Luis Rico, María C. Cañadas, Antonio Marín y M. Teresa Sánchez (Eds.)

Investigaciones en Didáctica de la Matemática

Homenaje a Moisés Coriat

Moisés Coriat

INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Moisés Coriat

Luis Rico
María C. Cañadas
Antonio Marín
María Teresa Sánchez
(Eds.)

INVESTIGACIONES EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

Homenaje a Moisés Coriat

Bracho López, Rafael
Cañadas Santiago, María C.
Carrillo Yáñez, José
Castro Martínez, Encarnación
Castro Martínez, Enrique
Castro Rodríguez, Elena
Claros Mellado, F. Javier
Coriat Benarroch, Moisés
Del Río Cabeza, Aurora
Fernández Cano, Antonio
Fernández García, Francisco
Fernández Plaza, José A.
Flores Martínez, Pablo
Gallardo Romero, Jesús
Genaro Belmonte, Emilio
Gómez Guzmán, Pedro
González Marí, José L.
Guerrero Hidalgo, Salvador
Gutiérrez Pérez, José
Lupiáñez Gómez, José L.
Marín del Moral, Antonio
Moreno Verdejo, Antonio
Ortega del Rincón, Tomás
Porres Tomé, Mario
Ramírez Uclés, Rafael
Rico Romero, Luis
Romero Albaladejo, Isabel
Ruiz López, Francisco
Sánchez Compaña, María Teresa
Sancho Gil, Juana María
Scaglia, Sara
Simó Gil, Nuria
Torralbo Rodríguez, Manuel

Granada, 2016

Colección «Didáctica de la Matemática»
Diseño de portada: José L. Lupiáñez

Este libro debe ser citado como:
Rico, L., Cañadas, M. C., Marín, A., Sánchez, M. T. (Eds.) (2016).
Investigaciones en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Moisés Coriat. Granada: Comares.

Editorial Comares, S.L.
Polígono Juncaril
C/ Baza, parcela 208
18220 • Albolote (Granada)
Tlf.: 958 465 382
http://www.editorialcomares.com • E-mail: libreriacomares@comares.com
https://www.facebook.com/Comares • https://twitter.com/comareseditor

ISBN: 978-84-9045-436-7 • Depósito legal: Gr. 979/2016

Fotocomposición, impresión y encuadernación: COMARES

ÍNDICE

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

INTRODUCCIÓN

Moisés Coriat no fue ajeno a la época agitada de movimientos de innovación educativa que se desarrollaron alrededor de la promulgación de la LOGSE y de su posterior implantación progresiva. Por el contrario, el entonces profesor de Secundaria de eterna apariencia veterana, ya se había interrogado cómo hacer productiva la enseñanza de las Matemáticas, como un quehacer que, desde un conocimiento profundo de la materia por parte del profesor, generara el deseado aprendizaje en el alumnado. Especialmente en el terreno de la enseñanza de la Geometría, del Álgebra, del Análisis y de las Estructuras Numéricas, ámbitos en los que Moisés desplegó sus ideas, transformadas en múltiples ocasiones en recursos manipulativos que algunos aún usamos.

Contribuyó como autor en varios de los libros editados por la Editorial Síntesis, en las colecciones *Matemáticas, Cultura y Aprendizaje* y *Educación Matemática en Secundaria*. También trabajó en la obra colectiva *Aportaciones al debate sobre las Matemáticas en los 90*, editada por Mestral. Participó en el Curso de Formación de Formadores, dirigido a dotar a los Centros de Profesorado de un personal cualificado para apoyar la renovación que impulsaba la LOGSE. La selección de Moisés para participar en dicho curso no tenía lugar a dudas. Sus aportaciones en las sesiones, su discurso en reuniones de trabajo o informales, trascendían la mera pregunta o la tarea concreta, ya que se adentraban en consideraciones de gran calado que daban nueva vida a los debates.

Tras la finalización del curso participó, junto a otros compañeros, en la elaboración de materiales curriculares y para el desarrollo de la normativa LOGSE en Andalucía, mostrando durante estos años una envidiable capacidad de trabajo y creatividad ante tareas de alta dificultad. Gracias a su saber, predisposición, humanidad y buen carácter hizo más fácil la cooperación y el trabajo de un grupo de profesores de matemáticas disperso por toda la geografía andaluza.

Por aquella época (1989), Moisés se incorporó al Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, concursando a un programa de promoción del profesorado de secundaria en la Universidad. Moisés había realizado, en 1974, su tesis doctoral en Ciencias Físicas en la Universidad de París. No obstante, cursó los estudios del programa de doctorado de Didáctica de la Matemática de la UGR en el bienio 1990-1992. Con posterioridad convalidó su tesis, lo que le permitió integrarse como profesor al Programa de Doctorado y, más tarde, del Master de Investigación en Didáctica de la Matemática de la UGR.

Desde su incorporación a la Universidad de Granada, Moisés pertenece al Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico (FQM-193)* del Plan Andaluz de Investigación y de Innovación (PAIDI), dirigiendo cuatro tesis doctorales en la UGR. Tres de ellas sobre Didáctica del Análisis Matemático en las que se refleja su impronta y su profundidad como investigador y una cuarta sobre integración de patrones y estructuras numéricos y geométricos. También fue co-director de otro trabajo en la Universidad de Barcelona.

En la década de los 90 concursa y obtiene plaza de Profesor Titular de Universidad de Didáctica de la Matemática en la UGR, donde desarrolla su actividad docente en las titulaciones de Grado de Maestro de Educación Infantil y de Maestro de Educación Primaria, en sus diversas especialidades, en la Licenciatura de Matemáticas, impartiendo la asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato* y en la Licenciatura de Pedagogía. Su cualificación profesional, su curiosidad intelectual y sus intereses docentes le llevaron a trabajar en las asignaturas de todos los cursos y especialidades en los que se ve involucrado el Departamento de Didáctica de la Matemática durante estos años. El profesor Moisés Coriat estimula la creatividad y demanda imaginación a sus estudiantes. Sus aportaciones docentes son críticas y exigentes, singulares e innovadoras, expresión de su personalidad intelectual rigurosa e indagadora, a un mismo tiempo, siempre a disposición de la formación de los maestros y formadores responsables de la cultura matemática básica de los ciudadanos.

En el año 2001 fue nombrado Director del Secretariado de Formación del Profesorado, puesto que ocupa hasta el año 2007. En estos años establece los objetivos estratégicos de formación para el profesorado de la UGR, que resume en «afrontar con éxito y eficiencia situaciones de docencia e investigación universitaria, junto con afrontar con éxito y eficiencia situaciones de gestión universitaria». Al mismo tiempo, coordinó la organización y gestión del Certificado de Aptitud Pedagógica de la UGR, estableciendo bases que servirán de apoyo posterior para la planificación del Master de Profesorado en Educación Secundaria. Durante estos años la visión didáctica, la capacidad organizadora y el sentido de la honestidad de Moisés brillaron con luz propia, alcanzando un alto grado de racionalidad y eficacia en la gestión de recursos tanto para la formación del profesorado de la UGR como en la revisión y mejora de la formación inicial de los profesores de Educación Secundaria obligatoria y post obligatoria.

En su trabajo como investigador reconocemos lo que de sí mismo expresa Descartes, en el Discurso del método: «Siempre sentía un deseo extremado de aprender a distinguir lo verdadero de lo falso, para ver claro con mis actos y andar seguro por esta vida».

Gran parte de la producción de Moisés Coriat se puede encontrar en la página web del Grupo de Investigación «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», http://fqm193.ugr.es/, grupo FQM-193 del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía; también en la base de datos de Dialnet: http://dialnet.unirioja.es/, así como en redes sociales tales como Facebook o Researchgate: http://www.researchgate.net/profile/Moises_Coriat-Benarroch.

Moisés Coriat fue socio fundador de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) en 1996. De su actividad permanente en esta Sociedad encontramos la presencia continuada de su participación en las Actas anuales de los Simposios realizados por la SEIEM, así como en las publicaciones de los Seminarios realizados por sus grupos de investigación.

Moisés, compañero de trabajo y amigo del café de cada día, fue también la persona exquisita al tratar temas delicados, interesada por la vida de los demás y su familia, muy poco dado al comentario superficial, a hablar de sí mismo o de los suyos pero dejando entrever siempre su amor y respeto por ellos. Su gran humanidad afloraba bien en las distancias cortas. Tras jornadas agotadoras de trabajo, cuando todos ya creíamos algo acabado, siempre tenía algo que añadir para mejorar, ofreciéndose el primero para rematar el artículo o el listado de datos. Su empeño por la búsqueda del trabajo bien hecho se veía recompensado, al finalizar éste, con una conversación.

Su figura es la del profesor reflexivo y comprometido con la innovación, la del investigador de perfil exigente y riguroso, con sentido práctico para acomodar la vida (en este caso la enseñanza) a las nuevas circunstancias. Su actividad profesional es la del observador que sabe filtrar la información recibida; es también la del amigo que te hace crecer, que no te halaga, que te interroga y que expresa su aprecio mediante su aportación crítica a tus propuestas.

José Carrillo, Antonio Marín y Luis Rico

FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES

REFLEXIONES CON MOISÉS CORIAT SOBRE LA FORMACIÓN DEL PROFESOR ESPAÑOL DE MATEMÁTICAS DE SECUNDARIA

Reflections on Spanish secondary mathematics teachers with Moisés Coriat

José Carrillo Yáñez[a], *Moisés Coriat Benarroch*[b] *y Pablo Flores Martínez*[b]
[a]Universidad de Huelva, [b]Universidad de Granada

Resumen

Este capítulo narra reflexiones compartidas entre los tres autores, previas a la implementación del actual máster de formación del profesorado de Educación Secundaria. Conviene, por tanto, situar en ese contexto las opiniones vertidas, aunque, en muchos casos se apreciará que los cambios no han sido sustanciales. No hemos querido alterar significativamente el texto que en su día escribimos, fruto de dichas reflexiones.
Palabras clave: *didáctica, matemáticas, práctica educativa, profesorado, educación secundaria*.

Abstract

This chapter deals with reflections shared by the three authors, before the implementation of the current master of secondary teacher training. These thoughts, therefore, should be situated in that context, although in many cases the differences between that context and the current situation have not been meaningful. We have decided not to alter the text core, which was written years ago, as a product of the above mentioned reflections.
Keywords: *didactics, mathematics, educational practice, teachers, secondary education.*

Introducción

Partimos de la hipótesis de que la formación de profesores de matemáticas de enseñanza secundaria afronta dificultades y problemas estructurales:

- La administración educativa ha ampliado (en algunos casos como el español) los títulos que permiten acceder a la tarea de profesor de matemáticas de secundaria.
- Las investigaciones en Educación Matemática proponen metodologías que exigen del profesor una preparación específica.

— Los modelos actuales de formación descartan en muchos casos las nuevas tendencias en la enseñanza de la matemática.

A continuación planteamos con más detalle algunas cuestiones que se derivan de los obstáculos mencionados y, en ocasiones, proponemos algunas respuestas en las que se observa la presencia de la Didáctica de la Matemática como área de conocimiento.

En primer lugar («Contextos»), describimos brevemente, en términos cualitativos, algunos puntos de referencia sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Seguidamente («Conocimiento profesional»), nos orientamos a determinar elementos esenciales del conocimiento profesional. Por último («Sobre estrategias de formación»), damos algunas sugerencias sobre cómo lo dicho sobre conocimiento profesional sería aplicable a la situación descrita en los contextos.

CONTEXTOS

Sobre las condiciones para ser profesor de matemáticas de secundaria

Al profesor de matemáticas de secundaria se le exigen varias «competencias»: en matemáticas, en cuestiones relacionadas con la enseñanza (por ejemplo, resolución de problemas) y en lo relativo al nuevo sistema escolar. Se reconoce la necesidad de una formación no sólo matemática. Nuestra experiencia en cursos de formación permanente de profesores indica que algo más de la mitad del profesorado ha aceptado tal necesidad.

Cambios en la consideración de las matemáticas escolares

La perspectiva de los nuevos sistemas escolares ha cambiado. El conocimiento escolar ya no se considera neutral, formativo y selectivo, sino socialmente útil, formativo e integrador. Posee una componente disciplinar y otra práctica (Cuadro 1), cuya dosificación es objeto de investigación curricular y debate profesional.

Conocimiento matemático escolar	
Componente disciplinar	**Componente práctica**
1. Conceptual	1. Se ocupa de hechos concretos
2. General, Universal	2. Contextual (en su certeza)
3. Abstracto y deductivo	3. Perceptual e inductivo
4. Intemporal	4. Contingente
5. Verdadero	5. Validez limitada
6. No afectado por emociones o deseos	6. Los principios se subsumen ante las situaciones

Cuadro 1. *Adaptado de Kessels y Korthagen (1996)*

Por ejemplo, en el núcleo de funciones, la inclinación disciplinar conduciría a desarrollar la secuencia: concepto, intervalos de definición, propiedades, operaciones,... y aplicaciones en problemas de enunciado verbal. La inclinación práctica se iniciaría manejando dependencias concretas entre magnitudes. Ambos enfoques conducen, teóricamente, a los mismos aprendizajes; en el primero la abstracción es una condición necesaria, mientras que en el segundo es el final del proceso.

El alumno de secundaria comienza con conocimientos más próximos a la componente práctica que a la disciplinar y, progresivamente, la presión del profesorado conduce a dar un peso importante, si no esencial, a la disciplina.

El marco de trabajo del profesor. La cultura escolar

La ponderación de estas componentes disciplinar y práctica está mediatizada por la cultura escolar del Centro. Ésta se caracteriza como una subcultura de la sociedad, ligada a la enseñanza reglada, relacionada con el entorno del que se nutre básicamente (alumnado), marcada por liderazgos de profesore especialmente caracterizados por su capacidad para convencer, negociar, interpretar y resumir ante otros profesores, padres o alumnos (Coriat y Martínez, 1997).

Las culturas escolares no están invertebradas; por el contrario, es posible estudiarlas desde diferentes perspectivas y atribuirles dimensiones (laboral, educativa, social; no independientes), aunque no entraremos aquí en su desarrollo.

El marco de formación del estudiante para profesor

En este trabajo nos referimos al marco español. Otros marcos nacionales de formación del profesorado de secundaria enfatizan más las cuestiones educativas que la titulación específica de referencia. Por ejemplo, en diversos países de latinoamérica hay titulaciones universitarias que forman al futuro profesor de secundaria.

En España, la formación inicial del profesor de secundaria consta de una titulación (grado de matemáticas, por ejemplo) y un curso psicopedagógico posterior a la graduación. Este curso (90 horas teóricas y 90 prácticas en la mayoría de los casos) incluye una escasa formación en didáctica de la matemática (30 horas). Está en proyecto un nuevo curso de unas 600 horas, donde la presencia del área de didáctica de la matemática puede llegar a rondar las 200 horas, pero hay pocas esperanzas de que llegue a implantarse; si esto sucediera, mejoraría (supuestamente) la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria pero, por su propia concepción, la formación del profesor seguiría siendo un añadido de su titulación principal. Esto supone orientar durante un año hacia la Educación Matemática unos estudios que durante 4 años se han orientado en una dirección bastante diferente (la ciencia matemática).

Conocimiento profesional

Empezamos con una descripción obvia: el conocimiento profesional es el conocimiento que un profesor pone en juego durante su experiencia profesional.

Esta descripción incluye dos términos clave (conocimiento, experiencia profesional) y su relación (ver Cuadro 2):

Experiencia profesional ⟵⟶ Conocimiento (Relación)

Cuadro 2. *Esquema de la relación entre experiencia y conocimiento*

Pertinencia e intencionalidad del conocimiento

En concordancia con Delval (1997): «El conocimiento es un instrumento, una fuerza que nos permite actuar sobre la realidad, interpretarla y cambiarla» (p. 84).

Todo profesor actúa sobre la realidad de su entorno, la interpreta y modifica. ¿Puede mejorarla? Antes de contestar, debe entenderse lo que significa el verbo mejorar. Como profesional que trabaja con personas y conocimientos disciplinares curricularmente estructurados, la acción del profesor se halla inmersa en una cultura escolar. Pero no cabe duda que el profesor pretende que sus alumnos aprendan; si quiere mejorar algo con su actuación, el destinatario principal de esa mejora no puede ser otro que cada uno de sus alumnos.

Esto pone de manifiesto varias cosas:

- El conocimiento que pone en juego el profesor es más profesional que científico.
- Es un conocimiento teleológico, finalista, dirigido por el impulso de los aprendizajes de los alumnos.

Por ello el conocimiento matemático del profesor se subordina a sus capacidades o destrezas para comunicar, compartir y promover contextos y motivación de manera que sus alumnos aprendan matemáticas educándose.

La complejidad resultante de este saber profesional, junto con la necesidad de un enfoque integrador de diferentes saberes, ha sido indicada por muchos investigadores como Shulman (1986, 1987, 1993) o Llinares (1991). Houdement y Kuzniak (1996) mencionan tres saberes en el proceso de formación de maestros en Francia: saber matemático, saber didáctico y saber pedagógico. Para ellos, los dos primeros son teóricos, mientras que el último es práctico (p. 303).

Una cuestión básica es cómo se produce esa integración de saberes. Un punto de vista razonable consiste en proponer los diferentes conjuntos estructurados y especializados de conocimientos y dejar que la propia experiencia de cada profesor genere alguna integración; esto es muy costoso en tiempo de formación académica y no previene la posibilidad de que el profesor así formado efectúe de manera definitiva una jerarquía entre esos conocimientos. Lappan y Theule-Lubienski (1992), citando a Feiman-Nemser (1983), exponen una limitación de la formación inicial: la teorización de las materias, que deja «a la vida profesional» la responsabilidad de la integración entre teoría y práctica, entre conocimiento académico tradicional y conocimiento profesional:

> Es la confluencia de consideraciones varias lo que conduce a un razonamiento pedagógico defendible por parte de los profesores. Sin embargo, en los programas de formación del profesor normalmente involucramos a los estudiantes en cada uno de estos dominios

> de forma aislada de los otros. La integración de ese conocimiento de forma que ayude a los profesores a razonar sobre las aulas y los estudiantes se suele dejar a las experiencias de enseñanza de los estudiantes. La evidencia sugiere que éste no es un medio efectivo para ayudar a los profesores a ver las conexiones entre los varios dominios de conocimiento que poseen. (Feiman-Nemser, 1983, p. 253)

En este trabajo nos inclinamos por un acercamiento situacional a esa integración. Por una parte, al profesor en formación le da también la posibilidad de una reflexión crítica sobre los que serán sus problemas de enseñanza; por otra, le permite comprender diferentes concepciones de las matemáticas, que están ligadas a características culturales del grupo humano con el que trabaja.

Encontramos así una nueva indicación acerca del conocimiento profesional: se trata de un conocimiento reflexivo orientado a favorecer el aprendizaje de aspectos matemáticos en secundaria, así como de contenidos más generales (sirviéndose de las fuentes del conocimiento escolar). La clasificación propuesta por Sullivan y Mousley (1994) es lo suficientemente sencilla como para despertar nuestro interés; detectaron seis componentes relevantes de una enseñanza de matemáticas de calidad.

Con respecto a la relación entre el conocimiento profesional y el escolar, consideran que la construcción de la comprensión es el foco de cada una de las otras componente. Motivación, resolución de problemas y comunicación pueden considerarse actividades del estudiante, mientras que promoción del desarrollo profesional y organización del aprendizaje están dirigidas al profesor, pero no sin poner de relieve la existencia de relaciones reflexivas entre aspectos como motivación y resolución de problemas y de convergencias entre la actividad del profesor y la del estudiante.

— Establecer localmente (en los niveles de la cultura escolar del centro y, dentro de ésta, en el nivel del grupo-clase) cuál es su papel y el del alumno y cómo y qué se evalúa.
— Ayudar a la investigación a conformar perfiles generales deseables en los profesores, teniendo especial incidencia en este terreno el fomento de adecuados valores y actitudes, y el desarrollo de concepciones sobre la matemática y su enseñanza acordes con las exigencias del conocimiento escolar.

El acercamiento situacional mencionado anteriormente no rechaza los distintos saberes; confía en que sea posible disponer de marcos teóricos que sirvan al profesor para dar sentido a su experiencia educativa. En palabras de Russell (1994), «aprender de la experiencia no es ni simple ni directo y ciertamente no automático» (p. 205).

Además, como pusieron de relieve Edwards y Mercer (1987), en muchas ocasiones la experiencia suscita un conocimiento mecánico en lugar del deseado conocimiento de los principios básicos. Hay investigaciones, como la de Fernandes y Vale (1994), que ponen de relieve cómo el contexto educativo condiciona las concepciones en la práctica de los profesores. En efecto, los dos profesores noveles analizados, ambos con una concepción profesada investigativa, decantan sus prácticas de forma diferente. Uno de ellos, inmerso en un contexto tradicional, no usa los problemas como metodología base, apoyándose fundamentalmente en el libro de texto. Por su parte, el segundo, en un contexto completamente diferente, desarrolla una práctica más consecuente con sus concepciones profesadas. El contexto condiciona de forma ineludible, pero el profesor debe aprender a analizarlo de forma crítica, detectando «fisuras» y tomando decisiones con objeto de intervenir sobre el grupo humano de una manera efectiva que no esté en contradicción con sus convicciones. El NCTM (1991) propone cuatro asuntos, relacionados con la toma de decisiones, que los profesores necesitan saber para ser capaces de actuar sobre ellos: elegir tareas matemáticas valiosas, organizar el discurso del aula, crear un entorno para aprender, y analizar la enseñanza y el aprendizaje.

El Cuadro 2 podemos ahora ampliarlo, lo que hacemos en el Cuadro 3:

Intencional	←← **Conocimiento**	←←
Crítico	×	Marco teórico
Reflexivo	Decisiones	Interacciones
Determina roles	×	Contextos
→→	**Experiencia** →→	Situaciones

Cuadro 3. *Esquema ampliado de la relación entre experiencia y conocimiento*

Componentes y tipos de conocimientos

La literatura de investigación parece decantarse por la distinción entre componentes y tipos de conocimiento. El profesor de matemáticas pone en juego al menos tres componentes del conocimiento (disciplinar, social y pedagógica):

1. matemáticas (en nuestro caso);
2. estudiantes (el grupo humano y sus individuos);
3. pedagogía de las matemáticas.

Es cierto que no hay unanimidad en los términos usados para referirse a las componentes, su ámbito o sus relaciones. Por ejemplo, la componente curricular incluiría cuestiones matemáticas (contenidos), pedagógicas (metodología, objetivos) y conocimientos sobre los estudiantes (modelos de evaluación que incluyen el seguimiento de los alumnos y atención a la diversidad); por otra parte, el «pedagogical content knowledge» (Shulman, 1986, 1987, 1993) se situaría entre las rutinas (que tienen que ver con la conducta) y las teorías implícitas (que sustentan las concepciones). (Sobre rutinas y teorías implícitas, ver Porlán, Rivero y Martín, 1997).

A las tres componentes mencionadas le añadimos una más:

4. actitudinal (actitudes y valores).

Al igual que el «conocimiento didáctico del contenido», esta componente bien podría entenderse inmersa en las rutinas y las teorías implícitas, pero es conveniente hacer mención especial a ella por la importancia de las actitudes y los valores a la hora de crear entornos propicios para el aprendizaje.

Elstgeest, Goffree y Harlen (1993) distinguen cinco tipos de conocimiento: conocimiento social (los nombres de las cosas), conocimiento físico (relacionado con la experiencia y permite la predicción), conocimiento lógico (relaciones entre conceptos), conocimiento técnico (impulsor para la adquisición de habilidades) y conocimiento profesional (permite abordar nuevas situaciones y otorga autonomía, siendo el nivel más avanzado).

Paris, Lipson y Wixson (1983) indican la insuficiencia de los conocimientos declarativo y procedimental, introduciendo el tipo de conocimiento condicional:

> Los conocimientos declarativo y procedimental por sí solos… sólo ponen de relieve el conocimiento y las herramientas requeridas para la ejecución y no consideran las condiciones bajo las que se pueda desear seleccionar o ejecutar acciones… Queremos introducir un término nuevo, conocimiento condicional, para captar esta dimensión del aprendizaje de ser estratégico… El procedimiento necesita ser aplicado selectivamente a metas particulares para convertirse en una estrategia… El conocimiento condicional describe las circunstancias de aplicación de procedimientos. (p. 302)

Pensamos, en suma, que desde cualquiera de las perspectivas referidas es necesario hacer una distinción entre tipos de conocimientos. Asimismo, parece que debe procurarse que el profesor alcance el tipo de conocimiento de mayor nivel, en el que se engloben no sólo el conocimiento del qué y del cómo, sino también el condicional, incluyéndose una progresiva formación en decisiones estratégicas relacionadas con los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Sobre estrategias de formación

La aceptación generalizada de que se necesitan cambios en la actuación del profesor pasa por una política de formación inicial y permanente. Aunque la formación inicial y permanente constituyen momentos bien diferenciados en la vida profesional, hay una cierta continuidad, garantizada por el término común (formación) que debería llevar a un diseño global de esa política de formación. Ningún profesor comprometido con la enseñanza cesa en su formación. Parafraseando a Canguilheim (1971/1966, p. 11), consideramos la profesión de profesor como una técnica o arte situado en la encrucijada de muchas ciencias, más que como el ejercicio de una sola ciencia propiamente dicha.

En estas condiciones, el conocimiento profesional ha de ir mucho más allá tanto de la adquisición mecánica de una serie de recetas para enseñar, como del saber matemático. En los cursos de formación de profesores se dan situaciones que contribuyen al desconcierto de los estudiantes para profesor. Los cursos teóricos abogan por una actitud innovadora en la enseñanza de las matemáticas, pero las prácticas ponen en contacto con procesos tradicionales. La coordinación de la preparación teórica con la práctica es una tarea pendiente que hasta ahora se está resolviendo mediante actuaciones locales no coordinadas. Los estudiantes para profesor tienen dificultades para «innovar» (en el sentido de diseñar libremente una lección), a pesar de que son invitados en muchas ocasiones. Sus circunstancias personales les llevan a preocuparse por buscar técnicas de gestión de la clase sin incidir en la secuencia tradicional de contenidos y actividades de enseñanza; el concepto que forjan de innovar es parcial, y basado generalmente en la búsqueda de motivaciones extrínsecas. La formación inicial, al no disponer de los contextos profesionales para generar cuestiones impulsoras de la innovación, se enfrenta a una situación de crisis.

En España, un gran número de profesores innovadores sigue apoyándose en el libro de texto (al estilo de la descripción hecha por Fernandes y Vale arriba mencionada) y son menos los que, sensibles al contexto, se atreven a llegar más lejos en su enfoque investigativo local. El primer caso es prototipo de lo que denominamos «las tendencias tradicionales»; éstas ven en el profesor a un profesional experto en transmitir conocimientos curricularmente organizados desde algún poder central. El segundo caso es prototipo de lo que denominamos «las tendencias profesionales»; éstas ven en el profesor a un profesional experto en traducir un currículo definido desde algún poder central en situaciones locales de enseñanza y aprendizaje y capaz de gestionarlas con éxito. El estudiante para profesor puede optar por una u otra tendencia, pero las políticas de formación deben ofrecer esquemas para ambas. Aquí nos interesa reflexionar sobre las tendencias profesionales.

Las tendencias profesionales enfatizan el papel reflexivo-investigativo del profesor, artífice principal de su desarrollo profesional. Necesitamos que el estudiante para profesor comprenda ese papel y también que el desarrollo profesional comience desde la formación inicial. Esto impone un reto educativo a la formación inicial de profesores de secundaria en España así como un reto matemático. Ambos retos están íntimamente relacionados, como enseguida probaremos.

Gellner (1994/1988) distingue entre las afirmaciones que tienen un uso referencial (remiten a la naturaleza y pueden ser bien ciertas o aproximadamente ciertas o bien falsas), y las que afirman un concepto compartido (remiten a las expectativas conceptuales normativas).

La matemática, como ciencia, establece resultados normativos abstractos controlados por la razón. Esta matemática se estudia en la Facultad de Matemáticas. Constituye un hecho innegable, acreditado históricamente en muchas ocasiones, que determinados resultados de los matemáticos resultan útiles o aplicables en muchos campos relacionados con la naturaleza o con las normas.

En cambio, la educación matemática se interesa por los conocimientos matemáticos nuevos para un individuo y, en la inmensa mayoría de los casos, necesita referirse a la naturaleza para producirlos.

Por ejemplo: la definición matemática de función como aplicación de R en R exige conocer tanto el conjunto de números reales como la definición de aplicación; en educación matemática se trata de interiorizar una noción de dependencia entre magnitudes (que no es incompatible con la definición anterior); ésta es un concepto normativo compartido, mientras que la interiorización de la dependencia entre magnitudes necesita ejemplos referidos a una realidad ingenuamente externa sobre la que es posible afirmar y confirmar resultados usando los diferentes lenguajes (verbal, tabla, gráfico y simbólico) indicados por Claude Janvier.

Vemos así que el reto es tanto educativo como matemático: en primer lugar, las matemáticas de la educación secundaria deben conectarse con la realidad, porque los alumnos no tienen aún la madurez requerida para la presentación axiomática; en segundo lugar, esas matemáticas deben preparar para diferentes niveles de profundización matemática, uno de los cuales es el de la Facultad de Matemáticas; en tercer lugar, la «cantidad» de matemática axiomática que debe conocer el profesor de secundaria debe ser suficiente como para manejar diferentes presentaciones lógicas de los contenidos, pero no excesiva, de manera que se impida la conexión, siempre imperfecta, con la realidad.

La política de formación de profesores debe incluir espacios de trabajo que pongan en juego las distintas componentes y generen la producción de diferentes tipos de conocimiento. El profesor, atascado en muchas ocasiones en un conocimiento de un tipo (generalmente social), debería tender a poseer un conocimiento profesional, adquiriendo así un mayor nivel de reflexión y enriqueciendo sus procesos de pensamiento[1]. Estos espacios de trabajo, en nuestra opinión, deben dar cabida al análisis completo de situaciones educativas (como, por ejemplo, la observación crítica de una clase y su posterior comentario con el profesor).

En España, los modelos de formación inicial existentes o planificados son, en su inmensa mayoría, sucesivos: la formación profesional se realiza después de la formación matemática. El modelo concurrente realiza la formación matemática de manera simultánea con la formación profesional. Una ventaja de un modelo concurrente estriba en que el estudiante puede reflexionar sobre el significado educativo de los conceptos matemáticos, a la vez que se enfrenta a las clases de matemáticas.

Una característica común a los modelos de formación inicial actuales es la brevedad de los periodos de prácticas de enseñanza. Con ello se dificulta la integración entre teoría y práctica. En estas condiciones, es muy difícil que los estudiantes perciban la formación como un proceso centrado en los problemas profesionales que afronta el profesor.

La administración educativa tiene actualmente establecida una política de formación inicial de profesores de secundaria, definitivamente considerada como sucesiva.

La formación sucesiva no es estructuralmente idónea para la formación del profesor de matemáticas de secundaria. Su estructura se caracteriza por un primer período extenso de formación en matemáticas, al que se añade un período corto de formación como

[1] Ernest (1989) señala los tres elementos más notables que influencian la práctica de la enseñanza de la matemática: «Los contenidos o esquemas mentales de los profesores, particularmente el sistema de creencias concerniente a la matemática y su enseñanza y aprendizaje. El contexto social de la situación de enseñanza, particularmente las limitaciones y oportunidades que provee. El nivel de reflexión y de los procesos de pensamiento de los Profesores» (p. 99).

profesor de matemáticas. De esta forma, las concepciones adquiridas en la facultad de matemáticas (habitualmente contrarias a los planteamientos investigativos en la clase y defensoras de una visión estática de la matemática) tienden a prevalecer sobre las reflexiones llevadas a efecto a lo largo del período corto de formación como profesor (por lo general, más cercanas a una concepción investigativa de la enseñanza de la matemática y a una concepción dinámica de la construcción del conocimiento matemático)[2].

Debido a que las concepciones del profesor se comportan como filtro de cualquier información que éste adquiere o pone en juego, la formación sucesiva comporta, por su estructura, una gran probabilidad de provocar alejamiento entre las demandas de los currículos de la enseñanza secundaria respecto al profesor y sus concepciones (expuestas o en la acción). Se desarrollan, por consiguiente, un ejercicio y un conocimiento profesionales que nacen frenados por esa formación inicial, perdiéndose la oportunidad de emplear ésta como impulsora de aquellos (en demasiados casos, la realidad hace necesario poner en práctica la frase que da título a un artículo de Ball, 1988: «Desaprender» para enseñar matemáticas).

Referencias

Ball, D. L. (1988). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *8*(1), 40-48.

Canguilheim, G. (1971). *Lo normal y lo patológico*. Buenos Aires, Argentina: Siglo XXI.

Carrillo, J. y Contreras, L. C. (1994). The relationship between the teacher's conceptions of mathematics and of mathematics teaching. A model using categories and descriptors for their analysis. En Da Ponte, J. P. y Matos, J. F. (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 152-159). Lisboa, Portugal: PME.

Coriat, M. y Martínez, P. S. (1997). *Matemáticas I y II. Orientaciones Curriculares*. Granada, España: Autores. (En prensa, Junta de Andalucía.)

Delval, J. (1997). Hoy todos son constructivistas. *Cuadernos de Pedagogía*, *257*, 78-84.

Edwards, D. y Mercer, N. (1987). *Common knowledge: The development of understanding in the classroom*. Londres, Reino Unido: Routledge.

Elstgeest, J., Goffree, F. y Harlen, W. (1993). Education for teaching science and mathematics in the primary school. En Harlen, W. (Ed.), *Science and Technology Education*. Document Series, 46. Paris: UNESCO.

Ernest, P. (1989). The impact of beliefs on the teaching of mathematics. En C. Keitel, P. Damerow, A. Bishop y P. Gerdes (Eds.), *Mathematics education and society* (pp. 99-101). Paris, Francia: UNESCO Science and Technology Education Series 35.

Fernandes, D. y Vale, I. (1994). Two young teachers' conceptions and practices about problem solving. En J. P. Da Ponte y J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol 2, pp. 328-335). Lisboa, Portugal: PME.

Gellner, E. (1994). *El arado, la espada y el libro*. Barcelona, España: Península.

[2] Una descripción de las concepciones mencionadas puede consultarse en Carrillo y Contreras (1994).

HOUDEMENT, C. y KUZNIAK, A. (1996). Autour des stratégies utilisées pour former les maîtres du premier degré en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16*(3), 289-322.

KESSELS, J. P. A. M. y KORTHAGEN, F. A. J. (1996). The relationship between theory and practice: Back to the classics. *Educational Researcher, 25*(3), 17-22.

LAPPAN, G. y THEULE-LUBIENSKI, S. (1992). Training teachers or educating professionals? What are the issues and how are they being resolved? En D. F. Robitaille, D. H. Wheeler y C. Kieran, (Eds.), *Selected lectures from the 7th International Congress on Mathematical Education*. Québec, Canadá: Les Presses de l'Université Laval.

LLINARES, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla, España: GID.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (NCTM) (1991). *Professional standards for the teaching of mathematics*. Reston, VA: NCTM.

PARIS, S. G., LIPSON, M. y WIXSON, K. (1983). Becoming a strategy reader. *Contemporary Educational Psychology, 8*, 293-316.

PORLAN, R., RIVERO, A. y MARTIN, R. (1997). Conocimiento profesional y epistemológico de los profesores I: teoría, métodos e instrumentos. *Enseñanza de las Ciencias, 15*(2), 155-171.

RUSSELL, T. (1994). Teachers' professional knowledge and the future of teacher education. *International Analysis of Teacher Education, 19*(4 and 5).

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

— (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

— (1993). Renewing the pedagogy of teacher education: The impact of subject-specific conceptions of teaching. En L. Montero y J. M. Vez (Eds.), *Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (pp. 53-59). Santiago de Compostela, España: Tórculo Edicións.

SULLIVAN, P. y MOUSLEY, J. (1994). Quality mathematics teaching: Describing some key components. *Mathematics Education Research Journal, 6*(1), 4-22.

FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO PARA EL DESARROLLO DEL SENTIDO NUMÉRICO EN LOS PRIMEROS AÑOS DE APRENDIZAJE MATEMÁTICO

Initial teacher training to develop number sense in the early years of mathematical learning

Rafael Bracho López y Manuel Torralbo Rodríguez
Universidad de Córdoba

Resumen

Se presenta un proyecto desarrollado durante dos años académicos, orientado hacia el desarrollo del sentido numérico en los primeros años de aprendizaje matemático y centrado en el aprovechamiento didáctico de unos materiales manipulativos concretos y en el abordaje del cálculo de manera flexible. En la experiencia ha participado profesorado de Educación Primaria, de Didáctica de las Matemáticas, asesores de formación permanente del profesorado, estudiantes universitarios y más de 300 niños y niñas de Primer Ciclo de Educación Primaria, desarrollándose paralelamente acciones de formación continua, innovación curricular, investigación educativa y formación inicial, si bien en el presente capítulo nos centraremos en el desarrollo de la experiencia desde esta última perspectiva.

Palabras clave: desarrollo del sentido numérico, formación inicial, materiales didácticos, algoritmos de cálculo.

Abstract

We present a project developed for two academic years, oriented towards the number sense development in the early years of mathematical learning and teaching and focused on the use of manipulative resources and on the approach to computations in a flexibly way. In the experience have taken part: Elementary Education teachers, mathematics educators, longlife teacher training coachers, university students and more than 300 first-cycle Elementary Education children. At the same time, actions are developed in continuous training, curriculum innovation, educational research and initial training. In this chapter we will focus on the development of experience in initial teacher training.

Keywords: *computation materials, initial teacher training, manipulative resources, number sense development.*

Menos reglas y más sentido..., sentido numérico

Históricamente, las Matemáticas han sido consideradas una asignatura complicada y fuera del alcance de buena parte de los estudiantes. Pero, ¿por qué resultan tan difíciles las Matemáticas? Martínez y Sánchez (2011) analizan las posibles causas desde dos perspectivas: su hipotética naturaleza y los errores que se cometen en su enseñanza. Atendiendo a esta interpretación, son difíciles debido a:

- Su supuesto nivel de abstracción. En ella suelen abordarse contenidos impropios para niños y niñas que aún no tienen desarrollada la capacidad de abstracción necesaria para comprenderlos.
- Su carácter acumulativo. Lo que aprendes hoy no dejas de usarlo ya, es decir, para aprender contenidos nuevos tienes que tener bien afianzados los anteriores, algo que evidentemente no siempre ocurre.
- La dependencia de un buen *director de orquesta*. Las metodologías que tradicionalmente se enseñan hacen que el papel del docente sea trascendental; sin embargo, hay ocasiones en la que a los alumnos les va bien con su maestro, pero existen otras muchas en las que no es así.
- Su desconexión con en el *día a día* del alumnado. A los niños y niñas en su vida diaria se les plantean pocas situaciones en las que tengan que poner en práctica lo aprendido en las clases de Matemáticas. Por el contrario, para las situaciones relacionadas con las matemáticas que se le presentan fuera del aula no le suele servir lo aprendido en clase.

En lo relativo a la aritmética en general y al cálculo en particular, los niños y niñas pasan una cantidad ingente de horas en la escuela practicando unos procedimientos mecánicos de los que no entienden el porqué y el para qué (Ginsburg y Baroody, 2007). Se enfrentan a los algoritmos de cálculo a edad muy temprana. En España, ya a los seis años aprenden sus primeras sumas y con ocho años ya están multiplicando. Si estas inmersiones en el cálculo se abordan sin un conocimiento adecuado del sistema de numeración decimal y de la mano de unos algoritmos sin sentido para ellos, que nos les ayudan a comprender los conceptos que subyacen, ni las propiedades de los números y de las operaciones. Para colmo, más tarde apenas van a utilizar, no solo estaremos desaprovechando el tiempo y desenfocando la construcción de los pilares fundamentales del aprendizaje matemático (Adamuz-Povedano y Bracho-López, 2014), sino que además estaremos promoviendo multitud de efectos negativos, como por ejemplo la concepción errónea del funcionamiento de las matemáticas o el menosprecio de las capacidades matemáticas propias (Gómez, 1998). Por otro lado, los algoritmos tradicionales, que todavía se siguen enseñando en la mayoría de las escuelas, son el producto histórico de una tecnología caduca basada en el lápiz y el papel o la tiza y la pizarra. Sin duda tuvieron su razón de ser durante bastante tiempo, pero ya hace varias décadas que su falta de sentido pedagógico resulta incuestionable para muchos investigadores en Educación Matemática (Adamuz-Povedano, Albanese y Bracho-López, 2016).

Ante esta realidad, tanto los referentes universales sobre Educación Matemática como los marcos normativos actuales de los países desarrollados, inciden en la importancia de fomentar en los escolares el denominado «sentido numérico», entendido este como un concepto amplio que hace referencia al desarrollo de capacidades tan importantes como el cálculo mental flexible, la estimación numérica y el razonamiento cuantitativo, entre otras (Greeno, 1991), todo ello con un enfoque orientado hacia el desarrollo de la competencia matemática (García, Bracho, Maz, Lucena, Hidalgo, Adrián, *et al.,* 2011). En este sentido y tan solo a modo de ejemplo, en los Principios y Estándares para la Educación Matemática (National Council of Teachers of Mathematics, 2003) se indica que las competencias incluidas en el bloque de numeración y cálculo deben permitir a todos los estudiantes que entiendan los números, las maneras de representarlos, las relaciones entre números y los sistemas de numeración, que capten el significado de las operaciones y cómo se relacionan unas con otras y que calculen de manera fluida y hagan estimaciones razonables.

Pero estos objetivos son difíciles de alcanzar si en los primeros años de aprendizaje matemático no se utiliza una metodología basada en buena medida en la utilización de materiales didácticos manipulativos adecuados y se afronta el cálculo de manera flexible. Nada que ver con el uso sistemático de los algoritmos tradicionales. Respecto a lo primero, está demostrado que el uso de materiales manipulativos juega un papel crucial en el desarrollo global y en el desarrollo lógico-matemático, considerando a este como una construcción personal, activa y reflexiva a partir de las relaciones que el niño establece con los objetos y situaciones que le proporciona su entorno (Bracho-López, Maz-Machado, Jiménez-Fanjul y García-Pérez, 2011). Respecto al abordaje del cálculo de manera significativa, hoy día existen alternativas metodológicas cuyos efectos en la mejora de la competencia matemática de los niños y niñas están suficientemente contrastados (Bracho-López, Gallego-Espejo, Adamuz-Povedano y Jiménez-Fanjul, 2014).

Ante este escenario, se impone la necesidad de una importante transformación metodológica en lo relativo a la aritmética escolar para la que resulta fundamental tomar partido desde la formación continua y desde la formación inicial del profesorado (Bracho-López *et al.*, 2011). Es lo que, entre otras cuestiones, da sentido a la experiencia que describimos en el presente capítulo.

Descripción de la experiencia

Inicialmente tuvieron lugar en los centros escolares sesiones de fundamentación y ejemplificación de la propuesta metodológica a desarrollar dirigidas al profesorado, que a grandes rasgos estuvieron basada en dos pilares: (a) El aprendizaje significativo del Sistema de Numeración Decimal (en adelante SND), de la mano de unos materiales manipulativos concretos, y (b) Una metodología de cálculo flexible, basada en los denominados *Algoritmos Abiertos Basados en Números* (ABN), orientada al desarrollo de la competencia matemática (Figura 1).

Figura 1. *Una metodología basada en el aprendizaje significativo del SND y la metodología ABN*

Tras las primeras reuniones cada centro decidió libremente su implicación en el proyecto, contándose finalmente con la siguiente participación:

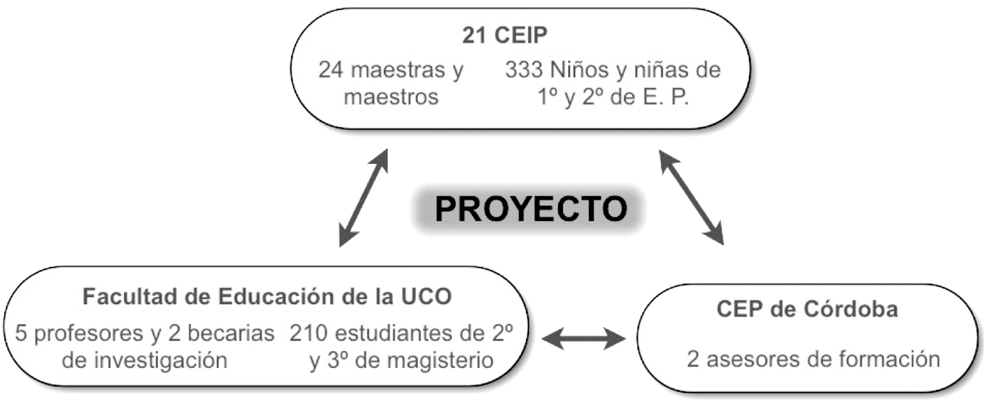


Figura 2. *Participación en el proyecto*

La experiencia se planteó desde distintas perspectivas complementarias que se fueron desarrollando de forma paralela: la formación permanente del profesorado de los centros (Bracho *et al.,* 2011), la implementación metodológica en el aula, la investigación del impacto de la metodología en el aprendizaje de los niños y niñas (Bracho-López *et al.,* 2014) y la formación inicial de los estudiantes de segundo curso de Grado de Educación Primaria participantes (Figura 2). En este capítulo intentaremos realizar una lectura de la experiencia desde esta última perspectiva.

Objetivos

Los objetivos fundamentales del proyecto de investigación han sido dos:

1. Formar a un grupo de profesores en activo y otro grupo de profesores en formación inicial para el uso didáctico de unos materiales educativos diseñados para el desarrollo del sentido numérico en alumnos y alumnas de primer ciclo de Educación Primaria (en adelante E. P.) y el abordaje del cálculo mediante la metodología ABN, promoviendo la reflexión sobre su interés educativo.
2. Estudiar los efectos de la metodología utilizada para el desarrollo del sentido numérico en el alumnado de primer ciclo de E. P.

En este trabajo nos centraremos en estos dos objetivos, pero desde la perspectiva de la formación inicial.

Metodología

Para la valoración de la formación inicial en la metodología objeto de nuestro estudio nos hemos centrado en tres grupos de alumnos de la asignatura «Didáctica de las operaciones numéricas y de la medida», de 2º curso del Grado de E. P. En cuanto al tratamiento de los datos, se ha llevado a cabo un análisis cuantitativo, que nos servirá para apoyar el análisis cualitativo más adecuado al objetivo previsto en la investigación. Más concretamente, se les ha pasado un cuestionario basado fundamentalmente en escalas Likert a 172 estudiantes, se ha realizado un grupo de discusión en el que participaron 12 de dichos estudiantes y también se recogieron intervenciones en clase y en un hilo creado al efecto en el foro del espacio virtual de la asignatura.

A continuación se presenta una síntesis de los resultados. A cada estudiante lo notamos por una E y un número (ej., E3 es el estudiante 3). En el plano expositivo, para ilustrar la narración, se alternarán algunas tablas y gráficos con transcripciones literales extraídas de las grabaciones realizadas en el grupo de discusión.

Análisis de las percepciones del alumnado de formación inicial participante

De entrada, la mayoría de los estudiantes no tienen una buena impresión de sus primeros años de aprendizaje matemático. Concretamente, 110 de los 172 estudiantes consultados (63,95 %) afirma que en los primeros años de su experiencia escolar dedicaban la mayor parte de la clase de matemáticas a realizar operaciones aritméticas sin más; tan solo el 27,9 % de los estudiantes consultados había utilizado algún material didáctico para comprender la idea de número o realizar operaciones y, cuando lo hicieron, fue de forma muy esporádica o puntual, y el 38,37 % reconoce haber finalizado el primer ciclo de la E. P. sin comprender el significado del sistema de numeración decimal (SND).

E3: Yo quiero decir que en mi experiencia tampoco he usado materiales, cuando no entendía algo le preguntaba al profesor y te lo explicaba otra vez, y esto así, y es así.

E1: Yo he echado en falta en mi años de cole que un profesor me explique porqué un problema es así, y que me lo explique de forma que yo lo vea, no que siempre me decían eso es así porque sí, si lo tienes mal se corrige de la pizarra y ya está.

Pero tampoco piensan que las cosas hayan cambiado demasiado en los últimos años, así por ejemplo, tras sus contactos en el practicum con la realidad de las aulas hoy día, tan solo el 40,7 % piensa que actualmente se introduce el SND de forma significativa, y el 67,5 % opina que en la actualidad se abusa de las prácticas sobre los algoritmos de cálculo tradicionales sin atender al significado de estos (Figura 3).

E11: Mi profesora de prácticas era muy joven y, sin embargo, explicaba el SND y las operaciones de forma totalmente tradicional. Un día se llevó el ábaco y me sorprendió, pero que va, se lo mostró un momentito a los niños manipulándolo ella y ya está. Los niños ni lo tocaron.

E12: Yo he hecho las prácticas en el colegio donde estudié de pequeñito y las cosas se están haciendo exactamente igual que entonces, parece que no hubiera pasado el tiempo.

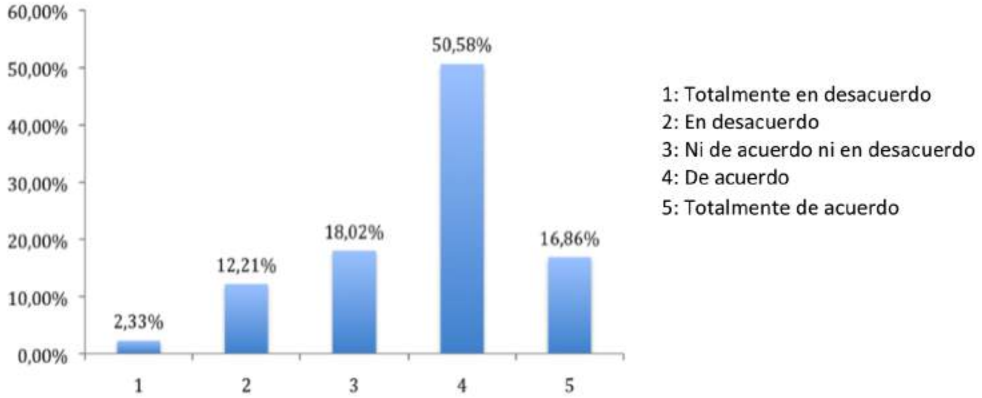


Figura 3. *Porcentajes de respuestas al item «En la actualidad se abusa de las prácticas sobre algoritmos de cálculo tradicionales sin atender al significado de estos»*

Figura 4. *Estudiantes trabajando con la caja numérica Universidad de Córdoba*

Ante esta situación, se justifica en la asignatura «Didáctica de las operaciones numéricas y de la medida» la introducción sistemática de los materiales didácticos manipulativos para la comprensión del SND y el aprendizaje de las operaciones aritméticas basado en la metodología ABN en el primer ciclo de la E.P., acompañados de toda una metodología que emerge de las buenas prácticas del profesorado en ejercicio participante en la experiencia, como consecuencia de la metodología de investigación-acción colaborativa utilizada en el proyecto, una iniciativa que el alumnado valora muy positivamente de forma prácticamente unánime (94,2 %).

Tras la experiencia, los estudiantes encontraron muy útil para su futuro profesional el aprendizaje de la metodología que se analiza (94,8 %) y manifestaron que la formación teórico-práctica recibida había sido adecuada (92,44 %) (Figura 5).

E1: En clase hemos trabajado con simulaciones de cómo haríamos las cosas en el aula, hemos podido interaccionar entre todos y esto ha sido una manera estupenda de aprender. Yo creo que hoy por hoy ya podría intentar hacer cosas, podría probar con el panel y la caja, introducir las operaciones aritméticas de forma natural, etc., porque creo que se ha trabajado bastante en clase y se ha explicado muy bien (Figura 4).

E5: Yo creo que lo hemos trabajado muy bien para el tiempo que tenemos. Tenemos muchas referencias que nos pueden ser muy útiles y que nos pueden ayudar en nuestro futuro profesional.

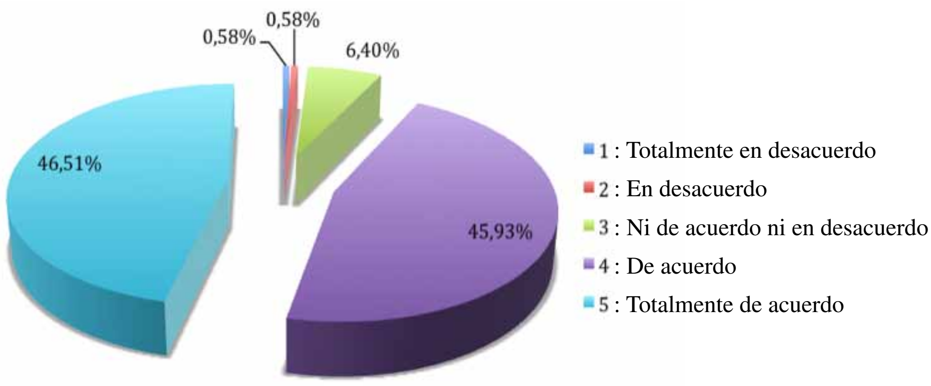


Figura 5. *Porcentajes de respuestas al ítem «La formación teórico-práctica recibida sobre el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico y la metodología ABN ha sido adecuada»*

Particularmente, el alumnado valoró muy positivamente las prácticas realizadas en pequeños grupos con los propios materiales (95,35 %).

En cuanto al impacto escolar de los materiales en niños de 1º y 2º de E. P., los estudiantes están de acuerdo en que estos recursos didácticos motivan sin duda a los pequeños estudiantes en su aprendizaje matemático (95,35 %) y facilitan su comprensión del sistema de numeración decimal (94,19 %) (Figura 6).

E4: Yo pienso que a un niño pequeño le resulta más didáctico y más divertido aprender matemáticas con objetos que él pueda tocar a hacerlo con una regla matemática que va a ser algo que va a tener que aplicar de forma memorística.

E3: El otro día fui a pasar unos test al colegio La Aduana, y allí están trabajando con los materiales que nos han enseñado en clase y es increíble que un niño de 2º respondiera más rápido de lo que yo podía pensar la pregunta. Lo hacen *super rápido* y es verdad que se nota que están usando los materiales.

E7: Yo otra ventaja que le veo a los materiales es que aprenden más rápido. En el cole donde fuimos a pasar los test de segundo, tenían una agilidad de cálculo mental impresionante. Ya sabían multiplicar, veías que no tenían problema ninguno. Hombre, había excepciones, pero en general era así.

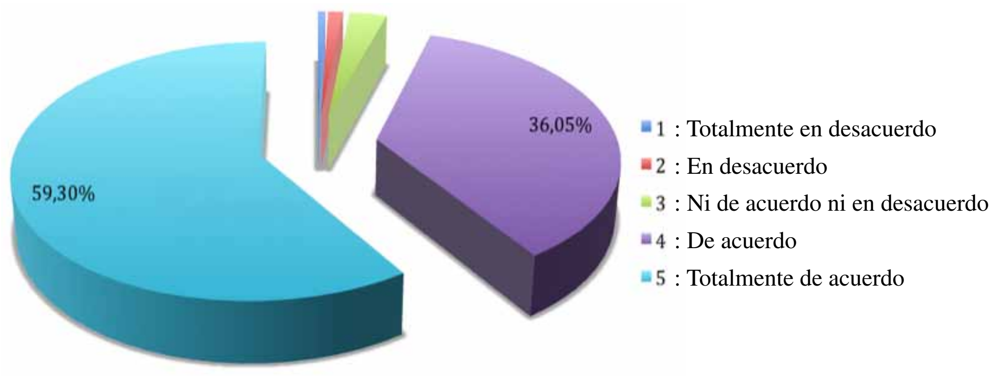


Figura 6. *Porcentajes de respuestas al item «Los materiales manipulativos estudiados motivan al alumnado en su aprendizaje de los números y de las operaciones»*

Ellos piensan que estos resultados tan evidentes también han de repercutir positivamente en la motivación del profesorado por su trabajo (90,7 %).

E6: Como docente yo creo que te tienes que sentir muy bien cuando encuentras algo que funciona y los niños aprenden mejor, el problema es que dentro de un mismo colegio unos profesores los usen y otros no, creo que los padres se te echarían encima diciendo porqué con sus hijos no.

En cuanto a los aspectos que pueden dificultar la implementación de esta metodología en las aulas, los estudiantes destacan la necesidad de formación, la falta de voluntad innovadora de buena parte del profesorado, la escasez de referencias metodológicas, la poca costumbre de coordinación entre el profesorado y la resistencia al cambio de las familias en algunos casos.

E4: Yo creo que el problema está en que los maestros no están formados y entonces siguen los mismos métodos de siempre. Yo, quizá si no hubiera estado en estas clases, seguiría enseñando igual que siempre y no usaría este tipo de metodologías.

E9: Yo veo que muchos profesores están muy acomodados y el uso de estos materiales y de otras formas de enseñar el cálculo les supone romper con esa rutina y requiere mucha implicación.

E7: Yo creo que si se comercializaran estos materiales junto con una guía de uso y actividades se facilitaría mucho su uso, ya que muchos maestros no se lanzarán a usarlos porque se sienten inseguros.

E3: Cuando los niños lleguen a casa y le cuenten a sus padres cómo suman con los palitos de una caja, muchos dirán: «pero bueno, ¿dónde están las cuentas de toda la vida?».

Conclusiones

La investigación-acción colaborativa como metodología de trabajo es un medio ideal que, partiendo de unas necesidades de innovación en el aula, hace posible la unificación de intereses en pro de la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje. En nuestro caso este trabajo colaborativo ha contribuido de forma sumamente positiva a la formación inicial de futuros maestros orientada hacia una transformación metodológica en lo relativo a la aritmética escolar.

En los primeros años del aprendizaje escolar se hace necesaria la utilización de recursos manipulativos y de una metodología adecuada para el aprendizaje del SND y el abordaje del cálculo que se demanda en la sociedad actual, un aspecto de la enseñanza para el que buena parte del profesorado de primer ciclo de E. P. en ejercicio y los futuros profesores y profesoras necesitan formación.

Los estudiantes en formación inicial son sensibles ante la necesidad de una transformación metodológica en lo relativo al aprendizaje del SND y de las operaciones y sus propiedades. Así mismo, expresan un alto grado de motivación ante las nuevas alternativas metodológicas basadas en la utilización de materiales manipulativos y la introducción del cálculo de manera significativa y flexible, motivación que observan tanto en el en alumnado como en el profesorado que experimeinta este tipo de metodología.

Referencias bibliográficas

Adamuz-Povedano, N., Albanese, V. y Bracho-López, R. (2016). Communitarian education and mathematics learning: Away of value diversity. *SHS Web of Conferences, 26,* 1-4.

Adamuz-Povedano, N., y Bracho-López, R. (2014). Algoritmos flexibles para las operaciones básicas como modo de favorecer la inclusión social. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social, 3*(1), 37-54.

Bracho-López, R., Gallego-Espejo, M. C., A., Adamuz-Povedano, N. y Jiménez-Fanjul, N. (2014). Impacto escolar de la metodología basada en algoritmos ABN en niños y niñas de primer ciclo de Educación

Primaria. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 39*, 97-109.

Bracho-López, R., Maz-Machado, A., Jiménez-Fanjul, N. y García-Pérez, T. (2011). Formación del profesorado en el uso de materiales manipulativos para el desarrollo del sentido numérico. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28,* 41-60.

García, T., Bracho, R., Maz, A., Lucena, M., Hidalgo, M. D., Adrián, C. y Jíménez, N. (2011). Una comunidad de investigación orientada al aprovechamiento de recursos didácticos para el desarrollo del sentido numérico en niños y niñas de primer ciclo de Educación Primaria. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Palarea y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 113-121). Granada, España: Dpto. Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Ginsburg, H. y Baroody, A. J. (2007). *Tema-3: test de competencia matemática básica*. Madrid, España: TEA ediciones.

Gómez, B. (1998). *Numeración y cálculo*. Madrid, España: Síntesis.

Greeno, J. G. (2001) Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education, 22*(13), 170-218.

Martínez, J. y Sánchez, C. (2011). Desarrollo de la inteligencia matemática en la Educación Infantil. Madrid, España: Wolters Kluwer.

National Council of Teacher (2003). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: SAEM THALES.

ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS PARA ALUMNOS CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES

Teaching mathematics for special needs students

Encarnación Castro y María C. Cañadas
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo hacemos una reflexión sobre la atención especial que necesitan algunos estudiantes en matemáticas, durante toda o parte de su escolarización. Exponemos algunos síntomas que indican que un estudiante presenta dificultades en su aprendizaje matemático, y factores que están en el origen de dichas dificultades. Nos centramos en el sentido numérico y la resolución de problemas aritméticos verbales y mostramos las dificultades más usuales que encuentran los escolares en estas nociones. Finalizamos el capítulo con algunas recomendaciones que pueden resultar útiles para los docentes que necesiten atender a dichos escolares.

Palabras clave: Didáctica de la matemática, dificultades de aprendizaje en matemáticas, sentido numérico, resolución de problemas.

Abstract

In this work we reflect on the special attention that some students need in mathematics during all or some school years. We present some symptoms that indicate that a student has difficulties on their mathematical learning, as well as some factors that are on the origin of those difficulties. We focus on number sense and verbal solving arithmetic problems, and show the most common difficulties that students have with these notions. We end the chapter with some recommendations that can be useful for teachers who need to attend these students.

Keywords: *learning difficulties in mathematics, mathematics education, numerical sense, problem solving.*

Introducción

El título de este capítulo coincide con el de una materia perteneciente al plan de estudios de 1991 de la formación inicial de maestro, en su especialidad de «Maestro de Educación Especial». Dicha materia fue impartida por Moisés Coriat durante varios años. En el curso 2008-09 nos incorporamos como profesoras de la misma las autoras de este documento, continuando la línea marcada por Moisés, hasta la extinción del citado plan de estudios en el curso 2013-14. Las ideas que recogemos aquí son fruto de aquella experiencia.

El Real Decreto BOE 11/10/91 (Ministerio de Educación y Ciencia, 1991) recoge las directrices para obtener el Título de Maestro y establece siete especialidades, entre las que está Maestro de Educación Especial. Se trataba de un título universitario de diplomatura cuyo plan de estudios estaba compuesto por cuatro tipos de materias: (a) troncales, de obligada inclusión en los planes de estudios de todas las universidades españolas; (b) obligatorias, propuestas por cada universidad e ineludibles para todos los alumnos de esa universidad; (c) optativas, materias a proponer por cada universidad y elegibles por los estudiantes de la titulación, dentro del propio título; y (d) de libre configuración, ofertadas por la universidad y elegidas por el alumnado, pudiendo ser materias de diferentes titulaciones. La asignatura (que así se denominaba, o materia) «Enseñanza de las matemáticas para alumnos con necesidades educativas especiales» era obligatoria de la Universidad de Granada, no existiendo una asignatura análoga en esta titulación impartida en otras universidades españolas.

Alumnos con necesidades educativas especiales

La Ley Orgánica de Educación (Ministerio de Educación y Ciencia, 2006) considera estudiantes con necesidades educativas especiales a aquellos que se encuentran muy por debajo o muy por encima, en habilidades cognitivas, respecto a sus compañeros. En consecuencia, estos estudiantes requieren que se incorporen apoyos a su proceso de aprendizaje. Entre los que presentan habilidades cognitivas bajas y requieren apoyo educativo se encuentran: aquellos que presenten alguna discapacidad psíquica, sensorial, física o de lenguaje; los que se han incorporado tarde al sistema educativo; y aquellos con condiciones personales conflictivas (Ramos, Castro y Castro-Rodriguez, 2016). Pero, según Nuñez (2008), hay datos que muestran que las tres cuartas partes de los estudiantes que reciben apoyo escolar en centros ordinarios no presentan ninguna alteración orgánica ni física, luego las necesidades educativas especiales son por el resto de causas.

En la literatura específica, hay muchas maneras de referirse a los alumnos que tienen bajos rendimientos matemáticos. Expresiones como alumnos de bajo rendimiento, en desventaja, con dificultades académicas, o alumnos lentos, se utilizan en el argot educativo para hacer referencia a estudiantes que presentan dificultades de aprendizaje en esta materia. La investigación realizada en este ámbito sugiere que entre el 5% y el 8% de los niños en edad escolar padecen algún tipo de déficit cognitivo o neuropsicológico que interfiere con su capacidad para adquirir competencias en uno o más dominios matemáticos a pesar de una instrucción adecuada (Barnes, 2005). Los síntomas que muestran estos estudiantes son: lentitud para aprender; dificultad para retener lo aprendido, para transferir y generalizar lo aprendido; capacidad limitada de atención y concentración; escasa motivación; y, en muchas ocasiones, presentan trastornos de personalidad. Estos síntomas están relacionados con déficit de comprensión, de razonamiento, de comunicación y de resolución de problemas matemáticos.

En ocasiones, el principal obstáculo para que estos alumnos aprendan es alguna discapacidad que no les permite obtener resultados por sí solos. Esto ocurre cuando presentan una incapacidad para usar pensamiento crítico sin ayuda específica, escasa percepción visual o una merma de capacidad auditiva. A veces sucede que estudiantes con alguna discapacidad tienen buenas destrezas para el estudio y se hallan muy motivados, con interés por aprender. Pero, normalmente, esta motivación disminuye con el paso del tiempo, a medida que se enfrentan con los escollos asociados a su discapacidad y se frustran sus intentos de aprender. Entonces pueden perder el interés y presentar un comportamiento anómalo, distanciándose o simplemente dejando de atender (Bley y Thornton, 1994).

Naturaleza de las dificultades matemáticas

Aunque se sabe poco sobre la etiología de las dificultades de los estudiantes con las matemáticas, algunos estudios concluyen que hay muchas razones diferentes que explican el bajo rendimiento de esos estudiantes. Estas razones aluden a factores genéticos, ambientales y sociales, y sus complejas interacciones. Las dificultades pueden tener su origen en una disfunción de una o varias de las siguientes dimensiones: la memoria, el desarrollo cognitivo y la capacidad visual-espacial (Geray, 2004). Estas dimensiones afectan de manera directa al aprendizaje de las matemáticas. Un déficit de memoria interfiere, por ejemplo, en la capacidad de recuperar con rapidez hechos numéricos básicos, recordar los pasos necesarios para resolver un problema, o el significado de símbolos propios de la matemática. Un desarrollo cognitivo inadecuado dificulta el aprendizaje y procesamiento de la información, así como la capacidad de generalización (Geary, 2004; Gersten, Jordan y Flojo, 2005), influyendo en la utilización de estrategias efectivas de conteo, en la comprensión de las relaciones numéricas y las operaciones entre los números, en la comprensión de sistemas numéricos, o en la resolución de problemas. Algunas dificultades de aprendizaje están ligadas a un déficit de pensamiento visual-espacial, el cual limita el conocimiento de conceptos numéricos como la comprensión del valor de posición de las cifras de un número y la representación de las magnitudes numéricas espacialmente como una especie de línea numérica mental. Estas dificultades pueden interferir en la capacidad de resolver problemas (Butterworth, 2005).

Dificultades con habilidades numéricas y aritméticas básicas

Algunos autores utilizan expresiones como «dificultades de aprendizaje en números y aritmética», «discapacidad para aprender aritmética» o «dificultades aritméticas específicas» para denominar a los déficits específicos en la adquisición de la aritmética (Butterworth, 2005). Otros autores engloban todos estos déficits bajo la etiqueta «discalculia». Estos nombres surgen del hecho de que las carencias aritméticas de los niños con dificultades de aprendizaje en la aritmética y los déficits de las personas que sufren de discalculia son similares y las características definitorias de la mayoría de las dificultades de aprendizaje en la aritmética son discalculias. Aunque los dos dominios de estudio no están a menudo vinculados, los datos mostrados desde la investigación con niños con problemas de aprendizaje en aritmética son muy similares a los que muestra la investigación realizada con discalcúlicos (Geary y Hoard, 2001).

Se define la discalculia como un trastorno del aprendizaje que causa graves dificultades para aprender acerca de los números y la aritmética (Butterworth, 2005). Su consecuencia es una baja capacidad para adquirir conocimientos tanto conceptuales como procedimentales de dichas nociones. Entre las dificultades podemos señalar: impedimentos de juicio y razonamiento para resolver problemas; para comprender y recordar conceptos, reglas, fórmulas, secuencias matemáticas (orden de operaciones); para establecer correspondencia entre lo concreto (la cantidad) y lo abstracto (el símbolo); limitaciones en la acción de contar, necesitando utilizar objetos concretos como los dedos; en la escritura de las cifras, invirtiendo la forma de las mismas; en el manejo de números altos (centenas, miles); para memorizar hechos numéricos básicos de la suma y del producto; en la realización de cálculo mental y aproximado; en dar significado a los símbolos (+, -, :, ×). Debido a esas dificultades hacen errores como: no colocar las cifras correctamente o no seguir cualquier otra regla al realizar un algoritmo convencional, omitir algún paso de un algoritmo o agregar alguno innecesario; aplicar una regla aprendida para un procedimiento a otro diferente (como sumar cuando hay que restar para resolver un problema aritmético verbal). La discalculia se presenta en una etapa muy temprana, siendo el primer síntoma la dificultad en el aprendizaje de los dígitos, asociado a la no comprensión de la cardinalidad.

No hay evidencias empíricas sobre si los estudiantes que tienen dificultad con las matemáticas en los cursos escolares iniciales, las siguen teniendo en el resto de su tiempo académico. Pero sí existen evidencias sobre que los conceptos numéricos que los niños adquieren en la infancia sientan las bases para la posterior adquisición de nociones de matemática avanzada, y de que el éxito o fracaso en la adquisición de los primeros conceptos numéricos influye en el interés y la confianza para realizar otras tareas matemáticas. Apoyados en estas evidencias, los investigadores han tratado de precisar qué es el sentido numérico y la forma de evaluar en los estudiantes los aspectos más destacados asociados al sentido numérico, incluyendo la resolución de problemas (Gersten *et al.,* 2005) para establecer las dificultades que el alumnado tiene en relación con estas nociones.

Dificultades vinculadas con el sentido numérico

El sentido numérico puede ser caracterizado como la capacidad que permite a las personas relacionarse con los números de forma desenvuelta y flexible en diferentes situaciones y contextos. Conlleva una buena intuición sobre los números y sus relaciones así como el dominio de la aritmética mental (Castro y Segovia, 2015). Entre las capacidades que se asocian con el sentido numérico se encuentran: (a) reconocer que una pequeña colección de objetos ha cambiado sin el conocimiento directo de que se hayan quitado o añadido objetos; (b) aproximar o estimar y hacer comparaciones de medidas de magnitudes numéricas; (c) descomponer números de forma natural; (d) usar estrategias eficaces para resolver problemas; (e) realizar cálculos numéricos con fluidez y flexibilidad; (f) hacer un uso no algorítmico de los números; (g) comunicar, procesar e interpretar información cuantitativa; o (h) reconocer errores numéricos (Berch, 2005).

La investigación muestra que algunos escolares presentan déficits persistentes en respuestas a operaciones aritméticas sencillas y que dichos déficits están asociados a estrategias inmaduras de conteo (p. ej., conteo con los dedos), que contribuyen a las dificultades en el desarrollo de la fluidez computacional. También se han detectado dificultades en tareas de valor posicional, lo que impide comprender relaciones numéricas y dar sentido al cómo y porqué de los procedimientos de cálculo.

Entre las dificultades que los estudiantes presentan, relacionadas con el sentido numérico, se señalan:

— Identificación del significado de los signos (-, x, 2, <, =, >, %).
— Recuerdo de respuestas de hechos aritméticos básicos (5+7, 9-6, 4x9…).
— Uso de estrategias eficaces para resolver problemas aritméticos verbales.
— Comprensión de propiedades sencillas como la conmutativa (3+8=11; 8+3=?).
— Realización de cálculos de varios dígitos que pueden ser reagrupados (9-7-1).
— Lectura y escritura de números de varias cifras, incluidos los decimales (leer 534 como cincuenta y tres, cuatro).
— Realización incorrecta de algoritmos de las operaciones aritméticas (como se muestra en el cálculo que presentamos en la Figura 1.

$$\boxed{\begin{array}{r} 1 \\ 37 \\ +\ 4 \\ \hline 133 \end{array}}$$

Figura 1. *Suma realizada de manera incorrecta*

Dificultades vinculadas con los problemas verbales

Los docentes y los investigadores consideran la resolución de problemas un elemento fundamental del aprendizaje de las matemáticas. La psicología cognitiva también acredita esta consideración, al tomarla como labor coadyuvante del desarrollo cognitivo de los sujetos. Pero esto será así, si la resolución de problemas es entendida como una actividad que implica pensar y tomar decisiones sobre qué tipo de conocimiento poner en juego para llegar a la solución del problema. La resolución exitosa de problemas de matemáticas es algo complejo que entraña la coordinación de una serie de habilidades cognitivas (atención, memoria, lenguaje, entre otras) y metacognitivas (p. ej., autocuestionamiento, autoevaluación). Por tanto, la resolución de problemas es más que una respuesta operatoria recuperada de la memoria (Montague, 1991). Los estudiantes con dificultades de aprendizaje encuentran obstáculos para resolver problemas verbales, que son los primeros que se comienzan a trabajar (por ser la representación verbal la más familiar a los escolares). Por lo general, al alumnado se le enseña un proceso de pasos para enfrentarse y resolver un problema verbal de matemáticas. Estos pasos pueden ser similares a los que presentamos a continuación.

— *Leer el problema,* hacerlo cuidadosamente, observando y tratando de aclarar cualquier incertidumbre o confusión que surja.
— *Parafrasear el problema*, reformular el problema con las propias palabras.
— *Representar el problema*, realizar un dibujo, esquema o recoger los datos de tal forma que constituya una representación visual del problema o sirva de ayuda para organizar la información.
— *Crear un plan para resolver el problema*, decidir sobre la mejor manera de llegar a la solución y desarrolla un plan para hacerlo.
— *Predecir/estimar la respuesta*, avanzar de antemano cuál será la respuesta a la cuestión planteada en el problema.
— *Hallar la respuesta,* seguir el plan creado para llegar a la respuesta.
— *Comprobar la respuesta*, rehacer metódicamente los cálculos para cada paso del problema.

Resolver el problema adecuadamente exige poseer capacidad de aplicar de forma fiable los pasos específicos. Esto implica habilidad para analizar el problema, seleccionar una estrategia adecuada para resolverlo entre una serie de posibles alternativas y supervisar el proceso de resolución asegurándose de que se ha llevado a cabo correctamente. Las dificultades que se observan se centran en algunas de las siguientes habilidades: (a) comprensión de la lectura del problema, tanto global como parcial de lo que está demandando; (b) identificación de la información relevante y no consideración de la irrelevante y que no se requiere para la solución del problema; (c) desarrollo e implementación del plan para resolver el problema; (d) solución de múltiples pasos en problemas verbales avanzados; e) uso de los cálculos correctos que lleven a la solución.

Por lo general, los estudiantes con necesidad de apoyo tienden a sobreestimar su capacidad matemática, a responder impulsivamente, a utilizar estrategias de ensayo y error, y a no verificar sus resultados (Garrett, Mazzocco y Baker, 2006).

Factores externos que favorecen las dificultades matemáticas

Frente a la postura que entiende que el bajo rendimiento en matemáticas es achacable a una baja capacidad del alumnado, Reusser (2000) propone que hay pruebas de que la mayor parte del fracaso escolar observado en matemáticas es debido a ambientes de enseñanza-aprendizaje inadecuados y no exclusivamente a factores genéticos. Barnes (2005), recopilando ideas de varios autores, señala que algunos factores que contribuyen a ese ambiente deficiente son: (a) métodos de enseñanza o contenidos inadecuados; (b) falta de materiales adecuados; (c) falta de tiempo del profesor para reflexionar sobre las dificultades del alumno y planificar el trabajo adecuado; (d) falta de conocimiento, por parte del profesorado, de la matemática que se enseña, incluyendo conocimiento de habilidades y conceptos involucrados en dichos conocimientos; y (e) incapacidad del profesorado para motivar e involucrar a los estudiantes y organizar el trabajo de manera eficiente. De lo anterior se desprende que, en la mayor parte de los casos, el bajo logro en matemáticas puede ser tratado y mejorado.

El diagnóstico temprano de las dificultades de aprendizaje es uno de los aspectos importantes a tener en cuenta. A menudo, se detectan las dificultades cuando los niños muestran obstáculos académicos, a una edad aproximada de 9 años, lo que ya es una edad avanzada (Gersten *et al.,* 2005). La intervención tardía puede dar lugar a consecuencias adversas y persistentes para la adquisición de la habilidad académica idónea. Por el contrario, la identificación temprana de problemas de aprendizaje de niños en riesgo puede ofrecer la posibilidad de mitigar los efectos negativos de retraso en la intervención de dirigir a los niños a los servicios de prevención a edades más tempranas (Lange y Thompson, 2006). Una discapacidad de aprendizaje en matemáticas puede ser identificada en niveles iniciales desde el área del cálculo aritmético y la resolución de problemas de matemáticas (Jayanthi, Gersten y Baker, 2008).

Apoyos pedagógicos

Los apoyos pedagógicos que necesitan los escolares con dificultades educativas especiales no son únicos ni generales, han de estar condicionados por las dificultades que presente el propio sujeto. No pueden establecerse ni con carácter definitivo ni de una forma general, sino que van a depender de las particularidades del alumno en un momento determinado y en relación a las condiciones y oportunidades del proceso de enseñanza y aprendizaje. La disfunción se puede corregir reeducando al niño. Un niño discalcúlico, por ejemplo, puede aprender, pero necesita hacer un esfuerzo mayor, el camino a recorrer será más largo que el de otros niños. El procedimiento no consiste en insistir mucho en lo mismo que se ha hecho en clase, una y otra vez; sino en trabajar con el niño de otra manera, dejando de lado los procedimientos memorísticos y haciendo una enseñanza más comprensiva, con más práctica y manipulación de materiales concretos.

Se señalan diversas actuaciones para proporcionar atención a estos alumnos, entre las que destacamos la instrucción directa, incidiendo en la enseñanza de estrategias y esquemas para la resolución de problemas (Jitendra, 2002; Ramos, Castro y Castro-Rodríguez, 2016). Dicha instrucción incluye interacción verbal entre el profesor y los alumnos; considerar al alumno colaborador en el proceso de su aprendizaje; adaptación de materiales curriculares al contexto y al alumnado con la profundización y enriquecimiento necesarios en cada caso; hacer uso de modelos visuales o manipulativos; utilizar juegos que proporcionan oportunidades para practicar y consolidar procedimientos y desarrollar estrategias de resolución de problemas, y ayudan en la adquisición y desarrollo de conceptos.

Se aconseja que los profesores adopten el papel de experimentadores y prueben ideas desarrolladas por ellos mismos y sus colegas. Al hacerlo, tienen la oportunidad de observar los desempeños de sus estudiantes, formarse una idea de sus fortalezas y debilidades, apreciar el estado de sus conocimientos y entender las posibles causas de su bajo rendimiento. Por otra parte, les permite planificar un trabajo adecuado para cada estudiante, con la posibilidad de ampliarlo, ajustarlo o abandonarlo dependiendo de su efectividad.

Así mismo, hacer que la enseñanza priorice el aprendizaje que pone el énfasis en el pensamiento relacional más que en lo memorístico. Se propone: (a) basar los nuevos aprendizajes en los conocimientos previos de los escolares adaptándolos a los diferentes modos de aprendizaje de los mismos; (b) tomar la resolución de problemas atractivos y desafiantes (relacionados con su vida diaria, con cuentos, con juegos, etc.) como base para trabajar y comprender las operaciones aritméticas; (c) potenciar que los estudiantes verbalicen sus estrategias y soluciones cuando resuelven problema y; (d) permitir la instrucción asistida por compañeros (Jayanthi, Gersten y Baker, 2008).

La instrucción del sentido numérico no puede ser compartimentada y acotada en diferentes capítulos de libros de texto o unidades de instrucción. El sentido numérico hay que entenderlo como una forma de pensar especial del sujeto y esto lleva a que su práctica deba permear en todos los episodios de enseñanza y aprendizaje dedicados a la matematización de los estudiantes.

La resolución de problemas es difícil de enseñar y suele evitarse, sobre todo cuando se trabaja con estudiantes con dificultades de aprendizaje. Esto supone sustraer a dichos estudiantes de su derecho a ser formados al máximo de sus posibilidades. Se recomiendan ciertas pautas a seguir por los docentes entre las que recogemos algunas: (a) conseguir que los estudiantes se sientan cómodos y tengan confianza en que poseen habilidades necesarias para resolver el problema con un esfuerzo razonable; (b) no enfatizar la gravedad de las respuestas incorrectas y enseñarles a ver los errores como parte del aprendizaje, así como a aceptar diferentes formas de pensar y de enfocar los problemas; (c) usar problemas interesantes ligados a la experiencia de los niños; (d) proponer situaciones problemáticas oralmente, (e) usar objetos concretos, dibujos, y diagramas para resolver los problemas; (f) animar a los niños a inventar problemas de enunciado verbal y a usar material manipulativo para describir problemas de cálculo (Bley y Thornton, 1994).

Referencias

Barnes, H. (2005). The theory of realistic mathematics education as a theoretical framework for teaching low attainers in mathematics. *Pythagoras, 61*, 42-57.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333-339.

Bley, N. S. y Thornton, C. A. (1994). Teaching mathematics to students with learning disabilities. Austin, TX: Proed.

Butterworth, B. (2005). Developmental dyscalculia En J. I. Cambell (Ed.), *Handbook of mathematical cognition* (pp. 455-467). Nueva York, NY: Psychology Press.

Castro, E. y Segovia, I. (2015). Sentido numérico. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 111-126). Madrid, España: Pirámide.

Garrett, A. J., Mazzocco, M. M. y Baker, L. (2006). Development of the metacognitive skills of prediction and evaluation in children with and without math disability. Learning disability. *Research and Practice*, *21*, 77-88.

Geary, D. C. (2004). Mathematics and learning disabilities. *Journal of Learning Disabilities*, *37*(1), 4-15.

Geary, D. C. y Hoard, M. K. (2001). Numerical and arithmetical deficits in learning-disabled children: Relation to dyscalculia and dyslexia. *Aphasiology, 15*(7), 635-647.

Gersten, R., Jordan, N. C. y Flojo J. R. (2005). Early identification and interventions for students with mathematics difficulties. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 293-304.

Jayanthi, M., Gersten, R. y Baker, S. (2008). Mathematics instruction for students with learning disabilities or difficulty learning mathematics: A guide for teachers. Portsmouth, NH: RMC Research Corporation, Center on Instruction.

Jitendra, A. K. (2002). Teaching students math problem-solving through graphic representations. *Teaching Exceptional Children*, *34*(4), 34-38.

Lange, S. M. y Thompson, B. (2206). Early identification and interventions for children at risk for learning disabilities. *International Journal of Special Education, 21*(3), 108-119.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario, oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención. *BOE, 244*, 33003-33018.

— (2006). Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación. *BOE, 106,* 17158-17207.

Montague, M. (1991). Gifted and learning-disabled gifted students' knowledge and use of mathematical problem-solving strategies. *Journal for Education of the Gifted*, *14,* 393-411.

Nuñez, M. T. (2008). Educación especial: normalizar ou volver patolóxicas as diferenzas? *Eduga*, *57*, 20-23.

Ramos, L., Castro E. y Castro-Rodríguez, E. (2016) Instrucción en el uso de esquemas para la resolución de problemas aditivos a estudiantes con necesidades educativas especiales. *Enseñanza de las Ciencias*, *34*(1), 173-192.

Reusser, K. (2000). Success and failure in school mathematics: Effects of instruction and school environment. *European Child & Adolescent Psychiatry*, *9*(2), 7-26.

LENGUAJE Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA INFANTIL

Language and mathematics education for early chilhood education

Enrique Castro Martínez
Universidad de Granada

Resumen

Exponemos de forma concisa algunas de las aportaciones realizadas por el profesor Moisés Coriat en su labor docente con estudiantes de magisterio de la especialidad de Educación Infantil. Limitamos este trabajo a su aporte sobre la lógica matemática y su relación con el lenguaje, lo que constituía en ese momento el eje vertebrador de la matemática orientada a la educación infantil. Queremos subrayar el enfoque lingüístico que se le da a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas en este nivel educativo.

Palabras clave: Educación infantil, lenguajes, lógica matemática.

Abstract

We concisely expose some of Professor Moisés Coriat's contributions in their teaching with future early childhood teachers. In this work, we focus on mathematical logic and its relationship with language, which at that time constituted the backbone of the math-oriented early childhood education. We wish to emphasize the linguistic approach is given to the teaching and learning of mathematics in these educational levels.

Keywords: *childhood education, languages, mathematical logic.*

El profesor Moisés Coriat, en su última etapa activa como docente en el Departamento de Didáctica de la Matemática, estuvo vinculado a la formación inicial de maestros de la especialidad de Educación Infantil. Su contribución en esta especialidad se centró, junto a otros compañeros del departamento, en desarrollar e impartir la asignatura Educación Matemática Infantil, asignatura obligatoria de primer curso de la titulación Maestro Especialista en Educación Infantil que se impartía en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Nuestra pretensión es exponer algunas de las ideas que desarrolló al respecto, bien de forma individual, o en colaboración con compañeros del citado departamento. La razón de ser de su aporte en esta materia tiene que ver con el cambio curricular que se produce al comienzo de la década de los 90 del siglo XX en la formación inicial de maestros. Veamos en primer lugar cual fue el origen y el contexto curricular en el que se desarrolló su labor en esta asignatura.

Contexto curricular

En el marco de la Constitución Española de 1978 se promulgaron una serie de leyes orgánicas que la desarrollaron en materia de educación. La primera de ellas fue la Ley de Reforma Universitaria de 1983. Le siguieron en 1985 la Ley Orgánica del Derecho a la Educación y la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE) en 1990, que amplió la enseñanza obligatoria en dos años, extendiéndola desde los seis hasta los dieciséis años. La estructura por ciclos (inicial, medio y superior) desaparece y es sustituido por una nueva organización en Enseñanza Primaria y Enseñanza Secundaria Obligatoria. Así mismo, esta ley amplía la cobertura a la demanda de educación infantil y de enseñanzas especiales por parte de la sociedad. La LOGSE determina que el sistema educativo comprende enseñanzas de régimen general y enseñanzas de régimen especial. Las de régimen general incluyen: educación infantil, educación primaria, educación secundaria, formación profesional de grado superior y educación universitaria. Se determina además ser maestro, con la especialidad correspondiente, para impartir clase en los niveles de educación infantil y de educación primaria. En ella se suprime el título de Profesor de Educación General Básica y se sustituye por una denominación de Maestro. Así mismo, el Real Decreto 1497 de 27 de noviembre de 1987 estableció que en el nivel universitario las materias que conforman un plan de estudios eran de cuatro tipos: troncales, obligatorias de universidad, optativas y de libre configuración.

De conformidad con lo dispuesto en las disposiciones precedentes, el Ministerio de Educación y Ciencia procedió a establecer las directrices generales de los planes de estudios para la obtención del título de maestro en sus diversas especialidades (Ministerio de Educación y Ciencia [MEC], 1991a). En ellas, se especifica que en la Diplomatura Universitaria de Maestro, las universidades atenderán a la expedición de títulos con las siguientes denominaciones: Título de Maestro-Especialidad de Educación Infantil, Educación Primaria, Lengua Extranjera, Educación Física, Educación Musical, Educación Especial, y Audición y Lenguaje.

Educación Matemática Infantil

La fase siguiente de la elaboración de los planes de estudio fue llevada a cabo a nivel local en las universidades. El plan de estudios de maestro en la Especialidad de Educación Infantil de la Universidad de Granada fue aprobado por Resolución de 28 de julio de 1994. En este plan, además de la asignatura troncal titulada «Desarrollo del pensamiento matemático infantil», se incluyó una asignatura obligatoria de universidad: Educación Matemática Infantil, que se impartía durante un cuatrimestre en el primer curso de la Diplomatura. La asignatura, promovida por el grupo de profesores del Departamento Didáctica de la Matemática, comprendía dos créditos teóricos y dos prácticos y se estructuró en un programa con cuatro temas: lógica, estructuración espacial y conocimiento geométrico, estructuras aritméticas elementales, magnitud y medida.

En su inicio, el objeto fundamental de esta asignatura fue que los estudiantes reflexionaran sobre temas matemáticos ligados a las primeras etapas educativas de infantil, profundizando y ampliando dichos temas. Los contenidos de esta materia se estructuraron teniendo en cuenta temas clave de la Educación Matemática Infantil: (a) el niño y su entorno, (b) el lenguaje como comunicación de experiencias vividas en el entorno social y escolar, (c) la estructuración espacial, (d) los objetos en el espacio, (e) las magnitudes y su medida, (f) el simbolismo numérico para la medida y (g) la cuantificación de objetos y situaciones. La interrelación entre ellos, así como los aspectos epistemológicos y fenomenológicos que constituyen las bases para los planteamientos didáctico-matemáticos se desarrollaban en el ámbito de una posterior asignatura troncal titulada «El desarrollo del pensamiento matemático y su didáctica».

El primer tema de esta asignatura versa sobre lógica y lenguaje matemático, con lo que se quiere dar respuesta a la visión de la matemática como lenguaje orientado a la expresión y la comunicación de experiencias vividas, propia de la etapa de la educación infantil. La importancia del lenguaje en esta etapa del aprendizaje matemático ha sido subrayada en distintas propuestas curriculares para la educación infantil (MEC, 1991b, 1991c, 2008), así como su necesidad de incluir este contenido en la formación inicial de maestros de infantil (Castro y Castro, 2016).

Uno de los objetivos de este primer tema, es el uso correcto del lenguaje cuando se utiliza para realizar razonamientos lógicamente válidos. Por ello, se ve en su momento la necesidad de realizar una reflexión sobre la lógica, los lenguajes y la relación que mantienen entre sí (Castro y Coriat, 1997). Se considera, de partida, que el lenguaje por excelencia es el lenguaje de las palabras. Una primera idea que se intenta transmitir al estudiante es la del lenguaje como soporte representacional del razonamiento lógico: la Lógica ha sido durante más de veinte siglos un compendio de reflexiones sobre reglas formales de razonamiento, expresadas casi siempre en lenguaje natural. Se intenta dejar claro a los maestros en formación que la lógica no se interesa específicamente por el lenguaje, sino por las condiciones que hacen posible el razonamiento válido. La Lógica se perfila pues como una ciencia al servicio del lenguaje, como una ciencia centrada en la veracidad o no de las expresiones de un lenguaje.

Convertido el lenguaje en el centro de atención fue necesario aclarar de cara a los estudiantes de magisterio la función que tienen las distintas ciencias que lo estudian: la lógica se ocupa del lenguaje sin entrar en colisión con otras ciencias que se ocupan de él, como la semiótica, la sintaxis, la semántica y la pragmática. Estas reflexiones formaban parte del tema 1 de lógica de la asignatura de Educación Matemática Infantil, con lo que claramente se observa un enfoque lingüístico del razonamiento lógico-matemático para esta etapa de la educación.

Lenguajes

Enfocada la matemática como lenguaje, una de las primeras reflexiones que se realizan en el primer tema de lógica, es la distinción entre distintos tipos de lenguajes: lenguaje natural y lenguaje artificial.

Los lenguajes naturales se heredan y como ejemplo tenemos todas las lenguas creadas y perfeccionadas por la especie humana a lo largo de muchos siglos y que se transmiten a los individuos de una sociedad en los primeros años de su vida; es el lenguaje que se habla normalmente.

Los lenguajes artificiales se construyen en un tiempo relativamente menor, no se heredan ni se aprenden espontáneamente; como ejemplo tenemos los lenguajes que los científicos construyen y usan para expresar y manejar los conceptos de la ciencia correspondiente con mayor precisión y rigor (Castro y Coriat, 1997, p. 3).

El lenguaje cotidiano se considera un lenguaje natural muy útil para expresar sentimientos y comunicarnos con los demás, pero con una limitación importante desde el punto de vista matemático: no es preciso.

> Nuestro lenguaje cotidiano es un lenguaje natural y es de gran riqueza, permite expresar todos (o la mayoría de) nuestros sentimientos y comunicar y recibir información de los demás. Este lenguaje, sin embargo, no siempre es preciso: podemos con las mismas palabras indicar un sentimiento distinto dependiendo de la entonación (alegría, tristeza, rabia…). (p. 3)

Así pues, es la imprecisión o la falta de unicidad de significado de las expresiones que se utilizan lo que diferencia al lenguaje cotidiano del lenguaje matemático. «El lenguaje matemático es un ejemplo de lenguaje artificial; es más preciso, sus expresiones pretenden significar lo mismo para todos y en cualquier tipo de circunstancia» (p. 3).

Una vez establecidas las diferencias que existen entre los lenguajes naturales y artificiales, se lanza un mensaje importante relativo a las relaciones y a la interdependencia que tienen en común, así como su repercusión sobre el aprendizaje.

> No obstante, el lenguaje matemático básico, como cualquier otro lenguaje artificial, está muy ligado al lenguaje natural, es una depuración y a la vez un empobrecimiento de nuestro lenguaje cotidiano. Se comparten muchos vocablos del lenguaje común con

> el lenguaje matemático y en muchas ocasiones con significados distintos, lo que puede constituir un obstáculo en el aprendizaje de las matemáticas. Una gran dificultad, en dicho aprendizaje es mostrada por aquellos alumnos que tienen escaso dominio del lenguaje natural, ya que dicha falta se traduce en una merma de las capacidades de comprensión y expresión. (p. 3)

De lo anterior se desprende que el aprendizaje de la matemática está condicionado por la competencia que posea el estudiante en el lenguaje natural. Pero también se quiere dar un mensaje en el sentido contrario y resaltar que el lenguaje matemático también enriquece el lenguaje natural del estudiante, resaltando su dificultad de armonización en los primeros niveles escolares.

> Debido al resultado obtenido en numerosas investigaciones se está en condiciones de asegurar que el lenguaje natural y el matemático se refuerzan mutuamente. Entre las conclusiones que se obtuvieron en la reflexión realizada sobre la enseñanza la enseñanza las matemáticas en un Simposio celebrado en Valencia en el año 1987 figura, la siguiente: Las matemáticas brindan muchas posibilidades para el desarrollo de la precisión en el uso del lenguaje. Pero para que estas posibilidades se realicen es necesario que el aprendiz sepa que tiene el derecho de expresarse con imprecisión en las primeras etapas y es necesario que el profesor reconozca que ese derecho debe ser efectivamente ejercido. (p. 3)

Todo esto suscita la conexión entre el lenguaje natural y el lenguaje lógico- matemático. Si bien éste último se considera un lenguaje especializado no hay que olvidar que su aprendizaje se sustenta sobre el lenguaje natural (Coriat, 2010) y que en cierta medida es una ampliación del lenguaje natural. A este respecto y en este nivel de la educación infantil, el profesor Moisés Coriat rechaza la diferenciación entre el lenguaje natural y el lenguaje de las matemáticas, argumentando que «todas las áreas de la etapa de educación infantil se trabajan a través del idioma común, el español» (p. 1). Se rebela contra la asunción de un lenguaje matemático diferenciado del lenguaje natural que había sido aceptado por los matemáticos en la segunda mitad del siglo XX. Convierte así al lenguaje natural en el soporte básico para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, alejándose del rigor de la lógica formal.

Lógica natural y lógica formal

Puesto que la lógica se interpreta como lenguaje, la dualidad lenguaje natural/ lenguaje artificial, entre otras consideraciones, hace posible hablar de lógica natural y de lógica formal. La lógica natural es propia de los sujetos, los cuales la construyen espontáneamente a partir de las coordinaciones de las acciones; el desarrollo de la lógica natural hace posible la lógica formal. Para algunos autores, la formalización de la lógica es la culminación de un largo recorrido de construcción que se apoya en los procesos naturales de la inteligencia tanto de los niños como de los adultos. Por tanto, la ciencia de la Lógica construida por los lógicos «prolonga» el proceso natural de abstracción presente en los sujetos.

¿Qué es verdad?

Cuando se inicia el estudio de la lógica matemática en forma de lenguaje se introduce la noción de proposición como un enunciado respecto del cual se disponga de un criterio que nos permita afirmar que su contenido es o verdadero o falso, pero no ambas cosas a la vez. Esta definición se suele acompañar de ejemplos de tres tipos: enunciados verdaderos, enunciados falsos y enunciados de los que no disponemos de criterio para dilucidar sobre la veracidad o falsedad de su contenido.

Parece razonable pensar que esta información es suficiente para que el estudiante entienda lo que es una proposición, y se pasa a la simbolización de las proposiciones. Sin embargo, los estudiantes se sienten confundidos con la noción de verdad asociado a un enunciado proposicional. Esto es debido a que la verdad de un enunciado no está unívocamente determinada: puede ser absoluta o relativa, puede ajustarse a la naturaleza o basarse en normas.

Consciente de la desazón que produce en los alumnos la determinación de lo verdadero, el profesor Coriat (2010) profundiza en este concepto. Utiliza para ello las ideas del filósofo social y antropólogo Ernest Gellner:

> A partir de un determinado momento en la historia humana, es posible considerar dos tipos de verdades: *una verdad de tipo referencial* es cualquier enunciado correctamente unido a la naturaleza; en cambio, una *afirmación del concepto compartido* es cualquier enunciado conforme a las expectativas conceptuales normativas (p. 23).

Concluye que las matemáticas de hoy son un cúmulo estructurado de verdades del segundo tipo. A los matemáticos de hoy no les preocupa especialmente que sus enunciados tengan relación con la naturaleza. Con ello saca a la luz la problemática de la contraposición entre la matemática formal y la matemática escolar, pues la verdad en la matemática escolar no puede construirse sin la referencia a la naturaleza o a normas socialmente reconocidas.

Una estrategia metodológica

Para que los estudiantes de magisterio captasen el papel que desempeña la lógica matemática en el conocimiento matemático, el profesor Moisés Coriat consideró acertado realizar una aproximación a las ideas básicas de lógica matemática desde el lenguaje natural. Cree conveniente intentar que los estudiantes den significado a las nociones de verdadero y falso, propio de la lógica matemática, y que tan distantes les quedan a los estudiantes de magisterio cuando se les presenta en su envoltura formal. El problema de este abordaje lingüístico es cómo hacerlo que sea a la vez motivador para los estudiantes. Para ello Coriat (2010) recurre al libro «Juegos por siempre misteriosos» de Smullyan (1987) para mostrar el razonamiento lógico realizado mediante el lenguaje natural. El hecho de que sea un libro de divertimento matemático supuestamente aporta motivación a los estudiantes. Veamos un ejemplo de este enfoque adaptado del párrafo del mismo nombre de su manual (Coriat, 2010).

Preguntar bien es un arte; razonar, otro

Entre todos los pasajes del libro de Smullyan selecciona el capítulo titulado «Un laberinto interplanetario», correspondiente a la sección más general titulada: «La lógica de mentir y decir la verdad», del que realiza una adaptación con el fin de analizar las posibilidades lógicas de una situación bien definida y obtener conclusiones a partir de información obtenida, al que titula: «Preguntar bien es un arte, razonar, otro» (Coriat, 2010, p. 59). Empieza el apartado contextualizando la situación sobre la que se desarrolla el razonamiento.

> En Ganímedes —un satélite de Júpiter— hay un club conocido como el club marciano-venusino. Todos los socios son o de Marte o de Venus, aunque a veces se admiten visitantes. Un terrícola es incapaz de distinguir por la apariencia a los marcianos de los venusinos. Además, los terrícolas no pueden distinguir a los varones marcianos o venusinos de las mujeres, dado que se visten iguales. Sin embargo, los lógicos tienen una ventaja, dado que las mujeres venusinas siempre dicen la verdad y los varones venusinos siempre mienten. Los marcianos son lo opuesto; los varones marcianos dicen la verdad y las mujeres marcianas siempre mienten.

Tras esta contextualización, el profesor Coriat ve necesario clarificar la información dada mediante una tabla de doble entrada y continua.

> Un día Oona y su esposo lógico visitaron Ganimedes y les comentaron sobre ese club:
>
> —Te apuesto a que puedo distinguir a los varones de las mujeres y a los marcianos de los venusinos —le dijo el esposo orgullosamente a su esposa.
>
> —¿Cómo? —preguntó Oona.
>
> —Iremos al club esta noche, que es la noche de los visitantes, y te lo demostraré —dijo el esposo (cuyo nombre, a propósito, era George).

Reflexión 1

> Esa noche visitaron el club. Ahora, veamos qué puedes hacer —dijo Oona con un dejo de escepticismo—. El socio de allá. ¿Puedes descubrir si él o ella es varón o mujer?— Entonces George se acercó al socio y le hizo una sola pregunta a la que debía responder con sí o no. El socio respondió, y entonces George determinó si el socio era varón o mujer, aunque no pudo determinar si el socio era de Marte o de Venus.
>
> ¿Qué pregunta pudo haber sido?

Dificultades y errores

En sus propuestas docentes, Moisés Coriat incide en dos aspectos relativos al lenguaje: las dificultades matemáticas asociadas con el significado de expresiones que ya tienen un uso coloquial en el lenguaje natural, y los errores o falta de formación para expresarse correctamente en el idioma usual.

Dificultades asociadas al lenguaje

La premisa lingüística que asume el profesor Coriat es que hay escolares que fracasan en las actividades matemáticas que se les proponen porque no dominan el lenguaje matemático apropiado. Considera que desde la etapa de infantil los escolares van adquiriendo progresivamente tanto el lenguaje natural como el lenguaje especializado de las matemáticas. En este último caso los escolares deben desarrollar un lenguaje coherente que se ajuste a los principios lógico-matemáticos pertinentes. La presencia de términos o expresiones lingüísticas que se emplean tanto en el lenguaje natural como el lenguaje matemático conlleva que el alumno desarrolle la capacidad de saber distinguir los límites y condiciones a los que se ajustan en cada una de estos usos. Un primer paso deseable es el uso correcto de los términos lógicos; las investigaciones demuestran que cuando los estudiantes no aprenden a usar la lógica en términos correctos en las frases, tienden a usar esos mismos términos lógicos incorrectamente en las conclusiones.

Errores de escritura

En consonancia con lo anterior, el profesor Moisés Coriat subraya en su labor docente la importancia de que los maestros y profesores de matemáticas se expresen con precisión y claridad en nuestra lengua. De no ser así, dice, «resultará difícil, o imposible, transmitir buenos mensajes matemáticos» (Coriat, 2010, p. 1).

Durante varios años de su etapa como profesor estuvo recopilando errores ortográficos en los que incurrían alumnas de su asignatura. Redactó al respecto una serie de sugerencias y recomendaciones con el objeto de que los sus estudiantes distinguieran las formas ortográficas correctas del castellano, sobre todo en aquellas situaciones en las que se duda entre dos o más alternativas. Para ello se valía de diversas estrategias, como cuando intentaba acompañar sus consejos de sentido común y, en ocasiones, de anécdotas o rasgos culturales o poéticos. Este es el caso cuando habla del empleo de la «g» o la «j». En el cuadro vemos lo que decía en un pasaje al respecto:

Ortografía: «Juan Ramón Jiménez y la j»

Juan Ramón Jiménez, poeta de Moguer, no aceptaba la escritura "ge" o "gi", utilizaba para esos sonidos la j, escribiendo, por ejemplo, jeneral o jitano.

A pesar de ello, ganó el Premio Nobel de Literatura y, más importante que eso, nos emociona cada vez que leemos su Platero o sus poemas, como el que empieza diciendo:

«Te digo al llegar, madre,
que tú eres como el mar,
que aunque las olas
de tus años se cambien y te muden,
siempre es igual tu sitio
al paso de mi alma.»

¿Cuál es la moraleja? Una cosa es estar contra una norma de escritura y otra cosa es escribir de cualquier manera, porque no se sabe cuál es la manera correcta.

Referencias

Castro, Enc. y Castro, E. (2016). *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil*. Madrid, España: Pirámide.

Castro, Enc. y Coriat, M. (1997). *Educación Matemática Infantil. Tema 1. Lógica.* Documento no publicado. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Coriat, M. (2010). *Educación Matemática Infantil*. Granada, España: Autor.

Ministerio de Educación y Ciencia (1991a). Real Decreto 1440/1991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario, oficial de Maestro. *BOE, 244*, 33003-33006.

— (1991b). Real Decreto 1330/1991, de 6 de septiembre, por el que se establecen los aspectos del currículo de la educación infantil. *BOE, 215*, 29619-29622

— (1991c). Real Decreto 1333/1991, de 6 de septiembre, por el que se establece el currículo de la Educación Infantil. *BOE, 216*, 29716-29726.

— (2008). ORDEN ECI/3960/2007, de 19 de diciembre, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la educación infantil. *BOE, 5*, 1016-1036.

Smullyan, R. (1987). *Juegos por siempre peligrosos*. Barcelona, España: Gedisa.

LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESORADO DE EDUCACIÓN INFANTIL

Mathematical problem solving in the early childhood teachers training program

Elena Castro-Rodríguez y José Luis Lupiáñez
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se aborda la resolución de problemas matemáticos como un proceso fundamental a lo largo de toda la escolaridad y, especialmente, en la etapa de Educación Infantil. A partir de la caracterización de qué es un problema en Educación Infantil y de las cualidades que ha de cumplir para ser adecuado para los niños en esta etapa, presentamos ejemplos de problemas. Finalmente, se presenta el modo de trabajar la resolución de problemas matemáticos en la formación inicial del profesorado impartida en el Grado en Educación Infantil de la Universidad de Granada.

Palabras clave: Educación Infantil, formación inicial de profesores, resolución de problemas.

Abstract

In this paper we tackle mathematical problem solving as a fundamental process throughout the school and especially in the kindergarten stage. From the characterization of problem in early childhood education and the qualities that must meet to be suitable for children at this age, we present examples of problems. Finally, we present the way in which mathematical problem solving in the early childhood prospective teachers education is worked in the degree of Early Childhood Teacher Training Program at the University of Granada.

Keywords: *early childhood, early childhood teacher training program, problem solving.*

Introducción

En las últimas décadas, el ritmo de nuestra sociedad se ha acelerado vertiginosamente. La rapidez de estos cambios repercute en la práctica de la enseñanza en todos los niveles educativos, haciendo que cada vez sea más difícil preparar a los estudiantes para el futuro, pues no hay una forma precisa de conocer cuáles serán los próximos descubrimientos científicos o tecnológicos. A lo anterior se añade como factor determinante el tiempo que se requiere para aprender todo lo necesario sobre una ciencia y poder así estar preparados ante las eventualidades a que nos enfrentan los continuos cambios y demandas sociales. Estos nuevos retos implican asimismo un cambio de enfoque en la enseñanza y, por consiguiente, en la perspectiva que tienen los profesores sobre ella.

En el caso de las matemáticas, tradicionalmente los profesores han puesto demasiado énfasis en la acción y no el suficiente en el pensamiento, concentrando sus esfuerzos en que los estudiantes adquiriesen habilidades de cálculo. Sin embargo, actualmente ya no es necesario realizar cálculos complicados, las máquinas pueden hacerlos mucho mejor y más rápido que las personas. Las necesidades de hoy en día de los ciudadanos son relativas a competencias tales como la resolución de problemas. En este sentido, las empresas demandan cada vez más trabajadores que puedan analizar un problema e idear un medio para resolverlo. En consecuencia, todo ello nos lleva a que en la actualidad sigue vigente lo afirmado por Charles y Lester (1982) cuando declararon que los programas de matemáticas que no centran su atención en el desarrollo de la capacidad de los estudiantes para resolver problemas no son satisfactorios.

La resolución de problemas matemáticos en Educación Infantil

Al igual que en todas las etapas de la escolaridad, la resolución de problemas en la Educación Infantil es un medio importante para desarrollar el conocimiento matemático en los niños (Castro y Castro, 2016). La resolución de problemas significativos contribuye a desarrollar habilidades de pensamiento de orden superior y descubrir un repertorio de estrategias que prepararán al escolar para resolver nuevos problemas. En este sentido, los niños adquieren sentido de las ideas matemáticas mediante la participación activa en la resolución de una variedad de problemas matemáticos.

Diversos autores coinciden en que un problema en la escuela infantil es una tarea o planteamiento que presenta un reto para el niño, y en la que es necesario indagar para obtener la solución, ya que no sabe inmediatamente qué hacer para llegar a ella (Castro y Castro, 2016; National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000; Reys, Lindquist, Lambdin, Smith y Suydam, 2001; Van de Walle, 2001). Así, lo que para un resolutor puede ser un problema, para otro puede ser un simple ejercicio rutinario que provoca una respuesta inmediata. En estas edades, se enfatiza más aún esta característica, debido a diferentes factores como el desarrollo cognitivo de cada niño o la mayor o menor estimulación que haya recibido a priori.

Para los niños de estas edades, enfrentarse a retos y, por consiguiente, resolver problemas es algo natural. El mundo es nuevo para ellos y de manera innata muestran curiosidad y flexibilidad cuando se enfrentan a situaciones novedosas (NCTM, 2000). Los maestros han de preservar y estimular esta innata inclinación a resolver problemas, basándose en el conocimiento intuitivo e informal de las matemáticas, para poder así ampliarlo con el fin de consolidar esta favorable disposición a lo largo del tiempo.

Dentro de este marco, es pertinente hacerse la pregunta, ¿qué características ha de tener una tarea para ser un problema adecuado en la etapa de Educación Infantil? En general seleccionar problemas no es fácil, y menos aún para los niños de estas edades. Para ello, algunos autores destacan ciertas características que tiene que tener una tarea para ser un buen problema en esta etapa (Nelson y Kirkpatrick, 1975, p. 75).

— La tarea debe ser matemáticamente significativa.
— La tarea debe estar contextualizada en situaciones comprensibles y cercanas al niño. Estas no tienen que ser reales, pueden ser cuentos o historias infantiles.
— La tarea debe involucrar materiales atractivos para los niños, físicos o simulaciones de objetos reales, para poder manipularlos y hacer transformaciones.
— La tarea ha de permitir distintos niveles de solución.
— A partir de la tarea, ha de ser posible crear otras situaciones que involucren la misma estructura matemática, para que el niño pueda llegar a generalizar la solución y establecer relaciones.
— El niño debe estar convencido que puede resolver la tarea y debe ser capaz de saber cuándo ha alcanzado su solución.

Ejemplos de problemas matemáticos en Educación Infantil

Atendiendo a las características anteriormente descritas, no todas las tareas pueden considerarse buenos problemas para la etapa de infantil. Un ejemplo que proponen los mismos autores es el siguiente. Se presenta un camión de juguete, cubos o bloques que puedan ser transportados en el remolque del camión y una cartulina o una tabla donde se vea reflejada una carreta y diversas casas para el camión como muestra la Figura 1.

Figura 1. *Representación del problema del camión*

El reto a plantear sería:

> «El camión transporta en su remolque todos los bloques (por ejemplo 12) para entregarlos en las casas. En cada casa el camión tiene que dejar 3 bloques, ¿en qué casa se quedará sin bloques?» (Nelson y Kirkpatrick, 1975, p. 83)

Otras variantes de la misma situación podrían ser las siguientes.

> «El camión parte al inicio con tres bloques en su remolque y en cada estación hay distintos números de bloques. ¿En cuántas estaciones puede el camión recoger tres bloques si solo puede transportar como máximo 12 bloques?».
>
> «El camión inicia el recorrido vacío y en cada estación hay distinto número de bloques. ¿En cuántas estaciones puede el camión recoger tres bloques si el camión solo puede transportar como máximo 12 bloques?».

Como se observa, la división es el tópico matemático que subyace en las situaciones anteriores. Este tópico suele presentar dificultades para los niños de estas edades, lo que podría ser aliviado presentando diversos problemas que involucren acciones asociadas al proceso de dividir. Es importante que el niño afronte tantos problemas como sean necesarios para generalizar la acción ligada a esta noción. En cada caso, el total de números de objetos y subgrupos puede variar. Un ejemplo de tarea similar, que involucra la misma estructura matemática, puede ser el siguiente. Se presentan varios coches de juguete (12 por ejemplo), un barco (ferri) y una tabla o cartulina con un río pintado como muestra la Figura 2. El reto que se plantearía a los niños sería el siguiente.

> «Este barco es usado para llevar a los coches de un lado a otro de la orilla del río. Si el barco sólo puede llevar cuatro coches a la vez, ¿cuántos viajes tiene que hacer el barco para trasladar a todos los coches de una orilla a la otra?» (Nelson y Kirkpatrick, 1975, p. 73)

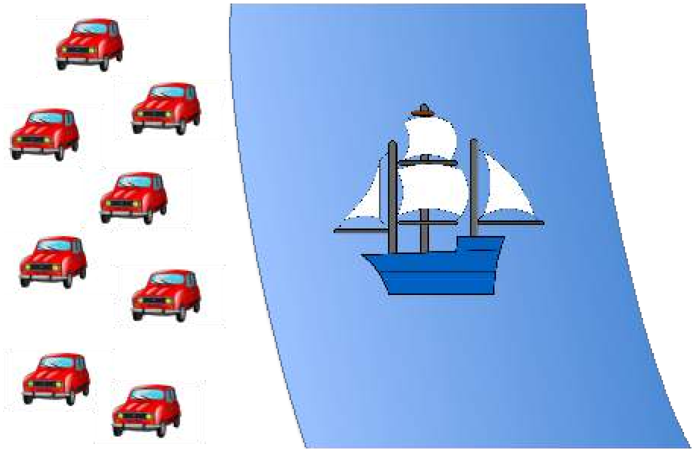


Figura 2. *Representación del problema del ferri*

Los ejemplos de problemas anteriores son considerados problemas tradicionales de enunciado verbal. No obstante, en el aula también pueden plantearse problemas no rutinarios, problemas basados en patrones o problemas que contemplen materiales manipulativos estructurados como los bloques lógicos, regletas de Cuisinaire o las plaquetas de Herbinière-Lebert, pues en cada uno de los casos se desarrollaran habilidades diferentes (Castro y Castro, 2016).

La resolución de problemas matemáticos en la formación inicial de maestros de Educación Infantil

En la formación inicial de maestros de Educación Infantil impartida en la Universidad de Granada, la resolución de problemas adquiere un papel relevante. Los estudiantes de esta especialidad deben cursar obligatoriamente dos asignaturas del área de Didáctica de la Matemática: Bases Matemáticas para la Educación Infantil y Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil. En cada una de ellas, la resolución de problemas está presente de distinto modo.

La resolución de problemas en la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Infantil

En la asignatura «Bases Matemáticas para la Educación Infantil», las vías en las que se incorpora la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas son dos: enseñar a través de la resolución de problemas y enseñar para la resolución de problemas.

En la enseñanza a través de la resolución de problemas llevada a cabo en esta asignatura, la resolución de problemas se utiliza como método de enseñanza y forma de aprender matemáticas. «Partiendo de un problema se insta a los estudiantes a que indaguen su solución. Durante el proceso de resolución se reorganizan los conocimientos y surgen nuevos aprendizajes» (Castro y Ruiz-Hidalgo, 2015, p. 98). Un ejemplo de problema utilizado para introducir conceptos relativos a las nociones de agrupamiento y base es el siguiente.

> En una fábrica de caramelos el empaquetado de los mismos se hace de la siguiente forma: tubos de 5 caramelos, paquetes de 5 tubos y cajas de 5 paquetes. Un empleado indica que en una hora se han fabricado 2 paquetes, 4 cajas y un tubo. Escribe el número que representa los caramelos fabricados en esa hora. Indica la base del sistema en que estaría escrito dicho número. En la hora siguiente la fabricación ha sido de 785 caramelos. Escribe esa cantidad de caramelos de forma que se perciban los paquetes, cajas, tubos y caramelos sueltos que se formarán.

De manera simultánea a la anterior vía, también se desarrolla una enseñanza para la resolución de problemas. Para cada uno de los temas que estructuran la asignatura (lógica, geometría, espacio, números, estructuras aritméticas y medida y magnitudes) los estudiantes utilizan el conocimiento adquirido para resolver problemas presentes en un guión de aprendizaje de cada uno de los temas. De esta manera, los estudiantes tienen la oportunidad de desarrollar sus propias habilidades para resolver problemas. En este caso, la estrategia de instrucción que adopta el docente «se centra en organizar secuencias de tareas, de manera que el conocimiento matemático recibido pueda ser aplicado en la resolución de problemas de distinto nivel de complejidad». (Castro y Ruíz-Hidalgo, 2015, p. 95)

La resolución de problemas en la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil

En la asignatura «Desarrollo del Pensamiento Matemático Infantil», los estudiantes pasan de ser resolutores de problemas, a futuros profesores que deberán proponer problemas a sus alumnos. El propósito general de esta asignatura, según la guía docente es «conseguir que el futuro maestro valore la importancia del pensamiento matemático en la etapa educativa infantil como uno de los pilares que configuran las características de la persona en el primer periodo de su vida, conozca los elementos que lo configuran y adquiera capacidad para realizar propuestas didácticas para su desarrollo en el ámbito escolar» (Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, 2015, p. 2).

Dentro de este marco, el docente incita a los estudiantes a reflexionar sobre cómo introducir la resolución de problemas en el contexto de la enseñanza de las matemáticas en Educación Infantil, y la importancia del desarrollo de las habilidades matemáticas a través de la resolución de problemas. Otros de los puntos en los que se centran estas reflexiones, algunos de los cuales destacan Felmer, Perdomo-Díaz, Cisternas, Cea, Raldolph y Medel (2015), son los siguientes.

— Qué es un buen problema y qué es una tarea rutinaria.
— Cómo animar a los escolares a usar las matemáticas que van aprendiendo para desarrollar estrategias de resolución de problemas.
— Cómo tratar la resolución de problemas. Qué matemáticas son necesarias desde un punto de vista práctico e integrar la resolución de problemas en el contexto de situaciones matemáticas. Es decir, elegir determinados problemas porque son apropiados para sugerir estrategias particulares y permiten el desarrollo de ciertas ideas y conceptos matemáticos.
— Cuándo pedir a sus alumnos que reflexionen sobre sus respuestas, las expliquen y las justifiquen, cuándo proporcionar retroalimentación y cuándo abstenerse.

Además, durante el desarrollo de la asignatura, los futuros maestros tienen la oportunidad proponer e inventar problemas tanto aislados como en el marco de la realización unidades didácticas, ya que es una disposición matemática que los profesores han de cultivar y desarrollar (NCTM, 2000).

Ideas sobre la resolución de problemas de Moisés Coriat

Una de las finalidades de las asignaturas que el Departamento de Didáctica de la Matemática imparte para la formación inicial de profesores de educación infantil en la Universidad de Granada, es la de ayudar a los alumnos universitarios a superar las limitaciones que les hayan hecho creer que no son buenos en Matemáticas. Bajo este supuesto y partiendo de la idea de que las matemáticas se aprenden resolviendo problemas, Moisés Coriat elaboró el libro «Educación Matemática Infantil» (Coriat, 2010). Este libro está estructurado en cuatro capítulos relativos a los contenidos matemáticos propios de la Educación Infantil: lógica y lenguaje, espacio y geometría, aritmética, y magnitudes y su medida. En cada uno de los capítulos la resolución de problemas se presenta de manera transversal incorporada en los apartados que titula «reflexiones». En ellos realiza propuestas no solo de resolución sino también de invención de problemas. Además de los problemas que se incluyen en cada uno de los bloques temáticos, el libro presenta un compendio de problemas en un capítulo final, denominado «Problemas para disfrutar y aprender». Este capítulo contiene una primera lista de problemas cerrados y una segunda lista de problemas abiertos, para que los escolares puedan reflexionar, practicar y ejercitar lo aprendido. A continuación, presentamos un ejemplo de cada uno de estos dos tipos de problemas.

— Problema 1: «El propietario de un problema triangular lo dejó en herencia a sus cuatro hijos, con la condición de que lo repartieran en 4 triángulos de la misma superficie. ¿Quiere ayudar a los herederos en el reparto? (Puede usar regla y compás)» (p. 348).
— Problema 2: «Elabore tres itinerarios para ir desde Granada hasta Madrid usando un mapa de carreteras. Haga un croquis de uno de ellos. (No cambie solamente los horarios y las paradas, modifique también los recorridos)» (p. 177).

Para estimular y ayudar a sus alumnos a ser buenos resolutores, les daba una serie de consejos como lo que transcribimos a continuación:

> Realice los problemas que les apetezca y procure hacerlos en su satisfacción. Cuando tenga una respuesta hable con sus compañeras o con su profesor, piense que un problema se acabará cuando quiera darlo por terminado, ya que toda solución satisfactoria genera nuevas preguntas. Tómese esas nuevas preguntas como un estudio especial que usted va a realizar voluntariamente. Consulte con otras personas tantas veces como sea necesario. (p. 331)

Como muestra lo anteriormente expuesto, a lo largo de su carrera como docente, Moisés Coriat tuvo un gran interés por mejorar la formación sobre resolución de problemas de los futuros maestros de Educación Infantil.

Referencias

Castro, En. y Castro, E. (2016). Matemáticas en educación infantil. En En. Castro y E. Castro (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Infantil* (pp. 19-42). Madrid, España: Pirámide.

Castro, E y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Matemáticas y resolución de problemas. En P. Flores y L. Rico (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en primaria* (pp. 89-106). Madrid, España: Pirámide.

Charles, R. y Lester, F. (1982). *Teaching problem solving: What, why and how*. Palo Alto, CA: Dale Seymour Pub.

Coriat, M. (2010). *Educación Matemática Infantil.* Granada, España: Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada.

Departamento de Didáctica de la Matemática (2015). *Guía docente de la asignatura Desarrollo del Pensamiento Matemático*

Infantil. Universidad de Granada. Disponible en http://grados.ugr.es/infantil/pages/infoacademica/desarrollodelpensamientomatematicoinfantil/

FELMER, P., PERDOMO-DÍAZ, J., CISTERNAS, T., CEA, F., RANDOLPH, V. y MEDEL, L. (2015). La resolución de problemas en la matemática escolar y en la formación inicial docente. *Estudios Política Educativa*, *1*(1), 64-105.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2000). *Principios y estándares para la Educación Matemática*. Sevilla, España: SAEM Thales.

NELSON, I. D. y KIRKPATRICK, J. (1975). Problem solving. En J. N. Payne (Ed.), *Mathematics learning in early chillhood* (pp. 69-94). Virginia, VA: NCTM.

REYS, R. E., LINDQUIST, M. M., LAMBDIN, D. V., SMITH, N. L. y SUYDAM, M. N. (2001). *Helping children learn mathemamtics.* Nueva York, NY: John Wiley & sons.

VAN DE WALLE, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally* (4ª ed.). Nueva York, NY: Addison Wesley Longman.

LA MISMA VARA DE MEDIR

The same vara for measuring

Francisco Fernández García
Universidad de Granada

Resumen

La enseñanza de las matemáticas escolares se refuerza cuando tiene un soporte histórico y cultural, transmitido entre generaciones, como un proceso intrínsecamente humano. Este trabajo hace un breve recorrido por el complejo e impetuoso nacimiento del metro. La implantación de unidades de medida de amplia aceptación ha ido acorde con el avance del comercio, con todas sus implicaciones políticas y, por ende, militares. En este contexto, las consideraciones que se exponen pueden ser útiles para el profesorado cuando aborde el tratamiento amplio del sentido matemático de la medida. La creación de un sistema de medidas basado en la idea de que personas iguales deben ser iguales ante la ley y deben ser medidas con la misma vara, se materializa en plena corriente del pensamiento ilustrado, cuyos principios, basados en la razón, la igualdad y la libertad, hace suyos la Revolución Francesa del 14 de julio de 1789.

Palabras clave: enseñanza de la matemática, medida, metro, sistema métrico, unidad de medida.

Abstract

The teaching of school mathematics is strengthened when it has a historical and cultural support, transmitted across generations, as an inherently human process. This paper makes a brief tour of the complex and impetuous birth of the meter. The implementation of the measurement units has been widely accepted in accordance with the progress of trade, with all its political implications and therefore military. In this context, the considerations set can be useful for teachers when addressing the broad sense of the mathematical treatment of the measure. The creation of a system of measures based on the idea that the same people should be equal before the law and must be measured by the same vara, *materializes in full current of enlightenment thinking, whose principles based on reason, equality and freedom, endorses the French Revolution 14 of July, 1789.*

Keywords: *measurement, measurement unit, meter, metric system, teaching mathematics.*

«Es comprensible que las naciones jamás estarán de acuerdo hasta el punto de aceptar en conjunto las mismas pesas y medidas. Sin embargo, ello es perfectamente posible bajo el imperio de un solo soberano». Esta visión premonitoria de la globalización está contenida en el apartado de «Mesure» (Medida) de la «Encyclopèdie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts et des Mètiers» (MDCCLI), obra cumbre del racionalismo francés que caracteriza a toda una época.

La necesidad de medir y, con ella, la de disponer de unas unidades nace con la sociedad humana. Cuando en las comunidades primitivas surge la división del trabajo, se produce el intercambio de bienes y, con base en ello, aparece la necesidad de medirlos y cuantificarlos en función de alguna unidad.

Es fácil contar gallinas o cabras, pero no es tan fácil medir trigo o cebada y, así, nacieron las primeras unidades de masa y de capacidad. Más tarde, con la aparición de registros escritos y la propiedad de las tierras se hace necesario medir longitudes y superficies.

En los primeros tiempos de la historia del hombre, los intercambios de comida no exigían sistemas de unidades más complejos que un cuenco, una pesa o una vara. Pero, con el nacimiento de reinos e imperios cada vez más extensos, aparece el comercio y, en consecuencia, la necesidad de unidades reproducibles en diferentes lugares.

Un ejemplo se observa en el juicio de los muertos, los dioses pesan las buenas y malas acciones del difunto

Figura 1. *Ejemplo de pesos y unidades*

En las actuales Irán e Irak existieron reinos, hacia el cuarto milenio antes de Cristo, de los que se han encontrado restos que muestran la existencia de las primeras unidades. Un ejemplo es un sistema de medidas de capacidad basado en la cebada que, además de ser el principal alimento, hacía las veces de unidad monetaria, además del sistema sexagesimal babilónico e, incluso, de un primitivo sistema decimal precursor del actual.

Los egipcios, griegos y romanos fueron utilizando diferentes unidades, con mayor o menor fortuna, en función casi siempre de la potencia política y militar del momento.

Tras la caída del Imperio Romano, cuya larga estabilidad provoca el auge del comercio y de las comunicaciones, lo que conlleva a una unificación de las unidades bastante extensa. Cada villa y cada ciudad impone sus unidades, incluso bajo el mismo señor feudal, lo que da lugar a todo tipo de arbitrariedades en función del interés del señor, tanto en un sentido como en otro, ya sea para obtener mayores tributos o para atraer nuevos colonos a las tierras.

Durante toda la Edad Media y en toda Europa se mantuvo una lucha entre los señores que querían conservar sus derechos y los reyes que, de acuerdo con las teorías absolutistas, pretendían controlar un aspecto tan importante de la vida social y sobre todo comercial.

Pero en el siglo XVIII surge una nueva forma de ver el mundo que iba a afectar fuertemente a todo el problema de las unidades: el racionalismo. Esta filosofía estaba centrada en la potencia militar de la época. Francia pronto observa la irracionalidad de medir cada uno con su patrón y surgen las primeras voces pidiendo la unificación de las medidas de lo que por entonces se conocía como «las naciones civilizadas», voces que ya tienen nombre propio y que son protagonistas de una interesante lucha entre la racionalidad científica y la irracionalidad del juego político entre las naciones.

El sistema métrico decimal fue creado, en buena parte, para atender las reclamaciones de la gente para evitar que los comerciantes y señores feudales, que recibían los pagos de sus rentas en especie, no abusaran de compradores y siervos. El sistema métrico nació con una idea de justicia en mente, que sostiene que personas iguales deben ser iguales ante la ley y deben ser medidas con la misma vara, es decir, igualdad entre las personas implica igualdad de las medidas.

Nace el metro

En la citada enciclopedia (1751) se reflejan las contradicciones que agitan a sus autores. La cita del inicio de este capítulo sobre la posibilidad de crear medidas universales choca con otras dentro de la misma obra como en la que, bajo el apartado «Poids» (Peso), se dice: «La diversificación de las pesas es una molestia muy grande en el comercio, …, una sola pesa común no sólo es imposible, sino también lo es su establecimiento dentro de los límites de un país».

Entre tantas contradicciones, un puñado de soñadores no se sentirán amedrentados por el fracaso y, a partir de aquí, con la conciencia de la necesidad de la unificación, las propuestas se suceden, tomando como idea explícita la de un sistema decimal, acorde con el sistema de numeración generalizado en toda la civilización occidental y que, en último término, proviene del prosaico hecho de que la especie humana dispone de 10 dedos en las manos.

En medio de este debate, la agitación social en Francia crece rápidamente, gestándose la Revolución Francesa, que estallaría el 14 de abril de 1789, con la toma de la cárcel parisina de La Bastilla. El cambio político y social que provoca tendría un papel destacado en el nacimiento del metro y de su sistema de unidades.

Una de las ideas básicas de los primeros momentos de la Revolución Francesa era que cualquier cosa establecida por el Antiguo Régimen debía desaparecer y pronto cayó en el punto de mira de los dirigentes revolucionarios el conjunto de unidades definidas, controladas y custodiadas por los reyes y no solo las unidades de masa, longitud o capacidad, sino, incluso, las de tiempo. Y, así, cambiaron el calendario llamando a cada mes de acuerdo a alguna característica propia (Febrero paso a ser Brumario, por las brumas; Junio, Mesidor, por la recogida de la mies) y comenzaron a contar los años a partir de 1792, que pasó a ser el año I. Esta fiebre de cambiar las cosas tuvo un papel fundamental a la hora de impulsar seriamente el estudio y diseño de un sistema racional homologable en el mundo de la ciencia, del comercio y de las relaciones entre las naciones. Pero una cosa es cambiar de nombre a las cosas y otra muy distinta crear unas unidades nuevas, precisas y coherentes; el desarrollo posterior de los acontecimientos mostró lo difícil de la empresa.

En 1790 entra en juego un personaje capital en esta historia: Talleyrand, obispo de Autun (Francia), que propone fijar un prototipo de unidad de longitud «tomado de la Naturaleza» y, por tanto, aceptable por todas las naciones.

Propone que el tema sea estudiado conjuntamente por la Asamblea Nacional y la Academia de Ciencias francesas y por el Parlamento y la Royal Society inglesas. Con ello se da el primer paso para la «internacionalización» del sistema y de su estudio.

El sistema de unidades del Antiguo Régimen había sido abolido el 4 de agosto de 1789 y, después de un período en que la definición de unidad de longitud había permanecido en una situación nebulosa, una Comisión integrada por, entre otros, Lagrange y Condorcet propone, en 1792, como longitud de referencia la de la cuarta parte del meridiano terrestre. Rechazan así otras propuestas basadas en el arco del Ecuador por la dificultad de hacer observaciones en él. A partir de aquí se definió la unidad fundamental o «metro» como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano.

En el proyecto trabaja lo mejor de la ciencia francesa pero, entonces, surge una depuración basada en ideas políticas y no científicas, acompañada de su característica fraseología: «El Comité de Seguridad Pública, teniendo en cuenta cuán importante es para la mejora del Espíritu Público que los encargados de gobernar confíen las misiones únicamente a los hombres dignos de confianza por sus virtudes republicanas y su odio hacia los reyes…». Se expulsa a la flor y nata de la ciencia francesa: Borde, Lavoisier, Laplace, entre otros.

Sin embargo, es difícil hacer nada sin Lavoisier, que asiste a las sesiones de la Comisión escoltado por gendarmes y traído directamente de la prisión en donde estaba arrestado. Lavoisier fue guillotinado el 8 de mayo de 1794, cuando tenía 50 años, después de que el presidente del tribunal, tras numerosos testimonios relevantes a su favor, pronunció la famosa frase: «La república no precisa ni científicos ni químicos, no se puede detener la acción de la justicia».

La internacionalización de los trabajos prosigue y colaboran los españoles Jorge Juan y Antonio de Ulloa (marinos y científicos) desde Perú y, especialmente, Gabriel Císcar (teniente de fragata y catedrático de matemáticas de la Escuela de Guardiamarinas de Cartagena) desde Francia y España.

Los cálculos se centran en la medición de un meridiano terrestre. Pero como no era posible medirlo entero, se pensó en un arco bastante extenso al Norte y al Sur del paralelo 45, eligiéndose la parte de meridiano comprendida entre Dunquerque y Barcelona, cuyos extremos se encuentran al nivel del mar. Ejemplo de la complejidad de estos trabajos es la medición, mediante triangulación a través de reglas de platino, graduadas en toesas (las antiguas unidades), de las diferencias de latitudes y longitudes del tramo recto de la carretera que va de Melun a Lieusaint (en el departamento de Seine-et-Marne), con una longitud de diecisiete kilómetros trescientos ochenta y cinco metros (según la definición de metro como fracción de arco meridiano), medición en la que tardaron 45 días.

Por fin, el 1 de agosto de 1793 se pone en vigor el metro, con valor legal según los cálculos de todos los trabajos realizados por los ingenieros, matemáticos y científicos. Esta situación provocó en Francia una gran expectativa y todo el mundo, autoridades administrativas, asociaciones sociales, científicos, inventores, municipios, etc., pedían modelos (físicos) del metro recién definido.

La dotación a toda Francia de juegos completos de medidas y pesas de forma, dimensiones y peso exactamente iguales a los modelos definidos tuvo problemas logísticos por la falta de materia prima. Se había pedido ésta al ejército pero, en tiempos de la Revolución, el metro y el resto de unidades no podían competir con los cañones, por lo que se echó mano de las campanas de las iglesias, mientras el ejército se limitó a transportar el material.

Si el nacimiento del metro fue impetuoso y complejo, la adopción del sistema métrico en los países europeos fue demasiado lenta y, en algunos de ellos, de más de ochenta años. El primer país fue Bélgica en 1816. En España se adoptó oficialmente el 19 de julio de 1849. En Francia, curiosamente, no se aplicó hasta el 4 de julio de 1837 por haberlo derogado Napoleón en 1812, restableciendo el antiguo sistema de los reyes, el de la toesa como unidad de longitud.

Para establecer los prototipos internacionales del metro se partió de los patrones franceses y en 1875 se formó la Convención del Metro, que crea la Oficina Internacional de Pesas y Medidas, con sede en el pabellón de Breteuil, en Sévres. Su misión era conservar dichos patrones franceses y construir copias homologadas que sirvieran de modelo para compararlo con los patrones nacionales de cada estado miembro.

Finalmente, el 26 de septiembre de 1889 se construyen treinta copias de los patrones, que se sortearon entre los distintos estados asistentes a la Convención. A España le correspondió entonces la copia nº 24 del metro, y, en un sorteo posterior de los que sobraron, España se hizo con la copia nº 17. Estos prototipos están depositados en el

Centro Español de Metrología, con sede en Madrid, y están construidos en forma de barra de platino puro aleado con un 10 % de iridio puro, diseñada de manera que las deformaciones de la barra por flexión fueran mínimas, para evitar errores.

En España se instauran, por ley, las nuevas unidades de medida el 19 de julio de 1849, de la que se pueden destacar alguno de sus artículos:

> DOÑA ISABEL II, por la Gracia de Dios y la Constitución de la monarquía española, Reina de las Españas, a todos los que la presente vieren y entendieren, sabed: que las Cortes han decretado y Nos sancionado lo siguiente:
>
> Artículo 1º. En todos los dominios españoles habrá un solo sistema de medidas y pesas.
>
> Artículo 2º. La unidad fundamental de este sistema será igual en su longitud a la diezmillonésima parte del arco del meridiano que va del polo Norte al Ecuador y se llamará metro.
>
> Artículo 3º. El patrón de este metro hecho de platino, que se guarda en el Conservatorio de Artes y que fue calculado por don Gabriel Císcar y construido y ajustado por él mismo y don Agustín Pedrayes se declara patrón prototipo y legal y con arreglo a él se ajustarán todas las del Reino. El gobierno, sin embargo, se asegurará previa y nuevamente de la rigurosa exactitud del prototipo, el cual se conservará en el Archivo Nacional de Simancas.
>
> Artículo 4º. Su longitud a la temperatura cero grados centígrados es la legal y matemática del metro.
>
> …
>
> Artículo 11º. En todas las escuelas públicas o particulares en que se enseñe o deba enseñarse la aritmética o cualquiera otra parte de las matemáticas, será obligatoria la del sistema legal de medidas y pesas y su nomenclatura científica, desde 1.º de enero de 1852, quedando facultado el gobierno para cerrar dichos establecimientos siempre que no se cumpla con aquella obligación.
>
> Artículo 12º. El mismo sistema legal y su nomenclatura científica deberán quedar establecidos en todas las dependencias del estado y de la administración provincial, inclusas las posesiones de Ultramar para 1.º de enero de 1853.
>
> Artículo 13º. Desde la misma época serán también obligatorios en la redacción de las sentencias de los tribunales y de los contratos públicos.
>
> …
>
> Artículo 15º. Los nuevos tipos o patrones llevarán grabado su nombre respectivo.
>
> Artículo 16.º El gobierno publicará un reglamento determinando el tiempo, lugar y modo de procederse anualmente a la comprobación de pesas y medidas, y los medios de vigilar y evitar los abusos.
>
> Artículo 17º. Los contraventores a esta ley quedan sujetos a las penas que señalan o señalaren las leyes contra los que emplean pesas y medidas no contrastadas.
>
> …
>
> Dado en San Ildefonso a 19 de julio de 1849.- Está rubricado de la real mano.- El ministro de Comercio, Instrucción y Obras Públicas, Juan Bravo Murillo.

Simultáneamente, se construye y adopta el prototipo de kilogramo, unidad de masa de historia paralela a la del metro, y que toma forma de cilindro de 39 mm de altura por 39 mm de diámetro, construido en el mismo material que el metro y depositado junto con éste en el pabellón de Breteuil.

El avance científico exigió pronto otras unidades adecuadamente definidas. El litro se definió en 1901 como «el volumen ocupado por una masa de un kilogramo de agua pura, a su máxima densidad y a la presión atmosférica normal». Posteriormente, y en coherencia con el sistema métrico, se definió como unidad de volumen al metro cúbico (m^3), de manera que un m^3 son 1000 dm^3 que equivale a 1000 litros. En la Figura 1 se muestra un cartel elaborado por Faustino Paluzie (1833-1901), un editor relevante de libros educativos y material de enseñanza escolar.

El metro cambia sin cambiar de tamaño

El metro original estaba definido en función del tamaño de la Tierra: era «la diezmillonésima parte de un cuadrante del meridiano terrestre». De esta manera, una vuelta a la Tierra es cuatro veces diez millones de metros (40.000 km). Pero esta definición tenía el inconveniente de que, puesto que la Tierra no es esférica, según por dónde demos la vuelta las distancias no son iguales y cambiará la longitud del metro así definido.

Esto provocó que se adoptara como metro una definición basada en un objeto real, concretamente la barra tomada como prototipo en 1889. Así, en la VII Conferencia general de Pesas y Medidas, el metro pasó a ser «la distancia a 0 °C entre los ejes medios de dos trazos trazados sobre la barra de platino iridiado depositada en la Oficina Internacional de Pesas y Medidas y declarada prototipo del metro por la I Conferencia General de Pesas y Medidas, estando dicha regla sometida a la presión atmosférica normal y soportada por dos rodillos de, al menos, un centímetro de diámetro situados simétricamente en un mismo plano horizontal y a la distancia de 571 mm el uno del otro». Se daba la temperatura a que había que medirlo (0 °C) ya que la dilatación hacía variar la longitud del prototipo.

Como todo patrón material, el metro está sujeto a deformaciones y, en este aspecto, lo ideal era buscar un patrón que no estuviera hecho de materia, y el material más adecuado al respecto era la luz.

En 1960, en la XI Conferencia General de Pesas y Medidas se hace una nueva definición basada en una radiación emitida por un isótopo del kriptón, que era unas veinte veces más precisa que la del patrón de platino iridiado.

Según esta nueva definición «el metro es igual a 1.650.763,73 longitudes de onda de la radiación electromagnética emitida por el isótopo 86Kr en su transición entre los estados 2p10 y 5d5». Evidentemente una mayor precisión implica una mayor complicación, y la definición se hace ininteligible para quien no posea los necesarios conocimientos científicos.

La aparición, en el mismo año 1960, de los aparatos láser con una sola longitud de onda de luz emitida, que permite una mayor precisión, hace que la definición anterior quede desfasada.

Por último, la Teoría de la Relatividad que predice la invariabilidad de la velocidad de la luz, aconseja adoptar un patrón relacionado con ésta, combinada con medidas de tiempo basadas en relojes atómicos y, así, en 1983 se adopta la definición de metro actualmente en vigor (¿por cuántos años?). El metro pasa a ser «la distancia recorrida por la luz en 1/299.792.458 segundos». Esta definición se basa en el convenio adoptado por la comunidad científica internacional de que la velocidad de la luz es de 299.792.458 ms^{-1} exactamente, con lo que espacio y tiempo quedan ligados mediante una propiedad de la naturaleza no dependiente de ningún objeto material.

Con ello se respeta la idea de aquellos pioneros del siglo XVIII, que comprendieron que sólo patrones de estas características podían satisfacer a todas las naciones y a todas las mentes científicas del mundo.

Hoy día, el Sistema Métrico Internacional (S.I.) es un lenguaje que se usa en el mundo entero (sólo tres países no lo han adoptado completamente: Liberia, Myanmar y Estados Unidos). Esta unificación metrológica se puede considerar, según Witold Kula (1980), como el más importante de los procesos históricos del hombre en el proceso de unificación de la humanidad.

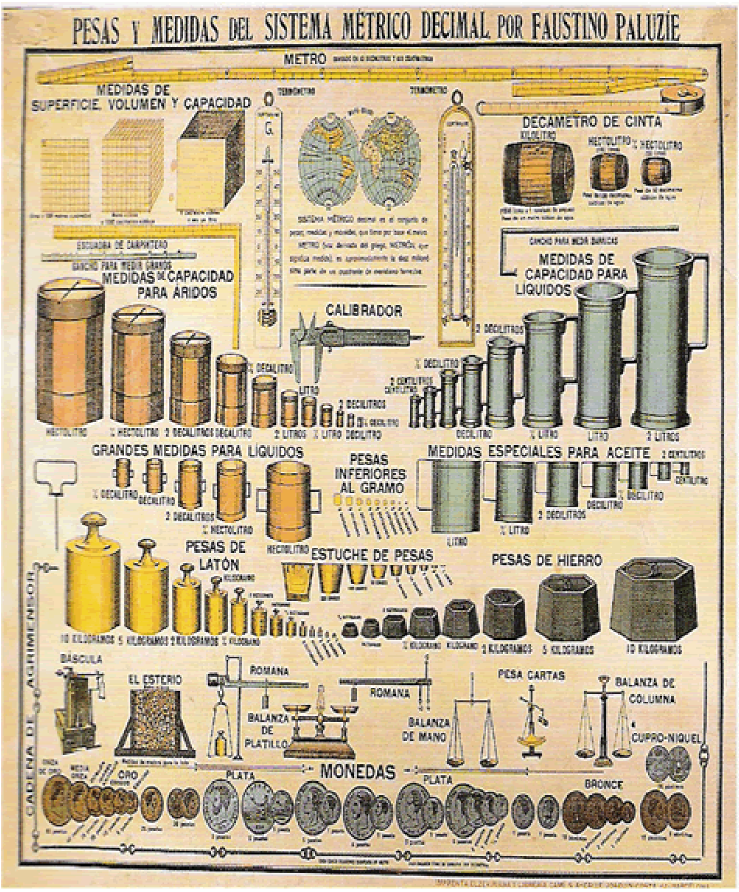


Figura 2. *Cartel elaborado por Faustino Paluzie*

Referencias

Basas, M. (1962). *Introducción en España del Sistema Métrico Decimal*. Milán, Italia: Giuffre.

Grupo Blas Cabrera Felipe (1990). *El Sistema Métrico cumple 200 años*. Apuntes dirigidos al profesorado de centros experimentales anteriores a la LOGSE. Trabajo sin publicar. Disponible en www.grupoblascabrera.org

Kula, W. (1980). *Las medidas y los hombres*. México, DF: Siglo XXI.

Puente, G. (1982). El sistema métrico decimal: su importancia y su implantación en España. *Cuadernos de Historia Contemporánea, 3,* 95-126.

Vera, H. y Hocquet, J. C. (2007). *A peso el kilo*. México, DF: Libros del Escarabajo.

TRES TAREAS PARA ENSEÑAR A ENSEÑAR GEOMETRIA

Three taks to teach how to teach geometry

Rafael Ramírez Uclés y Aurora del Río Cabeza
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se describen tres sesiones llevadas a cabo con estudiantes del Grado de Maestro en Educación Primaria en las asignaturas de (a) Bases Matemáticas en Educación Primaria, (b) Enseñanza y Aprendizaje de las Aatemáticas y (c) Diseño y Desarrollo del Currículo en Educación Primaria. Contextualizadas en los temas relativos a geometría y medida, presentan una estructura común basada en el trabajo cooperativo y la utilización de la aplicación Whatsapp para intercambiar mensajes. Se focaliza el trabajo de los estudiantes en reflexionar sobre los diferentes elementos del análisis didáctico que se abordan en cada uno de los cursos.

Palabras clave: análisis didáctico, formación del profesorado de educación primaria, sentido espacial, sentido de la medida, tareas significativas, Whatsapp.

Abstract

In this work we describe three sessions developed with students of the Degree on Primary Education Teacher Training in the courses (a) Mathematical Bases in Primary Education, (b) Teaching and Learning Mathematics in Primary Education», and (c) Design and Mathematics Curriculum in Primary Education. Focused on measure and geometrical context, they have a common structure based on colaborative work and the use of the application, Whatsapp to send messages. We focus on the students' work on the reflection about the different elements of the didactical analysis that are presented on the different courses.

Keywords: *didactical analysis, primary education teacher training, spatial sense, measure sense, significant tasks, Whatsapp.*

Introducción

La adaptación de la educación superior en España al marco del Espacio Europeo de Educación Superior permitió hacer una revisión de los contenidos a conocer y competencias a desarrollar por los futuros maestros de Educación Primaria. En la Universidad de Granada se puso en marcha el Grado en Educación Primaria en el curso 2010/2011 y desde el Departamento de Didáctica de la Matemática se diseñó la formación matemática de los futuros maestros apoyándose en el modelo del análisis didáctico (Rico, 1997).

En este modelo se definen cuatro análisis: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis evaluativo. El análisis de contenido se centra en el contenido matemático a enseñar; el cognitivo fija su atención en el aprendizaje del alumno; el de instrucción centra su atención en la enseñanza, fundamentalmente en el diseño de tareas; y, por último, el de actuación, se trata de una reflexión tanto de los logros como del proceso.

El título de Maestro en Educación Primaria en el área de Matemáticas queda estructurado en torno a tres de los cuatro elementos del análisis didáctico (Flores, Moreno y del Río, 2016). Así, en el primer curso y con la asignatura Bases Matemáticas para la Educación Primaria se estudia el significado de un concepto matemático (Segovia y Rico, 2011), en torno a las estructuras conceptuales, los sistemas de representación que utiliza y la fenomenología de la que surge. En segundo curso, la asignatura Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria se centra en el análisis cognitivo de un contenido matemático (Flores y Rico, 2015), estableciendo las finalidades del aprendizaje (objetivos y competencias), así como las limitaciones del mismo (errores y dificultades). El establecimiento de objetivos y competencias se basa en el enfoque funcional de las matemáticas (Rico y Lupiáñez, 2008), que recoge el estudio de las «matemáticas con sentido» para el desarrollo de la competencia matemática y del sentido matemático. Finalmente, en tercer curso, en la asignatura Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria, se estudia cómo enseñar un contenido matemático, una vez que se ha comprendido el contenido y determinado las finalidades y limitaciones del mismo (Flores y Rico, 2015). Se realiza en este curso un análisis de la significatividad de las tareas, así como el estudio de las variables, funciones y secuenciación de las mismas para que el estudiante realice una unidad didáctica sobre un tema específico del currículo de matemáticas.

En este trabajo se describen tres sesiones, una para cada asignatura, focalizadas en algunos de los descriptores del análisis didáctico mencionado. Para la selección de los temas y los recursos utilizados, recogemos algunas ideas de los trabajos de Moisés Coriat.

Por un lado, contextualizaremos las tareas en los temas de geometría y de desarrollo del sentido espacial y de la medida. En el primer curso, el tema 4 de esta asignatura es el tema de geometría y se organiza como puede verse en la Figura 1.

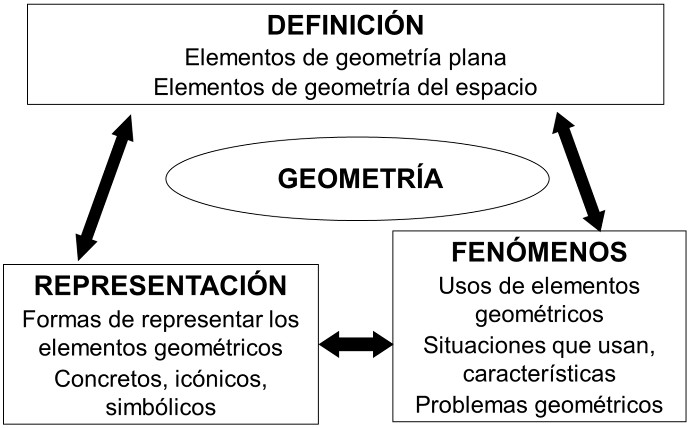


Figura 1. *Estructura del tema de geometría en Bases Matemáticas para la Educación Primaria*

En las asignaturas de segundo y tercero, el sentido matemático se describe a partir de cuatro sentidos: el sentido numérico, el sentido espacial, el sentido de la medida y el sentido estocástico (Flores y Rico, 2015). Los más estrechamente relacionados con la geometría, el espacial y el de la medida, quedan descritos a partir de sus componentes (Flores, Ramírez y del Río, 2015; Moreno, Gil y Montoro, 2015).

Por otro lado, resaltaremos el uso de materiales y recursos didácticos para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Partimos de la idea de que «cualquier cosa» puede servir como recurso en el aula, puesto que cualquier objeto o dispositivo admite un uso matemático (Coriat, 2001). Cuando nos planteamos el uso de un recurso hemos de preguntarnos qué actividades son más idóneas para que el alumno pueda aprender y reflexionar sobre el concepto matemático objeto de estudio (Coriat, 1997). En este sentido, la utilización de recursos tecnológicos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas debe contribuir a crear experiencias matemáticas en los alumnos que sean relevantes para su aprendizaje (Gómez, 2004).

Una de las objeciones más comunes al uso de recursos tecnológicos es la dificultad en el acceso a los mismos y la imposibilidad de participación de todo el alumnado de forma individual. En la actualidad, casi todos los alumnos del Grado acuden a clases con su teléfono móvil y la mayoría de ellos tienen instalada la aplicación Whatsapp, convirtiéndose a veces en un competidor para captar la atención del estudiante. Por lo tanto, se trata de un recurso accesible para todos y que están habituados a usar, ideal para utilizar en una tarea de comunicación escrita. Pretendemos darle un uso matemático a esta aplicación de mensajería instantánea que permite enviar mensajes de texto entre dos teléfonos y puede facilitar el trabajo cooperativo.

Sesión de Bases Matemáticas para la Educación Primaria

El objetivo de esta sesión es contextualizar en una situación de enseñanza los elementos que componen el triángulo semántico del significado de un concepto. En este caso, en relación con el concepto de polígono y ubicada en el tema de geometría, se plantea inicialmente una tarea escolar para que los estudiantes la resuelvan (tarea reactiva). Posteriormente se plantea un análisis de las componentes del triángulo semántico puestas en juego en la tarea anterior.

Tarea reactiva

Los principales objetivos de esta tarea son: (a) identificar propiedades de las figuras geométricas, (b) manejar con soltura los conceptos y relaciones geométricas para describir figuras y (c) dibujar figuras geométricas a partir de su descripción.

Los alumnos se distribuyen en grupos de cuatro. Dos de cada grupo permanecen en clase y otros dos salen fuera. Pueden intercambiar información a través de mensajes de texto de Whatsapp, sin imágenes ni audio.

A los alumnos que están en clase se les proyectan las imágenes que recogemos en la Figura 2 y se les dan estas instrucciones: Tenéis que conseguir que vuestros compañeros dibujen estas figuras en un folio. Cuando las tengan, entrarán en clase y entregarán sus dibujos. La máxima puntuación se obtiene al invertir el menor tiempo posible, siempre y cuando no se haya cometido ningún error.

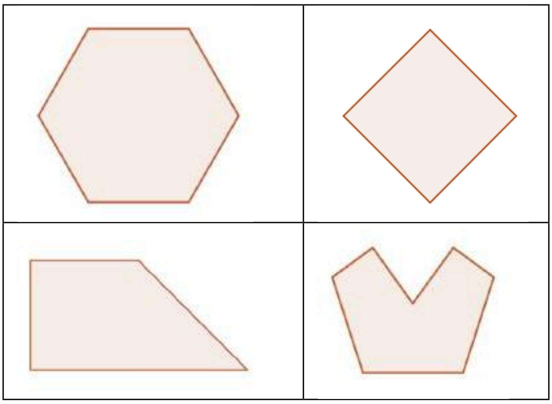


Figura 2. *Polígonos a describir*

Tarea de análisis

El uso de conceptos geométricos adquiere un papel funcional para describir las cualidades de un objeto relativas a su forma y posición. Para los grupos que describen, son necesarios para traducir la información aportada por la representación gráfica en verbal, mientras que para los estudiantes que dibujan es el proceso es inverso.

Tras la entrega de las respuestas, los alumnos vuelven a trabajar en los mismos grupos, ya dentro de clase. Se pretende analizar la conversación mantenida para detectar los conceptos geométricos y representaciones que han utilizado. En caso de que haya habido algún error, se les pide que reescriban la conversación adecuada para que no se hubiera producido la confusión.

Posteriormente, se realiza una puesta en común de los conceptos y representaciones utilizadas y se les vuelve a sugerir que, tras el listado de conceptos, vuelvan a describir las figuras. Se proyecta la conversación del grupo ganador para hacer un análisis conjunto de la misma.

El papel del profesor, como moderador, reconduce la recogida de datos en tres aspectos: ¿Qué conceptos geométricos aparecen? ¿Qué representaciones se han utilizado y cómo se relacionan entre ellas? ¿Por qué se usan los conceptos geométricos en esta tarea?

Para concluir se les plantea una reflexión final: ¿Cómo reformularías la tarea para enriquecer la utilización de conceptos, representaciones y fenomenología?

Aunque no pretendemos en este trabajo analizar la experiencia llevada a cabo al plantear esta tarea a alumnos de primero del grado de Educación Primaria, sí nos gustaría mostrar la respuesta de un grupo de alumnos para la mejora de su descripción inicial tras la puesta en común de los conceptos geométricos (Tabla 1).

Tabla 1. *Descripción mejorada tras la incorporación del listado de conceptos geométricos*

Descripción inicial	Descripción mejorada
Hexágono	Hexágono regular apoyado en uno de sus lados
Cuadrado en posición de rombo	Cuadrado apoyado en uno de sus vértices (girado 45 grados respecto a la posición inicial en la que estaría apoyado en uno de sus lados)
Un cuadrado con un triángulo unido en uno de sus lados	Trapecio rectángulo. La base mayor sobre la que está apoyada es el doble de la base menor. La altura mide lo mismo que la base menor. El ángulo agudo del trapecio está a la derecha del dibujo
Es un pentágono que le hemos quitado un trozo en la parte de arriba	Dibuja un pentágono regular apoyado sobre uno de sus lados. Traza las apotemas de los dos lados que forman el vértice superior. Elimina el vértice superior del pentágono original y los dos medios lados que confluyen en él desde los pies de las apotemas que has dibujado

Sesión de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas en Educación Primaria

Esta sesión se focaliza en el análisis de los objetivos y las componentes del sentido matemático puestas en juego al resolver una tarea como elementos del análisis cognitivo relativos a las expectativas de aprendizaje. También se abordan aspectos relativos a las limitaciones de aprendizaje. Partimos de una tarea reactiva para el posterior análisis de las componentes, en este caso, del análisis espacial.

Tarea reactiva

Los principales objetivos de esta tarea son: (a) determinar criterios de equivalencia utilizando isometrías, (b) reconocer isometrías entre dos figuras congruentes, (c) manejar con soltura los conceptos y relaciones geométricas para describir figuras y (d) dibujar un representante de cada clase de equivalencia.

Los alumnos se distribuyen en grupos de cuatro. Como en la tarea anterior, los que están dentro de clase se comunican con los de fuera utilizando únicamente mensajes de texto, sin imágenes ni audio.

A los alumnos que están en clase se les proyectan las figuras del Tetris junto con esta información: Las piezas del Tetris están formadas por cuatro cuadrados (tetraminós). Los cuadrados tienen que estar unidos por uno de sus lados. Tenéis que conseguir que vuestros compañeros dibujen todos los pentominós (con cinco cuadrados) utilizando el mismo criterio que el que se ha utilizado para seleccionar las piezas del Tetris.

Tarea de análisis

En la tarea, el uso de los movimientos en el plano adquiere un papel funcional para establecer criterios entre figuras equivalentes. Estos criterios dependen de la intencionalidad con la que se han diseñado las piezas. En el juego del Tetris las piezas pueden trasladarse y girarse en el plano, pero no en el espacio, por lo que se consideran equivalentes figuras que resultan al aplicarles una traslación o giro en el plano. Sin embargo, dos figuras simétricas que no puedan obtenerse por movimientos anteriores no pertenecen a la misma clase de equivalencia. El trabajo en grupo requiere que encuentren criterios para compartir las figuras que van obteniendo y determinar el listado final que deben presentar.

Ya en clase y sin comprobar la validez de sus respuestas, cada grupo debe analizar la conversación mantenida para reconocer las componentes del sentido espacial que han manifestado en la misma, justificando razonadamente cada una de ellas.

Se hace una puesta en común de las manifestaciones de cada componente y se les sugiere que, si quieren, modifiquen sus respuestas atendiendo a la información aportada por el resto de compañeros. Se proyecta la solución y conversación del grupo ganador y se realiza un análisis justificado de las componentes del sentido espacial en dicha resolución. Cada equipo debe localizar las figuras que le faltan o sobran y los momentos de la conversación en los que han cometido un error.

En una nueva puesta en común, se plantean las siguientes cuestiones:

— ¿Qué dificultades habéis encontrado en la resolución de la tarea? ¿Qué errores habéis detectado? ¿Existe relación entre los errores y las dificultades? ¿Qué objetivos persigue esta tarea? ¿Qué relación tienen con el sentido espacial?

Para la reflexión final se les plantea: ¿Cómo reformularías esta tarea para perseguir otros objetivos? ¿Y para desarrollar otros aspectos relativos al sentido espacial?

Hemos seleccionado algunas respuestas de los estudiantes relativas a la identificación de componentes.

Fragmento	En el Tetris la «ele» y la «jota» son distintas. Una no puede girarse para obtener la otra. Así que, aunque sean simétricas, hay que ponerlas todas
Componentes del sentido espacial y justificación	Conceptos geométricos: giros y simetrías Relaciones geométricas: hemos establecido una relación de simetría Ubicación y movimientos: hemos visualizado que por mucho que gires la «ele» no obtienes las «jota»

Sesión de Diseño y Desarrollo del Currículo de Matemáticas en Educación Primaria

Esta sesión se contextualiza en el análisis de las tareas que forman parte del análisis de instrucción. Además de determinar variables y funciones que intervienen en la tarea, se focaliza el estudio de la significatividad de la tarea, especialmente en lo que aporta al aprendizaje del alumno y el planteamiento de retos. Como en los cursos anteriores, partimos de una tarea a resolver que desencadene el análisis posterior.

Tarea reactiva

Los objetivos prioritarios de la tarea son: (a) reconocer la importancia de la determinación de la unidad de medida en el proceso de medir, (b) determinar unidades no convencionales para medir longitudes de lados, (c) medir longitudes a partir de unidades de medida no convencionales, (d) manejar con soltura los conceptos geométricas y el proceso de medir para describir figuras y (e) dibujar una figura geométrica a partir de su descripción y sus medidas.

La distribución de los alumnos y la utilización del Whatsapp es la misma que en las sesiones de Primero y Segundo. A los alumnos que permanecen en clase se les entrega un folio con un triángulo rectángulo y se les dan las siguientes instrucciones: Vuestros compañeros únicamente disponen de folios en blanco. No disponéis de reglas ni ningún instrumento de medida. Tenéis que conseguir que dibujen este triángulo, con las mismas medidas y colocado exactamente en el mismo lugar del folio.

Tarea de análisis

En la tarea es crucial determinar las unidades de medida que se van a utilizar para poder comunicar la longitud. En un principio pueden intentar utilizar referencias a objetos como el móvil, bolígrafos, palmos. Pero el hecho de tener que determinar exactamente la longitud, les plantea el problema de encontrar divisiones de estas medidas que se correspondan con las de los otros miembros del equipo. Utilizando el folio como referente y doblando convenientemente, pueden encontrar qué dobleces permiten determinar la medida de los catetos. Al ser un triángulo, basta con ubicar sus tres puntos para dibujarlo en el mismo lugar, no siendo necesario conocer la media de la hipotenusa (Figura 3).

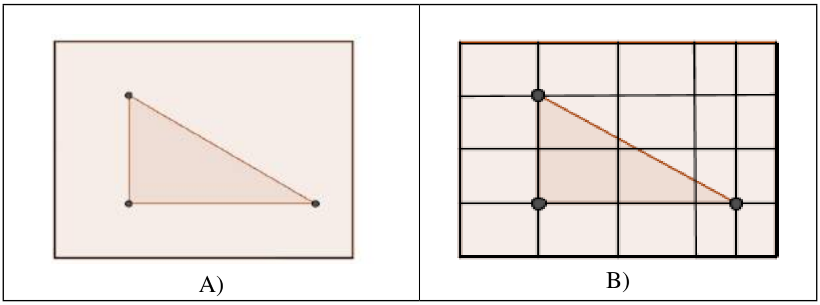


Figura 3. A) *Triángulo presentado a los alumnos.*
B) *Dobleces necesarios para ubicar los vértices*

En el trabajo en grupo, tras la entrega de la respuesta, se analizan los momentos de la conversación en los que se transmite información relativa a la unidad de medida utilizada y el proceso de medir. Se hace una puesta en común sobre las diferentes estrategias que han podido surgir y se proyecta la conversación del equipo ganador para analizar el proceso de medida utilizado.

Nuevamente en trabajo en pequeño grupo, se les plantean las siguientes cuestiones:

1. Reflexionad sobre la significatividad de esta tarea:
   — ¿Parte de conceptos, procedimientos y sentidos conocidos? ¿Qué nuevos contenidos activa? ¿Es un reto? ¿Permite comprobar si se ha resuelto correctamente?
2. Datos que describen la tarea. Describid los siguientes datos de la tarea: meta, formulación, materiales y recursos, tipo de agrupamiento, situación de aprendizaje y temporalización.

En relación a las respuestas de los alumnos, mostramos la respuesta de un grupo de estudiantes en relación a la meta y significatividad.

> *…Creemos que la finalidad de la tarea no es construir el triángulo, sino reflexionar sobre la necesidad de comunicarnos la medida. En nuestro grupo hemos intentado utilizar el bolígrafo como unidad, pero no podíamos determinar las subdivisiones. Al doblar hemos utilizado de referencia las longitudes del lado del folio para hablar de unidades de medida.*

> *…Pensamos que entregar la respuesta en el menor tiempo posible es un reto que puede aumentar la motivación. Además, usar el móvil creo que le añade un interés extra. Además, ellos mismos pueden comprobar si lo han hecho bien: por un lado pueden superponer los triángulos y por otro pueden utilizar la conversación para ver sus errores. Sin embargo, pensamos que para que ellos perciban que el nuevo contenido son las unidades de medida, es necesario que el profesor intervenga…*

Referencias

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 155-178). Barcelona, España: Horsori.

— (2001). Materiales didácticos y recursos. En E. Castro (Coord.), *Didáctica de la Matemática en Educación Primaria* (pp. 61-82). Madrid, España: Síntesis.

Flores, P., Moreno, A. y del Río, A. (2016). El análisis didáctico en la formación inicial de profesores de primaria, en el Área de Matemáticas. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz y M. Torralbo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico* (pp. 141-151). Granada, España: Comares.

Flores, P., Ramírez-Uclés, R. y del Río, A. (2015). El sentido espacial. En P. Flores y L. Rico (Coord.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en educación primaria* (pp. 127-146). Madrid, España: Pirámide.

Flores, P. y Rico, L. (2015). *Enseñanza y Aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria*. Madrid, España: Pirámide.

Gómez, P. (2004). Análisis didáctico y uso de tecnología en el aula de matemáticas. En M. Peñas, A. Moreno y J. L. Lupiáñez (Eds.), *Investigación en el aula de matemáticas. Tecnologías de la información y la comunicación*. (pp. 73-95). Granada, España: SAEM Thales y Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Moreno, M. F., Gil, F. y Montoro, A. B. (2015). Sentido de la medida. En P. Flores y L. Rico (Coords.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Educación Primaria* (pp. 147-168). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas.* Madrid, España: Síntesis.

Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid, España: Alianza.

Segovia, I. y Rico, L. (2011). *Bases matemáticas para la Educación Primaria*. Madrid, España: Pirámide.

FORMACIÓN PERMANENTE DE PROFESORES

LA MAGNITUD LONGITUD EN TEXTOS BÍBLICOS: UNA INDAGACIÓN FENOMENOLÓGICA

The length magnitude in biblical texts: a phenomenological inquiry

Antonio Fernández-Cano
Universidad de Granada

Resumen

Este estudio recupera contenidos relativos a la magnitud longitud, su medida y unidades, presentes en textos bíblicos y diversificados según sus sentidos o contextos fenomenológicos como dimensión, distancia entre dos puntos y trayectoria o recorrido. Se pone de manifiesto la presencia de la magnitud longitud en textos bíblicos como ejemplificación de nociones matemáticas en documentos con más de dos mil años de antigüedad.

Palabras clave: *magnitud longitud, medida, unidades, textos bíblicos, fenomenología de la longitud.*

Abstract

This study recovered contents related to the length magnitude, its measurement and units, present in biblical texts and diversified according to their senses and phenomenological contexts as dimension, distance between two points and path or journey. It reveals the presence of length magnitude in biblical texts as an exemplification of mathematical notions in documents with more than two thousand years old.

Keywords: *length magnitude, measurement, biblical texts, phenomenology of the length.*

Introducción

Este texto es un homenaje a Moisés Coriat Benarroch, quien me ofreció su amistad. Fue un hombre justo, de los que sostienen las columnas de este atribulado mundo, un intelectual riguroso y un modelo de entereza ante la mayor adversidad.

Dada su gran preocupación por la Didáctica de la Geometría, unido a su profundo conocimiento de la Biblia hebrea, y como físico de formación, doctor por la Sorbona, no le habría disgustado el tema, creo. *Sit memoria aeterna erit*.

Existe la creencia de una muy limitada, si no incorrecta, información matemática en la Biblia. Más aventurado incluso es asumir que ésta incorpora mensajes numéricos de naturaleza criptográfica, cabalística o de sutil concepción astronómica; por ejemplo, se ha querido ver en este pasaje de Isaías (40: 22), «Él [Dios] está sentado sobre el círculo de la tierra…», la esfericidad del planeta Tierra frente a la posterior concepción de Ptolomeo como un plano, un dogma científico que duró más de 15 siglos. Textos adicionales que reforzarían esta concepción de redondez de la Tierra serían: «El viento tira hacia el sur, y rodea al norte; va girando de continuo, y a sus giros vuelve el viento de nuevo» (Eclesiastés 1: 6). También en: «Y el Señor le pregunto: ¿De dónde vienes? Vengo de rondar la tierra, y de recorrerla de un extremo a otro — le respondió Satanás» (Job 1: 7).

Sin embargo, sí parece bien evidente la presencia de contenidos matemáticos y por ende geométricos (Cohen, 1998). Bridgeman (2009) denota la presencia de un Álgebra elemental en pasajes bíblicos con sorprendentes nuevas intuiciones dentro de los significados de esos textos. Uno de estos tópicos geométricos es la magnitud longitud en sus contextos y fenómenos, su medida y sus unidades; este trabajo recupera contenidos referentes a esa magnitud en pasajes bíblicos, poco considerados hasta ahora.

La práctica de la medida de las diversas magnitudes se referencia críticamente en diversos textos bíblicos. «No cometáis injusticia en los juicios, ni en las medidas de longitud, de peso o de capacidad» (Levítico 19: 35). «Has de tener un peso cabal y exacto, e igualmente una medida cabal y exacta, para que se prolonguen tus días en el suelo que Yahveh tu Dios te da» (Deuteronomio 25: 15). «Usad balanzas justas, una arroba justa, una medida justa» (Ezequiel 45: 10). Flavio Josefo en Antigüedades Judías (I 2:2), e imputando a Caín la invención de medidas y pesas, comenta que éste: «Transformó aquella inocente y noble naturalidad con la que vivía la gente mientras las desconocía, en una vida plena de estafas» (referencia en Kula, 1980, p. 3); una consideración de la medida como una práctica cainita.

Por otro lado, en la Biblia subyace un supuesto evidente de inconmensurabilidad: «¿Quién midió los mares con el cuenco de la mano, y abarcó con su palmo la dimensión de los cielos, metió en un tercio de medida el polvo de la tierra, pesó con la romana los montes, y los cerros con la balanza?» (Isaías 40: 12). Igualmente encontramos este cuestionamiento prométrico, y más en concreto sobre la práctica de medir, en: «¿Quién fijó sus medidas? ¿Lo sabrías? ¿Quién tiró el cordel sobre ella?» (Job 38: 5). Sólo Yahvé puede hacer esas medidas, podría entonces inferirse.

La idea de medida tiene también otras connotaciones como el determinismo de la duración de la vida: «Por lo demás, ¿quién de vosotros puede, por más que se preocupe, añadir un solo codo a la medida de su vida?» (Mateo 6: 27); la valoración o enjuiciamiento a los demás porque éste será reciproco: «… con la medida con que midáis se os medirá» (Mateo 7: 2); «… Con la medida con que midáis, se os medirá y aun con creces» (Marcos 4: 24); «Porque con la medida con que midáis se os medirá» (Lucas 6: 38).

Textos bíblicos admiten cierto parangón métrico de compleja comprensión. La semejanza de Dios y el hombre del paisaje del Génesis: «Y dijo Dios: «Hagamos al ser humano a nuestra imagen, como semejanza nuestra…» (Gen 1: 26); pues la semejanza es entendida en otro texto bíblico como: «… las mismas medidas y la misma forma

…» (I, Reyes 6: 25). Pero no entraré en una discusión tan sesuda aunque con evidente connotación geométrica y por ende métrica. Me centraré en la fenomenología de la longitud, en sus unidades de medida y en cierto cálculo afín a la determinación del número π, a modo de un ejercicio de hermenéutica elemental. Se constatará la abundancia de medidas de longitud, síntoma inequívoco de la fertilidad de la Biblia como fuente de contenidos geométricos.

Fenomenología de la longitud

Freudenthal (1983) introduce en los capítulos 1 y 2 la estructura analítica que recorre su libro, presentando la longitud como el ejemplo más importante de magnitud y la primera estructura matemática a considerar. El distingue como formas fenoménicas de longitud: su función, las propiedades de esta función, la ordenación de longitudes, las múltiples racionalidades de las longitudes, las múltiples realidades de las longitudes y las unidades de longitud.

Desde una fenomenología primaria, empírica, la longitud suele presentarse en la realidad (realidades múltiples) bajo tres manifestaciones (formas, dice Freudenthal) fenomenológicas básicas: como dimensión de un objeto, como distancia entre dos puntos y como trayectoria o recorrido de un objeto o persona que se desplaza. Para un tratamiento didáctico de la fenomenología de la longitud ver Rico *et al.* (1985), aunque aquí constataremos cómo estos fenómenos o formas de la magnitud longitud se muestran en pasajes bíblicos.

Como fuente para este estudio se ha utilizado la *Biblia de Jerusalén*, una versión católica traducida al español de la original en francés y que suele ser utilizada en este tipo de estudios a medio camino entre la exégesis y la hermenéutica; para un ejemplo, ver la interpretación del ciertos pasajes del libro de Gedeón como patrones evaluativos (Fernández-Cano, 2010). El acceso aquí dado a la *Biblia de Jerusalén* permite búsquedas informáticas introduciendo términos específicos que posibilitan recuperar el versículo bíblico que lo contiene. De este modo, longitud* aparece citada 39 veces; medida*: 105; altura*: 119; anchura: 47; largo/a: 95+18; ancho/a: 53+8; alto/a: 149+42; profundo/a: 17+6.

Dimensiones de objetos

La consideración de las dimensiones de un objeto ya está presente en este texto de Pablo de Tarso en una de sus epístolas cuando dice: «… podáis comprender… cuál es la anchura y la longitud, la altura y la profundidad» (Efesios 3: 18); curioso texto que describe dos dicotomías bidimensionales: ancho/ largo en superficies planas y alto/ profundo en la envergadura de un objeto.

La longitud como dimensión está multipresente sobre todo en construcciones de diverso tipo que van apareciendo en la Biblia; no es extrañar la histórica asociación entre Geometría-Arquitectura-Biblia, en posteriores connotaciones masónicas. Veamos una relación de construcciones, con su oportuna medida de longitud asociada: el codo.

— *El Arca de Noé*. «Hazte un arca… Así es como la harás: longitud del arca, trescientos codos; su anchura, cincuenta codos; y su altura, treinta codos… y a un codo la rematarás por encima» (Gen 1: 14-16; 6: 15). Obsérvese la razón 1:6 entre manga y eslora tan propia de las construcciones náuticas.
— *El tabernáculo de Moisés* o morada de Dios se describe mediante múltiples medidas de longitud. «La longitud de cada tapiz era de veintiocho codos y la anchura de cuatro. Todos los tapices tendrán las mismas medidas» (Éxodo 36: 9, 26: 2). «La longitud de cada pieza era de treinta codos y de cuatro la anchura. Las once piezas tendrán las mismas medidas…» (Éxodo 36: 15, 26: 8). «Cada tablero tenía diez codos de largo, y codo y medio de ancho…» (Éxodo 36: 21, 26: 16). «El tapiz de la puerta del atrio… Tenía veinte codos de largo; su altura —en el ancho— era de cinco codos, lo mismo que los cortinajes del atrio» (Éxodo 38: 18).
— *El Arca de la Alianza*. «Besalel hizo el arca de madera de acacia, de dos codos y medio de largo, codo y medio de ancho, y codo y medio de alto» (Éxodo 37: 1). Mesa del Arca de la Alianza: «Hizo, además, la mesa de madera de acacia, de dos codos de largo, un codo de ancho y codo y medio de alto» (Éxodo 37: 10). El altar del incienso: «… el altar del incienso, de un codo de largo y uno de ancho, cuadrado, y de dos codos de alto» (Éxodo 37: 25). Los dos querubines del Arca: «La altura de un querubín era de diez codos y lo mismo el segundo querubín» (I Reyes 6: 26).
— *El templo de Salomón*. «La Casa que edificó el rey Salomón a Yahveh tenía sesenta codos de largo, veinte de ancho y veinticinco de alto» (I Reyes 6:2) que se reitera parcialmente en: «Este es el plano sobre el que Salomón edificó la Casa de Dios: sesenta codos de longitud, en codos de medida antigua, y veinte codos de anchura» (II Crónicas 3: 3). El Ulam del templo se disponía: «El Ulam delante del Hekal de la Casa tenía veinte codos de largo en el sentido del ancho de la Casa y diez codos de ancho en el sentido de largo de la Casa» (I Reyes 6: 3). El Santa Sanctórum o Debir: «… tenía veinte codos de largo, veinte codos de ancho y veinte codos de alto…» (I Reyes 6: 20). El estrado del Templo de Salomón: «… de cinco codos de largo, cinco codos de ancho, y tres codos de alto…» (II Crónicas 6: 13).
— *El palacio de Salomón*. «Edificó la Casa «Bosque del Líbano», de cien codos de longitud, cincuenta codos de anchura y treinta codos de altura» (I Reyes 7: 2). Pórtico del palacio: «Hizo el Pórtico de las columnas de cincuenta codos de longitud, treinta codos de anchura…» (I Reyes 7: 6). Columnas del Palacio: «Fundió las dos columnas de bronce… la altura de una columna era de dieciocho codos, un hilo de doce codos medía la circunferencia…» (I Reyes 7: 15). Capiteles de las columnas: «Hizo dos capiteles… de cinco codos de

altura» (I Reyes 7: 16). Las basas del palacio: «… de cuatro codos de largo cada basa, cuatro codos su anchura y tres su altura» (I Reyes 7: 27). Pilas de bronce sobre las basas: «…cada pila medía cuatro codos» (I Reyes 7: 38).

En un curioso pasaje bíblico sobre el palacio de Salomón podría determinarse el valor del número π. «El Mar de metal del palacio de Salomón: … que tenía diez codos de borde a borde; era enteramente redondo, y de cinco codos de altura; un cordón de treinta codos medía su contorno» (I Reyes 7: 23). Los valores propios de la longitud de una circunferencia son: 30 codos (longitud) = π x 10 codos (diámetro), entonces π = [(longitud (30 codos)]/[(diámetro (10 codos)] ≈ 3

— *El templo del sueño de Ezequiel*. «La vara de medir que el hombre tenía en la mano era de seis codos de codo y palmo. Midió el espesor de la construcción: una vara, y su altura: una vara» (Ezequiel 40: 5); «… midió el umbral del pórtico: una vara de profundidad» (Ezequiel 40: 6). Todo el capítulo 40 del libro de Ezequiel abunda en medidas relativas a dimensiones del templo soñado y de otros elementos del templo como un exhaustivo plano arquitectónico, tal como se prosigue. Las dimensiones y elementos del altar se exponen en (Ezequiel 43:13-17) y de otras partes del templo, como patio (Ezequiel 46: 22) y ofrenda sagrada (Ezequiel 48: 9).La mayor parte de los versículos del capítulo 48 del libro de Ezequiel se centran en dar las dimensiones de solares para los sacerdotes (Ezequiel 48: 10) y para los levitas (Ezequiel 48: 13), indicar el terreno destinado a viviendas y pastizales (Ezequiel 48: 15-17), las salidas de la ciudad (Ezequiel 48: 30-35) y continúa con la exposición de medidas de estancias del templo como un ejercicio exhaustivo de medición; así, el vano del pórtico (Ezequiel 40: 11), el vestíbulo (Ezequiel 40: 49), la pilastra de la entrada (Ezequiel 41: 3-4) o la casa anexa (Ezequiel 41:12-13).

La relación de medidas en codos de carácter urbanístico y arquitectónico es abundante en el libro de Ezequiel; y bien se podía seguir enunciándolas.

— *La visión de la ciudad santa de Jerusalén por Juan Evangelista*: «La ciudad es un cuadrado: su largura es igual a su anchura. Midió la ciudad con la caña, y tenía 12.000 estadios. Su largura, anchura y altura son iguales… Midió luego su muralla, y tenía 144 codos —con medida humana,…» (Apocalipsis 21: 16-17).

— *La ciudad asiria de Ecbátana*: «… rodeó esta ciudad con un muro de piedras de sillería que tenían tres codos de anchura y seis codos de longitud, dando al muro una altura de setenta codos y una anchura de cincuenta. Alzó torres de cien codos junto a las puertas, siendo la anchura de sus cimientos sesenta codos. Las puertas se elevaban a setenta codos de altura, con una anchura de cuarenta codos, para permitir la salida de sus fuerzas y el desfile ordenado de la infantería» (Judith 1: 2-4).

— *La estatua de Nabucodonosor*: «… de sesenta codos de alta por seis de ancha…» (Daniel 3: 1).
— *La estatura de Goliat*: «… de seis codos y un palmo de estatura» (I Samuel 17: 4); y sabido que 1 codo equivaldría 45,7 cm y 1 palmo a 22,5 cm, el ínclito gigante mediría 2,96 metros (¡).
— *La altura de las aguas del Diluvio*: «Quince codos por encima subió el nivel de las aguas» (Génesis 7: 20).

Distancias

La manifestación de la distancia como longitud queda bien ilustrada en este texto: «¿A dónde vas?» Me dijo: «A medir a Jerusalén, a ver cuánta es su anchura y cuánta su longitud» (Zacarías 2: 6); aquí se presentan distancias o recorridos asociadas a su unidad de medida.
— *Estadios*: «… el resplandor de las llamas se veía hasta en Jerusalén y eso que había 240 estadios de distancia» (II Macabeos 12: 9); «… un pueblo llamado Emaús, que distaba sesenta estadios de Jerusalén (Lucas 24: 13); «Betania estaba cerca de Jerusalén como a unos quince estadios» (Juan 11:18).
— *Días sabáticos* (*sabat*) como recorrido: «… desde el monte llamado de los Olivos, que dista poco de Jerusalén, el espacio de un camino sabático» (Hechos 1: 12).
— *Codos*: «… Pero que haya entre vosotros y el arca una distancia de unos 2.000 codos: no os acerquéis (Josué 3: 4); «… Midió la distancia de un pórtico a otro: cien codos» (Ezequiel 40: 23).
— *Pies*: «… ni siquiera la medida de la planta del pie,…» (Deuteronomio 2: 5) aunque el pie como unidad no se localiza pese a poseer 247 citas.

Trayectorias

Con muy escasa presencia a no ser en este par de textos; uno sobre el recorrido de una flecha: «… a como de un tiro de arco» (Génesis 21: 16) y otro referido al día sabático como recorrido: «Nínive era una ciudad grandísima, de un recorrido de tres días» (Jonás 3: 3).

Unidades de medida de la longitud

No parece haber unanimidad en las equivalencias de unidades de medida judías con las actuales del Sistema Métrico Decimal; aunque las aquí expuestas se han obtenido tras una revisión extensa.

Unidades antropométricas

— *Palmo*: «Será cuadrado y doble, de un palmo de largo y otro de ancho» (Éxodo 28: 16). «El pectoral era cuadrado y lo hicieron doble; tenía un palmo de largo y otro de ancho; era doble» (Éxodo 39: 9). Su equivalencia es 1 palmo mayor ≈22,5 cm.

— *Codo*, sin duda la unidad de longitud más citada en la Biblia con 159 entradas. Su equivalencia: 1 codo = 1,5 pies = 0,4572 m ≈ 45,7 cm.

— *Pie*. 1 pie = 0, 3048 m ≈ 30 cm.

Ergométricas

Se trata de unidades de medida relacionadas con la actividad humana, incluido el trabajo.

— *Estadio*. 1 estadio = 600 pies = 182,88 m. «…Escitópolis, ciudad que dista de Jerusalén sesenta estadios» (II Macabeos 12: 29).

— *Esjena*: 30 estadios = 5486,4 m. «… que dista de Jerusalén unas cinco esjenas» (II Macabeos 11: 5).

— *Sabat o día sabático* = 6 estadios ≈1097 m.

— *Vara*[1] o *caña*, que suele aparecer como instrumento de medida y como unidad: «La vara de medir que el hombre tenía en la mano era de seis codos de codo y palmo…» (Ezequiel 40: 5). En este pasaje de Ezequiel, caña era de seis codos de a codo y palmo menor, o sea 6 codos y 6 palmos (casi 11 pies, alrededor de 3 metros). «Tenía en la mano una cuerda de lino y una vara de medir, y estaba de pie en el pórtico» (Ezequiel 40: 3). «El que hablaba conmigo tenía una caña de medir, de oro, para medir la ciudad, sus puertas y su muralla» (Apocalipsis 21: 15).

Hay incluso una curiosa asociación de la largura del cabello de Absalón con su peso pues «… era tan largo que era de doscientos siclos de peso real» (II Samuel 14: 26); es decir, alrededor de 2 kilos y cuarto pues 1 siclo como unidad de peso y monetaria equivale a 11,4 gr.

Una consideración final

Se ha puesto de manifiesto la ubérrima presencia de la magnitud longitud en textos bíblicos como ejemplificación del potencial matemático de documentos con más de dos mil años de antigüedad. Se trata de un ejercicio tal vez diletante de recuperación de evidencia, ampliable a otros tópicos matemáticos; por ejemplo, a la magnitud amplitud también localizable en: «¿Quieres que la sombra avance diez grados o que retroceda diez grados?» (II Reyes 20: 9).

La lectura de la Biblia siempre constituye un viaje de resultados sorprendentes y ejemplificadores.

[1] Se ha pretendido encontrar el origen de la vara de Jacob, un instrumento en forma de cruz, que se vino usando en astronomía, orientación y geología hasta el siglo XVIII, formado por unos palos con muescas blancas, en el pasaje bíblico del Génesis (30: 37-42). Jacob las utilizaba como amuleto para sus reses pero sin relación alguna con la medida.

REFERENCIAS

BIBLIA DE JERUSALÉN. Disponible en http://www.bibliacatolica.com.br/la-biblia-de-jerusalen

BRIDGEMAN, B. (2009). Mathematical theology. *Connection Science*, *21*(4), 379-381.

COHEN, H. (1998). God only knows (A group of Israeli mathematicians found history's secrets coded in the scriptures, Michael Drosnin's book, The "Bible Code", helped put their method on the bestseller list). *Lingua Franca*, *8*(5), 59-62.

FERNÁNDEZ-CANO, A. (2010). Drawing some evaluation patterns inferred from the biblical Gideon's passage. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, *22*(4), 327-343.

FREUDENTHAL, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel.

KULA, W. (1980). *La medida y los hombres*. Madrid, España: Siglo XXI.

RICO, L., CASTRO, E., CORPAS, A., FERNÁNDEZ CANO, A., GONZÁLEZ, J., LÓPEZ, F., MESAS, T., SÁENZ, O. y VALENZUELA, J. (1985). *Libro del profesor. Matemática 6º E.G.B*. Sevilla, España: Algaida.

ALGUNAS CONSIDERACIONES SOBRE LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

Some considerations about mathematics teachers training

Salvador Guerrero Hidalgo
Catedrático de Matemáticas de INEM

Resumen

En el escrito se indican algunos aspectos que, en opinión del autor y basándose en su experiencia docente, son necesarios para conseguir excelencia en la formación del profesorado de matemáticas y que no suelen estar presentes en muchos cursos de formación para dicho profesorado: cuestiones que son esenciales para la actividad matemática y otras consideraciones filomatemáticas, así como el apoyo a un cierto tipo de metodología en la enseñanza.
Palabras clave: didáctica, formación del profesorado, práctica educativa.

Abstract

This work indicates some aspects that, in its author's opinion and based on his teaching experience, are essential for achieving excellence in Mathematics teachers training, but are usually excluded from many of their training courses: key issues for the mathematical activity and other philo-mathematical considerations, as well as supporting certain kind of teaching methodology.
Keywords: *didactics, teachers training, educational practice.*

Las consideraciones que figuran a continuación en el presente relato no pretenden tener el valor de investigaciones, sino de observaciones realizadas durante más de cuarenta años de experiencia docente en distintos ámbitos de la enseñanza de las matemáticas, como profesor de secundaria, formador de profesores, participante en tribunales de oposición y en estudios y reuniones sobre el curriculum de matemáticas, muchos de esos años trabajando en compañía del Dr. D. Moisés Coriat, a cuya memoria dedico este relato.

Primeras consideraciones

Una consideración inicial, que es casi una obviedad, pero es un punto de partida fundamental: la formación en matemáticas no es la misma que la formación del profesor de matemáticas, y aunque hay una importante conexión entre ellas hay también una diferencia radical, de modo que la excelencia en una no tiene por qué llevar aparejada la excelencia en la otra. Si ya es difícil una consideración unánime sobre el sentido de «tener una formación en matemáticas», mucho más difícil es la de asegurar de manera absoluta que se tiene «la formación como profesor de matemáticas».

No podemos decir que se llega a un momento en el que una persona ha completado su formación como profesor de matemáticas, porque ese *status* —si tal existiera— tiene unas características con límites tan amplios y flexibles que hacen difícil asegurarlo.

Los conocimientos deseables para la formación como profesor de matemáticas,

— son variables en el tiempo, pues no hay más que considerar la necesaria formación de un profesor actual en procedimientos y recursos digitales y *on-line*, desconocidos no hace más de 25 años, cuando las propiedades del cálculo logarítmico eran materia imprescindible y hoy desaparecida;

— son graduales en intensidad, pues en cualquiera de los aspectos necesarios para la formación, que más adelante señalaremos (formación matemática, formación didáctica, procesos de aprendizaje, historia y filosofía de las matemáticas, etc.), su propia dinámica en constante crecimiento por nuevos descubrimientos, hace que sea imposible determinar que se ha llegado a dominar por completo, por no ser campos de conocimiento completamente cerrados con un máximo conocido, sino que en cada uno de ellos siempre es posible ampliar el camino hacia la excelencia como profesor;

— son locales o particulares, en su adscripción geográfica o personales, pues muchos de los resultados de investigación son válidos para unos particulares alumnos o ligados a una situación de aprendizaje de esos alumnos, pero pueden no ser válidos para otras situaciones que dependerán de los diferentes alumnos y de los objetivos que se hayan marcado para esa etapa o plan de aprendizaje;

— son finalistas, es decir que el objetivo final de la enseñanza de las matemáticas es el aprendizaje por parte del alumno, y eso nos da el verdadero resultado de la actividad docente.

Es posible que el no asumir algunas de estas características sea lo que haga que muchos profesores de matemáticas no tengan en demasiada consideración la formación del profesor y no logren entender que ésta es permanente mientras dura su actividad docente, y ligada a su puesto de trabajo, y que nunca podemos decir que se ha llegado a su final, aunque se tenga un excelente nivel profesional.

Ligarla a su puesto de trabajo es importante además, porque no es igual la formación necesaria para un profesor de enseñanza universitaria, que la de un profesor de infantil, primaria o secundaria, ni la de éstos entre sí. E incluso en la propia enseñanza universitaria de matemáticas no es la misma si se es profesor de matemáticas aplicadas —ingenierías, medicinas, economías— que la de una graduación en ciencias matemáticas. (¿Y qué ocurre con las enseñanzas universitarias «para profesor de matemáticas»? Luego hablaremos de esto).

Con estas últimas observaciones quería resaltar la importancia de la formación permanente, y aunque es obvio que cuanto mejor sea la formación inicial mejor formado estará el profesor que la ha recibido, es la formación permanente la que le podrá conducir a la excelencia en su formación profesional como profesor de matemáticas. Esto es a veces difícilmente entendible por profesores de matemáticas (que pueden pasarse años y años sin conocer mejoras en su profesión, creyendo que ya han llegado al máximo de formación posible), pero sobre todo por las instituciones encargadas de la planificación de la educación (matemática), que no consideran que sea necesario hacer nada por mejorarla, y a veces ni siquiera apoyar a las entidades que se preocupan por ello.

Aspectos importantes de la formación

Las anteriores consideraciones no pretenden decir que no existan algunos aspectos fundamentales en la formación de todo profesor de matemáticas de cualquier nivel o etapa.

Parece obvio decir que en la formación del profesor de matemáticas debe figurar una adecuada formación matemática sobre los temas que haya de impartir a sus alumnos, a un nivel que le permita un conocimiento potente sobre los objetos matemáticos. El nivel de los dos primeros años de estudio universitario en matemáticas parece suficiente actualmente, sin olvidar que también en este campo hay temas que pueden ser nuevos y actuales y necesarios de impartir a los alumnos.

Pero además es necesario tener conocimiento de otros aspectos de esos temas. Analizaremos a continuación algunos de ellos.

Conocimiento sobre la propia actividad matemática

Hay que reconocer que la actividad matemática (e incluso los conocimientos matemáticos) es un tanto peculiar, empezando por la ontología de los objetos matemáticos. Éstos son objetos ideales, constructos mentales, que han de tener imágenes o esquemas que los representen (sobre todo para los alumnos de menor edad), ya sean figuras geométricas, funciones (tablas o gráficas), diversos tipos de números (naturales, reales, complejos, etc.), sucesos de un espacio de probabilidad (esquemas o tablas de contingencia)… Y de esos objetos matemáticos estudiamos —descubrimos— propiedades que nos permitirán conocerlos con mayor profundidad, para construir así un modelo matemático de la realidad observada.

Aunque esos objetos sean construcciones mentales, dichos constructos deben aparecer como resultado de una actividad sobre la realidad, ya sea una realidad física o epistemológica, y al alumno le debe aparecer como resultado de una manipulación o de una reflexión sobre realidades que le sean conocidas.

Aquí empiezan a surgir aspectos donde es importante el nivel de formación que tenga el profesor. Aunque históricamente hayan aparecidos objetos por una necesidad científica, lógica o lúdica, no quiere decir que los alumnos vayan a tener esa misma necesidad. El que en determinadas épocas históricas hayan aparecido por necesidades científicas de coherencia lógica, no quiere decir que la psicología de los alumnos vaya a necesitar dicha coherencia. Puesto que los objetos matemáticos tienen la propiedad de ser aplicables a distintos campos de actividad, el profesor debe tener una formación que le permita hacer aparecer esos objetos desde distintas actividades (según el nivel de los alumnos que imparta), y con el esquema o imagen de representación adecuado.[1] Ello implica que posiblemente el profesor de matemáticas deba tener conocimientos de otros campos de actividad (física, química, biología, derecho, medicina, etc.), por rudimentarios que sean estos conocimientos.

Respecto a la presentación u obtención de las propiedades[2] de esos objetos tenemos dilemas análogos: ¿se las enunciará el profesor (o el libro de texto) directamente o alternativamente, preparará actividades o ejercicios donde la reflexión sobre lo ejercitado le permita descubrir —y aprehender— esas propiedades?

Hay personas que ante cuestiones del tipo de las planteadas en los párrafos anteriores piensan que son meras elucubraciones teóricas sin ninguna incidencia en la práctica docente, y que el profesor nunca se las va a plantear. Pero aunque éste no se las plantee, ello no quiere decir que no existan y que ellas no se planteen al profesor. Lo que sí puede ocurrir —y de hecho, ocurre muchas veces— es que el profesor tenga previamente decidida la elección a esas alternativas, aunque sea de manera inconsciente o por ideas preestablecidas. Pero consciente o no, toma partido y opta por una de ellas, y esas opciones determinan distintos tipos de formación en el alumnado.

En una elección consciente sobre las alternativas habrá que considerar también otros elementos (tiempo necesario de trabajo para cada una de ellas, existencia de recursos o instrumentos necesarios para ellas, ritmo de aprendizaje de los alumnos, cantidad de alumnos que tiene a su cargo, objetivos que se pretenden conseguir en esa etapa con el estudio de esos objetos matemáticos, etc.). Por ejemplo, respecto a las formas de aprehensión de propiedades de los objetos —enunciación o descubrimiento— citadas anteriormente, no se obtiene en los alumnos el mismo tipo de formación matemática.

[1] No es lo mismo hacer aparecer los números racionales (fracciones) a alumnos de primaria que a alumnos de Bachillerato (si fuese necesario), o a ser conscientes de la aparición de funciones en los distintos niveles de enseñanza, desde la enseñanza primaria.

[2] «la multiplicación de números tiene la propiedad conmutativa», «el área de un rectángulo se obtiene multiplicando la longitud de la base por la de la altura», «la composición de funciones no tiene la propiedad conmutativa», «la derivada de un producto de funciones se obtiene…», «la probabilidad del suceso A o B se obtiene…», etc.

No quiero decir que una sea mejor que la otra (dependerá de los objetivos que nos fije el currículo), pero el profesor debe tener la suficiente formación como para saber que son diferentes, que se obtienen con ellas formaciones de tipo diferente, y que debe saber implementar en la clase una u otra según por la que se decida. Por ejemplo, en el actual Bachillerato los objetivos de la formación en Matemáticas de las modalidades «científica» y «humanístico-social» no tendrían por qué ser iguales, y eso no quiere decir que un mismo profesor no pudiera impartir ambos cursos aunque con diferentes formas de actuación.

La matemática como actividad científica «experimental».

Es interesante ser conscientes de que la actividad matemática es una actividad «científica», y como tal puede presentarse a los alumnos en coordinación con otras actividades del ámbito científico, cuyas características esenciales son, como ya sabemos, la observación y la experimentación. La matemática puede —y debe— enseñarse también como una ciencia experimental, donde a partir de realidades del entorno experimentemos y observemos objetos para obtener propiedades. Dependiendo del nivel y capacidad del alumnado ese entorno puede ser de objetos manipulables[3], de esquemas representativos, o de cualquier tipo de recurso (o sus resultados) que sean conocidos por el alumno. La observación y la experimentación son actividades científicas básicas y con las que es posible obtener propiedades matemáticas de los objetos.

Esta actividad es especialmente necesaria para establecer las propiedades básicas (axiomas, en terminología matemática). En niveles preuniversitarios es imprescindible que los axiomas aparezcan como propiedades experimentales de la situación que se quiere axiomatizar, y no como paracaídas que han aparecido sin saber cómo ni de dónde.

El establecimiento de propiedades de objetos mediante experimentación es también interesante didácticamente para abordar el problema de la certeza de una propiedad. Cuando un alumno enuncia una propiedad, ¿podemos asegurar que es cierta?. Sobre todo cuando se pretende generalizar o afirmar propiedades universales aparece el problema de la certeza de esas propiedades o de las proposiciones donde se enuncian. Ahí aparece la necesidad de realizar «demostraciones» (argumentaciones sobre la certeza), y de que aparezcan provisionalmente «conjeturas» que serán o no ciertas posteriormente.

Esta es una situación didáctica que es posible plantear por parte del profesor desde edades bastante anteriores a lo que muchas veces se cree. Los alumnos desde edades tempranas están acostumbrados a enunciados (propiedades o afirmaciones) de los que luego no son ciertos o lo son sólo en parte o en determinadas condiciones. La aparición

[3] Bolas para obtener cantidades de elementos de un conjunto, poliedros construidos a partir de piezas, representaciones gráficas mediante un ordenador, dominós de fracciones o de ecuaciones, dados o ruletas para análisis de probabilidades, hojas multicopiadas donde aparezcan dibujadas situaciones que queramos analizar, etc.

de estas situaciones es muy útil para construir enseñanzas con formación para la experimentación y acostumbrar a los alumnos a inquirir sobre los hechos.

Mediante experimentación podemos obtener muchas propiedades de los objetos que se estudian. Pero la matemática también es peculiar por sus métodos para desvelar propiedades de los objetos, siendo esencial el método deductivo, de antigua tradición histórica, con más de 2.500 años de antigüedad. Presentar así a los alumnos el método deductivo como un método que nos permite obtener propiedades a partir de otras anteriores, con lo que tendríamos un ahorro de esfuerzo en la experimentación, que siempre requerirá más tiempo y esfuerzo. El alumno debe sentir la ventaja del ahorro que significa el método deductivo frente a los métodos experimentales. La presentación de situaciones históricas donde ello ha significado un avance científico es también muy interesante para la formación científica del alumno y la adhesión al método deductivo[4].

Ocurre así que propiedades obtenidas por métodos experimentales se pueden deducir a partir de otras, y crear así un entramado de relaciones entre ellas (retículo) cuyos elementos mínimos (propiedades que no se pueden deducir de otras) son las básicas de esa teoría (conjunto de propiedades de unos determinados objetos) que, desde el punto de vista del método axiomático-deductivo, son los llamados axiomas.

Plantear una enseñanza desde estos presupuestos (frente a una enseñanza de tipo «informativo», enunciativa de propiedades, incluso con demostraciones de ellas) es una opción posible y fomenta un ansia por comprender que está en la base de la actividad humana[5], lo que además podemos considerar que ayuda a considerar la enseñanza de la matemática como una enseñanza «humanística» frente a la enseñanza de la matemática como meros «procesos de cálculo».

La formación del profesorado en este aspecto exige un conocimiento profundo de los sistemas lógico-deductivos, así como un conocimiento del significado de propiedades cuyas características sean conjeturas, axiomas, propiedades deducidas, etc., cuya importancia debe darla la significación y magnitud de los hechos que descubren y no su posición en el sistema deductivo. (El teorema de Pitágoras no es menos importante que el hecho de que por dos puntos del plano sólo pasa una recta, sólo por ser éste un axioma). Los libros de Lakatos (1981) y Pölya (1966) pueden ayudar a este conocimiento.

[4] Por ejemplo, históricamente las leyes de los planetas frente a las observaciones de Tycho Brahe y el propio Kepler. Pero también en situaciones más didácticas: la obtención de la fórmula de la derivada en un punto de un producto de funciones, frente a la obtención del valor de esa derivada mediante la definición de derivada de una función en un punto; o la obtención del resultado de que no es posible obtener más de 5 poliedros regulares frente a la experimentación manual de la imposibilidad de ello, lo que nos asegura que no es necesario seguir experimentando la existencia de nuevos poliedros regulares.

[5] El ansia por comprender su entorno, junto al proceso de simbolización del mismo (incluyendo aquí el lenguaje), son los procesos que significan la humanización de la especie, según algunos autores.

Los «recursos» didácticos

Englobo como recurso todo aquello que nos sirva de base para la experimentación en matemáticas o pueda ayudar a ello. Clásicamente se citaban la regla, escuadra y cartabón, los distintos tipos de compás y las tablas de funciones especialmente las logarítmicas. Pero el avance de la tecnología, especialmente la electrónica, ha puesto en manos del profesor muchos otros, como las calculadores, ordenadores y gran cantidad de recursos on-line, como monitores y apps para el estudio de diversos temas matemáticos.

Los recursos permiten abordar muchos temas que aparentemente debieran ser reservados para cursos superiores y que a partir de ellos pueden presentarse a alumnos de niveles anteriores.

El profesor debe conocer el mayor número posible de ellos (aunque la proliferación actual de ellos es enorme) y aprovecharlos para presentar así modelos y realidades con las que experimentar matemáticas y eliminar rutinas que pueden ser pérdidas de tiempo. Muchas veces de los recursos se obtendrán intuiciones («conjeturas») de las que será necesario realizar posteriormente una demostración.

Un ejemplo muy ilustrativo es el análisis local de un punto en la gráfica de una función mediante sucesivas aproximaciones («zooms») que nos permiten intuir cuál podría ser el comportamiento de la función en ese punto. O el cálculo de la suma de gran cantidad de términos de una serie, que nos permite realizar una conjetura sobre la suma de la serie. (¿Qué ocurre si la serie es oscilante?).

Instrumentos como Geogebra para la experimentación en geometría son ya de uso obligado en el trabajo docente.

Otras exigencias «filomatemáticas»

Para presentar a los alumnos las situaciones de investigación y motivarlos son importantes también por parte del profesorado, conocer otros aspectos de los contenidos matemáticos en los que puede hallar inspiración directa para presentarlos o que deben estar en la preparación de las situaciones didácticas sin que necesariamente tengan que ser explícitos para el alumno.

Los conocimientos históricos

Los objetos matemáticos y el estudio de sus propiedades han aparecido históricamente en un determinado tiempo y motivados por necesidades de la Humanidad o por una parte de ella, que son los matemáticos.

Conocer los motivos, el desarrollo de su aparición, sus aplicaciones y los problemas históricos (discusiones, formas diversas) que trajeron consigo es importante porque muchas de esas situaciones es posible que se les planteen a los propios alumnos y pregunten al profesor sobre ello, incluso planteando soluciones simples a situaciones complejas, y el profesor debe poder dar información de ello o, si no la tuviera, saber adonde dirigir al alumno.

Pero también el profesor debe considerar que la necesidad histórica puede no coincidir con la necesidad psicológica de los alumnos, o incluso que el profesor considere que es más atrayente plantear una necesidad psicológica que la propia necesidad histórica que motivó su aparición.

Por ejemplo, la derivada en un punto puede aparecer por la necesidad de hallar tangentes a curvas, por la de obtener una tasa de incremento local de una función, o por la de obtener valores aproximados para el cálculo de los valores de una función, entre otros motivos. Elegir una u otra motivación entra dentro de la labor docente a partir de los alumnos que tenga en el curso.

La filosofía de la matemática

La reflexión sobre los objetos, procedimientos y métodos que se usan en matemáticas han sido objeto históricamente de planteamientos sobre su ontología o la validez de éstos. Muchas veces también han contribuido a que la filosofía haya tenido que plantearse revisar disquisiciones que creía simples o ha abierto caminos para que aquella avance por otros cauces.

El problema planteado por los propios objetos matemáticos[6], el problema de la existencia de infinitos, la teoría de conjuntos, los teoremas de imposibilidad y otras cuestiones similares son cuestiones sobre las que el profesor debe tener al menos un cierto conocimiento, y naturalmente de su existencia.

El problema de la formalización

Hay una tendencia reciente[7] a exponer las teorías matemáticas de manera «formal», axiomático-deductiva, y con lenguaje simbólico. Esa tendencia se ha trasladado muchas veces a los libros de texto de enseñanza secundaria e incluso de la primaria. Lo que en libros de investigación o textos universitarios puede ser necesario en aras a la simplicidad lógica, no lo es en otros niveles de enseñanza, donde es necesario considerar también la simplicidad psicológica y la construcción del lenguaje que lleva aneja la expresión del conocimiento.

Que pueden plantearse cuestiones matemáticas muy profundas sin necesidad del rigorismo del lenguaje formalista, puede verse consultando el excelente libro de Courant y Robbins (1955).

Esa tendencia, proveniente de la expresión de la lógica formal donde allí sí que tenía su función, no es necesaria en los niveles inferiores. Ni produce ninguna ventaja

6 ¿Son objetos ideales o tienen existencia real? O dicho de otra forma, ¿las propiedades matemáticas tienen existencia exterior, están ahí y los matemáticos las «descubren», las «des-velan»? ¿o tienen sólo existencia interior y están en la mente de los matemáticos?

7 70 años es reciente en el devenir histórico de la enseñanza.

respecto al lenguaje usual, contribuyendo al «esoterismo» que muchas veces se achaca a las matemáticas, y que tan negativas actitudes puede provocar en los alumnos.

No cabe duda de que a medida que los alumnos van descubriendo propiedades se han de «formalizar» de alguna manera (expresiones, dibujos, esquemas, etc.). Las formalizaciones de los alumnos son extraordinariamente importantes porque ellas constituyen nuevos «objetos» —simbólicos— sobre los que es posible investigar matemáticamente, además de que la formalización ayuda psicológicamente a fijar los procesos operativos o de investigación. El libro de Manuel Alcalá (1995) ayuda a conocer estos procesos.

Progresivamente el profesor debe ayudar a que dichas formalizaciones se vayan acercando a lo que son formalizaciones estándar en textos matemáticos, pero el proceso ha de ser progresivo a medida que se avanza en los niveles escolares, y desde luego con el asentimiento de los alumnos. El lenguaje debe ser comunicativo y que sirva para entenderse y no desmotivador.

Otras consideraciones finales

No puedo terminar estas reflexiones sin recordar que, naturalmente, la incardinación de un profesor de matemáticas en un determinado centro escolar y en un sistema (público o privado) de enseñanza, le exigirá conocer adecuadamente éstos, el curriculum correspondiente, y sobre todo los objetivos formativos que se pretenden y con ellos como referente construir el curriculum de matemáticas para esa clase.

Como llevar a la práctica muchas de las anteriores consideraciones pueden verse en el magnífico libro de Moisés Coriat y otros, que figura en las referencias. De él aprendí —entre otras muchas cosas— que, citando al *Eclesiastés*, «no hay nada nuevo bajo el Sol».

Referencias

Alcalá, M. (1986). *Otras matemáticas, otra escuela*. Granada, España: Editorial Escuela Popular.

Coriat, M., Carretero, R. y Nieto, P. (1993). *Tres niveles de planificación para el área de Matemáticas en la etapa 12-16*. Sevilla, España: Consejería de Educación de la Junta de Andalucía.

Courant, R. y Robbins, H. (1955). *¿Qué es la Matemática?* Madrid, España: Editorial Aguilar.

Lakatos, I. (1981). *Matemáticas, Ciencia y Epistemología*. Madrid, España: Alianza Editorial.

Pölya, G. (1966). *Matemáticas y razonamiento plausible*. Madrid, España: Editorial Tecnos.

Tarski, A. (1968). *Introducción a la lógica y a la metodología de las ciencias deductivas. Madrid, España:* Editorial Espasa-Calpe.

PROGRAMAS Y ACTUACIONES DE FORMACIÓN DE PROFESORES UNIVERSITARIOS EN EL MARCO DE LOS PLANES DE CALIDAD DE LA UGR (2001-2004 Y 2005-2008)

Training programs and activities of University Teachers under the Quality Plans UGR (2001-2004 and 2005-2008)

José Gutiérrez-Pérez
Universidad de Granada

Resumen

La Universidad de Granada desarrolla sus primeras actuaciones de formación sistemática de profesores universitarios en el año 2000, al amparo de la creación del Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente. En un contexto de cambio global y renovación de las estructuras universitarias que afecta muy especialmente a las competencias docentes de los profesores. La formación de profesores universitarios se institucionaliza en la UGr en el marco de los dos primeros planes de calidad desde donde se promueven programas formativos normalizados de diferente naturaleza y formato, vigentes en la actualidad en su mayor parte. En este texto se revisa la contribución del Profesor Coriat a la formación del profesorado universitario en su etapa como Director del Secretariado de Profesorado de la Universidad de Granada, durante el periodo en que se desarrollaron estos dos planes de calidad.

Palabras clave: educación superior, formación de profesores, planes de calidad universitaria.

Abstract

The University of Granada develops its first performances of systematic training of university teachers in 2000, under the creation of the Vice President for Planning, Quality and Evaluation. In a context of global change and renewal of university structures which particularly affects the teaching skills of teachers. Teacher training is institutionalized in the UGr within the first two quality plans where standardized training programs of different nature and format, currently in effect for the most part. In this paper we the contribution of Professor Coriat the training of university teachers in his time as Director of the Secretariat of Faculty of the University of Granada is reviewed, during the stage in which these two quality plans were developed.

***Keywords**: higher education, teachers training, university quality plans.*

Antecedentes

Institucionalización de la formación del profesor universitario

En el otoño del año 2000, la Universidad de Granada desarrolla sus primeras actuaciones de formación sistemática de sus profesores universitarios. Dichas iniciativas se institucionalizan en el marco de los dos primeros planes de calidad implantados desde el Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente dando lugar a programas formativos normalizados de diferente magnitud, naturaleza y formato. Algunos de estos programas se mantienen actualmente vigentes en respuesta a la creciente demanda formativa que se ha producido en el sector del profesorado universitario, como un indicador de la necesidad de actualización docente continuada y de la progresiva importancia que ha ido adquiriendo la cualificación pedagógica de los profesores universitarios.

Los programas de formación docente que se ponen en marcha en este periodo procuran integrar las peculiaridades de las diferentes áreas de conocimiento, canalizar equilibradamente las inquietudes de formación emergentes del profesorado universitario y estructurar demandas de desarrollo profesional universitario en un momento de cambio y transformación global del sistema universitario. Los programas implantados atendieron un conjunto amplio de necesidades docentes condicionadas por una acelerada y profunda transformación tecnológica y una orientación de la enseñanza hacia los intereses del estudiante. Bajo el tópico «para enseñar, no basta con saber la asignatura» (Hernández y Sancho, 1993), el profesorado universitario empieza a tomar conciencia de la necesidad de adquirir competencias docentes específicas sobre planificación curricular, diseño de unidades didácticas, metodologías de trabajo en el aula, psicología del aprendizaje, innovación e investigación en el aula, dominio de diferentes tipos de herramientas de evaluación sumativa y formativa, así como del papel de los procesos de orientación universitaria, el asesoramiento académico, la tutoría con los estudiantes y la mentoría guiada por profesores experimentados.

Contexto de cambio global y renovación metodológica en la universidad

El horizonte de la sociedad del conocimiento y la construcción de un escenario de educación universitaria homologable a nivel europeo que permitiese la movilidad estudiantil y superase los condicionantes y estructuras de cada contexto nacional abrirá nuevos retos de innovación y reforma estructural y curricular a la universidad española. Todo ello obliga a los docentes a reconvertir su manera de entender la formación universitaria y a las organizaciones a implantar procesos de formación sistemática focalizados en la docencia universitaria. Los requerimientos del Espacio Europeo de Educación Superior, los procesos de internacionalización, el nuevo modelo de metodologías docentes centradas en el estudiante, las exigencias de implantar sistemas de evaluación novedosos junto a la necesidad de acometer acciones de innovación continuada en las aulas ponen en la agenda del profesor de universidad un listado de tareas inéditas que exigen entrenamiento continuado, formación y actualización periódica, trabajo colaborativo, reflexión compartida y autocrítica. Entre las novedades más destacables de este periodo se implanta la necesidad de acreditar el conocimiento de los nuevos métodos pedagógicos, el dominio de diferentes modelos didácticos para la enseñanza, la valorización de los materiales didácticos y la familiaridad con el empleo de las tecnologías para favorecer los aprendizajes.

Cursos de actualización pedagógica

Bajo el mandato del Rector David Aguilar, siendo Vicerrector el Profesor Luis Rico, el Profesor Coriat asume la Dirección del Secretariado de Profesorado de la Universidad de Granada durante el periodo 2000-2007. En este texto se revisa la dilatada contribución del Profesor Coriat a la formación del profesorado universitario de la UGR, donde desarrolla una extensa tarea de planificación curricular con multitud de agentes de la comunidad universitaria orientada a la adquisición de competencia docente en el ámbito universitario. En paralelo, también cultiva esa otra faceta vinculada a la formación inicial de profesores de la enseñanza secundaria, a la que hizo frente liderando una larga etapa de transición y renovación vigorosa de la formación de profesores de secundaria en el formato CAP-CCP presencial y semipresencial (Cabrera, Coriat, Fernández, Marín y Marín, 2003; Marín, Coriat, Marín, 2004), movilizando una compleja estructura de formación que involucraba a profesores de universidad, directores de institutos y docentes supervisores de las prácticas de enseñanza en los institutos de secundaria, bachillerato y formación profesional tanto en la UGR como en los campus de Ceuta y Melilla (Gutiérrez, Romero y Coriat, 2003; Romero, Gutiérrez y Coriat, 2003). Etapa que culminará finalmente con la instauración del nuevo máster de profesorado de educación secundaria en 2009 (Gutiérrez, Moreno, Gallardo y Sánchez, 2013), construido a partir de los cimientos fraguados en toda esta estructura de paciente renovación previa.

Colección Editorial Qualitas y divulgación de experiencias formativas

Otra de las actividades desarrolladas desde el Secretariado de Profesorado fue la de fundar una colección editorial dentro de las líneas de publicación de la UGR denominada Qualitas (ver Figura 1) que permitió la difusión de un buen número de experiencias innovadoras en el seno de la acomodación a los procesos de implantación del nuevo sistema de créditos ECTS (Cañizares y Fernández, 2008; González y Liébana, 2008), la orientación, y tutoría universitaria (Coriat, 2002; Coriat y Sanz, 2005; García y Sanz, 2006), la mentoría de profesores noveles (Sánchez *et al.*, 2016), la evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizaje y su adaptación a los requerimientos del nuevo Espacio Europeo de Educación Superior (López, 2007); así como otra serie de ediciones especializadas en la evaluación de la calidad de la actuación docente (Defior *et al.,* 2004; Gutiérrez *et al.,* 2007).

Figura 1. *Portada de la Colección Editorial Qualitas*

El programa de excelencia docente de la UGR

El primer Plan de Calidad Docente de la UGR fue aprobado en Junta de Gobierno de 25 junio de 2001, y el segundo el 27 de junio de 2005. La finalidad de estos planes fue la de promover una cultura de la calidad e impulsar la excelencia docente como instrumentos de desarrollo de las políticas institucionales sobre evaluación, mejora docente e innovación. El tercer programa de estos dos planes, coordinado por el Profesor Coriat se proponía favorecer la formación del profesorado, el estímulo y reconocimiento de sus méritos, y el apoyo a su actualización profesional como docentes. Dicho programa se planteaba como un acercamiento progresivo entre la cultura del profesorado en sus tareas ordinarias de enseñanza y la cultura del alumnado en sus tareas diarias de aprendizaje; propiciando con ello un mejor aprovechamiento de los créditos docentes, un aumento escalonado de los niveles de calidad de la enseñanza y de sus resultados, una práctica más reflexiva en la comunicación del conocimiento y una mejora sustancial de la labor tutorial y orientadora.

La búsqueda de la excelencia docente fue el objetivo central de este programa. Para ello se diseñaron una serie de actuaciones de apoyo al profesorado y se iniciaron otras encaminadas a clarificar las dimensiones para la evaluación de esa excelencia, que debían culminar en las correspondientes medidas de reconocimiento e incentivación. La institución universitaria asumió el compromiso de facilitar a todos sus profesores los medios para esa búsqueda e inició el camino para reconocer y compensar los esfuerzos realizados a favor de la excelencia docente (Rico, Defior, Coriat y Sánchez, 2001). Este programa proponía cinco actuaciones diferentes (Gutiérrez y Llorens, 2006): seminarios sobre tutorías y orientación, actualización didáctica del profesorado, formación en el manejo de tecnologías, intercambios docentes y reconocimiento de méritos docentes.

Seminarios sobre tutorías y orientación en la universidad

Con estos seminarios se pretendía promover el valor de las tutorías, así como mejorar y diversificar los procesos de orientación académica universitaria. Aunque la normativa vigente garantizaba las tutorías, los estudiantes expresaban a menudo quejas sobre su utilidad o sobre las dificultades para ser debidamente atendidos por sus profesores. Poner en valor el servicio de tutoría como espacio de encuentro entre el profesor y el alumno, o con un grupo reducido de alumnos, que les permita aclarar dudas sobre los contenidos explicados por aquél o pedir orientación sobre sus estudios. Se trata de una tarea de alta complejidad, que implica privacidad, respeto mutuo y, por parte del profesor, además, apertura a la innovación para explicar de otra manera, establecer conexiones que el alumno no captó o, simplemente, reducir el miedo o la angustia ante una materia de alta exigencia (Rico *et al.,* 2001). Convertir todo ello en contenidos de formación explícita para el profesorado universitario constituía el principal reto de estas actuaciones (Coriat, 2002). Actualmente existe una oferta consolidada en este ámbito que ofrece a los profesores conocimiento experto para organizar y orientar las tutorías que está al servicio de los profesores noveles desde el comienzo de su carrera docente. La modalidad de trabajo en esta actuación fue la organización de seminarios sobre acción tutorial, con la finalidad, en primer lugar, de analizar situaciones de tutoría y, en segundo lugar, explorar el impacto de las nuevas tecnologías (correo electrónico, vídeo conferencia, tele conferencia) en las acciones de tutoría, en ese momento apenas incipientes. Esta actuación proponía apoyar la organización de seminarios por centros, dirigidos a su profesorado (Coriat y Sanz, 2005; García y Sanz, 2006).

Figura 2: *Actas del Seminario sobre Formación Inicial del Profesorado universitario en la UGR*

Actualización didáctica del profesorado

Esta actuación estaba orientada a mejorar el conocimiento de los profesores sobre nuevas técnicas y procedimientos para la enseñanza y aprendizaje de una o varias materias de su competencia y como apoyo para su actividad docente. El objetivo fue apoyar el desarrollo de actividades de formación para profesores, orientadas a la reflexión didáctica, acompañadas de formación sobre técnicas de comunicación e innovaciones metodológicas, bien de tipo general o relativas a un área o rama específica del conocimiento académico. El formato ofertado fue la modalidad de cursos o seminarios, pensados como acciones formativas orientadas a mejorar la calidad de la actividad docente. Estaban dirigidos a desarrollar programas concretos de actualización didáctica en una o en varias disciplinas afines, en las que los profesores se comprometían a planificar procesos de enseñanza o diseñar productos docentes y materiales curriculares ligados a su propia práctica. También sirvieron para proporcionar la formación didáctica inicial a los profesores noveles que se incorporaban a la plantilla docente de la UGR. Las actividades estaban coordinadas por profesores expertos en los campos implicados, especialistas en metodología de las disciplinas de los docentes participantes y expertos en metodologías docentes, planificación curricular y evaluación del trabajo del estudiante.

Las actividades de formación se organizaron a petición de uno o varios departamentos en coordinación, poniendo énfasis en su finalidad formativa específica, y centrados en un campo de conocimiento determinado. Esta actuación dio lugar a una oferta institucional anual de cursos básicos de actualización didáctica sobre docencia universitaria.

Formación en tecnologías de la información y gestión de documentación

Esta actuación se orientaba a mejorar el conocimiento de los profesores sobre nuevas tecnologías y como instrumento de apoyo para su actividad docente. Incluía varios niveles, que iban desde una formación básica de alfabetización tecnológica hasta el dominio de herramientas más sofisticadas de última generación. El objetivo fue desarrollar competencias docentes orientadas al aprendizaje de destrezas específicas en el dominio de las nuevas tecnologías de la información, en especial de programas informáticos y de gestión de documental. Las actividades de formación se diseñaron en colaboración con los servicios informáticos, la red de laboratorios audiovisuales de la universidad y el servicio de bibliotecas, y actuaron de coordinadores un grupo de profesores especialistas en cada uno de los soportes tecnológicos, poniendo énfasis en las aplicaciones didácticas. Entre la oferta formativa se desarrollaron cursos de iniciación informática, de técnicas para el manejo de materiales audiovisuales, de técnicas para la organización y presentación de información en distintos soportes, de manejo de programas y uso de bases de datos con fines docentes, y de dominio de utilidades para trabajar en red. La iniciación a sistemas tutoriales y la enseñanza asistida por ordenador se institucionalizó dentro de una convocatoria anual normalizada de formación.

Intercambios docentes

Esta actuación se orientaba a facilitar el intercambio de experiencias y la actualización docente con profesores de otras universidades. Su objetivo fue apoyar la estancia de los profesores de la UGR en otras universidades para llevar a cabo algún trabajo de innovación docente o integrarse en una red de formación académica.

Reconocimiento de méritos docentes

El esfuerzo realizado por el profesorado para mejorar la calidad docente, introducir innovaciones, relacionar la investigación y la docencia, asistir a cursos, producir documentos y otras iniciativas y actuaciones orientadas al desarrollo curricular y la promoción docente de los profesores se ha incrementado de forma progresiva. Entre las actuaciones desarrolladas constan varios cursos orientados al diseño del proyecto docente para concurrir a plazas y estrategias de organización documental del patrimonio docente personal de cada profesor cara a su organización según criterios objetivos, de manera que permitan destacar sus aportaciones y producciones docentes junto a los méritos de investigación.

Con la implementación de estos dos planes se inicia un proceso continuado de mejora de la calidad docente al que se acogieron varios miles de profesores en sus diferentes formatos y modalidades, dotando a la institución de un sistema estable para retroalimentar los procesos de planificación y de toma de decisiones sobre su actuación docente. La transcendencia, inercia e impacto que adquieren estas medidas y actuaciones quedan reflejadas de forma contundente en el Plan Estratégico de la UGR 2006-2010. Así, el objetivo 1 del Eje I está dedicado íntegramente al Nuevo Modelo Docente, recogido en la Línea Estratégica 2: 1) Concreción de un modelo docente formativo, funcional e instrumental, basado en la gestión responsable por el alumno, orientado por el profesor, de su propio proceso de aprendizaje. 2) Generalización de la acción tutorial, incorporada a la metodología docente, vinculada con el proceso de aprendizaje, el esfuerzo académico y la orientación profesional. 3) Impulso a la utilización en la enseñanza de las tecnologías de la información y la comunicación. 4) Vinculación de la docencia con el estudio de caos, la resolución de problemas, la realización de proyectos y actividades en los campos profesionales de cada titulación. 5) Diseño y desarrollo de innovaciones docentes, generación de recursos e intercambio de experiencias que favorezcan el trabajo en equipo y mejoren el aprendizaje de los alumnos.

Nota final

Docencia e investigación constituyen dos facetas esenciales de la vida universitaria. Si bien la segunda ha disfrutado de mayor consideración como consecuencia de la objetivación de los procesos de su evaluación y el desarrollo de la cienciometría, la primera no siempre ha gozado de idéntico estatus. La situación ha mejorado en la medida en que las demandas de formación del profesorado universitario se han institucionalizado y las exigencias de la carrera docente han integrado criterios de acreditación de la formación pedagógica, junto al reconocimiento de la producción de material docente innovador o el manejo de metodologías didácticas de base tecnológica al servicio del aprendizaje autónomo o grupal. Una tercera faceta, la de la gestión universitaria constituye una tarea eventual en la trayectoria del profesor universitario que permite durante un tiempo asumir tareas de responsabilidad de distinta naturaleza, ligadas a espacios de decisión trascendentes en los correspondientes equipos de gobierno. Ello conlleva planificar actuaciones que involucran a un número amplio de agentes de la comunidad universitaria desde una perspectiva más general del trabajo cotidiano en el seno interno de los departamentos universitarios. Este texto revisa la trazabilidad de algunas contribuciones relevantes del homenajeado al proceso de institucionalización de la formación de profesores universitarios en la UGR; todo ello en un momento crucial de nuestra historia en la que se inicia un cambio de rumbo rotundo en el desarrollo de competencias profesionales ligadas a la cualificación pedagógica y la formación didáctica de un profesor universitario de nueva generación. Sirvan estas letras para agradecer su dedicación.

Referencias

Cabrera, A., Coriat, M., Fernández, A., Marín, A. y Marín, A. E. (2003). *Informe descriptivo y evaluación exploratoria de la modalidad semipresencial. Certificado de Aptitud Pedagógica. Curso 2001/2002.* Granada, España: Universidad de Granada.

Cañizares, J. y Fernández, E. (2008). *Análisis del proceso de implantación del Sistema ECTS en la Universidad de Granada*. Granada: Editorial Universidad de Granada. Colección Qualitas.

Coriat, M. y Rico, L. (2004). Calidad docente en la Universidad de Granada: organización y resultados. En A. Vázquez, Miguel A. Collado (Coord.), En *Actuaciones de la Agencia Nacional de Evaluación de la Calidad y Acreditación en el curso 2003-2004: implicación de las instituciones* (pp. 147-150). Ciudad Real, España: Universidad Castilla La Mancha-ANECA.

Defior, S., Pascual, A. y L. Rico (2004). *Opinión del alumnado sobre la actuación docente del profesorado (2002-2003).* Granada: Editorial Universidad de Granada. Colección Qualitas.

García, E. y Sanz, R. (2006). Nuevas estrategias de apoyo a los estudiantes en la universidad. En T. Escudero y A. D. Correa (Coords.): *Investigación en innovación educativa: algunos ámbitos relevantes.* Madrid: La Muralla, pp. 207-268.

González, A. y Liébana, J. A. (2008). *Posibilidades, experiencias y retos en el Espacio Europeo de Educación Superior.* Granada, España: Editorial Universidad de Granada. Colección Qualitas.

Gutiérrez, J. y Llorens, F. J. (2006). *Plan de Calidad Docente 2001-2004. Balance de Actuaciones.* Granada, España: Universidad de Granada y Vicerrectorado de Planificación, Calidad y Evaluación Docente.

Gutiérrez, J., Pascual, A. y Rico, L. (Coords.) (2007). *Opinión del alumnado sobre la actuación docente del profesorado de la Universidad de Granada.* Granada, España: Editorial Universidad de Granada. Colección Qualitas.

GUTIÉRREZ, J., MORENO, A., GALLARDO, M. A. y SÁNCHEZ, C. (2013). *Guías del máster universitario de educación secundaria obligatoria y bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas de la Universidad de Granada.* Granada, España: Editorial Universidad de Granada-Escuela de Posgrado.

GUTIÉRREZ, J., ROMERO, A. y CORIAT, M. (Eds.) (2003). *El Prácticum en la formación inicial del profesorado de magisterio y educación secundaria: avances de investigación, fundamentos y programas de formación.* Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

HERNÁNDEZ, F. y SANCHO, J. M. (1993). *Para enseñar no basta con saber la asignatura*. Barcelona, España: Paidós.

LÓPEZ, M. C. (2007). *Evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizaje en la Universidad y su adaptación al EEES.* Granada: Editorial Universidad de Granada. Colección Qualitas.

MARÍN, A., CORIAT, M. y MARÍN, A. E. (2004). *Informe descriptivo y evaluación exploratoria de la modalidad semipresencial. Certificado de Aptitud Pedagógica. Curso 2002/2003.* Granada, España: Universidad de Granada.

RICO, L., DEFIOR, S., SÁNCHEZ, A. y CORIAT, M. (2001). Calidad de la enseñanza en la Universidad de Granada. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado, 5*(2), 1-19.

ROMERO, A., GUTIÉRREZ, J. y CORIAT, M. (Eds.) (2003). *La formación inicial del profesorado a luz de los nuevos retos de convergencia de las políticas de la Unión Europea.* Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

SÁNCHEZ, M. T., CLAROS, F. J. y CORIAT, M. (2016). Los beneficios del feedback con el Profesor Rico en una investigación sobre el límite. En E. Castro, E. Castro, J. L. Lupiáñez, J. F. Ruiz, M. Torralbo (Eds.): *Investigación en Educación Matemática.* Homenaje a Luis Rico (pp. 311-318). Granada, España: Comares.

SELECCIÓN DE TAREAS RICAS PARA EL APRENDIZAJE MATEMÁTICO EN LA PLANIFICACIÓN EDUCATIVA

Selecting rich tasks for mathematical learning during educational planning

Antonio Marín del Moral
Catedrático de Matemáticas en Educación Secundaria jubilado

Resumen

El diseño de tareas de calidad para el aprendizaje de los estudiantes de Educación Secundaria es un objetivo permanente en las investigaciones de la educación matemática. Gran parte de estos estudios incorporan criterios generales para aplicar al seleccionar una tarea escolar. Por otra parte, la formación de profesores necesita incorporar indicaciones para el diseño de tareas de calidad que incorporen el conocimiento contenido en los estudios citados. Este artículo resume algunos de estos criterios de calidad, señala los indicadores de criterio más frecuentes y los enmarca en el esquema de formación de profesores que propone el análisis didáctico.

Palabras clave: análisis didáctico, formación de profesores de matemáticas, planificación de lecciones, tareas ricas.

Abstract

Developing high quality tasks for secondary education student learning is a standing goal of the investigations in mathematics education. A large number of these studies include general criteria to be considered when selecting a school task. Further to this, teacher training needs to incorporate indications for the development of quality tasks which include the knowledge contained in the aforementioned studies. This article summarises some of these quality criteria, outlines the most prevalent criteria indicators and inserts them into the teacher training framework which is suggested by the didactical analysis.

Keywords: *didactical analysis, lessons plan, mathematics teachers training, rich tasks.*

Planificación de la enseñanza y tareas ricas

Hay múltiples decisiones que el profesorado de educación secundaria adopta cuando planifica la enseñanza de una lección o sesión de clase de modo más explícito o de forma casi rutinaria apoyándose en su experiencia anterior. El profesorado selecciona el contenido matemático, fija las expectativas de aprendizaje de su lección y las asocia a objetivos o competencias, elige materiales y recursos para enseñar, busca las tareas escolares más adecuadas, organiza la enseñanza por sesiones de clase, prevé un modo de gestionar el trabajo en el aula y elige los modos de evaluar el aprendizaje entre otras acciones.

Este trabajo se centra en la parte de este proceso de planificación referida a la selección de tareas escolares. Adoptada la idea de tarea como «aquello que se le pide a los alumnos que hagan» Christiansen y Walker (1986) es importante resaltar que «las tareas… son las herramientas de mediación para enseñar y aprender matemáticas» Watson, Ohtani, Ainley, Bolite Frant, Doorman, Kieran *et al.* (2013) y en esta definición se incluye un rango muy amplio de demandas de acción formuladas en forma de: ejercicios repetitivos, construcción de objetos, ejemplificación de decisiones, resolución de problemas de una o varias etapas, realización de un proyecto de investigación, o trabajos que haga un estudiante en una situación particular Watson et al (2013).

Desde la perspectiva del Análisis Didáctico como instrumento de formación de profesores de matemáticas en la planificación de la enseñanza Lupiáñez (2013), la selección de las tareas más idóneas para incluir en una lección es una fase necesitada de otras decisiones anteriores que actúan como criterios condicionantes a la hora de elegir las tareas.

Así, durante el análisis del contenido según este autor disponemos de criterios para valorar el tipo cognitivo de contenido que se maneja en la tarea, los sistemas de representación predominantes en la resolución del problema, la situación y el contexto fenomenológico al que se refiere y el encuadre estructural del contenido de esa tarea con los demás contenidos de la lección.

Al realizar el análisis cognitivo se ha cerrado la contribución de la lección planificada a las grandes expectativas de aprendizaje —competencias OCDE (2004) o capacidades matemáticas fundamentales OCDE (2013)—. También se han formulado, en términos de objetivos específicos, las acciones previsibles de los estudiantes para esta lección y que concretan las grandes expectativas de aprendizaje. Igualmente se han previsto las vías por donde pueden surgir errores y dificultades.

Este análisis comporta nuevos criterios limitativos de las tareas. Éstas deben contribuir a las expectativas previstas y no a otras. Ser capaces de generar las acciones planeadas y no otras diferentes. Han de seleccionarse para permitir aflorar algunos errores ya vistos con antelación y, a su vez, remediarlos.

En el análisis de instrucción Marín (2013) se escogen y organizan todas las tareas de la lección en coherencia con los condicionantes que ya se han establecido previamente. Pero, además del marco que ofrecen los análisis de contenido y cognitivo en este análisis se consideran tres aspectos:

— la complejidad de la tarea en términos del informe PISA 2003 OCDE (2004) que está mediatizada por los conocimientos previos de los grupos de estudiantes.
— La ubicación de cada tarea en una secuencia de aprendizaje con intenciones específicas. En la secuencia las tareas juegan un papel nuevo según el modo de aprender que subyace a esa secuencia. Se usan para explorar situaciones, crear nuevos conocimientos matemáticos o asimilar conocimiento adquirido entre otras funciones.
— La selección de recursos de aprendizaje para utilizar en la lección y el sistema de interacción y ayudas del profesor con los alumnos también pueden inferir en la selección de las tareas.

Este marco de análisis ayuda a planificar de modo sistemático. No obstante, la obsesión de cualquier profesor experto es conseguir seleccionar tareas que le proporcionen buena formación matemática a los estudiantes en el tiempo escolar disponible. Y la respuesta a esta demanda no está en los manuales de formación de profesores. En los últimos años se han publicado estudios orientados a definir criterios que caractericen las tareas «ricas» para el aprendizaje. Como no se le escapa al lector o lectora, este tipo de tareas tienen características diferentes según los autores porque responden a que se enfaticen contenidos, expectativas de aprendizaje o modos de enseñar diversos. Incluso la percepción del estudiante de la tarea se puede considerar argumento para su éxito o fracaso como herramienta para el aprendizaje.

La literatura sobre características de las tareas «ricas» para el aprendizaje aporta experiencia y análisis experto en esta difícil decisión del profesor ¿Cómo aprovecharla? Con este trabajo se pretenden recopilar algunos de los criterios que proyectos de trabajo o profesores de prestigio reconocido han aportado para elegir tareas significativas al aprendizaje. Además se han agrupado cada uno de los indicadores que constituyen el criterio (indicadores de criterio en adelante) según las tres dimensiones del Análisis Didáctico que intervienen durante la planificación.

Ámbito de la exploración

Para analizar hacia adonde apuntan los criterios que diferentes autores han enunciado se han escogido artículos que pueden referirse directamente a grandes proyectos de investigación o manifestar reflexiones basadas en la experiencia de los autores. Estas han sido las fuentes de información:

— NRICH Project (http://nrich.maths.org/frontpage) (1997-2016) integrado por la Facultad de Educación de la Universidad de Cambridge y el Centre for Mathematical Sciences. Es un importante centro de recursos de aprendizaje para el currículo escolar e investigaciones asociadas. Utiliza los descriptores de tarea rica que formuló Afzal Ahmed en 1987. Hay una amplia coincidencia en que este apelativo fue usado por primera vez por este autor.

— Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning Henningsen y Stein (1997). Investigación sobre los factores que inhiben el desarrollo del pensamiento de alto nivel en estudiantes durante la implementación en clase. Estudia por qué las expectativas del profesorado (demanda cognitiva) en el diseño de tareas de alto nivel se ven mermadas durante su implementación.
— TTML Project. Clarke y Roche (2010). Este estudio en formación de profesores analiza los criterios con que se eligen tareas a medida que la formación avanza. Caracteriza las tareas por su nivel de calidad y analiza la evolución que existe en la selección de éstas a medida que la formación del profesor se incrementa.
— Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study (Hiebert, Gallimore, Garnier, Bogard Givvin, Hollingsworth, Jacobs, J. *et al.,* 1999). Estudio TIMSS sobre comparación de lecciones impartidas en varios países usando grabaciones en video. Al establecer indicadores comunes de comparación entre diferentes lecciones ordena la calidad de las tareas mediante la graduación de la complejidad de cada uno de los indicadores que utiliza: naturaleza del contenido, tipo de razonamiento empleado, etc.
— Learning to pose mathematical problems: exploring changes in preservice teachers' practices (Crespo, 2003). Estudio que se centra en el modo en que los profesores en formación formulan tareas. En la evolución que siguen los profesores marca un horizonte de calidad de las tareas.
— Adding It Up: Helping Children Learn Mathematics (Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001). Compendio de recomendaciones basadas en investigaciones sobre el aprendizaje escolar. Los criterios para seleccionar y usar las tareas escolares se centran en los factores que inhiben o potencian la demanda cognitiva de la tarea formulada inicialmente.
— Propósito y utilidad de una tarea (Ainley y Pratt, 2006; Ainley, Pratt y Hansen, 2006). La aportación que más destaca en esta línea de investigación es el cuestionamiento de las expectativas del profesor argumentando que no coinciden con las del alumno al realizar las tareas. Además señala que los problemas contextualizados no son garantía de éxito. Propone que las tareas escolares contextualizadas deben tener, además de una utilidad o expectativa que marca el profesor un propósito para el alumno.
— Learners' Perspective Study (LPS) (Shimizu, Kaur, Huang y Clarke, 2010). Esta corriente de investigación reivindica el papel del estudiante como agente en la tarea de forma que sea tan importante el contexto de realización de la misma como las características cognitivas y de recursos que comporta. En sus

indicadores de calidad se enfatiza el papel del alumno como resolutor y el contexto en que realiza el desafío de la tarea.

— Task design: Supporting teachers to independently create rich tasks (Knott, Olson, Adams y Ely 2013). El objeto del estudio se centra en cómo enseñar a los profesores a diseñar tareas ricas que mantengan la demanda cognitiva durante la implementación.

— El diseño de tareas en el Shell Center (Burkhardt y Swan, 2013). Este artículo proporciona un resumen del modo de diseño que se maneja en este conocido centro de recursos de tareas escolares. Las tareas responden a diferentes dimensiones que es necesario analizar y valorarlas con experimentación de las mismas: su contenido, proceso matemático seguido al resolverla, dificultad de la tarea, grado de apertura, modo de presentación e implementación, tipo de resolutor al que se dirige, etc. Por su especial importancia resumimos aquí, en frases sintéticas, los principios de diseño de tareas que se proponen:

  1) Reflejan el currículo de un modo equilibrado; 2) Que merezca la pena resolverlas por su interés, utilidad…; 3) Ajustadas realmente a lo que el currículo pretende evaluar; 4) Accesibles y retadoras; 5) Premian el razonamiento más que los resultados; 6) Abiertas y facilitadoras de la mejor comprensión del mundo; 7) Proporcionan a los estudiantes posibilidades para tomar decisiones; 8) Son transparentes en todo lo que se espera se evalúe de ellas

Metodología de trabajo

Con cada una de las fuentes descritas en la sección anterior se han clasificado los indicadores de los criterios de calidad de las tareas según la dimensión del análisis didáctico a la que apuntan. Por ejemplo, sigamos el proceso con el proyecto NRICH. Este proyecto propugna que las tareas ricas tienen que responder a estos indicadores:

— Al resolver la tarea no debería restringirse a los aprendices a buscar en varias direcciones.

— Debería involucrar a los aprendices en conjeturar, generar hipótesis, poner a prueba, demostrar, explicar, reflexionar e interpretar.

— Debería animar a preguntar ¿qué ocurre si…? ¿qué ocurre si no…?

— Debería animar a la originalidad y la invención.

— La tarea debería ser accesible a todo el mundo desde el principio la tarea.

— Debería permitir retos posteriores y ser ampliables.

— Debería tener un elemento de sorpresa o intriga y ser divertida.

Si se desease tener en cuenta estos criterios en el marco del Análisis didáctico ¿en qué dimensión? ¿En qué momento del análisis deberíamos tenerlos en cuenta para elegir o crear tareas más ricas?

La respuesta a estas preguntas llevó a organizar una tabla para cada estudio interpretando los indicadores y considerando que si esta recomendación se iba a llevar a la práctica en un proceso de formación permanente de profesores debería reflexionarse sobre ella y discutir propuestas concretas de aplicación en alguno de los tres grandes contenedores del Análisis didáctico descritos. Así el principio de calidad de la tarea ocupa un lugar específico para ser tenido en cuenta y no se queda en una vaga intención que no desciende del mundo de las ideas. En la tabla 1 se muestra este análisis en el caso de la propuesta del proyecto NRICH.

Tabla 1. *Proyecto NRICH. Implicaciones en un diseño de formación basado en el Análisis didáctico*

Indicador de criterio	*A. contenido*	*A. cognitivo*	*A. instrucción*
Al resolver la tarea debería no restringir a los aprendices a buscar en otras direcciones	El tipo cognitivo de los contenidos de la tarea apuntará hacia el uso de estrategias variadas	En las competencias asociadas a la tarea destacará la Resolución de Problemas	En el diseño de las ayudas e interacciones de alumnado y profesor se preverá no cortar la iniciativa en buscar diferentes soluciones
Debería involucrar a los aprendices en conjeturar, generar hipótesis, poner a prueba, demostrar, explicar, reflexionar e interpretar	El tipo cognitivo de los contenidos de la tarea apuntará hacia el uso de contenidos para demostrar, justificar y otras formas de razonamiento	En las competencias asociadas a la tarea destacarán las competencias en Resolución de Problemas, Pensar y Razonar, Modelizar	En el diseño de las ayudas e interacciones de alumnado y profesor se preverá el tiempo y otros condicionantes organizativos que favorezcan la reflexión y el debate
Debería animar a preguntar ¿qué ocurre si…? ¿qué ocurre si no…?	La mayor parte de contenidos apuntan al uso y formación de conceptos, razonamientos y estrategias evitando el mero uso de destrezas	En las competencias asociadas a la tarea destacará la de Pensar y Razonar	En el diseño de las ayudas e interacciones de alumnado y profesor se preverá el tiempo, los debates y modos de ayuda que favorezcan la aparición de estas preguntas
Debería animar a la originalidad y la invención	La mayor parte de contenidos apuntan al uso y formación de conceptos, razonamientos y estrategias evitando el mero uso de destrezas		El profesor preverá el tiempo, la interacción profesor alumnado y ayudas adecuadas que favorezcan la reflexión y la originalidad. La complejidad de las tareas debe apuntar al nivel de reflexión
La tarea debería ser accesible a todo el mundo desde el principio			Complejidad: La tarea debe contener apartados clasificados en el nivel de reproducción de las competencias asociadas

Indicador de criterio	*A. contenido*	*A. cognitivo*	*A. Instrucción*
Debería permitir retos posteriores y ser ampliables	La estrategia como tipo cognitivo de contenido favorece la aplicación de este indicador	En las competencias asociadas a la tarea destacará la Resolución de Problemas	
Debería tener un elemento de sorpresa o intriga y ser divertida	Apunta a la consideración de contenidos actitudinales que incorporen medios para favorecer estas actitudes		

Así cada indicador de los criterios de calidad de la propuesta del NRICH sugiere pautas para concretar las decisiones en uno o varios de los tres procesos que se siguen para la planificación de las lecciones en el análisis didáctico.

Algunos indicadores tienen una redacción que implica una aplicación muy abierta. Por ello la inferencia sobre las decisiones que se toman durante el análisis no puede entenderse como de causa-efecto, sino, más bien, que el criterio que manifiesta el indicador debería considerarse de forma destacada en la sección del análisis indicada en la tabla sin manifestar exclusividad.

Aunque, por razones de espacio, no se ha añadido en la tabla anterior la influencia que puede tener cada criterio en los objetivos de aprendizaje se admite que, cuando un criterio implica considerar y favorecer el desarrollo de una competencia concreta, las acciones que definen a los objetivos asociados a esta tarea deben estar referidas a verbos de acción coherentes con el desarrollo de la competencia citada.

Resultados

Este análisis en el caso del proyecto NRICH se ha efectuado también con las restantes fuentes señaladas. Se han analizado ciento catorce indicadores de criterios de calidad. Ronda el treinta por ciento los indicadores de criterio que apuntan a que las tareas de calidad deben manejar contenidos de estrategias en sus diferentes niveles de complejidad seguidos de contenidos sobre los modos de argumentación y el razonamiento. También se señalan contenidos de tipo actitudinal orientados a considerar formatos y discursos que incrementen la motivación y el compromiso del alumnado por la resolución de la tarea. En algunos casos se destaca la necesidad de contextualizar las tareas en diferentes niveles y manejar los sistemas de representación. También algunos indicadores enfatizan la importancia de que existan tareas que manejen relaciones entre contenidos diversos.

Prácticamente la mitad de los indicadores de criterio apuntan a recomendaciones que se deben tener en cuenta en el análisis cognitivo para seleccionar tareas orientadas al desarrollo de las competencias de Resolución de Problemas, Modelizar, Argumentar y Justificar, Pensar y Razonar y Comunicar, en este orden.

Los indicadores de criterio que apuntan al análisis de instrucción forman casi el veinte por ciento restantes. Señalan que la calidad de las tareas está relacionada con las decisiones que se toman sobre la estructura de las secuencias de tareas, las formas de interacción entre alumnado y profesores, el diseño y uso de los recursos y ayudas del profesor, el nivel de complejidad de las tareas y por último la función de las tareas en el proceso de aprendizaje.

Este ejercicio de resumen y clasificación no es más que una incitación a posteriores aportaciones del profesorado para que se anime y profundice en el segundo nivel de concreción de estos principios de calidad de las tareas. Significaría responder, cuando planifica la lección, a preguntas como éstas y otras más que ya bullen en nuestras mentes: ¿Por qué mi selección de contenidos favorece la calidad de las tareas? ¿Cuál es el predominio de expectativas elegidas en mi lección de modo que las tareas que apunten a ellas puedan calificarse como ricas por las competencias que quieren desarrollar? ¿Cómo voy a organizar las sesiones de clase y el sistema de ayudas para que aflore un debate rico que sirva de caldo de cultivo para una buena formación?…

Referencias

Ainley, J. (2012). Developing purposeful mathematical thinking: A curious tale of apple trees. *PNA, 6*(3), 85-103.

Ainley, J. y Pratt, D. (2006). Design and understanding. Disponible en http://ims.mii.lt/ims/konferenciju_medziaga/TechnologyRevisited/c56.pdf. Descargado 20-3-2014.

Ainley, J., Pratt, D. y Hansen, A. (2006). Connecting engagement and focus in pedagogic task design. *British Educational Research Journal, 32*(1), 23-38.

Burkhardt, H. y Swan, M. (2013) Task design for systemic improvement: Principles and frameworks. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 433-441). Oxford, Reino Unido: ICMI.

Christiansen, B. y Walter, G. (1986). Task and activity. En B. Christiansen, A. G. Howson y M. Otte (Eds.), *Perspectives on mathematics education: Papers submitted by members of the Bacomet Group* (pp. x-xx). Dordrecht, Países Bajos: D. Reidel.

Clarke, D. y Roche, A. (2010). Teachers' extent of the use of particular tasks types in mathematics and choices behind that use. En L. Sparrow, B. Kissane y C. Hurst (Eds.), *Shaping the future of mathematics education: Proceedings of the 33rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 153-159). Fremantle, Australia: MERGA.

Crespo, S. (2003). Learning to pose mathematical problems: Exploring changes in preservice teachers' practices. *Educational Studies in Mathematics, 52,* 243-270.

Henningsen, M. y Stein, M. K. (1997). Mathematical tasks and student cognition: Classroom-based factors that support and inhibit high-level mathematical thinking and reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 28*(5), 534-549.

Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Bogard Givvin, K., Hollingsworth, H., Jacobs, J. *et al.* (1999). *Teaching Mathematics in Seven Countries. Results from the TIMSS 1999 Video Study.* Washington, DC: NCES.

Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (2001). *Helping children learn mathema-*

tics. Washington, DC: Center for Education Division of Behavioral and Social Sciences and Education National Research Council.

Knott, L., Olson, J., y Adams, A., Ely, R. (2013). Task design: Supporting teachers to independently create rich tasks. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 601-609). Oxford, Reino Unido: ICMI.

Lupiáñez, J. L. (2013) Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 103-120). Granada, España: Comares.

Marín, A. (2013). El análisis de instrucción: instrumento para la formación inicial de profesores de secundaria. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática* (pp. 103-120). Granada, España: Comares.

NRICH (1997-2016) NRICH Project. Descargado el 20-5-2016 de http://nrich.maths.org/frontpage

OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en matemáticas, lectura, ciencias y solución de problemas.* París, Francia: Autor.

OECD, MECD (2013) Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012. Descargado el 20-5-2016 de http://www.mecd.gob.es/dctm/inee/internacional/pisa2012/marcopisa2012.pdf?documentId=0901e72b8177328d

Shimizu, Y., Kaur, B., Huang, R. y Clarke, D. (2010). The role of mathematical tasks in different cultures. En Y. Shimizu, B. Kaur, R. Huand y D. Clarke (Eds.), *Mathematical task in classrooms around the world* (p. 10). Rotterdam, Países Bajos: Sense Publishers.

Watson, A., Ohtani, M., Ainley, J., Bolite Frant, J., Doorman, M., Kieran, C. *et al.* (2013). Introduction. En C. Margolinas (Ed.), *Task design in mathematics education. Proceedings of ICMI Study 22* (Vol. 1, pp. 9-16). Oxford, Reino Unido: ICMI.

CULTURA Y EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Culture and mathematics education

Antonio Moreno Verdejo
Universidad de Granada

Resumen

El currículo de matemáticas recoge los valores culturales que la sociedad pretende transmitir. El debate sobre qué valores desarrollará la institución educativa es complejo. La educación matemática es partícipe de los valores de la matemática y de los valores de la sociedad en la que se desarrolla como institución cultural. Estos valores provienen de la necesaria e inseparable consideración de ambas perspectivas: la social o general que aporta la educación y la científica o específica que aporta la Matemática.

Palabras clave: cultura, currículo, educación matemática.

Abstract

Mathematics curriculum reflects the cultural values that society seeks to convey. The debate on what values will be developed by the educational institution is complex. Mathematical Education participates in mathematical and society values in which it develops as a cultural institution. These values come from the necessary and inseparable consideration of both perspectives: social or general that education brings with it and specific or scientific that provides mathematics.

Keywords: *culture, curriculum, mathematics education.*

Nota

En el año 2003 publiqué el libro «Ideología y Educación Matemática. El proceso de infusión ideológica». Las tesis que en él se recogían se iniciaron en un trabajo que presenté para la asignatura que impartía Moisés Coriat. Con su perspectiva de gran profesor, discutió conmigo las ideas que contenía, cada verbo, cada término, sin escatimar tiempo ni tardes de trabajo. Me animó a ir fortaleciendo mis ideas, a no dar por terminado el trabajo hasta que cada argumento que planteara pudiera defenderlo con consistencia.

De su amplia biblioteca compartió conmigo libros que me hicieron ampliar mi perspectiva, adentrándome en el pensamiento de la sociología, de la antropología social y de disciplinas que en principio no relacionaba con la Educación Matemática. Aún recuerdo su ejemplar de «Masa y Poder» de Elías Canetti.

Al finalizar, sentí que el libro era deudor también de Moisés. Le pedí que figurara como coautor. Tras mucho insistirle me dijo lo siguiente: «Antonio, cuando era joven tenía una gran afición por el teatro. Participaba como actor aficionado. Lo dejé porque no sabía hacer mutis por el foro de forma elegante. Permíteme que en esta ocasión me haga a un lado en silencio».

Desde ese momento, su figura aún se engrandeció más para mí. Al encontrarme con él algunos sábados por la mañana mientras paseaba con Pilar, nos deteníamos a hablar y con la expresión de mi rostro siempre quería decirle: «gracias». Pero él me miraba y, como adivinando mis intenciones, me sonreía queriéndome decir: «no me lo digas…».

Un buena parte de mí se siente deudora de las enseñanzas de este gran profesor. A continuación, he dado forma a ideas que surgieron de nuestras conversaciones y de las lecturas que compartimos.

INTRODUCCION

La influencia cultural en la educación matemática se manifiesta en los diseños curriculares y en la formación y selección del profesorado fundamentalmente. Este fenómeno conlleva tres acciones principales: selección cultural, intercambio cultural e intercambio y recreación cultural.

En la práctica conviven dos currículos, el implementado y el diseñado. Los desajustes entre ambos genera una tensión ideológica al implementarse currículos que se corresponden con culturas de aula o Centro culturalmente confrontadas con la cultura representativa del currículo socialmente construido.

CULTURA Y CURRÍCULO DE MATEMÁTICAS

El término diversidad es muy utilizado en educación hoy en día. Desde la perspectiva de la humanidad, la diversidad es amplia, sin embargo la diversidad dentro de cada comunidad o sociedad es limitada. Esto es así porque las comunidades cuyos individuos se comportaban de forma impredecible, no subsistían (Gellner, 1994). La existencia de unos indicadores que marcaran los límites de la diversidad se hizo necesaria. Cultura se define así como el conjunto de esos indicadores y su implicación en las prácticas sociales.

La matemática como cultura

La matemática se constituye como un indicador cultural al ser utilizada como lenguaje, como herramienta de pensamiento. Las matemáticas forman parte de una cultura que se ha definido como el conjunto de conceptos en términos de los cuales una población dada actúa y piensa.

Una de las utilidades principales de las matemáticas es modelizar los fenómenos del entorno con el fin de reducir la incertidumbre y aumentar la capacidad de predicción.

El hombre se siente de este modo más seguro, sus relaciones con el medio son más estables. Pero en su búsqueda de la estabilidad, intenta modelizar no sólo su relación con la naturaleza que le rodea sino incluso las relaciones humanas. Así, la admiración entre los intelectuales del siglo XIX por los datos estadísticos procedentes de fenómenos humanos y sociales generó la expectativa, y aún hoy se persiguen los mismos objetivos: encontrar métodos para conjeturar y evaluar comportamientos individuales y sociales en situaciones de incertidumbre.

Las matemáticas han servido para relacionar al hombre con la Naturaleza. Naturaleza que el hombre moderno percibe como unitaria, homogénea y regida por leyes. La relación con la Naturaleza, así considerada, convierte las actividades matemáticas en universales y por extensión convierte a las matemáticas en un universalizador del currículo. Por esta razón y por su característica de indicador cultural, la enseñanza obligatoria de las matemáticas supone su aceptación como lenguaje universal.

Esta consideración de universalizador del currículo, se ha entendido en muchas ocasiones como descontextualización de las matemáticas, o al menos como universalización del contexto occidental. Por otro lado, contextualizar los procesos de construcción de significados supone afirmar que los aspectos culturalmente específicos son tan importantes como los universales. Un mozambiqueño y un europeo, se pondrán de acuerdo en que un rectángulo es un paralelogramo con sus cuatro ángulos iguales, sin embargo, el primero lo construirá a partir de las diagonales, atando por el centro dos cuerdas de igual longitud y el segundo a partir de los lados del rectángulo (Gerdes, 1988).

Autores como D'Ambrosio (1990) advierten del sentido colonizador que podría tener el hecho de utilizar las matemáticas occidentales para olvidar y marginar las matemáticas de pueblos de otras culturas. Pero un relativismo radical que exalte la cultura local o tradicional tiene el peligro de terminar siendo excluyente de las otras culturas para proteger la propia.

Dentro de la cultura matemática podemos hablar de diversidad entre comunidades dentro de una misma sociedad e incluso, entre individuos dentro de la comunidad. Oliveras (1996) distingue entre cultura matemática escolar y cultura matemática artesanal, diferencia que podríamos ampliar a laboral y escolar. En un estudio realizado con niños de la calle en Brasil, se apreció el uso de técnicas aritméticas distintas a las propugnadas en la escuela, lo que implica la existencia de una cultura matemática escolar que no se corresponde con la cultura matemática que el niño posee de la experiencia (Nunes, 1996). El análisis realizado por el grupo de Nunes sobre las estrategias para resolver problemas matemáticos concluyó que la representación particular de una situación no implica que el sujeto quede restringido por ese contexto.

El currículo de matemáticas debe reducir las distancias entre estos mundos culturales. Así, medidas como que el aprendizaje sea significativo, que la enseñanza se adapte al nivel de desarrollo real del alumno, que en la enseñanza de las matemáticas se procure una variada gama de situaciones didácticas surgidas en diversos contextos, que se proporcionen experiencias y actividades que permitan conocer la realidad inicial del alumno y el respeto las distintas lógicas empleadas en las discusiones matemáticas por los alumnos, tienen ese objetivo.

Influencias culturales en el currículo de matemáticas

El trabajo previo realizado por Stigler y Baranes (1988-89) y nuestro posterior análisis del currículo de matemáticas evidencian cinco puntos de influencia de la cultura en el aprendizaje matemático (Moreno, 2003): herramientas culturales, prácticas culturales, instituciones culturales, las características que se espera tenga el ciudadano una vez formado y el uso social que se atribuye a las matemáticas.

1) *Herramientas culturales.* La cultura provee de herramientas, que mediante la internalización, el individuo utilizará después para resolver problemas en algún dominio como las matemáticas. Entre las herramientas culturales se incluirían el lenguaje, como herramienta fundamental para el pensamiento, y otras herramientas no lingüísticas como el ábaco, la rosa de los vientos y el uso de la calculadora.

La transmisión de un repertorio de convenciones concretas y representaciones visuales que sirvan para pensar sobre contenidos cuantitativos es una de las influencias más interesantes que una cultura puede tener sobre el pensamiento matemático de sus miembros. Por ejemplo, el sistema indo-arábigo que es bueno para la realización de grandes cálculos es incómodo en ciertos contextos donde las personas realizan representaciones alternativas como contar con los dedos.

Evitar una terminología abstracta que no se adecue al desarrollo intelectual del alumno o la recomendación de la utilización de recursos diversos que permitan, a los alumnos y alumnas, la manipulación, son ejemplos sacados del currículo de matemáticas que manifiestan la influencia cultural a través del aprendizaje.

2) *Prácticas culturales.* Las prácticas culturales guían la actividad y facilitan el acceso al conocimiento matemático, indican cómo usar las herramientas. Es interesante reconocer en cada práctica cultural la presencia de un razonamiento o proceso de pensamiento matemático para la comparación de modos de realización de estos procesos de pensamiento según la cultura en la que se encuentra cada individuo. También es importante encontrar diferencias en la valoración de las matemáticas por cada cultura.

Las aproximaciones culturales al currículo deben proceder del análisis de las prácticas culturales. La infusión cultural a través del aprendizaje está tan asociada a las prácticas culturales que un currículo de matemáticas sólo puede ser desarrollado por un adulto del mismo grupo cultural que el alumno (Bishop, 1988).

Los cambios en los patrones de inmigración están ocasionando una mezcla cultural que requiere características de enseñanza y contenidos apropiados para una población escolar más heterogénea. En sociedades multiculturales empiezan a plantearse la idea de elaborar currículos que tengan en cuenta esta riqueza cultural.

3) *Características del ciudadano.* El objetivo de la educación no es la aculturación, que sería más bien una consecuencia de ésta, sino la enculturación; es decir, la inducción

en el individuo de la cultura de la comunidad. El currículo de matemáticas recogerá una colección de contenidos que pretenderán preparar de manera culturalmente determinada a los individuos que al finalizar su formación se incorporarán al mundo laboral.

El ciudadano occidental vive en una sociedad predominantemente urbana donde prevalece como elemento de definición, la transmisión y análisis de la información, donde la mayor parte de la población está integrada con el ordenador, la televisión, el teléfono, medios que transmiten la información muy rápidamente.

Este ciudadano necesita utilizar datos gráficos, estadísticos y financieros para desempeñar sus obligaciones como ciudadano. Pero también la sociedad necesita una mayor formación estándar para un mayor número de ciudadanos. Los puestos de trabajo cada vez demandan mayores destrezas matemáticas y facilidad para la resolución de problemas. La sociedad necesita garantizar el rendimiento en un espectro más amplio de la población, para ello el currículo reflejará un enfoque de enseñanza que permita alcanzar este objetivo. El uso de medios como el ordenador y la calculadora cambia las matemáticas que son importantes para transmitir y el modo de hacerlo.

Las características del ciudadano que el sistema educativo pretende *producir* condicionarán la selección de contenidos de matemáticas en el currículo y en parte de los objetivos marcados y los criterios de evaluación.

4) *Uso social de las matemáticas.* Con los cambios sociales y tecnológicos, este uso ha cambiado muy deprisa. Hay un aumento de la variedad de problemas que utilizan las matemáticas para su solución y esto tiene su reflejo en el currículo. De hecho, Rico (1997) señala entre las razones para el estudio de las matemáticas en secundaria la necesidad de proporcionar al ciudadano común las herramientas matemáticas básicas para su desempeño social y la finalidad de proporcionar cualificación profesional adecuada para atender a las necesidades del mercado de trabajo y a los retos organizativos y de gestión que tiene planteados la sociedad actual.

La cultura y el aula

El aula es un espacio donde la educación adquiere la dimensión real. En ella se dan tres procesos culturales básicos (Rico [1990], citado por Coriat [1997]):

1. Se transmiten símbolos ya compartidos por algún grupo y seleccionados por algún profesor o equipo docente.
2. Se aprenden esos símbolos.
3. Se vuelven a compartir entre los aprendices, para su incorporación en la sociedad.

El proceso de selección y transmisión de símbolos por parte del profesor, el proceso de aprendizaje del alumno y la asunción y compartición por el grupo-clase supone la aceptación de la existencia de relaciones entre profesor, alumno y grupo-clase. Estas relaciones sociales dan lugar a relaciones de poder, al establecimiento de jerarquías, en muchos casos ilegítimas.

Al analizar la cultura de aula son relevantes tres aspectos: los significados de las relaciones jerárquicas que se transmiten en la Escuela, el hecho de que cada centro educativo genera su propia cultura escolar y el establecimiento de una cultura de iguales.

Relaciones jerárquicas en el aula

Todos los individuos que integran el aula conocen el papel que desempeñan. Esto supone que conocen las acciones y los actores tipificados, que son conscientes de las expectativas de su propio rol y reconocen el establecimiento de liderazgos dentro del grupo constituido por profesores y alumnos. El conocimiento de las expectativas del grupo sobre cada alumno o profesor facilita el proceso de educación matemática. Las experiencias de trabajo con alumnos basadas en metodologías de aprendizaje cooperativo que la autoestima de un alumno aumentaba cuando el grupo comprendía que todos tienen algo que aportar. De este modo, el alumno que habitualmente tiene baja autoestima en relación al aprendizaje de las matemáticas, se supera y comienza a realizar aportaciones valiosas.

Bank (2000) apoya esta idea cuando afirma que «los profesores pueden tratar de ignorar estos otros componentes del sistema escolar para centrarse en el aprendizaje, pero deben darse cuenta de que el sistema social de la escuela no es sólo un contexto para el aprendizaje en el aula, sino una parte de lo que cada uno de los alumnos aprende» (pp. 244).

Dreeben (1998) aporta una lista de investigaciones que avalan la hipótesis de la influencia de las propiedades sociales de los ambientes de aprendizaje sobre lo que se aprende. Sin embargo, se muestra cauto ante la posibilidad de afirmar que el significado de las relaciones jerárquicas y las relaciones sociales simplemente provoquen cambios en los valores de los alumnos argumentando que no se conoce qué afecta a qué.

Lo que sí parece claro es que los niños aprenden a partir de experiencias con las disposiciones sociales de las escuelas, al mismo tiempo que aprenden de la enseñanza misma. Y también parece evidente que esas relaciones sociales dan lugar a consecuencias no anticipadas por el currículo.

Las relaciones jerárquicas establecidas en el aula o la escuela no se perciben siempre como legítimas. En ocasiones los alumnos de un grupo no aceptan el liderazgo de un profesor o éste no reconoce el liderazgo que entre sus compañeros pueda ejercer un alumno por razones externas a lo académico (deportivas, estéticas,…). En gran medida el establecimiento de estas relaciones tiene su origen en criterios de origen cultural como primar lo académico, o lo deportivo.

Las tensiones que produce la percepción ilegítima de las relaciones jerárquicas son pues parte de la línea de tensión ideológica entre el nivel de infusión curricular y el escolar. Susceptible por tanto de ajuste para conseguir las finalidades propuestas por Moreno (2003).

Cultura escolar de los centros educativos

Los centros integran individuos con experiencias culturales distintas pero que entre ellos mantienen elementos culturales comunes y establecen relaciones únicas. Esta dicotomía, junto con las relaciones jerárquicas propias de cada escuela y la interpretación del currículo realizada por el equipo educativo, generan una cultura escolar que difiere de una escuela a otra. Esta cultura escolar entra en conflicto con el alumno si se aleja de la cultura de su mundo y provoca una línea de tensión ideológica que da origen a conflictos en los centros escolares y a problemas de rendimiento escolar.

Como afirma Coriat (1997), para adquirir algún grado de certeza acerca del funcionamiento regular de la institución escolar y sus crisis o perturbaciones, hay que considerar globalmente los agentes —profesor, alumno, grupo-clase—, los procesos y sus relaciones. Algunas crisis afectan a la sociedad entera y se traducen en cambios sustanciales en la institución escolar. Otras, por el contrario, se producen dentro de la institución como consecuencia de desarreglos entre los tres procesos descritos al inicio de este epígrafe. Es necesario encontrar criterios que permitan reconocer un funcionamiento regular y una situación de perturbación interna en la institución escolar.

La cultura de iguales

Pero este análisis estaría incompleto si no se considerase la generación de una cultura de iguales, consistente en el sentido descriptivo y evaluativo que los grupos de iguales asignan a las conductas y las relaciones. Las interacciones entre los integrantes del grupo consisten en el lenguaje y los comportamientos que construyen, mantienen, consolidan, desafían o cambian estos sentidos. Es decir, la cultura de iguales no sólo define las expectativas de conducta de cada individuo en la institución escolar sino que también interpreta dichas conductas.

Si bien las culturas de iguales se construyen en las interacciones que se producen entre los integrantes del grupo, las descripciones y evaluaciones de las acciones no necesariamente se originan en el grupo de iguales. El grupo construirá sus valores y normas con la influencia de la socialización escolar, de las creencias de su ambiente familiar y de los contenidos de los medios de comunicación. En el trabajo de Bank (2000) se referencia un análisis sobre el racismo en un centro de secundaria en el que se manifiesta que los alumnos y profesores compartían el mismo sentimiento racista. De esta conclusión puede resultar otra idea: la distinción de las culturas de iguales no está en el conjunto de valores y normas sino en la importancia que se le da a estos elementos.

De estos comentarios no se puede derivar la creencia de que las culturas de iguales son estáticas y se limitan a la reproducción del conocimiento cultural acumulado por la sociedad. Los grupos de iguales son productores culturales, de ellos provienen creencias y preferencias, valores e ideas nuevas. El grupo de profesores de un departamento establece sus valores sobre educación, las normas de organización, los criterios relevantes en «su cultura» para gestionar la evaluación, y todo esto dentro de la cultura oficial de la educación.

Conclusiones

El currículo de matemáticas, como documento que recoge las intenciones educativas, incluirá aquellos valores que pretenden ser infundidos. El debate sobre cuáles de estos desarrollará la institución educativa es complejo y en él se mantienen fundamentalmente dos posturas diferentes aunque no son únicas ni incompatibles. Una considera que la socialización y el desarrollo individual de las personas son incompatibles, la otra posición afirma que la educación supone un proceso de reconstrucción personal y de recreación cultural.

La educación matemática es partícipe de los valores de la matemática y de los valores de la sociedad en la que se desarrolla como institución cultural. Estos valores provienen de la necesaria e inseparable consideración de ambas perspectivas: la social o general que aporta la educación y la científica o específica que aporta la Matemática.

En este trabajo se han analizado conjuntamente los puntos de influencia de la cultura en el aprendizaje matemático y la cultura del aula. Esta perspectiva permite ver los instrumentos de transmisión de los valores que una sociedad considera relevantes así como comprender las tensiones y conflictos entre alumnos y profesores o miembros de la institución educativa como parte de la tensión ideológica entre dos culturas distintas, la cultura oficial educativa y la cultura escolar.

Referencias

BANK, B. (2000). Las culturas de iguales y el reto que plantean a la enseñanza. En B. Biddle, T. Good e I. Goodson (Eds.), *La enseñanza y los profesores II* (pp. 185-252). Barcelona, España: Paidós.

BISHOP, A. (Ed.) (1988). *Mathematics, education and culture.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

CORIAT, M. (1997). Cultura, Educación Matemática y currículo. En L. Rico (Ed.), *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria* (pp. 179-189). Madrid, España: Síntesis.

D'AMBROSIO, U. (1990). The role of mathematics education in building a democratic and just society. *For the Learning of Mathematics, 10*(3), 20-23.

DREEBEN, R. (1998). El currículum no escrito y su relación con los valores. *Revista de Estudios del Curriculum, 1*(1), 91-111.

GELLNER, E. (1994). *El arado, la espada y el libro*. Barcelona, España: Península.

GERDES, P. (1988). On culture, geometrical thinking and mathematics education. En A. Bishop (Ed.), *Mathematics, education and culture* (pp. 137-162). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

MORENO, A. (2003). *Ideología y Educación Matemática.* Barcelona, España: Octaedro.

NUNES, T. (1996). Aprendizaje de las matemáticas. *Pensamiento Educativo, 19,* 267-306.

OLIVERAS, M. L. (1996). *Etnomatemáticas. Formación de profesores e innovación curricular*. Granada, España: Comares.

RICO, L. (ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas de educación secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

STIGLER, J. y BARANES, R. (1988-1989). Culture and mathematics learning. *Review of Research in Education,* 15, 253-306.

FORMACIÓN DIDÁCTICA DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS. UNIVERSIDAD DE GRANADA (1989-1992)

Didactic training of teachers of mathematics at the University of Granada (1989-1992)

Luis Rico
Universidad de Granada

Resumen

Este trabajo expone el contexto, valoración estratégica y decisiones que dieron lugar a las directrices y al diseño del programa de la asignatura «Didáctica de la matemática en el Bachillerato» en el curso 1992-1993, en la Licenciatura de Matemáticas de la Universidad de Granada. El trabajo describe las tensiones detectadas en su realización y las vías seguidas para su superación. Presenta un resumen de objetivos y contenidos, precedentes del programa de la materia «Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas» en el actual Master para Profesor de Secundaria en la Universidad de Granada.

Palabras clave: contenidos didácticos, educación secundaria, formación de profesores, profesores de matemáticas, programa de didáctica.

Abstract

This paper describes the context, strategic assessment and decisions that led to the design guidelines and the program of the subject «Teaching of mathematics in high school» in the 1992-1993 course in Bachelor of Mathematics from the University of Granada. The paper describes the tensions detected in its implementation and the pathways for improvement. It presents a summary of objectives and contents, preceding the program of the subject «Teaching and learning of mathematics» in the current Master for Secondary School Teacher at the University of Granada.

Keywords: *didactical program, educational content, secondary education, teacher training, teachers of mathematics.*

Introducción

La incorporación de Moisés Coriat a la Universidad de Granada (UGR) tiene lugar en 1989, mediante comisión de servicios obtenida por concurso en un programa de promoción para el profesorado de Secundaria en la Universidad, promovido por la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía. Desde su incorporación, Moisés Coriat participó conmigo en el diseño de la Asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato*, materia asumida por el Departamento de Didáctica de la Matemática en 1988.

La Asignatura *Didáctica de la Matemática en el Bachillerato,* junto con otras tres materias, determinan en estos años la especialidad de Metodología, de la Licenciatura de Matemáticas, equivalente al Curso de Aptitud Pedagógica (CAP), con el que se convalidaba.

Las siguientes notas son resultado de las reflexiones y del trabajo crítico conjunto hecho con Moisés Coriat en aquellos años. Algunas de esas ideas fueron presentadas en el Congreso *Las didácticas específicas en la formación del profesorado*, en Santiago de Compostela (Montero y Vez, 1992); otras proceden de la experiencia, muestran en la perspectiva actual el trabajo realizado y apuntan direcciones para progresar y avanzar (Rico, 2013; Rico y Moreno, 2016).

Contexto

Entre 1975 y 2000, el Título de Licenciado en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Granada se organiza en dos ciclos.

El Primer Ciclo (BOE de 17-11-1973) es de formación común. La formación consta de 30 horas semanales durante tres cursos, en que se imparten 13 asignaturas de matemáticas, y una Física General. El Segundo Ciclo (BOE 15-7-1977) se organiza en dos cursos y ofrece tres especialidades, Matemática Fundamental, Metodología y Estadística e Investigación Operativa.

La participación del Departamento de Didáctica de la Matemática se hace con dos materias del Plan de estudios de matemáticas, *Prácticas de Enseñanza* y *Didáctica de la Matemática en Bachillerato,* ambas en la especialidad de Metodología. Este Plan estuvo vigente hasta el año 2000.

Formación previa de los alumnos que cursan la especialidad de Metodología

La formación matemática especializada del alumno que accede a la especialidad de Metodología consta de 2750 horas de docencia teórica y práctica; su formación didáctica previa se reduce a 75 horas.

Valoración de este plan de formación.

Fortalezas: la formación matemática es extensa y avanzada en aspectos formales. La seguridad y confianza de los estudiantes de la Licenciatura en sus conocimientos matemáticos es alta.

Debilidades: el desconocimiento estos alumnos sobre Didáctica de la Matemática es abrumador, carecen de las competencias necesarias para ejercer como profesores de Matemáticas, desconocen las condiciones institucionales y sociales que delimitan su campo de trabajo y, en general, las relaciones existentes en la comunidad de educadores matemáticos.

Encuesta

Entre los cursos 1988 y 1998 se aplicó a los alumnos que cursaron la Asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato una encuesta al inicio del curso para recoger información sobre sus conocimientos relativos a la comunidad de profesores de matemáticas, en la que quieren integrarse, sobre su organización en sociedades y grupos, los congresos, encuentros, libros y revistas que utilizan para comunicarse. Igualmente se les preguntó acerca de sus expectativas de formación profesional mediante la asignatura.

La encuesta se estructura en dos partes, que se encuentran en los cuadros 1 y 2.

1. Escribe el nombre de revistas que conozcas sobre Educación Matemática.
2. Escribe el título de libros leídos sobre Educación Matemática.
3. Escribe el nombre de Sociedades de Profesores de Matemáticas que conozcas.
4. Nombra grupos de Renovación en Educación Matemática de los que hayas oído hablar.
5. Nombra las Jornadas o Congresos a los que hayas asistido.
6. Indica el número de conferencias recibidas sobre Educación Matemática.

Cuadro 1. *Conocimiento acerca de la comunidad de educadores matemáticos*

7. Valora de 0 a 10 la importancia que concedes a la Formación Pedagógica de un Profesor de Matemáticas.
8. Valora de 0 a 10 la importancia que concedes al trabajo en equipo entre los Profesores de Matemáticas.

Cuadro 2. *Expectativas formativas relativas a la asignatura*

Resultados

Los resultados de la encuesta en el periodo 1987-1997 (tabla 1) muestran una regularidad en las valoraciones que expresan el conocimiento profesional y las actitudes de los estudiantes que cursaron la asignatura.

La tabla 1 muestra los resultados medios por curso en cada una de las preguntas hechas y, en la última fila, la frecuencia absoluta de estudiantes que dieron respuesta afirmativa a cada pregunta. Los resultados muestran un desconocimiento preocupante relativo a libros, revistas, sociedades de profesores y grupos de innovación de matemáticas. Así, de los 206 estudiantes encuestados que cursaron la asignatura en la década 1987-1997, solo un tercio de ellos tenían conocimiento de una revista o de un libro; una quinta parte sabían el nombre de una sociedad de educación matemática; un cuarto recordaron el nombre de alguna jornada o congreso y solo algo más de la mitad habían asistido en algún momento a una conferencia.

Tabla 1. *Datos de la encuesta a los alumnos, periodo 1987-1997*

	Ítems								
Curso	1	2	3	4	5	6	7	8	Total alumnos
87-88	0.3	0.6	0.5	0.2	0.0	0.5	6.8	7.7	22
88-89	0.4	0.6	0.4	0.2	0.0	0.7	6.9	7.4	8
89-90	0.6	0.4	0.2	0.1	0.0	0.4	7.2	6.3	15
90-91	0.7	0.8	0.1	0.1	0.0	0.4	7.8	6.6	10
91-92	0.4	0.4	0.2	0.1	0.5	0.8	7.7	7.2	19
92-93	0.2	0.4	0.2	0.1	0.5	0.8	7.9	6.6	25
93-94	0.5	0.2	0.0	0.0	0.5	0.1	8.8	8.0	21
94-95	0.1	0.3	0.1	0.1	1.2	1.7	8.1	7.3	21
95-96	0.4	0.3	0.1	0.0	1.1	0.6	8.3	7.4	33
96-97	0.0	0.0	0.2	0.0	0.6	1.5	7.8	7.0	32
Frecuencia Alumnos	64	70	40	15	50	147			206

Conocimiento y actitudes de los estudiantes

Balance

A lo largo de los cinco cursos académicos en que Moisés participó en la docencia de la asignatura, planteamos y discutimos una serie de cuestiones sobre el perfil inicial típico del alumno, que sintetizamos en las siguientes.

El alumno que inicia su formación como futuro profesor:

(1) considera que su nivel de formación matemática es más que suficiente para ser Profesor de Matemáticas;

(2) desconoce la existencia de un campo de trabajo denominado Educación Matemática y de las actividades que en él se realizan;

(3) no imagina otros contenidos para la Didáctica de la Matemática que una colección de recomendaciones generales, trucos y reglas que permitan hacer las clases más activas y agradables;

(4) carece de conocimientos en historia de las matemáticas, lo que conlleva una concepción estática de las matemáticas, poco adaptada a las distintas maneras de abordar y resolver problemas por parte de los matemáticos;

(5) posee una visión estrictamente técnica de las matemáticas, con la consiguiente ausencia de información acerca de planteamientos epistemológicos (relativos, por ejemplo, al carácter de los conocimientos matemáticos), acerca de la integración global de las matemáticas en la cultura, en el pensamiento o en las propias ciencias, acerca de sus aplicaciones prácticas, acerca de los modos de aprendizaje o de adquisición de los saberes matemáticos (en particular, sobre psicología del aprendizaje);

(6) concibe la propia enseñanza como futuro profesor partiendo de esquemas «reproductores»: si un profesor influyó positivamente en uno de estos alumnos, su «gestalt» se eleva inmediatamente a la categoría de «arquetipo»;

(7) desconoce la situación actual en los niveles escolares (exceptuando referencias familiares, cuando las hay, y las clases particulares);

(8) asigna inicialmente poco valor a esta asignatura;

(9) es muy receptivo para recibir información sistemática relativa a Educación Matemática;

(10) es capaz de utilizar esa información y muestra enorme interés por conseguir más y mejores conocimientos y por profundizar en ellos.

Directrices y programa de la Asignatura

En el contexto descrito de estos primeros cursos trabajamos para establecer el programa de la Asignatura, teniendo en cuenta las siguientes prioridades:

— El Plan de Estudios de los alumnos de la Licenciatura de Matemáticas.
— Las necesidades de los niveles de Educación Secundaria derivados de la LOGSE y de la correspondiente reforma del currículo de Matemáticas.
— Las carencias formativas e informativas de los alumnos que se matriculan en la materia y sus expectativas en relación con la Didáctica de la Matemática.
— Nuestra experiencia profesional con profesores en formación y en activo.
— El desarrollo de la comunidad de educadores matemáticos en busca de autonomía intelectual y profesional, cada vez más amplia y mejor fundada.

Las metas generales que establecimos para esta asignatura fueron:

— Conseguir una visión global del campo de la Didáctica de la Matemática.
— Articular el conocimiento matemático y didáctico sobre los contenidos de la Educación Secundaria y Bachilleratos a través de una reflexión sistemática.

Cada una de esas metas contribuyó a articular una línea directriz del programa.

Para ello incorporamos temas generales, adecuados para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en los Centros de Secundaria y Bachillerato: una iniciación a la Teoría Curricular; una información general sobre teorías del aprendizaje conectadas con el aprendizaje de las matemáticas escolares; una sistematización de las condiciones que producen una enseñanza efectiva; y una información sobre las condiciones generales en las que trabajan los profesores, los modos de organización profesional y las actividades de investigación, experimentación o difusión que se realizan sobre las tareas docentes. Con esta línea de trabajo se proporcionan conocimientos teóricos, informaciones, esquemas organizativos y experiencias prácticas realizadas.

La segunda línea es complementaria de la anterior. Se trata de realizar el análisis didáctico de cada uno de los bloques de conocimientos que forman el currículo de matemáticas en Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

En este caso, los alumnos tienen un conocimiento amplio de las matemáticas en las que se apoyan los contenidos del programa. Las dificultades surgen por su falta de información y de sistematización para realizar algún enfoque didáctico de los contenidos no basado en su organización formal y en los procedimientos deductivos. En esta parte, el núcleo central de estudio es el conocimiento didáctico de las matemáticas escolares, y los instrumentos y técnicas que se emplean son variados y proceden de diversas disciplinas. El progreso en esta línea del programa es más lento que en la anterior, ya que propone una organización didáctica sobre cada tema que sea comparable a su desarrollo formal (Rico y Coriat, 1992).

Diseño del programa de la asignatura

El programa de la Asignatura se estructura, por tanto, en dos partes:

A. Fundamentación y marco de referencia.

B. Análisis didáctico y diseño de unidades para los contenidos de los currículos de Educación Secundaria y Bachilleratos en Matemáticas.

Cada una de esas partes tiene su propio desarrollo y organización.

Tensiones en la implementación del programa y vías de solución

Primera Tensión. Si bien es cierto que el programa de la asignatura intenta afrontar —en clave positiva— dificultades mencionadas, integrando en dos grandes líneas las necesidades de formación y profesionales de los alumnos, no lo es menos que los grandes temas mencionados necesitan maduración, reflexión y toma de decisiones que no se cubren en un curso. Esta tensión no se resuelve simplemente incrementando la carga lectiva de la asignatura.

Una primera solución práctica consiste en tomar decisiones acerca de una selección de los contenidos que, efectivamente, van a impartirse con mayor énfasis y de los que se requerirá un esfuerzo importante por parte de los alumnos.

Segunda Tensión. La programación por los alumnos de los temas seleccionados también genera conflictos: (a) por las innumerables dificultades asociadas a la concepción de una programación, y (b) por las múltiples interrogantes que los propios alumnos plantean a lo largo de las clases.

(a) El dominio (en un nivel Superior) de las matemáticas necesarias para desarrollar una programación genera obstáculos para elaborar una programación adecuada. Por una parte, los estudiantes de la materia no conocen las formas de pensar de los escolares de Secundaria o Bachillerato. Por otra parte, les cuesta un enorme trabajo pasar de la estructura lógica (interna) de los conocimientos matemáticos a la estructura lógica (no interna) de su enseñanza y aprendizaje; el análisis y la organización didáctica apelan a consideraciones de tipo fenomenológico e histórico, a un conocimiento de materiales y recursos posibles, a una información sobre (y una cierta preparación para) detectar errores y dificultades de carácter cognitivo. Por su falta de experiencia carecen de información sobre estos extremos que son, precisamente, las que permiten tener seguridad de que una programación es más o menos adecuada para unos determinados alumnos de un nivel prefijado.

(b) Casi cotidianamente aparecen digresiones ocasionadas por los interrogantes; resulta imperativo que el profesor las detecte para reconducir la atención hacia los temas que considera prioritario tratar durante la clase.

He aquí algunos ejemplos de tales digresiones:

— El justificado interés de los alumnos por conocer en profundidad las características y matices de la vida en los Institutos de Bachillerato y FP, de las relaciones de poder que se dan en ellos, de la organización de los seminarios de Matemáticas, etc. no implica, necesariamente, que este asunto deba estar en el programa de la asignatura; es mejor tratarlo tangencialmente y enmarcarlo en claves sociológicas e ideológicas, e incluso laborales, más que en un «contenido» de la asignatura.

— El escaso conocimiento sobre cuestiones epistemológicas, psicológicas, curriculares, etc., puede llevar a los alumnos a adoptar una actitud de «tertulia», preocupada por las anécdotas a la hora de plantear preguntas o de comentar un trabajo. El profesor debe actuar sistemáticamente para que el intercambio de opiniones permita profundizar y no se limite a una conversación informal o superficial. Por ello, debe dominar el tema que se está discutiendo; esto, a menudo, responde a un patrón que se ha previsto pero, en otras ocasiones, obliga a recurrir a referencias que aparecerán posteriormente.

En general, hay que convencer a los alumnos que en Educación Matemática hay componentes ideológicas o valorativas que son opinables, pero que la opinión debe ser, en todo caso fundamentada.

Consideraciones evaluativas

La formación proporcionada por la Asignatura es insuficiente en tanto que formación inicial de los profesores de Matemáticas de la ESO y Bachillerato.

La tarea que hay que desarrollar es muy superior a las posibilidades que ofrece una asignatura de 3 horas semanales; esto se agudiza por el bajo nivel de información inicial de los alumnos y genera tensiones que hemos indicado; al no poderse tratar en profundidad, en algunos casos, gran parte de las cuestiones, se elude, de hecho, el desarrollo de ideas básicas, dejándose sin satisfacer necesidades formativas de los alumnos.

El conjunto de disciplinas que fundamentan y configuran la Educación Matemática se encuentra, en estos años, suficientemente bien delimitado y establecido lo cual permite el diseño de una formación específica para la Educación Matemática, con un título diferenciado que acredite y capacite en el ejercicio de la enseñanza. Esta cuestión debe plantearse con urgencia; hasta que no se aborde en profundidad, no se resolverán las necesidades formativas de los profesores de matemáticas en el área de la Didáctica de la Matemática.

Anexo. Resumen del Programa de la Asignatura (Rico, 1992, pp. 330-332)

Objetivos

(1) Establecer fundamentos del currículo de Matemáticas en la Enseñanza Obligatoria y Bachillerato. (2) Conocer y analizar las diferentes funciones de las matemáticas en el sistema educativo. (3) Contextualizar el aprendizaje matemático según las teorías cognitivas que fundamentan la educación. (4) Establecer los diferentes elementos, fases y etapas en que se integra el diseño, desarrollo y evaluación del currículo de Matemáticas. (5) Estudiar los Programas de Matemáticas de Secundaria y Bachillerato. (6) Conocer materiales y recursos usuales en la enseñanza de las matemáticas, así como métodos e instrumentos de evaluación. (7) Conectar a los Profesores en Formación con la comunidad de Educadores Matemáticos y sus medios de comunicación.

Contenidos

A. Fundamentación y Marco de Referencia: (1) Enseñanza de las matemáticas y sistema educativo. (2) Educación matemática y educadores matemáticos. (3) Currículo de matemáticas en Educación Obligatoria y Bachillerato. (4) Metas generales de la Educación Matemática. (5) Aprendizaje de las matemáticas. (6) Contenidos del currículo de matemáticas. (7) Objetivos de las matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. (8) Estilos de enseñanza. Métodos, medios, materiales y recursos. (9) Evaluación en el aula de matemáticas. (10) Resolución de Problemas.

B. Análisis didáctico y diseño de unidades: (11) Números y Operaciones en Educación Secundaria Obligatoria. (12) Iniciación al Algebra. (13) Funciones y representaciones. (14) Estudio y clasificación de los cuerpos en el espacio. (15) Elementos y figuras en el plano. Sistemas de referencia. (16) Transformaciones en el plano. (17) Magnitudes y medida. (18) Estadística. (19) Combinatoria. (20) Probabilidad. (21) Patrones numéricos. Sucesiones. Convergencia. (22) Sistema de los números reales. (23) Funciones. Límites. Continuidad. (24) Derivación. (25) Trigonometría. (26) Estudio y representación de funciones. (27) Resolución de ecuaciones. (28) Algebra lineal. Resolución de sistemas lineales. (29) Integración. (30) Números complejos. (31) Geometría Analítica en el plano. (32) Geometría Analítica en el espacio.

Referencias

Rico, L. (1992). *Proyecto Docente*. Granada, España: Universidad de Granada.

— (2013). Antecedentes del Análisis Didáctico en Educación matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática* (pp. 23-58). Granada, España: Comares.

Rico, L. y Coriat, M. (1992). La asignatura Didáctica de la Matemática en el Bachillerato, Universidad de Granada. En L. Montero y J. M. Vez (Eds.), *Actas del Congreso Las didácticas específicas en la formación del profesorado* (Vol. 1, pp. 659-666). Santiago de Compostela, España: Tórculo Ediciones.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.) (2016). *Elementos de Didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid, España: Pirámide.

COMPARTIR METAS DE APRENDIZAJE: UNA ESTRATEGIA DE EVALUACIÓN FORMATIVA PARA PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Sharing learning goals: a formative assessment strategy for mathematics teachers

Isabel Romero[a] *y Pedro Gómez*[b]
[a]Universidad de Almería, [b]Universidad de los Andes

Resumen

Los profesores que siguen los principios del enfoque socio-constructivista de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas no implementan necesariamente una evaluación de aula coherente con esos principios. En este capítulo, proponemos una estrategia de evaluación formativa —compartir las metas de aprendizaje— que promueve la autoevaluación de los estudiantes, y permite al profesor percibir su progreso en el proceso de aprendizaje y adaptar la enseñanza. Esta estrategia está siendo implementada en un programa de formación de profesores de matemáticas de secundaria que se basa en el modelo del análisis didáctico.

Palabras clave: autoevaluación, currículo, evaluación formativa, formación de profesores de matemáticas.

Abstract

Teachers that follow the principles of the socio-constructivist approach to mathematics teaching and learning do not necessarily implement classroom assessment coherent with those principles. In this chapter, we propose a strategy of formative assessment—sharing learning goals—that foster students' self-assessment and allows teachers to perceive their learning progress and adapt teaching. This strategy is being implemented in a mathematics teacher education program based on the didactical analysis model.

Keywords: *curriculum, formative assessment, mathematics teachers education, self-assessment.*

El siglo XX ha sido un periodo decisivo en la evolución de la evaluación educativa. En el ámbito del aprendizaje, desde la primera conceptualización de Tyler, seguida de los avances ofrecidos por Bloom y colaboradores —evaluación diagnóstico, formativa y sumativa— y de la contribución de Popham —la evaluación criterial—, el significado y las prácticas evaluativas han cambiado en un intento de adaptarse a las nuevas demandas educativas y sociales (Bordas y Cabrera, 2001).

El aprendizaje matemático se considera actualmente como un proceso de construcción de conocimiento dentro de un contexto social y cultural. El aprendizaje con comprensión, la resolución de problemas y el desarrollo del razonamiento matemático, entre otras competencias, se han convertido en metas de aprendizaje. Conforme se transforman las metas en la Educación Matemática y evoluciona la comprensión de cómo los alumnos aprenden la materia, se demandan nuevas aproximaciones a la evaluación que la conciban como un proceso continuo e interconectado con el resto de las componentes del currículo (Rico, 1993) y que permitan visibilizar las formas de pensamiento de los escolares, al tiempo que incrementan las habilidades del profesorado para evaluarlas.

Sin embargo, a pesar de lo que sugieren los expertos, en un número sorprendente de casos, profesores que propugnan una visión socio-constructivista del aprendizaje —evidenciada en la estructura de la lección, las tareas seleccionadas, el respeto por el pensamiento del estudiante y el cuidado en propiciar un ambiente de clase favorecedor de la comunicación matemática— no traducen esta visión en cambios epistemológicamente consistentes en la evaluación (Webb, 2004). Las razones para este desfase entre la evaluación y la instrucción por parte de los profesores son múltiples. Entre ellas, podemos citar el desconocimiento de las estrategias y procedimientos para llevar a cabo una evaluación coherente con las innovaciones en la instrucción; la demanda de tiempo y esfuerzo que este tipo de evaluación conlleva; y la inercia de las instituciones educativas.

Este desfase entre instrucción y evaluación también se hace patente en la literatura. Ante la abundancia de trabajos sobre la enseñanza de las matemáticas desde una perspectiva socio-constructivista, las posibilidades de introducir en las aulas nuevas aproximaciones a la evaluación requieren estudios sobre modos de promover cambios y de apoyar el desarrollo profesional del profesor en este sentido. Desde esta perspectiva, es importante que los programas de formación de profesores de matemáticas proporcionen oportunidades a los profesores en formación para conocer conceptualizaciones de la evaluación que sean coherentes con los avances en el resto de componentes curriculares, así como para desarrollar sus capacidades de implementar cambios en sus diseños de propuestas didácticas acordes con estas conceptualizaciones.

En este capítulo, presentamos una conceptualización de evaluación formativa en matemáticas centrada en compartir las metas de aprendizaje con los escolares y proponemos una estrategia para hacerla operativa que posibilita, a un tiempo, la evaluación del profesor sobre el aprendizaje de los escolares y la autoevaluación por parte de estos últimos. En lo que sigue, establecemos las demandas que la evaluación formativa requiere del profesor de matemáticas y describimos la herramienta que denominamos «semáforos», como estrategia para que los profesores compartan sus metas con los estudiantes y aborden algunas de esas demandas.

La evaluación formativa y sus demandas para el profesor

El término evaluación formativa fue introducido por Scriven (1967) para referirse a los procedimientos utilizados por los profesores con la finalidad de adaptar su proceso de enseñanza a los progresos y necesidades de aprendizaje observados en sus alumnos. Esta finalidad queda también patente en los planteamientos del NCTM, que asume que la evaluación en el aula es más que simplemente una prueba al final de la instrucción para ver el rendimiento de los escolares en condiciones especiales, sino que es más bien una parte integral de la instrucción que informa y guía a los profesores cuando toman decisiones acerca de ésta (NCTM, 2000, p. 22).

De acuerdo con Goos (2014), los principios que sustentan la evaluación formativa en matemáticas están bien establecidos y han sido promulgados, no solo a través de documentos curriculares, sino también a través de informes de investigación y recursos para el desarrollo profesional. Esta autora propone tres principios globales. En primer lugar, los profesores deben obtener evidencia del aprendizaje de los escolares. Para ello, la evaluación debe «modelar» una buena práctica matemática. La evidencia se recoge, por ejemplo, con tareas, y preguntas y discusiones de clase. En segundo lugar, los profesores deben interpretar las evidencias y promover juicios válidos sobre la calidad del aprendizaje de los escolares. Para ello, la evaluación debe estar alineada con la instrucción, incluir múltiples formas de evidencia y usar criterios y estándares explícitos. Y, en tercer lugar, los profesores deben actuar a partir de la evidencia para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. La evaluación formativa debe incluir realimentación y autoevaluación.

Este planteamiento impone demandas significativas al conocimiento y a la pericia del profesorado, entre las que se incluyen las siguientes: (a) la formulación de criterios e indicadores de evaluación que reflejen una actividad matemática auténtica; (b) la realización de juicios bien fundados sobre la calidad de la actuación de los escolares en un rango de tareas diferentes que, además de los criterios formulados, se basen en evidencias de su grado de consecución; (c) la provisión a los escolares de una realimentación «en tiempo real», que les permita avanzar en su aprendizaje, al conocer qué dominan, qué les queda por aprender y cómo pueden proceder para solventar sus carencias; y (d) la capacidad para hacer a los escolares partícipes del proceso de evaluación, al delegar progresivamente en ellos el protagonismo.

Al tener en mente lo anterior, hemos desarrollado una estrategia de evaluación formativa que forma parte de un programa de formación de profesores de matemáticas basado en el modelo del análisis didáctico (Gómez y González, 2013). A partir de los objetivos de aprendizaje que los estudiantes para profesor formulan en el diseño de unidades didácticas y de las tareas que establecen para lograrlos, se articula un modo de compartir las metas con los escolares y de que ellos puedan informar, tarea a tarea, de su percepción sobre el grado de consecución de dichas metas. Para ello, introducimos primero un procedimiento con el que el profesor puede caracterizar los objetivos de aprendizaje en términos de grafos de criterio de logro. La estrategia de los semáforos para compartir metas y propiciar la autoevaluación del alumnado que proponemos se basa en esos grafos de criterios de logro. Describimos el procedimiento a continuación.

Caracterización de los objetivos de aprendizaje

Para planificar la enseñanza de cualquier tema de las matemáticas escolares, los profesores deben establecer lo que esperan que sus estudiantes aprendan. Para ello, formulan objetivos de aprendizaje por medio de frases cortas cuyo significado suponen evidente. Sin embargo, en muchas ocasiones, ellos no constatan la complejidad de esas formulaciones. Lograr un objetivo de aprendizaje implica la capacidad del estudiante para abordar y resolver ciertas tareas que pongan en evidencia que ha logrado esa expectativa. Para caracterizar esa expectativa de aprendizaje, es necesario que el profesor establezca las demandas cognitivas que están implicadas en esas tareas. Nosotros hemos desarrollado un procedimiento que permite caracterizar un objetivo de aprendizaje con base en un grafo de criterios de logro. El procedimiento parte de la identificación de un conjunto de tareas que el profesor considera que si un estudiante las resuelve, entonces el estudiante ha logrado el objetivo de aprendizaje. El profesor establece las posibles estrategias de resolución de esas tareas y las capacidades que los estudiantes deben activar para resolverlas. Con esta información, el profesor puede construir el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje. Hemos descrito este procedimiento en detalle en Gómez, González y Romero (2014). Por ejemplo, en el tema de probabilidad condicional, el objetivo de aprendizaje «Reconocer situaciones en las que es posible aplicar la noción de probabilidad condicional en distintos contextos y expresar la situación matemáticamente», se puede caracterizar con el grafo de criterios de logro de la Figura 1. Hemos tomado este ejemplo del trabajo del grupo 5 de la tercera cohorte de la maestría en Educación Matemática de la Universidad de los Andes. Este grupo está compuesto por los profesores Rosemary Díaz, Camilo López, Sergio Montes y Diana Rodríguez.

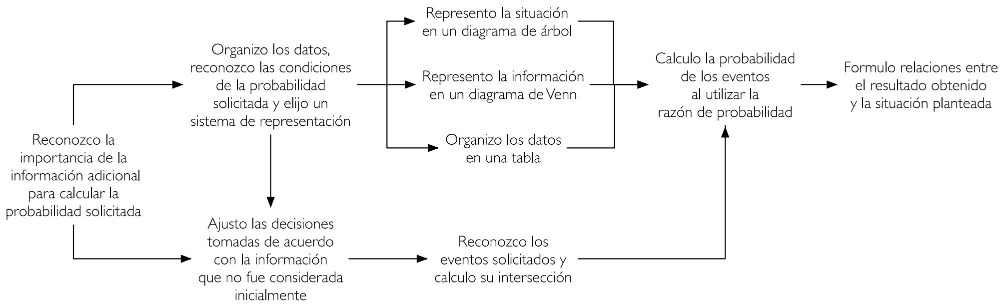


Figura 1. *Grafo de criterios de logro del objetivo*

Los criterios de logro que componen el grafo se han redactado de tal forma que los estudiantes puedan entenderlos. Con este tipo de grafo, los estudiantes pueden tener una visión del proceso de consecución del objetivo como una progresión estructurada en la que se aprecian el orden y las relaciones entre los criterios de logro. De la misma forma, y con base en el grafo de criterios de logro del objetivo de aprendizaje, es posible formular un grafo de criterios de logro para cada tarea con la que el profesor pretende contribuir al logro del objetivo de aprendizaje por parte de los estudiantes. Supongamos la siguiente tarea relacionada con el objetivo de aprendizaje.

> Diez estudiantes de grado undécimo del colegio Robert. F Kennedy que estaban en una salida pedagógica, se quedaron de los buses de los grados superiores y ahora deben abordar alguno de los buses que quedan. Como no encontraron un bus con los 10 cupos, viajaron repartidos entre 3 buses: el que lleva a los niños de preescolar, el que lleva a los niños de primaria y el de los niños de sexto que tenían 3, 4 y 5 cupos respectivamente.
>
> Teniendo en cuenta únicamente la información suministrada y sabiendo que el bus que lleva a los estudiantes de sexto no se llenó, ¿Cuál es la probabilidad de que sí se llenara el bus de primaria?

En la Figura 2, hemos resaltado los criterios de logro a los que esta tarea pretende contribuir.

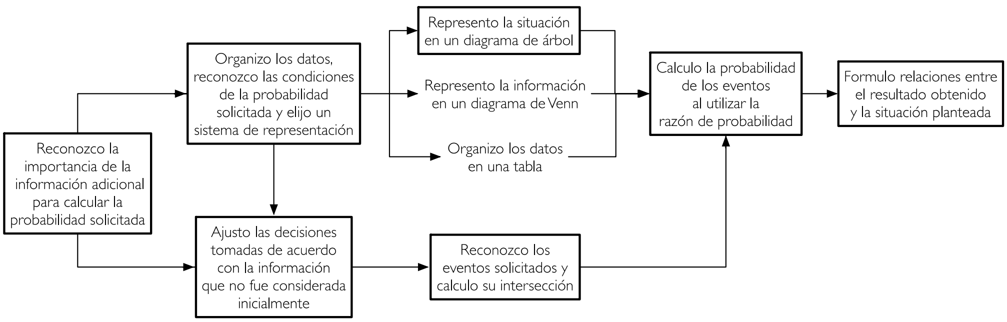


Figura 2. *Criterios de logro a los que apunta la tarea*

En este grafo, el profesor destaca aquellos criterios de logro que el estudiante puede activar al abordar la tarea y, por consiguiente, aquellos aspectos del objetivo de aprendizaje a los que apunta la tarea.

Estrategia para compartir metas y fomentar la autoevaluación

Los grafos de criterios de logro del objetivo de aprendizaje y de las tareas son la base para el diseño de una estrategia que permite compartir las metas con los estudiantes y promover su autoevaluación cuando abordan una tarea. Para tomar parte activa en su aprendizaje, los estudiantes necesitan saber cuáles son las metas o los objetivos que se persiguen. Además, necesitan conocer los criterios mediante los cuales se valorará la calidad de su aprendizaje, porque una cosa es saber hacia dónde han de ir, y otra, es saber si lo están haciendo bien.

Para involucrar a los estudiantes en el proceso de evaluación, el profesor necesita encontrar una manera de compartir con ellos los objetivos de aprendizaje y los criterios para valorar su logro. Para un objetivo determinado, el profesor puede compartir con los estudiantes su grafo de criterios de logro. De esta manera, los estudiantes pueden tener una idea acerca de lo que se espera que ellos sean capaces de hacer al abordar las tareas que pretenden contribuir al objetivo de aprendizaje: el profesor comparte las metas con los estudiantes.

Desde la perspectiva de la autoevaluación, hemos desarrollado un esquema que denominamos «semáforos». El profesor proporciona a cada estudiante el grafo de criterios de logro de la tarea que acaba de realizar, junto con pegatinas en forma de circulitos verdes, amarillos y rojos con las que ellos pueden indicar, en el grafo, en qué medida ellos consideran que han alcanzado cada criterio de logro: el verde significa que el estudiante cree cumplir el criterio; el amarillo que tiene dudas al respecto; y el rojo qué no ha podido lograrlo. Después de realizar la tarea, el profesor solicitará a los estudiantes que coloreen el grafo de la tarea, al indicar con un semáforo de un color (verde, amarillo o rojo —blanco, gris y negro en la figura 3—) el grado con el que él considera que ha logrado cada criterio de logro de la tarea (Figura 3).

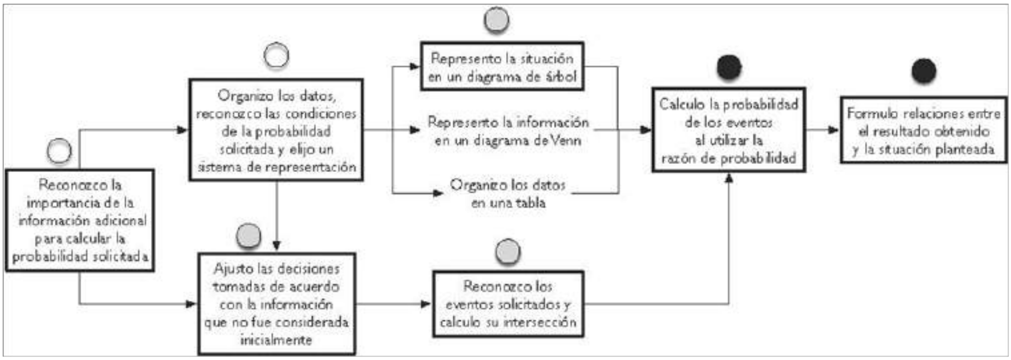


Figura 3. *Grafo de criterios de logro de la tarea con semáforos*

A partir de esta información, el profesor puede percibir con relativa rapidez si puede pasar a la tarea siguiente, si necesita aclarar algunos puntos para toda la clase o si algunos estudiantes precisan ayuda particular. También puede establecer qué aspectos de los criterios de logro no se han desarrollado suficientemente de manera general en la clase o si hay grupos de estudiantes que han avanzado apropiadamente, mientras que otros grupos manifiestan dificultades en algunos aspectos de sus expectativas de aprendizaje. La información que los estudiantes proporcionan con los semáforos puede servir para identificar quiénes pueden ayudar a sus compañeros a avanzar sobre determinadas cuestiones, y estimular un clima colaborativo, útil tanto para el estudiante que ayuda como para los que son ayudados.

Conclusión

Hemos presentado una estrategia, basada en la construcción del grafo de criterios de logro de un objetivo de aprendizaje y de las tareas que pretenden contribuir a ese objetivo de aprendizaje, con la que el profesor puede compartir sus metas con sus estudiantes, puede fomentar la auto-evaluación y hacer un seguimiento del progreso de los estudiantes que le permita adaptar la enseñanza. Mediante este procedimiento, hemos pretendido fortalecer la validez de la evaluación, por cuanto se comunican los criterios con los que el trabajo de los escolares será evaluado a través de una variedad de tareas que realizan durante la unidad didáctica. Dichos criterios son comunicados en un lenguaje adaptado a los escolares y ajustado en el transcurso de las tareas, de manera que profesor y estudiantes puedan compartir de hecho las metas de aprendizaje y, lo que es más importante, puedan utilizarlas de forma operativa.

Por lo que respecta al profesor, una de las formas más importantes en que la evaluación puede fomentar el aprendizaje matemático es a través de la realimentación, que puede ser utilizada por cada escolar para cubrir la brecha entre su actuación en un momento dado y la meta perseguida. Mediante el esquema de semáforos, los escolares permiten al profesor visualizar su percepción de dónde se hallan en cada instancia del proceso de aprendizaje. Aunque esta percepción del escolar tenga que ser contrastada (por ejemplo, con los grafos de criterios de logro que el profesor cumplimenta al final de la sesión), proporciona al profesor una pista muy valiosa para realizar una realimentación ajustada a las necesidades de los alumnos individuales. Con respecto a la totalidad de la clase, el sistema permite modificar la secuencia de enseñanza en momentos en los que se constatan dificultades generalizadas o acelerarla en momentos en los que el grupo-clase consigue con facilidad las metas pretendidas.

Por lo que respecta al alumnado, el sistema permite una autoevaluación basada en criterios y evidencias, más allá de la mera opinión muchas veces infundada sobre la calidad del propio aprendizaje. Además, se trata de una autoevaluación cualitativa, orientada a seguir aprendiendo, más que a ponerse una nota que aumente la calificación dada por el profesor. Esta evaluación cualitativa le permite, además, utilizar la información para procurarse ayudas en el proceso de aprendizaje, no solo por parte del profesor, sino de los propios compañeros o incluso de fuera del aula.

Esta estrategia ha sido implementada con escolares en aulas reales y actualmente se analizan los datos obtenidos, con lo que se espera contribuir a la demanda de investigaciones empíricas y «ecológicamente válidas» en las que los profesores utilicen una realimentación bien articulada para guiar los procesos de aprendizaje de los escolares y sus implicaciones en su autorregulación metacognitiva.

Agradecimientos

Este proyecto ha sido apoyado parcialmente por el proyecto EDU2012-33030 del Ministerio de Ciencia y Tecnología de España.

Referencias

Bordas, M. I. y Cabrera, F. (2001). Estrategias de evaluación de los aprendizajes centrados en el proceso. *Revista Española de Pedagogía, 218,* 25-48.

Gómez, P. y González, M. J. (2013). Diseño de planes de formación de profesores de matemáticas basados en el análisis didáctico. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.), *Análisis didáctico en Educación Matemática. Formación de profesores, innovación curricular y metodología de investigación* (pp. 121-139). Granada, España: Comares.

Gómez, P., González, M. J. y Romero, I. (2014). Caminos de aprendizaje en la formación de profesores de matemáticas: objetivos, tareas y evaluación. *Profesorado. Revista de Curriculum y Formación de Profesorado, 18*(3), 319-338.

Goos, M. (2014). Mathematics classroom assessment. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 413-417). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Rico, L. (1993). Mathematics assessment in the Spanish educational system. En M. Niss (Ed.), *Cases of assessment in mathematics education* (pp. 9-20). Dordrecht, Países Bajos: Springer.

Scriven, M. (1967). The methodology of evaluation. En R. Tyler, R. Gagne y M. Scriven (Eds.), *Perspectives on curriculum evaluation* (pp. 39-83). Chicago, IL: Rand McNally and Co.

Webb, N. M. (2004). *Classroom Assessment as a Research Context: Variations on a Theme of Pedagogical Decision Making*. Trabajo presentado en ICME 10 – TSG 27, Copenhague, Dinamarca.

DE LO APRENDIDO, DE LO VIVIDO

Juana M. Sancho Gil[1]
Universidad de Barcelona

Resumen

Al comenzar a enseñar, empecé a comprender la importancia de aprender. Desde que entré en la primera clase en la que me esperaban un montón de ojos expectantes, de cuerpos vivos, llenos de energía, de niños y niñas de cuatro y cinco años, vislumbré todo lo que no sabía e intuí todo lo que tenía que aprender. Sin habérmelo propuesto conscientemente, orienté mi vida a la pasión por aprender y por acompañar a otros en sus procesos de aprendizaje. En el camino recorrido desde entonces he encontrado muchos y buenos compañeros de viaje, porque no se trata de una experiencia individual, sino de algo que sucede en compañía de otros. Y con Moisés Coriat transité por momentos significativos de aprendizaje, que sin duda han contribuido a mi formación como docente e investigadora. En este texto reconozco y comparto los más significativos.

[1] ESBRINA – Subjetividades, visualidades y entornos educativos contemporáneos. 2014SGR 632: http://esbrina.eu

REUNI+D - Red Universitaria de Investigación e Innovación educativa. MIMECO. EDU2015-68718-REDT: http://reunid.eu

INDAGA-T - Grupo de innovación docente para favoreces la indagación. Universidad de Barcelona. GIDCUB-13/087: http://www.ub.edu/indagat/

Un encuentro personal y profesional

Conozco a Moisés en París, como marido de Pilar Gonzálvo, una querida amiga de la infancia. La conversación fluye no sólo a través de intereses profesionales, los cuatro que participamos en el encuentro (Fernando Hernández es el cuarto), estamos interesados en la educación, en su potencial, en su papel en la mejora de los individuos y de la sociedad. Pero también nos une el interés por la cultura, la ciencia, el arte, la literatura, la filosofía… Las tertulias se alargan, hablamos, discutimos, analizamos, exploramos sobre todo *lo divino y lo humano*. Siento que es un contacto que me enriquece y me inspira.

Años más tarde, Moisés y Pilar se trasladan a Granada y él, tras seguir algún tiempo como profesor de secundaria, comienza a dar clases en la Universidad. En una circunstancia de cambios y en la era analógica, por algún tiempo, perdí el contacto con ellos. En aquel momento, también desde la universidad, me dedicaba a enseñar e investigar sobre tecnologías educativas y, en particular sobre las (nuevas) tecnologías de la información y la comunicación. Mi participación en la primera iniciativa de introducción de la informática en la enseñanza[2], me había llevado a interesarme por el auge de esta nueva dimensión tecnológica, por la filosofía de la tecnología y por la responsabilidad social de su desarrollo.

En la década de 1980, en la mayoría de los países, y España no fue una excepción, comenzaron a proliferar programas de de informática educativa. En Cataluña, el CRIEP se convirtió en PIE (Programa de Informática Educativa), el Ministerio de Educación y Ciencia creó el Proyecto Atenea, impulsado por Programa de Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación (PNTIC), en Andalucía nació el Plan Zahara, los proyectos Abrente y Estrela en Galicia, el Plan Vasco de Informática Educativa, el Programa Informática a l'Ensenyament de Valencia y el proyecto Ábaco en Canarias.

Seguí colaborado con el PIE, investigando y escribiendo sobre el tema de la informática educativa[3], diseñé e impartí la asignatura optativa: La introducción de la informática en el currículo, en la licenciatura de Pedagogía, en la Facultad de Pedagogía de la Universidad de Barcelona. Esta trayectoria seguida propició el sentido de mi segundo encuentro con Moisés.

[2] Se trataba del CRIEP (Centro de Recursos de Informática Educativa y Professional). Sancho, J. M. y Butzbach, M. (1985). Informática educativa y formación permanente del profesorado: Un proyecto en desarrollo en Cataluña. En A. Pfeiffer y J. Galván (Eds.) *Informática y Escuela* (p. 249-254). Madrid: Fundesco.

[3] Marqués, P. y Sancho, J. M. (1987). *Cómo introducir y utilizar el ordenador en la clase.* Barcelona, España: CEAC.

El valor de una letra y el reencuentro fructífero

La década de 1980 se caracterizó por una efervescencia educativa en la que confluían la necesidad y el deseo de transformar en profundidad el sistema educativo y las prácticas de enseñanza. En este contexto se gestó el discurso de innovación y mejora que prometía y se vislumbraba en la informática (tecnologías de la información y la comunicación). En este contexto, pensaba a menudo que Moisés Coriat tenía que estar implicado en las iniciativas de innovación que se comenzaban a experimentar en los centros, vinculadas a los movimientos de reforma que culminaron con la promulgación Ley Orgánica General del Sistema Educativo (LOGSE) en 1990 y a las TIC. Pero como digo, Internet todavía no estaba aquí y no acababa de encontrar el camino del reencuentro. Así que, sin éxito, pregunté a distintos colegas que trabajaban en Andalucía.

Mi suerte cambió cuando en 1984, el Ministerio de Educación y Ciencia, el de Industria y Energía y el Consejo Superior de informática, organizaron, en Madrid, las Jornadas sobre Informática y Educación en la Enseñanza Básica, a las que asistimos la mayoría de las personas implicadas e interesadas por la utilización y el impacto de la informática en la enseñanza[4] (Pfeiffer y Galván, 1985). Al encontrarme con un grupo de Andalucía, ¡Moisés estaba allí! Y aquí viene una divertida anécdota. En Cataluña, me suelen llamar Joana, incluso salí con este nombre en algunas publicaciones. Él oía hablar de una Joana Sancho y, aunque se preguntaba si podía ser yo, no acabada de estar seguro. En este punto se acabó el *misterio* y, además de recuperar la amistad, comenzamos a colaborar en distintas propuestas.

La pasión por las matemáticas

Vengo de una familia con varios licenciados y doctores en Matemáticas. Mi primo favorito, Juan Sancho Guimerá, despertó mi interés y me hizo disfrutar de este ámbito de conocimiento. En un momento dado me planteé estudiar esta licenciatura, pero las circunstancias familiares me llevaron a Magisterio primero y, al apasionarme por la educación, a seguir con estudios vinculados con este campo de actuación.

El reencuentro con Moisés, con su invitación a participar en distintas iniciativas relacionadas con la informática educativa y la formación metodológica del profesorado de matemáticas que se estaba preparando para la reforma educativa impulsada por el gobierno del PSOE, me permitió dar un nuevo giro a mi interés por las Matemáticas. En este contexto quiero destacar dos momentos y una de sus aportaciones.

El primero se refiere a la preparación y publicación del libro *Nudos y nexos: grafos en las escuelas*[5] (Coriat, Sancho, Gonzalvo y Marín, 1989). El proceso de elaboración,

[4] Pfeiffer, A. y Galván, J. (Eds.) (1985). *Informática y escuela*. Madrid, España: Fundesco.

[5] Coriat, M., Sancho, J. M., Gonzálvo, P., y Marín, A. (1989). *Nudos y nexos. Grafos en las escuelas*. Madrid, España: Síntesis.

en el que también participaron Pilar Gonzálvo y Antonio Marín, se convirtió en un terreno fértil para la discusión educativa. Personalmente, la teoría de grafos —que no conocía como formalización, me pareció fascinante[6]. Sobre todo porque tiendo a encontrar conexiones entre prácticamente todo lo que me envuelve. De ahí lo que me fascinaba era cómo explicitar y representar estas interdependencias y vínculos matemáticamente y vislumbrar su aportación a la representación, el análisis e interpretación de fenómenos complejos.

Por otra parte, me hizo más consciente del proceso de construcción social del conocimiento. Cuando uno estudia matemáticas —bueno, en general cualquier disciplina—, tiene la impresión de que no hay autoría, de que todo lo que le *explican* o *estudia* ha estado siempre ahí, que no ha sido resultado de un proceso de planteamiento y resolución de problemas, incluso de luchas de poder y reconocimiento. Que no ha necesitado de horas de estudio y esfuerzo y de capacidad de comunicación. De este modo, situar históricamente, la teoría de grafos, y otras muchas teorías, no sólo matemáticas, me proporcionó más evidencias a mi argumentación de cómo las instituciones educativas despojan a los saberes de contexto y autoría, convirtiéndolos —en general, en *contenidos* factuales y declarativos, que nos dificultan pensar (hay que memorizar), plantearnos problemas, y considerar que podemos convertirnos en *matemáticos, científicos o pensadores*.

De hecho, a partir de aquí, a menudo pregunto a licenciados y doctores en matemáticas y otras ciencias *naturales* y *experimentales* sobre su conocimiento de la historia y de los avatares de la construcción de su disciplina. En un primer momento se suelen sorprender, en un segundo, tienden a reconocer su desconocimiento y el hecho de que, en general, no se lo habían planteado. Parece que en la mayoría de los planes de estudio de estas carreras, ahora grados, no contemplan la dimensión histórica de estos ámbitos de estudio.

En definitiva, esta actividad, además de convertirse en un libro, me propició un espacio de estudio, reflexión y acción que, sin duda, ha tenido una considerable importancia en mi trayectoria profesional.

El segundo tiene que ver con la codirección de una tesis doctoral. Cuando Núria Simó, se planteó realizar su tesis sobre la enseñanza de las matemáticas, tuve claro que necesitábamos una codirección y que se lo propondríamos a Moisés Coriat. Tras su aceptación, comenzamos a trabajar y el proceso fue largo (como son los de todas las tesis), intenso y profundamente formativo para la doctoranda, para mí y, estoy segura que para él. La investigación consistió en un estudio de caso sobre la transposición didáctica, entendida, de forma innovadora, como la línea que transita (con conexiones e interferencias) entre el conocimiento matemático, el *recorte* realizado por los espe-

[6] Aunque la noción de grafos tiene su origen en el siglo XVIII con el problema de los puentes de Königsberg, el primer libro sobre teoría de grafos lo publicó Dénes Kőnig en 1936. Y en la época en que fue publicado el nuestro, las publicaciones en español eran escasas.

cialistas en su consideración del conocimiento matemático *imprescindible* —en este caso para la enseñanza secundaria obligatoria, la definición del contenido prescrito por la administración y el aterrizaje en el centro y en el aula— considerando los materiales de enseñanza.

Como se puede intuir, el proceso realizado a tres, consistió en un auténtico viaje a Ítaca, en el que el propio trayecto fue tanto o más interesante que el puerto de llegada. Aunque en este caso también lo fue, por la aportación realizada por Núria al campo de la didáctica de las Matemáticas y porque la convirtió en doctora[7] (Simó, 1996).

Finalizo este apartado refiriéndome a una de las contribuciones de Moisés que valoro de forma especial, porque también conecta conmigo y con mi historia. Me refiero a su obra de 2010, *Educación Matemática Infantil: materiales de estudio para la asignatura del mismo nombre*, editada por el servicio de publicaciones de la Universidad de Granada. Una aportación con la que conecté y me emocionó, porque a mi interés por las matemáticas se unió el hecho de que mi primer destino como *maestra nacional propietaria*, fuese una clase de párvulos de 4 y 5 años. Cuando leí el libro sentí *envidia luminosa* de los estudiantes de Moisés y de otros cuyos profesores tengan en cuenta su propuesta. Pensé cómo me hubiese gustado que lo hubiese leído y considerado el profesor de Matemáticas de la Escuela Normal de Magisterio en la que estudié. También en todo lo que les hubiese podido plantear a mis *párvulos*. Porque una cosa que siempre me pregunto, además del sentido de lo que enseño, de lo que trabajo con los estudiantes, es todo lo que nos dejamos, lo que no estamos en condiciones de abordar, bien porque no sabemos, bien por el gran límite del tiempo. En cualquier caso, la obra de Moisés, constituyó, constituye, una fuente de inspiración.

La relación pedagógica en la universidad

La primera vez que como estudiante mantuve una tutoría fue en el Instituto de Educación de Londres, donde a comienzos de la década de 1980, estaba realizando un máster. Me gustó y me impresionó, porque mi tutor no sólo me preguntó e interesó por mi proceso de aprendizaje, sino por mi bienestar personal. Que si me sentía a gusto en un país extranjero. Que si me sentía acogida. Que si… Extrañada, al final de la tutoría le pregunté por qué se había interesado por mi vida *personal*, a lo que me respondió que en la medida que esta parte de mi vida transcurriese sin excesivos problemas, estaría en una mejor posición para afrontar la vida académica. Una evidencia más de cómo todo está relacionado, aunque no seamos conscientes.

[7] Simó, N. (1996). *Les múltiples cares de les matemàtiques escolars a través dels diferents entorns de decisions curriculars. Un estudi de cas.* Tesis doctoral no publicada. Barcelona, Universidad de Barcelona.

Este episodio, se convirtió en un evento, en términos de Atkinson[8] (2011), en un *evento* de aprendizaje. En la universidad que yo estudié, para ser *objetivos* parece que había que tratar a los estudiantes como *objetos*. Que mantener cualquier contacto, más allá del visual en las clases expositivas podía llevar a *pervertir* la nota, a favorecer *filias* y *fobias*. Así que, más allá de alguna revisión de examen, parecía impensable cualquier relación pedagógica en la universidad.

Con mi experiencia en el Instituto de Educación, desde el comienzo de mi trabajo en la universidad instauré las tutorías como un elemento consustancial en el programa formativo propuesto a los estudiantes. Algo poco común durante bastantes años. Y aquí, los intereses académicos con Moisés volvieron a coincidir.

En el año 2002 organizó en la Universidad de Granada la *Jornadas sobre Tutoría y Orientación*[9] (Coriat, 2002). Su iniciativa pionera de reflexionar, considerar y avanzar sobre las nociones de tutoría y orientación en la universidad, recogió un interés creciente por este aspecto fundamental de la docencia universitaria e impulsó nuevas acciones y propuestas. En mi caso, su invitación a participar en estas jornadas, me llevó a formalizar mis pensamientos y acciones sobre: *El sentido y la práctica de las tutorías en las asignaturas de la enseñanza universitaria*[10].

En 2010, con INDAGA-T, el grupo de innovación docente del que formo parte, organizamos las *I Jornadas sobre la Relación pedagógica en la Universidad: saberes, estudiantes, evaluación e investigación*[11], de las que este año se celebró la VI edición en Valencia[12]. Y siento que de algún modo existe un claro nexo entre estos nudos. Una corriente intelectual y afectiva unida por el interés y la predisposición para lograr una educación universitaria mejorada y con sentido. Un legado de Moisés que permanece entre nosotros.

Despedida y cierre

Una de las obras de teatro que más me han emocionado en los últimos años ha sido, Después de mí el diluvio, escrita por Lluïsa Conillé, por encargo del *Teatre Lliure* de Barcelona. En síntesis. Un hombre europeo de negocios y una mujer que actúa como interprete se encuentran en la habitación de un hotel de Kinshasa, la capital del Congo. Un viejo del lugar le ha pedido a la intérprete que le ayude a transmitir al hombre su

[8] Atkinson, D. (2011). *Art, equality and learning: Pedagogies against the state*. Rotterdam, Países Bajos: Sense.

[9] Coriat, M. (Ed.) (2002). *Jornadas sobre tutoría y orientación*. Granada, España: Universidad de Granada.

[10] Texto publicado en las páginas 17-36 del libro mencionado.

[11] http://som.esbrina.eu/jornadesuni/

[12] https://artemaestrosymuseos.wordpress.com/2015/12/08/jornadas-sobre-la-relacion-pedagogica-en-la-universidad-nuevos-entornos-de-aprendizaje/

mensaje. Lo quiere convencer de que se lleve a su hijo a Europa, y le da tantas y tan buenas razones que, por cansancio o interés, el hombre le dice que sí, que se lo lleva, que lo traiga inmediatamente. A lo que el viejo le responde que esto es imposible ya que su hijo está muerto. Ante la sorpresa del europeo, el viejo le cuenta que él, tras distintas tragedias y exterminios, es el único que queda de su familia y su tribu y que, cuando él muera, su hijo desaparecerá definitivamente. Pero que si él se lo lleva, permanecerá mientras perviva su memoria.

Al acabar este texto, me ha venido esta historia a la mente y he comprendido por qué Moisés permanece tan vivo.

LO QUE APRENDÍ CON MOISÉS, MI DIRECTOR DE TESIS

What I learnt with Moises, my Thesis Supervisor

Núria Simó-Gil
Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya

Resumen

Este artículo relata cómo la experiencia de aprendizaje de investigación con Moisés Coriat fue primordial en la construcción de conocimiento en relación a la educación matemática. Él fue mi director de tesis junto con la profesora Juana M.ª Sancho Gil de la Universidad de Barcelona. El trabajo en equipo con ellos confluyó en la tesis: «Las múltiples caras de las matemáticas escolares a través de los diferentes entornos de decisión curricular: un estudio de caso». Con él aprendí la complejidad que encerraba la enseñanza de las matemáticas en secundaria. Junto a él fui capaz de dilucidar algunos aspectos de la intricada trama de relaciones de la enseñanza de las matemáticas en la Enseñanza Secundaria Obligatoria.

Palabras clave: conocimiento escolar de las matemáticas, cultura de centro, educación matemática, formación permanente, práctica educativa.

Abstract

This article relates how the research learning experience with Moises Coriat was significant in the construction of knowledge in relation to mathematics education. He was my thesis director with Professor Juana Maria Sancho Gil from the University of Barcelona. Teamwork with them converged on the thesis: «Las múltiples caras de las matemáticas escolares a través de los diferentes entornos de decisión curricular: un estudio de caso». I learned, with him, the complexity about the teaching of mathematics in secondary school. He had helped me to clarify some aspects of the intricate web of relationships of teaching mathematics in Secondary Education.

Keywords: *educational practice, in-service education mathematical school knowledge, mathematics education, school's culture.*

Apertura: implicaciones escolares de la educación matemática

En el año 1994 tras cerrar el trabajo de campo y en plena redacción de la tesis, decidimos con Juana M.ª Sancho, mi directora de tesis, que era imprescindible contar con la tutorización de una persona experta en Educación Matemática para poder analizar y comprender en profundidad el caso de la investigación, un profesor que impartía matemáticas en tercer curso de ESO en un centro de secundaria de Barcelona. Juana y Moisés ya eran buenos amigos y Moisés no dudó en implicarse en la aventura de codirigir una tesis ya iniciada y con algunas decisiones tomadas. Para mí fue un lujo aprender a investigar acompañada por los dos. Con Juana se forjó una amistad profunda que seguimos cuidando. Y con Moisés una complicidad intensa. Él aportó generosidad, disponibilidad, capacidad de adaptación y confianza plena en el equipo, con el fin de construir desde aquel momento aportaciones que fueran consecuencia de las decisiones tomadas entre los tres. Los tres participamos de la experiencia que él mismo narra en un texto en el que contó su experiencia como director de tesis:

> Las decisiones se encadenan. Toda decisión «abre caminos» y «cierra» otros. Hay decisiones que contradicen a otras previamente tomadas y decisiones que convergen con éstas. En general, todos los investigadores tienen claras muchas decisiones (y pueden argumentar en su defensa) y generalmente confusas otras. (Coriat, 2012, p.13)

En este proceso su saber fue clave para documentar las decisiones en torno al conocimiento de la educación matemática del caso investigado. El equilibraba, con maestría, el rigor y la escucha activa ante las ideas, dudas y decisiones sobre las matemáticas escolares que le proponíamos a medida que avanzaba. Y, ahora, leyendo de nuevo el contenido construido resuena la definición de Rico, Sierra y Castro (2000, p. 352-353) en relación a la educación matemática:

> La educación matemática abarca desde las primeras nociones sobre el número, la forma, el razonamiento, la prueba y la estructura que enseñamos a nuestros niños, hasta su culminación en una formación profesional o en estudios superiores. (…) Desde la perspectiva del especialista consideramos la educación matemática como conjunto de ideas, conocimientos y procesos implicados en la construcción, representación, transmisión y valoración del conocimiento matemático que tiene lugar con carácter intencional. La educación matemática que se transmite por medio del sistema escolar tiene rasgos epistémicos de actividad científica básica (…) También la actividad de los profesores y los procesos para su formación como profesionales quedan comprendidos dentro de la educación matemática.

De los distintos significados de educación matemática mi tesis se relaciona con la idea que detalla Rico (2012, p. 43):

> [La educación matemática] como la totalidad de acciones y condiciones que hacen posible la enseñanza de las matemáticas, incluida la cualificación profesional de profesores. Abarca, pues, el conjunto de conocimientos, procesos y condiciones que posibilitan las interacciones entre profesores y alumnos y que hacen viable la enseñanza y aprendizaje de las matemática.

Una de las aportaciones de la tesis, que defendí el 18 de diciembre de 1996, consistió en evidenciar que las matemáticas escolares no son equiparables a las matemáticas de «los matemáticos». La afirmación conecta con el debate en torno a la educación matemática de la década de 1990. Y mi tesis aporta algunas evidencias de lo que afirma Wojciechowska (1989) cuando pone de relieve la distancia entre el currículum planificado y las prácticas de enseñanza. Leinhardt, Putnam, Stein y Baxter (1991) añaden que los profesores con una mayor comprensión de los temas escolares que enseñan (conocimiento del contenido), tienen mejores resultados en su práctica profesional. En consecuencia el debate del momento en torno a la educación matemática planteaba dos retos que me interesaron especialmente: las matemáticas a enseñar y la formación docente.

Tres fueron los referentes de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de 1990 que me ayudaron a reflexionar en torno a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares: el *Informe Cockcroft* publicado en el Reino Unido en 1982 por la Comisión de Investigación sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas, las *Aportaciones al debate sobre las matemáticas de los 90* realizado por un colectivo de profesores el año 1987 en Valencia y los *Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática* publicado por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) en 1989. Una característica común de los tres informes es la intención de relacionar el conocimiento teórico de la investigación educativa analizando ámbitos de la psicología, las matemáticas y la educación con el conocimiento y la práctica escolares (Fey, 1994).

La relación entre las matemáticas escolares y el conocimiento matemático se fundamenta en la distinción que la comunidad de educadores matemáticos realiza entre saber matemáticas y hacer matemáticas. Schoenfeld (1994) afirma que pensar de forma matemática va más allá del conocimiento de hechos, técnicas, teoremas, etc. Desde dicho planteamiento, hacer o utilizar las matemáticas exige al profesorado que sea capaz de trabajar con el alumnado aspectos que van más allá de los contenidos matemáticos. Así el docente se responsabiliza de: (a) el contenido entendido como una colección de ideas, tratadas a partir de las relaciones entre ellas en lugar de una colección de procedimientos mecánicos sin sentido; (b) las estrategias de resolución de problemas que promueve; (c) el control sobre los recursos matemáticos utilizados para resolver problemas; (d) las creencias; (e) la habilidad para integrarse como miembro de la comunidad matemática.

Con Moisés, aprendí a dar sentido a la complejidad de un caso en el que analizaba continuidades y discontinuidades de los contextos implicados en la construcción del conocimiento escolar de las matemáticas. La tesis pretendió analizar, mediante las estrategias que un profesor desarrolla cuando se enfrenta a la tarea de enseñar matemáticas a los jóvenes, el conocimiento disciplinar, el humano, el curricular y el actitudinal (Carrillo, Coriat y Oliveira, 1999). Analizar dichos elementos fue necesario para evidenciar que sólo es posible comprender el quehacer educativo de un docente si nos aproximamos a la cultura de centro en la que se sumerge como experto, como profesional y como persona. Por ello es fundamental analizar y comprender los contextos de decisión curricular que se articulan en cada centro.

La tesis: algunas aportaciones del estudio de caso realizado

El estudio de caso realizado me acercó a los discursos sobre las matemáticas durante la segunda mitad del siglo XX. Dichos discursos buscaban fundamentación educativa más allá de la propia disciplina científica de las matemáticas. En la década de 1960-1970 hubo un intento de convertir los contenidos matemáticos, con las mínimas transformaciones posibles, en conocimiento escolar. Se pretendió hacer un traspaso, lo más directo posible, de los conocimientos de los matemáticos al alumnado, profundizando en la propia estructura de este conocimiento disciplinar o en los procesos de aprendizaje de los estudiantes que facilitaran la adquisición del conocimiento matemático. Más adelante, en la década de 1980, el profesorado asume la responsabilidad de implicar al alumnado en el aprendizaje de las matemáticas partiendo de las problemáticas de la comunidad matemática. Los docentes se convierten en promotores de los procesos cognitivos de aprendizaje de los estudiantes ante la resolución de problemas. Hacer matemáticas implica resolver problemas, modelizar situaciones, hacer conjeturas, aprender del error, discutir las visiones del alumnado, etc. El reto es convertir dichas tareas en prácticas educativas de aula. Durante la siguiente década, las matemáticas escolares se construyeron a partir de las decisiones que toman sobre los contenidos matemáticos los participantes de la comunidad educativa.

En la tesis, se intentó reconstruir el papel de la cultura escolar en la caracterización de los significados compartidos en torno a las matemáticas escolares, en cada uno de los entornos de decisión curricular representados en la Figura 1. La comunidad educativa, la Administración, el Plan de Formación Permanente Municipal[1], el centro analizado, el Departamento de Ciencias Experimentales del profesor del estudio y, finalmente, el aula de 3er curso de ESO.

Todos ellos participan en la construcción del conocimiento escolar aunque de maneras distintas, los tres entornos con línea discontinua en el gráfico desarrollan actuaciones que repercuten en los centros educativos. El primero, la comunidad educativa, analiza y decide cuál es el conocimiento que la sociedad valora, parece que la Administración planifica cómo transformarlo en conocimiento escolar apto para ser enseñado y en el tercero son importantes las decisiones que se toman para desarrollarlo en el Plan de Formación Permanente Municipal.

Los de línea continua son los entornos del conocimiento escolar en la acción. Cabe destacar el centro como el sustrato que da vida al departamento de ciencias experimentales, el departamento como el entorno de relación y de trabajo del profesorado, y el aula como el lugar de encuentro institucional entre el profesorado y el alumnado.

[1] El centro en el que realicé el estudio de caso formaba parte de la Red Municipal de centros educativos de Barcelona. Dichos centros contaban con el Plan de Formación Permanente Institucional de las Escuelas Municipales de Barcelona que Marta Mata impulsó desde el Área de Educación durante el período que fue concejal de Educación del Ayuntamiento de Barcelona (1987-1995).

Los seis entornos analizados ayudan a comprender la complejidad de la construcción del conocimiento escolar de las matemáticas y en dicho recorrido se pone de manifiesto el esfuerzo que el centro estudiado realiza para buscar nuevas formas de organización y formación y para desarrollar nuevas miradas en torno a las matemáticas escolares que impregnen la práctica educativa de las matemáticas en el aula.

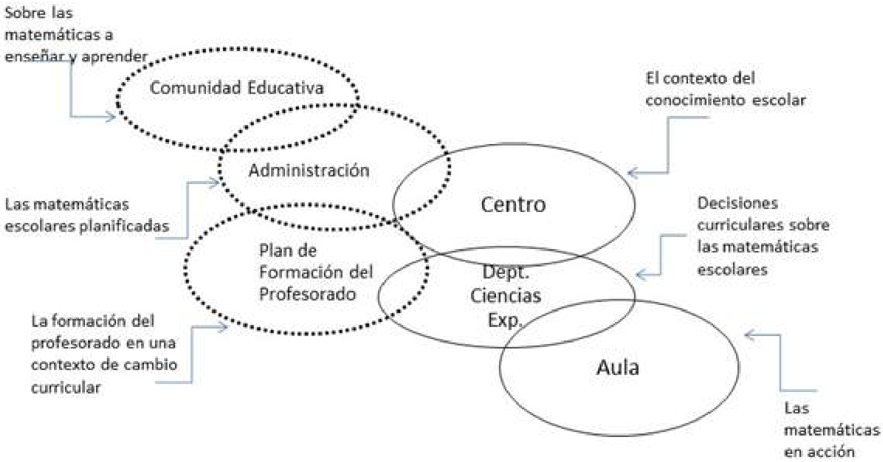


Figura 1. *Representación de los entornos implicados en el problema de tesis*

En este recorrido, el olvido de la cultura escolar como cultura que resitúa y construye el conocimiento de las matemáticas en la escuela, responsabiliza al profesorado, del cambio curricular en la práctica educativa. Los esfuerzos realizados en planificar, siguiendo bases educativas, las matemáticas a enseñar, no se concretan en cambios en la práctica docente del profesorado.

Un aspecto relevante de la tesis es evidenciar que la construcción de nuevas maneras de enseñar del profesorado no se puede desvincular de la cultura escolar del centro. Esta cultura escolar influye en la forma en que el profesorado se plantea la enseñanza de las matemáticas desde tres dimensiones: a) La dimensión laboral, en función de las condiciones de trabajo, que hace que el colectivo de profesores de cada centro afronte y comparta dificultades, sentimientos, vivencias según su situación profesional; b) la dimensión educativa, ya que el claustro establece la dinámica general de las relaciones de enseñanza y aprendizaje del centro que repercuten en las relaciones entre profesorado y alumnado de aula; y c) la dimensión social en tanto que cada centro tiene una ubicación geográfica y de trabajo, con un perfil socioeconómico variado del alumnado que hace que se establezca una relación fuerte entre entornos y expectativas educativas del profesorado (Coriat y Flores, 1998). La cultura escolar repercute en un modo de concebir la enseñanza de las matemáticas que tiene consecuencias en el desarrollo profesional de cada uno de los docentes que trabaja en un centro. Por consiguiente, no es posible concebir el cambio curricular como la consecuencia de poner en práctica los contenidos planificados. La práctica de aula es susceptible de transformarse en la medida en que el profesorado puede reflexionar, desde la dimensión cultural, educativa y social, en torno al conocimiento cotidiano que se desarrolla en el aula, en los diferentes contextos de decisión curricular presentes en la Figura 1. En consecuencia, el cambio curricular del conocimiento escolar de las matemáticas tiene que ver con unas condiciones de trabajo en las que los participantes comparten relaciones entre las concepciones matemáticas, las metodologías y las acciones educativas. Esta forma de actuar en la escuela se relaciona con la naturaleza de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas que tienen lugar en la institución escolar.

Las transformaciones de las matemáticas escolares

Con la investigación realizada podemos concluir que las matemáticas escolares se construyen con las decisiones sobre los contenidos que se adoptan en los diferentes entornos. Estos van reduciendo la complejidad de los conocimientos matemáticos relacionados con la sociedad, con los planteamientos de los matemáticos, con la utilización de las matemáticas como herramienta para acordar la estructura de los contenidos conceptuales, procedimentales y factuales que son los que se ponen en práctica en el aula.

Cuando los conocimientos matemáticos se transforman en escolares, el centro interpreta desde la propia cultura docente, las directrices del momento (el Diseño Curricular y la LOGSE en el caso estudiado) y caracteriza los contenidos pedagógicos transversales como el tratamiento de la diversidad, la interdisciplinariedad o el aprendizaje significativo. Dichos contenidos se consideraron en las adaptaciones metodológicas pero no sirvieron para problematizar el conocimiento escolar de las matemáticas a impartir. Así por ejemplo en el caso estudiado, la diversidad se concretó en ofrecer a los estudiantes ejercicios de mayor dificultad para aquellos que acababan antes, o la interdisciplinariedad se entendió como la posibilidad de que el profesorado explicara las relaciones entre las diferentes áreas de conocimiento.

El profesor, protagonista del estudio de caso, valora la estabilidad del conocimiento escolar de las matemáticas. Para él, la cantidad de contenidos a trabajar con los estudiantes es pequeña en relación a los contenidos de la comunidad matemática. El conocimiento matemático se va acumulando, pero según el profesor, estos cambios no repercuten en el aula ya que los contenidos a aprender son básicos y alejados de los conocimientos de referencia.

Para los estudiantes, las matemáticas son una materia más que se concreta en los ejercicios, a veces comprensibles y en ocasiones, no tanto. Una de las ideas más compartida entre el alumnado es que aprender matemáticas es saber hacer ejercicios de matemáticas, y aunque no valoraban la posible aplicación en la vida cotidiana, eran plenamente conscientes de la finalidad propedéutica, para seguir estudiando.

Epílogo: cuatro reflexiones de lo aprendido para el debate

En el desarrollo de la tesis me aproximé a un contexto específico, singular e irrepetible. Cabe destacar que aquel caso ya queda lejos porque el trabajo de campo se realizó durante el curso 1994-1995. Asimismo sugiero algunas reflexiones de lo aprendido que quizás pueden provocar todavía nuevas reflexiones para seguir avanzando en el debate.

Reflexión 1. Sobre la cultura escolar: si bien esta cuestión ha sido ampliamente analizada por diferentes autores internacionales, entre los que destaca Andy Hargreaves (1996), la tesis aporta que la organización de un centro configura un ambiente de aprendizaje que responde a la cultura escolar compartida por sus integrantes. Dichos elementos no son la consecuencia de las visiones que el profesor, el departamento y el centro comparten del conocimiento sino que, en muchas ocasiones, el sistema escolar es responsable de la ausencia de debate en torno a las concepciones del conocimiento escolar vigente en la cultura escolar de un centro.

Reflexión 2. Sobre el conocimiento escolar: diferentes instituciones acotan el conocimiento y en su transformación escolar lo connotan de tal manera que lo alejan del conocimiento de referencia ya sea del área disciplinar o del conocimiento que se considera necesario en la enseñanza secundaria obligatoria. En estos procesos el profesorado, durante su práctica, no siente la necesidad de enfrentarse a los problemas epistemológicos propios del área disciplinar. En dicha situación el conocimiento escolar se concreta en la transmisión de resultados, procesos y conceptos pero no es posible comunicar vivencias matemáticas.

Reflexión 3. Sobre el cambio curricular: este no puede pretenderse como una consecuencia directa del discurso de la Administración educativa sobre los contenidos planificados de la práctica de aula. Por ejemplo, en el momento de realización de la tesis, el discurso imperante de la Administración se basaba en referentes constructivistas. Sin embargo, la Administración lo planteaba como un proceso técnico dando por hecho que la planificación promovía un cambio en la acción docente. Sin un proceso de reflexión crítica en torno a los nuevos referentes, el cambio sólo es una acomodación de las prácticas vigentes a los nuevos discursos. La práctica educativa en el aula se transforma y cambia en la medida en que los diferentes entornos de decisión curricular construyen sus significados y los transforman en formas de actuación que resuelven problemas educativos.

Reflexión 4. Sobre la formación docente: el cambio curricular en torno al conocimiento escolar no es posible si sólo cambia el discurso sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Para este cambio es necesario explicitar y compartir las construcciones que los participantes de los distintos entornos hacen de las propias concepciones entorno al conocimiento escolar, del significado que se discute entorno a la enseñanza y el aprendizaje de las áreas de conocimiento en la actualidad y poder analizar las vinculaciones entre dichas construcciones y la práctica educativa. Esto requiere la posibilidad de formación del profesorado para promover la reflexión en torno a las propias concepciones, al conocimiento escolar, y a las condiciones de trabajo. Sirva esta cita de Coriat y Carrillo (1999, p.121) como síntesis de dicha reflexión:

> Cada profesor anima la cultura escolar de los centros en los que trabaja. Por eso, su formación debe entenderse de forma continua; aunque para propósitos institucionales sea imprescindible distinguir un período de formación inicial (en el que todavía no es profesor) de una carrera profesional, conviene hacer esfuerzos por concebir un único proceso de construcción del conocimiento profesional. La formación continua que apoyamos tiende a un desarrollo profesional a la vez individual (porque las personas son diferentes) y colectivo (porque la enseñanza nunca se practica de manera aislada, aunque el profesor cierre la puerta del aula) con sus propios ritmos y ciclos vitales.

Tras la defensa de la tesis en 1996, inicié mi carrera académica en el Departamento de Pedagogía de la Facultad de Educación de la Universitat de Vic (Barcelona). Lo aprendido en la tesis, con Juana y Moisés, fundamentó aportaciones que me han adentrado en el intrincado recorrido de la innovación educativa. Los debates con mis directores de tesis abrieron múltiples y variadas cuestiones en torno a la construcción del conocimiento escolar, suscitaron dilemas en relación a la participación, el diálogo y la negociación de los diferentes miembros de un centro y abrieron reflexiones en torno al conocimiento escolar que merece ser aprendido en la escuela. A finales del siglo XX, la escolarización secundaria se planteó el reto de ubicar la educación matemática en un contexto social con programas globales para una educación democrática que luchara por la equidad en el acceso a la igualdad de oportunidades de aprendizaje, de procesos y de resultados para todos. Ahora, ya en el siglo XXI, mi deseo es que la educación matemática siga contribuyendo a la mejora de la formación del profesorado de Secundaria ahondando en algunas de las ideas educativas que Moisés me enseñó.

Referencias

Coriat, M. (2012). Los problemas de un director de tesis. En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 9-25). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

Coriat, M. y Flores, P. (1998). La formación de profesores de matemáticas y la cultura escolar. *Revista Interuniversitaria de Formación del profesorado, 32,* 25-37.

Coriat, M. y Carrillo, J. (1999). Madejas… sugerencias sobre la formación inicial del profesor de Secundaria. *XXI, Revista de Educación, 1,* 115-132.

Fey, J. T. (1994). Eclectic approaches to elementarization. En R. Biehler, R. W. Scholz, R. Sträser y B. Wilkelmann (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 15-26). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Hargreaves, A. (1996). *Profesorado, cultura y postmodernidad: cambian los tiempos, cambia el profesorado*. Madrid, España: Morata.

Leinhardt, G., Putnam, R. T., Stein, M. K. y Baxter, J. (1991). Where subject knowledge matters. En J. Brophy (Ed.), *Advances in research on teaching.* Greenwich, CT: JAI Press.

RICO, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1,* 39-63.

RICO, L., SIERRA, M. y CASTRO, E. (2000). La Didáctica de la Matemática. En L. Rico y D. Madrid (Eds.), *Fundamentos didácticos de las áreas curriculares* (pp. 351-406). Madrid, España: Síntesis.

SIMÓ, N. (1996). *Les múltiples cares de les matemàtiques escolars a través dels diferents entorns de decisió curricular. Un estudi de cas.* Tesis doctoral no publicada. Barcelona, Universidad de Barcelona.

— (2001). El paper de l'educació matemática a l'aula: un repte per al segle XXI. *Temps d'educació, 26,* 383-406.

INVESTIGACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL LÍMITE FINITO DE UNA SUCESIÓN

Teaching and learning of finite limit of a sequence

Francisco Javier Claros Mellado
Universidad Complutense de Madrid

Resumen

En este documento presentamos las relaciones mantenidas ente los fenómenos organizados por el límite finito de una sucesión, y el pensamiento matemático elemental y avanzado. Consideramos que estas relaciones son importante para el desarrollo de una secuencia de enseñanza-aprendizaje que aborde el estudio de límite finito de una sucesión. Las relaciones mantenidas entre los citados fenómenos y los elementos propios del pensamiento matemático elemental y avanzado serán abordadas estableciendo una secuencia de pasos en orden de dificultad creciente que permita al final la construcción del concepto definición de límite. Para llegar a él señalamos la importancia del concepto imagen y la imagen demostración del límite finito de una sucesión.

Palabras clave: fenómenos, límite, pensamiento matemático elemental y avanzado, sistemas de representación, sucesión.

Abstract

In this paper we present the relations maintained between phenomena organized by the finite limit of a sequence, and elementary and advanced mathematical thinking. We believe that these relations are important for the development of a sequence of teaching and learning that addresses the study of finite limit of a sequence. Relations maintained between the above phenomena and the elements of elementary and advanced mathematical thinking will be addressed by establishing a sequence of steps in order of increasing difficulty to allow the construction of the concept definition of limit. To get it we note the importance of the concept image and the image proof of the finite limit of a sequence.

Keywords: *elementary and advanced mathematical thinking, limit, phenomena, representation system, sequence.*

Introducción

En este documento abordamos el esquema conceptual del límite finito de una sucesión, estableciendo relaciones entre los elementos que conforman dicho esquema y sus implicaciones para la enseñanza.

El documento se organiza en cuatro apartados: el primero denominado marco teórico explica y detalla los pilares sobre los que se sustenta nuestra investigación. El segundo apartado describe las relaciones mantenidas entre los elementos que conforman nuestro marco teórico y el límite finito de una sucesión, poniendo el acento en la división entre pensamiento matemático elemental y avanzado. El tercer apartado apunta un guión para el desarrollo de una secuencia didáctica que aborde el límite finito de una sucesión. Por último las conclusiones y perspectivas describen las principales aportaciones de este documento así como las cuestiones que quedan pendientes.

Marco teórico

Nuestro marco teórico se sustenta sobre tres pilares: fenomenología, sistemas de representación y pensamiento matemático. Este marco teórico ya fue usado en Claros (2010) y Sánchez (2012). Actualmente está siendo usado para el inicio del estudio de la fenomenología del límite infinito de una sucesión. La relación entre cada uno de los elementos queda reflejada en la Figura 1.

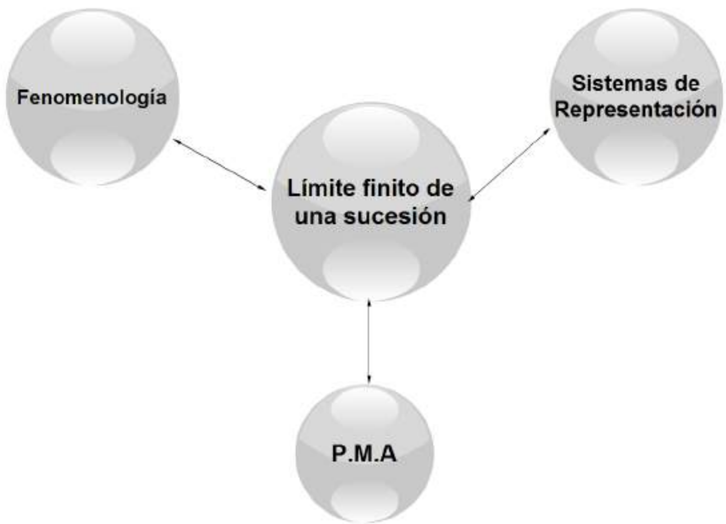


Figura 1. *Marco teórico (esquema)*

«Fenomenología» se usa sin excepción en el sentido de Freudenthal (1983); los sistemas de representación se usan en el sentido de Janvier (1987) y Blázquez y Ortega (2001) y el Pensamiento Matemático Avanzado se emplea siguiendo las ideas de Tall y Vinner (1981) y Vinner (1991). Estos tres elementos se aplicaron al análisis de una definición de límite finito de una sucesión[1].

FENOMENOLOGÍA

Freudenthal (1983) da el nombre de *fenomenología* a su método de análisis de los contenidos matemáticos, en el que parte de la contraposición entre *fenómeno* y *noumeno*. El término *noumeno* hace referencia a los conceptos o estructuras matemáticas, como organizadoras de *fenómenos*.

Puig (1997, p. 63) siguiendo a Freudenthal señala que:

> El análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste entonces en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos.

La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización debe tener en cuenta las matemáticas en su estado actual, pero también se debe tener en cuenta para qué fenómenos se creó y a cuáles, si es el caso, se extendió posteriormente.

El análisis fenomenológico de Freudenthal tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas y no pretende entrar a valorar la naturaleza de las matemáticas. Para Freudenthal no hay dos mundos distintos (mundo de los conceptos matemáticos, o mundo ideal, y mundo de las experiencias), sino un solo mundo que crece con cada producción matemática.

Para Freudenthal el noumeno es objeto del pensamiento, mientras que fenómeno es algo de lo que tenemos experiencia.

Además para Freudenthal los conceptos matemáticos no caen fuera del campo de nuestra experiencia, ni están en un mundo distinto del mundo de los fenómenos que organizan. Un concepto matemático que es el medio de organización de un fenómeno (o más de uno), pasa a formar parte de un campo de fenómenos que son organizados por otro nuevo concepto matemático.

Freudenthal (1983) establece cuatro tipos de fenomenología, todas ellas al servicio de la didáctica, pero sólo una de ellas es denominada fenomenología didáctica. Los tipos de fenomenología son: fenomenología; fenomenología didáctica; fenomenología genética y fenomenología histórica.

Unas fenomenologías se diferencian de otras en función de los fenómenos que se tienen en cuenta con respecto al concepto matemático del que se ocupan. En el primer caso, hablamos de fenómenos que están organizados por las matemáticas en el momento actual y en su uso actual. El segundo caso se ocupa de fenómenos que están presentes

[1] Definición: Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim $x_n = x$) si para cada $\varepsilon > 0$, existe un número natural N tal que si $n \geq N$ se cumple que $xn-x<\varepsilon$ (Spivak, 1991, p. 615. Notación adaptada.)

en el mundo de la enseñanza. En el tercer caso hablamos de los fenómenos que tienen en cuenta el desarrollo cognitivo de los aprendices. En último lugar hablamos de los fenómenos que son organizados por el concepto matemático y cómo esta organización se extendió a otros fenómenos.

En nuestro trabajo, cuando hablamos de fenomenología, nos referimos, principalmente, a la fenomenología en el primer sentido, ya que nos preocupan las relaciones establecidas entre los fenómenos detectados y el concepto de límite finito de una sucesión. Estos fenómenos los hemos denominado *aproximación simple intuitiva* (a.s.i.) y *retroalimentación* o *ida-vuelta en sucesiones* (i.v.s.).

Fenómenos

Una definición de límite finito de una sucesión organiza dos fenómenos: fenómeno de aproximación simple intuitiva (a.s.i) y fenómeno de retroalimentación o ida-vuelta en sucesiones (i.v.s.) (Claros, Sánchez y Coriat, 2013). Expondremos la función de estos fenómenos usando como referencia la definición de límite finito de una sucesión (Spivak, 1991).

El fenómeno a.s.i se observa cuando los términos de la sucesión parecen acercarse a un determinado valor que será propuesto como un candidato a límite; la verificación de dicho candidato se remite al segundo fenómeno (i.v.s), con cuya ayuda establecemos fehacientemente si el candidato seleccionado es (o no) el límite de la sucesión con la que estamos trabajando. La verificación del fenómeno i.v.s exigirá la construcción de una función ε-N. Estos fenómenos a.s.i e i.v.s recuerdan en gran medida a la distinción realizada por Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas (2006) entre aproximación y tendencia. La aproximación parece estar relacionada con el fenómeno a.s.i mientras que la idea de tendencia remite directamente al fenómeno i.v.s. Este fenómeno permite demostrar que el candidato seleccionado como límite es el verdadero límite de la sucesión. La descripción detallada de estos fenómenos puede verse en Claros (2010).

Concepto imagen. Concepto definición y fenómenos

Asociado a un concepto matemático Tall y Vinner (1981) introdujeron los términos concepto imagen y concepto definición, que Vinner (1991) considera como «*dos diferentes celdas en nuestra estructura cognitiva*».

El «concepto definición» queda especificado como un conjunto de palabras usadas para describir la idea matemática subyacente. Enunciado por el profesor y trabajado por el alumno tiene un camino personal hasta la asimilación por parte del alumno. En este camino un concepto definición personal puede diferir de un concepto definición formal, siendo el último el que es aceptado por la comunidad matemática.

Cada concepto definición personal estaría asociado con algún concepto imagen, o más de uno.

Vinner (1991) señala que el concepto imagen es algo no verbal asociado con el nombre de un concepto. Puede ser una representación visual de un concepto o una colección de impresiones o experiencias.

Para establecer una conexión entre concepto imagen, concepto definición y fenómenos, empezamos delimitando los ámbitos que éstos determinan: ámbito intuitivo y ámbito formal. Aquí, el orden en los ámbitos es esencial, como hemos visto al mencionar los fenómenos.

En el primero, conviene elegir un sistema de representación y, con su ayuda, observaremos que los términos de la sucesión parecen acercarse a un determinado valor (fenómeno a.s.i), el cual se convertirá en un primer candidato a límite de la sucesión. Se trata de un concepto imagen basado en una convicción personal sobre el límite.

En el segundo ámbito, apelamos al fenómeno i.v.s. En un primer momento, construimos algunos valores de la función de IR en IN (para valores concretos de épsilon) y comprobamos que «la vuelta» satisface en cada caso lo exigido por la definición. Esto aún no es una demostración matemática, pero: (a) aumenta nuestra confianza en el candidato a límite y, por tanto, en el concepto imagen que hemos elaborado; (b) la pequeña colección de valores de épsilon elegidos genera una imagen de la demostración (no necesariamente como figura dibujada, sino como cúmulo de experiencias particulares).

En un segundo momento, si tenemos la formación matemática suficiente, generalizamos y construimos una función de IR en IN, demostrando así que el candidato a límite lo es indiscutiblemente, acercándonos al concepto definición formal del límite finito de una sucesión a través de la sucesión concreta que hemos estudiado.

El concepto definición de límite finito de una sucesión engloba por lo tanto varios elementos de cada sucesión: (a) la definición de límite propiamente dicha, que incluye los fenómenos a.s.i. e i.v.s: el primero aporta un concepto imagen y, con el segundo fenómeno, lo ponemos a prueba. (b) Esta puesta a prueba consiste en construir varios valores de una función de IR en IN que constituyen una imagen de la demostración (Kidron y Dreyfus, 2014)[2]. (c) La demostración, para la sucesión estudiada: es necesario generalizar esta imagen de la demostración a todo valor permitido de épsilon.

En nuestro caso la demostración de que una determinada sucesión tiene límite debe suscitar en los alumnos uno o varios conceptos imágenes, una imagen de la demostra-

[2] Dichos autores introducen el término «proof image» (imagen de la demostración) y lo caracterizan de la siguiente manera: un individuo diremos que tiene una imagen de la demostración de una afirmación cuando tiene las siguientes dos componentes: la comprensión cognitiva de que una afirmación es verdadera y el sentimiento afectivo de certeza, consistente en la convicción intuitiva en el sentido de Fischbein (1994). El primero de ellos se caracteriza por ser personal, dinámico, incluye enlaces lógicos a los conceptos que se ponen en juego para demostrar la afirmación y por último la constitución de una entidad que permita a través de una simple imagen evocar la situación matemática que se está abordando. El segundo se basa en el sentido de comprensión debido a la entidad construida y está intrínsecamente conectado con la comprensión cognitiva.

ción (no exenta de dificultades) y una demostración. El concepto definición se alcanza cuando esto se ha realizado un cierto número de veces con sucesiones diferentes, número que depende de cada sujeto. Es más probable en los alumnos de universidad que cursan matemáticas que en los alumnos de bachillerato, ya que la demostración de afirmaciones, propiedades y teoremas, no somos capaces de hallarla en los actuales currículos de la enseñanza secundaria.

Es muy probable que la demostración se asocie principalmente al sistema de representación simbólico aunque pueden aparece también en el gráfico, el tabular y el verbal.

Sistemas de representación

Castro y Castro (1997) analizan la relación entre representaciones y construcción de conceptos estableciendo que, recientemente, se observa un creciente interés por las representaciones; está fundamentado en la creencia de que las representaciones externas de los conceptos mejoran la comprensión del mismo o la visualización de un proceso o concepto matemático. Esto ha generado una presencia masiva de representaciones en los libros de texto así como un aumento de la producción investigadora orientada a precisar esa idea de representación y su influencia en la comprensión de los conceptos matemáticos. Además, recogen ideas como las siguientes:

— La conceptualización actual de las matemáticas, basada en la noción de estructura, en la que los conceptos se adquieren a través de relaciones entre objetos, fenómenos y conceptos previos, da lugar a la formación de entidades abstractas que requieren el empleo de algún sistema de representación.

— Se introduce el término sistema de representación en lugar de representación para referirse al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar a una estructura matemática.

— Cada sistema de representación viene a destacar algunas de las propiedades del concepto en cuestión, pero dificulta la comprensión de otras. Además el uso de diferentes sistemas de representación para un mismo concepto puede añadir un grado de dificultad a la adquisición de dicho concepto por parte de los alumnos.

Teniendo en cuenta todo lo anterior, estos autores proponen una definición de lo que es dominar un concepto matemático (oc., p. 103):

> Dominar un concepto matemático consiste en conocer sus principales representaciones, el significado de cada una de ellas, así como operar con las reglas internas de cada sistema; también consiste en convertir o traducir unas representaciones en otras, detectando qué sistema es más ventajoso para trabajar determinadas propiedades.

En nuestro caso, para tener un dominio del concepto de límite finito de una sucesión, se tendrá que conocer sus principales representaciones, las cuales consideramos que son: verbal, gráfica, simbólica y tabular. Estas cuatro representaciones fueron consideradas por Janvier (1987) como las principales en la representación de variables. Otro aspecto a tener en cuenta en el dominio del concepto de límite, es la capacidad para pasar de un sistema de representación a otro, empleando en cada caso el que mejor se adapte al problema o situación que se quiere resolver o comunicar.

Las representaciones aparecen en la enseñanza elemental, pero el número de ellas y su importancia van aumentando en cursos cada vez más avanzados (educación secundaria y universidad). Las representaciones, junto con la abstracción, serán elementos imprescindibles en el desarrollo de matemáticas de mayor nivel.

Esquema conceptual del límite finito de una sucesión

En este apartado señalamos la relación mantenida entre el límite finito de una sucesión, y cada uno de los elementos que conforman nuestro marco teórico. Para detallar esta relación señalaremos dos pasos, que dividirán el pensamiento matemático elemental del avanzado.

Paso 1º. Pensamiento Matemático Elemental

El fenómeno a.s.i sería el primer fenómeno que debería aparecer en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Este se puede observar a través la sustitución de una serie de valores en la sucesión. Asimismo este fenómeno puede presentarse en diferentes sistemas de representación: verbal, gráfico y tabular (principalmente). Este fenómeno usado en diferentes sistemas de representación forma parte del concepto imagen que tiene un alumno sobre el límite finito de una sucesión y puede generar cierta convicción de que el candidato a límite que se observa en este fenómeno, pueda ser el límite de la citada sucesión. Todo este proceso: observación del fenómeno a.s.i, sustitución de diferentes valores de n en la sucesión para obtener una serie de valores de la misma y representación del fenómeno a.s.i en diferentes sistemas de representación conforman el concepto imagen que es un proceso cognitivo que situamos por su naturaleza dentro del pensamiento matemático elemental.

Paso 2º. Pensamiento Matemático Avanzado

El fenómeno que sucedería al fenómeno a.s.i sería el fenómeno i.v.s. Este fenómeno se iniciaría comprobando el candidato a límite obtenido anteriormente para algunos valores de épsilon. El uso y aplicación de este fenómeno genera una serie de dificultades que van asociada al grado de abstracción y formalización necesario para dominar dicho fenómeno. A la vez que se obtiene para cada valor de épsilon seleccionado, el valor de n, necesario para que se verifique el fenómeno de ida-vuelta, se va conformando una imagen de la demostración. Este paso es fundamental para abordar la misma. La demostración en sí, se afronta comprobando que el fenómeno de ida-vuelta se cumple para cualquier valor de épsilon que tomemos. Dicha comprobación permite asegurar que se ha demostrado que el candidato a límite seleccionado en el paso 1, es el verdadero límite de la sucesión con la que estamos trabajando.

Todos los pasos descritos en este segundo paso dan lugar a la formación del concepto definición del límite finito de una sucesión y forman parte por el grado de abstracción, formalización y razonamiento lógico-matemático, del Pensamiento Matemático Avanzado.

Los pasos 1 y 2 se concretan en la figura 2:

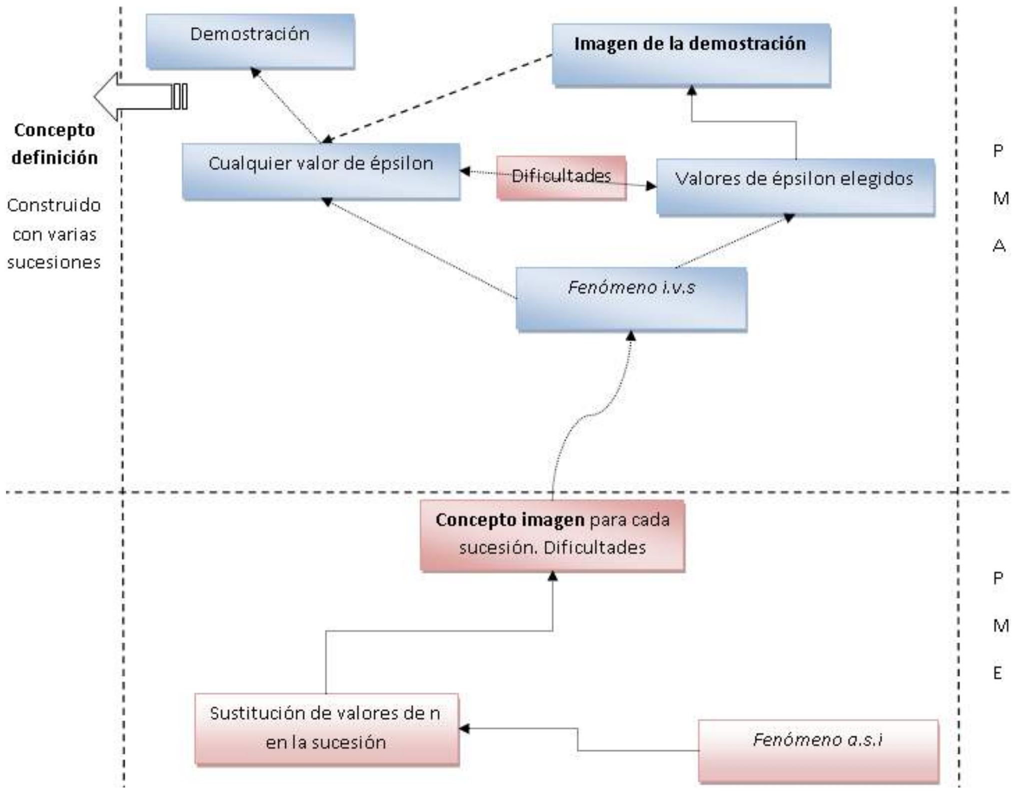


Figura 2. *Concepto definición de límite finito de una sucesión*

Kidron y Dreyfus (2014) sitúan la imagen de la demostración como parte del concepto imagen o incluso la identifican con él, en alumnos que no tienen una formación matemática muy sólida. Aquí nos alejamos de esa perspectiva: en primer lugar, identificamos la imagen de la demostración como la convicción de que algo es posible, pero no con una imagen dibujada propiamente dicha; en segundo lugar, la situamos en un nivel más formal; por último, consideramos que «está próxima» al concepto definición y ambos se sitúan plenamente en el pensamiento matemático avanzado, ya que surgen en procesos de demostración que el alumno tiene bien o casi bien establecidos. Sin embargo, la imagen de la demostración está asociada a cada sucesión, mientras que el concepto definición entendemos que es ya una noción matemática abstracta que resume diferentes experiencias con el límite finito.

Guiones de secuencias didácticas en torno al límite

Presentamos a continuación una secuencia didáctica que tiene en cuenta el esquema conceptual anteriormente descrito pero que detalla aún más si cabe, lo anteriormente expuesto. Consta de cuatro pasos.

1. Trabajar con el fenómeno a.s.i en diferentes ejemplos y en diferentes sistemas de representación. Para ello sustituimos varios valores de n en la sucesión. Con ello se pretende generar un concepto imagen adecuado. Este concepto imagen forma parte del pensamiento matemático elemental ya que introducimos la creencia de que la sucesión tiene límite mediante la exhibición de un posible valor límite. Además el lenguaje usado no es formal, dando mayor importancia a la intuición. Como sugerencia señalamos la conveniencia de usar diferentes sistemas de representación, con objeto de que surjan en clase dificultades asociadas al límite, como las relativas al infinito actual.

2. Trabajar el fenómeno de ida vuelta en sucesiones. Para ello se trabaja con un valor de épsilon y se halla el valor de n que permita que se cumpla la desigualdad $|a_n - L| < \varepsilon$, siendo L el candidato obtenido en el paso 1.º y épsilon un valor que hemos elegido. Repetimos para comprobar con otros valores elegidos de ε.

3. Hacemos la suposición de que se cumple para cualquier valor permitido que fijemos. Así hemos generado una convicción personal que llamamos imagen de la demostración; queda aún una tarea pendiente que está perfectamente clara: construir la función épsilon de IR en IN que asegure que L es el límite de la sucesión con la que trabajamos. Dicha función permitirá obtener un valor de N para cada valor de épsilon ($\varepsilon \in$ R) que fijemos.

4. Para asegurar la hipótesis formulada en 3, tenemos que recurrir a la demostración, un elemento clave del Pensamiento Matemático Avanzado junto con la formulación de hipótesis y el lenguaje formal. El punto de partida de dicha demostración, además de la convicción mencionada, es la definición de sucesión que tiene límite, porque exige el manejo de desigualdades, la propiedad arquimediana y la superación de posibles dificultades menores para ajustar los valores de N obtenidos en el paso 3 y los correspondientes valores obtenidos en este paso, que pueden corresponder a valores diferentes de épsilon. Estos elementos son evocados cuando uno tiene que afrontar la demostración y acercan a la construcción del concepto definición.

Conclusiones y perspectivas

En este documento hemos realizado las siguientes aportaciones que consideramos relevantes en el estudio del límite finito de una sucesión:

1. Se ha descrito el esquema conceptual del límite finito de una sucesión, incorporando un elemento hasta ahora no incluido en el mismo como es la imagen

demostración. Consideramos que es un elemento importante a tener en cuenta en el proceso de enseñanza aprendizaje de dicho concepto.

2. Se ha descrito una secuencia didáctica que detalla a través de cuatro pasos, indicaciones que consideramos pueden ayudar al proceso de enseñanza-aprendizaje del límite finito de una sucesión.

Entre las perspectivas que nos gustaría abordar señalamos:

1. Aplicar el esquema conceptual anterior a otros tipos de límite como el límite infinito de una sucesión y el límite finito de una función.
2. Diseñar una secuencia didáctica teniendo en cuenta el esquema anterior para el límite infinito de una sucesión y para el límite de una función.

Bibliografía

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la Universidad. *RELIME, 9*(2), 189-209.

Castro, E. y Castro, E. (1997). Representaciones y modelización. En L. Rico (Coord.) *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona, España: Horsori-ICE Universidad de Barcelona.

Claros, J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada. Disponible en http://hera.ugr.es/tesisugr/18909772.pdf

Claros, Sánchez y Coriat (2013). Sucesión convergente y sucesión de Cauchy: hacia una secuencia didáctica basada en la fenomenología. *Enseñanza de las Ciencias, 31*(2), 113-131.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Kidron, I. y Dreyfuss, T. (2014). Proof image. *Educational Studies in Mathematics, 87,* 297-321.

Sánchez (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada, España.

Spivak, M. (1991). *Calculus.* Barcelona, España: Reverté.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics, 12*(2), 151-169.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

ESTRATEGIAS DE IDENTIFICACIÓN DE REPRESENTACIONES GRÁFICAS EN TAREAS DE CÁLCULO DE LÍMITES

Strategies related to the identification of graphs in limit calculation tasks

José Antonio Fernández-Plaza
Universidad de Granada

Resumen

En este trabajo se describen los argumentos utilizados por estudiantes de 1.º de Bachillerato para identificar la representación gráfica asociada al cálculo de límites que involucran identidades notables e indeterminaciones del tipo $\frac{\to 0}{\to 0}$. La fundamentación teórica se basa en la ruptura entre las habilidades algebraicas y analíticas en el pensamiento matemático avanzado manifestada en un estudio previo, el modelo de significado y su concreción para el concepto de límite finito de una función un punto y la noción de coherencia de un argumento. Los resultados más relevantes muestran que los estudiantes en general son capaces de emplear ricos argumentos, tanto infinitesimales, asintóticos, como generales para discriminar la gráfica de una función, los cuales se caracterizan además mediante tres niveles de coherencia.

Palabras clave: representaciones, coherencia argumentativa, gráficas, indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$.

Abstract

In this work we describe the arguments employed by students in First year of Non-Compulsory Education to identify the graph associated to limit calculation involving notable equations and indeterminate form $\frac{\to 0}{\to 0}$. The theoretical background is based on the break between algebraic and analytic skills in Advanced Mathematical Thinking which is supported in a previous study; the model of meaning and the its concretion for the concept of finite limit of a function at a point; the notion of coherence of an argument. The more relevant results show that students are able in general to employ rich arguments, both infinitesimal, asymptotic and general ones, in order to discriminate the graph of a function. Such arguments are characterized by three levels of coherence.

Keywords: *representations, argumentative coherence, graphs, indeterminate form* $\frac{\to 0}{\to 0}$

Introducción

Investigaciones acerca de la didáctica del análisis muestran que las diferencias entre las habilidades algebraicas y las propias del análisis suponen una ruptura y una dificultad a la que los estudiantes se enfrentan (Artigue, 1995).

En una primera fase (Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza, 2013), partiendo de tareas de cálculo de límites en las que aparecen fracciones algebraicas, se realizó un estudio previo consistente en observar qué estrategias siguen los alumnos, los errores en los que incurren al realizar el cálculo de límites, vía el tratamiento algebraico de la indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$ presente en las mismas.

Este trabajo establece la continuidad del anterior en el que se pretende describir las argumentaciones de los escolares para seleccionar la gráfica de una lista de candidatas que representa la función, de la cual han calculado previamente el límite. Es importante notar que el mero cálculo del límite no será condición suficiente para seleccionar la gráfica, sino que han de apoyarse en otras características de la función y de las gráficas candidatas para elaborar la argumentación, que podrá incluir tanto elementos algebraicos como analíticos (Ortega y Pecharromán, 2014).

No solo interesa valorar la adecuación de la gráfica elegida, sino la consistencia interna de la argumentación empleada para apoyar la decisión, con independencia de la adecuación de la gráfica elegida por los escolares a la función objeto, que pretendemos describir en términos de coherencia.

Marco teórico

Incluimos en primer lugar un breve resumen de las estrategias que emplean los estudiantes para tratar las expresiones algebraicas y calcular los límites que extraemos de Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013). En relación con las estrategias algebraicas se constata que los estudiantes aplican exitosamente las igualdades notables para simplificar las fracciones algebraicas lo cual está relacionado con un uso adecuado del sentido estructural (Hoch y Dreyfus, 2006; Vega-Castro, Molina y Castro, 2011, 2012). Por otro lado, los estudiantes aplican también la regla de Ruffini o la fórmula de resolución completa de la ecuación cuadrática, sin reflexionar sobre un tratamiento más eficiente de expresiones pre-factorizadas, tanto es así, que el procedimiento rutinario de Ruffini no conduce necesariamente a la interpretación adecuada de los coeficientes obtenidos. Por otro lado, en relación con las estrategias analíticas, se perciben errores tales como la aplicación errónea de la regla de L'Hôpital y el uso de inferencias inadecuadas del límite en un punto finito como si se calculara el límite en infinito.

En segundo lugar, nos apoyamos en Rico (2012, pp. 52-53) que considera que el significado de un concepto matemático viene definido por tres componentes. Cada componente se concretará para el concepto de límite finito de una función en un punto:

— La *estructura conceptual.* En el concepto de límite finito de una función en un punto se integran la estructura algebraica (operaciones con límites y tratamiento de indeterminaciones) y la estructura topológico-métrica (distancia entre aproximaciones del punto y de las imágenes respecto del límite)

— Los *sistemas de representación.* Dicho concepto viene expresado mediante diferentes sistemas de representación: verbal, tabular, gráfico y simbólico. Para este trabajo adquiere especial importancia la relación entre el tratamiento gráfico y simbólico del concepto de límite.

— Los *sentidos o modos de uso.* Sánchez-Compaña (2012) y Fernández-Plaza (2015) realizan un estudio acerca de los fenómenos que organiza el concepto de límite finito de una función en un punto. El primero, describe dos fenómenos a partir de la definición formal. El segundo, considera estos dos sentidos y los amplía a los que organizan las concepciones de los escolares acerca del concepto, a saber, dinámico, estático y de restricción. En este trabajo adquiere especial importancia indagar si los estudiantes consideran el *sentido estático o valor de la función* erróneamente considerando que calcular el límite es equivalente a evaluar la expresión en el punto.

En tercer lugar, definimos un constructo denominado *coherencia* mediante el cual queremos describir una determinada argumentación, considerada como una secuencia de propiedades enlazadas mediante los conectores lógicos usuales. Definimos tres tipos de coherencia para el trabajo que se presenta:

— *Coherencia plena o simplemente coherente*, si las propiedades identificadas por el estudiante discriminan unívocamente la gráfica respecto del resto.

— *Coherencia de 2º nivel,* si las propiedades identificadas por el estudiante reducen el campo de elección a dos opciones. En tal caso la discriminación adecuada entre ambas es implícita o debida al azar.

— *Incoherencia*, si las propiedades identificadas por el estudiante reducen el campo de posibilidades a más de dos opciones. En este caso, la identificación de la gráfica correcta podría ser debida al azar.

Método

El presente trabajo es de tipo exploratorio. La recogida de datos se realizó durante el mes de abril de 2013 en un Instituto de Enseñanza Secundaria, de un municipio de la provincia de Jaén. En total 27 sujetos que cursaban 1º de Bachillerato de diferentes modalidades fueron escogidos intencionalmente por la disponibilidad para participar en el estudio y por el nivel educativo que cursaban.

Se elaboró una prueba escrita de cuatro tareas con enunciados semejantes. En cada una de ellas aparece el cálculo de un límite en un punto de una función fracción algebraica. La estructura de todos estos límites corresponde a $L=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{(x-a)^n P_1(x)}{(x-a)^m Q_1(x)}$

donde *n, m* son naturales mayores que 1 y P_1 y Q_1 son dos funciones polinómicas sin ceros en el punto $x = a$. El límite está determinado por los valores de n y m, es decir por los valores del exponente del binomio $x - a$. Los estudiantes habían recibido ya la instrucción ordinaria, limitando la intervención del profesor y de los investigadores a la aclaración de dudas. En Ruiz-Hidalgo y Fernández-Plaza (2013) se recogen los resultados y discusiones derivadas del desempeño de los estudiantes frente al cálculo de tales límites. La tabla 1 recoge los límites específicos organizados según la complejidad teórica y empírica establecida por la referida investigación.

Tabla 1. *Tareas de cálculo de límites ordenadas según su complejidad teórica y empírica*

	Tarea	*Límite*	*Exponentes*
3	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(7x-2)(x+2)}{x^2-4}$	$L = 12$	$n - m = 0$
1	$\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(3x+1)}{x^2-4x+4}$	$L = \pm\infty$	$n - m < 0$ impar
2	$\lim_{x\to 2} \frac{5x^3-10x^2}{(x-2)(x^2+1)}$	$L = 4$	$n - m = 0$
4	$\lim_{x\to 2} \frac{(3x^2-12)}{(x-2)^3(2x^2+1)}$	$L = +\infty$	$n - m < 0$ par

Además de calcular el valor de esos límites, se les pidió que seleccionaran la gráfica más adecuada para cada función entre una propuesta de 6 gráficas alternativas (Figura 1). Los resultados del desempeño de los estudiantes frente a esta tarea es objeto específico del presente trabajo.

Las 6 gráficas se eligieron con el criterio de que compartieran un rasgo común, pero existieran elementos diferenciadores que presento a continuación.

— Las gráficas A y D son candidatas a representar las funciones 1 y 4 en un entorno de $x = 2$, salvo la discriminación de los límites laterales que hace de A la elección adecuada para la función 1 y D para la función 4.

— Las gráficas B y F son candidatas a representar la función 2 en un entorno de $x = 2$, sin embargo, B es la adecuada porque está definida en $x = -2$ y F no lo está.

— Finalmente, las gráficas C y E son candidatas a representar la función 3 en un entorno de $x = 2$, sin embargo, la gráfica C es la adecuada porque está indefinida en $x = -2$.

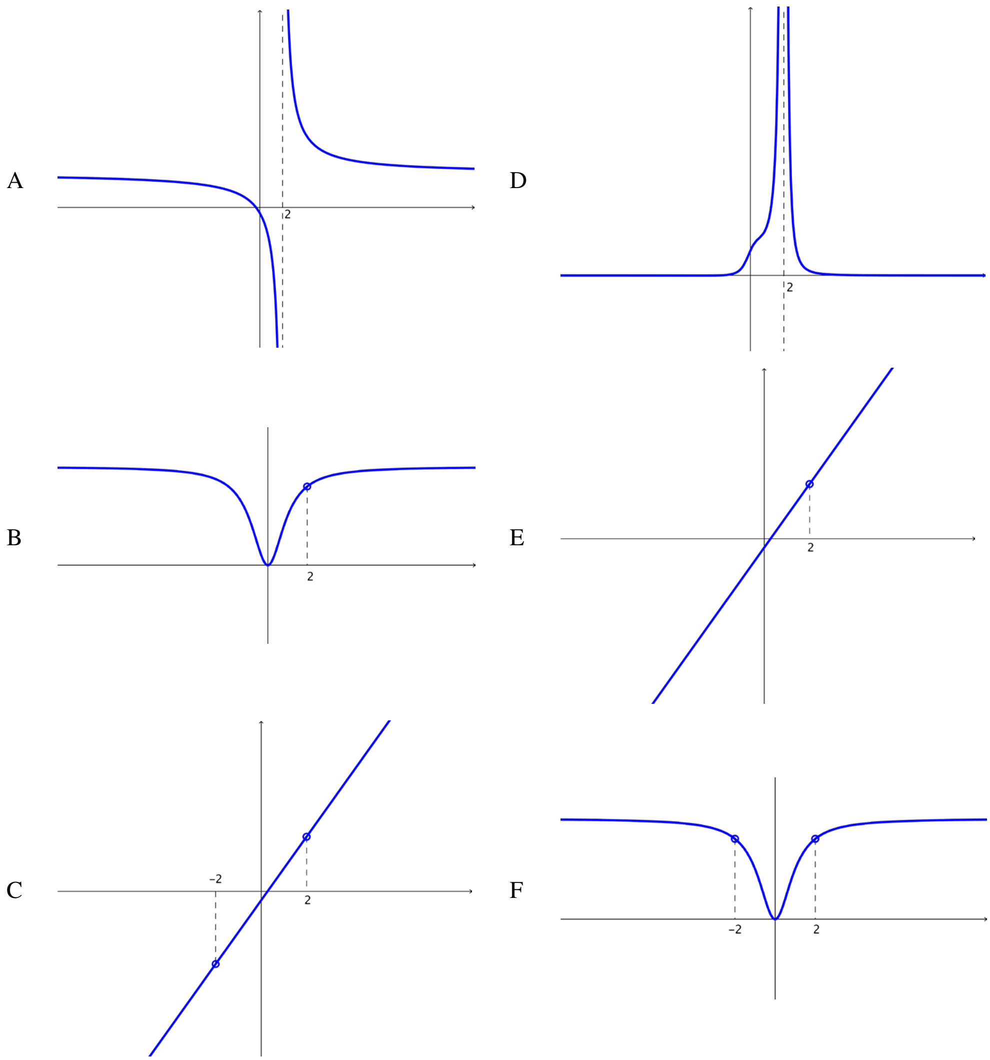


Figura 1. *Gráficas alternativas propuestas para su discusión*

Resultados y discusión

Codificación de los datos

Los argumentos empleados por los estudiantes para discriminar la gráfica que representa cada expresión funcional responden a combinaciones de los siguientes elementos argumentativos básicos:

Criterios infinitesimales y asintóticos
— Valor del límite finito en $x = 2$, si procede, en $x = -2$
— Valor del límite infinito en $x = 2$ (Asíntota vertical). Dentro de este elemento argumentativo algunos estudiantes discriminan los límites laterales
— Límite en infinito (Cálculo de asíntotas horizontales)
Criterios generales
— Cálculo del dominio de definición funcional
— Identificación de familia de funciones a partir de la expresión funcional simplificada
— Evaluación de la función en otros puntos del dominio
— Discriminación entre dos gráficas, resuelta mediante comparación del signo evaluando en dos puntos opuestos, o de los dominios de definición

La siguiente tabla 2 muestra la clasificación de las respuestas de los 27 estudiantes a las 4 tareas correspondientes discriminando la adecuación de la gráfica elegida, por un lado, y la coherencia de la argumentación asociada, por otro. La coherencia se clasifica en tres niveles, *coherencia*, *coherencia de 2º Nivel* e *incoherencia*. El total de elementos clasificados son 4×27=108 respuestas.

Se observa, en general, que cerca de la mitad de producciones están asociadas a gráficas correctas, de las cuales, 24 se han argumentado de forma coherente, pero una parte relevante presenta una coherencia de 2º nivel (14 de 45), siendo únicamente 7 las argumentaciones incoherentes que podrían relacionarse por elección al azar o por criterio implícito de la gráfica correcta.

Tabla 2. *Distribución general de las respuestas de los estudiantes a las 4 tareas*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	24	14	7	45
Gráfica incorrecta	6	10	15	31
NS/NC				32
Total	30	24	22	N=108

En relación con la cantidad de elecciones de gráficas incorrectas (31 de 108), la mitad de argumentos son incoherentes. De igual forma, similar proporción hay de argumentos coherentes de 2.º Nivel al dejar la elección en dos alternativas, por tanto, el error incurrido en elegir la gráfica incorrecta puede atribuirse a criterios argumentativos no explicitados o elección arbitraria. Sin embargo, es relevante la presencia de un número reducido de argumentaciones coherentes que conducen a la elección de la gráfica incorrecta, más por errores en el cálculo del límite asociado o su dominio, que por la estructura lógica adoptada.

A continuación particularizamos el análisis al desempeño de los 27 escolares con cada tarea específica 1, 2, 3 y 4.

Análisis específico de la tarea 1

La tabla 3 muestra el desempeño de los participantes frente a la tarea 1, cuya gráfica asociada es la A.

Tabla 3. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 1*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	10	6	3	19
Gráfica incorrecta	2	0	4	6
NS/NC				2
Total	12	6	7	N=27

Se observa que un 70% de las elecciones son adecuadas, de las cuales poco más de la mitad de las argumentaciones asociadas son coherentes. Los argumentos presentan similar estructura (Discriminación de los límites laterales infinitos con cálculo previo del dominio, e incluso establecimiento previo de las alternativas A y D, cuyas funciones simplificadas en un entorno de $x = 2$ presentan el mismo tipo de indeterminación $\frac{\to K}{\to 0}$ antes de decantarse por la adecuada). Por otro lado, los argumentos de 2º Nivel simplemente no llegan a discriminar entre A y D, enfatizando únicamente la existencia de asíntota vertical, pero no hay evidencia explícita de discriminación de los límites laterales. Finalmente, la presencia mínima de argumentos incoherentes parten de un límite finito en $x = 2$ calculado erróneamente, lo cual es incompatible con las características de las gráficas A y D escogidas. Otros calculan únicamente el dominio, lo cual deja demasiado amplio el campo de elección, por lo que tal argumento es incoherente.

En relación con asignaciones de gráficas erróneas, el número de respuestas que presentan coherencia argumentativa se basan en errores en cuanto a la discriminación de los límites laterales, pero la inferencia lógica resultante es coherente.

Análisis específico de la tarea 2

La tabla 4 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 2, cuya gráfica asociada es la B.

Tabla 4. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 2*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	4	3	4	11
Gráfica incorrecta	3	1	8	12
NS/NC				4
Total	7	4	12	N=27

Se observa que cerca de la mitad de las elecciones gráficas son adecuadas, de las cuales únicamente 4 se sostienen en argumentaciones coherentes que presentan una misma estructura salvo pequeños matices (cálculo del dominio, reconocimiento de la familia funcional [no afín] y valor del límite finito en $x = 2$). Las argumentaciones coherentes de 2º Nivel restringen la elección, bien a las gráficas B y F (Porque identifican la simetría de ambas gráficas), o a las gráficas B y E (porque $x = –2$ pertenece al dominio) que no resuelven.

En relación con las asignaciones de gráficas incorrectas, destacamos que más de la mitad presentan argumentaciones incoherentes, que sostienen únicamente la condición de límite finito en $x = 2$ ({B, C, E, F}) o seleccionan D como la que tiene límite finito en $x = 2$, pero con asíntota vertical en dicho punto. También es relevante notar que hay estudiantes que sostienen que ninguna de las gráficas es válida con una argumentación basada en que el límite finito en $x = 2$ ha de ser alcanzable («Ninguna de las gráficas está definida en $x = 2$» es un ejemplo de afirmación relacionada).

Análisis específico de la tarea 3

La tabla 5 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 3.

Para la tarea 3, cuya gráfica asociada es la C, casi la mitad de las respuestas están asociadas a elecciones incorrectas de la gráfica. La mayor parte están ligadas a argumentos coherentes de 2º Nivel. Algunos alumnos, que utilizan este tipo de argumentos, identifican la familia funcional y restringen la elección a dos alternativas (C o E), pero no la resuelven satisfactoriamente. Otra variedad de argumentos del mismo tipo se basan en el cálculo del dominio y del límite finito en $x = 2$, y en consecuencia, restringen la elección a F o C.

Tabla 5. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 3*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	5	1	0	6
Gráfica incorrecta	2	6	3	11
NS/NC				10
Total	7	7	3	N=27

En relación con los argumentos asociados a la elección de la gráfica correcta, C, la mayor parte son coherentes y siguen la estructura: Determinación del dominio, valor del límite finito en $x = 2$ e identificación de la familia funcional (afín). Únicamente hay un argumento de 2.º Nivel, que restringe la elección a las gráficas C y E mediante el cálculo del límite en infinito, pero no hay evidencias explícitas de resolución de la disyuntiva.

Análisis específico de la tarea 4

La Tabla 6 resume el desempeño de los participantes frente a la tarea 4, cuya gráfica asociada es la D. Se observa que un tercio de las respuestas están asociadas a elecciones correctas de las gráficas. La mitad de ellas corresponde respectivamente a argumentos coherentes y coherentes de 2º Nivel. Los argumentos coherentes que sostienen la elección de D presentan una componente lógica común, discriminación de los límites laterales en $x = 2$ que, por sí misma, marca la diferencia entre las gráficas A y D, si bien, algunos argumentos previamente hacen un cálculo del dominio de definición lo cual es accesorio.

Tabla 6. *Distribución de las respuestas de los estudiantes a la tarea 4*

	Coherente	*Coherente 2.º Nivel*	*Incoherente*	*Total*
Gráfica correcta	4	4	1	9
Gráfica incorrecta	0	1	1	2
NS/NC				16
Total	4	5	2	N=27

Por otro lado, los argumentos coherentes de 2º Nivel únicamente afirman la existencia de una asíntota vertical en $x = 2$, que restringen, pero no resuelven, la elección entre las gráficas A y D.

En relación con las elecciones erróneas de gráficas, existen dos casos: el primero sostiene con un argumento incoherente que la gráfica D es la única que en $x = 0$ la función no se anula, posiblemente debido a un efecto visual de las gráficas A, C y E que aparentemente muestran un valor nulo en $x = 0$; el segundo muestra un argumento de 2º nivel que se basa en la existencia una asíntota vertical, pero no discrimina adecuadamente los límites laterales decantándose por la gráfica A.

Conclusiones

Se concluye que hay una ruptura patente entre el pensamiento algebraico y el analítico dado que algunos estudiantes, a pesar de calcular el límite adecuadamente, son incapaces de aislar la gráfica que representa globalmente la función, para lo cual se requieren procedimientos algebraicos (evaluación y cálculo del dominio); algunas de las dificultades subyacentes pueden coincidir con las señaladas por Ortega y Pecharromán (2014). Por otro lado, algunas argumentaciones son coherentes, incurriendo en error en el cálculo del límite o del dominio funcional, es decir, el error no afecta al esquema lógico-argumentativo empleado.

Referencias

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). México, DF: Grupo Editorial Iberoamericano.

Fernández-Plaza, J. A. (2015). *Significados escolares del concepto de límite finito de una función en un punto.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2006). Structure sense versus manipulation skills: An unexpected result. En J. Novotná, H. Maraová, M. Krátká y N. Stehlíkova (Eds.), *Proceedings of the 30th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 305-312). Praga, República Checa: Faculty of Education, Charles University in Prague.

Ortega, T. y Pecharromán, C. (2014). Errores de aprendizaje de las propiedades globales de las funciones. *Revista de Investigación en Educación, 12*(2), 209-221.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, *1*(1), 39-63.

Ruiz-Hidalgo, J. F. y Fernández-Plaza, J. A. (2013). Análisis de tareas de cálculo de límites en un punto en las que intervienen identidades notables. En L. Rico, M. C. Cañadas, J. Gutiérrez, M. Molina, y I. Segovia (Eds.), *Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 127-134). Granada, España: Editorial Comares.

Sánchez-Compaña, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: Fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M. y Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 575-586). Ciudad Real, España: SEIEM.

— (2012). Sentido estructural de estudiantes de bachillerato en tareas de simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables. *Relime, 15*(2), 233-258.

CONTRIBUCIONES HERMENÉUTICAS A LA INTERPRETACIÓN DE LA COMPRENSIÓN EN MATEMÁTICAS: EL LEGADO DE PAUL RICŒUR

Hermeneutical contributions to interpreting understanding in mathematics: the legacy of Paul Ricœur

Jesús Gallardo Romero
Universidad de Málaga

Resumen

En este trabajo teórico acudimos a la filosofía hermenéutica de Paul Ricœur y exploramos cómo sus contribuciones al debate hermenéutico contemporáneo proporcionan respuestas integradoras a distintos cuestionamientos principales que afectan a la interpretación de la comprensión en matemáticas. Las soluciones que se desprenden de sus planteamientos permiten vislumbrar un círculo interpretativo con el que acceder de forma operativa a la comprensión matemática de los estudiantes.

Palabras clave: comprensión en matemáticas, filosofía, hermenéutica, interpretación, Paul Ricœur.

Abstract

In this theoretical work we have studied the Paul Ricœur's hermeneutical philosophy and explored how his contributions to hermeneutical contemporary discussion provide integrative answers to different principal questions related to understanding in mathematics. Solutions are deduced by his ideas might establish an interpretative circle which allows access by an operative way to student's mathematical understanding.

Keywords: *hermeneutics, interpretation, Paul Ricœur, philosophy, understanding in mathematics.*

> «[…] la filosofía muere si se interrumpe su diálogo milenario con las ciencias, sean las ciencias matemáticas, las ciencias de la naturaleza o las ciencias humanas.»
>
> (Paul Ricœur, Autobiografía intelectual, 2007, p. 64)

De lo cognitivo a lo semiótico

¿Hasta qué punto es posible obtener información sobre la comprensión matemática que poseen los estudiantes? Toda actividad matemática está propiciada por, y es consecuencia de, acciones intelectuales que demandan unas exigencias cognitivas necesariamente vinculadas a la esfera mental de sus protagonistas. Y la comprensión en matemáticas, desarrollada de forma individual o colectiva, también comparte el carácter inmaterial e interno propio de las actividades intelectuales cognitivas específicas. Esta realidad impide por ahora considerar el acceso y la observación directa como opción metodológica para obtener información sobre la comprensión matemática de los estudiantes. De hecho, el estudio de la comprensión en matemáticas se ve afectado por el conocido *problema de las otras mentes* presente en la epistemología contemporánea (Dancy, 1993), pudiéndose ver como una concreción de éste en el ámbito particular de la Educación Matemática. En dicho problema se discute la posibilidad de aceptar algún tipo de vínculo entre el estado mental de un sujeto ajeno y el de su agente intérprete, así como de acceder a proposiciones sobre mentes distintas a la nuestra propia. En principio, no parece razonable adoptar una posición solipsista al respecto y sugerir como solución la renuncia a toda posibilidad de conocimiento acerca de la comprensión matemática que poseen los alumnos. ¿A qué podemos atenernos entonces o cómo hemos de afrontar esta problemática? En Educación Matemática, se reconocen los esfuerzos de la *orientación cognitiva* por superar esta situación al presentar la interpretación como un traslado hacia la esfera mental del estudiante, a la que pertenece su comprensión matemática, tomando como vía las distintas manifestaciones observables generadas durante su quehacer matemático (Barmby, Harries, Higgins y Suggate, 2007; Goldin, 2002). La interpretación en esta orientación persigue estrechar progresivamente la distancia entre las realidades interna y externa.

En los orígenes del debate hermenéutico general también estuvo presente esta problemática y a pesar de los intentos por dar consistencia a una interpretación dirigida a la reproducción de las experiencias vividas por el otro, se optó finalmente por una progresiva despsicologización, sobre todo como consecuencia de la tensión generada por la exigencia de cientificidad para esta opción interpretativa. Por aquel entonces, uno de los esfuerzos significativos para superar el problema del psiquismo basó su fundamentación en el respaldo proporcionado por la noción husserliana de *intencionalidad*. El argumento principal defendía que la intención de los actos del individuo, si bien es específica de la propia subjetividad, por cuanto se experimenta como tal exclusivamente en ella, también es comunicable y por ello proporciona uno de los rastros visibles de la comprensión (Husserl, 1982). La idea de una evidencia o manifestación externa asociada a la esfera interna de la comprensión se mantuvo vigente a través de justificaciones más recientes, como por ejemplo la variante propuesta por Habermas (1999) al discutir cómo las experiencias comunicativas se transforman en datos. Sobre este asunto, este autor sostiene que el intérprete accede a lo que quiere decir el sujeto ajeno sólo cuando penetra en las razones por las que sus emisiones o manifestaciones aparecen como racionales. Lo destacado aquí, en todo caso, es el interés mantenido y compartido por acceder a unas realidades cognitivas internas con ayuda de la observación de realizaciones sensibles objetivadas.

Ricœur, sin embargo, se muestra contrario a esta opción y propone abandonar el psicologismo en cualquiera de sus variantes. «Nada ha hecho más daño a la teoría de la comprensión que la identificación entre comprensión y comprensión del otro, como si se tratara siempre, en primer término, de aprehender una vida psicológica ajena detrás de un texto» (Ricœur, 2008, p. 87). La interpretación no ha de buscar su norma de inteligibilidad en la comprensión del otro sino que el objeto de la hermenéutica debe trasladarse, en un primer momento, de la vivencia expresada en el texto (*quien allí se pronuncia*) a su propio sentido (*lo que dice*). Distintas razones respaldan esta transición que pone en valor lo semiótico. En primer lugar, Ricœur (2002) reconoce la condición originariamente lingüística de toda experiencia humana (pp. 54-55). A partir del análisis de la metáfora poética, tomada como caso paradigmático, llega a concluir además que nuestras imágenes, aquellas que componen el material mental sobre el cual tallamos las ideas abstractas y los conceptos, no se derivan de la percepción sino del lenguaje. La configuración de imágenes (internas, mentales) queda, por tanto, ligada al lenguaje, lo cual justifica que éste deba ser *un* centro sobre el que dirigir la atención a la hora de interpretar. Por otra parte, lo experimentado por un individuo, así como el devenir de su pensamiento privado, no puede ser transferido íntegramente a otro sujeto. No obstante, aun así algo de esa experiencia privada sí que se transfiere y se hace público. Este algo constituye, en cuanto marca visible, la significación o sentido de la propia experiencia y es lo único a lo que puede acceder el intérprete externo (Ricœur, 2003a, p. 30). Finalmente, la textualización de la obra del autor, esto es, la fijación por la escritura de sus discursos y acciones, confiere al texto resultante una primera autonomía que lo hace distanciarse y trascender de la propia intención original del autor: «Lo que el texto significa ya no coincide más con lo que el autor quería decir; significación verbal y significación mental tienen destinos distintos» (Ricœur, 2008, p. 176). Detrás del texto no hay que buscar una intención oculta porque su sentido reside en la clausura de su organización interna.

Más allá de lo semiótico

La imposibilidad de observar directamente la naturaleza y el funcionamiento interno de la comprensión provoca el traslado al ámbito externo de la actividad matemática observable. El centro de atención se desplaza desde el estudiante cuya comprensión se quiere valorar hacia su propia producción matemática externa. Una inevitable transición desde lo interno a lo externo que también trae consigo como consecuencia un distanciamiento con el propio alumno. Las propuestas interpretativas que centran su atención en el propio registro escrito se ven afectadas por la cuestión de cómo recuperar el estatus cognitivo del alumno que comprende, cómo retornar de nuevo a su comprensión matemática, tras el distanciamiento inicial. El alejamiento resulta especialmente acentuado en el marco de la *orientación semiótica* de la interpretación en matemáticas, al apreciarse una clara renuncia al carácter mental de la comprensión. De hecho, no hay intención de contemplar el retorno como tal, dado que la interpretación se circunscribe exclusivamente al análisis de la complejidad de las relaciones semióticas externas desplegadas durante la actividad matemática visible, sin más intervención complementaria del propio estudiante en el proceso interpretativo de su comprensión (Otte, 2006; Sáenz-Ludlow y Zellweger, 2012). ¿Hemos de aceptar entonces una interpretación que transcurre exclusivamente en el entorno de lo semiótico o por el contrario podemos pensar en sortear sus limites? En principio, además de por la cuestión del retorno, sobre la que profundizaremos más adelante, la interpretación de la comprensión matemática no parece concluir solo con un análisis semiótico de la producciones de los estudiantes, puesto que la actividad matemática siempre conlleva acciones y usos que, por lo general, traspasan las fronteras del registro escrito literal (Bagni, 2009; Brown, 2001). En consecuencia, la primera transición de la interpretación desde la esfera cognitiva a la semiótica, cuya pertinencia hemos reconocido, podría constituir una fase sólida aunque también provisional dentro del proceso de interpretación de la comprensión en matemáticas. Planteamos en este punto la discusión sobre la conveniencia de seguir transitando hacia referencias externas situadas más allá de la propia expresión lingüística.

En el giro hermenéutico original promovido por Heidegger y Gadamer ya se deslegitimaba tanto el acceso a la actividad psicológica como el traslado exclusivo al ámbito lingüístico. Como alternativa en la interpretación, se propuso entonces desvincular la realidad del lenguaje del texto de la propia experiencia humana que subyace a él, para captar únicamente la pretensión de aquello que se transmite. Así, para comprender un texto, en el sentido de captar su *cosa* o mundo abierto por él, esto es, el tipo de mundo que la obra despliega de alguna manera delante del texto, se propuso como opción el *círculo hermenéutico*. La comprensión del texto no se produce de forma inmediata sino que requiere de una interpretación reiterada.

> El movimiento de la comprensión discurre así del todo a la parte y de nuevo al todo. La tarea es ampliar en círculos concéntricos la unidad del sentido comprendido. La confluencia de todos los detalles en el todo es el criterio para la rectitud de la comprensión. La falta de tal confluencia significa el fracaso de la comprensión. (Gadamer, 2000, p. 63)

Ricœur tomará de la ontología heideggeriana la mundanización de la comprensión, es decir, el desplazamiento de la pregunta por el otro (el *ser con*) a la pregunta por el mundo (el *ser en*), de la que derivará su atención a la *referencia* o denotación del texto.

> La primera función del comprender es orientarnos en una situación. El comprender no se dirige pues a la captación de un hecho, sino a la aprehensión de una posibilidad de ser. No deberemos perder de vista este punto cuando extraigamos las consecuencias metodológicas de este análisis: comprender un texto, diremos, no es encontrar un sentido inerte que allí estaría contenido; es desarrollar la posibilidad de ser indicada por el texto. Así seremos fieles al comprender heideggeriano que es esencialmente un proyectar. (Ricœur, 2002, p. 86)

De este modo, la interpretación no solo se traslada desde la vivencia expresada en el texto a su propio sentido en un primer momento, sino también a su referencia (*aquello sobre lo cual trata*) en una segunda transición. Primero se busca clarificar el lenguaje para después poder analizar mejor la experiencia; esto es, se pasa del análisis de los enunciados al análisis de la experiencia. Contraviniendo los principios de las posiciones semióticas puras, ahora se distingue entre sentido y referencia y se reconoce que la actividad simbólica carece de autonomía al estar ligada a una referencia extralingüística (Ricœur, 2008). Entre otras razones porque la concepción estructuralista de los sistemas semióticos, como sistemas autosuficientes, cerrados y sin relación alguna con la realidad externa, provoca que la interpretación se vea afectada por la paradoja de la buena traducción. Dentro de los límites del propio sistema semiótico, para comparar un texto de partida con el resultante de su traducción/interpretación, sería necesario un tercer texto portador del sentido del primero al segundo, el cual ya quedaría necesariamente fuera del sistema. Por tanto, la equivalencia de sentido tan solo podrá presuponerse, mejorarse o sustituirse por otra presuntamente mejor, pero no existirá un criterio absoluto de buena traducción/interpretación (Ricœur, 2005).

Así pues, el movimiento interpretativo desemboca en una comprensión crítica compleja que tiene como resultado la *apropiación* de la semántica profunda del texto, a saber, sus referencias no ostensivas o aquello sobre lo cual trata el texto.

> Comprender un texto es seguir su movimiento del sentido hacia la referencia, de lo que dice a aquello a lo cual se refiere. En este proceso, el papel mediador desempeñado por el análisis estructural constituye a la vez la justificación del enfoque objetivo y la rectificación del enfoque subjetivo. (Ricœur, 2002, p. 192)

Referencias al interpretar

Al interpretar la comprensión en matemáticas, ¿cabe más de una posibilidad en la búsqueda de referencias extralingüísticas? Transitar del sentido a la referencia trae consigo dos nuevas problemáticas relacionadas. La primera de ellas pone el acento sobre cuáles pueden ser estas referencias que traspasan el ámbito semiótico, dónde ubicarlas y cómo valorar su pertinencia. ¿Adónde remite o hacia dónde apunta el registro escrito producto de la actividad matemática (*texto matemático*) y depósito de los rastros de comprensión del estudiante? La segunda señala al estatus ontológico de los objetos matemáticos, puesto que, al trascender al texto, habríamos de aceptar una realidad ontológica para ellos más allá del signo. ¿Cuál sería esta realidad concreta? Los objetos matemáticos son «tal como» los modelos epistemológicos los describen, por lo que su existencia y realidad, así como su comprensión, dependen en última instancia de las visiones epistemológicas que los caracterizan (Michener, 1978). Entre las propuestas interpretativas en Educación Matemática que buscan superar el nominalismo propio de las posiciones semióticas puras se aprecian diferencias a la hora de situar la referencia y dotar de existencia a los objetos matemáticos. Por ejemplo, el enfoque representacional de la comprensión en matemáticas opta por posicionarse en la perspectiva no-realista del psicologismo y desde aquí promueve una transición directa a la realidad de las representaciones y conexiones internas del conocimiento matemático; es decir, se propone una existencia mental para los objetos matemáticos y una referencia apuntando al interior del sujeto. El enfoque ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, por su parte, sugiere adoptar una posición ficcionalista con referencia metafórica para explicar cómo emergen los objetos en las prácticas matemáticas (Font, Godino y Gallardo, 2013).

La hermenéutica Ricœuriana contribuye a esta discusión aportando, antes que nada, una razón ontológica que justifica la consideración de referencias que van más allá de lo semiótico.

> Apuntar de modo intencional hacia lo extralingüístico dependería de un mero postulado y seguiría siendo un salto cuestionable más allá del lenguaje, si esta exteriorización no fuera la contraparte de un movimiento previo y más originario, que tiene su comienzo en la experiencia de ser en el mundo y, a partir de esta condición ontológica, se dirige hacia su expresión en el lenguaje. Es porque primero hay algo que decir, porque tenemos una experiencia que traer al lenguaje, por lo que, a la inversa, el lenguaje no solamente se dirige hacia los sentidos ideales, sino que también se refiere a lo que es. (Ricœur, 2003a, p. 34)

En esencia, el hecho de que traslademos al lenguaje las experiencias que previamente adquirimos por estar en el mundo, justifica que el sentido del texto también apunte, de forma recíproca, a aquello original sobre lo cual trata. En el diálogo, la referencia se resuelve en la capacidad de los interlocutores de mostrar su realidad común, de designar de forma ostensiva y en conjunto la situación que comparten a través de juegos particulares de preguntas y respuestas contextualizadas. En el caso del texto, la referencia cambia con la fijación y autonomía de la escritura, situándose ahora en el mundo o realidad extralingüística que proyecta. Fijar esta última referencia no ostensiva será precisamente la tarea de la lectura como interpretación.

El retorno a la comprensión

La conexión última entre los rastros visibles del conocimiento, las producciones externas y los signos objetivados empleados por los estudiantes durante el desarrollo de sus prácticas matemáticas, por un lado, y la propia comprensión matemática como actividad intelectual específica de carácter interno, por otro, todavía requiere una última concreción. La cuestión es: ¿cómo recuperar el carácter cognitivo de la comprensión matemática si regresamos a ella con una interpretación sustentada en los registros externos del conocimiento matemático y en sus referencias extralingüísticas asociadas? Se busca recomponer la comprensión matemática que fue provisionalmente distanciada con anterioridad en la fase interpretativa correspondiente al paso de lo cognitivo a lo semiótico. Además de ello, la cuestión del retorno pone de relieve el modo de hacer partícipe al estudiante de la interpretación de su propia comprensión matemática. Podemos pensar en la posibilidad de configurar interpretaciones donde el distanciamiento con el estudiante sea transitorio, donde cobre mayor protagonismo la presencia y la participación del alumno en su proceso interpretativo y donde quede desestimado cualquier desequilibrio entre las partes intervinientes, en el sentido de alguna desigualdad manifiesta entre los protagonistas (estudiantes y agentes intérpretes de su comprensión) o pretensión de dominio o control sobre el alumno. De este modo, se garantizarían unas interpretaciones de la comprensión en matemáticas más inclusivas con los estudiantes (Brown, 2008).

En el ámbito hermenéutico se sugiere el intercambio discursivo entre participantes y el elemento común del consenso obtenido por ellos como añadido para respaldar la pertinencia de la interpretación (Gadamer, 2000). En términos estrictos, no nos bastamos solos para ver o decir algo sobre la comprensión del otro. Ricœur asume como propio este principio y lo concreta proponiendo como camino de la comprensión la reconstrucción conjunta y solidaria con el otro. Encuentra una justificación gnoseológica para el retorno en el distanciamiento inicial respecto al autor así como en la autonomía del propio texto. El retorno basado, no de la búsqueda de la intención del autor, sino en una apropiación de la intención pública o externa del texto.

> La apropiación es la respuesta a este doble distanciamiento unido a la cosa del texto, en su sentido y en su referencia. De este modo, la apropiación es un momento de la teoría de la interpretación, que no reintroduce nunca de manera fraudulenta la primacía de la subjetividad que ya habíamos considerado suprimida. (Ricœur, 2002, p. 53)

En el momento en que el texto se eleva a la ficción que resulta de trascender a lo puramente semiótico, se hace necesario redescribir la realidad. Propone entonces un retorno a través de la redescripción, recontextualización y recomposición de la comprensión, haciendo intervenir para ello de forma conjunta y activa al propio sujeto depositario de esta comprensión. Se reivindica así la necesaria participación y el protagonismo del otro en los procesos interpretativos de su propia comprensión, que tan solo podrán garantizar una reconstrucción de la misma (Ricœur, 2003a). La tarea hermenéutica involucrada en esta fase no es psicologizante, en el sentido de pretender comprender al otro mejor de lo que él se comprende a sí mismo. Por el contrario, esta tarea consistirá en reconstruir el doble trabajo del texto: (a) buscar la dinámica interna que rige su estructura y (b) determinar la cosa o el mundo externo (referencias no ostensivas) sobre el que se proyecta más allá del ámbito semiótico (Ricœur, 2002, p. 34). La interpretación encuentra su razón de ser en el vínculo complejo entre la coherencia narrativa de la reconstrucción de la comprensión que realiza el agente intérprete y su conformidad con los productos (textos y acciones) evidenciados y ofrecidos por el autor. Al mismo tiempo, el distanciamiento previo que motiva esa reconstrucción garantiza la objetividad de la interpretación. La renuncia a buscar la intención subjetiva del autor, la fijación del sentido en lo escrito, la autonomía del texto, la consideración de referencias no ostensivas y la variedad de los destinatarios del texto, son los rasgos principales que tomados en conjunto confieren objetividad a la interpretación. Adicionalmente, la intersubjetividad propia de la fase de retorno a la comprensión contribuye de manera complementaria a caracterizar esta objetividad. Aunque la adecuación de la interpretación descansará en el mejor de los casos en la plausibilidad de los juicios realizados (Ricœur, 2012, p. 55). Por otra parte, el distanciamiento reflejado en los rasgos anteriores también trae consigo la posibilidad de interpretar de múltiples maneras. De hecho, se abre una pluralidad de opciones interpretativas donde el papel de la falsación lo desempeña el conflicto entre interpretaciones rivales (Ricœur, 2003b). La validación de una interpretación concreta se sustentará en la lógica de la incertidumbre y de la probabilidad cualitativa más que en la verificación empírica: una interpretación habrá de ser no sólo probable, sino también más probable que otra (Ricœur, 2002, p. 186). En cualquier caso y en definitiva, en el acto final de la interpretación se vuelve a la subjetividad del autor original solo a través de la apropiación del mundo del texto producido por él. Esta apropiación es la contrapartida del distanciamiento y, por hacer propio lo ajeno, conlleva un efecto transformador en quien realiza la interpretación. En última instancia, comprender será quedar transformado por la apropiación de la faceta pública de la intención del texto que cobra sentido en la situación de interacción e interlocución con el otro al mencionar éste lo que hace o experimenta (Ricœur, 1981).

A modo de epílogo

La figura de Moisés Coriat encarna los valores del pensamiento fronterizo fecundo que transita por los ámbitos del saber en busca del conocimiento profundo de la realidad (Wagensberg, 2014). Inspirándome en el espíritu interdisciplinario que caracterizó su actividad investigadora, en este estudio me he aproximado a los márgenes de la filosofía hermenéutica de Paul Ricœur buscando respuestas a cuestionamientos relevantes que afectan a la interpretación de la comprensión en matemáticas. Suelo acudir con regularidad a la filosofía con la intención de apreciar de una mejor forma la contribución que realiza el conocimiento generado en ella sobre los problemas de investigación específicos tratados en Educación Matemática. Siempre estaré agradecido al profesor Coriat por mostrarme el modo de atravesar esta frontera sin sentirme intruso al otro lado.

Referencias bibliográficas

Bagni, G. T. (2009). Mathematics and positive sciences: a reflection following Heidegger. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 75-85.

Barmby, P., Harries, T., Higgins, S. y Suggate, J. (2007). How can we assess mathematical understanding? En J. H. Woo, H. C. Lew, K. S. Park y D. Y. Seo (Eds.), *Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 41-48). Seul, Corea del Sur: PME.

Brown, T. (2001). *Mathematics education and language. Interpreting hermeneutics and post-structuralism*. Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

— (2008, Octubre). Making mathematics inclusive: interpreting the meaning of classroom activity. *Philosophy of Mathematics Education Journal, 23*. Recuperado de http://people.exeter.ac.uk/PErnest/pome23/index.htm

Dancy, J. (1993). *Introducción a la epistemología contemporánea.* Madrid, España: Tecnos.

Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*(1), 97-124.

Gadamer, H. G. (2000). *Verdad y Método II*. Salamanca, España: Sígueme.

Goldin, G. (2002). Representation in mathematical learning and problem solving. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in Mathematics Education* (pp. 197-218). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Habermas, J. (1999). *Teoría de la acción comunicativa I*. Madrid, España: Taurus.

Husserl, E. (1982). *La idea de la fenomenología*. Mexico DF, México: Fondo de Cultura Económica.

Michener, E. R. (1978). Understanding understanding mathematics. *Cognitive Science*, *2*(4), 361-383.

Otte, M. (2006). Proof and explanation from a semiotic point of view. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa RELIME*, *9*(4), 23-43.

Ricœur, P. (1981). *El discurso de la acción*. Madrid, España: Ediciones Cátedra.

— (2002). *Del texto a la acción*. México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

— (2003a). *Teoría de la interpretación: discurso y excedente de sentido*. México DF, México: Siglo XXI Editores-Universidad Iberoamericana.

— (2003b). *El conflicto de las interpretaciones*. México DF, México: Fondo de Cultura Económica.

— (2005). *Sobre la traducción*. Buenos Aires, Argentina: Paidós.

— (2007). *Autobiografía intelectual*. Buenos Aires, Argentina: Nueva Visión.

— (2008). *Hermenéutica y acción: de la hermenéutica del texto a la hermenéutica de la acción*. Buenos Aires, Argentina: Prometeo Libros.

— (2012). *Escritos y conferencias 2: Hermenéutica*. México DF, México: Siglo XXI.

Sáenz-Ludlow, A. y Zellweger, S. (2012). The teaching-learning of mathematics as a double process of intra- and inter-interpretation: A peircean perspective. En S. J. Cho (Ed.), *The 12th International Congress on Mathematical Education ICME* (pp. 3117-3126). Seul, Korea: ICME.

Wagensberg, J. (2014). *El pensador intruso*. Barcelona, España: Booket.

SOLUCIÓN DE LA PARADOJA DEL VINO Y EL AGUA (2015)

Solution of the paradox of wine and water (2015)

Moisés Coriat Benarroch[a] y Emilio Genaro Belmonte[b]
[a]Universidad de Granada
[b]I.E.S. «Zaidín-Vergeles», Granada

Resumen

Presentamos una solución geométrica de la paradoja del vino y el agua, tal y como ha sido planteada por Mikkelson (2004). Nuestro enfoque permite explicar diferentes soluciones presentadas por este autor y otras surgidas posteriormente. Como conclusión, entendemos que el enunciado no genera una paradoja, sino el planteamiento de nuevos problemas al ser añadida cierta condición al problema inicial. En este trabajo usamos la probabilidad geométrica para exhibir sucesos equiprobables y manejar el Principio de Indiferencia [1]sin inconvenientes.

Palabras clave: paradoja vino y agua, principio de indiferencia, probabilidad geométrica.

Abstract

We present a geometric solution of the paradox of wine and water, as has been raised by Mikkelson (2004). Our approach allows us to explain different solutions presented by this author and others emerged later. In conclusion, we understand that the statement does not generate a paradox, but the approach of new problems when added certain condition to the initial problem. In this paper we use the geometric probability for displaying equiprobable events and handle the Principle of Indifference [5] without drawbacks.

Keywords: *geometric probability, paradox wine and water, principle of indifference.*

[1] El principio de indiferencia (también llamado principio de razón suficiente) es una regla para asignar probabilidades epistémicas. «Si hay n, (n>1) posibilidades mutuamente excluyentes y colectivamente exhaustivas y si las posibilidades son indistinguibles salvo por sus nombres, entonces a cada posibilidad se debe asignar una probabilidad igual a 1/n».

Introducción

Un artículo de Mikkelson (2004) sobre la paradoja del vino y el agua generó muchas discusiones y dudas entre los autores. El presente trabajo presenta un resumen de tales discusiones.

En el apartado 1, abordamos el problema y criticamos la filosofía subyacente en varias soluciones, indicando en qué consiste un enfoque adecuado. Básicamente, concluimos que las diferentes soluciones no son soluciones alternativas del mismo problema, sino soluciones correctas de problemas diferentes al añadir una condición nueva al inicial y consecuentemente nunca ha existido tal paradoja.

En el apartado 2, presentamos una representación geométrica de la paradoja del vino y el agua. Analizamos diferentes respuestas, leídas en Mikkelson (2004) u obtenidas de éstas, e indicamos las fortalezas y debilidades de cada una (apartado 3). Después de tal estudio, aportamos una respuesta a la pregunta planteada por la paradoja (apartado 4).

El apartado 5 presenta una discusión del trabajo expuesto y concluye con el carácter diferencial de cada problema (en lugar de paradójico) y la solución del problema general sin condiciones añadidas.

Planteamiento del problema

Comenzamos usando el enunciado dado por Mikkelson (2004, p. 139) a la paradoja del vino y el agua.

> There is a certain quantity of liquid. All that we know about the liquid is that it is composed entirely of wine and water, and that the ratio of wine to water (x) is between 1/3 and 3. So 1/3 < x < 3. Now, what is the probability that the ratio of wine to water is less than or equal to 2 (i.e., that x < 2)?

La primera frase («There is a certain quantity of liquid») debe ser tomada como un recurso de estilo, destinado a presentar el problema. En nuestra opinión, no implica un dato oculto, es decir, una desconocida cantidad de líquido que puede suponerse dada, sino una redundancia destinada a entrar en materia. Con la omisión de la primera frase («There is a certain quantity of liquid») creemos dar una solución más general e independiente del contenido total de la vasija.

Mikkelson presenta 3 soluciones y establece la inviabilidad de dos de ellas. En las dos primeras respuestas, las variables usadas son, sucesivamente, x, y $1/x$, donde x es la proporción del vino respecto al agua. En la tercera respuesta, Mikkelson utiliza como variable de estudio la cantidad de líquido de la mezcla. Proclama las ventajas de usar cantidades de vino y agua en lugar de las correspondientes proporciones. Entendemos que esta sugerencia es esencial.

Las variables que se usen deben servir, para encontrar subconjuntos equiprobables, en los que el uso del Principio de Indiferencia no resulte problemático. En este sentido, el uso de cantidades de líquidos resulta mucho más poderoso, como veremos enseguida, porque el conocimiento de las cantidades permite deducir valores de proporciones y porque, en el «espacio de cantidades», las proporciones se describen cómodamente.

Representación geométrica

Requisitos de una representación

Al usar una representación geométrica para comprender y, deseablemente, resolver un problema, es necesario prestar atención a varios asuntos:

(a) Si se quiere usar una representación geométrica carente de redundancias, es conveniente usar la menor dimensión geométrica posible. En nuestro caso, quien se decida a mezclar agua y vino dispone de dos cantidades independientes, por eso elegimos un espacio bidimensional, el plano.

(b) Después de elegir la dimensión, hay que precisar las variables que se van a considerar, así como las diferentes representaciones geométricas que se pueden obtener con ellas. Desarrollamos la idea propuesta por Mikkelson (2004), y elegimos las cantidades de vino y de agua que intervienen en todas las mezclas posibles.

(c) Conviene establecer subconjuntos equiprobables. Proponemos apelar a razonamientos no probabilísticos para afirmar la equiprobabilidad, porque con ello se evitan los inconvenientes asociados con las variadas posibilidades asociadas al Principio de Indiferencia, inconvenientes mencionados por Mikkelson (2004). Nosotros hemos usado razonamientos geométricos con longitudes de segmentos, medidas de áreas de regiones planas y medidas de ángulos-arcos, para reconocer sucesos a los que cabe asignar la misma probabilidad.

(d) Para establecer probabilidades geométricas, usamos medidas (de longitudes, áreas o ángulos-arcos). En estos casos, los subconjuntos de medida nula no son pertinentes; por eso, en este trabajo, no serán pertinentes los extremos de los segmentos, los bordes de las regiones planas acotadas ni los «lados y arcos» de las regiones angulares.

(e) Una representación geométrica tiene, en principio, el inconveniente de que no es única. Hemos estudiado los resultados en dos representaciones planas diferentes; suponemos que son coherentes con cualesquiera otras representaciones del problema, y que en otras representaciones surgirán dificultades análogas a las que describimos aquí. Sin embargo, no hemos realizado ningún estudio más allá de las dos representaciones planas mencionadas.

(f) Debido a que las cantidades de vino y agua son, por hipótesis, números reales positivos, calcularemos probabilidades en un espacio de infinitos sucesos puntuales, donde la probabilidad de un suceso puntual dado es nula. De algún modo, al establecer los sucesos equiprobables, nos acercamos a los métodos probabilísticos tradicionales.

Representación geométrica para estudiar la paradoja del vino y el agua

Las cantidades de agua y vino, expresadas en la misma unidad de volumen, se sitúan en el cuadrante positivo de un plano coordenado; usamos el eje de abscisas (X) para la cantidad de agua y el de ordenadas (Y) para la de vino. (Si se eligiera la otra permutación, se obtendría una representación simétrica, que se deduce de la nuestra.)

El origen de coordenadas representa un recipiente vacío. Cualquier punto del eje X ($x>0$) representa un recipiente con una cantidad de agua (sin vino), cualquier punto del eje Y ($y>0$) representa un recipiente con una cantidad de vino (sin agua), y cualquier punto M (x, y), $x>0$, $y>0$, representa una mezcla de x litros de agua e y litros de vino. La suma $x+y$, representa la cantidad de líquido que hay en la mezcla.

Cada semirrecta que pasa por el origen es el lugar geométrico de las mezclas de vino y agua que tienen la misma proporción de vino y agua. La pendiente de la semirrecta que pasa por M y por el origen de coordenadas es y/x, indica la proporción de cantidades de vino y agua.

Los datos básicos de la paradoja del vino/agua se representan mediante tres semirrectas, *r, s* y *t,* que describimos a continuación (ver Figura 1):

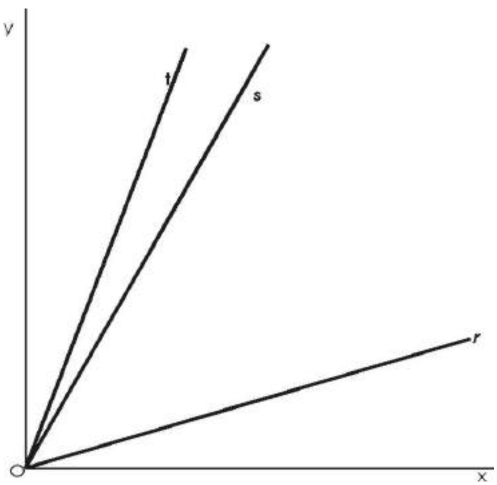


Figura 1

Para representar el lugar geométrico de las mezclas asociadas a la proporción mínima dada ($y/x=1/3$), usamos r, de ecuación $y=x/3$.

Para representar el lugar geométrico de las mezclas asociadas a la proporción máxima posible ($y/x=3$), usamos t, de ecuación $y=3x$.

Para representar el lugar geométrico de las mezclas asociadas a la proporción máxima deseada ($y/x=2$), usamos s, de ecuación $y=2x$.

La representación utiliza sólo puntos del primer cuadrante. Cuando se manejan sólo números positivos, las pendientes (y/x, $x>0$) y los ángulos asociados están en correspondencia uno a uno.

Valoración respuestas conocidas

Soluciones en el plano

La representación geométrica que hemos introducido permitirá responder a las preguntas: ¿Manejamos sucesos equiprobables?, ¿cuáles son los sucesos posibles?, ¿cuáles son los sucesos favorables?

Los sucesos puntuales se corresponden con los puntos del cuadrante elegido; cada punto, como subconjunto de una recta o de un plano, tiene probabilidad nula; las probabilidades se asignan a segmentos y a regiones planas acotadas.

Presentamos a continuación los tres resultados incluidos en Mikkelson (2004) y otros tres resultados asociados respectivamente a cada uno.

Si se supone conocida la cantidad exacta de agua (caso1) (Ver Figura 2 con la recta $x=x_0$)

Suponer conocida la cantidad de agua de la mezcla equivale a elegir, en el eje X, un punto de abscisa x_0 y determinar las probabilidades sobre la recta de ecuación $x=x_0$, paralela al eje de ordenadas que intercepta r, s y t en los puntos $R_1(x_0, x_0/3)$, $S_1(x_0, 2x_0)$ y $T_1(x_0, 3x_0)$, respectivamente.

La «distancia» entre R_1 y S_1 es $5x_0/3$, mientras que la «distancia» entre R_1 y T_1 es $8x_0/3$. Así, conocida la cantidad de agua, la probabilidad de que la proporción de vino esté comprendida entre 1/3 y 2 se calcula como el cociente de las longitudes de los segmentos R_1S_1 y R_1T_1: $(5x_0/3)/(8x_0/3)$. El resultado es 5/8, y coincide con el primer resultado dado por Mikkelson.

Si se supone conocida la cantidad máxima de agua (caso2) (Ver Figura 2 con la recta $x=x_0$)

El triángulo OR_1S_1 se interpreta cómodamente como el conjunto de las mezclas deseables para las cuales la proporción del vino al agua es inferior o igual a 2. Y el triángulo OR_1T_1 como el conjunto de mezclas posibles para las cuales el volumen de agua es inferior o igual a x_0. El cociente de sus áreas será la probabilidad buscada.

El área de OR_1S_1 y de OR_1T_1 se obtiene fácilmente como diferencia de áreas de dos triángulos rectángulos todos de base x_0 y alturas respectivas $3x_0$, $2x_0$, $1/3x_0$. Deduciendo el cociente de áreas será: $(2-1/3)/(3-1/3) = 5/8$. Resultado equivalente al caso anterior.

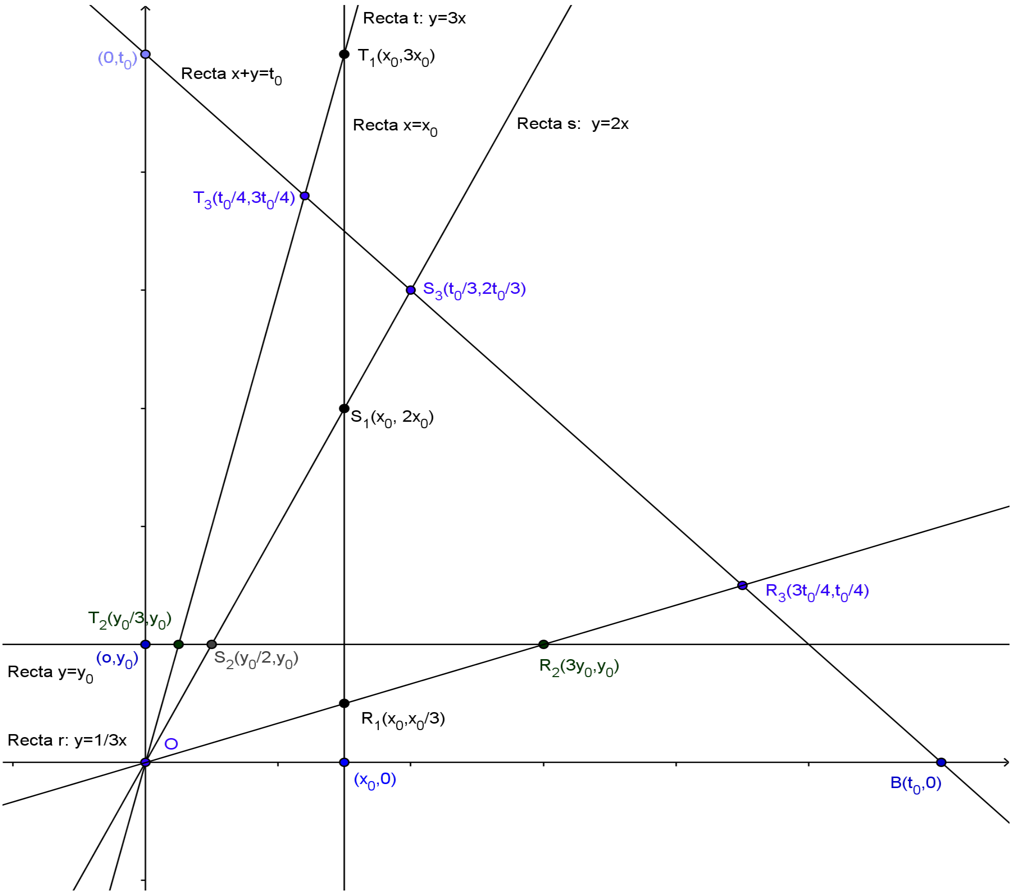


Figura 2. *Gráficas de soluciones en el plano*

Si se supone conocida la cantidad exacta de vino (caso3) (Ver Figura 2 con la recta $y=y_0$)

Suponer conocida la cantidad de vino de la mezcla equivale a elegir, en el eje y, un punto de ordenada y_0 y determinar las probabilidades sobre la recta de ecuación $y=y_0$, paralela al eje de abscisas que intercepta *r, s* y *t* en los puntos $R_2(3y_0, y_0)$, $S_2(y_0/2, y_0)$ y $T_2(y_0/3, y_0)$, respectivamente. Los casos favorables se hallan en el segmento R_2S_2 y los casos posibles en el segmento R_2T_2.

La «distancia» entre R_2 y S_2 es $5y_0/2$, mientras que la «distancia» entre R_2 y T_2 es $8y_0/3$. Supuesto que sea conocida la cantidad de vino, la probabilidad de que la proporción de vino al agua esté comprendida entre 1/3 y 2 se calcula como un cociente de distancias: $(5y_0/2)/(8y_0/3) = 15/16$, que coincide con el segundo resultado dado por Mikkelson.

Si se conoce la cantidad máxima de vino (caso4) (Ver Figura 2 con la recta $y=y_0$)

Las áreas de OR_2S_2 y OR_2T2 se obtienen también como diferencia de áreas de dos triángulos rectángulos: $(3/2-1/4)\ (y_0)^2$ e $(3/2-1/6)\ (y_0)^2$; conocida la cantidad de vino, la probabilidad es su cociente = [(3/2-1/4)] / [(3/2-1/6)] = 15/16. Resultado equivalente al caso anterior.

Si se supone conocida la cantidad exacta de mezcla (caso5) (Ver Figura 2 con la recta $x+y=t_0$)

Sea t_0 la cantidad de mezcla y determinaremos las probabilidades sobre la recta de ecuación $x+y=t_0$ que intercepta a las rectas r, s y t en los puntos R_3 $(3\ t_0/4,\ t_0/4)$, S_3 $(t_0/3,\ 2\ t_0/3)$ y T_3 $(t_0/4,\ 3\ t_0/4)$.

La «distancia» entre R_3 y S_3 es $t_0(5\sqrt{2}\ /12)$, mientras que la «distancia» entre R_3 y T_3 es $t_0(\sqrt{2}/2)$. Supuesto que sea conocida cantidad de mezcla, la probabilidad de que la proporción de vino esté comprendida entre 1/3 y 2 se calcula como el cociente de distancias: $(5\sqrt{2}/12)$ / $(\sqrt{2}/2)$. El resultado es 5/6, y coincide con el tercer caso dado por Mikkelson.

Si se supone conocida la cantidad máxima de mezcla (caso6) (Ver Figura 2 con la recta $x+y=t_0$)

Las áreas de OR_3S_3 y OR_3T_3 se obtienen restando áreas de triángulos con base OB (de valor t_0) y vértices en S_3__R_3 y T_3__R_3, respectivamente obteniendo: $(5/24)t_0^2$ y $(1/4)t_0^2$; conocida cantidad de mezcla, la probabilidad es su cociente: 5/6. Resultado equivalente al caso anterior.

FORTALEZAS Y DEBILIDADES DE CADA RESULTADO

A cada uno de los seis casos estudiados corresponde una probabilidad que es independiente del valor concreto usado para obtenerla (x_0, y_0 ó t_0, respectivamente). Sea cual sea la cantidad de líquido dado (de agua, de vino o de mezcla), las probabilidades obtenidas no dependen, en los diferentes ejemplos, de esas cantidades. Por eso, podemos afirmar que obtenemos probabilidades volumen-invariantes.

Si se acepta la interpretación que hemos dado, desde el punto de vista de los resultados no hay realmente paradoja alguna. Hemos estudiado 6 problemas diferentes, en los que se mantiene una cierta información (dada en el enunciado de la paradoja), pero, en cada caso, hemos añadido una condición suplementaria, que ha permitido identificar y resolver problemas diferentes. Al tener 6 condiciones suplementarias diferentes, parece sensato aceptar que también tengamos 6 respuestas diferentes, como indica la Tabla 1.

Tabla 1. *Datos comunes*

	Condición añadida a los datos	Caso	Resultado
	Volumen exacto de agua	1	5/8 = 30/48 = 0,6250
	Volumen máximo de agua posible	2	
1/3 <= proporción deseable <= 2	Volumen exacto de vino	3	15/16 = 45/48 = 0,9375
1/3 <= proporción posible <= 3	Volumen máximo de vino posible	4	
	Volumen exacto de la mezcla	5	5/6 = 40/48 = 0,8333…
	Volumen máximo de la mezcla	6	

Los 6 resultados son invariantes ante el cambio de dimensión, es decir al pasar de un segmento (longitud) a un triángulo (área), las probabilidades se mantienen sin cambio.

En las seis soluciones anteriores, es posible definir sucesos equiprobables, de manera que el Principio de Indiferencia no genere perturbación alguna. En resumen, la principal debilidad de todas las soluciones presentadas reside en el hecho de que introducen en el enunciado de la paradoja una condición suplementaria (ver Tabla 1). En la práctica, nos sentimos autorizados a decir que tenemos soluciones correctas de seis problemas diferentes; en este caso, es correcto decir que no había paradoja, pero aún no hemos resuelto el problema enunciado al comienzo del apartado 1.

Solución definitiva de la paradoja del vino y el agua

En este apartado asignamos probabilidades a regiones no acotadas del plano.

En la Figura 3, consideramos los ángulos rOs y rOt, de medidas respectivas, α y β rad. Seleccionar una semirrecta, significa seleccionar el lugar geométrico de todas las mezclas con la misma proporción de vino y agua. Los ángulos son la variable más adecuada para describir el fenómeno considerado, dado que a cada ángulo le corresponde una y sólo una semirrecta.

Todos los ángulos congruentes con vértice en el origen de coordenadas se definen como equiprobables (Figura 3). Por tanto, la aplicación del principio de indiferencia es inmediata. Los sucesos favorables quedan englobados en la región angular de medida α rad y los sucesos posibles corresponden a la región angular de medida β rad.

Obtenemos una respuesta general al problema enunciado, sin condiciones añadidas, proponiendo el cociente de las medidas de los ángulos mencionados:

$\alpha/\beta = (\tan^{-1}(2)-\tan^{-1}(1/3)) / (\tan^{-1}(3)-\tan^{-1}(1/3)) = 0{,}846977476159143\ldots \approx 0.8470$

Dos ángulos congruentes tienen la misma medida.

Las correspondientes regiones angulares del plano son superponibles.

Asociamos la misma probabilidad a los ángulos congruentes incluidos en rOt.

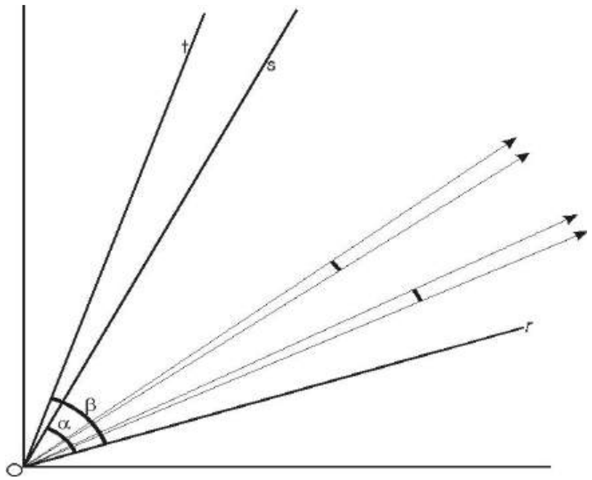


Figura 3. *Gráficas de la solución definitiva*

Discusión y conclusión

Hemos calculado exclusivamente probabilidades a priori, en el sentido de Popper (1959). De los 7 resultados expuestos, el último se distingue de todos los demás por el uso que hace de regiones no acotadas para calcular probabilidades. Frente a esta novedad, la solución que proponemos tiene la ventaja de considerar, a través de las semirrectas de origen O, todas las proporciones vino/agua incluidas en el enunciado.

Hay un modo de evitar el uso de regiones no acotadas: consideremos arcos de circunferencia de centro O y radio arbitrario; calculamos la probabilidad correspondiente (α/β) y extendemos el cálculo a sectores circulares asociados; finalmente observamos la invarianza del volumen y de la dimensión.

Se deduce que la probabilidad no varía si tomamos la medida de probabilidad sobre las áreas de los sectores correspondientes independientemente del radio de la circunferencia elegida, dado que, en ambos casos, estos son proporcionales a los ángulos que definen cada sector, (aunque incluya como condición el radio de la circunferencia). Asimismo se puede proceder sobre los arcos de circunferencia asociados llegando a la misma conclusión.

La razón final de nuestra solución reside en que, al cuestionar sobre probabilidades de las razones de vino/agua, lo correcto es calcular sobre dichas razones que son las pendientes de las posibles rectas mencionadas y la distribución de estas pendientes se realiza en el arco de circunferencia desde pendiente 1/3 a pendiente 3, por tanto conviene considerar las distribución de los valores de dichos ángulos como representantes de cada pendiente y a su vez de cada elección de vino/agua, sin la imposición de ninguna condición adicional.

El uso de condiciones añadidas impide responder a la pregunta en su plena generalidad que exige asignar probabilidades a regiones no acotadas. Así, añadiendo condiciones, en lugar de a una «paradoja», nos enfrentamos a «problemas diferentes», para salir del impasse hemos optado por la segunda posibilidad y dar la solución general al problema:

$$P = \alpha / \beta = (\tan^{-1}(2) - \tan^{-1}(1/3)) / (\tan^{-1}(3) - \tan^{-1}(1/3)) = 0{,}846977476159143\ldots \approx 0.8470$$

Referencias

BUROCK, M. (2005). Indifference, sample space, and the wine/water paradox. http://philsci-archive.pitt.edu/2487/1/Indifference_new_...Burock_2005.pdf

DEAKIN, M. A. B. 2006: The wine/water paradox: Background, provenance and proposed resolutions. http://www.austms.org.au/Gazette/2006/Jul06/mdeakin.pdf

MIKKELSON, J. M. (2004). Dissolving wine/water paradox. http://www.joelvelasco.net/teaching/3865/mikkelson%2004%20-%20dissolving%20wine%20water.pdf

POPPER, K. (1959). La lógica de la investigación científica. Madrid, España: Tecnos.

INNOVACIÓN CURRICULAR E INVESTIGACIÓN EN EL AULA DE MATEMÁTICAS[1]

Curricular Innovation and Research in Mathematics Classroom

José Luis González Marí
Universidad de Málaga

Resumen

La investigación en Educación Matemática no influye de manera significativa en la práctica docente en el aula ordinaria. Para que eso ocurra, la investigación debe orientarse a la innovación curricular, involucrando a los profesores responsables y analizando los fenómenos «allí donde se producen y tal y como se producen»[2]. Con este propósito hemos construido un modelo de investigación y lo hemos puesto a prueba en el desarrollo de las asignaturas de Matemáticas de distintos niveles educativos. Cada profesor desarrolla el estudio en su grupo asesorado por un especialista y colabora en los demás grupos como observador y ayudante; se emplean protocolos de enseñanza en grupos experimental y control, protocolos de observación, pruebas objetivas, encuestas y entrevistas individuales para evidenciar la viabilidad de las modificaciones propuestas.

Palabras clave: aprendizaje situado, experimentos de enseñanza, formación de profesores, innovación curricular, investigación en la acción, métodos de investigación.

Abstract

Research in mathematics education does not influence significantly on the ordinary mathematics clasrooms. For this purpose, research should be directed to curricular innovation, involving teachers and analyzing phenomena "wherever they occur and as they occur". To do this we have built a research model and put it to work in the development of the subjects of mathematics of different educational levels. Each teacher develops the study in his/her group advised by a specialist and collaborates with other groups as observer and assistant; protocols of experimental and control teaching, observation protocols, objective tests, surveys and individual interviews are used to demonstrate the feasibility of the proposed modifications.

Keywords: *colaborative action research, curricular innovation, mixed methods, research methods, situated learning, teacher training, teaching experiments.*

[1] A la memoria de Moisés Coriat, que tenía un especial interés sobre este tema.

[2] Con este enfoque se han desarrollado investigaciones en Educación Matemática con la participación de profesores de las Áreas de Conocimiento Didáctica de la Matemática y Matemática Aplicada de la Universidad de Málaga.

Introducción

Desde un punto de vista general estamos de acuerdo con Schoenfeld (2000, pp. 641-642) en que «La investigación en Educación Matemática tiene dos propósitos principales, uno puro y otro aplicado: (a) puro (ciencia básica): comprender la naturaleza del pensamiento matemático, su enseñanza y aprendizaje; (b) aplicado (ingeniería): utilizar la comprensión anterior para mejorar la instrucción matemática». Sin embargo, la mayoría de los estudios se han ocupado durante mucho tiempo en averiguar «lo que funciona» (Harel, 2006, p. 58) en condiciones de laboratorio[3], a diferencia de los experimentos de enseñanza (Steffe y Thompson, 2000)*, que* «… se dirigen a cuestiones que tienen que ver con el desarrollo del conocimiento matemático en situaciones auténticas[4] en el aula» (Harel, 2006, p. 58; Lester, 2005).

Los motivos por los que «*la investigación didáctica no llega a las aulas*» (Becerra, 2012, p. 63) son múltiples: 1) los resultados no son aplicables directamente por ser puntuales y haber sido analizados fuera del contexto real o en condiciones artificiales, 2) los profesores no intervienen, desconocen los avances o desconfían de su utilidad y no modifican sus hábitos docentes, 3) las condiciones reales y la inercia de los procesos usuales, 4) los resultados de las investigaciones no son lo suficientemente robustos y contrastados, 5) el descrédito de la teoría y la investigación didáctica, 6) la innovación no suele estar fundada científicamente y es de difícil reproducción.

Ante esta situación, hay tendencias que tratan de conjugar investigación pura y aplicada e innovación curricular durante el proceso didáctico «ordinario». Tal es el caso de la tendencia denominada *Investigación para la Innovación* (Arzarello, 1999; Bartolini, 1998) o la conocida como *Design Research* (Kelly, Lesh y Baek*,* 2008), que intentan superar los inconvenientes mediante la adaptación, el respeto a los procesos «naturales», la máxima operatividad con la mínima distorsión y la máxima concreción y claridad.

El problema que se plantea es, por tanto, de carácter metodológico, pero también involucra a los fundamentos de la investigación en Educación Matemática en lo que concierne a su operatividad y alcance, a las condiciones de su desarrollo y a su potencialidad innovadora.

Investigación e innovación en educación matemática: antecedentes y fundamentos teóricos

La investigación en el aula de matemáticas con fines innovadores se ha tratado hasta ahora desde diversos puntos de vista. Veamos brevemente los principales enfoques.

[3] Condiciones parcialmente controladas que crean una realidad diferente de la que se pretende simular.

[4] Desarrollos didácticos usuales en el aula ordinaria de matemáticas (nota del autor).

Investigación curricular en Educación Matemática

Una parte de las investigaciones en Educación Matemática relacionadas con la innovación está vinculada al diseño y el desarrollo curriculares, entendiendo por currículo de Matemáticas al conjunto de actividades dirigidas a la planificación de una formación (Tyler, 1986) dentro de un modelo integral sistémico y de acuerdo con un esquema de componentes y dimensiones que propone Rico (1998, pp. 31-ss).

Innovación curricular en Matemáticas

La innovación curricular en Matemáticas se ha circunscrito a las reformas curriculares masivas y a «cambios curriculares» puntuales o extensos y de poco alcance (Coriat, 1997, p. 200), constatándose la existencia de dos categorías de estudios: los que siguen un modelo de desarrollo y los que se basan en una estrategia de innovación curricular. Entre los primeros se encuentran los modelos conductista, matemática moderna, estructuralista, formativo (desarrollo de estructuras intelectuales) y enseñanza integrada (contenidos y formación intelectual).

Entre los segundos, las estrategias para la innovación curricular (Rico, 1997, p. 228) pueden ser de dos tipos: el modelo «investigación-desarrollo-difusión» y el modelo «orientación sobre la personalidad», que trata de involucrar, directa o indirectamente, al profesor. Nosotros adoptaremos la participación directa y el modelo de enseñanza integrada mediante la estrategia de orientación sobre la personalidad del profesor.

Investigación e innovación curricular y formación de profesores

La investigación-acción surge como un modelo amplio de actuación basado en la figura del profesor como investigador[5], en la enseñanza basada en la investigación y en la investigación basada en una metodología mixta centrada en los esquemas de investigación en la acción. De esta forma se articulan la investigación, la innovación y la docencia en un todo coherente que incide en la formación de los profesores, la práctica usual, los libros de texto y las reformas institucionales.

Métodos de investigación en Educación Matemática

El estudio de los fenómenos reales en el aula de matemáticas con intención innovadora obliga a la utilización de métodos de investigación diversos que se pueden situar en tres grandes categorías:

— *Métodos no empíricos.* Análisis epistemológico y fenomenológico (Freudhental, 1983; Puig, 1997), análisis de textos y recursos en Matemáticas (Coriat, 1997), análisis didáctico (Gallardo y González, 2012; González, 1999c).

[5] En estrecha colaboración con investigadores profesionales (nota del autor).

— *Métodos empíricos.* Métodos cualitativos (Guba y Lincoln, 1985); investigación-acción (Goyette y Lessard Hébert, 1988), entrevistas y encuestas (Cohen y Manion, 1990), o métodos cuantitativos (Bisquerra, 1989).
— *Métodos mixtos* (Castro y Godino, 2011; Hiebert y Grouws, 2007), que proporcionan una «colección o análisis de datos cuantitativos y cualitativos … que se integran en una o varias etapas del proceso de investigación» (Creswell, 2003, p. 711).

Tendencias y modelos de investigación específicos para la innovación curricular en Educación Matemática

Bartolini (1998) y Arzarello (1999), recogiendo las consideraciones realizadas por Grouws (1992), identifican tres tendencias tradicionales de investigación en Educación Matemática: (a) basadas en la organización conceptual de la disciplina (tradición filosófica escolástica); (b) para la innovación en el aula mediante ejemplos paradigmáticos (tradición pedagógica); (c) investigaciones en condiciones de laboratorio (tradición científica empírica)[6].

Los mismos autores proponen una cuarta tendencia (*investigación para la innovación*) que trata de producir modelos paradigmáticos (a), estudiar las condiciones y factores que afectan a las realizaciones concretas (b y c) y generar constructos teóricos y métodos didácticos innovadores. En este cuarto modelo se contempla (González, 1999a) la participación activa y directa de los profesores como «co-investigadores», la consideración «natural» y sistémica de los fenómenos (Bartolini, 1998), la preocupación por las condiciones del proceso real y por acortar o eliminar las distancias existentes entre la teoría y la práctica, la consideración especial del tiempo en el que transcurren los fenómenos y la formación del profesorado participante.

Más recientemente han surgido algunos modelos y enfoques con una incidencia importante en la innovación, como el enfoque denominado *Colaborative Action Research in Mathematics Education,* orientado al desarrollo de proyectos de investigación cualitativa diseñados e implementados por profesores y especialistas de la Universidad (Raymond, 1994), el enfoque conocido como *Modelos Teóricos Locales,* con la pretensión de: *«… analizar, de manera localizada y específica, distintos aspectos o componentes de los fenómenos de la matemática educativa, …»* (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 328) y las tendencias denominadas *Design Research, Experimentos de Enseñanza y tendencia REUBE.*

La tendencia «*Design based research in education*» surgió con el propósito de implementar procesos de innovación y adoptar medidas educativas científicamente

[6] La mayoria de los trabajos del International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME).

fundadas (Kelly *et al.,* 2008). Los estudios se desarrollan en torno a nuevos temas, nuevas herramientas para el aprendizaje o nuevos modos de organización del contexto (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011).

Dentro de esta tendencia se sitúan también los llamados «Experimentos de enseñanza» (Steffe y Thompson, 2000) y la tendencia Renovación de la Enseñanza Universitaria basada en Evidencias (REUBE) (Becerra *et al.,* 2012), que persigue la implementación de innovaciones en el aula guiadas por los resultados de la investigación didáctica disciplinar.

Modelo: Investigación para la Innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas

Denominamos *«Investigación para la Innovación curricular en la acción en el aula de Matemáticas»* a un procedimiento metodológico mixto para la investigación didáctico-curricular con fines innovadores en las aulas de Matemáticas, a desarrollar durante el proceso didáctico ordinario, con la participación de los docentes responsables y con las mínimas modificaciones del proceso educativo.

El modelo pretende amparar y guiar estudios reglados con pretensiones científicas, es decir, basados en la indagación metódica y disciplinada y orientados a la creación y difusión de conocimientos fundados, válidos, generalizables en lo posible, replicables y susceptibles de examen crítico por parte de especialistas. Al mismo tiempo se pretende conocer en profundidad los procesos reales sin manipulaciones que distorsionen su naturaleza y características, averiguar la potencialidad didáctica del desarrollo curricular ordinario y las posibilidades reales de cambio curricular e innovación, valorando el alcance y los resultados de las modificaciones «permitidas». Ello obliga, por un lado, a considerar los fenómenos en su globalidad y complejidad y, por otro, a realizar pequeñas aproximaciones en lugar de investigaciones complejas o demasiado ambiciosas. Adicionalmente se establecen relaciones privilegiadas entre la docencia, la investigación y la formación de profesores en el propio núcleo del ámbito profesional.

Los estudios se realizan implementando dos tratamientos didácticos: experimental y control. El desarrollo se controla mediante protocolos de observación que deben atender a la adecuación de los tratamientos a los protocolos establecidos, el comportamiento imparcial del profesor, las desviaciones notables de lo esperado, el comportamiento de los alumnos, las características y diferencias en los tratamientos y el carácter competitivo del tratamiento control.

La metodología es mixta, compleja, adaptada a las condiciones y compatible con el diseño y desarrollo curriculares y con las condiciones del estudio[7]. Puede incluir:

[7] No es posible, por ejemplo, realizar sucesivos ciclos de investigación en la acción sobre el mismo tema o dedicar varias horas a tareas investigadoras en detrimento del desarrollo curricular.

métodos no empíricos (análisis didáctico, histórico, fenomenológico, epistemológico, análisis de libros de texto, etc.) y métodos empíricos cualitativos y cuantitativos. Con respecto a la intervención: técnicas etnográficas y de inmersión en grupos naturales, técnicas experimentales, técnicas de investigación en la acción. Con respecto a la recogida de información: técnicas de encuesta, entrevistas, cuestionarios, pruebas objetivas, métodos etnográficos: observación participante, observación externa, triangulación, reflexión epistemológica, consulta a expertos. Con respecto al análisis de datos: métodos descriptivos, comparación de parámetros, análisis de la varianza.

Los estudios se realizan en tres fases: *Fase teórica*, de preparación y fundamentación: antecedentes, análisis didáctico, estudios exploratorios, equivalencia de grupos, comprobación de normalidad, composición de las muestras, elaboración de protocolos, diseño de los estudios empíricos; *Fase Experimental*: Desarrollo de los tratamientos, observación, controles y pruebas, equivalencia de los tratamientos en lo que no afecta a la modificación a estudiar, garantías de imparcialidad, pulcritud de los procedimientos, «amenazas a la validez», control de variables extrañas; *Fase de análisis de resultados y elaboración de conclusiones*.

Algunas investigaciones para la innovación curricular en la acción en el aula de matemáticas desarrolladas en la Universidad de Málaga

El modelo descrito se ha utilizado para estudiar algunos aspectos del diseño y desarrollo curricular ordinario de la resolución de ecuaciones de segundo grado en 3er curso de la ESO mediante el empleo del material didáctico «puzzle algebraico» (Larrubia, 2006) y de la metodología didáctica de las asignaturas de Matemáticas de los estudios de Ingeniería (Galán, 2003; Padilla, 2003; Rodríguez, 2004) mediante la elaboración de comandos con DERIVE. En el primer caso, se experimentó una modificación puntual consistente en la realización de parte del trabajo en el aula mediante el material mencionado, manteniendo inalteradas las restantes condiciones: duración, contenido, evaluación, docente, etc. Se comprobó que dicha modificación afectó positivamente al rendimiento y las actitudes del alumnado sordo integrado en el aula, mejorando también el rendimiento del alumnado oyente. En los últimos tres estudios, se analizaron los efectos de una metodología didáctica experimental sobre el aprendizaje, la motivación, las actitudes, el rendimiento de los alumnos y el propio proceso didáctico y sus factores, en comparación con los de una metodología didáctica tradicional (tratamiento *control*). Se implementó un diseño cuasiexperimental o diseño bivalente pretest-postest, con las fases que se incluyen en la figura 1, y se utilizaron instrumentos y técnicas de observación participante, triangulación, entrevistas y encuestas.

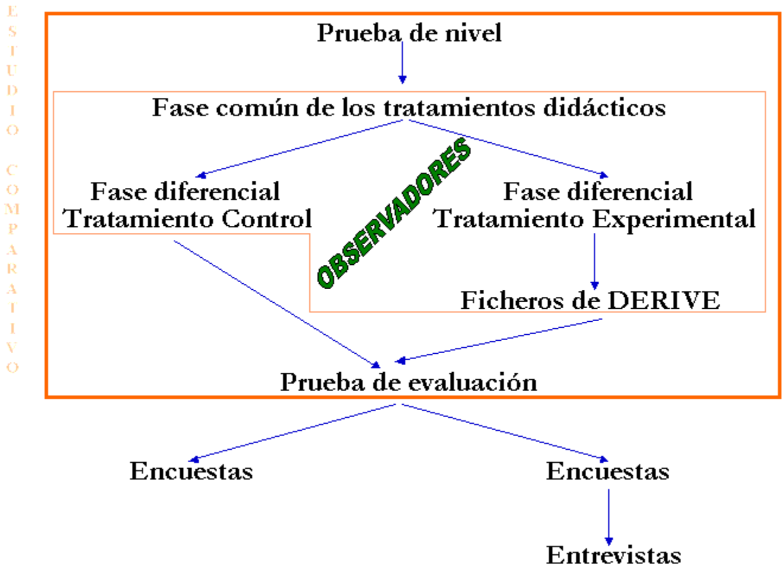


Figura 1. *Esquema de los tres estudios realizados en las aulas de Ingeniería*

El proceso seguido en todos los casos permitió confirmar la compatibilidad con el desarrollo curricular ordinario y los efectos positivos de las metodologías didácticas experimentales sobre el aprendizaje, la actitud, la atención, la motivación, el interés y la participación del alumnado y del proceso sobre la formación de los docentes.

CONCLUSIONES

Es evidente que no se dan las condiciones idóneas para desarrollar investigaciones en toda regla en las aulas ordinarias de Matemáticas. El sistema educativo no favorece la investigación sobre la propia práctica, mientras que las condiciones reales dejan poco margen para la realización de procesos completos de investigación, a pesar de lo cual creemos que es, precisamente, el lugar adecuado y que son las condiciones idóneas para ello.

En cuanto a la continuación y proyección futura de la línea de investigación, sería conveniente realizar estudios de replicación con nuevos grupos de alumnos, nuevas especialidades y con la participación de otros profesores y asignaturas, profundizando en los aspectos cualitativos del desarrollo curricular y confirmando las relaciones causa-efecto encontradas.

Referencias

Arzarello, F. (1999). En P. Da Ponte y L. Serrazinha (Eds.), *Educação Matemática en Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão 1999,* (pp. 197-224) Santarem, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Bartolini (1998). Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmático. En P. Da Ponte y L. Serrazinha (Eds.), *Educação Matemática en Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão 1999,* (pp. 235-254) Santarem, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

Becerra, C., Gras-Martí, A., Hernández, C., Montoya, J., Osorio, L. y Sancho, T. (2012). Renovación de la enseñanza universitaria basada en evidencias. Una metodología de acción flexible. *Perfiles Educativos* v. XXXIV núm. 135, pp. 62-77.

Bisquerra, R. (1989). *Métodos de investigación educativa.* Barcelona, España: CEAC.

Castro, W. F. y Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los Simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín., G. Fernández, L. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática SEIEM XV* (pp. 97-117). Ciudad Real, España: SEIEM.

Cohen y Manion (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La Muralla.

Coriat, M. (1997). Materiales, recursos y actividades: un panorama. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 155-178). Barcelona, España: ICE Universidad de Barcelona.

Creswell, J. W. (2003). *Research design: Qualitative, quantitative and mixes approaches*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(3), 327-342.

Freudhental, H. (1983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht, Países Bajos: Reidel.

Galán, J. L. (2003). Integrales múltiples con Derive. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones. Tesis doctoral, Universidad de Málaga.

Gallardo, J. y González, J. L., (2013). El análisis didáctico como método para el tratamiento de los antecedentes bibliográficos en la investigación en Educación Matemática. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *El análisis didáctico y la investigación en Educación Matemática* (pp. 415-427). Granada, España: Comares.

González, J. L. (1999a). Comentario a la Ponencia «Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Analisi di un caso paradigmatico». En P. Da Ponte y L. Serrazinha (Eds.), *Educação Matemática en Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão 1999,* (pp. 263-274) Santarem, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

— (1999b). Contribución al panel «Qualidade da Investigaçao»: Relevancia de la investigación para la calidad de la enseñanza. En P. Da Ponte y L. Serrazinha (Eds.), *Educação Matemática en Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão 1999,* (pp. 293-301) Santarem, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educação.

— (1999c). Didactical analysis: A non empirical qualitative method for research in mathematics education. En I. Schwank (Ed.), *Proceedings of European Research in Mathe-*

matics Education I (ERME I). Osnabrüeck, Alemania: ERME.

— (2000). Aproximación a un marco teórico y metodológico específico para la investigación en Educación Matemática. En Ortega, T. (Ed.), *Acta del III Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 213-225). Valladolid, España: SEIEM.

GOYETTE, G. y LESSARD-HÉBERT, M. (1988). *La investigación-acción*. Barcelona, España: Laertes.

GROUWS, D. (1992). *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. Nueva York, NY: MacMillan.

GUBA, E. G. y LINCOLN, Y. (1985). *Naturalistic inquiry*. CL: Sage Publication Inc. California. USA.

HAREL, G. (2006). Mathematics education research, its nature and its purpose. A discussion on Lester paper. *Zentralblatt für Didáktik der Mathematik (ZDM), 38*(1), 58-62.

HIEBERT, H. y GROUWS, D. (2007). The effects of classroom mathematics teaching on student's learning. En: F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 371-404). Charlotte NC: NCTM and IAP.

KELLY, A. E., LESH, R. A. y BAEK, J. Y. (2008). *Handbook of design research methods in education. innovations in science, technology, engineering and mathematics learning and teaching.* Nueva York, NY: Routledge.

LARRUBIA, J. J. (2006). *La resolución de ecuaciones de segundo grado con puzzle algebraico. Un estudio en 3º curso de Educación Secundaria Obligatoria*. Tesis Doctoral inédita. Universidad de Málaga, Málaga.

LAWTON, (1986). *Curriculum studies and educational planning*. Londres, Reino Unido: Hodder and Stoughton.

MOLINA, M., CASTRO, E., MOLINA, J. L. y CASTRO, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), pp. 75-88.

PADILLA, Y. (2003). *Integrales de* línea *con Derive. Un estudio de innovación curricular en primer curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicaciones*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga, Málaga.

PUIG, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Coord.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 61-94. Barcelona, España: ICE Universidad Barcelona.

— (2008). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. *PNA*, 2(3), 87-107.

RAYMOND, A. (1994). Collaborative action research in mathematics education: A tale of two teacher-researcher. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the 16th Conference of the International Group of Psychology and Mathematics Education* (pp. 67-77). Baton Rouge, LA: PME.

RICO, L. (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en Educación Secundaria*. Madrid, España: Síntesis.

— (1998). Concepto de currículum desde la Educación Matemática. *Revista de Estudios del Currículum, 1*(4), 7-42.

RODRÍGUEZ, P. (2004). *Derivación e integración de funciones de variable compleja con DERIVE: un estudio de innovación curricular en segundo curso de Ingeniería Técnica de Telecomunicación*. Tesis Doctoral. Universidad de Málaga, Málaga.

ROMBERG, T. (1991). Características problemáticas del currículum escolar de Matemáticas. *Revista de Educación*, (294), 323-406

— (1992). Perspectives on scholarship and research methods. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 49–64). Nueva York, NY: MacMillan.

SIERRA, M. (1999). Comentario a la ponencia «Linee di tendenza della ricerca per l'innovazione in Italia: Quadro di referimento teorico». En P. Da Ponte y L. Serrazinha (Eds.), *Educação Matemática en Portugal, Espanha e Itália. Actas da Escola de Verão 1999,* (pp. 225-230) Santarem, Portugal: Sociedade Portuguesa de Ciências de Educaçao.

STEFFE, L. P., THOMPSON, P. W. y VON GLASERSFELD (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly y R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in Mathematics and Science Education* (256-306). Mahwah, NJ: Erlbaum.

STENHOUSE, L. (1987). *La investigación como base de la enseñanza*. Madrid, España: Morata.

THORNTON, C., JONES, G. y NEAL, J. (1995). The 100 chart: a stepping stone to mental mathematics. *Teaching Children Mathematics, 1*(4), 480-483.

EL DINAMISMO DE LA FINITUD EN EL CASO DE LA INTEGRAL DEFINIDA ¿CÓMO FACILITAR LA COMPRENSIÓN?

The dynamism of the finitude in the case of the definite integral How to facilitate the understanding?

Tomás Ortega y Mario Porres Tomé
Universidad de Valladolid

Resumen

Se presenta una investigación sobre la comprensión del concepto de integral definida y del teorema fundamental del cálculo. En ambos casos, se considera esencial el dinamismo asociado a sumas finitas de Darboux con un número escaso de sumandos. Se trabajan simultáneamente los registros numérico y gráfico con los alumnos utilizando DERIVE, como paso previo a la generalización y sistematización tanto del concepto como del teorema fundamental.
Palabras clave: comprensión, DERIVE, integral definida, partición, sumas finitas.

Abstract

A research on the understanding of the concept of definite integral and the fundamental theorem of calculus is presented. In both cases the dynamism associated with finite Darboux sums with a small number of summands is considered essential. The students work simultaneously with numerical and graphical registers using DERIVE, prior to the generalization and systematization of the concept and the fundamental theorem.
Keywords: *definite integral, DERIVE, finite sums, partition, understanding.*

Planteamiento inicial

Desde nuestra faceta de docentes y también como investigadores hemos observado las dificultades de aprendizaje que están asociadas al concepto de integral definida (ID) y al teorema fundamental del cálculo (TFC). La comprensión de este concepto ha sido objeto de numerosas investigaciones desde la segunda mitad del siglo XX y continúan, incorporando tecnologías de computación. Entre ellas, pueden indicarse las de Sierpinska (1985 y 1990); Tall (1996); Contreras y Ordóñez (2006); Yesildere & Akkoç (2007); Aranda y Callejo (2011); Camacho, Santos-Trigo y Depool (2013)… Finalmente, Thompson (2013) propone una conceptualización basada en la función de acumulación

$F_a(x) = \lim_{\Delta x \to 0} F_{\Delta x,a}(x),\ F_{\Delta x,a}(x) = \sum_{i=0}^{\left[\frac{x-a}{\Delta x}\right]} f(a + i\Delta x)\Delta x, a \leq x \leq b$.yKouropatov y Dreyfus (2013, 2014) la proponen como medio de conceptualización de la ID y para establecer el TFC. De todas ellas, destacamos a Dubinsky (1991), quien indica que hay un problema de comprensión cuando se cambia el intervalo asociado a la ID ya que, para los alumnos, el área se ha encapsulado como un número, y al cambiar el extremo de integración se obtiene la nueva función $F(x) = \int_a^x f(t)dt,\ f(x) \geq 0,\ a \leq x \leq b.$

Para Porres (2011), este proceso impide la comprensión de la ID y de la integral impropia. Por su parte, Tall (1996) considera el obstáculo asociado a la infinitud de rectángulos de anchura cero. Hecho que tiene que ver con un proceso de paso al límite, pero que no sintetiza la complejidad del mismo, ya que no considera la arbitrariedad de la partición. Sierpinska (1985, 1990) y Cornu (1991) indican obstáculos asociados al concepto de límite, Dubinsky y Tall analizan la comprensión del concepto de ID y la demostración del TFC con la función F(x). Con estos antecedentes, se fijan los siguientes objetivos de investigación:

1. Analizar la contribución del dinamismo de las sumas finitas de Darboux de pocos sumandos y sus representaciones gráficas en la comprensión del concepto de ID.
2. Examinar la comprensión de una prueba preformal del TFC, aplicando el teorema del valor medio a sumas de Riemann de pocos sumandos.

Marco teórico

Se utiliza el marco teórico de Sierpinska (1990) sobre la comprensión de un concepto. Esta autora considera cuatro actos de comprensión: identificación, discriminación, generalización y síntesis. Cada uno de ellos lleva asociada la superación de una serie de obstáculos. Ejemplo: Al calcular $\int xdx$, puede identificarse a $\frac{x^2}{2}$ como una primitiva de la función f(x)=x, distinguir a $\frac{x^2}{2} + k$ como otra primitiva de f(x) y que $\frac{x^2}{3} + k$ no es una primitiva de dicha función (discriminación), sintetizar que cualquier primitiva de la función f(x) tiene la expresión $\frac{x^2}{2} + k$, es decir, $\int xdx = \frac{x^2}{2} + k$ y, de esto, establecer o generalizar que la primitiva de x^n es $\frac{x^{n+1}}{n+1} + k$.

Además, se considera el marco de de Villiers (1993) sobre las funciones de la demostración matemática: Verificación (veracidad), Explicación (por qué), Sistematización (organización), Descubrimiento (nuevos resultados) y Comunicación (transmisión del conocimiento). Consideramos dos formas de establecer el TFC: una, considerando la función F(x) anterior junto con la regla de Barrow y, otra, aplicar el teorema del valor medio a la función integrando en los subintervalos definidos por la partición. Se presentan ambos procesos en Tabla 1.

Tabla 1. *Procedimientos deductivos del TFC*

Vía límite + Primitiva general + Barrow	Vía teorema del valor medio (Fischer, 1983)
I. Sea f integrable sobre $[a, b]$. Se define F sobre $[a,b]$ por $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$. Si f es continua en $c\in[a,b]$, entonces F es derivable en c, y $F'(c)=f(c)$. **Prueba:** Suponemos que c está en (a,b); para $c=a$ o $c=b$, se razona con las derivadas laterales. Sea $h>0$. Entonces, si $m_h=\inf\{f(x): c<x<c+h\}$, $M_h=\sup\{f(x): c<x<c+h\}$. $m_h h \le F(c+h)-F(c)=\int_c^{c+h} f(t)\,dt \le M_h h$ O bien: $m_h \le \frac{F(c+h)-F(c)}{h} \le M_h$ Una expresión similar se obtendría para $h<0$. Tomando límites cuando $h\to 0$, y puesto que f es continua en $x=c$, se obtiene: $F'(c)=f(c)$. **II.** Si F(x) y G(x) son dos primitivas de f(x) en [a,b], difieren en una constante (G(x)-F(x)=K). **Prueba:** Si c∈(a,b), para cara cualquier x∈[a,b], (G-F)(x)-(G-F)(c)=(G-F)'(t)(x-c))=(G'(t)-F'(t))(x-c)=0. Por tanto, G(x)-F(x)= G(c)-F(c)=K. **III.** Por tanto, cualquier primitiva G(x)=F(x)+K, $G(a)=\int_a^a f(t)\,dt+K=K \text{ y } G(b)=\int_a^b f(t)\,dt+K$ Así, si G(x) es una primitiva de f(x) en [a,b], $\int_a^b f(t)\,dt=G(b)-G(a)$ (Regla de Barrow).	Si $f(x)$ es integrable en $[a,b]$ y $G(x)$ es una primitiva suya sobre este intervalo, entonces: $\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$ Si $P=\{a=x_0, x_1, x_2,\dots, x_{n-1}, x_n=b\}$ es una partición de $[a,b]$, entonces se tiene: $G(x_1)-G(x_0)+G(x_2)-G(x_1)+\dots+G(x_n)-G(x_{n-1})=$ $G(x_n)-G(x_0)=G(b)-G(a)$. Aplicando el teorema del valor medio a $[x_{i-1},x_i]$, $i=1,\dots,n$, por ser G una primitiva de f, existe un α_i, interior a cada subintervalo tal que $G(x_i)-G(x_{i-1})=G'(\alpha_i)(x_i-x_{i-1})=G'(\alpha_i)\Delta x_i=f(\alpha_i)\Delta x_i$ Y de forma más explícita: $G(x_1)-G(x_0)=f(\alpha_1)\Delta x_1,\ G(x_2)-G(x_1)=f(\alpha_2)\Delta x_2\dots$ $G(x_n)-G(x_{n-1})=f(\alpha_n)\Delta x_n$. Por tanto: $G(b)-G(a)=f(\alpha_1)\Delta x_1+f(\alpha_2)\Delta x_2+\dots+f(\alpha_n)\Delta x_n$ $=R(f,P,T)$ Si $T=\{\alpha_1, \alpha_2,\dots,\alpha_n\}$ es el conjunto de puntos intermedios asociados a P, al estar acotadas las sumas de Riemann por las de Darboux, se obtiene: $s(f,P)\le R(f,P,T)\le S(f,P)$. Considerando las integrales inferior y superior: Al ser f(x) integrable, finalmente, se obtiene: $Inf\int_a^b f(x)\,dx \le G(b)-G(a)\le Sup\int_a^b f(x)\,dx$ $\int_a^b f(x)\,dx=G(b)-G(a)$ c. q. d.

Metodología y desarrollo de la investigación

Un análisis de los procedimientos contenidos en la tabla a la luz del marco de de Villiers (1993) permite afirmar lo siguiente sobre las dos pruebas del TFC:

Verificación: El segundo enunciado es más fuerte que el primero, ya que a éste hay que añadirle la regla de Barrow para llegar al mismo resultado.

Explicación: Las dificultades del paso al límite en el primer caso son insuperables para buena parte del alumnado, máxime cuando no se entiende la definición de la función F(x) y cuando se establece una conexión ajena al teorema. Por el contrario, en el segundo procedimiento, los intervalos están dados por la propia partición y se aplica un teorema importante del análisis.

Sistematización: Se ordenan mejor las ideas en el segundo, ya que el flujo de la demostración es continuo y, aunque se recurre al teorema del valor medio, los razonamientos que se siguen en el proceso son propios del concepto de ID y no, como en el primer caso, que se aplica el concepto de límite a una acotación de la integral.

Comunicación: Se comprueba que la comunicación matemática es mejor, por cuanto que los alumnos lo entienden con menos dificultades (ver la discusión).

Descubrimiento: La expresión que se genera en el segundo proceso, $G(b)-G(a)=f(\alpha_1)\Delta x_1+f(\alpha_2)\Delta x_2+\ldots+f(\alpha_n)\Delta x_n$, asegura que existen n nodos α_1, α_2,… y α_n para los que el método de los rectángulos con paso constante es exacto.

Por todo ello, se ha considerado la utilización de la segunda demostración en la implementación docente asociada a la investigación, presentando una prueba preformal de este teorema (Porres, 2011).

Considerando los actos de comprensión de Sierpinska (1990) para el concepto de integral definida se ha elaborado una tabla de 40 actos de comprensión y otros tantos obstáculos. De ellas, en la Tabla 2 se presentan los ligados a la parte de la investigación que aquí se presenta.

Tabla 2. *Actos de comprensión y obstáculos de Sierpinska, asociados a la ID*

CI_{11}: Identificación de la superficie delimitada por la gráfica f(x) continua y positiva, OX, y x=a y x=b.
OI_{11}: Dificultad en la representación gráfica de funciones.

CI_{12}: Identificación de una partición del intervalo compacto [a,b].
OI_{12}: Confundir los subíndices con los nodos de la partición.

CI_{13}: Generalización y síntesis del concepto de partición.
OI_{13}: Dificultad para establecer una partición con un número indeterminado «n+1» nodos.

CI_{14}: Identificación de los extremos absolutos de una función continua en un intervalo y su discriminación.
OI_{14}: Confusión entre extremo relativo y absoluto.

CI_{15}: Generalización de los extremos absolutos para cada uno de los subintervalos de una partición.

OI_{15}: No es fácil aceptar que un máximo en un subintervalo pueda ser superado por un mínimo en otro.

CI_{16}: Identificación de las sumas inferior y superior y discriminación entre ambas.

OI_{16}: Imprecisión en la determinación gráfica de las superficies inferiores y superiores.

CI_{17}: Generalización de suma inferior y suma superior.

OI_{17}: Dificultad para establecer las expresiones analíticas de las sumas inferiores y superiores.

CI_{18}: Síntesis entre suma inferior, área y suma superior, es decir: $s(f,P) \leq A \leq S(f,P)$.

OI_{18}: Las desigualdades no son evidentes a los alumnos si la partición tiene «n+1» nodos.

CI_{19}: Identificación de la integral inferior como el extremo superior de las sumas inferiores (ídem integral superior) y discriminación entre integral inferior y superior.

OI_{19a}: La integral inferior no se alcanza, se aproxima a un valor (ídem superior).

OI_{19b}: Las definiciones de estas integrales son consideradas de difícil comprensión y las desigualdades entre ambas no resultan evidentes.

CI_{20}: Síntesis de función integrable Darboux en un intervalo compacto [a,b].

OI_{20a}: Si las sumas inferior y superior se aproximan a un mismo valor tanto como deseemos, no necesaria-mente son iguales las integrales inferior y superior.

OI_{20b}: Encontrar la partición P del teorema de caracterización de funciones integrables Darboux.

CI_{21}: Identificación de la función de Dirichlet y discriminación entre racionales e irracionales.

OI_{21}: Inseguridad en la representación de los números sobre la recta real.

CI_{22}: Síntesis de la existencia de funciones no integrables Darboux.

OI_{22}: Creencia de que todas las funciones son integrable Darboux.

CI_{23}: Generalización de conjunto de puntos intermedios asociados a una partición.

OI_{23}: El desconocimiento del conjunto de puntos intermedios genera ambigüedad.

CI_{24}: Síntesis entre sumas inferior y superior de Darboux y suma de Riemann: $s(f,P)\leq R(f,P,T)\leq S(f,P)$

OI_{24}: Muchas expresiones algebraicas de difícil comprensión analítica.

CI_{28}: Generalización del teorema del valor medio a cada subintervalo de la partición.

OI_{28}: El valor que toma la función en los puntos intermedios es impreciso y si el número de dichos puntos es «n», entonces la correspondiente suma de Riemann, más que comprendida, es aceptada.

CI_{29}: Síntesis del TFC.

OI_{29a}: El TFC es la regla de Barrow y siempre es posible encontrar una primitiva de una función.

OI_{29b}: No asociación de F(x) al área bajo la curva de F(x)>0 en [a,x].

OI_{29c}: Difícil comprensión del paso al límite en F(x).

CI_{30}: Discriminación entre los conceptos área e integral definida.

OI_{30}: Considerar que ambos conceptos son iguales.

CI_{36}: Generalización de las sumas de Riemann a la integración numérica.

OI_{36}: No se considera necesaria la integración numérica o es demasiado complicada.

Se ha considerado una metodología de Investigación Acción y la experimentación se lleva a cabo con alumnos de 2º curso de Bachillerato de Ciencias Sociales (IES Félix Rodriguez de la Fuente, Burgos). En concreto, se realizaron seis ciclos de investigación (1 de exploración, 2 de confirmación, 2 de consolidación y 1 de cierre, del que se toman las gráficas escaneadas). En todos los ciclos el profesor elaboró un diario con anotaciones directas y diarias, un cuadernillo de trabajo que fue modificándose en los sucesivos ciclos, pruebas evaluadoras de la actividad, tareas con DERIVE y con lápiz y papel, y un informe de un observador externo donde se informa que tanto la docencia como la metodología fueron apropiadas y que *«la relación entre integral definida y derivada que ellos alcanzaron es bastante buena»*. A continuación se presenta la discusión de los resultados del análisis y algunos escaneos de sus tareas que avalan la discusión.

Discusión de los resultados

La mayoría de los alumnos (84,21 %) interpreta correctamente la gráfica del área que está determinada por una función positiva, el eje OX y las rectas x=a y x=b (CI_{11}). Reconocer e identificar una partición del intervalo [a,b] de tres nodos, $P=\{a=x_0<x_1<x_2=b\}$, es sencillo para el 80% de los alumnos (CI_{12}) y tampoco tienen dificultades en identificar y discriminar gráficamente los extremos absolutos de $f(x)$ en los subintervalos $[a,x_1]$ y $[x_1,b]$ (CI_{14}); sin embargo, constatamos que el porcentaje de los que identifican la correspondiente suma inferior de Darboux, s(,P), es superior al porcentaje para la suma superior, $S(f,P)$, (CI_{16}, OI_{16}). Pensamos que tal disparidad puede deberse a una lectura irreflexiva del texto de la tarea y a una escasa atención a la información transmitida por las gráficas, pero también puede ser debida a la idea de «área contenida».

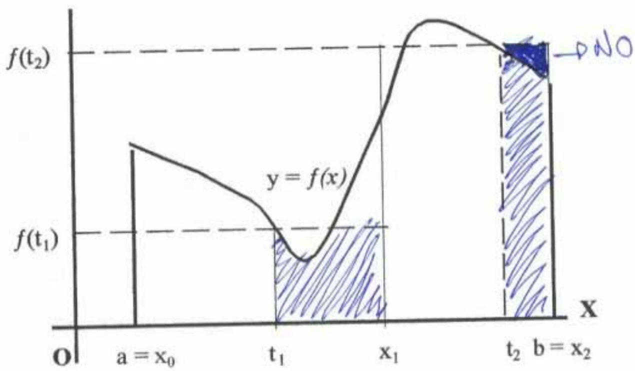


Figura 1. *Sumas inferiores de Darboux. Alumna SH*

La deficiente identificación y discriminación entre la partición anterior, P, y un refinamiento de la misma, $P'=\{a=x_0<t_1<x_1<t_2<x_2=b\}$ (Figura 1), conlleva que más de la mitad de los alumnos tengan dificultades en establecer gráficamente los extremos

de la función f(x) en cada subintervalo de ambas particiones (Figura 1) y, por tanto, al identificar y discriminar las respectivas sumas (inferiores y superiores) de Darboux y sintetizarlas en la relación de desigualdad s(f,P)≤s(f,P')≤S(f,P')≤S(f,P) (OI_{16} y OI_{17}).

Cuando los estudiantes deben relacionar pocos conceptos matemáticos, entonces los resultados mejoran sustancialmente, pero buena parte de los alumnos no se sienten seguros al identificar y generalizar las sumas inferior y superior de Darboux (CI_{13}, CI_{15} y CI_{17}) cuando el número de nodos del intervalo [a,b] sea indeterminado (OI_{17} y OI_{18}). Identificar y discriminar las integrales inferior y superior de Darboux es muy difícil para la mayoría de los alumnos (58%). Además, nuevamente podemos aseverar que algunos estudiantes piensan que la integral inferior no se alcanza, más bien, se aproxima a un valor (ídem integral superior) (OI_{19a}, OI_{19b}, OI_{20a} y OI_{20b}).

En la tarea sobre la función de Dirichlet con valores 1 y 2, las tres cuartas partes de los alumnos del ciclo de cierre consideran que los números irracionales en el intervalo [0,4] es un conjunto discreto (OI_{21}) y, como tal, muy pocos son capaces de identificar gráficamente la función de Dirichlet con valores 1 y 2 (CI_{21}). Poco más de la quinta parte de los alumnos identifican y discriminan los extremos absolutos de dicha función en varios subintervalos de [0,4] (CI_{14} y CI_{15}) y en la misma proporción se encuentran los que sintetizan, mediante los cálculos oportunos, las sumas inferiores y superiores de la función de Dirichlet asociada a particiones $P_4 = \{i\}_{i=0}^{4}$ y $P_8 = \{i/2\}_{i=0}^{8}$, ambas con un número reducido de nodos (CI_{17}). Sólo el 16% de los estudiantes identifican y discriminan las integrales inferior y superior de Darboux de la función de Dirichlet (OI_{19a} y OI_{19b}) y, consecuentemente, los mismos alumnos lo sintetizan en la no integrabilidad de dicha función en el intervalo [0,4] (CI_{22}). Por el contrario, otros malinterpretan los nodos de la partición con los extremos de dicha función en los subintervalos (OI_{20b}, ver Figura 2) y consideran que las sumas se aproximan al valor intermedio (OI_{20a}). Así pues, esto permite afirmar que un obstáculo notable para estos alumnos es reconocer la existencia de funciones que no son integrables Darboux (OI_{22}).

CALCULA: M_1 = 1 ; M_2 = 2 ; M_3 = 3 ; M_4 = 4

Figura 2. *Extremos superiores de la función de Dirichlet. Alumno MM*

Los estudiantes representan la función afín f(x)=x sin mayores dificultades (CI_{11}) e identifican y discriminan los extremos relativos de dicha función en los subintervalos $\left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$, $i = 0, 1, 2, 3$. Sin embargo, el 70 % no determina correctamente sus respectivas sumas inferiores y superiores (OI_{14} y OI_{16}, ver Figura 3). Si el profesor escribe algún término de las expresiones s(f,P8) y S(f,P8), siendo P8={i/8}; i=0,…,8; entonces les resulta más fácil generalizar las respectivas sumas inferiores y superiores (CI_{14}, CI_{15} y CI_{16}). Sin embargo, el grado de dificultad es muy alto cuando se trata de generalizar y sintetizar las sumas de Darboux de la función afín en el intervalo [0,1] utilizando la partición P_n={i/n, i=0,…,n} (CI_{17}).

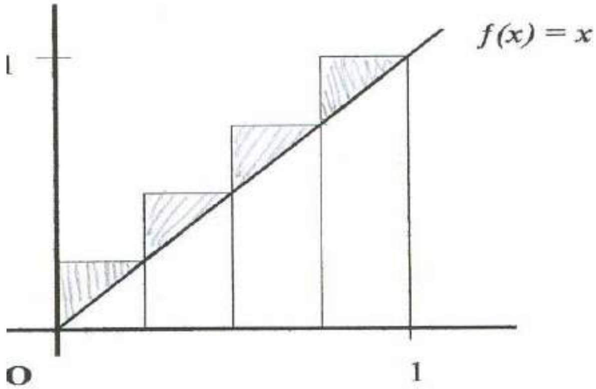


Figura 3. *Sumas superiores de Darboux. Alumno RM*

$G(x_1)$ - $G(x_0)$ = $f(\alpha_1)\Delta x_1$, $G(x_2) - G(x_1)$ = $f(\alpha_2)$ Δx_2,

$G(x_3)$ - $G(x_2) = f(\alpha_3)\Delta x_3$, $G(x_4) - G(x_3) = f(\alpha_4)$ Δx_4. *Por tanto:*

Figura 4. *Sumas de Riemann para el TFC. Alumno RH*

Para nuestros estudiantes, el desconocimiento de los puntos intermedios asociados a una partición es un obstáculo, o al menos una dificultad, para poder sintetizar gráficamente la correspondiente suma de Riemann (OI_{23}) y, en consecuencia, establecer la relación existente entre ésta y las sumas inferior y superior de Darboux de cualquier función positiva en el intervalo [a,b] asociadas a una partición P y a puntos intermedios T de P (OI_{24}). Se ha comprobado que la creación de visualizaciones sobre representaciones gráficas con pocos nodos y las interpretaciones del teorema del valor medio del cálculo diferencial y del TFC a través de esas gráficas, ayudan a entender las justificaciones de los mismos. La relación entre ambos teoremas y la adquisición de estas visualizaciones ha permitido que cerca del 70 % de los alumnos interpreten correctamente las sumas con pocos sumandos (CI_{28}, ver Figura 4), pero presentan demasiados problemas en su generalización (OI_{28}) y más aún al aplicar tales sumas para el cálculo aproximado de áreas (CI_{36}), y no ven la necesidad del cálculo numérico de áreas mediante la sumas de Riemann o les parece demasiado complicado (OI_{36}). Alrededor del 60 % del alumnado sintetiza el TFC, vía teorema del valor medio, pero no llegan al 30 % los alumnos que interpretan correctamente el área de la función F(x) para f(x)>0 en [a,x] (CI_{29} y OI_{29a} y OI_{29b}, ver Figura 5); casi ninguno comprende el paso al límite de F(x) (OI_{30}) y la mayor parte cree que la integración numérica (CI_{36}), es muy complicada e innecesaria (OI_{36}).

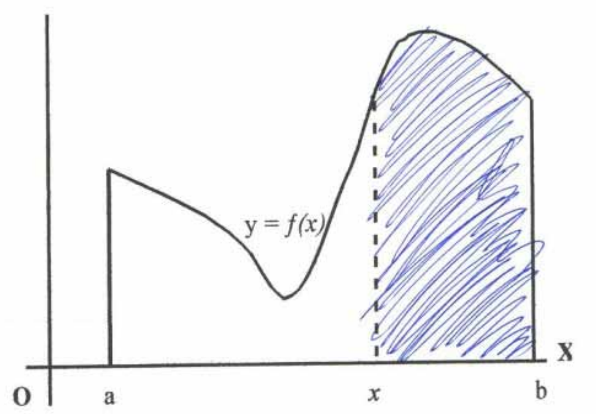


Figura 5. *Representación del área F(x). Alumno DA*

Conclusiones

De la investigación realizada se deduce que tanto el concepto de ID como el TFC presentan muchos obstáculos para estos alumnos, pero de las conceptualizaciones de Riemann y Darboux, para ellos es menos complicada la de Darboux ya que, con pocos nodos, visualizan el acercamiento de las áreas inferiores y superiores al área bajo la curva, percepción que se hace más complicada cuando se consideran más nodos. Por otra parte, sobre las dos pruebas del TFC presentadas, para estos alumnos es más complicada la que utiliza la función integral indefinida, por una parte, debido a los obstáculos asociados al límite y, por otra, a la propia definición de la función F(x) como la integral indefinida de f(t) en el intervalo [a,x]. Este hecho está en absoluta contradicción con Kouropatov y Dreyfus (2014) que para establecer el concepto de ID proponen utilizar la función de acumulación de Thompson (2013). Destacamos que el obstáculo asociado a la densidad en $\mathbb{R}$ favorece la creencia de que todas las funciones son integrables y, finalmente, resaltamos la dificultad que entraña la aplicación de la concepción de ID a funciones tan sencillas como la función identidad.

Referencias bibliográficas

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2011). Usando applets para construir el concepto de integral definida. *Uno, 58*, 65-75.

Ash, A.G. van (1993). To prove, why and how? *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology*, *24*(2), 301-313.

Camacho, M., Santos-Trigo, M. y Depool, R. (2013). La resolución de problemas, tecnología y comprensión del concepto de integral definida: Una investigación con estudiantes de ingeniería. *Uno, 63*, 50-68.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2006). Complejidad Ontosemiótica de un texto sobre la introducción a la integral definida. *RELIME, 9*(1), 65-84.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed). *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Fischer, E. (1983). *Intermediate real analysis.* New York, NY: Springer.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*(5), 641-651.

— (2014). Learning the integral concept by constructing knowledge about accumulation. *ZDM*, *46*, 533-548.

Porres, M. (2001). *Integral definida, cálculo mental y nuevas tecnologías.* Tesis Doctoral. Universidad de Valladolid, Valladolid.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*(1), 5-67.

— (1990). Some remarks on understanding in mathematics. *FLM, 10*(3), 24-36.

Tall, D. (1996). Functions and Calculus. En A. J. Bishop, M. A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick y C. Laborde (Eds.). *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Thompson, P. W., Byerley, C. y Hatfield, N. (2013). A conceptual approach to Calculus made possible by technology, *Computers in the Schools, 30*, 124-147.

Yesildere, S. y Akkoç, H. (2007). Prospective mathematics teachers' practices of technology integration: A case of definite integral. *Proceedings of the BSRLM, 28*(1), 53-58.

Villiers, M. de (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, *26*, 15-30.

TRANSFORMANDO LAS TRANSFORMACIONES
Transforming transformations

Francisco Ruiz López
Universidad de Granada

RESUMEN

En la tabla de los 100 primeros números naturales se pueden determinar recorridos o cadenas que son figuras geométricas formadas por yuxtaposición de cuadrados, a modo de poliominós, que constituyen una nueva representación de operadores aditivos en dicha tabla. Dado el carácter geométrico de estas representaciones consideramos la idea de someter estas figuras que representan operadores, a isometrías sencillas, y estudiar el efecto que les producen tanto desde el punto de vista geométrico como el cambio producido en sus operadores asociados.

Palabras clave: didáctica, isometrías, matemáticas, operadores aditivos, patrones, tablas numéricas.

ABSTRACT

In the one hundred chart, certain geometric paths, called chains, can be determined. They are formed by juxtaposition of squares, similar to polyominoes, and constitute new representations of additive operators in the aforesaid chart. Given the geometric nature of these representations, we considered applying some simple isometries to these shapes, and as these figures represent additive operators, we can show, not only their effect produced by the isometries from a geometrical point of view, but also the change produced on their associated operators.

Keywords: *additives operators, mathematics, numerical tables, patterns, symmetries, teaching,*

Introducción

Ha sido fácil la elección del presente tema de mi colaboración en el homenaje al profesor Moisés Coriat, ya que, por una parte él codirigió mi tesis doctoral sobre patrones en tablas numéricas, y por otra sabemos que él era un enamorado de la Geometría, y más concretamente de todo aquello relacionado con las transformaciones geométricas. Así pues he resumido y adaptado una parte de nuestro trabajo que se relaciona directamente con las isometrías.

El trabajo mencionado tenía por objeto el estudio de la Tabla-100, o tabla de los 100 primeros números naturales (en adelante la nombraremos con T_{100}), dispuestos en filas y columnas. El título sugiere un contexto de trabajo meramente aritmético, pero al estar centrado en patrones y visualización, pronto surgieron elementos de carácter geométrico, lo que situó dicha investigación en un campo que permitió relacionar elementos aritméticos con figuras geométricas, encontrando de esta manera representaciones visuales para operadores aditivos.

Operadores aditivos en la tabla-100. Cadenas.

La tabla de los cien primeros números naturales

Llamamos T_{100} a una tabla organizada en filas y columnas con los números del 1 al 100, (Figura 1), que es un sistema de representación estructurado del conjunto de los cien primeros números naturales. Diversos autores como Litwiller y Duncan (1980), Thornton y otros (1985), Ajose (1991), han puesto de manifiesto que con ella es posible diseñar y proponer actividades didácticas útiles para la enseñanza y aprendizaje de la Aritmética escolar, siendo la estructura aditiva de la tabla la que permite la representación geométrica de los operadores aditivos.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Figura 1. *Tabla-100*

Aunque, considerado como elemento didáctico, T_{100} se puede ver como un objeto simple, a la hora de estudiar las representaciones de los operadores aditivos hay que dotar a dicha tabla de una estructura formal que permita coherencia en los resultados. Así pues, además de los 100 primeros números naturales, incluimos en T_{100} un geoplano de 10x10 y la retícula cuadrada asociada a dicha tabla, a modo de capas superpuestas, donde cada punto del geoplano se identifica con un número del 1 al 100 situado en el centro de cada celdilla de la cuadrícula, adquiriendo de esta manera los elementos de T_{100} la doble consideración de puntos y números, lo que permite considerar las operaciones y relaciones entre estos elementos con interpretaciones aritmética y geométrica (Ruiz, 2000; Ruiz 2001).

Operadores aditivos en T_{100}

En los trabajos referenciados anteriormente se introduce y formaliza, entre otros, conceptos como recorrido o cadena fija, cadena fija simple y cadena libre, así como sus expresiones aritméticas asociadas a ellas, concluyendo con la vinculación de cada una de estas figuras con un operador aditivo en la tabla numérica, basándose en el significado aritmético que otorgamos a desplazarse por la tabla un lugar a la derecha (sumar 1), a la izquierda (restar 1), abajo (sumar 10), arriba (restar 10). Así por ejemplo, la Figura 2 muestra tres cadenas o recorridos con un origen y un sentido de recorrido, que las dota de una expresión aritmética que indica los desplazamientos realizados, y un operador aditivo, como resultado final de dicha expresión aritmética. La tabla 1 muestra las expresiones aritméticas y operadores asociados a las cadenas de la Figura 2, donde el subíndice indica unidades y el superíndice las decenas.

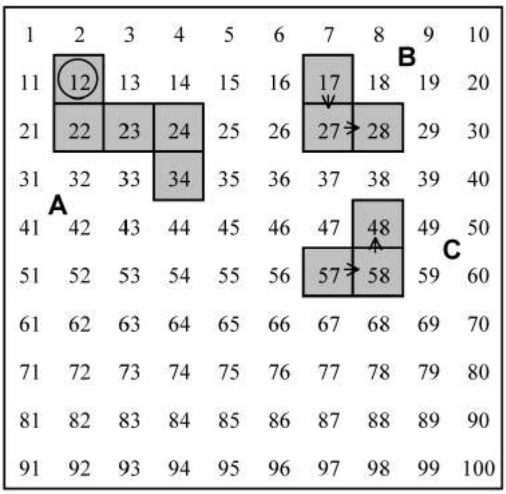


Figura 2. *Cadenas fijas en T_{100}*

Tabla 1. *Significado aritmético de las cadenas*

	Cadena A	*Cadena B*	*Cadena C*
Recorrido	Bajar 1, derecha 2, bajar 1	Bajar 1, derecha 1	derecha 1, subir 1
Expresión aritmética	$1_+ 2^+ 1_+$	$1^+ 1_+$	$1_+ 1^-$
Operador aditivo	[+22]	[+11]	[-9]

A las cadenas que se reducen a un tramo vertical y/o un tramo horizontal, las llamamos cadenas fijas simples, como son las cadenas B y C de la Figura 2.

A la cadena A de la Figura 2 le corresponde una cadena fija, que se interpreta aritméticamente como la aplicación sucesiva, a partir de la casilla 12, de operaciones aditivas tales como (+10), (+2), +10). Si consideramos exclusivamente los tramos horizontales y verticales de la cadena, conservamos el orden de los desplazamientos, asignamos el signo (+) al avance y el (-) al retroceso y notamos los tramos verticales mediante ($^{\text{superíndice}}$) y los tramos horizontales mediante ($_{\text{subíndice}}$), dicha cadena viene descrita por $10^+ 2_+ 10^+$ a la que llamamos *expresión aritmética* de la cadena, e indica una operación aditiva formada por una secuencia de sumas y restas.

Estas expresiones asociadas a las cadenas fijas se reducen a un par ordenado; para ello es suficiente con sumar algebraicamente, por una parte, las componentes de las unidades y, por otra, las componentes de las decenas.

La expresión simplificada de la cadena $10^+ 2_+ 10^+$ es $2^+ 2_+$, que se asocia con "sumar 2 decenas y sumar 2 unidades", es decir está vinculada al operador aditivo +22.

A estas expresiones de solo dos componentes las llamamos expresiones aritméticas reducidas, y se corresponden con *cadenas fijas simples.*

A cada cadena fija le corresponde una única expresión aritmética reducida, y por tanto un único operador aditivo. En cambio, para un operador dado existen diversas cadenas fijas que lo representan, no siendo biunívoca la correspondencia entre cadenas fijas y operadores aditivos en T_{100}. Por ello introducimos una relación de equivalencia en el conjunto de las cadenas fijas sobre T_{100} considerando que dos cadenas fijas cualesquiera son equivalentes si y solo si corresponden al mismo operador aditivo. Geométricamente implica que si hacemos coincidir la celdilla inicial de ambas cadenas, entonces también coincidirán las celdillas finales. A cada una de las clases de equivalencia así obtenida la denominamos cadena libre.

Elección de las isometrías a estudiar

Las isometrías que vamos a considerar están condicionadas por las características geométricas de la cuadrícula y las cadenas, donde predominan celdillas cuadradas y ángulos que son múltiplos de 90.º:

1) Las *reflexiones* cuyos ejes son las líneas horizontales y verticales de la cuadrícula así como las líneas oblicuas de pendientes +45° y -45°, paralelas a las diagonales, y son:

R_v : *Reflexión de eje vertical.* El eje es una de las líneas verticales de la cuadrícula en T_{100}.

R_h : *Reflexión de eje horizontal.* El eje es una de las líneas horizontales de la cuadrícula en T_{100}.

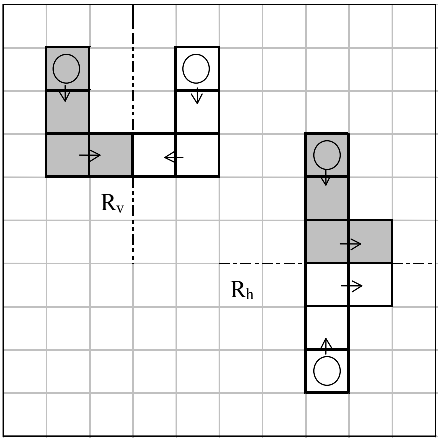


Figura 3. *Reflexiones en R_v y R_h*

R_{-45}: *Reflexión de eje oblicuo.* El eje es paralelo a la diagonal principal de la tabla y pasa por vértices opuestos de alguna celdilla de la cuadrícula en T_{100}.

R_{+45}: *Reflexión de eje oblicuo.* El eje es paralelo a la diagonal secundaria de la tabla y pasa por vértices opuestos de alguna celdilla de la cuadrícula en T_{100}.

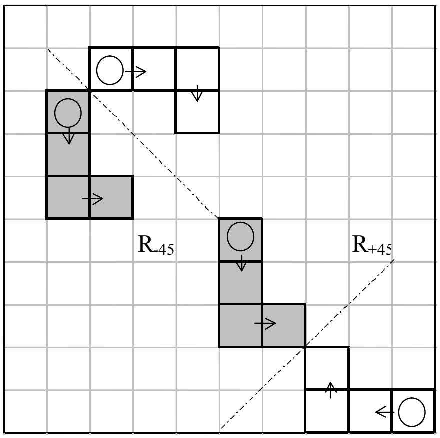


Figura 4. *Reflexiones en R_{-45} y R_{+45}*

2) Los ***giros,*** de centro un vértice de una celdilla, y ángulos 90°, 180°, 270° y 360°, que notamos G_{90}, G_{180}, G_{270} y G_{360} respectivamente. La Figura 5 ilustra los giros con centro el vértice superior derecho de la casilla origen:

Podemos considerar también *traslaciones y deslizamientos,* pero solamente estudiamos las *reflexiones* y los *giros,* ya que las traslaciones en T_{100} no afectan ni a la forma ni al significado aritmético de la cadena, y por ello, los deslizamientos se reducen al estudio de las reflexiones.

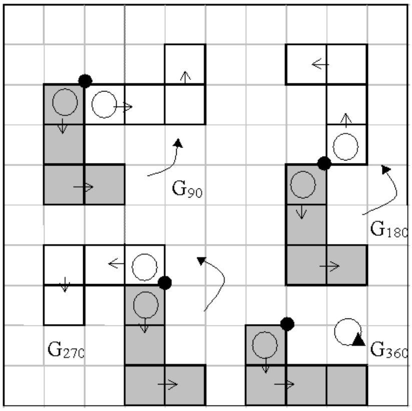
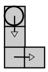


Figura 5. *Giros G_{90}, G_{180}, G_{270}, G_{360}*

Efecto de las isometrías sobre las cadenas fijas

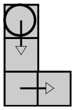
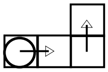
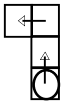
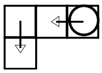
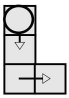
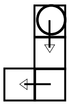
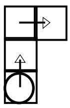
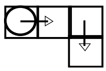
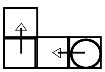
Si transformamos una cadena fija mediante alguna de las isometrías anteriores en T_{100}, se obtiene otra cadena fija, se produce un cambio geométrico y, por tanto, también cambia su operador aditivo asociado.

La tabla 2 ejemplifica los efectos geométrico y aritmético que produce cada una de las isometrías anteriores sobre la cadena  cuya expresión aritmética es $2^{+}1_{+}$ y su operador aditivo asociado [+21].

Un análisis de esta tabla, generalizando para cualquier cadena fija, permite establecer algunas propiedades de las cadenas resultantes al ser sometidas a las isometrías que hemos considerado en T_{100}:

1. La forma y orientación de la cadena imagen, y por tanto su operador asociado, no dependen ni del centro de giro elegido ni de la posición relativa del eje de reflexión, sino del ángulo de giro y la pendiente de dicho eje (Figuras 6 y 7).
2. El número de celdillas de la cadena resultante se conserva.
3. G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} permutan las casillas verticales por las horizontales (salvo la orientación). En cambio G_{180}, G_{360}, R_{v} y R_{h} , además conservan el número de celdillas verticales y de celdillas horizontales, aunque pueden cambiar la orientación.

Tabla 2. *Efecto geométrico y aritmético de algunas isometrías sobre la cadena 2+1+*

	Expresión geométrica	**Expresiones aritmética y polinómica**	**Operador asociado**	**Efecto de la transformación d=decenas u=unidades**
Cadena origen sobre la que actúa la transformación		$\mathbf{2^{+}1_{+}}$=2x10+1=21	[+21]	
Transformada mediante G_{90}		$\mathbf{2_{+}1^{-}}$= (-1)x10+2 = -8	[-8]	**d → u** **u → -d**
Transformada mediante G_{180}		$\mathbf{2^{-}1_{-}}$= (-2)x10-1 = -21	[-21]	**d → -d** **u → -u**
Transformada mediante G_{270}		$\mathbf{2.1^{+}}$=1x10-2= +8	[+8]	**d → -u** **u → d**
Transformada mediante G_{360}		$\mathbf{2^{+}1_{+}}$ = 2x10+1= +21	[+21]	**d → d** **u → u**
Transformada mediante R_{v}		$\mathbf{2^{+}1_{-}}$ = 2x10-1= +19	[+19]	**d → d** **u → -u**
Transformada mediante R_{h}		$\mathbf{2^{-}1_{+}}$= (-2)x10+1 = -19	[-19]	**d → -d** **u → u**
Transformada mediante R_{-45}		$\mathbf{2^{+}1_{+}}$= 1x10+2= +12	[+12]	**d → u** **u → d**
Transformada mediante R_{+45}		$\mathbf{2.1^{+}}$= (-1)x10-2= -12	[-12]	**d → -u** **u → -d**

4. Debido a la propiedad anterior, G_{180}, G_{360}, R_{v} y R_{h} transforman cadenas fijas simples (formadas como máximo, por un sólo tramo vertical y un sólo tramo horizontal) en cadenas fijas simples, mientras que G_{90}, G_{270}, R_{-45} y R_{+45} transforman cadenas fijas simples en cadenas no simples, ya que permutan el orden "decenas, unidades".

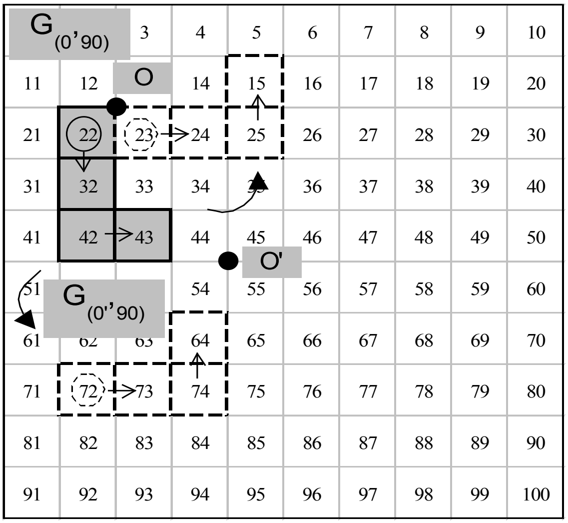


Figura 6. *El efecto aritmético de los giros no depende del centro de giro*

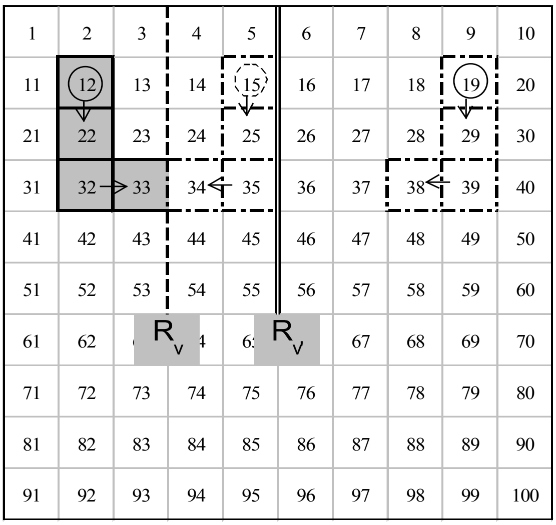


Figura 7. *Las cadenas transformadas de $C(2^{+}1_{+})$ mediante R_{v} y $R_{v'}$ respectivamente, tienen la misma forma y orientación: representan al mismo*

5. El giro G_{360} deja invariante, en sentido estricto, a cualquier cadena.

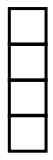
6. El giro G_{180} transforma la cadena original $C(2^{+}1_{+})$ en su cadena opuesta $C(2^{-}1_{-})$, y por tanto al operador asociado [+21], en su opuesto [-21].

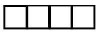
En general, G_{180} transforma la cadena $C(a^{\pm} b_{\pm})$ correspondiente al operador aditivo [10(±a)±b))] en su cadena opuesta $C'(a^{\mp} b_{\mp})$, que corresponde al operador [-(10(±a)±b))], opuesto del anterior.

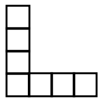
7. Algunas cadenas son *aritméticamente invariantes* frente a algunas transformaciones:

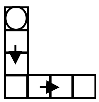
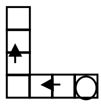
— Cualquier cadena cerrada (la casilla origen coincide con la casilla final), es aritméticamente invariante frente a las isometrías en T_{100} anteriormente definidas.

— Los giros, excepto la identidad G_{360}, dejan aritméticamente invariantes solamente a las cadenas cerradas.

— R_v deja aritméticamente invariantes las cadenas que sólo tienen casillas verticales  cuya expresión aritmética es de la forma $a^{\pm}0$.

— R_h deja aritméticamente invariantes las cadenas que sólo tienen casillas horizontales  cuya expresión aritmética es de la forma $0b_{\pm}$

— R_{-45} deja aritméticamente invariantes las cadenas que tienen igual número de casillas horizontales que verticales,  cuya expresión aritmética es $a^{\pm}a_{\pm}$

— R_{+45} transforma las cadenas que tienen igual número de casillas horizontales que verticales,  del tipo $a^{\pm}a_{\pm}$ en sus opuestas  del tipo, $a^{\mp}\ a_{\mp}$ y deja aritméticamente invariantes las cadenas de la forma $a^{+}a_{-}$ y $a^{-}a_{+}$, como por ejemplo $3^{+}3_{-}$ y $3^{-}3_{+}$

7. Las reflexiones R_v y R_h producen efectos aritméticos opuestos sobre cualquier cadena. Así R_v transforma la cadena $2^{+}1_{+}$ asociada al operador [+21] en la cadena $2^{+}1_{-}$, asociada al operador [+19]. En cambio R_h transforma la cadena $2^{+}1_{+}$, asociada al operador [+21] en la cadena $2^{-}1_{+}$ asociada al operador [-19]. (Figura 8). Igual ocurre con G_{90} y G_{270} y con R_{-45} y R_{+45} (Figuras 9 y 10).

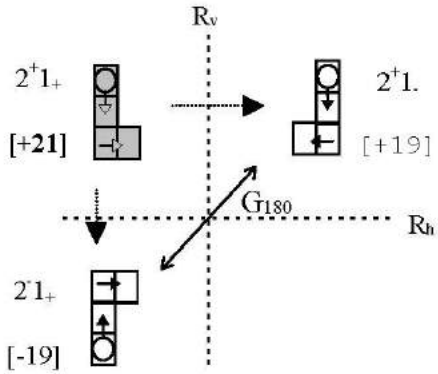


Figura 8. *R_v y R_h efectos opuestos*

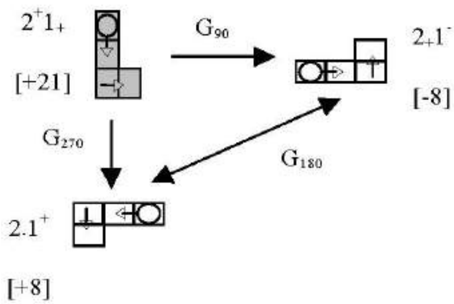


Figura 9. *G_{90} y G_{270} efectos opuestos*

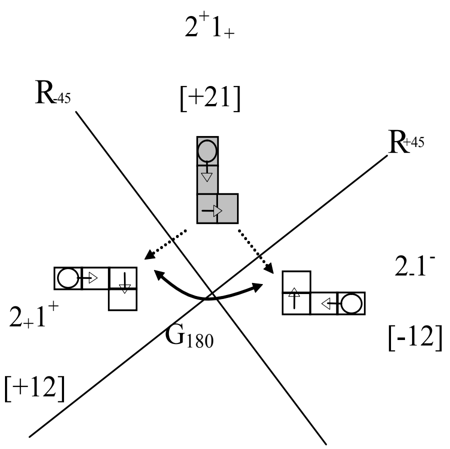


Figura 10. *efectos opuestos de R_{-45} y R_{+45}*

El estudio sobre el efecto producido por estas isometrías sobre los operadores aditivos en T_{100} en forma de cadenas (Ruiz, 2000), se extiende a otros aspectos por el mero hecho de considerar la composición de isometrías, obteniendo por ejemplo, el grupo de isometrías en T_{100} sobre las cadenas fijas o grupo cíclico de orden 8, así como los subgrupos correspondientes, y los efectos de estos grupos de isometrías sobre otros aspectos de las cadenas tales como las cadenas libres o clases de equivalencia de cadenas fijas, y cómo afecta a sus representantes canónicos elegidos.

Este trabajo no es más que un experimento que conjuga ambos ámbitos aritmético y geométrico, y que como consecuencia de la búsqueda de regularidades y patrones en tablas numéricas, hemos podido aplicar isometrías a representaciones gráficas de operadores aditivos, y estudiar sus efectos.

REFERENCIAS

AJOSE, S. (1991). Patterns in the hundred squared chart. Part 1. *The Mathematics Teacher, 84*(1), 43-48.

LITWILLER, B.H. y DUNCAN, D. R. (1980). *Activities for the maintenance of computational skills and the discovery of patterns.* Reston, VA: NCTM.

RUIZ, F. (2000). La Tabla-100. Representaciones geométricas de relaciones numéricas. Un estudio con profesores de primaria en formación. Tesis doctoral. Universidad de Granada, Granada.

— (2001) Representaciones gráficas y simbólicas para los operadores aditivos. En P. Gómez y L. Rico (Eds), *Iniciación a la investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 313-325). Granada, España: Editorial Universidad de Granada.

THORNTON, C., JONES, G. y NEAL, J. (1995). The 100 chart: A stepping stone to mental mathematics. *Teaching Children Mathematics, 1*(4), 480-483.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN EN FENÓMENOS ORGANIZADOS POR LOS LÍMITES FINITOS DE SUCESIONES Y FUNCIONES

Representation systems in the phenomena organised by the finite limits of sequences and function

María Teresa Sánchez Compaña
Universidad de Málaga

RESUMEN

En este trabajo presentamos como los autores de libros de texto y los profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato emplean diferentes sistemas de representación para presentar las nociones de límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto. Analizamos como varios fenómenos organizados por estas definiciones son expresados por diferentes sistemas de representación en el sentido dado por Janvier (1987 y 1993).

Palabras clave: fenomenología, límites finitos de sucesiones y funciones, pensamiento matemático avanzado, representaciones.

ABSTRACT

In this text we show how textbook authors and high school and A-level mathematics teachers use different representation systems to introduce the notions of finite limit of a sequence and finite limit of a function at a point. We then analyse how various phenomena organised by these definitions are expressed in different representation systems in Janvier's sense (1987 and 1993).

Keywords: *advanced mathematical thinking, finite limits of sequences and functions, phenomenology, representations.*

Introducción

Presentamos avances de una parte de nuestra investigación teórica y aplicada cuya meta principal es el estudio de las definiciones ε-N de límite finito de una sucesión y la ε-δ de límite finito de una función en un punto, que tiene dos finalidades principales: (a) caracterizar fenómenos organizados por dichas definiciones y (b) validar externamente la presencia de estos fenómenos en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Reconocemos que el aprendizaje del límite requiere una capacidad lógica-abstracta que muchos incluimos en el denominado pensamiento matemático avanzado (Dreyfus, 1991; Tall, 1991). Entendemos que la fenomenología (Freudenthal, 1983) aporta un enfoque de los conceptos matemáticos que permite abordar cuestiones problemáticas de enseñanza y aprendizaje, integrándose fácilmente con el pensamiento matemático avanzado y las representaciones al elaborar unidades didácticas sobre el límite. En la enseñanza del límite se vienen observando diferentes representaciones, término que usamos en el sentido de Janvier (1987 y 1993).

En Claros, Sánchez y Coriat (2006), Claros (2010) y Sánchez (2012) hemos puesto de manifiesto la importancia de usar los sistemas de representación verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico en la enseñanza del límite. Con ayuda de los sistemas de representación se expresan y observan algunos fenómenos organizados por las definiciones de límite finito de una sucesión y límite finito de una función en un punto. Estos fenómenos suelen presentarse usando alguna de estas representaciones, aunque son independientes de éstas. Esta estabilidad del fenómeno ayuda a reconocer cómo se presenta la idea de límite usando diferentes sistemas de representación y a transitar por diferentes representaciones del mismo fenómeno.

Comenzamos el capítulo describiendo y caracterizando dichos fenómenos, a continuación, nos centramos en las nociones de representación y sistemas de representación. Esto nos lleva a presentar un análisis de como los fenómenos descritos se expresan mediante los diferentes sistemas de representación. Para ello nos basamos en los resultados obtenidos de dos estudios experimentales. En el primer estudio experimental se realizó un análisis exhaustivo de libros de texto de secundaria y bachillerato, cuyos resultados se encuentran en Claros, Sánchez y Coriat (2016). Como resultado del segundo estudio (véase Sánchez, 2012) se han podido establecer distintos tipos de perfiles fenomenológicos de profesores respecto al límite finito de una función en un punto. Terminamos mostrando muy brevemente algunas conclusiones y perspectivas.

Fenomenología del límite finito de una sucesión y de una función en un punto

En el equipo de investigación, formado por el homenajeado y querido profesor Don Moisés Coriat Benarroch, Francisco Javier Claros Mellado y María Teresa Sánchez Compaña, hemos estudiado algunos fenómenos organizados por una definición de límite finito de una sucesión Claros (2010), y por otra de límite finito de una función en un punto Sánchez (2012). Para elegir la definición a estudiar en el caso de la sucesión, llevamos a cabo una consulta a expertos en la que se presentaban a varios docentes de centros superiores siete definiciones extraídas de manuales universitarios. Como resultado de esta consulta se eligió la definición S que denominamos coloquialmente *ε-N* y que presentamos a continuación.

> Sea x_n una sucesión en R, decimos que x_n converge a un número real x (o tiene como límite el real x y escribimos lim x_n= x) si para cada ε>0, existe un número natural N tal que si n > N se cumple que $|x_n-x|$ <ε. (Spivak, 1991, p. 615)

La definición S permite organizar dos fenómenos. El fenómeno a.s.i se refiere a la convicción que adquirimos cuando al avanzar en la sucesión los valores de la variable dependiente parecen acercarse a un cierto valor x. Este fenómeno simplemente genera nuestra convicción en tal hecho, pero no prueba nada. De esto se ocupa la propia definición, y es ahora cuando caracterizamos el fenómeno i.v.s, ya que justamente es la propia definición la que prescribe construir una función *ε*-N, que va desde *x* y un entorno arbitrario, hasta N, de manera que construyendo las imágenes de las x_n que se obtienen en la sucesión a partir de este valor N, no nos salgamos del entorno de x inicialmente elegido. El que esto ocurra para cualquier tamaño del entorno de centro x, lo garantiza, si la sucesión tiene el límite indicado, la función construida *ε*-N, como es bien sabido.

Por su analogía formal hemos seleccionado la definición F, para el caso del límite finito de una función en un punto, denominada coloquialmente *ε-δ*, que es la siguiente.

> La función f tiende hacia el límite L en a significa: para todo $\varepsilon > 0$ existe algún $\delta > 0$ tal que, para todo x, si $0 < |x-a| < \delta$, entonces $|f(x)-L| < \varepsilon$. (Spivak, 1991, p. 118).

La definición F permite organizar otros dos fenómenos. El fenómeno ADI se refiere a la convicción que adquirimos cuando los valores de la variable independiente se acercan a un cierto valor *a* y los de la variable dependiente se acercan a un valor L. Este fenómeno simplemente genera nuestra convicción en tal hecho, pero no prueba nada. De esto se ocupa la propia definición, y es ahora cuando caracterizamos el fenómeno IVF, ya que justamente es la propia definición la que prescribe construir una función *ε*-δ, que va desde L y un entorno arbitrario, hasta a y un entorno asociado, de manera que construyendo las imágenes de las x que se hallan en este último, no nos salgamos del entorno de L inicialmente elegido. El que esto ocurra para cualquier tamaño del entorno de centro L, lo garantiza, si la función tiene el límite indicado, la función construida *ε*-δ, como es bien sabido.

Representaciones y sistemas de representación

Castro y Castro (1997) afirmaron que las representaciones ayudan a generar imágenes y objetos mentales, que colaboran en la formación de conceptos y procedimientos matemáticos. La expresión «sistema de representación» se refiere al conjunto de símbolos, gráficos y reglas que permiten representar una estructura matemática. Para estos autores, se domina un concepto cuando se conocen sus principales representaciones y las traducciones entre ellas.

Kaput (1983) considera que la representación es independiente de los símbolos que se usen y es considerada como una abstracción o idealización en matemáticas.

Para Dreyfus (1991) los procesos relacionados con la representación son: representación, cambio de representaciones, traducción y modelización.

Janvier (1987) trabajó sobre la noción de función, considerando que las representaciones asociadas se pueden clasificar en cuatro clases: (a) analítica, (b) tabla, (c) gráfica y (d) verbal. Afirmó que, aunque todas contienen la misma información, ponen en juego diferentes procesos cognitivos, cada uno de ellos estrechamente relacionado con los otros. La expresión analítica conecta con la capacidad simbólica y se relaciona principalmente con el álgebra. La representación en forma de tabla pone de manifiesto los aspectos numéricos y cuantitativos. La representación gráfica conecta con la visualización y se relaciona con la geometría y la topología, mientras que la representación verbal se relaciona con la capacidad lingüística de las personas y es básica para interpretar y relacionar las otras tres.

Tall (1996) propuso una clasificación de los sistemas de representación que se usan en la enseñanza de nociones propias del análisis, particularmente del límite. Esta clasificación está sustentada en la utilización de los ordenadores como herramienta didáctica.

Rico (2000) recomienda que, a la hora de considerar los sistemas de representación en la enseñanza, se seleccionen los más adecuados para cada concepto y cada edad.

Respecto a la enseñanza del límite de sucesiones, Mamona-Downs (2001) realizó una serie de aportaciones en relación con los sistemas de representación utilizados. Identificó que el sistema de representación gráfico puede ser considerado como un sistema donde toda la información que conlleva la definición puede ser fielmente embebida, pese a los problemas que pueden surgir al trabajar con las sucesiones constantes.

Engler, Vrancken, Hecklein, Müller y Gregorini (2007) presentaron una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de una función en un punto. En ella insistieron en la importancia de usar las representaciones verbal, tabular, numérica, analítica y gráfica. Entre otras cosas, diseñaron actividades dirigidas a favorecer al paso de un sistema de representación a otro.

Blázquez y Ortega (2000 y 2001) propusieron trabajar la noción de límite en educación secundaria usando los sistemas de representación verbal, numérico, gráfico y algebraico, considerando que el concepto de límite de una función en un punto se representa verbalmente como la aproximación óptima de los valores de la función en un entorno del punto. El sistema de representación numérico es un proceso de tendencia basado en una tabla de valores e imágenes de éstos en la que cualquier aproximación del límite, distinta de él, se podría mejorar con las imágenes de valores cercanos al punto de interés. El límite, en el sistema de representación gráfico se presenta como un punto del eje OY tal que a todo segmento que le contiene le corresponde otro en torno al punto de interés, que se proyecta dentro de él. En el sistema de representación algebraico aparece la definición métrica de límite en los términos usuales de $\varepsilon - \delta$, que son los controles de las aproximaciones, o la definición topológica de entornos. Blázquez y Ortega (2001) confían en que «La utilización de distintos registros (algebraico, numérico, gráfico, verbal) mejora la comprensión del concepto de límite» (p. 8). Enuncian dos conclusiones:

> La utilización de distintos sistemas de representación a la hora de trabajar el concepto de límite choca con las dificultades del cambio de sistema de representación, que puede ser, en parte, un obstáculo didáctico, puesto que en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico y, además de descuidar el resto de representaciones, no se ha incidido en los cambios entre ellos.
>
> En la secuencia de enseñanza se puso de manifiesto cómo el uso de distintas representaciones favorece el aprendizaje y lo hace de dos formas: por un lado compensa las limitaciones de unas representaciones con otras, y por otro, permite que los alumnos se formen una imagen conceptual más rica, pudiendo escoger la representación más apropiada para cada situación. (pp. 12-13).

Claros, Sánchez y Coriat (2006), Claros (2010) y Sánchez (2012) han puesto de manifiesto la importancia de usar los sistemas de representación verbal, gráfico, simbólico y tabular o numérico en la enseñanza del límite. Con ayuda de los sistemas de representación se expresan y observan algunos fenómenos organizados por una definición de límite. Y estos pueden aparecer inmersos tanto en un ejemplo como en una definición. «Para los primeros hay cuatro posibilidades, que designamos con los términos gráfico, verbal, tabular y simbólico, y para los segundos, dos, que designamos con los términos ejemplo y definición.» (Claros, 2010, p. 152).

Como consecuencia de todo lo anterior podemos afirmar que cada fenómeno (a.s.i, i.v.s, ADI e IVF), puede introducirse usando un sistema de representación (de cuatro posibles) y un formato (de dos posibles); esto exige considerar, para cada fenómeno, ocho presentaciones que denominamos *código de fenómeno*. En total son 32 códigos de fenómeno posibles y su significado. A continuación describimos uno de ellos a modo de ilustración, incluyendo un ejemplo procedente del estudio con libros de texto realizado en Sánchez (2012).

> Intuitivamente, se puede pensar en el límite de la función $y = f(x)$ en el punto $x = a$ como el valor al que tienden las imágenes, y, cuando los originales, x, tienden hacia a.

Figura 1. *ADI V-D (Negro, Benedicto, Martínez y Poncela, 1997, p. 219)*

El autor se apoya en el fenómeno de aproximación doble intuitiva (ADI), ya que lo único que hace notar es cómo la variable dependiente se acerca a un valor cuando la independiente se acerca al punto en el que se está calculando el límite. Para ello utiliza la representación verbal (V) y lo presenta en una definición (D).

Sistemas de representación en fenómenos organizados por los límites finitos de sucesiones y funciones

En este apartado vamos a presentar un análisis de como los fenómenos descritos se expresan mediante los diferentes sistemas de representación. Para ello nos basamos en los resultados obtenidos en los estudios experimentales llevados a cabo en Claros (2010) y Sánchez (2012), con los que se validó externamente la presencia de los fenómenos en los procesos de enseñanza-aprendizaje. En el primer estudio experimental se realizó un análisis exhaustivo de libros de texto de secundaria y bachillerato, cuyos resultados se encuentran en Claros, Sánchez y Coriat (2016). Como resultado del segundo estudio se han podido establecer distintos tipos de perfiles fenomenológicos de profesores respecto al límite finito de una función en un punto.

En la tabla 1 se recoge la información obtenida del primer estudio experimental que consistió en el análisis de libros de texto. Seguida se una serie de observaciones que expresan con palabras algunas informaciones:

Tabla 1. *Recuento de los códigos de los fenómenos observados en libros de texto*

	Verbal Ejemplo	*Verbal Definición*	*Gráfico Ejemplo*	*Gráfico Definición*	*Tabular Ejemplo*	*Tabular Definición*	*Simbólico Ejemplo*	*Simbólico Definición*
a.s.i	26	7	36	0	12	0	0	0
i.v.s	13	25	7	7	1	0	37	12
ADI	31	18	14	2	22	0	0	1
IVF	12	21	8	12	0	0	15	17

Fenómeno a.s.i

Para presentar el fenómeno a.s.i, en los libros de texto de la muestra, se usan, los sistemas de representación gráfico (36 ocurrencias) o verbal (33), seguidos, a distancia, por el tabular (12). Para ello se emplea, preferentemente, el formato ejemplo (74 ocurrencias) y, en ocasiones, el formato definición (7). La razón de ocurrencias es de 10:1.

Fenómeno i.v.s

Para presentar el fenómeno i.v.s, en los libros de texto de la muestra, se usan los sistemas de representación en el orden que sigue, por número de ocurrencias: simbólico (49), verbal (38), gráfico (14) y tabular (1). Los formatos, se usan indistintamente, ejemplo (58 ocurrencias) o el formato definición (49).

Fenómeno ADI

Para presentar el fenómeno ADI, en los libros de texto de la muestra, se usan, los sistemas de representación verbal (49 ocurrencias), seguido del tabular (22), el gráfico

(16), y con una sola observación el simbólico. Para ello se enplea, preferentemente, el formato ejemplo (67 ocurrencias) y, en ocasiones, el formato definición (21). La razón de ocurrencias es aproximadamente de 3:1.

Fenómeno IVF

Para presentar el fenómeno IVF, en los libros de texto de la muestra, se usan los sistemas de representación en el orden que sigue, por número de ocurrencias: verbal (33), simbólico (32) y gráfico (20). El tabular no se emplea. Los formatos, se usan indistintamente, ejemplo (47 ocurrencias) o el formato definición (50).

Respecto a los sistemas de representación

En el sistema de representación verbal ocurre lo siguiente:

— Los fenómenos a.s.i y ADI son más frecuentes en el formato ejemplo, mientras que el fenómeno i.v.s y el IVF son más frecuentes en el formato definición.

En el sistema de representación gráfico observamos:

— El fenómeno a.s.i se usa solamente en el formato ejemplo y el número de ocurrencias es superior al del fenómeno i.v.s, que se usa en los dos formatos (ejemplo y definición).

— El fenómeno ADI aparece en los dos formatos, siendo más frecuente el formato ejemplo. Frecuencia que se invierte en el caso del fenómeno IVF.

En cuanto al sistema de representación tabular observamos:

— Los fenómenos que aparecen, solamente lo hacen en el formato ejemplo. En su mayoría en el caso de los fenómenos intuitivos. Apareciendo solamente en una ocasión el fenómeno i.v.s.

En el sistema de representación simbólico observamos:

— No consta que el fenómeno a.s.i se use en ninguno de los formatos; en cambio, el fenómeno i.v.s se usa en los dos. Además, al código i.v.s s-e le corresponde la máxima frecuencia registrada en la tabla 1.

— Para la función el fenómeno ADI aparece solo en una ocasión en formato definición, mientras que el IVF se emplea casi por igual en los dos formatos.

Sistemas de representación de los fenómenos ADI e IVF en relatos de profesores

En la tabla 2 se recoge la información obtenida del segundo estudio experimental que consistió en entrevistar a profesores de matemáticas de secundaria y bachillerato. En las entrevistas se comentaba como trabajaban en el aula la noción de límite finito de una función en un punto, por lo que los resultados que presentamos solo corresponden a los fenómenos ADI e IVF.

Tabla 2. *Recuento de los códigos de los fenómenos ADI e IVF observados en relatos de profesores*

	Verbal Ejemplo	Verbal Definición	Gráfica Ejemplo	Gráfica Definición	Tabular Ejemplo	Tabular Definición	Simbólico Ejemplo	Simbólico Definición
ADI	7	10	10	9	10	0	0	0
IVF	5	7	9	9	0	0	13	11

Fenómeno ADI

Los profesores, en su relato al hacer comentarios referentes al fenómeno ADI, usan, los sistemas de representación gráfico (19 ocurrencias), seguido del verbal (17) y el tabular (10). En ningún momento emplean el simbólico. Se usa, preferentemente, el formato ejemplo (27 ocurrencias) y, en menos ocasiones, el formato definición (19).

Fenómeno IVF

Para referirse al fenómeno IVF, emplean los sistemas de representación en el orden que sigue, por número de ocurrencias: simbólico (24), gráfico (18) y verbal (12). El tabular no se emplea. Se refieren, indistintamente, al formato ejemplo (27 ocurrencias) o al formato definición (27).

Respecto a los sistemas de representación

En el sistema de representación verbal ocurre lo siguiente:

— Para ambos fenómenos este sistema de representación es más frecuente en el formato definición.

En el sistema de representación gráfico observamos:

— Para ambos fenómenos este sistema de representación es comentado de manera indiferente para los dos formatos.

En cuanto al sistema de representación tabular observamos:

— Los fenómenos que aparecen, solamente lo hacen en el formato ejemplo, y en su totalidad respecto al fenómeno ADI.

En el sistema de representación simbólico observamos:

— No consta ningún comentario del fenómeno ADI en este sistema de representación.

— El fenómeno IVF se emplea casi por igual en los dos formatos.

Conclusiones y epílogo

A lo largo de la investigación hemos observado cómo, y en qué contextos, para hacer patentes estos fenómenos, se emplea algún sistema de representación (verbal, gráfico tabular o simbólico), y algún formato específico (ejemplo o definición).

Destacar que la pluma del profesor Moisés Coriat está detrás de todas y cada una de las palabras aquí escritas. De nuevo aprovecho para agradecerle ante todo el tesoro de la guía, ese compañero de experiencias, el temple que tanto he necesitado. Que estos dulces episodios de la lucha perduren en mi memoria, como otra nueva etapa que sigo compartiendo con él y destacar que todo es mérito exclusivamente suyo.

Referencias

Blázquez, S. y Ortega, T. (2000). El concepto de límite en la educación secundaria. En R. Cantoral (Ed.), *En el futuro del cálculo infinitesimal* (pp. 331-354). México DF: Grupo Editorial Iberoamérica.

— (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *RELIME, 4*(3), 219-236.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y Modelización. En L. Rico, *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 95-124). Barcelona: Horsori-ICE Universitat de Barcelona.

Claros, F. J., Sánchez, M. T. y Coriat, M. (2006). Fenómenos que organizan el límite. *Investigación en Educación Matemática X*, 157-171.

Claros, F. J. (2010). *Límite finito de una sucesión: fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Claros, F. J., Sánchez, M. T., y Coriat, M. (2016). Tratamiento del límite finito en libros de texto. *Educación Matemática, 28*(1), 125-152.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

Engler, S., Vrancken, M., Hecklein, D., Müller & Gregorini, M. I. (2007). Análisis de una propuestas didáctica para la enseñanza del límite finito de una variable finita. Union. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 113-132.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht, Países Bajos: Reidel Publishing Company.

Janvier, C. (1987). *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Janvier, C., Girardon, C. y Morand, J. (1993). Mathematicasl symbols and repreentations. En P. Wilson (Ed.), *Research ideas for the classrom: High school mathematics* (pp. 79-102). Reston, VA: NCTM.

Kaput, J. (1983). Representations Systems and Mathematics. En C. Bergeron, & N. Herscovics (Ed.), *Proceedings of the Fifth Annual Meeting of PME-NA, 2,* pp. 57-66. Montreal.

Mamona-Downs, J. (2001). Letting the intuitive bear on the formal; a didactical aproach for the understanding of the limit of a sequense. *Educational Studies in Mathematics, 48*(2-3), 259-288.

Negro, A., Benedicto, C., Martínez, M. y Poncela, J. M. (1997). *Mátemáticas 2. CCNN.* Madrid, España: Santillana.

Rico, L. (2000). *Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en Educación Matemática.* Huelva (paper): IV Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (S.E.I.E.M).

Sánchez, M. T. (2012). *Límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza.* Tesis Doctoral. Universidad de Granada, Granada.

Spivak, M. (1991). *Calculus. Cálculo Infinitesimal.* Barcelona, España: Reverté.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Dordrecht, Países Bajos: Kluwer

— (1996). Functions and Calculus. En A. Bishop (Ed.), *International handbook of mathematics education* (pp. 289-325). Dordrecht, Países Bajos: Kluwer.

REFLEXIONES SOBRE LA CONSTRUCCIÓN DEL SENTIDO EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

Reflections on the construction of meaning in the initial training of mathematics teacher

Sara Scaglia
Universidad Nacional del Litoral

Resumen

En este artículo reflexionamos en torno a la problemática de la construcción del sentido sobre los modos de hacer y validar en matemática en una experiencia desarrollada durante la formación inicial del profesorado. En la primera parte presentamos algunas perspectivas teóricas en torno a la problemática de la construcción del sentido en matemática. En la segunda parte describimos una experiencia desarrollada durante una clase de teoría elemental de números con futuros profesores, a la luz de las perspectivas consideradas. Esperamos caracterizar el tipo de trabajo que podría contribuir a la construcción del sentido en los espacios curriculares destinados a la formación disciplinar del futuro profesor de matemática.

Palabras clave: conjeturas, construcción del sentido, perspectivas.

Abstract

In this article we reflect on the problem of making meaning about the ways to make and validate maths in a experience developed during the initial training of future teachers. In the first part we present some theoretical perspectives on the issue of the construction of meaning in mathematics. In the second part we describe an experience developed during a class of elementary number theory with future teachers, in light of the considered perspectives. We expect to characterize the type of work that could contribute to the construction of meaning in curricular spaces for disciplinary training of the future mathematics teacher.

Keywords: *conjectures, meaning constructing, perspectives.*

Introducción

La construcción del sentido de las nociones e ideas trabajadas en el aula de matemática constituye una preocupación compartida por la comunidad de educadores matemáticos. Sadovsky (2005) sostiene que la escuela proporciona una oportunidad privilegiada para que los sectores populares accedan a los productos de la cultura considerados valiosos por la sociedad. Si bien esto no significa para el alumnado una mejora en la escala social, puede promover una transformación subjetiva atravesada por el trabajo intelectual que «lo posicionará en la sociedad con más y mejores herramientas. [...] En muchos casos hay una gran distancia entre estas expectativas y las experiencias educativas que realmente tienen los jóvenes. Examinar esa distancia requiere hablar del sentido» (p. 11).

El párrafo anterior expresa la problemática de la construcción del sentido a partir de la preocupación por los jóvenes que transitan la escolaridad obligatoria. Sin embargo, Sadovsky reconoce que la cuestión del sentido afecta directamente al trabajo docente, caracterizado en la actualidad por un signo de frustración. «Los profesores se sienten *tironeando* a los alumnos a donde ellos no parecen querer ir. Hablar del sentido es hablar de lograr un modo de trabajo más satisfactorio, más placentero, hablar del sentido es casi una reivindicación gremial» (p. 11).

Bajo la asunción de que las ideas matemáticas no existen independientemente de las prácticas asociadas a ellas (Sadovsky, 2005), nos preguntamos acerca del tipo de experiencias que podrían favorecer la construcción del sentido durante la formación inicial del profesorado de matemática, y en particular, en los espacios curriculares destinados a la formación disciplinar.

El profesor de matemática debe tomar a su cargo la enseñanza del razonamiento matemático y de los modos de hacer y validar propios de esta ciencia, en relación con los contenidos que se abordan. Aprender a razonar de acuerdo con las reglas del pensamiento matemático no es algo que se dé de manera espontánea, sino que debe prepararse al alumnado para ello. No sólo se precisan propuestas de enseñanza adecuadas sino, fundamentalmente, el logro de intervenciones docentes que se ajusten a los razonamientos de los alumnos y que intenten que los mismos se apropien de las formas de validación propias de la matemática (Panizza, 2005).

En este artículo nos interesa reflexionar sobre la posibilidad de crear entornos de aprendizaje durante la formación inicial del profesor de matemática en los que los estudiantes produzcan matemáticas y experimenten situaciones que puedan replicar en el futuro como docentes en la escuela secundaria. En la primera parte del artículo presentamos una selección de autores que focalizan en algunos aspectos que nos interesa destacar en la problemática de la construcción del sentido. En la segunda parte describimos una experiencia desarrollada durante una clase de aritmética con futuros profesores a la luz de las perspectivas consideradas sobre la construcción del sentido.

Algunas perspectivas en torno a la construcción del sentido[1]

El foco sobre las razones de ser del trabajo matemático

Chevallard (2013) afirma que los saberes matemáticos son obras que tienen una o varias razones de ser, que motivaron su creación y su empleo. Un determinado saber permite brindar una respuesta a una o varias preguntas. Este autor sostiene una mirada crítica sobre la tendencia a ocultar en la enseñanza de la disciplina las razones de ser de los saberes, que suelen ser valorados por sí mismos. Los saberes «se convierten, pues, en monumentos que uno visita, que uno reverencia y frente a los cuales conviene inclinarse sin siquiera intentar conocer las razones de ser que antaño le dieron vida» (p. 25).

Bosch, García, Gascón y Ruiz Higueras (2006) afirman que una cuestión matemática se estudia con sentido en la escuela si se cumplen los siguientes postulados:

— Legitimidad cultural o social: debe surgir de cuestiones que la sociedad propone que se estudien en la escuela.

— Legitimidad matemática: debe aparecer en determinadas *situaciones* ubicadas en la raíz central de las matemáticas.

— Legitimidad funcional: debe estar relacionada con otras cuestiones que se estudian en la escuela (de las matemáticas o de otras disciplinas).

Estos autores afirman que «si para una cuestión determinada no se construye una jerarquía que cumpla los postulados [anteriores], tal cuestión carece de *sentido*, puesto que ha desaparecido la *razón de ser* de su estudio en la escuela» (p. 42).

Según Chevallard (2005), la demostración constituye una noción paramatemática, es decir, una noción-herramienta que no suele ser objeto de estudio para el matemático (salvo durante el estudio de la lógica matemática). En el mismo sentido, consideramos que la formulación, contrastación y/o demostración de conjeturas constituyen nociones-herramientas que no siempre son incluidas como objetos de estudio en la formación del profesor. Pensamos, no obstante, que las legitimidades cultural, matemática y funcional de estas nociones son incuestionables.

En relación con la legitimidad cultural, una de las razones por las que se considera central el aporte de la matemática en la formación de los sujetos es que «constituye el campo en el que el niño puede iniciarse más tempranamente en la racionalidad, en el que puede forjar su razón en el marco de relaciones autónomas y sociales (Brousseau, 2007, p.11). Para abordar la legitimidad matemática basta considerar que no faltan quienes opinan que «sin demostración no hay matemáticas» (Davis y Hersh, 1989, p.115). Finalmente, la legitimidad funcional radica en que la necesidad de conjeturar

[1] El Diccionario de la Real Academia habilita la posibilidad de considerar como sinónimos los términos «sentido» y «significado». En este trabajo, sin embargo, se ha adoptado por uno u otro término, respetando los vocablos utilizados por los autores consultados con sus respectivas interpretaciones (que no resultan equivalentes).

y validar es una parte esencial de la resolución de problemas en los diversos dominios de la matemática.

El papel de las interacciones en el aula

Otra perspectiva que nos interesa retomar en la reflexión en torno a la construcción del sentido pone el foco en el papel de las interacciones que se producen entre los sujetos durante el trabajo en el aula de matemática.

Sadovsky (2005) considera (entre otros) este punto de vista al afirmar:

> Si bien el proyecto personal comporta un aspecto que es del ámbito de las decisiones íntimas para cada sujeto, se va conformando también a través del juego de interacciones que se promueven en la clase, de las intenciones del docente, de los intercambios que se propician, de las actividades que se priorizan. Efectivamente, un alumno pudo haber resuelto un problema sin poner en juego una perspectiva muy general, pero una invitación del docente a reexaminar de manera colectiva el problema una vez resuelto, cambiando por ejemplo las condiciones de los datos y analizando qué aspectos permanecen y cuáles se modifican, contribuye a modificar la posición del alumno y lo ayuda a instalarse en un proyecto más general. (Sadovsky, 2005, p. 37).

Zack y Graves (2002) investigan el papel del discurso en los significados construidos en el aula, a partir del intercambio que se produce entre el maestro y los niños. En su investigación se centran en cómo los niños se constituyen en participantes en la indagación matemática que están realizando a través del discurso, mientras resuelven problemas en equipo.

Para el estudio acerca de cómo el conocimiento puede ser creado y apropiado a través de la participación en la interacción, estos autores retoman las posiciones de Vygotski (1970, 1986, citado en Zack y Graves, 2002) y de Bakhtin (1986, citado en Zack y Graves, 2002) para explicar cómo las ideas de los demás se convierten en propias durante los intercambios.

Vygostski (1982) realiza una crítica a la investigación sobre la relación entre pensamiento y lenguaje y afirma que las posiciones de los psicólogos, en general, han oscilado entre dos extremos: por un lado, la identificación y fusión completa entre pensamiento y lenguaje y, por el otro, la ruptura y separación total, absoluta, entre ambos. Toma partido por una posición intermedia. Para explicar su postura, en primer lugar considera que una palabra no hace referencia a un objeto aislado cualquiera, sino a *todo un grupo o a toda una clase de objetos*. Esto lo lleva a afirmar que en cada palabra subyace una generalización («el significado de la palabra es ante todo una generalización» (p. 20). Además, afirma que la generalización «es un acto verbal extraordinario del pensamiento» (Vygotski, 1982, p. 20).

En efecto:

> Para transmitir a otra persona cualquier sensación o contenido de la conciencia no hay otro camino que catalogar el contenido que se transmite dentro de una clase determinada,

de un determinado grupo de fenómenos, y eso exige necesariamente una *generalización*. Resulta, por consiguiente, que *la comunicación presupone necesariamente la generalización y el desarrollo del significado verbal*, es decir, la generalización sólo es posible cuando se desarrolla la comunicación. (p. 22)

Esta interpretación lo conduce a sostener que el significado de la palabra constituye un acto de pensamiento. Basa su concepción en que «el significado es parte integrante de la palabra, pertenece al dominio del lenguaje en igual medida que al del pensamiento». Esto es así porque sin significado, la palabra es únicamente sonido vacío, por lo que dejaría de pertenecer al dominio del lenguaje. Por esa razón, afirma que «el significado puede ser considerado por igual como fenómeno del lenguaje y del pensamiento». (p. 21)

Ramírez Garrido (1982, p. V), en su interpretación de la obra de Vygotski afirma que «el conocimiento común, el hecho de participar de una misma experiencia hacen que el habla social de los participantes en el diálogo se asemeje extraordinariamente al habla interna de cada uno de ellos».

Zack y Graves (2002) retoman la noción de zona de desarrollo próximo de Vygotski, a la que consideran como un espacio intelectual que se crea durante la interacción entre participantes específicos que, en un momento también determinado, se comprometen con los demás durante una actividad. Afirman que durante la clase no sólo los alumnos aprenden, sino que también lo hace el profesor, dado que sus conocimientos y su rol se transforma en el proceso de interacción.

Estos autores, además, reflexionan en torno al rol del profesor en la comunidad del aula. En lugar de considerarlo como sujeto que proporciona el conocimiento, es el que lo orquesta. En su investigación, si bien reconocen que la práctica exitosa estuvo muy ligada a las habilidades del docente, destacan que su experticia tiene mucho que ver con el rol de «oyente serio» y co-aprendiz. Desde el punto de vista de la investigación educativa, nos interesa destacar el hecho de que estos autores sostienen que ciertas habilidades de los docentes para asumir ese rol pueden ser apropiadas. Por tanto, cabe preguntarse acerca de las intervenciones del docente que podrían favorecer u obstaculizar la construcción del sentido de las nociones involucradas con el fin de tenerlas en cuenta en los procesos de formación del profesor.

Desde esta perspectiva sociocultural interesa, además, prestar atención al rol que juegan las diferencias durante las interacciones, es decir, los desacuerdos, las interpretaciones erróneas, las dudas que surgen en clase durante los intercambios. Zack y Graves (2002) le otorgan un papel importante, y para ello recurren a la idea de alteridad de Bakhtin (1986, citado en Zack y Graves, 2002). Éste ve la comunicación como una tensión entre fuerzas contrarias que pulsan hacia la unidad, el acuerdo y la voz única, y que a su vez habilitan la multiplicidad, el desacuerdo y las múltiples voces. La diferencia, según Bakhtin (citado en Zack y Graves, 2002), sirve como un mecanismo de pensamiento, dada la función dialógica del lenguaje que permite el desacuerdo y las múltiples voces.

Retomando las consideraciones anteriores, y situándonos en la formación inicial del profesor de matemática, destacamos nuestro interés por abordar los modos de hacer y validar propios de la matemática en el estudio de un dominio específico (la teoría de números) a partir de entornos de aprendizaje en los que se promueve la interacción y el intercambio entre docente y estudiantes.

El significado de la acción

Skovsmose (2005) propone una mirada totalmente diferente a la problemática de la construcción de significado (término que utiliza en lugar de sentido). Plantea una crítica al paradigma predominante, que denomina 'conceptismo' dado que está focalizado sobre el significado de los conceptos matemáticos. Reflexiona acerca de la diferencia entre el «significado de un concepto matemático» y el «significado de una tarea (matemática)» en el marco de la práctica educativa. Sostiene que «para que los estudiantes adscriban significados a los conceptos que tienen que ser aprendidos, es esencial proporcionar significado a la situación educativa en la cual están involucrados» (p. 85).

En la tradición filosófica, la concepción de significado ha estado ligada generalmente a la de referencia (en el sentido de Frege) y según Skovsmose (2005) ese punto de vista ha tenido un lugar predominante en la matemática escolar. Para Frege «la referencia de un nombre propio es el objeto mismo que designamos con él» (Frege, 1996, p. 176). En el marco de este enfoque centrado, con la irrupción del constructivismo la pregunta principal cambió desde «¿Cuál es la referencia de este objeto?», hacia «¿Qué les permite hacer a las personas este concepto?». Este último interrogante liga el significado de un concepto a lo que la persona puede hacer por medio del concepto.

Skovsmose no acuerda con este paradigma porque considera que deja fuera cuestiones esenciales que deben tenerse en cuenta en el proceso educativo, como son el contexto socio-político y cultural de los estudiantes.

Para conocer la posición del autor con respecto al significado en educación matemática es preciso interpretar al aprendizaje como un tipo de acción, por lo que se cambia el foco de atención: se pasa del significado de los conceptos al significado de la acción. El estudiante que actúa debe estar en una situación en la que una elección sea posible, y debe tener alguna idea acerca de las metas que persigue y de las razones por las que lo hace. Estas acciones no suceden en forma mecánica sino que se fundan en intenciones. «Las intenciones representan […] el significado (personal) de la acción» (Skovsmose, 2005, p. 89).

Estas intenciones se basan en los antecedentes y el porvenir de la persona, que define del siguiente modo:

> Los antecedentes de una persona pueden ser interpretados como la red socialmente construida de relaciones pertenecientes a la historia del grupo social al cual la persona pertenece. Cuando uno trata de comprender las intenciones de un individuo, a menudo refiere a sus antecedentes. Pero igualmente importante es el porvenir de la persona. Por

éste, me refiero a aquellas oportunidades que la situación social pone a disposición del grupo social al cual la persona pertenece. (p. 89)

A partir de estas consideraciones, Skovsmose (2005) define el significado de la acción de una persona y lo plantea como un modelo que incluye sus antecedentes y su porvenir (que conforman las disposiciones) de la persona, sus intenciones, sus acciones y los efectos de las mismas (incluyendo los involuntarios), y la reflexión sobre esos efectos y el reajuste de las disposiciones como consecuencia de esos efectos. La discusión en torno al significado de una acción debe tener en cuenta la situación completa en la cual la acción se lleva a cabo.

Skovsmose (2005) propone contextualizar las actividades matemáticas para que resulten significativas para los estudiantes, de modo de que puedan discutir el significado de las tareas que llevan a cabo. Para este enfoque resulta apropiado el trabajo por medio de proyectos (que denomina escenarios de investigación) que involucren temáticas relacionadas con las características del grupo de estudiantes. Se trata de proponer situaciones particulares que tengan la potencialidad de promover un trabajo investigativo o de indagación (Skovsmose, 2000).

Desde esta perspectiva, nos interesa generar en la formación inicial del profesor de matemática la posibilidad de discutir en torno al significado de las tareas que llevan a cabo. En particular, en torno a la significación que tiene la generación y demostración de conjeturas en el trabajo matemático.

Una clase de aritmética en torno a la formulación y contrastación de conjeturas

La experiencia se desarrolla en el marco de la asignatura Matemática Discreta I de 2º año de la carrera Profesorado de Matemática, durante el estudio de la teoría elemental de números. Con el fin de estudiar algunas propiedades aritméticas a través de la formulación y análisis de conjeturas, se propone la siguiente tarea (adaptado de Torres, Nassif y Fedonczuk, 2010):

1) Prueba con los siguientes valores numéricos si se cumple la proposición:
*Si un número «**a**» divide al producto «**b . c**», entonces «**a**» divide a «**b**» o «**a**» divide a «**c**».*
a) $a = 2$; $b = 10$; $c = 5$
b) $a = 3$; $b = 3$; $c = 4$
c) $a = 5$; $b = 2$; $c = 30$
¿Se puede afirmar que esta proposición es verdadera? ¿Por qué?
(Luego de la discusión de esta primera parte, se plantea la siguiente consigna:)
2) Sabiendo que un número divide al producto de otros dos, ¿qué condiciones agregamos al enunciado para asegurar que divida a uno de ellos?

La primera consigna exige explorar un enunciado acompañado de algunos ejemplos para los cuales el mismo es verdadero. El planteo se propone con el fin de sortear uno de los obstáculos planteados por Balacheff (2000) en la enseñanza de la demostración, que refiere a la práctica de despojar a los estudiantes de la responsabilidad de la verdad. Por esa razón, en la tarea planteada en lugar de proponer la demostración de una propiedad dada, queda a cargo del alumno la determinación de la validez del enunciado.

Entre las respuestas esperadas se presentan básicamente dos posibilidades: analizar los tres ejemplos para los cuales se cumple la proposición y afirmar que es verdadera o hallar un contraejemplo y afirmar que es falsa.

La segunda consigna requiere la reformulación del enunciado original, lo que conduce a formular y contrastar/refutar conjeturas. Entre las condiciones posibles que el alumnado (futuros profesores) puede proponer figuran las siguientes: que ***a*** sea coprimo con ***b*** o con ***c***, o bien, que **a** sea un número primo[2]. Para analizar la veracidad de la nueva conjetura propuesta, es posible recurrir a métodos directos o indirectos de demostración y a la búsqueda de contraejemplos.

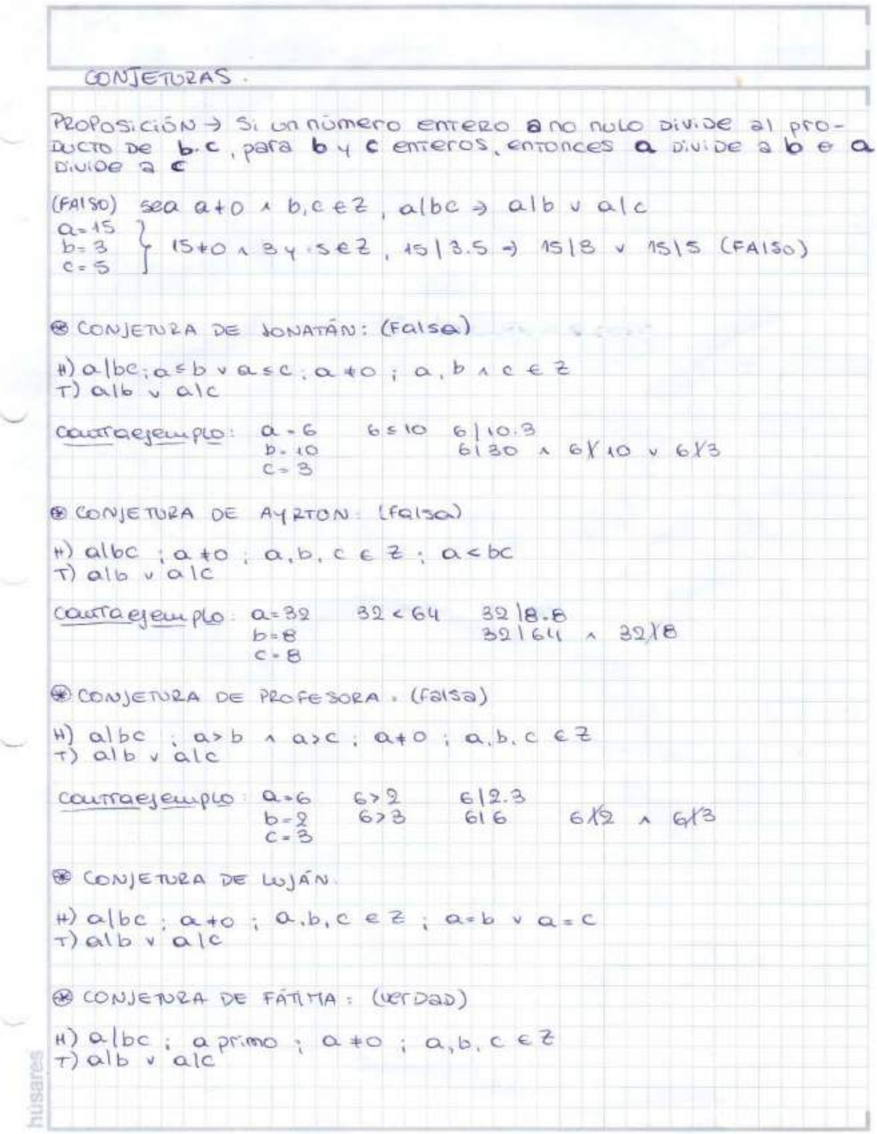
La Figura 1 contiene un resumen de las producciones generadas a partir de la tarea en una clase de futuros profesores, según fueron consignadas en la carpeta de trabajo de una estudiante[3]. Una vez descartada la conjetura inicial, se proponen cinco conjeturas nuevas, que se identifican a partir de los nombres de sus autores. Tres conjeturas resultan falsas, y en la carpeta de la estudiante se consignan contraejemplos para cada una. Las dos restantes son verdaderas, la cuarta es trivial (cuestión de la que se toma nota durante la discusión) y la clase continúa con la demostración de la quinta.

Para demostrar la conjetura se parte de la suposición de que a no es divisor de b (si lo fuera, quedaría probada la afirmación). Como a es primo, entonces a y b deben ser coprimos. Por tanto, existen números enteros m y n tales que am+bn = 1[4]. Se multiplica por c la igualdad anterior, de donde resulta: cam+bnc=c. Utilizando la hipótesis de que a es divisor de b.c, entonces resulta que a es divisor de cada sumando del primer miembro siendo, por tanto, divisor de la suma, es decir de c.

[2] En Scaglia y Kiener (2015) se realiza un análisis de lo sucedido durante la implementación de la tarea, centrado en las características y dificultades de la gestión de la clase por parte del docente.

[3] Los estudiantes mencionados han autorizado la inclusión de sus nombres.

[4] Se hace uso de propiedades demostradas anteriormente, vinculadas a las nociones de números primos y coprimos (dos números son coprimos cuando los únicos divisores en común que poseen son 1 y -1).


CONJETURAS.

PROPOSICIÓN → Si un número entero **a** no nulo divide al producto de **b.c**, para **b** y **c** enteros, entonces **a** divide a **b** o **a** divide a **c**

(FALSO) sea $a \neq 0 \wedge b, c \in \mathbb{Z}$, $a|bc \Rightarrow a|b \vee a|c$

$a=15$, $b=3$, $c=5$ } $15 \neq 0 \wedge 3$ y $5 \in \mathbb{Z}$, $15|3.5 \Rightarrow 15|3 \vee 15|5$ (FALSO)

⊛ CONJETURA DE JONATÁN: (Falsa)

H) $a|bc$; $a \leq b \vee a \leq c$; $a \neq 0$; $a, b \wedge c \in \mathbb{Z}$
T) $a|b \vee a|c$

contraejemplo: $a=6$, $b=10$, $c=3$ — $6 \leq 10$ — $6|10.3$, $6|30 \wedge 6\nmid 10 \vee 6 \nmid 3$

⊛ CONJETURA DE AYRTON: (falsa)

H) $a|bc$; $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $a < bc$
T) $a|b \vee a|c$

contraejemplo: $a=32$, $b=8$, $c=8$ — $32 < 64$ — $32|8.8$, $32|64 \wedge 32 \nmid 8$

⊛ CONJETURA DE PROFESORA. (falsa)

H) $a|bc$; $a>b \wedge a>c$; $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$
T) $a|b \vee a|c$

contraejemplo: $a=6$, $b=2$, $c=3$ — $6>2$, $6>3$ — $6|2.3$, $6|6$ — $6 \nmid 2 \wedge 6 \nmid 3$

⊛ CONJETURA DE LUJÁN.

H) $a|bc$; $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$; $a=b \vee a=c$
T) $a|b \vee a|c$

⊛ CONJETURA DE FÁTIMA: (verdad)

H) $a|bc$; a primo; $a \neq 0$; $a, b, c \in \mathbb{Z}$
T) $a|b \vee a|c$

Figura 1. *Fragmento de apuntes tomados en la clase por una futura profesora*

REFLEXIONES FINALES

Nos interesa en este momento reflexionar acerca de las características de esta experiencia desde el punto de vista de las perspectivas analizadas en torno a la construcción del sentido sobre los modos de hacer y validar en matemática.

En primer lugar, consideramos que la tarea propuesta atiende a la razón de ser de la actividad matemática de formular y demostrar o refutar conjeturas, dado que adoptamos la perspectiva de Lakatos (1986, p. 20) respecto de que las matemáticas informales y cuasi-empíricas se desarrollan «mediante la incesante mejora de las conjeturas, gracias a la especulación y a la crítica, siguiendo la lógica de pruebas y refutaciones».

En segundo lugar, de la Figura 1 se puede inferir que la clase se caracterizó por un intercambio fluido y productivo entre los participantes (futuros profesores y docente). Una vez que el autor o autora de la conjetura la escribe en el pizarrón se genera una discusión en la clase. Todos los estudiantes se apropian de la misma y se abocan a la búsqueda de contraejemplos y/o de modos de demostrarla. Es claro que ese trabajo ha resultado fructífero para la construcción (individual y colectiva) del papel de la conjetura y su validación en el quehacer matemático.

Finalmente, la tarea propuesta ha propiciado un escenario de investigación, en el cual cada estudiante inmerso en la situación tiene la posibilidad de realizar una elección, es consciente de las metas que persigue y de las razones por las que lo hace. En estas condiciones, pensamos que se favorece la posibilidad de que los estudiantes proporcionen significados a la situación educativa en la cual están involucrados.

REFERENCIAS

BALACHEFF, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: una empresa docente.

BOSCH, M., GARCÍA, F.J., GASCÓN, J. y RUIZ Higueras, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación Matemática, 18*(2), 37-74.

BROUSSEAU, G. (2005). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

CHEVALLARD, Y. (2005). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado* (3.º edic., 2.º reimp). Buenos Aires, Argentina: Aique.

— (2013). *La matemática en la escuela. Por una revolución epistemológica y didáctica*. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

FREGE, G. (1996). *Escritos filosóficos*. Barcelona, España: Grijalbo.

DAVIS, P. y HERSH, R. (1990). *Experiencia matemática.* Barcelona, España: Labor y Ministerio de Educación y Ciencia.

DE TORRES, C., NASSIF, K. y FEDONCZUK, M. (2010) Los esquemas de prueba en Aritmética empleados por alumnos de diferentes niveles educativos. Tesina de Licenciatura. Universidad de Concepción del Uruguay, Paraná.

LAKATOS, I. (1986). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático* (2da reimp.). Madrid, España: Alianza Universidad.

PANIZZA, M. (2005). *Razonar y conocer: aportes a la comprensión de la racionalidad matemática de los alumnos*. Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

RAMÍREZ GARRIDO, J. D. (1982). Prólogo a la edición en lengua castellana. En L. S. Vygotski, *Obras Escogidas II* (pp. 2-10). Madrid, España: Visor.

SADOVSKY, P. (2005). *Enseñar Matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos.* Buenos Aires, Argentina: libros del Zorzal.

SCAGLIA, S. y KIENER, F. (2015). La gestión de una clase de aritmética en torno a la formulación y verificación de conjeturas: el papel de las interacciones en el aula. *Práxis Educacional, 11*(19), 191-212. Recuperado de http://periodicos.uesb.br/index.php/praxis/article/viewFile/4769/4535

SKOVSMOSE, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(1), 3-26.

— (2005). Meaning in mathematics education. En J. Kilpatrick, C. Hoykles y O. Skovsmose (Eds.), *Meaning in mathematics education* (pp. 83-104). Nueva York, NY: Springer.

VYGOTSKI, L. S. (1982). *Obras escogidas II.* (Trad. de J. M. Bravo). Madrid, España: Visor.

ZACK, V. y GRAVES, B. (2002). Making mathematical meaning through dialogue: «Once you think of it, the z minus three seems pretty weird». *Educational Studies in Mathematics*, *46,* 229-271.

LOS AUTORES

Rafael Bracho López es Licenciado en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada y Doctor en Educación Matemática por la Universidad de Córdoba. Actualmente trabaja como profesor de Didáctica de las Matemáticas en la Universidad de Córdoba. Ha ejercido como profesor de secundaria durante 27 años, realizando además tareas de dirección y coordinación en diversos centros. Ha colaborado con la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía como asesor en diversas comisiones y ha sido redactor de los currícula de Matemáticas para Andalucía en Enseñanza Obligatoria. Ha publicado varios libros y capítulos de libros sobre Didáctica de las Matemáticas, uso educativo de las TIC y Matemática recreativa; artículos científicos sobre educación matemática y uso educativo de los recursos TIC, y varios CD multimedia con materiales educativos para el área de Matemática. Sus líneas de investigación son la Cienciometría y el Desarrollo del Sentido Numérico en los primeros años de aprendizaje matemático. Tiene gran experiencia en formación permanente del profesorado y ha obtenido varios premios importantes en reconocimiento a su labor educativa. Actualmente es Vicedecano de Practicum en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba.

María C. Cañadas Santiago es doctora en Matemáticas por la Universidad de Granada. Es Profesora Titular del Departamento de Didáctica de la Matemática de la citada universidad. Sus principales intereses investigadores son el pensamiento numérico y el pensamiento algebraico. Actualmente es investigadora principal de un proyecto I+D centrado en el pensamiento algebraico de estudiantes de educación primaria. Es miembro del grupo de investigación FQM-193: «Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico» (http://fqm193.ugr.es/). La mayoría de sus publicaciones en acceso abierto están disponibles en http://is.gd/AYjP6Y Es editora asociada de la revista PNA (www.pna.es). Su labor docente se centra en la formación de profesores de diferentes niveles educativos, principalmente de educación infantil y primaria. También imparte docencia en el Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

José Carrillo Yáñez es Licenciado en Matemáticas y Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación. Catedrático de Enseñanza Medias desde 1984, en comisión de servicios en la Universidad de Huelva hasta su nombramiento como Profesor Titular del Departamento de

Didáctica de las Ciencias y Filosofía de dicha universidad, en 1998, donde continúa en activo como Catedrático de Universidad desde 2012. Su tesis doctoral fue sobre resolución de problemas y concepciones de los profesores. Ha impartido cursos de formación inicial y permanente de profesores de primaria y secundaria, habiendo sido coordinador del CAP. Director del Centro de Investigación CIDIESIA de la Universidad de Huelva y actual presidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. Ha sido Director del Máster Oficial Interuniversitario y del Programa de Doctorado «Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas», e investigador principal del grupo de investigación DESYM (HUM168). Ha participado y dirigido varios proyectos (entre otros, ha sido investigador del proyecto europeo «Mathematics Education Traditions in Europe (METE): a Five Way Comparative Study») y actualmente es investigador responsable de un proyecto nacional. Ha dirigido 19 tesis doctorales y es miembro del consejo editorial de varias revistas, entre ellas el Journal of Mathematics Teacher Education

Encarnación Castro Martínez es Doctora en Matemáticas por el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. Catedrático de Universidad en la Universidad de Granada. Su tarea docente ha estado dirigida a la formación de maestros de educación infantil y primaria. Su investigación se centra fundamentalmente en el ámbito del pensamiento numérico y algebraico donde ha realizado numerosas trabajos los cuales se han difundido a través de congresos y publicaciones en artículos y capítulos de libros. Es miembro del grupo de investigación FQM-0193 «Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico» (http://fqm193.ugr.es/). Email: encastro@ugr.es

Enrique Castro Martínez es catedrático del área de conocimiento Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Ejerce su labor en el departamento del mismo nombre de dicha universidad. Su labor investigadora está centrada en el ámbito del pensamiento numérico y la resolución de problemas, tanto en aspectos cognitivos como afectivos. Tiene una amplia experiencia en formación de profesores de primaria e infantil en el ámbito de la didáctica de la matemática. Ha impartido clase en programas de doctorado y, actualmente, es profesor del máster de didáctica de la matemática de la Universidad de Granada. Tanto en la parte docente como investigadora es autor de un gran número de publicaciones al respecto.

Elena Castro Rodríguez es licenciada en Matemáticas y doctora en Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Miembro del grupo de investigación FQM-0193 «Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico» (http://fqm193.ugr.es/) y del equipo editorial de las revistas PNA (www.pna.es) y EDMA 0-6: Educación matemática en la infancia (www.edma0-6.es). Actualmente, es profesora en el departamento de Didáctica de la Matemática de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Su investigación se centra en el ámbito de la aritmética elemental y la formación inicial de profesorado.

Francisco Javier Claros Mellado, nacido en Málaga el 13 de noviembre de 1974, es licenciado en Matemáticas por la Universidad de Málaga (1997) y Doctor en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (2010). Funcionario de Carrera del Cuerpo de Profesores de Secundaria de la Comunidad de Madrid en la especialidad de Matemáticas. Desde el año 2009 compagina su tarea de profesor de secundaria con el trabajo de profesor asociado. Desde el año 2009 hasta el 2014 en el departamento de Economía de la Universidad Carlos III de Madrid y desde ese mismo año 2014 cambió su lugar de trabajo a la Facultad de Educación de la Universidad Complutense de Madrid. Ha publicado varios trabajos en el campo de la didáctica de las Matemáticas, subrayando especialmente sus trabajos de 2013 y 2016 en Enseñanza de las Ciencias, en Bolema en 2014 y en la revista Educación Matemática en 2016. Ha codirigido la tesis de María Teresa Sánchez Compaña (2012) titulada «límite finito de una función en un punto: fenómenos que organiza» y actualmente dirige en la Universidad Complutense de Madrid las tesis de Miguel Ángel Baeza Alba y Mónica Arnal Palacián8.

Moisés Coriat Benarroch, Licenciado, Ciencias físicas, Universidad Complutense de Madrid.(1968). Doctor, Physique Théorique - Relativité et Théorie des Champs, 1969-1974. Institut Henri Poincaré (Université Paris VI). Profesor Agregado de Bachillerato. Profesor Titular de Universidad de Granada (1995). Cursos diversos de formación del profesorado. Coordinación y dirección de diversas tesis doctorales. Publicaciones y libros sobre didáctica de la matemática: https://www.researchgate.net/profile/Moises_Coriat-Benarroch y https://dialnet.unirioja.es/servlet/autor?codigo=223866

Antonio Fernández Cano es Catedrático de Universidad en el departamento de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación de la Universidad de Granada. Sus áreas de especialización e interés son las metodologías de la investigación y evaluación en educación, la evaluación de la investigación y de programas educativos y la cienciometría pedagógica.

Francisco Fernández García es Doctor en Matemáticas, en el programa de Didáctica de la Matemática por la Universidad de Granada. Es Catedrático de Escuela Universitaria del Departamento de Didáctica de la Matemática de la mencionada universidad. Su foco de interés en investigación se ha centrado en aspectos numéricos y algebraicos, así como en la resolución de problemas. Es miembro del grupo de investigación FQM-193: «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» dentro del Plan Andaluz de Investigación. Su docencia se ha centrado en la formación de futuros maestros de educación infantil y educación primaria,

José Antonio Fernández Plaza es Doctor en Ciencias de la Educación por la Universidad de Granada desde el año 2015 y Profesor del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada desde 2014. Sus publicaciones más relevantes versan sobre los significados que los estudiantes de Bachillerato atribuyen al concepto de límite finito de una función en un punto, dentro de la línea de investigación «Didáctica del Análisis Matemático». También he sido autor de obras destinadas a la formación inicial del maestro de Educación Primaria y profesor de Educación Secundaria en Didáctica de las Matemáticas

Pablo Flores Martínez es Licenciado en Matemáticas y en Ciencias de la Educación, Doctor en Matemáticas. Catedrático de Instituto de Bachillerato desde 1974, en comisión de servicios en la Universidad de Granada hasta su nombramiento como Profesor Titular del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de la Universidad de Granada, en 1999, en donde continua en activo. Su tesis doctoral fue sobre la formación inicial de Profesores de Matemáticas de Educación

Secundaria. Ha impartido cursos de formación inicial y permanente de profesores de secundaria, desde el CAP hasta el actual Máster de Secundaria, siendo coordinador de Matemáticas del citado máster, en el que ha dirigido más de diez Trabajos Fin de Máster. Delegado provincial de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática THALES, participante en la directiva de dicha sociedad. Igualmente, miembro de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, siendo coordinador de grupo que se ocupa de la formación de profesores en dicha sociedad.

Jesús Gallardo Romero (Antequera, Málaga, 1974) es Licenciado en Ciencias Matemáticas (1997) y Doctor por la Universidad de Málaga (2004). Desarrolla su labor profesional como Funcionario de Carrera del Cuerpo de Profesores de Educación Secundaria (Matemáticas) de la Junta de Andalucía y como Profesor Asociado del Departamento de Didáctica de la Matemática, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales de la Universidad de Málaga. Ha publicado artículos de investigación en revistas de Didáctica de la Matemática como For the Learning of Mathematics, Enseñanza de las Ciencias, Relime, Educational Studies in Mathematics, Bolema, Quadrante o Educación Matemática, entre otras. Sus intereses y líneas de investigación giran en torno a la comprensión del conocimiento matemático, la interpretación y hermenéutica en matemáticas, la filosofía de la Educación Matemática, el pensamiento numérico y algebraico, y la enseñanza y aprendizaje del cálculo aritmético elemental. En la actualidad, trabaja en el desarrollo de una teoría interpretativa de la comprensión en matemáticas.

Emilio Genaro Belmonte es Licenciado, Matemáticas, Universidad de Granada, 1978. Cursó estudios de Informática, Politécnica Barcelona (1983-86). Es Diplomado, Informática, Granada 1991 y Licenciado, Informática, Granada 1997. Cursos de doctorado (1990-92 Estadística y 1998-2000 Didáctica de la Matemática). Profesor de Matemáticas y Física en centro de formación profesional CEL (1978-1980). Profesor Agregado de Secundaria, Matemáticas (1980-2014). Coordinador CEP Informática (1992,1997). Realización de programas informáticos de gestión de empresas y publicaciones de Informática.

Pedro Gómez Guzmán es licenciado en Matemáticas e Ingeniero Industrial de la Universidad de los Andes, en Bogotá, Colombia; obtuvo un Master of Arts en Economía en The University of Kent at Canterbury, Inglaterra, un Master of Science en Lógica y Método Científico en The London School of Economics, Londres y un Diplome d'Etudes Approfondies en Sociología en la Universidad París III, París. Es doctor en Matemáticas (especialidad Didáctica de la Matemática) de la Universidad de Granada, España. Actualmente es profesor de la Universidad de los Andes, director de «una empresa docente», editor de la revista PNA, director del proyecto Funes, coordinador del máster en Educación Matemática en la Universidad de los Andes, y colabora como investigador en la Universidad de Granada. Pedro Gómez es autor de varios libros de texto de matemáticas y de didáctica de la matemática. Ha publicado diversos artículos en revistas internacionales. Su principal área de trabajo es la formación de profesores de matemáticas de secundaria.

José Luis González Marí es Doctor en Didáctica de la Matemática. Profesor Titular de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Málaga; email: gmari@uma.es. Sus líneas de investigación son: Comprensión del conocimiento matemático; Competencias matemáticas;

Análisis Didáctico; Pensamiento Numérico y Algebraico; Formación de Profesores. Dirige el Proyecto I+D: Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático; Cálculo simbólico y enseñanza de las Matemáticas. Publicaciones: «Números naturales relativos». Granada: Comares (1998); Gallardo, J.; González, J. L. «Assessing understanding in Mathematics: steps towards an operative model». For the Learning Mathematics V. 26(2), pp. 10 -20 (2006); Gallardo, J.; González, J. L. «Una aproximación operativa al diagnóstico y la evaluación de la comprensión del conocimiento matemático». PNA V:1(1), pp. 21-31 (2006); González, J. L. «El Análisis Didáctico como metodología de investigación en Educación Matemática». X SEIEM. Huesca, 2006; «Modelos y marcos teóricos en la investigación en Pensamiento Numérico», XIX SEIEM, Alicante 2015. Ha dirigido las tesis: Razonamiento Inductivo Numérico; Integrales Múltiples con DERIVE; Integrales de Línea con DERIVE; Derivación e integración de funciones de variable compleja; Diagnóstico y evaluación de la comprensión del conocimiento matemático; Comprensión de los Sistemas de Numeración; Pensamiento ordinal y tecnología multimedia.

Salvador Guerrero Hidalgo es Licenciado en Ciencias Matemáticas en la Universidad Complutense, Catedrático de Matemáticas de INEM, impartiendo clases en distintas ciudades de España (Madrid, Orense, Ávila, Málaga) Ha sido profesor colaborador del Departamento de Análisis Matemático en la Universidad de Santiago de Compostela, profesor en cursos de Formación del Profesorado del Ministerio de Educación y Ciencia, y de la Consejería de Educación de Andalucía, profesor de Didáctica de la Matemática en el CAP de la Universidad de Málaga, durante 30 años y asesor de Matemáticas para la Reforma en la Consejería de Educación de Andalucía, y en el CEP de Málaga. Autor de libros de texto para Secundaria y Bachillerato, y de artículos en revistas de Educación Matemática, Codirector de la revista UNO (Editorial Graó) de Educación Matemática. Actualmente es Presidente de la S.A.E.M. «THALES» y Secretario de Actividades para la Formación del Profesorado de la FESPM.

José Gutiérrez Pérez es Profesor Titular de Métodos de Investigación y Diagnóstico en Educación de la Universidad de Granada. Colabora con el Grupo de Investigación FQM-193 sobre Pensamiento Numérico desde hace más de 30 años. Sus contribuciones en el campo de la investigación en educación matemática están ligadas al trabajo colectivo del Grupo EGB de la SAEM-Thales y Seminario CIEM sobre investigación en el aula, evaluación, resolución de problemas aritméticos y enseñanza centrada en el estudiante. Coeditor del libro publicado en Editorial Comares: «Investigación en Didáctica de la Matemática. Homenaje a Encarnación Castro», 2013; y coautor de capítulos de libro en obras de esta misma editorial como «Análisis Didáctico en Educación Matemática», 2013, «Investigación en Educación Matemática. Homenaje a Luis Rico, 2016». Junto a la Profesora Castro ha publicado recientemente dos capítulos sobre matemáticas en Educación Infantil: «Pensamiento Espacial» y «Enseñanza y Aprendizaje». Ha sido coordinador del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y actualmente es responsable del Área de Evaluación y Acreditación Universitaria de la Agencia Andaluza del Conocimiento.

José L. Lupiáñez Gómez es doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada y tiene un Máster en Ciencias, en la especialidad de Matemática Educativa, por el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional de México. En la actualidad es Profesor Titular de Universidad en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de

Granada. Sus líneas de investigación prioritarias son la formación de profesores de matemáticas, la noción de competencia en educación y el desarrollo y empleo de materiales y recursos en la enseñanza de las matemáticas, en las que reúne publicaciones y participaciones en proyectos de investigación. Ha colaborado en numerosas actividades y experiencias de formación de profesores de matemáticas y ha sido invitado a realizar asesoramientos curriculares en varios países.

Antonio Marín del Moral es Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada con Suficiencia investigadora por el programa de doctorado del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y título de experto en formación de formadores por la Universidad de Valencia. Catedrático de matemáticas de Educación Secundaria jubilado. Su último centro de referencia fue el IES Mariana Pineda de Granada. A lo largo de su vida profesional ha ocupado diferentes cargos organizativos en Institutos de Bachillerato como el de Director, en la Consejería de Educación de la Junta de Andalucía Jefe del Servicio de Ordenación Educativa, en el Ayuntamiento de Granada Director del Patronato de Escuelas Infantiles y en la Universidad de Granada Coordinador del Curso de Aptitud Pedagógica. Profesor e interesado en especial por la formación de profesores y la selección la planificación de tareas para el aprendizaje de la Matemática pertenece al Grupo de investigación FQM-193 y ha colaborado en la publicación de libros de texto de Secundaria de la editorial Algaida y en diferentes revistas y publicaciones de las editoriales Síntesis, Horsori y Comares. Como formador de formadores ha impartido cursos en Centros de profesorado, y universidades.

Antonio Moreno Verdejo es Licenciado en Ciencias Físicas y Doctor en Ciencias Matemáticas. Mi actividad investigadora se ha traducido en 13 artículos de revistas, algunas internacionales. He publicado 19 trabajos (libros y capítulos de libros). Desde 2001 he participado ininterrumpidamente en grupos de investigación. Las líneas de investigación seguidas han dado lugar a numerosas publicaciones, docencia en doctorado y reconocimiento como experto para intervenir en congresos y seminarios. Prof. Colaborador en 7 proyectos de investigación. Primer premio del concurso «Física+Matemáticas en acción» (2004). Finalista en IV concurso «física+matemáticas en acción» (2003). Mi actividad docente se extiende por un período de más de 20 años durante los que he compaginado Secundaria y Universidad. Mi experiencia en Secundaria ha repercutido de forma muy positiva en mi docencia universitaria. Ésta la vengo desarrollando en el Dpto. de Didáctica de las Matemáticas. En la actualidad, soy Coordinador del Máster del Profesorado de Secundaria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas de la Universidad de Granada. He sido ponente invitado en mas de 20 cursos de formación de profesores. Participación en 12 proyectos de innovación educativa, dirección de 12 cursos de posgrado, realización de mas de 20 cursos de formación especifica y publicación de 9 materiales docentes. Su formación académica (mas de 30 cursos, congresos, seminarios y jornadas) se ha dirigido prioritariamente a la formación en tic aplicadas a la educación; aplicación en el aula de los resultados de investigación en Educación Matemática; y adquisición de perspectivas didácticas y pedagógicas nuevas que me permitan la innovación e investigación educativa.

Tomás Ortega del Rincón es Catedrático de Universidad de Didáctica de la Matemática, con destino en la Facultad de Educación de la Universidad de Valladolid. Ha participado en más de 50 cursos de posgrado, en 20 proyectos subvencionados, y en más de 50 congresos y simposios nacionales e internacionales. Ha dirigido con éxito 18 tesis doctorales (ya defendidas), ha impartido decenas de conferencias y seminarios de investigación, y ha participado en numerosos tribunales de doctorado y plazas de titularidad y cátedras de universidad. Ha publicado más de 140 trabajos de investigación, y ha revisado decenas de trabajos de investigación de Didáctica de la Matemática para revistas especializadas y congresos nacionales e internacionales. Ha sido secretario y presidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). En la actualidad es director del departamento «Didáctica de la Ciencias Experimentales, Sociales y de la Matemática» y Coordinador de Evaluaciones de Programas de Doctorado de la Dirección de Evaluación y Acreditación (DEVA) de la Junta de Andalucía.

Mario Porres Tomé es Licenciado en Matemáticas, Diplomado en Estadística y Doctor por la Universidad de Valladolid. Es Profesor de Educación Secundaria (Matemáticas) en el IES Diego de Porcelos (Burgos).

Rafael Ramírez Uclés actualmente es Profesor Ayudante Doctor del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, impartiendo docencia principalmente en el Grado de Maestro de Educación Primaria y el Máster de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, del que es coordinador. Anteriormente ejerció como profesor de secundaria y profesor asociado en el Departamento de Matemática Aplicada. Inició su formación investigadora en el Departamento de Geometría donde obtuvo el Diploma de Estudios Avanzados. En Didáctica de la Matemática, su investigación se ha focalizado en la atención de los estudiantes con alta capacidad matemática, obteniendo el título doctor con el trabajo «Habilidades de visualización de alumnos con talento matemático». En relación a este tema, ha sido profesor y miembro del comité asesor del proyecto ESTALMAT y ha participado como docente en numerosos Campus Científicos y cursos de especialización en altas capacidades, siendo la divulgación científica y la innovación docente dos ámbitos de especial interés en sus trabajos.

Luis Rico Romero, Catedrático Emérito de Didáctica de la Matemática en la Universidad de Granada. Es investigador principal del Grupo de Investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* (FQM-193) del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía. Académico Numerario de la Academia de Ciencias Matemáticas, Físico-Químicas y Naturales de Granada. Promotor y primer presidente de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), sus líneas prioritarias de investigación son: Diseño, desarrollo y evaluación del currículo de matemáticas; Formación de profesores de matemáticas; Pensamiento numérico, y Análisis Didáctico en Educación matemática. En 2012 recibió el XVIII Premio de Andalucía de investigación en áreas de Humanidades y Ciencias Jurídico-Sociales «Ibn AL-Jatib».

Isabel Romero Albaladejo es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Granada y doctora en Matemáticas (programa de doctorado Didáctica de la Matemática) por la Universidad de Granada. Su tesis doctoral, dirigida por el Dr. Luis Rico Romero, lleva por título «La introducción del número real en enseñanza secundaria». Actualmente es profesora titular en la Universidad de Almería, donde imparte docencia en el grado de Maestro de Primaria y en

Máster de formación de profesores. Es autora de artículos de investigación y capítulos de libros relacionados con la temática de su tesis, el desarrollo de competencias y actitudes en alumnado de secundaria, el Análisis Didáctico, la formación de profesores, y el Aprendizaje Basado en Proyectos. Es coautora de manuales para formación de profesores.

Aurora del Río Cabeza es doctora en Matemáticas por la Universidad de Granada, profesora del Departamento de Didáctica de la Matemática y miembro del grupo de investigación FQM-193: «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico». Si bien inició su investigación en el Álgebra Homológica, actualmente, su investigación está centrada en el pensamiento funcional en niños de educación primaria y en el desarrollo del talento matemático de alumnos de 12 a 18 años. Cuenta con numerosas publicaciones en revistas de reconocido prestigio, así como capítulos de libro, tanto de investigación como de docencia. Ha realizado estancias de investigación en centros como la Université Catholique de Louvain (Bélgica), la University of California at Riverside (EEUU) o la Università degli Studi di Milano (Italia).

Francisco Ruiz López ha impartido docencia en la E.U. del Profesorado de E.G.B. de Ciudad Real. Universidad Complutense, en la E.U. de Estudios Empresariales de Granada. Universidad de Granada y en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Granada. Es miembro del Grupo de Investigación: Didáctica de la Matemática: Pensamiento Numérico de la Junta de Andalucía. Ha participado en Proyectos de investigación e innovación, como Diseño, implementación y evaluación de los contenidos prácticos en la formación inicial del Profesorado de Matemáticas. Sviluppo professionale e autovalutazione nella scuola che apprende: il cas della matematica. Proyecto VALMAT. Programa SOCRATES. Comenius 2.1. Las competencias del profesor de educación primaria de matemáticas en el contexto del espacio europeo de educación superior e Innovación y adaptación al Espacio Europeo de Educación Superior en la formación inicial de maestros en Didáctica de la Matemática. Es autor o coautor de diversos libros: Geometría y su Didáctica para Maestros; Introducción a la estructura de grupo mediante un enfoque geométrico y artístico. Una experiencia con estudiantes para maestro; Movimientos geométricos en el plano; Geometric Visualization of Additive Operators. Ponente en congresos internacionales: SYMMETRY: ART & SCIENCE - 6th Interdisciplinary Symmetry Congress and Exhibition of ISIS. (International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry). Tihany, Lake Balaton, Fifth Interdisciplinary Symmetry Congress and Exhibition of the International Society for the Interdisciplinary Study of Symmetry (ISIS-Symmetry). Intersections of Art and Science. Sydney, Australia. (8 al 14 de Julio, 2001) Francisco Ruiz ha sido Comisario de las exposiciones: «M. C. Escher, entre la Geometría y el Arte». Hospital Real. Universidad de Granada y Cordon Art. Granada. y «M. C. Escher» Museo Arte Contemporáneo, Madrid.

Teresa Sánchez Compaña nació en Antequera el 9 de mayo de 1975, es licenciada en Matemáticas por la Universidad de Málaga (1999) y Doctora en Didáctica de las Matemáticas por la Universidad de Granada (2012). Durante cuatro años fue Profesora Sustituta Interina del Cuerpo de Profesores de Secundaria de la Comunidad Autónoma Andaluza en la especialidad de Matemáticas. Y durante otros siete años, dirigió e impartió docencia en un Centro Privado de Enseñanza-Aprendizaje. Desde el año 2012 compaginó su tarea de Profesora Titular del Centro Adscrito de Magisterio María Inmaculada de Antequera con el trabajo de Profesora Asociada en la

Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Málaga. Ha publicado varios trabajos en el campo de la didáctica de las Matemáticas, subrayando especialmente dos publicaciones en 2013 y 2016 en Enseñanza de las Ciencias, en Bolema en 2014 y en la revista Educación Matemática en 2016. Actualmente dirijge en la Universidad Complutense de Madrid las tesis de Miguel Ángel Baeza Alba y Mónica Arnal Palacián.

Juana María Sancho Gil es catedrática de Tecnologías Educativas del Departamento de Didáctica y Organización Educativa de la Universidad de Barcelona. Coordinadora del grupo de investigación –ESBRINA– Subjetividades, visualidades y Entornos Educativos Contemporáneos –2014SGR 0632– http://esbrina.eu, y de REUNI+D - Red Universitaria de Investigación e Innovación Educativa. Canbios sociales y retos para la educación. MINECO. EDU2015-68718-REDT: http://reunid.eu . Miembro de INDAGA'T - Grupo de innovación docente para favoreces la indagación. Universidad de Barcelona. GIDCUB-13/087: http://www.ub.edu/indagat/. En estos tres contextos tiende puentes entre la teoría y la práctica, entre la investigación y la acción, a la vez que contribuye a repensar los discursos y visiones sobre el sentido de la educación en el mundo actual. Tiene una larga experiencia de gestión de proyectos de investigación, asesorías y evaluación de programas institucionales. Ganadora del primer premio nacional de investigación en 1987 (Entre pasillos y clases) y del segundo en 2003, junto con Fernando Hernández (El clima escolar en los centros de secundaria: Más allá de los tópicos). Codirige la colección «Repensar la educación» de la editorial Octaedro y ha publicado un buen número de libros y artículos en medios nacionales e internacionales relacionados con la innovación y la mejora de la educación, la formación docente y el impacto de las tecnologías de la información y la comunicación en la educación.

Sara Scaglia es Profesora Asociada de la Facultad de Humanidades y Ciencias de la Universidad Nacional del Litoral (Santa Fe, Argentina), en la que se desempeña como responsable de diversas asignaturas de la carrera Profesorado en Matemática. Es investigadora categoría II en el Programa de Incentivos de la Secretaría de Políticas Universitarias del Ministerio de Ciencia y Tecnología de la Nación Argentina. En el marco de su campo disciplinar (Didáctica de la Matemática), actualmente dirige un proyecto de investigación en torno a la problemática de la construcción del sentido en matemática

Nuria Simó Gil es Licenciada en Ciencias de la Educación y Doctora en Pedagogía (1996) por la Universitat de Barcelona (UB). Profesora del Departamento de Pedagogía de la Universitat de Vic-Universitat Central de Catalunya. Imparte docencia en los estudios de Educación Social, en el Máster de Educación Inclusiva y en el de Innovación en Didácticas Específicas. Es miembro del Grupo de Investigación Educativa de la Universidad de Vic (GREUV). Los proyectos de investigación que desarrolla actualmente se relacionan con la línea de investigación: «Educación, ciudadanía y territorio» del GREUV, más específicamente en torno a la educación democrática y la práctica de la ciudadanía. Los ámbitos de estudio más relevantes son: los procesos de inclusión social y educativa con niños y jóvenes; los procesos educativos con población inmigrante, la formación del educador social y del maestro. Ha escrito y publicado varios artículos y capítulos de libros sobre estas temáticas. Es coautora de los libros: Aprendiendo de las innovaciones en los centros (1998), Identitat múltiple i pràctiques interculturals (2000), Magrebíes en las aulas.

Municipio, escuela y educación: Un caso a debate (2005). De la compassió a la ciutadanía (2010); Aprender a ser en la escuela primaria (2010), Children's Rights in the Educational and Social Context (2016).

Manuel Torralbo Rodríguez es Licenciado y doctor en Ciencias Matemáticas por la Universidad de Granada. En 2001 defiende su tesis doctoral titulada: Análisis cientimétrico, conceptual y metodológico de las tesis doctorales españolas en educación matemática (1976-1998), dirigida por los doctores D. Luis Rico Romero y D. Antonio Fernández Cano. Su actividad investigadora se centra en el análisis y evaluación de la Educación Matemática desde un enfoque interdisciplinar. Ha publicado artículos en revistas indexadas nacional e internacionalmente, entre las que destacan: Enseñanza de las Ciencias, International Journal of Science and Mathematics Education, UNO, Revista Española de Documentación Científica, Scientometrics, RIE, Library Philosophy and Practice, Aula Abierta, Educational Research Review, PNA o Qualitative Health Research. Las publicaciones de libros y capítulos de libros suponen una producción de más de una treintena de aportaciones que han sido publicadas en editoriales como: SEIEM, American Mathematical Society, Síntesis, Pirámide, los servicios editoriales de universidades diferentes o la SAEM THALES. Comienza su desarrollo profesional en 1985, como profesor en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Córdoba. Actualmente es Profesor Titular de la Universidad de Córdoba en el Área de Didáctica de las Matemáticas.

Homenaje a Moisés Coriat

Este libro es un homenaje a la memoria del profesor Moisés Coriat Benarroch. Se trata de una publicación realizada desde el Grupo de investigación FQM-193: «Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico», del Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía. Participan en esta obra los compañeros del grupo junto con otros profesionales cercanos al homenajeado, de distintas trayectorias, quienes contribuyen a la obra con temáticas relativas a diversas etapas de la vida académica de Moisés.

La riqueza y variedad del pensamiento matemático y educativo de Moisés Coriat se ponen de manifiesto en las contribuciones recogidas en este libro y en la dificultad de reducirlas a esquemas y patrones comunes. Las aportaciones se han agrupado, convencionalmente, en tres apartados que llevan títulos genéricos: formación inicial de profesores, formación permanente e investigaciones en Educación Matemática. Cada capítulo es diverso; surge y describe una experiencia del trabajo profesional y personal de sus autores vivida con Moisés.

Sirva este libro como recuerdo de su ambición intelectual, de los valores que impulsó y de las ilusiones que compartió, orientadas por la mejora de la educación en España mediante la formación matemática de sus profesores y escolares.

COMARES
editorial

ISBN 978-84-9045-436-7
9 788490 454367