buena formación matemática» del profesional de la docencia es una condición necesaria, aunque no suficiente, para el desarrollo de una Educación Matemática de calidad (Shulman, 1986; Llinares y Sánchez, 1990; Llinares, 2009), para la disminución del fracaso escolar y para la superación de la situación actual de bajo rendimiento académico que se puede apreciar claramente en las evaluaciones de diagnóstico realizadas hasta la fecha (Rico, 2006; Informe Pisa 2010, 2013). Por otra parte, existe un cierto consenso en que el Maestro de Primaria debe ser un profesional reflexivo en lo que concierne a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas elementales (Flores, 2007; Llinares y Sánchez, 1990), lo que requiere tener un cierto dominio y un buen nivel de comprensión de los conocimientos matemáticos elementales.

Conscientes de ello, hemos desarrollado una investigación sobre la comprensión y el dominio de los conocimientos, procedimientos y destrezas que poseen, los errores que cometen y las estrategias que utilizan estudiantes del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria acerca de los sistemas de representación numérica (Ortiz, González y Gallardo, 2011; González, Ortiz y Gallardo, 2012; Ortiz, González y Gallardo, 2013; González, Ortiz y Gallardo, 2014; Ortiz, 2014). El estudio utiliza y pone a prueba un modelo operativo para la interpretación de la comprensión del conocimiento matemático de Gallardo y otros (Gallardo y González, 2006a, 2006c, 2007, 2011; Gallardo, González y Quispe, 2007, 2008; Gallardo, González y Quintanilla, 2013), que parte del análisis epistemológico y fenomenológico del conocimiento matemático, en particular de los sistemas de representación (Rico, 2000, 2006; Rico, Castro y Romero, 1996; Salinas, 2003a, 2003b, 2007), para la elaboración, en una primera fase, de diversos instrumentos de recogida de datos. Los datos obtenidos han permitido establecer unas pautas generales sobre la comprensión y el dominio de los sistemas de numeración y disponer de una primera aproximación al estado de la comprensión.

Pero la aproximación cognitiva global descrita sólo proporciona una información de patrones y comportamientos generales que debe ser completada con análisis semióticos (significados de las respuestas, sintaxis, errores y estrategias, entre otros) y hermenéuticos (identificación de rastros de comprensión, influencia de las características de los escenarios de valoración o la intervención de los sujetos en el propio proceso de valoración). Con ello, además de obtener nueva información sobre el problema, estaremos en condiciones de confirmar que los errores cometidos y las estrategias utilizadas al resolver tareas propias del campo analizado proporcionan información privilegiada sobre las limitaciones, dificultades y otras características de las capacidades, destrezas y maneras de razonar puntuales relacionadas con los sistemas de numeración. El marco general se sustenta en las tres orientaciones básicas siguientes:

- Una concepción operativa sobre la comprensión del conocimiento matemático y su valoración.

— Una concepción relativa y no acumulativa de la comprensión que evoluciona en función de la situación, las condiciones y los factores que intervienen.
— Una concepción analítica del conocimiento matemático basada en las dos estructuras básicas (epistemológica y fenomenológica) y en los diferentes tipos de categorías del conocimiento
— y un modelo general basado en un método o proceso secuenciado en torno a dos dimensiones:
— Dimensión fenómeno-epistemológica, en la que se inicia el estudio con el siguiente procedimiento operativo (Gallardo y González, 2006a):
  - Análisis Didáctico (González, 1998, Gallardo y González, 2006b).
  - Delimitación del conjunto genérico de situaciones.
  - Estructuración fenómeno-epistemológica del conjunto de situaciones. Modelo local.
  - Selección de tareas y construcción de instrumentos.
  - Análisis de resultados y primeras conclusiones.
— Dimensión hermenéutica, en la que se analiza la información y se completan los resultados y conclusiones mediante lo que denominamos círculo interpretativo o método hermenéutico (Gallardo y González, 2011).

Dentro del marco general descrito, el estudio se propone averiguar: (a) el estado relativo de la comprensión que manifiestan, los errores que cometen y las estrategias y razonamientos que utilizan los alumnos futuros maestros del nuevo Grado de Maestro en Educación Primaria (Universidad de Málaga) sobre el sistema de numeración usual (decimal posicional) para los números naturales; (b) establecer consecuencias fundadas para orientar el diseño de la formación inicial de los futuros maestros en la asignatura Didáctica de la Aritmética.

Desarrollo del estudio

La investigación en su conjunto se ha desarrollado en tres fases. En la primera se ha configurado una aproximación cognitiva global de carácter muestral caracterizada por la construcción de un modelo local adaptado al conocimiento matemático objeto del estudio y a las características de la población de sujetos y el desarrollo de tres pruebas escritas (Ortiz, González y Gallardo, 2011; 2012; Ortiz, 2014). En la segunda fase, se ha dedicado la atención a una aproximación semiótica y hermenéutica con dos partes diferenciadas: un análisis de errores y estrategias y un análisis de rastros de comprensión y usos del conocimiento en las respuestas escritas (González, Ortiz, y Gallardo, 2013; González, Ortiz y Gallardo, 2014; Ortiz, 2014). Entre los resultados y conclusiones de esta segunda aproximación destacamos las coincidencias en estrategias y errores cometidos en las dos primeras pruebas y las diferencias significativas entre sujetos con diferente formación matemática inicial. En la tercera fase, de la que se expone una parte en el presente capítulo, se ha desarrollado un programa de entrevistas individuales semiestructuradas que han servido para confirmar, rechazar o completar puntualmente la información muestral e individual obtenida previamente.

Tercera aproximación: entrevistas sobre rastros de comprensión, estrategias y errores

La tercera aproximación se ha orientado a:

- — Reconocer los usos detectados en los estudios anteriores en forma de errores y estrategias.
- — Reconocer perfiles identificados en los estudios cuantitativos globales.
- — Precisar algunas respuestas obtenidas en los cuestionarios escritos y valorar la determinación de los errores y estrategias analizadas detectadas en dichos cuestionarios.
- — Confirmar que las SR corresponden a la «no comprensión» y no a la dejadez o el cansancio o a otros factores que pudieran estar presente en la realización de los cuestionarios escritos.
- — Incluir algunas cuestiones correspondientes al nivel de síntesis II.
- — Analizar los tipos de respuestas de sujetos con un mayor nivel de formación matemática.
- — Llegar a acuerdos sobre las dificultades, los errores de comprensión y las necesidades de formación para afrontar con garantías el futuro desarrollo en el ámbito de la Educación Matemática.
- — Validar el modelo local y la prueba de comprensión numérica construida.

Entrevistas y tareas

Se han realizado un total de 21 entrevistas a una muestra intencional de alumnos de primer y segundo curso del grado de Educación Primaria y alumnos del Master de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato. Todas las entrevistas se han grabado en video y se han realizado en los meses de mayo y junio del año 2012. En Ortiz (2014) se ofrece un primer análisis de cada una de las entrevistas con la consideración de los errores y las estrategias detectadas.

Para identificar y caracterizar los usos del conocimiento matemático hemos seleccionado las 10 tareas de los niveles de análisis y síntesis, tanto estructural como funcional, que muestran mayores rastros de comprensión en los análisis previos realizados y los cuatro grupos de tareas siguientes, de los que los tres primeros han estado presentes en los cuestionarios aplicados y el cuarto recoge nuevas tareas del nivel sintético y fronterizo con el formal:

- — Primer grupo: tareas 4 y 5 del nivel de análisis estructural que corresponden a los ítems IIN8 y IIN12 de los cuestionarios aplicados.
- — Segundo grupo: tareas 7, 8 y 9 del nivel de análisis funcional asociadas a la categoría fenomenológica de calcular, algoritmos y operaciones, que corresponden, respectivamente, a los ítems IIA13, IIA14 y IIA15 de los cuestionarios aplicados.

— Tercer grupo: tareas 12 y 13 asociadas al nivel de síntesis funcional del sistema de numeración asociada a los algoritmos en agrupamientos distintos al decimal; correspondientes a los ítems III.IA18 y III.IIA24 de los cuestionarios aplicados.
— Cuarto grupo: tarea 14 (ítem III.IIC26) de síntesis funcional asociada a la obtención del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados.

Las tareas que componen las entrevistas constan de cuatro partes diferenciadas: cuestiones del nivel técnico o de reproducción, cuestiones del nivel de análisis, del nivel de síntesis I y del nivel de síntesis II (Ortiz, 2014; pp. 497 y sgtes.).

Desarrollo y codificación de respuestas

El desarrollo de las entrevistas ha seguido el siguiente protocolo:
— Explicación del objetivo de la investigación y de la propia entrevista.
— Proyección en la PDI de la cuestión a resolver.
— Lectura y aclaración del contenido de cada cuestión respondiendo a las dudas que pudieran tener y realizando preguntas «aclaratorias» en los casos en que se constatara, después de un tiempo razonable, la inactividad del alumno o que respondieran de forma incorrecta.
— Desarrollo de la entrevista hasta acabar o comprobar que el propio alumno reconocía su incapacidad para resolver la tarea propuesta.
— Intercambio de impresiones sobre las tareas, el contenido y su relación con la formación de docentes.

Para la trascripción se indica el curso al que pertenece el (la) alumno(a), la letra R para registrar las respuestas y las letras E y E´ para las intervenciones del entrevistador y el director de la tesis que participó en algunas de las entrevistas. En cada una de las tareas propuestas enumeramos tanto las preguntas como las respuestas para su identificación y localización. Reflejamos los comentarios de los participantes y entre paréntesis describimos las acciones que realiza el entrevistado para resolver las tareas.

Análisis de la información

Hemos elegido las siguientes unidades de análisis que servirán para identificar los fragmentos que contienen los rastros de comprensión señalados en cada uno de ellos:

Unidad 1: Distinción entre el numero de órdenes presentes en un número y la cifra del orden correspondiente: valor de posición, relación y transferencia entre los distintos órdenes.

Unidad 2: Traducción a decimal de un número expresado como conglomerado de distintos ordenes (expresión polinómica no canónica): relaciones y transferencias entre los distintos ordenes.

Unidad 3: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la suma: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.

Unidad 4: Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en el sistema decimal.

Unidad 5: Justificación de la disposición de los sumandos en el algoritmo de la multiplicación: descomposición polinómica del multiplicador y aplicación de la propiedad distributiva.

Unidad 6: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.

Unidad 7: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales distintos al decimal.

Unidad 8: Aplicación del algoritmo de la suma en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.

Unidad 9: Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados: valor de posición y transferencias entre los distintos órdenes de unidades en sistemas posicionales indeterminados.

Unidad 10: Cálculo del cardinal de colecciones en agrupamientos indeterminados: aplicación del principio aditivo o de agrupamientos múltiples y del principio posicional en sistemas de base indeterminada.

Con respecto a cada unidad de análisis se identifican los fragmentos que incluyen los rastros de comprensión, los rastros de complicidad/empatía entre entrevistador y entrevistado, los errores cometidos, las estrategias utilizadas, los usos del conocimiento y las relaciones/ interferencias entre niveles. Veamos a continuación la transcripción completa de la entrevista y las interpretaciones de las respuestas de una de las alumnas de la muestra (tabla 1).

Ejemplo de entrevista (alumna A5-1.º)

La alumna que realiza esta entrevista pertenece al grupo E de primer curso del grado de Educación Primaria. Ha cursado un bachillerato de CCSS y no ha participado en ninguna de las tres pruebas escritas. Se presenta a continuación una parte de los resultados obtenidos, en particular las respuestas a las unidades 4, 7 y 8 y el cuadro resumen de todas las unidades de análisis.

Unidad 4. Justificación de las llevadas en el algoritmo de la resta (tarea 8: efectúa la sustracción: 562-36). A continuación se transcribe parte del diálogo relacionado con esta tarea.

R1: Bueno, esto es más complicado de explicarlo. Como tenemos el 2 y el 2 es mas chico que el 6, pues es como si se lo restara a doce. Quedaría 6 y ahora… es como si cogiera una decena del 6 y entonces…como se la has quitado al 6 ahora se la pones al 3.

E2: Como se la he quitado al 6 se la pone ahora al tres; ¿eso cómo es?
R2: Esto para explicárselo a un niño de primaria es muy complicado.
E3: ¿Pero tu lo tienes claro?
R3: Bueno en realidad se hacerlo, pero de tanto aplicarlo se me ha olvidado el porqué.
E4: ¿Te explicaron alguna vez el porqué?
R4: Si la primera vez que lo hice me lo explicaron.
E5: ¿No te acuerdas de la justificación que te dieron?
R5: No me acuerdo
E6: ¿Y te convencieron las explicaciones que te dieron?
R6: No mucho. Si no me acuerdo será porque no me convencieron muy bien. Yo me he quedado con el procedimiento.

Los registros R1 y R3 nos permiten interpretar un uso técnico del sistema de numeración en la justificación de los procedimientos realizados en el desarrollo del algoritmo de la sustracción; sin embargo la alumna reconoce expresamente no saber las razones de los procedimientos aplicados (R5 y R6).

Unidades 7.1 y 7.2. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos distintos al decimal (Figura 1); se solicita el incremento de vasos del año 2011 respecto al año anterior expresado en agrupamientos de 8.

	Palets	Cajas	Paquetes	Vasos	FORMA ABREVIADA
2010	2	6	7	5	2675_8
2011	3	4	5	6	3456_8

- Expresa en forma abreviada el total de ventas en los dos años y explica cómo haces los cálculos.
- Expresa el incremento producido en el año 2011 y explica cómo haces los cálculos.

Figura 1. *Ítem III.IA18.2 de los cuestionarios PCN1, PCN2, PCN3 y de la entrevista.*

La entrevista arroja los siguientes resultados, de los que extraemos los fragmentos y las interpretaciones que siguen:

E2: ¿Y el incremento?
R2: (Escribe las dos cantidades a restar 3 4 5 6 y debajo 2 6 7 5, pone el signo menos y la raya para el resultado; resta en base 10 y obtiene como resultado 7 8 1).
E3: Eso significa que la venta en los dos años sería 1 vaso, 8 paquetes.
R3: Si, 1 vaso, 8 cajas, no espera, esto eran…8 paquetes de 8 vasos y 7 cajas de 8 paquetes. ¿No?

La alumna manifiesta un rastro de comprensión técnica al proceder como en base 10 (R2), error catalogado como ESop.5 y herencia del uso del conocimiento sobre la resta en nuestro sistema. Nuestros silencios y el cuestionamiento de sus respuestas le hacen reflexionar y modificar sus respuestas, lo que así se recoge en el siguiente fragmento de la Unidad 7.2:

E5: ¿Pero son 2675 y 3456 vasos? Te pregunto, ¿los vasos vendidos en estos dos años son 2675 y 3456?

R5: Ah, claro que no, a ver serían… Esto tiene truco, pues yo lo he sumado como si fueran números enteros y no lo son. Sería, en el 2011 se ha incrementado un vaso, no se ha incrementado paquetes, aquí tampoco (se refiere a cajas) y aquí sí.

E6: Y eso como se podría expresar.

R6: A ver, lo pondríamos (Escribe: Pal 1, Ca 0, Pa 0) bueno cero no sería, sino negativo (escribe Ca -2, Pa -2, V 1).

E7: ¿Y si nos pidieran que escribamos el incremento en forma reducida?

R7: Sería un poquillo más complicado sería (escribe 1001(8)

E8: Eso significaría que se ha incrementado 1 vaso y un palé; ¿esa sería la expresión del incremento?

La alumna modifica sus respuestas, pero la herencia de lo aprendido y practicado exhaustivamente sobre el algoritmo de la sustracción, en el que no realiza las transferencias inversas necesarias, impide encontrar soluciones adecuadas a las dudas planteadas. Propone una solución del tipo ESop.8, que supone un rastro de comprensión del conocimiento de mayor nivel pero que no podemos considerarlo como un uso sintético funcional del sistema de numeración.

Unidad 9. Aplicación del algoritmo de la resta en agrupamientos indeterminados (Figura 2). Se pide el incremento producido entre los meses de agosto y septiembre en agrupamientos indeterminados.

Junio	Julio	Agosto	Septiembre
x-1 x-1 x-1 (x	1 1 1 (x	x-2 x-1 x-1(x	x-1 2 2 (x

- Expresa en forma abreviada el total de ventas en los meses de junio y julio.
- Expresa el incremento producido entre los meses de agosto y septiembre.

Figura 2. *Ítem III.IIA24 de los cuestionarios PCN1, PCN2, PCN3 y de la entrevista.*

El siguiente fragmento proporciona información sobre la comprensión de la alumna ante este tipo de situaciones:

E2: ¿Y el incremento entre los meses de agosto y septiembre?

R2: (Escribe: (x-1)-(x-2) 2-(x-1) 2-(x-1)) ¿Lo resuelvo? (le indico que siga) (Escribe: 1 3-x 3-x). Sería el número 1 3-x 3-x

E3: Si la x fuera mayor que 3, ¿qué pasaría?

R3: Si la x es mayor que tres tendría dos cifras negativas, en esas dos cifras no habría incremento.

Los rastros de comprensión encontrados en R2, nos permiten interpretar que identifica los distintos órdenes presentes, pero manifiesta su incapacidad para realizar transferencias inversas con agrupamientos indeterminados. La herencia de su comprensión técnica del algoritmo de la resta, indicada en el fragmentos 4, justifica esta limitación, a pesar de la capacidad manifiesta para realizar sustracciones polinómicas (R2).

La Tabla 1 recoge, de forma resumida, los resultados que hemos deducido de la información de la entrevista a la alumna A5-1.º

Tabla 1. *Resumen del análisis semiótico y hermenéutico de la entrevista a la alumna A5-1.º*

Tareas	*Fragmentos*	*Rastros de comprensión*	*Rastros de complicidad/ empatía*	*Estrate-gias*	*Errores*	*Uso del conoci-miento*	*Relaciones/ interfe-rencias entre niveles*
IIN8	Fragmento 1	-			Eae1 Eae4	Técnico	
IIN12	Fragmento 2	Traduce del polinó-mico al decimal.				Analítico	Resuelve la tarea IIN8, como conse-cuencia de la resolu-ción de la IIN12.
IIA13	Fragmento 3	Justificación de las llevadas en la adición.				Analítico	
IIA14	Fragmento 4	No justificación de las llevadas en la adición.	Reconoce la necesidad de conocer las justificación.			Técnico	
IIA15	Fragmento 5	Justificación de la posi-ción de los sumandos		AAop.1		Analítico	
III.IA18	Fragmento 6.1	Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	
	Fragmento 6.2	Opera parcialmente en base 10 y realiza trans-ferencia de ordenes.		ASop.7		Analí-tico-Sin-tético	
III.IA18	Fragmento 7.1	Opera en base 10.			ESop.5	Técnico	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
	Fragmento 7.2				ESop.8	Analítico	
III. IIA24	Fragmento 8	Opera en los distintos ordenes y realiza trans-ferencias para obtener la expresión canónica.		ASop.6		Analí-tico/ Sintético	
III. IIA24	Fragmento 9	Realiza sin ninguna dificultad la resta con expresiones algebraicas				Analí-tico/ Sintético	Herencia del nivel técnico de nuestro sistema.
III. IIC26	Fragmento 10	El carácter indetermi-nado de la cantidad presentado y caracte-rizada por los puntos suspensivos supone un obstáculo insalvable.		ASc.2		Analí-tico/ Sintético	

Referencias

Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *Actas del VIII Simposio de la SEIEM*. La Laguna (Tenerife).

Gallardo, J., González, J. L. (2006a). El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática. En: P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.) *Actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 57–77). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses-Universidad de Zaragoza.

— (2006b). Assessing understanding in mathematics: steps towards an operative model. *For the Learning of Mathematics*, *26*(2), 10–15.

— (2006c). Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático. *PNA*, *1*(1), 21–31.

— (2007a). Fronteras en la investigación sobre comprensión en Educación Matemática. *Números*, 66.

— (2007b). Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático: el caso del algoritmo estándar escrito para la multiplicación de números naturales. En E. Castro y J. L. Lupiañez (Eds.). *Investigaciones en Educación Matemática: Pensamiento Numérico* (pp. 157–184). Granada: Editorial Universidad de Granada.

— (2011). On understanding and interpretation in mathematics: An integrative overview. *Philosophy of Mathematics Education Journal*. 26. Recuperado de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome26/index.html

Gallardo, J., González, J. L., Quispe, W. (2007). Comprensión del concepto de fracción. Análisis de las interferencias entre significados. En M. Camacho, P. Bolea, P. Flores, B. Gómez, J. Murillo y M. T. González (Eds.) *Actas del XI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM. Comunicaciones de los Grupos de Investigación* (pp. 207–222). Tenerife: CajaCanarias-SEIEM.

— (2008a). Interpretando la comprensión matemática en escenarios básicos de valoración. Un estudio sobre las interferencias en el uso de los significados de la fracción. *RELIME Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *11*(3), 355–382.

— (2008b). Rastros de comprensión en la acción matemática. La dimensión hermenéutica de un modelo operativo para la interpretación en matemáticas. En R. Luengo, B. Gómez, M. Camacho y L. J. Blanco (Eds.) *Actas del XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática SEIEM* (pp. 283–293). Badajoz: Sociedad Extremeña de Educación Matemática-SEIEM.

Gallardo, J., González, J. L., Quintanilla, V. A. (2013). Tareas, textos y usos del conocimiento matemático: aportes a la interpretación de la comprensión desde el cálculo aritmético elemental. *Educación Matemática*, *25*(2), 61–88.

— (2014). Sobre la valoración de la competencia matemática: claves para transitar hacia un enfoque interpretativo. *Enseñanza de las Ciencias*.

González, J. L., Ortiz, A. L., Gallardo, J. (2012). Avances en el estudio de la comprensión de los sistemas de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En A. Estepa y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XVI Simposio de la SEIEM* (pp. 303–316). Baeza, España: SEIEM.

— (2013). Limitaciones en la comprensión de los sistemas de numeración al inicio de los estudios del grado de Maestro de Educación Primaria. En L. Rico, M.C. Cañadas, J. Gutiérrez e I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 67–75). Granada, España: Editorial Comares.

— (2014). Usos del conocimiento matemático. Una aproximación semiótica y hermenéutica a la comprensión de los Sistemas de Numeración. *Grupo de investigación Pensamiento numérico y algebraico e Historia de la Matemática y la Educación Matemática* (HMEM). Investigación en Educación Matemática XVIII. Salamanca: SEIEM.

Llinares, S. y Sánchez, V. (1990). Las creencias epistemológicas sobre la naturaleza de las Matemáticas y su enseñanza y el proceso de llegar a ser un profesor. *Enseñanza. Anuario interuniversitario de Didáctica*, *8,* 165–180.

Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51,* 92–101.

OCDE (2010). *PISA 2009. Programa para la evaluación internacional de los alumnos.* Madrid: Secretaría General Técnica. Ministerio de Educación.

— (2013). *PISA 2012. Programa para la evaluación internacional de los alumnos.* Madrid: Instituto Nacional de Evaluación Educativa. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte.

Ortiz, A. L., González, J. L. y Gallardo, J. (2011). Comprensión del sistema de numeración en estudiantes del grado de Maestro de Educación Primaria. En M. Marín, y N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (309–378). Ciudad Real, España: SEIEM.

Ortiz, A. L. (1999). *Comprensión del sistema de numeración decimal: un análisis de la coordinación entre los sistemas de representación escrito y hablado*. Memoria de Tercer Ciclo. Programa de Doctorado 1996-1998. Didáctica de la Matemática. Universidad de Málaga.

— (2014). *Comprensión de los sistemas de numeración. Un estudio en el grado de Maestro en Educación Primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Málaga.

Rico, L. (2000). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática. *PNA*, *4*(1), 1–14.

— (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47–66.

Salinas, M. J. (2003a). Comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas en estudiantes de Magisterio. En Castro, E. (Ed.). *Investigación en educación matemática: séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática* (pp. 339–348). Granada: Universidad de Granada.

— (2003b). *Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo casual*. Tesis doctoral. Universidad de Santiago de Compostela.

— (2007). Errores sobre el sistema de numeración decimal en estudiantes de Magisterio. En M. Camacho et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI*, pp 381–390. SEIEM 2007.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

UNA APROXIMACIÓN A LA INTEGRACIÓN ENTRE MATEMÁTICAS, CIENCIAS Y TECNOLOGÍA DESDE EL APRENDIZAJE BASADO EN LA INDAGACIÓN

An Approach to the Integration Between Mathematics, Science and Technology from Inquiry Based Learning

Isabel María Romero y Antonio Codina
Universidad de Almería, España

Resumen

PISA 2012 define la competencia matemática como la capacidad de los individuos para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Dichos procesos sitúan esta conceptualización en un enfoque funcional del aprendizaje matemático. Las reformas curriculares actuales apuestan por este enfoque, junto con una perspectiva integradora del conocimiento matemático, científico y tecnológico. En este capítulo presentamos el diseño de una tarea que integra matemáticas y ciencias para resolver una cuestión sobre eficiencia energética en un edificio utilizando sensores conectados a ordenadores portátiles. Discutimos el potencial de la metodología de Aprendizaje Basado en la Indagación para proporcionar a los estudiantes de primeros niveles de secundaria oportunidades de describir, explicar y predecir fenómenos relacionados con el aprovechamiento energético.

Palabras clave: competencia matemática, procesos, interdisciplinaridad, ciencias, aprendizaje basado en la indagación

Abstract

PISA 2012 mathematics framework defines mathematical literacy as the capacity of individuals to formulate, employ, and interpret mathematics in a variety of contexts. Those processes place this conceptualization in a functional approach of mathematical learning. Current curricular reforms bank on this approach, together with an integrative perspective of mathematical, scientific and technological knowledge. In this chapter, we present the design of an interdisciplinary task which integrates mathematics and sciences to solve a question on energetic efficiency in a building employing sensors connected to laptops. We discuss the potential of Inquiry Based

Romero I. M. y Codina, A. (2016). Una aproximación a la integración entre matemáticas, ciencias y tecnología desde el aprendizaje basado en la indagación. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 285-296). Granada: Comares.

Learning methodology for providing students with opportunities to describe, explain and predict phenomena related with energy use.

Keywords: *mathematical literacy, processes, interdisciplinarity, sciences, inquiry based learning*

Introducción

En un libro homenaje al profesor Luis Rico, nos gustaría resaltar su decisiva influencia en nuestra visión funcional, tanto de la enseñanza de las matemáticas como de la propia disciplina de la Educación Matemática.

Por lo que respecta a la enseñanza de las matemáticas, la apuesta por un enfoque funcional es cada vez más patente dentro de la comunidad internacional (Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD], 2013; Council of Chief State School Offiers [CCSSO], 2012). Se entiende por enfoque funcional aquel donde el conocimiento permite modelizar situaciones reales y está orientado a la resolución de problemas en diferentes contextos (Caraballo, Rico y Lupiáñez, 2013). Esta tendencia tiene su reflejo en los recientes documentos curriculares españoles, que establecen como una de las siete competencias clave del sistema educativo español la «competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología», interpretando por competencias aquellas que se conceptualizan como un «saber hacer» aplicado a la diversidad de contextos académicos, sociales y profesionales (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD] (2015).

En lo que se refiere a la Educación matemática como disciplina, el enfoque funcional se manifiesta en las contribuciones del profesor Rico en materia de diseño y desarrollo del currículo de matemáticas (Rico, 1997; Rico y Lupiáñez, 2008), así como en la dirección de trabajos de investigación que desarrollan este enfoque y siguen metodologías directamente vinculadas al trabajo en el aula (Castro, 1994; Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Romero, 1997). Ambas líneas de interés tienen su repercusión en el trabajo que aquí presentamos.

En relación a los procesos de modelización de situaciones en contexto, cobra una especial relevancia la integración de las matemáticas, las ciencias y la tecnología en los sistemas educativos actuales. Así, la educación STEM (siglas en inglés de *Science, Technology, Engineering and Mathematics*), que aboga por una enseñanza-aprendizaje integrado de todas estas materias, se está implantando en países como Estados Unidos, Gran Bretaña, Alemania, los países nórdicos, Japón o Corea del Sur. Estos países se caracterizan, además de por su potencial industrial y tecnológico, por prestar gran atención a sus sistemas educativos. En el caso del sistema educativo español, la vinculación en una misma competencia clave de la «competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología» apunta en esa dirección. En este marco, el aprendizaje se caracteriza además por la transversalidad, el dinamismo y el carácter integral desde todas las áreas de conocimiento (MECD, 2015).

Esta demanda de integración educativa entre matemáticas y ciencias, y más recientemente tecnología, tiene una larga historia que data de principios del siglo pasado y experimenta un auge de respuesta en lo que va de nuestro siglo. Ello se refleja en la proliferación de documentos con propuestas para la instrucción y, en menor medida, de literatura de investigación con propuestas de modelos teóricos, los cuales se centran en su mayoría en el nivel de secundaria. A día de hoy, la demanda está puesta en la investigación empírica que explore el alcance de dichos modelos teóricos (Berlin y Lee, 2005). Dentro de ellos, los basados en el Aprendizaje Basado en la Indagación o IBL (siglas en inglés de *Inquiry Based Learning*) y en los procesos de modelización son apropiados para abordar la interdisciplinaridad entre ciencias y matemáticas y se han venido utilizando en diversas experiencias (Roth, 2014).

El trabajo interdisciplinar supone un paso más allá de situar las matemáticas en un contexto, en este caso científico, para tratar de explorar la introducción en las aulas de tareas interdisciplinares, que aúnen contenidos y procedimientos de matemáticas y ciencias, así como el uso de tecnología, para desarrollar la competencia matemática, científica y tecnológica de los estudiantes, aprovechando las ventajas que la sinergia entre disciplinas puede suponer a tal efecto.

En este capítulo nos proponemos explorar la aplicación del IBL y de los procesos de modelización al diseño de una tarea interdisciplinar entre matemáticas y ciencias, que utiliza tecnología (calculadores con sensores) para resolver una cuestión sobre eficiencia energética en un edificio. El diseño se enmarca dentro de un experimento de enseñanza (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011) que se lleva a cabo en un instituto público que ha adoptado el método de Aprendizaje Basado en Proyectos (Benjumeda, Romero y López, 2015). Discutimos el potencial de la metodología de Aprendizaje Basado en la Indagación para proporcionar a los estudiantes de primeros niveles de secundaria oportunidades de describir, explicar y predecir fenómenos relacionados con el aprovechamiento energético en un edificio.

Marco

El marco de matemáticas de PISA 2012 (OECD, 2013) define la alfabetización o competencia matemática como:

> La capacidad de un individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas en una variedad de contextos. Incluye el razonar matemáticamente y el usar conceptos, procedimientos, hechos y herramientas matemáticas para describir, explicar, y predecir fenómenos. Ayuda a los individuos a reconocer el papel que juegan las matemáticas en el mundo y a realizar los juicios bien fundados y las decisiones que necesitan los ciudadanos reflexivos, constructivos y comprometidos (OECD, 2013, p. 4).

En esta definición, el lenguaje se centra en la participación activa del individuo y pretende englobar el razonamiento matemático y la utilización de conceptos, procedimientos, datos y herramientas matemáticas para describir, explicar y predecir fenómenos.

El marco destaca los verbos «formular», «emplear» e «interpretar», que se refieren a los tres procesos en los que van a participar los alumnos como individuos que resuelven problemas de forma activa. Formular incluye la capacidad para tomar una situación tal y como se presenta y transformarla en algo susceptible de ser tratado de forma matemática, proporcionando estructuras y representaciones matemáticas, identificando variables y formulando supuestos simplificadores. Emplear incluye la realización de cálculos, la manipulación de expresiones algebraicas y ecuaciones u otros modelos matemáticos, el análisis matemático de información procedente de diagramas y gráficos matemáticos, el desarrollo de descripciones y explicaciones matemáticas y la utilización de herramientas matemáticas para resolver problemas. Interpretar incluye la valoración de las soluciones o razonamientos matemáticos con relación al contexto del problema y el hecho de determinar si los resultados son razonables y tienen sentido en la situación. Asimismo, el lenguaje de la definición pretende integrar la noción de construcción de modelos matemáticos, que ha sido desde siempre una piedra angular del marco de matemáticas de PISA.

A la hora de buscar metodologías de enseñanza-aprendizaje en consonancia con este enfoque, el Aprendizaje Basado en la Indagación resulta particularmente apropiado, puesto que es un paradigma para la enseñanza de las ciencias y las matemáticas centrado en los estudiantes, en el que se pretende proporcionar a estos oportunidades de trabajar como lo hacen los matemáticos y los científicos: diagnosticando problemas, diseñando y criticando experimentos, planificando investigaciones, explorando conjeturas, buscando información, construyendo modelos, debatiendo con los compañeros y formulando argumentos coherentes (Dorier y Maass, 2014).

En este trabajo integramos un esquema de los procesos de indagación para el aprendizaje de las ciencias (Martínez-Chico, Jiménez y López-Gay, 2014) y un esquema de modelización matemática basado en PISA 2012 (OECD, 2013), White (2000) y, Blum y Lei (2007) que nos permitirán, en el siguiente apartado: (a) describir el desarrollo de una tarea abierta dentro de un proyecto interdisciplinar sobre el diseño de un instituto y (b) discutir las ventajas que el trabajo integrado entre las materias de matemáticas y ciencias ofrece al alumnado para desarrollar los procesos implicados en la alfabetización matemática.

Ciclo de indagación científica

Ciclo de modelización matemática

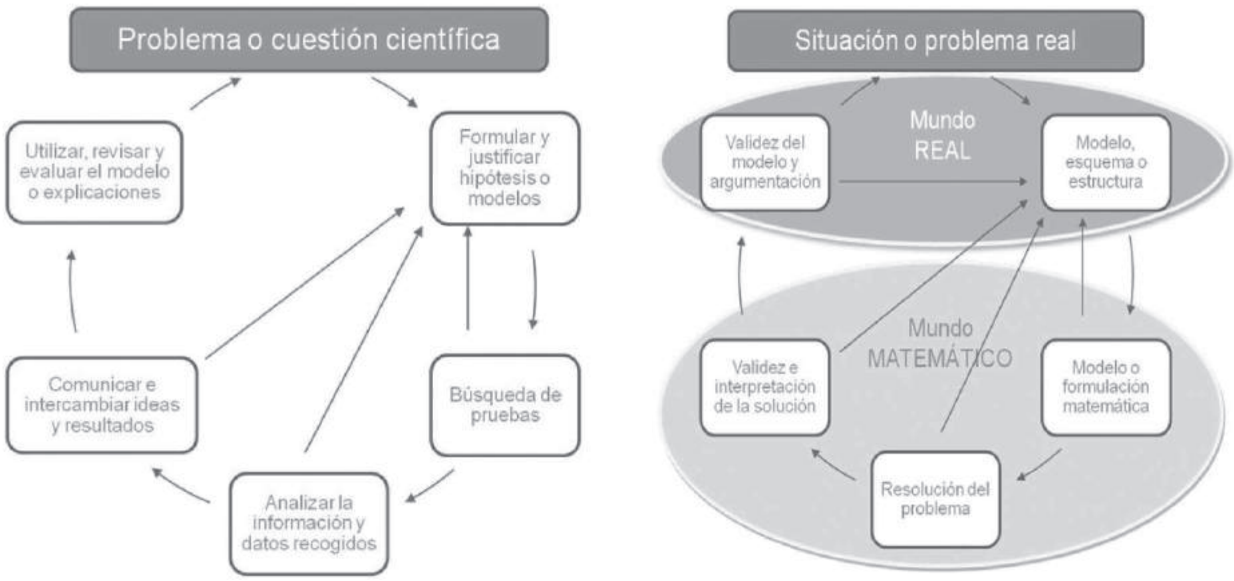


Figura 2. *Maqueta de vivienda con sensor de temperatura.*

Aunque diferentes en algunos aspectos, puede observarse cómo los ciclos de la Figura 1 están vinculados en sus diversas fases. En primer lugar, se parte de un problema relacionado con el mundo natural o tecnológico que tenga sentido para el alumnado y tenga relación con su experiencia. En ocasiones, es necesaria una tarea de observación, de búsqueda de información, de discusión, etc. para llegar a apropiarse de la cuestión con la que se enfrentan e implicarse en su resolución. A continuación, los alumnos han de formular explicaciones personales al problema o pregunta de partida, justificadas en su experiencia previa, conocimiento o información que hayan manejado. Dichas explicaciones pueden ser hipótesis que expresan una relación entre variables, o bien modelos que expresan una representación y simplificación de la realidad. La siguiente fase consiste en buscar pruebas que permitan confirmar o refutar las explicaciones y que generalmente proceden de datos obtenidos a través de diseños experimentales propios. En esta fase, el alumnado debe refinar las preguntas o las hipótesis hasta concretar, separar y simplificar los aspectos necesarios para resolver la tarea, distinguiendo cuáles de ellos son susceptibles de ser tratados como un modelo matemático. Una vez confeccionado el experimento, se hace uso de diversas herramientas matemáticas para tratar de obtener unos resultados al problema de partida. Dicha resolución lleva implícito el replanteamiento del modelo inicial y sus posibilidades de responder a la situación planteada. Igualmente, el hecho de comprobar la validez de la solución y evaluar las conclusiones a la luz de las explicaciones científicas puede volver a replantear la validez del modelo y permitir, por último, su interpretación en el contexto del problema, propiciando la comunicación de conclusiones y argumentos que den respuesta a la situación de partida.

Diseño de la experiencia

El diseño de tarea interdisciplinar que planteamos se encuadra dentro del proyecto «Instituto Ecoeficiente», que forma parte de los proyectos interdisciplinares sobre los que se sustenta el currículo de siete asignaturas de los dos primeros cursos de ESO en un instituto público de Almería, entre ellas Matemáticas, Ciencias y Tecnología. Dicho proyecto culmina con el diseño y la construcción, por parte del alumnado, de la maqueta de un Instituto de creación propia, así como un modelo de las dependencias principales del mismo, acompañado de un plano a escala y un dossier explicativo con sus principales características. Globalmente, se pretende que los estudiantes desarrollen conocimientos sobre eficiencia energética y energías renovables. Desde la asignatura de Matemáticas, el proyecto se aborda mediante un andamiaje consistente en cinco tareas amplias que trabajan: (a) el diseño de la «piel» del instituto, poniendo en juego análisis e interpretación de gráficas y utilización de hojas de cálculo; (b) la orientación más conveniente, utilizando los mismos recursos, junto a contenidos de ángulos y sistema sexagesimal; (c) diseño de modelos de las dependencias principales del instituto, haciendo uso de contenidos de geometría plana, áreas y volúmenes de cuerpos; (e) elaboración de planos de las dependencias, utilizando escalas; y (d) construcción de la maqueta del instituto, trabajando de forma interdisciplinar con la asignatura de Tecnología.

El proyecto se aborda en clases divididas en equipos de 4 alumnos durante un periodo de aproximadamente 2 meses. Las dos primeras tareas son iguales para todos los grupos y se trabajan de forma interdisciplinar con la asignatura de Ciencias. A partir de la tercera, se distribuye entre los distintos grupos el diseño de las diferentes dependencias de forma coordinada con el proyecto global. Cada una de estas tareas requiere de un andamiaje específico. En lo que sigue, nos centraremos en la primera de ellas para ilustrar cómo se traduce este andamiaje, en qué consiste la interdisciplinaridad con la materia de Ciencias y qué ventajas puede suponer dicha interdisciplinaridad para el alumnado.

Tarea interdisciplinar

La tarea «Ventanas y muros» plantea el interrogante de cómo debe ser la «piel» exterior del instituto (ventanas y muros) para aprovechar eficientemente la energía solar. Las ideas científicas de «efecto invernadero» y «conducción del calor», así como la construcción e interpretación de gráficas en matemáticas, permitirán a los estudiantes abordar el problema propuesto.

Para esta tarea, presentamos el diseño de una secuencia de indagación que se trabajará de forma integrada desde las asignaturas de Ciencias y Matemáticas (Tabla 1). Algunas cuestiones-actividades serán tratadas exclusivamente en la asignatura de Ciencias, otras en la asignatura de Matemáticas y el resto se abordarán en ambas asignaturas de forma complementaria. A la izquierda de la secuencia, puede verse la correspondencia de sus distintas etapas con el ciclo de indagación científica y a la derecha su correspondencia con el ciclo de modelización y procesos matemáticos presentados en la Figura

1. Además, para las cuestiones o actividades que se abordan desde las matemáticas, se indican aquellas capacidades (OECD, 2013) que pueden desarrollarse mediante ellas.

Para realizar la experimentación propuesta en la etapa 7 (Tabla 1), los estudiantes utilizan una maqueta de vivienda en la que una de las paredes es intercambiable, pudiéndose poner en ella una ventana grande, una ventara pequeña o ninguna ventana. En una primera instancia, orientarán la vivienda al sol hasta que se estabilice la temperatura y luego la situarán en la sombra para ver cómo ésta desciende. Este proceso se realizará para cada tipo de pared. A través de un sensor de temperatura conectado a un ordenador portátil, se recogen los datos que posteriormente son tratados en una hoja de cálculo para generar distintas gráficas (Figura 2).

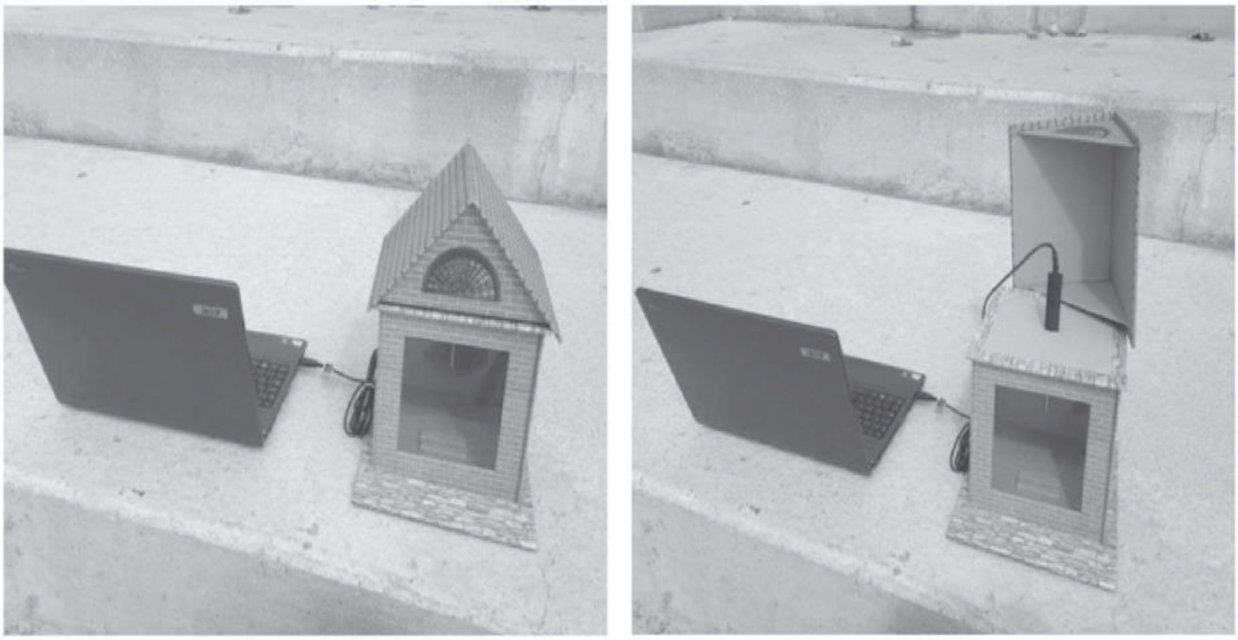


Figura 2. *Maqueta de vivienda con sensor de temperatura.*

Tabla 1. *Diseño de la secuencia de indagación, correspondencia con la indagación científica y los procesos de modelización matemática*

Problema o cuestión científica:
¿Cómo debe ser la "piel" exterior (ventanas y muros) de nuestro Instituto para aprovechar eficientemente la Energía Solar (luz y calor)?

Indagación en ciencias	Secuencia de Indagación (Etapas)	C	M	R	A	RP	O	H	Procesos de Alfabetización matemática	
Formular y justificar hipótesis, explicaciones o modelos	1. Discutir sobre los aspectos a tener en cuenta en la construcción exterior del edificio para aprovechar al máximo la Energía Solar, captando el máximo de energía en época de frío e impidiendo que salga, y al contrario en época de calor								Paso de situación real a modelo o esquema	*Formulación* matemática de las situaciones
	2. Elaborar un modelo sencillo (en una caja en forma de ortoedro) con la distribución de ventanas grandes, pequeñas y muros en el exterior donde se reflejen los aspectos anteriores. Justificar el diseño	X		X	X					
	3. Diseñar un experimento que permitirá verificar o refutar las justificaciones	X	X	X	X	X	X	X		
Búsqueda de pruebas	4. Identificar las variables que intervendrán en el experimento	X	X				X			
	5. Exponer las posibles variables y los aspectos matemáticos que permitirían analizar la situación y obtener conclusiones	X	X		X	X			Modelo o formulación matemática	
	6. Reflexionar sobre posibles resultados mediante la interpretación de supuestos en forma de gráficas	X	X	X	X			X		
	7. Realizar la experimentación y obtener datos		X	X			X	X	*Empleo* de conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos	
Analizar e interpretar la información y datos recogidos	8. Analizar matemáticamente los datos obtenidos en el experimento	X	X	X	X		X	X		
	9. Interpretar los resultados y extraer conclusiones sobre la temperatura alcanzada en el interior del habitáculo y su posterior conservación	X			X				Validar soluciones	*Interpretación*, aplicación y valoración de los resultados matemáticos
	10. Evaluar las explicaciones y distribución inicial planteada por cada equipo a la luz de los resultados obtenidos en el experimento	X			X					
Comunicar e intercambiar ideas sobre los resultados obtenidos	11. Comunicar y justificar las modificaciones posibles en los modelos iniciales de cada equipo	X			X					
	12. Evaluar las conclusiones a la luz de explicaciones científicas (efecto invernadero, conducción de calor)									
	13. Buscar nuevas alternativas para aprovechar al máximo la Energía Solar (placas solares, orientación del Centro, etc.)								Exponer las conclusiones del estudio	
Utilizar, revisar y evaluar el modelo o explicaciones	14. Incorporar al producto final los resultados obtenidos, justificando la distribución de ventanas y muros utilizando diferentes argumentos ya contrastados previamente	X			X					
	15. Considerar otros factores como la luz necesaria para la distribución y construcción de sus dependencias en el interior del Centro									
	16. Contrastar los resultados obtenidos y su modelo con otras construcciones eficientes (Arfrisol)									
	17. Exponer los resultados del estudio en un informe utilizando razonamientos científicos argumentados y explicando las herramientas matemáticas utilizadas	X	X	X	X	X	X	X		

Notas: C=Comunicar; M=Matematizar; R=Representar; A=Argumentar y razonar; RP=Diseño de estrategias para resolver problemas; O=Utilizar operaciones, lenguaje formal y técnico; H=Utilizar herramientas matemáticas

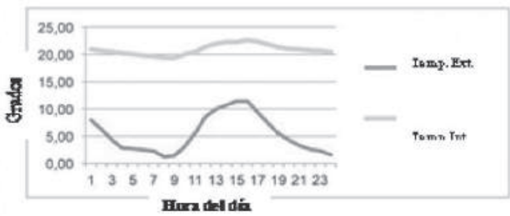
=Tratadas en la asignatura de Ciencias exclusivamente

=Tratadas en la asignatura de Matemáticas exclusivamente

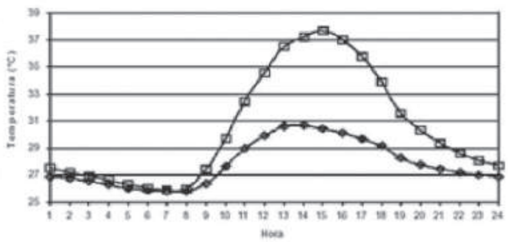
A continuación, examinamos más de cerca algunas de las actividades que se realizarán en la asignatura de matemáticas dentro de la secuencia principal de indagación, y que constituyen pequeños ciclos de indagación en sí mismas. Así, en las actividades previas a la experimentación (etapas 4, 5 y 6, Tabla 1), se pretende, por un lado, que el alumnado se sitúe en el contexto del experimento, identificando las variables implicadas y estructurando gráficas (situación y escala de los ejes, crecimiento, decrecimiento, etc.) que le permitan extraer conclusiones acerca del problema. Por otro lado, se pretende que analice distintos modelos de gráficas y razone sus posibilidades en el contexto del experimento, justificando los posibles resultados obtenidos y su significado. La Figura 3 es un ejemplo de la indagación sobre este último aspecto en la clase de matemáticas.

INTERPRETACIÓN DE GRÁFICAS

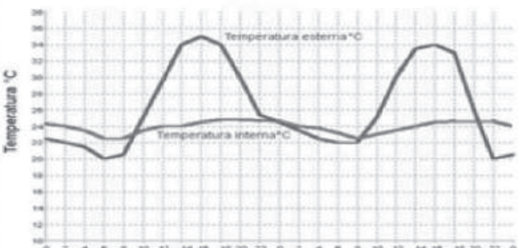
Relaciona cada una de las gráficas con el significado que tendría según las variables que aparecen en cada una. ¿Cuál de las cuatro está más relacionada con el experimento que vamos a realizar?



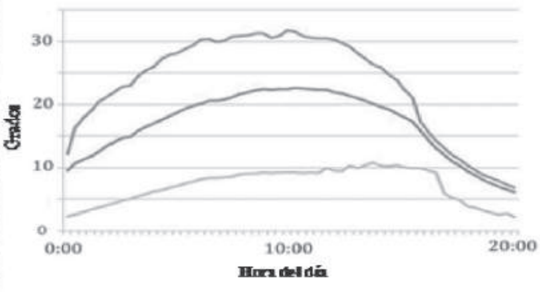
Mientras que durante todo el día la temperatura en el exterior de la vivienda ha oscilado entre 25 y 31ºC, gracias a la calefacción se han alcanzado en el interior temperaturas superiores a 37ºC



Se refleja la temperatura alcanzada en el interior de la vivienda durante 20 minutos con tres tipos de ventanales diferentes. El experimento se inicia con incidencia directa del sol que desaparece a los 10 minutos



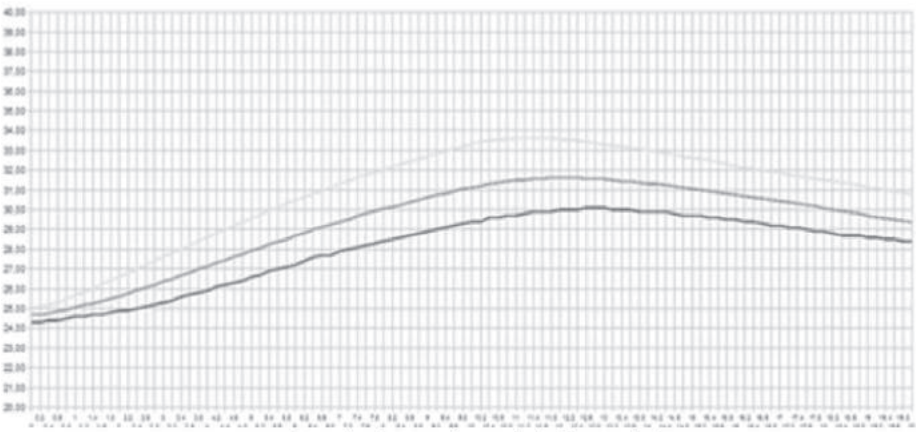
Gracias a la calefacción y el aislamiento térmico de la vivienda, la temperatura interna se mantiene estable en torno a 20ºC durante todo el día, mientras que en el exterior son mucho más bajas



Gracias al aislamiento térmico de la vivienda, la temperatura interna se mantiene estable en torno a 24ºC durante todo el día, mientras que en el exterior se producen grandes oscilaciones entre los 20 y los 35ºC

Figura 3. *Ejemplo de la indagación que se puede llevar a cabo en la clase de matemáticas.*

Tras la realización del experimento, se proponen dos fases de indagación. La primera (etapas 8 y 9, Tabla 1), de carácter analítico, aborda aspectos sobre la idoneidad de la escala en cada eje, la comparación y toma de datos concretos entre las diferentes curvas, y las propiedades de las gráficas (máximos-mínimos, crecimiento-decrecimiento, incremento, etc.). La segunda fase de la indagación (etapas 10 y 11, Tabla 1), de carácter interpretativo, pretende propiciar que los estudiantes extraigan conclusiones en relación al problema planteado, analicen los resultados y justifiquen modificaciones de sus hipótesis iniciales. La Figura 4 ilustra parte de la indagación que se puede realizar a partir de los gráficos obtenidos de la experimentación, en la fase analítica y en la interpretativa.



Ejemplos de cuestiones de la fase analítica

¿En qué momento la casa ha alcanzado la máxima temperatura en cada caso? ¿Cuál ha sido la temperatura máxima alcanzada en cada situación?

Muro Ciego		**Ventana pequeña**		**Ventana grande**	
Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura	Tiempo	Temperatura

-¿Cuál ha sido la variación o diferencia global de temperatura en cada caso?

Muro Ciego	**Ventana pequeña**	**Ventana grande**

Ejemplos de cuestiones de la fase interpretativa

¿Qué ocurre si colocamos una ventana grande en zonas donde da bastante el sol? ¿Y si la colocáramos en una zona donde casi no da el sol en todo el día?

¿Qué ocurre si colocamos una ventana pequeña en zonas donde da bastante el sol? ¿Y si la colocáramos en una zona donde casi no da el sol en todo el día?

¿Qué ocurre si colocamos un muro ciego en zonas donde da bastante el sol? ¿Y si la colocáramos en una zona donde casi no da el sol en todo el día?

A tu parecer, ¿en cuál de los tres casos se mantiene más estable la temperatura en el interior de la vivienda? ¿Por qué?

Según lo anterior, ¿cuál crees tú que es la disposición idónea de ventanas y muros en el exterior del Instituto? ¿Por qué? Razona tu respuesta con los argumentos científicos y matemáticos que has utilizado.

Figura 4. *Partes del proceso de indagación, ejemplos.*

Conclusión

En el presente capítulo, hemos pretendido mostrar el potencial de una tarea interdisciplinar para el desarrollo de los procesos que constituyen la competencia matemática del alumnado de secundaria. Pensamos que la apropiación del problema que se pretende fomentar en los estudiantes, concienciándolos de la relevancia del aprovechamiento energético y delimitando en qué consiste dicho aprovechamiento en la tarea de diseño del exterior del edificio, les ayudará a *formular* la situación en términos matemáticos: (a) aislando variables para diseñar un experimento (a) dotándolas de significado e identificando relaciones de dependencia entre ellas; y (c) realizando previsiones de comportamiento de gráficas asociadas al fenómeno estudiado.

Creemos que la significatividad del problema conseguida en la fase anterior y la motivación por el uso de recursos tecnológicos facilitarán su *empleo* para el análisis de los datos obtenidos del experimento. Esperamos que las gráficas resultantes permitan comprender el efecto de usar ventanas grandes, pequeñas o un muro para el propósito de aprovechar la energía solar. Asimismo, esperamos que esta comprensión facilite la asimilación de elementos y propiedades de las gráficas, que puedan utilizar para justificar dicho efecto.

Por lo que respecta al proceso de *interpretación* de los resultados obtenidos, el trabajo con ideas y explicaciones científicas, sustentadas sobre las gráficas del experimento, enriquecerá previsiblemente las explicaciones sobre el aprovechamiento energético de los modelos iniciales propuestos por los equipos y las predicciones sobre lo que ocurrirá después de introducir modificaciones.

Finalmente, señalamos que el potencial que hemos pretendido mostrar en el diseño de la tarea necesita ser confrontado con su puesta en práctica. Es entonces cuando podremos observar en qué medida y de qué manera los estudiantes aprovechan o no las oportunidades que se les brindan. El realizar previsiones al respecto proporciona una visión que posibilita hacer reajustes a lo largo de la implementación encaminados a facilitar este aprovechamiento.

Referencias

Benjumeda, F. J., Romero, I., y López-Martín, M. M. (2015). Alfabetización matemática a través del aprendizaje basado en proyectos en secundaria. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigaciones en educación matemática XIX* (pp. 163–172). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.

Berlin, D. y Lee, H. (2005). Integrating science and mathematics education: Historical analysis. *School Science and Mathematics*, *105*(1), 15–24.

Blum, W. y Leib, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical modelling (ICTMA 12): education, engineering and economics* (pp. 222–231). Chichester: Ellis Horwood.

Caraballo, R. M., Rico, L., y Lupiáñez, J. L. (2013). Cambios conceptuales en el marco teórico competencial de PISA: el caso de las matemáticas. *Profesorado: Revista de Curriculum y Formación del Profesorado*, *17*(2), 225–241.

Castro, E. (1994). *Exploraciones de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales. Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Tesis doctoral no publicada. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis_dir/ver_detalles/6584/

Council of Chief State School Offiers. *Estándares estatales comunes de matemáticas* [Traducción de Common Core State Standards Initiative (2010). *Common core state standards for mathematics*. Disponible en http://www.corestandards.org/Math/]. Recuperado de https://commoncore-espanol.sdcoe.net/CCSS-en-Espa%C3%B1ol/Mathematics

Dorier, J. L. y Maass, K. (2014). Inquiry-Based Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of mathematics education*, (pp. 300–303). Amsterdam, Holland: Springer.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://fqm193.ugr.es/produccion-cientifica/tesis/ver_detalles/5491/

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Martínez-Chico, M., Jiménez, M. R. y López-Gay, R. (2014). La indagación en las propuestas de formación inicial de maestros: análisis de entrevistas a los formadores de Didáctica de las Ciencias Experimentales. *Enseñanza de las Ciencias, 32*(3), 591–608. doi: 10.5565/rev/ensciencias.1376

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte [MECD] (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *Boletín Oficial del Estado, 3*, 169–546.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Organisation for Economic Cooperation and Development [OECD] (2013). PISA 2012 Assessment and analytical framework: Mathematics, reading, science, problem solving and financial literacy. OECD Publishing. doi: 10.1787/9789264190511-en

Rico, L. (Ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

Romero, I. M. (1997). *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación-acción.* Granada: Comares.

Roth, W. -M. (2014). Interdisciplinary approaches in mathematics education. En S. Lerman (Ed.) *Encyclopedia of mathematics education*, (pp. 317–320). Amsterdam, Holland: Springer.

White, A. (2000). Mathematical modelling and the general mathematics syllabus. *Curriculum Support for Teaching in Mathematics*, *5*(3), 7–12.

MODULARIDAD Y PATRONES EN TABLAS NUMÉRICAS. CALENDARIOS

Modularity and Patterns on Numerical Tables. Calendars

Francisco Ruiz y Rafael Ramírez
Universidad de Granada, España

Resumen

El presente artículo recoge la importancia que tienen en las Matemáticas las regularidades y patrones numéricos, especialmente cuando éstos son generados en tablas de números, dando lugar a patrones visuales. El estudio de estas regularidades visuales puede arrojar información sobre propiedades numéricas o algebraicas, como ocurre cuando se introduce la relación de congruencia en tablas numéricas como el triángulo de Pascal o la tabla de los 100 primeros números naturales. Estos ejemplos mencionados proporcionan modelos de patrones que extendemos al caso de las regularidades visuales que se producen en los calendarios al señalar los días en los que hay luna llena.

Palabras clave: didáctica, matemáticas, patrones numéricos, calendarios, fases lunares

Abstract

The present work describes the importance of regularity and numerical patterns in Mathematics, especially when they are generated inside numerical tables thus giving rise to visual patterns. The study of these visual regularities can shed light on their numerical or algebraic properties, as happens when the congruence relation is introduced in numerical tables like the Pascal triangle or the set of first 100 natural numbers. These examples provide pattern models that we extend to the visual regularities observed in calendars highlighting the days with full moon.

Keywords: *didactics, mathematics, numerical patterns, calendars, moon phase*

Ruiz, F. y Ramírez, R. (2016). Modularidad y patrones en tablas numéricas. Calendarios. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 297-309). Granada: Comares.

Introducción

Una de las actividades fundamentales de las Matemáticas es el estudio y creación de regularidades y patrones, tanto numéricos como referidos a la forma, y afortunadamente esta idea está cada vez más presente en las aulas donde se imparte la enseñanza de esta ciencia. Así por ejemplo, Devlin (1994) y Steen (1988) conciben la Matemática como la ciencia que se encarga del estudio de los patrones, admitiendo que pueden ser estos patrones reales o imaginarios, visuales o mentales, estáticos o dinámicos, cualitativos o cuantitativos.

El reconocimiento y estudio de patrones en la enseñanza de las Matemáticas es importante, ya que patrones y regularidades aparecen tanto en el mundo físico en el que vivimos, como en el mundo de las Matemáticas, y así como la labor del físico es tratar de comprender el mundo natural, la del matemático es estructurar ese proceso buscando la regla, la norma, la estructura, es decir, el patrón.

Como soporte básico para generar y estudiar patrones podemos considerar diversas tablas de números, tales como las de sumar, de restar o de multiplicar, así como tablas del tipo Triángulo de Pascal. Pero sin duda alguna la tabla más simple es aquella en la que aparecen los 100 primeros números naturales dispuestos en filas y columnas, conocida como tabla-100. Un ejemplo reducido de ella es el calendario, donde el número de columnas es 7 y el máximo número a tomar en cuenta es 31.

Números primos y patrones

Una de las partes más misteriosas y curiosas de la teoría de números es la que hace referencia a los números primos y sus posibles regularidades. La configuración en la que aparecen estos números en la recta numérica no es aleatoria pero no se puede precisar un patrón de aparición, ya que la forma de obtener estos números es confeccionar una lista en la tabla numérica que resulta después de de tachar los múltiplos de 2, 3, etc., conocida como Criba de Eratóstenes.

Para familiarizarse con los números primos, Swallow (1955) sugiere disponer los 100 primeros números naturales en una tabla de 6 columnas y tachar los números compuestos. Los múltiplos de los números del 2 al 10 se disponen siguiendo ciertos patrones rectilíneos, bien en columnas verticales o en diagonales, pudiéndose identificar de esta forma los números que son múltiplos de dos o más números, y detectando los números primos que son los que no están tachados (en negrita y con fondo gris en la Figura 1).

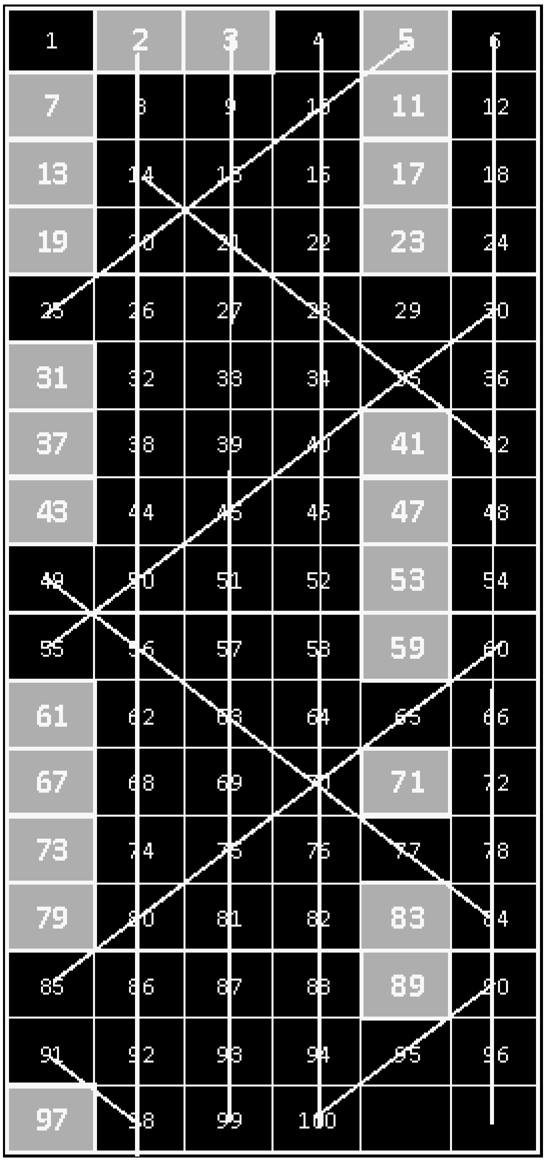


Figura 1. *Criba de Erastótenes en tabla de 6 columnas.*

Una vez detectadas estas regularidades visuales, las podemos utilizar para la identificación y estudio de los números primos. Así por ejemplo, observamos que los números primos mayores que 3 están en la primera y quinta columna, lo que nos lleva a afirmar que se pueden expresar como un múltiplo de 6 más 1 o menos 1. Distinguimos también cuando dos números tienen factores primos comunes, si ambos están conectados por las líneas respectivas. Así 26 y 65 están conectados por la línea del 13 (que une los múltiplos de 13); mientras que 70 y 105 están conectadas por dos líneas, las del 5 y la del 7.

Estos patrones también proporcionan una forma sencilla de obtener una descomposición de los números compuestos en factores primos, sin más que dividir el número compuesto por el número primo de la línea que pasa por él, y repetir la operación con el cociente obtenido.

100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
73	74	75	76	77	78	79	80	81	82

Figura 2. *Números primos en espiral.*

Si cambiamos la tabla numérica, los números primos conforman patrones distintos. Así, si disponemos los 100 primeros números naturales en forma de espiral, comenzando en el centro con el 1, se observa cómo los números primos se sitúan de manera alineada (Figura 2).

Aprovechando estas configuraciones el artista alemán Rune Mields realizó en (1977) la obra titulada «La criba de Eratóstenes III», que muestra las disposiciones lineales (diagonales y verticales) que adoptan los números primos resaltados en tablas de 89, 90 y 91 columnas, de entre los primeros 1.000.000 de números naturales. Como se observa en la figura 3, para el número de columnas 89 (primo) la estructura es doblemente diagonal, para el número 90 (par) la estructura es vertical, y para el número 91 (impar compuesto) la estructura es vertical y doblemente diagonal (Grevsmühl, 1988).

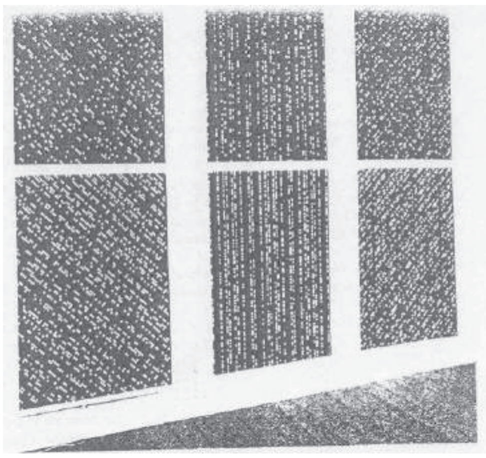


Figura 3. *Patrones de números primos cuando los primeros 1.000.000 de números naturales se disponen en 89, 90 y 91 columnas.*

La congruencia, fuente de patrones en tablas numéricas

El concepto matemático de congruencia de números es un recurso útil para detectar e identificar patrones numéricos. Si ahora nos situamos en una tabla numérica como el Triángulo de Pascal y nos planteamos en qué lugares de la tabla se colocan los números pares y los impares, podemos sustituir cada elemento por el resto al dividirlo por 2. Los números pares darán resto 0 y los impares resto 1, y de esta forma vemos como se forman patrones triangulares, como muestra la tabla de la figura 4 realizada con una hoja de cálculo, utilizando la función «residuo».

En el caso de considerar un módulo mayor que 2, se obtienen otras familias de triángulos correspondientes a más clases residuales.

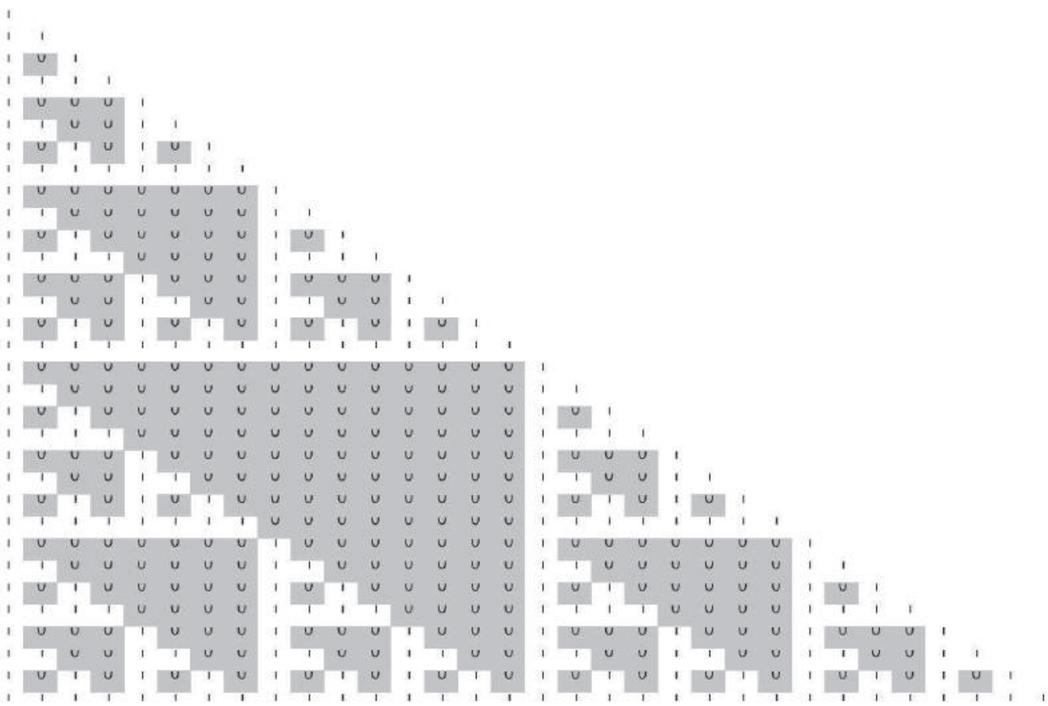


Figura 4. *Patrones triangulares que adoptan las clases residuales módulo 2 en el Triángulo de Pascal.*

La congruencia en la Tabla-100 y patrones rectilíneos

Diversos patrones rectilíneos se obtienen cuando en la Tabla-100 introducimos la congruencia y a su vez cambiamos el número de columnas de la tabla. Así por ejemplo, si en la tabla de dos columnas sustituimos cada número por el resto que resulta de dividirlo por 2, los números de dicha tabla quedan clasificados en dos clases residuales: la clase de los números pares y la clase de los impares (Figura 5). Los elementos de estas clases están alineados, si bien esta alineación cambia cuando varían tanto el módulo m como el número de columnas k de la tabla (Ruiz, 2000).

La figura 6 muestra tres patrones rectilíneos distintos que se producen en la Tabla-100 de 8 columnas con una de las clases residuales módulo 5.

1	**2**
3	**4**
5	**6**
7	**8**
9	**10**
11	**12**
13	**14**
15	**16**
17	**18**
19	**20**
21	**22**

Figura 5. *Clases residuales módulo 2.*

En general, consideremos la Tabla-100 organizada en **k** columnas y sea **m** el módulo respecto al cual vamos a clasificar los números de la tabla. La clasificación que se obtiene al considerar las clases residuales módulo **m** en dicha tabla de **k** columnas la denominamos tabla **(m, k),** y en ella obtendremos m clases residuales, que notamos $\underline{1}$, $\underline{2}$, …, $\underline{m\text{-}1}$, $\underline{m}$. Dos elementos cualesquiera, a y b, de una misma clase cumplen la condición de que su diferencia es siempre un múltiplo del módulo m, es decir $a - b = \dot{m}$

Si usamos el mismo color para resaltar los números que son congruentes entre sí, módulo **m**, visualizamos mediante colores distintos las **m** clases de equivalencia resultantes:

$\underline{m}$= $\{\dot{m}\}$; $\underline{1}$= $\{\dot{m}+2\}$; $\underline{2}$= $\{\dot{m}+2\}$; … , $\underline{m\text{-}1}$ = $\{\dot{m}+m-1\}$

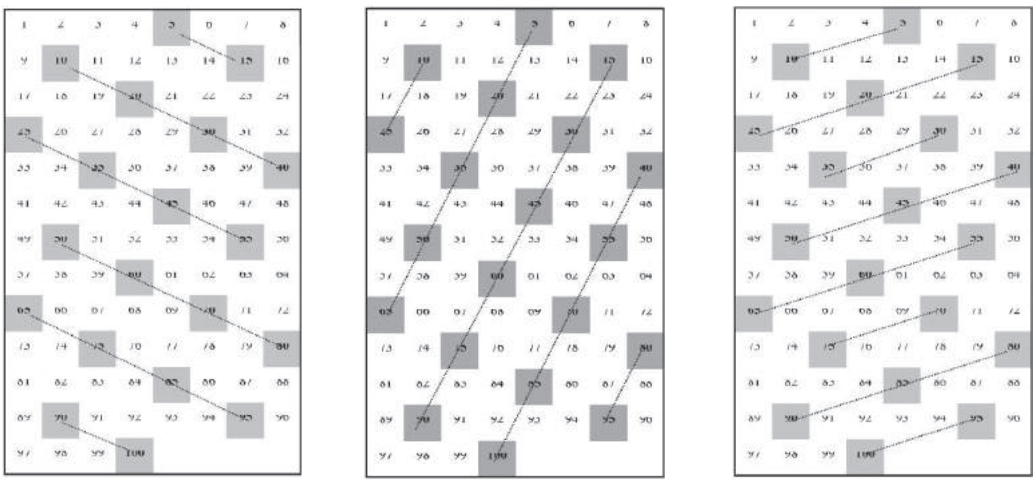


Figura 6. *Patrones rectilíneos distintos formados por una de las clases residuales módulo 5 en la Tabla-100 de 8 columnas.*

La Figura 7 recoge las tablas **(m, k)**, cuando **m** y **k** varían entre 2 y 10. Para su mejor observación se han destacado solamente los elementos de una sola clase de congruencia, ya que las demás clases se disponen de forma «*paralela*» a ella.

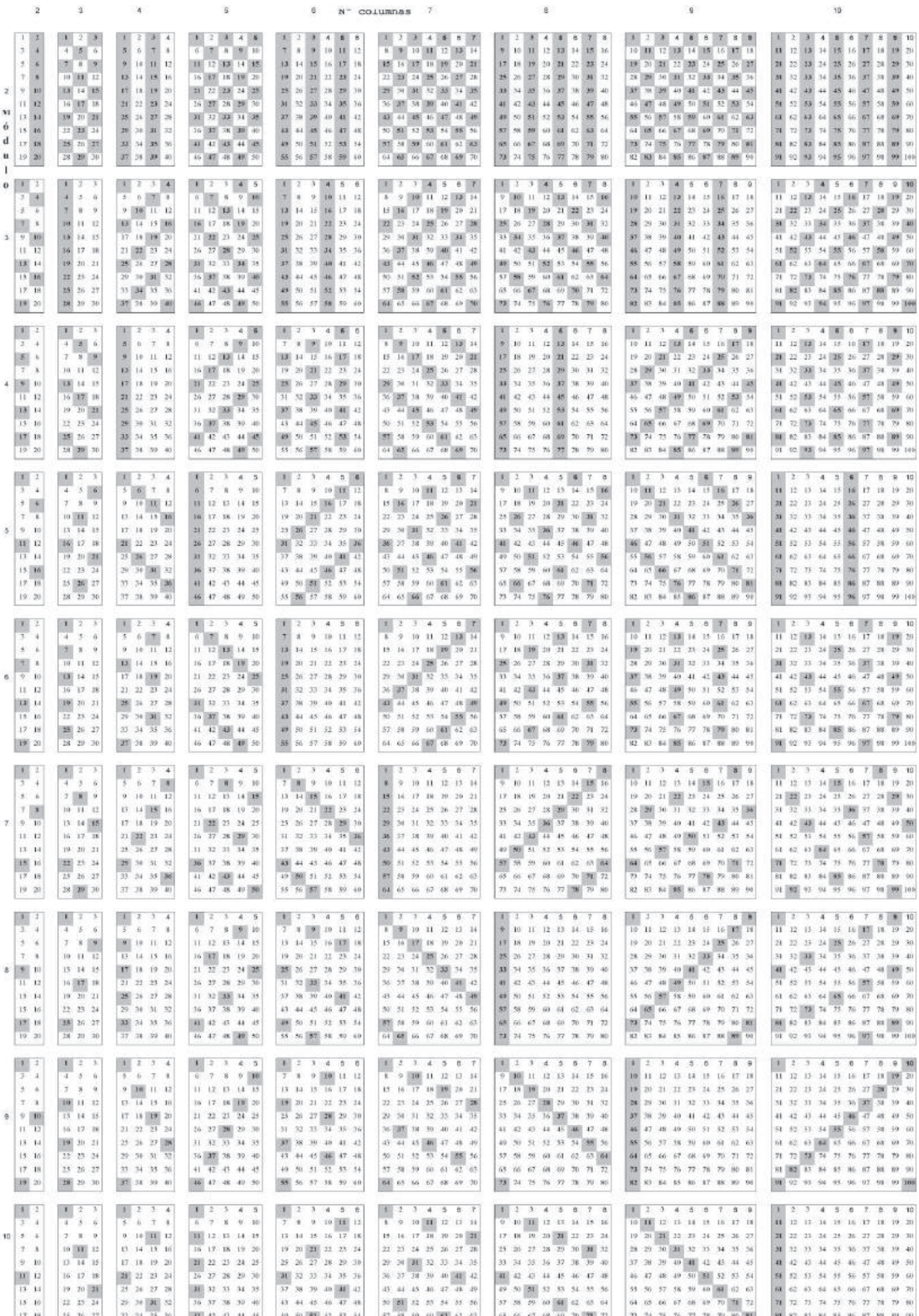


Figura 7. *Patrones rectilíneos en las tablas (m, k).*

A partir de esta tabla de tablas que recoge los patrones rectilíneos que forman las clases residuales, se estudian las regularidades que se visualizan en las tablas (m, k), tanto desde un punto de vista visual-geométrico como con un enfoque algebraico. Para expresar dichas propiedades en términos algebraicos, así como para su demostración, se utiliza el concepto de cadena, que recoge el significado de operador aditivo de los diversos recorridos que se pueden efectuar en la Tabla-100 (Ruiz, 2000). De esta forma, introduciendo la modularidad en la tabla numérica, se obtienen unos patrones visuales que a su vez son descritos en términos algebraicos para obtener y demostrar propiedades de dichos patrones.

Patrones en los calendarios

Como hemos visto, los patrones configurados por los números primos han sido objeto de algunas obras de arte, pero la fenomenología de estas configuraciones también se presenta en situaciones más familiares. Por ejemplo, en los calendarios habituales, la distribución de los meses en tablas de siete columnas facilita visualmente la localización de los días de la semana. Otra información habitual en los calendarios es mostrar la fase lunar de cada día ya que la luna tradicionalmente ha sido un referente en la medición del tiempo, como por ejemplo en la determinación de la Semana Santa y festivos relacionados, puesto que el Domingo de Pascua se determina a partir de la luna llena posterior al equinoccio de primavera.

Nos planteamos si es posible localizar en los calendarios patrones en las posiciones de los días que hay luna llena. Una primera dificultad que encontramos es relacionar las fases lunares con la «modularidad», como hemos descrito en los apartados anteriores, ya que en término medio, el número de días entre dos lunas llenas es de 29,531 días aproximadamente.

Este hecho obliga a que el módulo **m** a considerar no es entero, por lo que los conceptos de múltiplo y clases residuales adquieren un matiz continuo en el que habría que profundizar, pero esto se aleja de las pretensiones de este trabajo. Para simplificar y facilitar la búsqueda de patrones, vamos a considerar el calendario de 2018 que es el próximo año en el que el 1 de Enero es Lunes y además tiene curiosas propiedades relativas a las lunas llenas, como el hecho de que Enero y Marzo tienen dos lunas llenas y Febrero ninguna, y que habrá además dos eclipses lunares, uno parcial y otro total. Sustituyamos los «múltiplos de lunas llenas» por la siguiente tabla (Tabla 1) en la que aparecen las lunas llenas de 2018 (Werner y Werner, 2015).

Tabla 1. *Hora y día de la semana de las lunas llenas de 2018*

Fecha	*Día de la semana*	*Hora (central europea)*
2 de Enero	Martes	03:24:06
31 de Enero	Miércoles	14:26:48
2 de Marzo	Viernes	01:51:24
31 de Marzo	Sábado	14:36:54
30 de Abril	Lunes	02:58:12
29 de Mayo	Martes	16:19:36
28 de Junio	Jueves	06:53:00
27 de Julio	Viernes	22:20:24
26 de Agosto	Domingo	13:56:12
25 de Septiembre	Martes	04:52:30
24 de Octubre	Miércoles	18:45:12
23 de Noviembre	Viernes	06:39:18
22 de Diciembre	Sábado	18:48:36

Ubicando estas lunas llenas en el calendario, localizamos algunos patrones (Figura 8).

	Lunes	*Martes*	*Miércoles*	*Jueves*	*Viernes*	*Sábado*	*Domingo*
Enero	1	2 LLENA	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24	25	26	27	28
Febrero	29	30	31 LLENA	1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
Marzo	26	27	28	1	2 LLENA	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23	24	25
	26	27	28	29	30	31 LLENA	1
Abril	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27	28	29
Mayo	30 LLENA	1	2	3	4	5	6
	7	8	9	10	11	12	13
	14	15	16	17	18	19	20
	21	22	23	24	25	26	27
	28	29 LLENA	30	31	1	2	3

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Junio	4	5	6	7	8	9	10
	11	12	13	14	15	16	17
	18	19	20	21	22	23	24
	25	26	27	28 LLENA	29	30	1
Julio	2	3	4	5	6	7	8
	9	10	11	12	13	14	15
	16	17	18	19	20	21	22
	23	24	25	26	27 LLENA	28	29
Agosto	30	31	1	2	3	4	5
	6	7	8	9	10	11	12
	13	14	15	16	17	18	19
	20	21	22	23	24	25	26 LLENA
	27	28	29	30	31	1	2
Septiem	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22	23
	24	25 LLENA	26	27	28	29	30
Octubre	1	2	3	4	5	6	7
	8	9	10	11	12	13	14
	15	16	17	18	19	20	21
	22	23	24 LLENA	25	26	27	28
Noviembre	29	30	31	1	2	3	4
	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18
	19	20	21	22	23 LLENA	24	25
	26	27	28	29	30	1	2
Diciembre	3	4	5	6	7	8	9
	10	11	12	13	14	15	16
	17	18	19	20	21	22 LLENA	23
	24	25	26	27	28	29	30
	31						

Figura 8. *Lunas llenas en el calendario de siete columnas.*

Podemos observar que, de manera discreta, las lunas llenas se localizan cada 29 o 30 días, dependiendo de la hora. En la distribución de la tabla con siete columnas se observa una especie de regularidad en escalón, mayoritariamente descendiendo cuatro casillas y desplazando una o dos hacia la derecha. Este patrón se visualiza mejor al convertir el calendario en un cilindro uniendo los domingos con los lunes siguientes.

Presentamos a continuación un calendario en el que se prioriza la localización de lunas llenas frente a la visualización de los días de la semana. Hemos marcado los domingos para ejemplificar la distribución de cualquier día de la semana, pudiéndose encontrar cierta regularidad diagonalmente. Si observamos la columna de lunas llenas y se interpreta la singularidad por el número de días del mes de febrero, a partir de marzo se observa que el día del mes en el que hay luna llena desciende uno respecto al mes anterior.

Observamos que el mes de Abril hay que desplazarlo porque la luna llena anterior es el 31 de Marzo y la del 30 de Abril es casi el 29. Este «escalón» hace que en 2018 el Domingo de Pascua sea el 1 de Abril, que no se corresponde exactamente con luna llena (Figura 9).

Este hecho permite una aproximación al caso continuo al que hacíamos referencia. Si en la columna correspondiente a las lunas llenas consideramos el intervalo de 24 horas, podemos situar alineadas en vertical las horas exactas en las que hay luna llena. Esto supone unos desplazamientos «continuos» en las tiras correspondientes a los meses. Esta ruptura de la tabla aporta un mayor efecto visual para localizar los meses con dos lunas llenas. La segunda luna llena de un mes se llama luna azul y son escasos los años en los que hay dos lunas azules (el anterior fue 1999 y el siguiente será 2037).

Como en el caso de la búsqueda de primos, la redistribución de los días de los calendarios en distintas filas, columnas, tiras o incluso cilindros puede facilitar la localización de patrones en los eventos que se desee estudiar, como el caso presentado de lunas llenas que influyen en la determinación de festivos o en otras curiosidades astronómicas (eclipses, lunas azules, etc.).

		LL																												LL										
e	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31									
f			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28										
m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31									
a		*	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30									
m			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31							
j				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30							
j					1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31					
a						1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31				
s							1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30				
o								1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31		
n									1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30		
d										1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31

Figura 9. *Domingos en el calendario de meses representados en filas.*

Referencias

Devlin, K. (1994). *Mathematics: The Science of Patterns*. New York: Scientific American Library.

Grevsmühl, U. (1988). Mathematics and modern art: number investigation. *Mathematics Teaching*, *124,* 34–39.

Ruiz, F. (2000). *La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación*. Tesis doctoral sin publicar. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Steen, L. A. (1988). The Science of Patterns. *Science*, *240*(29), 611–616.

Swallow, K. P. (1955). The factorgram. *Mathematics Teacher, 48*(1), 13–17.

Werner, P. E. y Werner, J. (2015). *Proyecto luna-llena.info*. Recuperado de http://www.luna-llena.info/

LOS BENEFICIOS DEL FEEDBACK CON EL PROFESOR RICO EN UNA INVESTIGACIÓN SOBRE EL LÍMITE

Professor Rico´s Feedback and its Benefits in a Research on the Limit

María Teresa Sánchez[a], *Francisco Javier Claros*[b] *y Moisés Coriat*[c]
[a]Universidad de Málaga, España
[b]Universidad Complutense de Madrid, España
[c]Universidad de Granada, España

Resumen

En este documento señalamos la importancia de las aportaciones del Profesor Rico a dos tesis doctorales centradas en el estudio de límite: una relativa a la noción de límite finito de una sucesión y la otra a la de límite finito de una función en un punto. Estas aportaciones realizadas durante el periodo de elaboración, así como en su fase final, permitieron dar más claridad al contenido de las mismas, así como solidez a las conclusiones derivadas de las investigaciones realizadas. Dichas aportaciones constituyen también una metodología de trabajo que ha permitido mejorar la investigación en educación matemática en España a través de la presentación y debate en público de las investigaciones, constituyéndose de esta manera un clima de trabajo adecuado para el avance en esta disciplina. En este avance ha sido y sigue siendo imprescindible el trabajo y dedicación realizado por el Profesor Rico.

Palabras clave: límite, fenomenología, libros de texto, alumnos, profesores

Abstract

In this article we share the important contributions made by Professor Rico to a couple of doctoral thesis in regard to the notion of limit: one related to the finite limit of a sequence and the other related to the finite limit of a function at a point. These contributions made both in the making and in the final stages of the dissertations allowed to clarify the content and the conclusions extracted from the research. These additions also helped towards establishing a work methodology that has permitted to improve the research in mathematical education in Spain through the public presentation and discussion of the research, building a working environment to make progress in this field of study. The work and dedication offered by Professor Rico has been, and still is, essential to this area of knowledge and its development.

Keywords: *limit, phenomenology, textbooks, students, teachers*

Sánchez, M. T., Claros, F. J. y Coriat, M. (2016). Los beneficios del feedback con el profesor Rico en una investigación sobre el límite. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 311-318). Granada: Comares.

Introducción

Los firmantes de este trabajo constituimos parte de un pequeño equipo de investigación que en sus orígenes estuvo orientado a elaborar dos tesis doctorales relacionadas con lo que, en el año 2000, denominábamos aproximación simple y aproximación doble. En la actualidad el equipo ha aumentado con varios estudiantes de doctorado que están en la fase inicial de su investigación. La principal dificultad que afrontamos al comienzo fue debida al trabajo de los doctorandos, como profesores de instituto, que limitaba bastante su tiempo disponible para la investigación. En el largo periodo que medió hasta la defensa de ambas tesis doctorales (en 2010 y 2012, respectivamente), aprendimos a presentar en público nuestros resultados parciales, nuestros métodos, nuestras encuestas piloto y nuestras conclusiones así como a escuchar cuanto los colegas de distintos Departamentos y Grupos tuvieran a bien comentar y decirnos. De Luis Rico aprendimos que las tesis doctorales, casi terminadas, como producto «memoria de investigación», antes de ser presentadas en los Departamentos, podían ganar en calidad si se sometían a discusión desde dentro con personas de reconocido prestigio, que tuvieran la amabilidad de dedicarnos una tarde y el tiempo suficiente, antes de ello, para leer una versión casi-completa de cada tesis doctoral. Para la primera tesis (Claros, 2010), además del Profesor Sierra, la Profesora Azcárate y el Profesor González Marí, el propio Profesor Rico fue un lector crítico que se sentó con el doctorando y con el director para escuchar una breve exposición y comentar sus opiniones de buena fe. Para la segunda tesis (Sánchez, 2012), fueron otros reconocidos investigadores, la Profesora Azcárate, el Profesor Ortega, la Profesora Velasco y el Profesor González Marí, los que se sentaron con la Doctoranda y con algún codirector para integrar enfoques o desajustes severos que pudieran surgir. En la defensa de esta segunda tesis doctoral, al tratarse de un acto público, se autorizó la grabación, por lo que además contamos con las aportaciones del presidente del tribunal, precisamente homenajeado en este libro.

En este capítulo reproducimos básicamente las tan oportunas observaciones de Luis Rico en el proceso de «cierre» y «defensa» de una tesis doctoral y en el proceso de «defensa» de la otra. Pensamos que la aportación de ideas personales contribuirá a poner de manifiesto la visión profunda y sintética a la que Luis Rico nos ha acostumbrado durante tantos años de dedicación a la investigación.

Lo hemos organizado en dos apartados, el primero de ellos lo comenzamos resumiendo las aportaciones hechas por el equipo de investigación, el segundo contiene las observaciones y propuestas de mejora realizadas por el Profesor Luis Rico que contribuyeron a que dichas aportaciones fuesen más ricas.

Producciones del equipo de investigación

Las aportaciones que aquí presentamos de manera muy resumida surgen de una extensa investigación que afronta el límite finito desde una perspectiva fenomenológica en el sentido de Freudenthal (1983).

Freudenthal diferenció cuatro tipos de fenomenología: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. Dependiendo de cuál fuera la naturaleza del fenómeno que tiene en cuenta con respecto al concepto matemático del que todas se ocupan. En el primer caso, hablamos de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en el uso actual. En el segundo caso, hablamos de fenómenos presentes en el mundo de la enseñanza. En el tercer caso, hablamos de fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices y, en último lugar, hablamos de fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

En nuestra investigación hemos centrado la atención en fenómenos organizados por las matemáticas, con la convicción de que es necesario comprender los fenómenos hallados en el límite finito de una sucesión y en el límite finito de una función en un punto antes de usarlos en la elaboración de una fenomenología didáctica de dichos límites. Aunque una de las grandes aportaciones del profesor Rico es poner de manifiesto que, pese a que nuestra intención primera no ha sido la detección de fenómenos didácticos, sí que han surgido algunos como resultado de la investigación como veremos más adelante.

Como resultado fundamental de la revisión de antecedentes necesaria para desarrollar la investigación, constatamos, al igual que lo intuyen en su práctica tantos profesores que enseñan el límite en bachillerato y en los primeros cursos universitarios, las numerosas dificultades que es necesario afrontar para conseguir un tratamiento adecuado de la noción límite de finito de una función en un punto en la educación secundaria.

La mayoría de las investigaciones consultadas reconoce que el formalismo no es la forma más adecuada de transmitir el concepto de límite en la educación preuniversitaria, donde se ha probado que los alumnos utilizan otras ideas de límite que incluso pueden estar en contradicción con una definición formal (véase Raman, 2002, 2004). Además, se ha concluido que una parte de los alumnos no llega a entender la noción, aunque sí sea capaz de resolver algunos problemas algorítmicos con límites (véase Sánchez, 1997). Cornu (1983), entre otros, observa que se han enfatizado en exceso las rutinas algebraicas en detrimento del propio concepto.

Una de las cosas que más ha llamado la atención del equipo de investigación en la revisión de antecedentes es que, en la mayoría de los trabajos consultados, no se hacen distinciones entre los diferentes tipos de límite. Lo que nos ha llevado a realizar dos investigaciones independientes y complementarias: la de Claros (2010), sobre el límite finito de una sucesión, y la de Sánchez (2012) que se ocupa del límite finito de una función en un punto. En la actualidad ya se ha iniciado una tercera investigación que versa sobre las sucesiones no convergentes, en concreto sobre aquellas que tienen límite infinito. A lo largo de toda la investigación se encuentran argumentos que justifican el estudio separado de las estas nociones.

En el equipo de investigación surgieron preguntas relativas a la noción de límite y a qué aspectos de ésta dificultan o facilitan su enseñanza. La situación de doble aproximación que todos mencionaban en el límite finito de una función en un punto, y que en el caso de la sucesión está aproximación no era doble sino simple, captó nuestra atención y nos llevó a estudiar la manera en que los investigadores del área habían abordado esta situación. Diversos autores (Artigue, Douady, Moreno y Gómez (1995), Vinner (1991); Cottrill (1996); Mamona-Downs (2001); Sierpinska (1985)) se referían a la doble aproximación sin llegar a establecer una caracterización satisfactoria para nuestro trabajo. Necesitábamos apoyarlo en una idea que, dando sentido tanto a la aproximación simple, en el caso de la sucesión, y a la doble aproximación, en el caso de la función con límite finito, integrara éstas con naturalidad en las propias definiciones. Freudenthal (1983) es la fuente de esta idea. Su trabajo, primordial y fuertemente reconocido, nos permitió reconocer las aproximaciones simple y doble como fenómenos organizados, junto con otros, por una variedad de definiciones de límite finito de una sucesión y de una función en un punto. Esta idea es uno de los pilares de la investigación teórica aportada por el equipo de investigación.

Freudenthal (1983) aportó una base para reflexionar sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje aunque lo hallemos en currículos diferentes. Algunos autores, como Dreyfus (1990) y Tall (1991), reconocen que el aprendizaje del límite, desde alguna perspectiva, requiere una capacidad lógica-abstracta y el estudio de esta cuestión plantea una discusión entre lo que diferentes autores denominan pensamiento matemático elemental (PME) y pensamiento matemático avanzado (PMA).

Claros (2010) desarrolló esta perspectiva en el caso de las sucesiones convergentes y mostró como la definición correspondiente organiza dos fenómenos que denominó «aproximación simple intuitiva» (a.s.i) y «retroalimentación» o «ida vuelta en sucesiones» (i.v.s).

Sánchez (2012) desarrolló dicha perspectiva en el caso de las funciones con límite finito en un punto y mostró cómo la definición correspondiente organiza dos fenómenos a los que denominó «aproximación doble intuitiva» (A.D.I) y «retroalimentación» o «ida-vuelta en funciones» (I.V.F).

En ambos trabajos se puso de manifiesto que los fenómenos descritos se suelen presentar en diferentes sistemas de representación. Siguiendo a Janvier (1987) y a Blázquez y Ortega (2001) se manejaron cuatro sistemas: verbal, gráfico, simbólico y tabular. Además, se observó que los sistemas de representación se manejan con intención bien ejemplificadora o bien definidora, por lo que se consideraron relevantes los llamados formato ejemplo y formato definición.

La caracterización de los fenómenos mencionados parece insuficiente si no se apoya en una validación «externa», lo que nos condujo a buscar evidencias de su presencia en el proceso de enseñanza-aprendizaje del límite. Para ello se planteó su posible observación en libros de texto de secundaria. Esta cuestión marcó el inicio de la búsqueda de una muestra de libros de textos, cuyos resultados están pendientes de publicación. El trabajo de Sierra, González y López (1999), nos proporcionó herramientas teóricas para estructurar una información que queríamos que abarcara unos 70 años. Estos autores estudiaron la evolución histórica del límite funcional en el intervalo 1940-1995; consideraron tres periodos temporales basados en las leyes educativas que se estaban desarrollando. Nuestra muestra fue un poco más extensa, ya que abarcó desde 1933 hasta 2005, por lo que orlamos esos «periodos educativos» con otros dos, uno, para abarcar el lapso anterior a 1945 y otro para abarcar el lapso posterior a 1995. Como se comprueba en la investigación, en el campo que abarcan nuestros trabajos, los datos obtenidos permitieron caracterizar tres periodos. Además, comparamos los pares de fenómenos (aproximación intuitiva y retroalimentación) asociados a cada noción (limite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto) y describimos su evolución en los periodos educativos considerados. Otra de las aportaciones del profesor Rico nos llevó a que el análisis de libros de texto, pese a ser sobre una muestra intencional y no representativa, sí que nos permitió extraer conclusiones.

Con el análisis de libros de texto obtuvimos información que utilizamos para otros dos estudios experimentales. El primero de ellos se llevó a cabo con alumnos de bachillerato Claros (2010), y el segundo Sánchez (2012) se basó en el análisis de los relatos de profesores de educación secundaria y bachillerato.

En Claros (2010) decidimos plantear la búsqueda de los fenómenos a.s.i e i.v.s en producciones de alumnos. Para hacerlo, hubimos de diseñar un instrumento que permitiera recoger información sobre lo que escriben los alumnos; la muestra elegida, desde luego, no es representativa, pero los estudios de frecuencias que hemos realizado aportan abundante información sobre este tópico.

El instrumento definitivo se compuso de un cuestionario con 3 preguntas y de una tabla de categorías, para el análisis de las respuestas; 4 de estas categorías correspondían a respuestas posibles que somos capaces de asociar a códigos de fenómenos a.s.i o i.v.s.

El estudio de las respuestas de los alumnos permitió detectar los dos fenómenos a.s.i e i.v.s en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite finito de una sucesión.

Por otra parte en Sánchez (2012), obtuvimos y estudiamos los relatos de nueve profesores. En la memoria se exponen las etapas que se siguieron desde la elaboración de un modelo de entrevista hasta el análisis de los datos y obtención de resultados. Para el desarrollo de las entrevistas, se emplearon una serie de fragmentos extraídos del análisis de libros de texto, lo que nos sirvió como patrón común para ayudar a generar respuestas y que permitió realizar un posterior estudio de los relatos de los profesores de forma sistemática. Se llevó a cabo el diseño de un modelo para la realización y análisis de las entrevistas, justificando su adecuación a los fines perseguidos. Además antes de realizar las entrevistas definitivas llevamos a cabo entrevistas piloto y reuniones con el equipo de investigación que dieron como resultado el establecimiento de categorías y dimensiones, un protocolo de actuación para la investigadora y un guión para su entrega a los profesores en el momento de la entrevista. Parte de esta información es útil para el análisis de los datos.

El análisis de los relatos de los nueves profesores entrevistados, pendiente de publicación, se llevó a cabo según seis ideas organizativas, las cuales conducen a definir el «perfil fenomenológico» de cada profesor. Lo forman dos componentes, una orientada a lo numérico y otra a lo visual. La componente numérica servirá para determinar diferentes tipos de perfiles fenomenológicos.

El siguiente apartado lo dedicamos a comentar con detalle las aportaciones concretas del Profesor Rico. El haber dedicado tantos años a la investigación, le proporcionan una visión sintética y rigurosa que le lleva a detectar en las investigaciones más contribuciones de las que sus propios autores son capaces de observar. Y eso es lo que queremos destacar en este capítulo con el que se rinde homenaje a su persona, la capacidad de ver más allá, de tener ese talento que solo se consigue con el esfuerzo y la constancia. Aprovechamos la ocasión para agradecer su dedicación y por supuesto sus aportaciones.

Aportaciones del Profesor Rico

Son muchas las horas de trabajo compartidas, lo que pone de manifiesto el profundo conocimiento que el Profesor Rico tiene de nuestra investigación, tanto en su visión de conjunto, como de la dos tesis doctorales, que hasta la presente están publicadas. Esto lo sitúa en una posición privilegiada, ya que le permite conocer el trabajo con la suficiente profundidad para poder hacer aportaciones, y a la vez le da la «frescura» de quien ve las cosas desde fuera. Todo esto unido a una extensísima experiencia investigadora lo lleva a realizar aportaciones como las que detallaremos a continuación.

La primera de las grandes sugerencias del Profesor Rico fue la de mantener una reunión con el Profesor Sierra, ya que de esta reunión podían surgir ideas de mejora para el estudio empírico que se estaba llevando a cabo con libros de texto de secundaria y bachillerato. Esa sugerencia se justifica con la gran experiencia que el Profesor Sierra tiene sobre este tipo de análisis y en particular sobre textos históricos. De esta reunión concluimos que para que la muestra de libros, pese a ser intencional y no representativa, nos permitiese extraer conclusiones, debíamos tener al menos tres libros de texto analizados por cada periodo educativo considerado. Esto supuso un esfuerzo extra, ya que para encontrar libros de texto del periodo que abarcaba de 1933 hasta 1940 tuvimos que recurrir a la Biblioteca Nacional, con todas las dificultades que ello supone. Pero la verdad es que finalmente nos alegramos muchísimo de los resultados obtenidos, porque este hecho nos hizo tener argumentos para fundamentar las conclusiones a las que llegamos. También aprovechamos la ocasión para agradecer al Profesor Sierra su interés y dedicación durante el desarrollo del estudio de libros de texto que llevamos a cabo tanto en sucesiones como en funciones.

La segunda gran aportación del Profesor Rico fue referente al estudio de antecedentes. Para el equipo no era un objetivo poner de manifiesto la necesidad de realizar investigaciones basadas en la noción de límite que tengan en consideración las diferencias notables que se observan en función del tipo de límite que se esté considerando. Y eso justifica el porqué de un solo equipo de investigación se han podido publicar, hasta la presente, dos tesis doctorales. Una relativa a la noción de límite finito de una sucesión Claros (2010), y la otra relativa a la noción de límite finito de una función en un punto Sánchez (2012). De hecho ya se ha comenzado otra tercera investigación, que tiene como objeto de estudio las sucesiones no convergentes.

La tercera sugerencia es enfatizar el hecho de que el contexto educativo en el que se desarrollan las dos tesis doctorales ya publicadas, es el de la educación secundaria postobligatoria. Y que los tipos de sucesiones y funciones estudiados son sucesiones y funciones elementales. Otro hecho que nos hace destacar es que el estudio fenomenológico que se hace es referente a una fenomenología matemática, que no trabajamos fenómenos de los que se proponen en los modelos de PISA, con la idea de no crear falsas expectativas a los posibles lectores de los trabajos.

Queremos dar importancia a la cuarta sugerencia hecha por el Profesor Rico, y que hace referencia a una de las conclusiones que se pueden sacar del análisis de libros de texto. El Profesor Rico, nos hace ver que de ese análisis se puede concluir algo que no hemos destacado. Y es que el poder establecer tres periodos principales en el tratamiento de la noción de límite en los libros de texto españoles en los últimos años, pone de manifiesto la presencia de un fenómeno didáctico en el sentido dado por Freudenthal (1983), ya que este hecho explica cuál ha sido la evolución histórica del tratamiento de la noción de límite desde el punto de vista de los cambios curriculares.

Otra de las grandes aportaciones la hace respecto al estudio empírico llevado a cabo con profesores, y está en la misma línea que la anterior. El Profesor Rico afirma que «la respuesta de los profesores es preocupante», y que de ella se detecta otro nuevo fenómeno didáctico que no se menciona en Sánchez (2012), y es «la intranquilidad o desacomodo del profesorado al trabajar la noción de límite». En palabras del propio Profesor «parece que la definición formal no termina de resolver los problemas de aprendizaje, puede que el fallo sea que tiene que ser la definición formal, hay otras definiciones, y en vuestra investigación no se le pregunta al profesor que otro tipo de ejemplos o recursos emplea para trabajar en límite con sus alumnos de secundaria o bachillerato».

Esta última reflexión ha captado el interés de otro nuevo miembro del equipo de investigación Macias (2015), el cual propone en su Trabajo Fin de Master (pendiente de publicar) una unidad didáctica innovadora para trabajar la noción de límite en cuarto curso de la E.S.O opción A. En esta emplea justamente lo que sugería el profesor Rico, otro tipo de materiales y recursos, para trabajar el límite en la educación secundaria obligatoria y el bachillerato.

Referencias

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. y Gómez, P. (1995). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática.* Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219–236.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de límite: conceptions et obstacles.* Tesis doctoral. Grenoble: Université I de Grenoble.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorg, Thomas, C. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: begining with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(2), 167–192.

Dreyfus, T. (1990). Advanced mathematical thinking. En P. Nesher y J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics and cognition* (pp. 113–133). Cambridge, United Kingdom: Cambridge University Press.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Macias, J. A. (2015). *El modelo ´Flipped Classroom´aplicado a las nociones de límite y continuidad*. Trabajo Fin de Máster. Málaga: Universidad de Málaga.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 259–288.

Raman, M. (2002). Coordinating informal and formal aspects of mathematics: student behavior and textbook messages. *The Journal of Mathematical Behavior, 21*(2), 135–150.

— (2004). Epistemological messages conveyed by three high school and college mathematics textbooks. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(4), 389–404.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 1*(1), 39–63.

Sánchez, C. (1997). *Estudio estadístico sobre el proceso de enseñanza-aprendizaje de la noción de límite de una función.* Universidad de Granada.

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza*. Tesis Doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de límite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5–67.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (1999). Evolución histórica de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientación universitaria (C.O.U). *Enseñanza de las Ciencias, 17*(3), 463–476.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the theaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65–81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

FOCOS DE INVESTIGACIÓN EN PENSAMIENTO ALGEBRAICO Y NUMÉRICO EN LA UNIVERSIDAD DE LA LAGUNA

Research Focuses on Algebraic and Numerical Thinking at the University of La Laguna

Martín M. Socas, M. Mercedes Palarea, Alicia Bruno y M. Aurelia Noda
Universidad de La Laguna, España

Resumen

La investigación algebraica se ha desarrollado con estudiantes para profesores de Matemáticas en la Educación Primaria y Secundaria y con estudiantes de Secundaria. Con los primeros, los estudios han sido: las dificultades y errores, el uso de recursos y las formas de pensamiento que desarrollan en situaciones-problemas de contenido algebraico. Con los segundos, los estudios se han centrado en las dificultades y errores en Álgebra, en las operaciones, en las estructuras y en los procesos algebraicos implicados en las situaciones-problemas, propios de esta etapa educativa, que requieren el uso de diferentes representaciones y razonamientos algebraicos.

En la investigación numérica, se distinguen también dos líneas, una realizada con alumnado que tienen dificultades de aprendizaje (síndrome de Down), en la que se aborda el proceso de enseñanza-aprendizaje de conceptos numéricos, operaciones aditivas y la resolución de problemas, y otra, con estudiantes de secundaria, centrada en el estudio de los números negativos y, de manera más amplia, en el sentido numérico.

Palabras clave: álgebra, procesos algebraicos, números negativos, sentido numérico, Síndrome de Down, dificultades y errores, educación obligatoria y formación de profesores

Abstract

The algebraic research has been conducted with two target groups. One group of students for teachers of Mathematics in the Primary and Secondary Education, and the second group of Secondary School students. With the first one, the research has focused on difficulties and errors, the use of resources and the way of thinking developed in situations/problems with algebraic contents. With the secondary school students, the aim was the study of the difficulties and errors in Algebra, in the operations, the structures and the algebraic process involved in the situations/

Socas, M. M., Palarea, M. M., Bruno, A. y Noda, M. A. (2016). Focos de investigación en Pensamiento Algebraico y Numérico desarrollados en la Universidad de La Laguna. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje al profesor Luis Rico* (pp. 319-329). Granada: Comares.

problems, own of this educative stage, which require the use of different representations and algebraic reasoning.

Concerning with the numeric research, we worked with two target groups of young students. First, students with special learning needs (Down syndrome), attending the teaching-learning's process of numerical concepts, additive operations and problems' solving. The second group was formed by secondary school students, focusing our research in the study of negative numbers and, with a wider point of view, the numerical sense.

Keywords: *Algebra, algebraic processes, negative numbers, numerical sense, Down's Syndrome, difficulties and errors, obligatory education and training teachers.*

Introducción

En relación con el Pensamiento Numérico y Algebraico se han desarrollado en la Universidad de La Laguna diferentes focos de investigación que abordaremos en este capítulo. A efecto de concretar y organizar las diferentes investigaciones desarrolladas, distinguiremos dos líneas, una realizada con alumnado con dificultades de aprendizaje y otra con estudiantes de Secundaria, en Pensamiento Numérico, y una con estudiantes para profesores de Matemáticas en la Educación Primaria y Secundaria y otra con estudiantes de Secundaria, en Pensamiento Algebraico.

Con respecto a la enseñanza-aprendizaje de conceptos numéricos en personas con dificultades de aprendizaje, en concreto, con síndrome de Down, los focos de interés han sido: a) el análisis de dificultades y de errores en conceptos numéricos (conceptos iniciales de número, operaciones aditivas y resolución de problemas); b) la evaluación de la comprensión de estructuras conceptuales que subyacen al sistema de numeración decimal; c) el uso de la tecnología, en especial, de tutoriales inteligentes, para el aprendizaje de los primeros conceptos numéricos y d) el diseño y la implementación de situaciones de aprendizaje adecuadas a las características cognitivas particulares del alumnado con síndrome de Down.

En relación con el aprendizaje de los números en Educación Secundaria, las principales investigaciones se han centrado en el estudio de los números negativos y, de manera más amplia, en el sentido numérico. En esta línea se han observado dificultades y errores de los alumnos de Secundaria, analizando los modos de pensamiento para establecer perfiles de estudiantes y también se han desarrollado y analizado secuencias de aprendizaje de aula.

Con los estudiantes para profesores, en Pensamiento Algebraico los centros de interés han sido: el estudio de las dificultades y errores en el campo conceptual algebraico, el uso de recursos y las formas de pensamiento que desarrollan en situaciones-problemas de contenido algebraico. Y con los estudiantes de Secundaria, las investigaciones se han centrado en el estudio de las dificultades y errores en el campo conceptual algebraico en relación con las operaciones, las estructuras y los procesos algebraicos implicados en situaciones-problemas, propios de esta etapa educativa, que requieren el uso de diferentes representaciones y razonamientos algebraicos.

Presentaremos, inicialmente, la investigación en Pensamiento Algebraico y después la investigación en Pensamiento Numérico.

Pensamiento algebraico

Las investigaciones en Pensamiento Algebraico, se han orientado en la Universidad de la Laguna, al análisis de las características del Pensamiento Algebraico y al estudio de los problemas que se ocasionan en la enseñanza y en el aprendizaje, así como al estudio de respuestas y procesos de solución de estudiantes y profesores en tareas específicas en Pensamiento Algebraico. Se propone encontrar respuestas a preguntas como: ¿Qué pueden hacer y qué no pueden hacer los estudiantes y los profesores en los distintos ciclos o niveles del sistema educativo en Pensamiento Algebraico? En general, estas investigaciones se pueden agrupar en tres grandes núcleos:

- — La transición del Pensamiento Numérico al Algebraico, analizando los aspectos del primero que son la base para los conocimientos de la Aritmética Generalizada.
- — La búsqueda de significados para los objetos del Álgebra que faciliten la enseñanza y aprendizaje del Álgebra en la Educación Secundaria.
- — El papel referencial del Álgebra en las Matemáticas caracterizado por el lenguaje y los procesos específicos del Pensamiento Algebraico como la sustitución formal, la generalización y la modelización (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Palarea, 1998; Socas, 1999; Socas *et al.,* 1989, 2007,…).

La transición del pensamiento numérico al algebraico

Entre estas investigaciones podemos destacar los estudios relativos a la relación entre la Aritmética y el Álgebra, en el que tienen un papel esencial el estudio de las dificultades y errores, la búsqueda de significados para el Álgebra, el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas, aspectos determinantes para la organización de la enseñanza del Álgebra y la formación del profesorado.

La transición de la Aritmética al Álgebra, ha sido y es un tema de investigación permanente, en el que el estudio de las dificultades y los errores en el aprendizaje del Álgebra y en las Matemáticas, han sido y son hoy un foco de estudio e investigación en Educación Matemática, en el que a pesar de su antigüedad, de los resultados obtenidos y de los esquemas teóricos utilizados para interpretar esos resultados, hay cuestiones importantes aún no resueltas.

En el estudio de las dificultades y errores podemos distinguir, a grandes rasgos, tres etapas. En una primera etapa la investigación consistía, prioritariamente, en hacer recuentos del número de soluciones incorrectas a una variedad de situaciones problemáticas y en hacer un análisis de los tipos de errores detectados, para proceder a una clasificación que permitiera examinar cómo éstos surgen a partir de la solución correcta, y, hacer inferencias sobre qué factores, especialmente del contenido matemático, pueden haber conducido al error. En una segunda etapa, a partir, aproximadamente, de la década de los ochenta, se toma conciencia de que el error es algo normal en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ello supone indagar sobre los errores, no únicamente desde cuestionarios generales, sino, además, profundizar en el mismo proceso de construcción de los objetos matemáticos por parte de los alumnos como recurso para saber en qué están pensando (Radatz, 1979; Rico, 1995).

En los últimos años, tercera etapa, encontramos estudios en los que se abordan globalmente las dificultades y errores que se dan en el aprendizaje del Lenguaje Algebraico en la Educación Secundaria; es el caso de los del grupo de Álgebra de la Universidad de La Laguna, en la que en la propuesta de trabajo se aborda no sólo un análisis y clasificación de los errores que cometen alumnos de secundaria de forma global, considerando todos los aspectos del Lenguaje Algebraico: operaciones, estructuras y procesos (sustitución formal, generalización y modelización), sino que se estudian los orígenes de los mismos en un marco teórico denominado Enfoque Lógico Semiótico (ELOS), lo que permite arbitrar procedimientos que ayudan a los alumnos a corregir sus errores (Palarea, 1998; Palarea y Socas, 1995 y 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2003; Socas, 1997, 2001, 2007; Socas y Palarea, 1996 y 1997).

Búsqueda de significados para el álgebra

La búsqueda de significados para el Álgebra ha sido también una constante en las investigaciones en Pensamiento Algebraico y ha estado presente en la mayoría de las investigaciones (Kaput, 1989; Kieran, 1992, 2007; Lins, 2001). Distintos autores han tratado de identificar las diferentes fuentes de significados para los sistemas de representación semióticos del Álgebra (Kaput, 1987; Kieran, 2007; Radford, 2004; Socas y Palarea, 1997).

En esta búsqueda de significados para el Álgebra, sobresalen el uso de múltiples representaciones en la formación de conceptos y ha sido destacado por diferentes investigadores; en este sentido, Janvier (1987), Kaput (1987), Duval (1995), Rico, Castro y Romero (1996), Palarea y Socas (1995 y 1998), Socas y Palarea (1996), han realizado investigaciones y han desarrollado aspectos teóricos, con la intención de aclarar los mecanismos de articulación que se dan dentro de un proceso de comprensión del conocimiento matemático. Análogamente el uso de Representaciones Semióticas múltiples constituye una recomendación al desarrollo curricular en casi todas las propuestas en términos parecidos a la recomendación de los estándares (NCTM, 1989, 2000).

El papel referencial del álgebra en las matemáticas

El papel referencial del Álgebra en las Matemáticas se manifiesta en múltiples facetas, pero sobresalen dos que han tenido repercusión en el desarrollo curricular y en la organización de la enseñanza del Álgebra: el lenguaje y los procesos del Pensamiento Algebraico. En relación con los procesos del Pensamiento Algebraico: la sustitución formal, la generalización y la modelización, son los procesos característicos del lenguaje algebraico que se utilizan también en otras partes de las Matemáticas y en otras ramas del saber. Encontramos diferentes estilos de enseñanza del Álgebra que toman como base los procesos de generalización y modelización (Bednarz, Kieran y Lee, 1996).

La generalización y la modelización han sido analizadas por múltiples autores. Por ejemplo, para Mason (1996), la generalización es el corazón de las Matemáticas y consiste en ver tanto los casos particulares en la generalidad como ver la generalidad a través de los casos particulares. Para otros como Radford (1996), la generalización es un procedimiento que llega a una conclusión que, posteriormente, hay que validar, a partir de una sucesión de hechos observados. De esta manera, todo proceso de generalización conlleva una fase de validación.

Sin embargo, la modelización implica, en primer lugar, una fase de formulación que se completa con una de validación, de manera que durante la fase de formulación se examina un fenómeno o situación para establecer alguna relación entre las variables implicadas. Estas relaciones proceden de las observaciones o simplemente de conjeturas hechas sobre la situación bajo estudio. Además, comprende una serie más o menos compleja de transformaciones u operaciones matemáticas que, por último, lleva a un modelo expresado simbólicamente. La fase de validación consiste en comprobar la validez del modelo regresando a la realidad que se supone representa (Janvier, 1996).

Para Freudenthal (1983), todas las Matemáticas están impregnadas de la sustitución formal. Así, la sustitución formal es un instrumento de cálculo algebraico importante a causa de su amplio campo de aplicaciones, que se manifiesta en diferentes procesos matemáticos tales como: generalización, simplificación, eliminación, complicación estructural, particularización; se puede afirmar que para Freudenthal, la modelización y la generalización son partes explícitas de un proceso más general que él describe como sustitución formal.

En Ruano (2003) encontramos un estudio sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en Matemáticas con alumnos de Educación Secundaria, en el que se analizan las dificultades de estos alumnos, en términos de errores, en los diferentes procesos, y, se comparan los resultados de los alumnos de ESO con los de Bachillerato, aportando algunas implicaciones didácticas para su implementación en estas etapas educativas.

En Ruano, Socas y Palarea (2015) se analiza el proceso de generalización algebraica desde las perspectivas epistemológica, semiótica y fenomenológica que proporciona el enfoque lógico semiótico (ELOS) y se estudian las dificultades y errores de los alumnos y la organización de la enseñanza de la generalización algebraica en la secundaria.

Consideraciones

El grupo de Pensamiento Algebraico de la Universidad de La Laguna, estudia el Álgebra desde la óptica de la multiplicidad de vínculos que este pensamiento tiene con el Pensamiento Numérico y Analítico, de manera que los problemas derivados de la enseñanza y aprendizaje de estos tres campos, numérico, algebraico y analítico, tienen aspectos comunes y las bases teóricas y metodológicas para su estudio, poseen también componentes afines.

En resumen, los Focos de Investigación en Pensamiento Algebraico en la Universidad de La Laguna en Álgebra, están orientados a la transición del Pensamiento Numérico al Algebraico; al lenguaje y a los procesos de pensamiento algebraico: sustitución formal, generalización y modelización, que constituyen el papel referencial del Álgebra en las Matemáticas; y a la búsqueda de significado para los objetos del Álgebra.

Estas investigaciones ponen de manifiesto, la necesidad de progresar en la enseñanza y el aprendizaje del Álgebra tomando en consideración tanto la concepción procedimental (operaciones y procesos) como la estructural, que, por otra parte, coincide con el desarrollo histórico del Álgebra. Sin embargo, aunque diferentes propuestas enfatizan las consideraciones estructurales del Álgebra, la mayoría de los estudiantes no alcanzan esta meta. Se acepta que el paso de la Aritmética al Álgebra queda determinado como el tránsito de lo procedimental a lo estructural, pero este tránsito podría conducir a los mismos resultados si no se interpreta correctamente.

Se desarrolla una propuesta de tránsito de la Aritmética al Álgebra desde una perspectiva global que comprende el desarrollo del pensamiento operacional, estructural y procesual tanto en la Aritmética como en el Álgebra, mediante un acercamiento semiótico al lenguaje algebraico que integre los contextos numérico y geométrico, en un marco del Álgebra como Lenguaje, en el que las fuentes de significado y los sistemas de representación juegan un papel determinante. Los sistemas de representación que se utilizan para dar significado al Lenguaje Algebraico, además de considerar su carácter conceptual y procedimental, abordan también la necesidad de considerar el Álgebra como una actividad más de los alumnos, y los signos, como un instrumento específico y mediador de la actividad.

Pensamiento Numérico

Dentro del ámbito de la Educación Primaria, se encuentran las investigaciones relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas de personas con síndrome de Down (en adelante SD), desarrolladas por Alicia Bruno Castañeda y María Aurelia Noda Herrera.

Esta línea de investigación se inicia en el año 2003. Las autoras comenzaron realizando reuniones periódicas con pedagogos y maestros vinculados a la Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21 (en adelante ATT21) con el objetivo de reflexionar sobre cómo abordar la enseñanza de las Matemáticas de niños y jóvenes con SD y elaborar materiales y secuencias de aprendizaje adaptadas a esta población (Acosta *et al.,* 2006).

Luego se inicia una etapa de colaboración con investigadores del Departamento de *Ingeniería de Sistemas y Automática y Arquitectura y Tecnología de Computadores* de la Universidad de La Laguna. Se formó un equipo de investigación con el objeto de diseñar herramientas informáticas para el aprendizaje y el refuerzo de contenidos matemáticos para personas con SD. El equipo de investigación creó un Tutorial Inteligente diseñado para reforzar los conceptos lógicos y numéricos correspondientes al currículo de la Educación Infantil e inicio de la Primaria (Bruno *et al.,* 2006). El Tutorial incorpora técnicas de Inteligencia Artificial de manera que es capaz de presentar actividades según las características y expectativas de cada estudiante. Sigue un proceso que consiste en determinar, a partir de las características de cada alumno, cuáles son los objetivos de aprendizaje. De esta manera, el conjunto de actividades para un mismo objetivo no es estándar para todos los alumnos, sino que depende de las características de cada uno de ellos. En este Tutorial se establecieron tres grupos diferentes: alumnos con miedo a fallar, alumnos con alta motivación y alumnos hiperactivos.

Posteriormente, se creó *Divermates*, una herramienta informática que contiene una pizarra digital, diseñada para trabajar operaciones y problemas aritméticos de sumas y restas (González *et al.,* 2010). La pizarra dispone de un sistema automático que registra las acciones y los resultados obtenidos por los alumnos y detecta los errores cometidos, así como las causas potenciales de los mismos. Con la información obtenida se genera un informe personalizado para cada alumno que sirve de orientación al profesor. La presentación de los enunciados de los problemas se hace en forma textual, gráfica y sonora, y esto posibilita repetir el enunciado las veces que sea necesario. La barra de números, bolas y signos, permite a los alumnos efectuar los cálculos de la misma forma a cómo lo aprendieron con lápiz y papel.

Con estas herramientas informáticas se realizaron diferentes investigaciones en las que participaron estudiantes pertenecientes a la ATT21 con dos poblaciones diferentes: niños entre 5 y 11 años, integrados en diferentes niveles educativos según la edad, y jóvenes entre 15 y 26 años, que por su edad ya no están escolarizados, pero acuden a dicha Asociación para realizar diferentes actividades, entre ellas, apoyo escolar.

En estos últimos años, la investigación en esta población se ha centrado en la comprensión del *sistema de numeración decimal*. El objetivo ha sido realizar un estudio cognitivo en alumnado con SD en tareas sobre el sistema de numeración decimal y adaptar material curricular. Para ello se han diseñado y elaborado secuencias de enseñanza para el aprendizaje del sistema de numeración decimal, adaptadas a este alumnado, siguiendo el modelo de Jones et al. (1996). Ello ha implicado el diseño de protocolos de evaluación del conocimiento adquirido por el alumnado en las distintas etapas del desarrollo de la secuencia de aprendizaje y la realización de la misma, con entrevistas al alumnado que ha seguido dicha secuencia (Bruno y Noda, 2012).

Otra línea de investigación sobre el aprendizaje numérico se sitúa en alumnado de Educación Secundaria Obligatoria. En esta etapa educativa se ha analizado especialmente la enseñanza y aprendizaje de los números negativos y, en los últimos años, se ha centrado en el desarrollo del sentido numérico, de manera más amplia.

Con respecto a este campo de números se han analizado secuencias de enseñanza que tienen en cuenta tres dimensiones del conocimiento numérico: la abstracta (uso de los símbolos y conocimiento de las reglas), la representación en la recta numérica y los contextos que dan sentido a los números negativos y a las operaciones. Bajo estas tres dimensiones se han realizado estudios de aula con el diseño de secuencias de aprendizaje, basado en la resolución de problemas, así como estudios de tipo cognitivo. En todos ellos se han observado los logros, las dificultades y los errores del alumnado, estableciendo perfiles de comprensión de los números negativos y las operaciones (Bruno y Martinón, 1999).

Las investigaciones sobre números negativos se han extendido a los futuros profesores de primaria, población en la que se han analizado las estrategias de resolución de problemas aditivos simples con números negativos. Los estudios con esta población muestran dificultades no superadas respecto a los números negativos en las etapas de enseñanza obligatoria, como errores en las reglas operatorias o poco rigor en la escritura matemática de las operaciones (Almeida y Bruno, 2014).

El *sentido numérico* hace referencia a la comprensión general de una persona sobre los números y las operaciones, y se define como una red conceptual, bien organizada, que permite relacionar los números y las operaciones, sus propiedades y resolver los problemas de una forma creativa y flexible. Las investigaciones sobre sentido numérico realizadas en la Universidad de La Laguna han tenido como población de interés a los futuros profesores de secundaria (alumnado del grado en Matemáticas), estudiando las estrategias de sentido numérico que manifiestan, comparándolas con las de futuros profesores de primaria (presentadas en estudios previos). Los resultados muestran bajos niveles de uso de estrategias propias de un buen de sentido numérico, teniendo en cuenta el nivel de conocimiento matemático de la población analizada, pero también una mayor variedad de razonamientos, en comparación a los futuros docentes de primaria (Almeida, Bruno y Perdomo-Díaz, 2014).

En la actualidad la investigación sobre sentido numérico se ha extendido a alumnado de Secundaria Obligatoria. Se analizan las diferentes estrategias por parte de estudiantes de Secundaria y la tendencia que tienen los mismos a escoger razonamientos de sentido numérico o basado en reglas o algoritmos. Ante una variedad de estrategias encontradas se observa como el tipo de actividad condiciona la elección de las mismas, haciendo uso de reglas y algoritmos en aquellas que resultan similares a las actividades tradicionales de aula. El fin último de la investigación es establecer perfiles de razonamiento de los estudiantes en tareas susceptibles de resolverse con sentido numérico.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Plan Nacional de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación: «Modelos de competencia formal y cognitiva en pensamiento numérico y algebraico de alumnos de Primaria, Secundaria y de Profesorado de Primaria en formación» (EDU2011-29324).

Referencias

Acosta, L., Bruno, A., González, A., Hernández, I., Martín, N., Noda, A. y Padilla, V. (2006). Propuesta didáctica. Desarrollo de habilidades matemáticas en la población con síndrome de Down en la etapa educativa de Educación Infantil. *Asociación Tinerfeña de Trisómicos 21*. El Productor S. L. Técnicas gráficas.

Almeida, R. y Bruno A. (2014). Strategies of pre-service primary school teachers for solving addition problems with negative numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *45*(5), 719–737.

Almeida, R., Bruno A. y Perdomo-Díaz, J. (2014). Estrategias de sentido numérico en estudiantes del Grado en Matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *32*(2), 9–34.

Bednarz, N., Kieran, C. y Lee, L. (Eds.) (1996). Approaches to Algebra. *Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer.

Bruno, A. y Martinón, A. (1999). The teaching of numerical extensions: the case of negative numbers. International *Journal in Mathematic Education Science and Technology, 30*(6), 789–809.

Bruno, A. y Noda, A. (2012). Estudio de un alumno con síndrome de Down en la comprensión del sistema de numeración decimal. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, *1*(2), 5–22.

Bruno, A., Noda, A., Aguilar, R., González, C., Moreno, L. y Muñoz, V. (2006) Análisis de un tutorial inteligente sobre conceptos lógico-matemáticos en alumnos con Síndrome de Down. *RELIME, Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *9*(2), 211–226.

Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels*. Suiza: Peter Lang.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomemology of mathematical structures*. Dordrecht: Kluwer.

González, C., Guerra, D., Sanabria, H., Moreno, L., Noda, A. y Bruno, A. (2010). Automatic system for the detection and analysis of errors to support the personalized feedback. *Expert Systems with applications*, *37*(1), 140–148.

Janvier, C. (1987). Representations and Understanding: The notion of Function as an example. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the Teaching and Learning of Mathematics*, (pp. 67–71). Lawrence Erlbaum Associates.

— (1996). Modeling and the initiation into Algebra. En Bednarz et al (Eds.). *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching,* (pp. 225–236). Dordrecht: Kluwer.

Jones, G., Thornton, C., Putt, I., Hill, K., Mogill, A., Rich, B. y Van Zoest, L. R. (1996). Multidigit Number sense: a Framework for instruction and assessment. *Journal fort Research in Mathematics Education*, *27*(3), 310–336.

Kaput, J. (1987). Representation systems and mathematics. En C. Janvier (Ed.*), Problems of representation in the Teaching and Learn-*

ing of Mathematics. Lawrence Erlbaum Associates.

— (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*. Reston. VA: NCTM. Hillsdale, LEA.

Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. En Grows, D.A. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 390–419). New York: Macmillan Publishing Company.

— (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. En F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 707–762). Reston, Virginia: NCTM e IAP.

Lins, R. (2001). The production of meaning for algebra: A perspective based on a theoretical model of semantic fields. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds*.), Perspectives on School Algebra.* Dordrecht: Kluwer.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*. London: Kluwer Academic Publishers.

N. C. T. M. (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

— (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis doctoral. Servicio de publicaciones. Universidad La Laguna.

Palarea, M. M. y Socas, M. M. (1995). Sistemas de Representación en la Resolución de Problemas Algebraicos. *Suma. 20*, 29–35.

— (1998). Operational and conceptual abilities in the learning of algebraic language. A case study. *Proceedings of the PME-22. 3*, pp. 327–334. Stellenbosh, South Africa.

Radatz, H. (1979). Errors analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, *9,* 163–172.

Radford, L. (1996). The roles of geometry and arithmetic in the development of algebra: Historical remarks from a didactic perspective. En N. Bednarz et al (Eds.), *Approaches to Algebra. Perspectives for Research and Teaching*, pp. 39–54. Dordrecht: Kluwer.

— (2004). Syntax and meaning . En M. J. Hoines y A. B. Fuglestad, *Proceedings of the PME-28*, v. 1, (pp. 161–166). Bergen, Norway.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Educación Matemática*, (pp. 69–96). Bogotá: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L., Castro, E. y Romero, I. (1996). The role of representation systems in the learning of numerical structures. *Proceedings PME-XX*, vol. 1, (pp. 87–102). València.

Ruano, R. (2003). *Sobre los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en matemáticas: consecuencias didácticas*. Tesina de Licenciatura. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

Ruano, R., Socas, M. M. y Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *Investigación en Educación Matemática.* En E. Castro (Coord.), *Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (SEIEM), (pp. 311–322). Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada.

— (2015). El proceso de generalización en alumnos de secundaria. *UNO, 68,* 18–29.

SOCAS, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L. (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria,* (pp. 125–154). Barcelona: Horsori.

— (1999). Perspectivas de investigación en Pensamiento Algebraico. *Actas del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática,* (pp. 261–282). Valladolid: Diputación de Valladolid.

— (2001*). Investigación en Didáctica de la Matemática vía Modelos de competencia. Un estudio en relación con el Lenguaje Algebraico*. Departamento de Análisis Matemático. Universidad de La Laguna.

— (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las Matemáticas. Análisis desde el enfoque Lógico Semiótico. *Investigación en Educación Matemática XI*, 9–52.

SOCAS, M. M. y PALAREA, M. M. (1996). El uso de sistemas de representación con imágenes en la Enseñanza-aprendizaje del Álgebra escolar. *Actas del Simposium Internacional sobre la «Matemática actual». XXV años de Matemáticas en la Universidad de la Laguna*, (pp. 507–521). Secretariado de Publicaciones de la Universidad de La Laguna.

— (1997). Las fuentes de significados, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *UNO*. Lenguajes Algebraicos, *14,* 7–24.

SOCAS, M. M. y otros. (1989). *Iniciación al Álgebra*. Madrid: Síntesis.

SOCAS, M. M., RUANO, R., PALAREA, M. M. y HERNÁNDEZ, J. (2007). Treinta años de investigación en Pensamiento algebraico. Una propuesta de agenda. En J. E. Sagula y otros (Eds.). *Memorias del IX simposio de educación matemática. Full Paper: Cognición y aprendizaje en Matemáticas*, (pp. 751–774). Buenos Aires: Edumat.