SIGNIFICADOS DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO PUESTOS DE MANIFIESTO POR ESTUDIANTES DE BACHILLERATO. ANÁLISIS CONCEPTUAL DE TÉRMINOS CLAVE

José Antonio Fernández Plaza
Juan Francisco Ruiz Hidalgo
Luis Rico Romero
Universidad de Granada. España

Resumen

En este trabajo exponemos algunos de los resultados de un estudio exploratorio llevado a cabo con estudiantes de bachillerato, referido a los distintos usos que dichos estudiantes realizan de los términos con los que describen ciertas propiedades del concepto de límite finito de una función en un punto y que son sinónimos de "aproximar", "tender", "alcanzar", "rebasar" y "límite". Se ha realizado, además, un análisis conceptual de dichos términos, el cual ha proporcionado un marco interpretativo para inferir qué significados asocian a los términos clave utilizados en sus respuestas.

Palabras clave: límite finito de una función en un punto, análisis conceptual, significados y argumentos verbales, estudiantes de bachillerato.

Abstract

In this paper we present some results of an exploratory study carried out with 16-17 aged students referring to the different uses students make of terms such as "to approach", "to tend", "to reach", "to exceed" and "limit" which describe some properties of the finite limit of a function at a point concept. A conceptual analysis of such terms has provided an interpretive framework to infer the meanings that students associate with the main terms used in their answers.

Keywords: finite limit of a function at a point, conceptual analysis, meanings and verbal arguments 16-17 years old students.

Fernández-Plaza, J.A.; Ruiz-Hidalgo, J.F.; Rico, L. (2012*).* Significados del concepto de límite finito de una función en un punto puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato. Análisis conceptual de términos clave. En M. Marín-Rodríguez; N. Climent-Rodríguez (eds.), *Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los grupos de investigación. XV Simposio de la SEIEM* (pp. 29-45). Ciudad Real: SEIEM.

Introducción

En este informe presentamos parte de un trabajo exploratorio y descriptivo (Fernández-Plaza, 2011) centrado en los significados que los estudiantes de bachillerato (16-17 años) asocian al concepto de límite finito de una función en un punto, estableciendo su conexión con una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, llevada a cabo durante el periodo de investigación tutelada del Máster de Profesorado de Educación Secundaria y Bachillerato consistente en una unidad didáctica sobre este concepto matemático (Fernández-Plaza, 2010).

Como antecedentes hemos revisado investigaciones que han profundizado en la caracterización de los conflictos cognitivos ligados a los conceptos de número real, límite, la noción de infinito y la de continuidad de una función (Tall y Vinner, 1981; Davis y Vinner, 1986; Monaghan, 1991; Cornu, 1991; Tall, 1992) así como de su tratamiento dentro del campo de la innovación curricular (Romero, 1995; Blázquez, 2000).

Consideramos elementos fundamentales de este informe el análisis conceptual de términos clave, que delimita el significado y uso matemático en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001) y es útil para interpretar la concepción de los sujetos. Un segundo elemento fundamental es el análisis específico ejemplificado para un ítem del instrumento utilizado en esta investigación.

Problema de investigación

Como hemos mencionado, este estudio se ubica en otro más amplio (Fernández-Plaza, 2011) en el que nos proponemos describir:

- cómo los estudiantes expresan verbalmente sus concepciones intuitivas sobre la noción de límite finito de una función en un punto, y
- cómo interpretan y responden a tareas vinculadas con dicho concepto, analizando el significado de determinados términos claves que expresan diferentes facetas vinculadas al concepto de límite.

Estas expectativas quedan resumidas en el siguiente objetivo general:

"Explorar y describir los significados de la noción de límite finito de una función en un punto que los estudiantes (de bachillerato) muestran cuando realizan tareas de enunciado verbal, gráfico y simbólico"

Desglosamos el objetivo general en tres objetivos específicos:

O.1. Diseñar un instrumento para recoger información en registro verbal y simbólico referente al concepto de límite finito de una función en un punto.

O.2. Identificar los términos claves que emergen de los registros verbales de los estudiantes al abordar tareas de enunciado verbal y gráfico, realizar su análisis conceptual y establecer categorías para interpretar las respuestas obtenidas.

O.3. Inferir los significados que ponen de manifiesto los estudiantes cuando identifican propiedades simbólicas de gráficas de funciones de distinto nivel de complejidad referentes a límite finito de una función en un punto, límites laterales e imagen.

Marco teórico y antecedentes

Este estudio se sitúa en la agenda de investigación conocida como "Pensamiento Matemático Avanzado" (PMA) o *Advanced Mathematical Thinking*, tal como se presenta y considera en las publicaciones del grupo internacional Psychology of Mathematics Education (Gutiérrez y Boero, 2006, pp. 147-172). Algunos investigadores ponen de manifiesto la amplitud y ambigüedad de la expresión inglesa, que da lugar a diferentes interpretaciones o modos de abordar su estudio (Zaskis y Applebaum, 2007; Harel y Sowder, 2005; Selden y Selden, 2005). A su vez, existe un amplio acuerdo en cuanto a la dificultad de delimitar la transición entre el pensamiento matemático elemental y el pensamiento matemático avanzado (Tall, 1992, Azcárate, Camacho y Sierra, 1999; Zaskis y Applebaum, 2007, Edwards, Dubinsky y Mc Donald, 2005).

Azcárate y Camacho (2003) señalan cómo determinados procesos cognitivos caracterizan el PMA, aun no siendo exclusivos de él. Entre ellos destacan y adquieren mayor importancia en los cursos superiores *representar* y *abstraer* como procesos cognitivos psicológicos, y *definir, demostrar* o *formalizar* como procesos matemáticos.

Para establecer la diferencia entre las matemáticas elementales y las avanzadas, estos autores, subrayan la importancia de las definiciones que son propias de las matemáticas avanzadas, mientras que en las elementales los objetos se describen apoyándose en la experiencia. Por tanto, la etapa educativa de bachillerato supone un periodo de transición en el que los estudiantes abordan con técnicas elementales contenidos matemáticos cuyo desarrollo histórico, epistemológico y didáctico merecen el estatus de avanzados.

Como en cualquier investigación sobre aprendizaje, es necesario un marco explicativo que describa e interprete cómo los estudiantes entienden, definen y utilizan determinados conceptos y procedimientos. Asumimos que la noción de significado de un concepto matemático según viene desarrollada por los trabajos de Rico (2007), proporciona un modelo interpretativo para dicha noción con un planteamiento más elaborado que el modelo cognitivo basado en la dualidad *imagen conceptual /definición conceptual* de Vinner (1983). El modelo que seguimos considera los sistemas de representación, los aspectos formales o referencias del concepto y los fenómenos que le dan sentido. De este modo nuestro análisis se desplaza, desde la consideración del simple manejo eficiente de una definición formal mediante representaciones adecuadas, hacia el estudio del conocimiento y uso de un concepto a través de los fenómenos que le dan sentido, que no se restringen a un dominio puramente matemático, sino que profundiza en otras áreas del mundo físico, cultural y social, De esta manera el modelo contempla el estudio de las capacidades de modelización y resolución de problemas.

Aportaciones relevantes de investigaciones previas

Tall (1980) enfatiza la riqueza y diversidad de procesos de paso al límite (*limiting processes)* clasificada en dos tipos, *procesos de paso al límite continuos,* tales como el límite de una función en un punto y la propia noción de continuidad, en los que subyace una idea de continuo, y *procesos de paso al límite discretos,* como ocurre con los límites de sucesiones o secuencias y series, las expansiones decimales, o aproximación de áreas de formas geométricas.

Tall identifica que, cuando a los estudiantes se les transmite una noción informal de límite y, posteriormente, la definición formal, la imagen conceptual se "contamina" con ciertas propiedades que no forman parte de la definición conceptual dada. Los estudiantes conciben en su mayoría el límite como un proceso dinámico en vez de una cantidad numérica (Tall, 1980).

Edwards, Dubinsky y McDonald (2005) no consideran que el pensamiento sobre límites sea avanzado en su totalidad, dado que las técnicas particulares de cálculo de límites para ciertas funciones son actividades rutinarias que los estudiantes pueden dominar sin relativa dificultad, aunque realmente no comprendan su trasfondo formal, si bien Cornu (1981, 1983) citado por Gray y Tall (1994) pone de manifiesto el conflicto existente entre las intuiciones de los estudiantes, cuya experiencia previa con los algoritmos aritméticos y algebraicos es explícita, y el proceso de cálculo del límite que carece de dicha cualidad.

En un trabajo más cercano al que se presenta aquí, Monaghan (1991) estudia la influencia del lenguaje sobre las ideas de los estudiantes acerca de los términos "tender a", "aproximarse a", "converger a" y "límite" , en cuanto a su uso referido a diferentes gráficas de funciones y los ejemplos con los que los escolares explican dichos términos, siendo una limitación el hecho de acotar a priori los términos claves que han de utilizar los escolares, en vez de posibilitar su uso libre y espontáneo e inferir los matices oportunos a posteriori, que es el enfoque que hemos adoptado para este caso.

Romero (1995) y Blázquez (2000) recogen los avances y limitaciones de los estudiantes frente a los conceptos de número real y límite, respectivamente. La definición que se tome de límite funcional cumple un importante papel en el proceso de enseñanza-aprendizaje tal como reportan Blázquez, Gatica y Ortega (2009).

Claros (2010), por último, avanza en la caracterización de fenómenos matemáticos relacionados con el límite finito de una sucesión, que se extraen de las definiciones intuitiva y formal a partir del análisis de libros de texto y producciones de los escolares.

Diseño del estudio

Desarrollamos en las siguientes líneas un estudio empírico en el curso 2010/2011 con estudiantes de bachillerato del I.E.S "La Sagra" de Huéscar (Granada).

Este estudio es de tipo exploratorio y descriptivo. Es exploratorio ya que se ha planificado con la intención de recoger información sobre la comprensión de los estudiantes con el fin de planificar una propuesta de innovación curricular sobre este campo de la matemática escolar, basada en datos y evidencias empíricas. El estudio es descriptivo puesto que pretendemos describir el modo en que los estudiantes entienden, utilizan e interpretan determinadas nociones y conceptos. La muestra es intencional y por disponibilidad; no pretende generalizar resultados en contextos más amplios, sino particularizarlos para profundizar sobre ellos en un contexto determinado.

Análisis conceptual de términos clave

Para el logro del objetivo de este estudio realizamos un análisis conceptual de los términos “aproximarse”, “tender”, “alcanzar”, “rebasar” y “límite”. La selección de estos términos es debida a los motivos siguientes:

7) Son términos que tienen un significado técnico y formal en matemáticas, pero también usos convencionales y coloquiales no vinculados con las matemáticas.
8) Aparecen de manera frecuente en la literatura revisada, tanto en la definición del concepto de límite como en la caracterización de las dificultades y errores asociados, poniendo de manifiesto conflictos que surgen entre los usos formales y coloquiales.
9) Han sido utilizados en los enunciados verbales de algunas de las actividades incluidas en el instrumento de recogida de datos de este estudio.
10) Los sujetos del estudio los emplean, junto con sinónimos, para expresar distintas interpretaciones del concepto de límite, ya sea de manera técnica (terminología adquirida por la instrucción mediada por el profesor, el libro de texto o el propio instrumento de recogida de datos) o informal (sus propias interpretaciones personales).
11) De acuerdo a la noción de significado que adoptamos, cada uno de los términos se refiere parcialmente a propiedades y modos de uso asociados al concepto de límite y, junto con otras nociones, contribuyen a delimitar su significado.
12) Por último, la conveniencia de fijar un marco interpretativo para analizar los usos y significados de dichos términos puestos de manifiesto por los sujetos de nuestro estudio.

En definitiva, este análisis conceptual previo permite ubicar el uso matemático de estos términos en contraste con sus significados cotidianos (Rico, 2001), y es necesario para interpretar la concepción de los sujetos, si bien, en ocasiones sea necesaria información adicional.

Una revisión de los diccionarios de la Real Academia Española (RAE) (2001), el María Moliner (1998), el *Vocabulario Científico y Técnico* de la Real Academia de las Ciencias

(1990) y el Oxford Dictionary (2011), proporcionan las acepciones comunes y, en ocasiones, matemáticas que tienen cada uno de los términos: “aproximar”, “tender”, “rebasar”, “alcanzar” y “límite”; la revisión de algunas investigaciones permiten refinar las acepciones de manera apropiada para esta investigación.

“Tender” es “aproximarse progresivamente sin llegar nunca al valor” (RAE, 2001; Moliner, 1998), por tanto, expresa una forma peculiar de aproximación. Blázquez, Gatica y Ortega (2009) consideran que una sucesión de números se aproxima a un número si el error disminuye progresivamente, así, la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ se aproxima a -1, pero consideran que una sucesión “tiende a un límite”, si cualquier aproximación al límite es mejorable por términos de la sucesión, luego la sucesión $\left(\frac{1}{n}\right)$ se aproxima a 0 y tiende a 0, pero no tiende a -1. Así establecemos una diferencia entre estos dos términos.

Monaghan (1991) confirma tras la realización de su estudio que muchos estudiantes no distinguen entre “tender a” y “aproximarse” dentro de un contexto matemático.

Detectamos en la expresión “$f(x)$ tiende a *L*, cuando x tiende a a ” un conflicto a nivel de definición, dado que si x tiende a a, la variable x nunca puede ser igual a a, en consecuencia, $f(x)$ tiende a *L*, $f(x)$ nunca puede ser igual a *L* y la función constante $f(x) = L$ no tendría límite, lo cual contradice la definición formal de límite. Así la expresión correcta sería “$f(x)$ tiene por límite *L* cuando x tiende a a si…” o bien, “$f(x)$ tiene límite *L* en el punto a si…”. Este conflicto puede inducirse en la imagen conceptual de los estudiantes tal como relatan Tall y Vinner (1981).

“Alcanzar” es intuitivamente “llegar a” o “llegar a tocar” (RAE, 2001, Moliner, 1998, Oxford, 2011). Fernández-Plaza (2011) define “alcanzar” en el sentido en que una función *alcanza el límite* si el valor límite es la imagen del punto en el que se estudia el límite (continuidad); extendiendo su significado a que el límite sea el valor de cualquier otro punto del dominio

(no necesariamente la función ha de ser continua). Aunque inferimos que algunos escolares no consideran el valor de la función en el punto cuando afirman que el límite es inalcanzable, es decir, no esperamos que la continuidad desemboque necesariamente en la alcanzabilidad del límite.

Observamos que “rebasar” tiene un sentido coloquial de “quedar por encima de una cota superior” (RAE, 2001), excluyéndose la acepción “quedar por debajo de una cota inferior”. En este trabajo ampliaremos el rango de sentidos del término “rebasar”, de tal manera que diremos que *el límite de una función es rebasable* si podemos construir dos sucesiones monótonas de imágenes convergentes al límite, una creciente y otra decreciente, para convenientes sucesiones de valores de x convergentes al punto donde se lleva a cabo el estudio del límite (Fernández-Plaza, 2011). Es preciso notar que la alcanzabilidad y la rebasabilidad del límite finito de una función en un punto no tienen carácter general, sino particular y son independientes lógicamente dado que no existe ninguna implicación lógica entre ellas.

El término “límite” tiene acepciones coloquiales que interfieren en las concepciones de los escolares sobre dicho término, tales como la idea de fin, frontera y de irrebasable (RAE, Moliner, Oxford, op. cit.), mientras que en cuanto a su uso científico-técnico se refiere, en algunas disciplinas está relacionado con la resistencia de un material o el estado extremo en el que el comportamiento de determinados sistemas cambia bruscamente (Real Academia de las Ciencias, 1990).

Instrumento

El instrumento es un cuestionario con tres actividades de respuesta abierta y una actividad de respuesta cerrada, del cual se realizaron dos versiones distintas A y B que se pueden visualizar en Anexo I de Fernández-Plaza (2011).

Cada ítem abierto planteaba la opción de calificar como verdadero (V) o falso (F) el enunciado de una propiedad relativa al límite de una función en un punto y, a continuación, se pedía una justificación de la opción elegida.

A continuación, como ejemplo, se muestra uno de esos ítems, incluido en la versión A del cuestionario.

1. Rodea la V o la F en cada uno de los siguientes enunciados, según sea verdadero o falso. Justifica en el recuadro tu elección: (Adapt. y trad., Lauten et al., 1994, p.229)

b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

La Tabla 1 resume los datos de los seis ítems de respuesta abierta de tipo verdadero/falso propuestos:

Cuestionario/tarea	Código ítem	Término(s) clave en el enunciado
A, tarea a)	A1.1.a	Movimiento de la función
A, tarea b)	A1.1.b	No rebasar
A, tarea c)	A1.1.c	Probar valores y alcanzar
B, tarea a)	B1.1.a	Acercarse pero no alcanzar
B, tarea b)	B1.1.b	Aproximación tan precisa como se quiera
B, tarea c)	B1.1.c	Acercarse arbitrariamente

Tabla 1: Términos clave de los ítems de tipo verdadero/falso del cuestionario.

Muestra

La muestra la forman 36 estudiantes de primer curso de Bachillerato (16-17 años) matriculados en la asignatura Matemáticas I. Según la información suministrada por el profesor titular responsable de la asignatura, quien autorizó la implementación del cuestionario al grupo, los estudiantes han recibido instrucción previa sobre los conceptos de límite de una función en un punto y de límite de una sucesión durante el curso 2009/2010 antes de la aplicación del cuestionario. Consideramos esta circunstancia favorable para nuestra investigación ya que, según el modelo cognitivo *imagen conceptual/definición conceptual* (Vinner, 1983), dará lugar a distintas alternativas según que los sujetos hagan un uso técnico más o menos elaborado de la terminología, definiciones y ejemplificaciones del concepto de límite introducidas en el aula, al menos de manera temporal, o bien describan con una terminología informal y personal sus interpretaciones del conocimiento recibido en la instrucción, pudiendo en algún caso hacer prevalecer sus concepciones originales.

Durante el trabajo de campo 18 sujetos respondieron a la versión A y otros 18 sujetos a la versión B. La aplicación se llevó a cabo en una sesión ordinaria de clase de matemáticas.

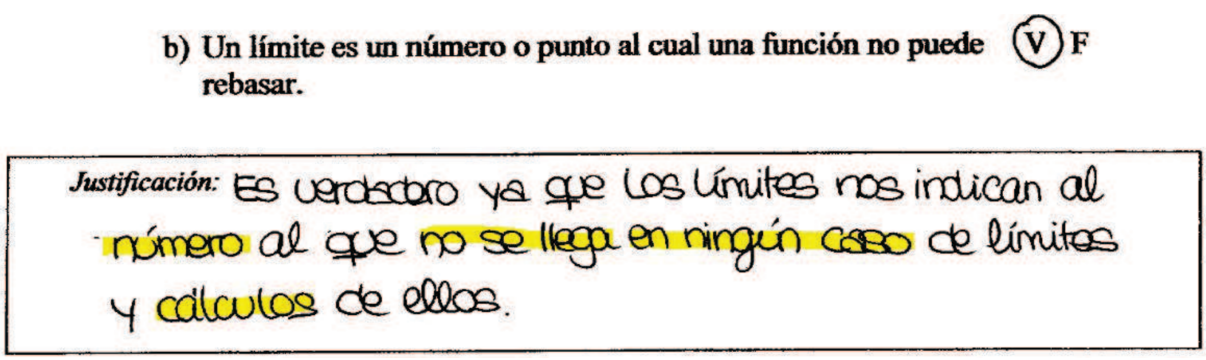
Resultados

El análisis de los datos se ejemplifica para la Tarea 2 (ítem A1.1.b), antes enunciada. Dicho análisis se llevó a cabo en dos fases:

Primera: uso y recuento de términos clave en los registros escritos.

En la primera fase identificamos y contabilizamos los usos de los distintos términos clave en los registros escritos proporcionados por los estudiantes, sin hacer inferencias de significado. Las agrupaciones por términos clave las realizamos según la revisión de términos antes descrita. No se ha requerido a los estudiantes que definan los términos clave sino que los utilicen para justificar un juicio sobre una propiedad del límite de una función, sin explicar cuáles significados atribuyen a dichos términos. De ahí que nos centremos, en primer lugar, en su presencia y en el uso que les dan en tales juicios; con la información disponible no es posible inferir si los estudiantes distinguen entre “aproximarse”, “acercarse” y “tender”.

La Figura 1 ejemplifica el uso de los términos clave “rebasar” y “alcanzar” hecho por un alumno al responder a la cuestión. La siguiente tabla muestra el recuento de los usos que se realizaron de términos que estaban relacionados con los términos “rebasar” y “alcanzar” en el ítem seleccionado para este informe y que dieron lugar a tres grupos de respuestas, según se refirieran únicamente a rebasar, alcanzar (véase Figura 2), o a ambos caracteres (Grupo mixto).


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Es verdadero ya que los límites nos indican al número al que no se llega en ningún caso de límites y cálculos de ellos.

Figura 1. Respuesta al ítem A1.1.b con término clave “no llegar” incluida en el grupo Alcanzabilidad.

La Tabla 2 muestra las frecuencias con que los alumnos han utilizado los términos clave, alcanzabilidad y/o rebasabilidad, para caracterizar el valor del límite, junto con las descripciones del proceso de convergencia por términos como *llegar* o *aproximarse.*

Grupos	Términos clave	Nº de respuestas
Alcanzabilidad	Llegar	1(Afirm.) / 2 (Neg.)
	Aproximarse/no llegar	2
Rebasabilidad	Rebasar	1
	Sobrepasar	1
Mixto	Aproximarse/no tocar/no rebasar	1
Otras/NSNC		10
Total		18

Tabla 2: Grupos de respuestas y frecuencias alcanzadas en el uso de términos clave en el ítem A1.1.b

Se ha detectado una frecuencia alta de referencias a la alcanzabilidad (6 de 8 válidas) cuando se requería a los sujetos que solamente argumentaran sobre rebasabilidad (2 de 8 válidas), esto nos permite conjeturar que para estos alumnos la (no) rebasabilidad del límite se debe, principalmente, a su no alcanzabilidad.

Un análisis completo y detallado sobre el uso de los distintos términos clave para los diferentes ítems se recoge en Fernández-Plaza (2011, pp. 35-41).

Segunda fase: discusión del uso de los términos clave.

Descripción de las categorías de respuesta. El análisis de términos clave permite clasificar las diferentes respuestas en varias categorías. En Fernández-Plaza (2011) se seleccionan unas respuestas representativas sin precisar las categorías. En esta comunicación refinamos ese análisis ejemplificándolo con el ítem A1.1.b.

Detectamos dos ideas clave en el enunciado:

1ª Objeto; se identifica que tipo de objeto es un límite:

Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar

2ª Propiedad; se destaca una característica asociada a uno de los significados de la noción de límite:

Un límite es un número o punto al cual una función **no [se] puede rebasar**

La cuestión se plantea en términos de aceptar o rechazar la propiedad de no rebasabilidad del límite de una función en un punto. Las ideas de fin, de frontera y de irrebasable, son propiedades establecidas en el uso común y coloquial del término límite, recogidas en los diccionarios (Fernández-Plaza, 2011, pp. 19 y 20). Se trata aceptar o rechazar esta propiedad para el límite de una función en un punto, junto con el tipo de argumentos que la justifican.

Este ítem pone el énfasis en una propiedad del objeto; es decir, trata de discriminar si los estudiantes consideran el límite como una cota superior (o inferior, según el caso) de la función. No existe restricción en el dominio, por lo cual la variedad de argumentos puede ser más amplia de lo esperado. Excluimos aquellos argumentos que se refieren al valor infinito del límite, que no es objeto de nuestro estudio.

Contemplamos dos perfiles opuestos y, dentro de cada perfil, destacamos distintos matices, algunos de los cuales establecen una subordinación de la no rebasabilidad del límite a su no alcanzabilidad, no contemplada en el enunciado ya que se trata de propiedades independientes puesto que no existe implicación lógica entre ellas. La cuestión de la rebasabilidad introduce en algunos casos la cuestión de la continuidad debido a que el valor del límite de la función se considera no alcanzable, aunque este aspecto no esté planteado en la pregunta.

En general los argumentos propuestos por los escolares se ajustan a dos opciones o perfiles:

(I) Argumentos que afirman que el valor del límite no es rebasable; en este caso la mayoría de los alumnos destacan el valor del límite como inalcanzable. La afirmación sobre el carácter rebasable e inalcanzable es general (I.1);

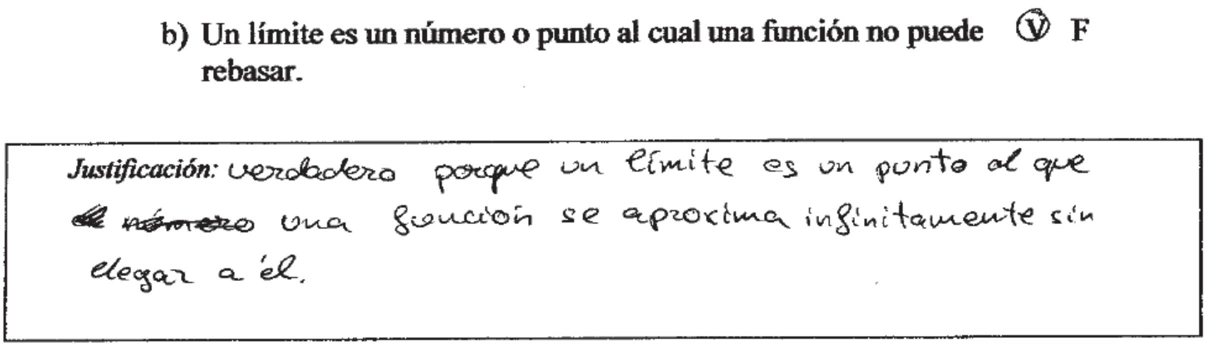
(II) Argumentos que justifican que el valor del límite es rebasable en casos particulares, de hecho, se proponen ejemplos donde el límite es rebasable. Dentro de este perfil encontramos un sujeto que considera el límite alcanzable en determinadas ocasiones (II.1).

Nuestra interpretación de las respuestas aportadas por los alumnos del cuestionario A al ítem A1.1b y recogidas en el Anexo II de Fernández-Plaza (2011), según los dos perfiles antes mencionados relativos a la rebasabilidad del límite, queda como sigue:

- **Perfil (I) (Valor del límite no rebasable en caso general)**: 9

  - **Subperfil (I.1) (Valor del límite inalcanzable en caso general):** 6 de 9

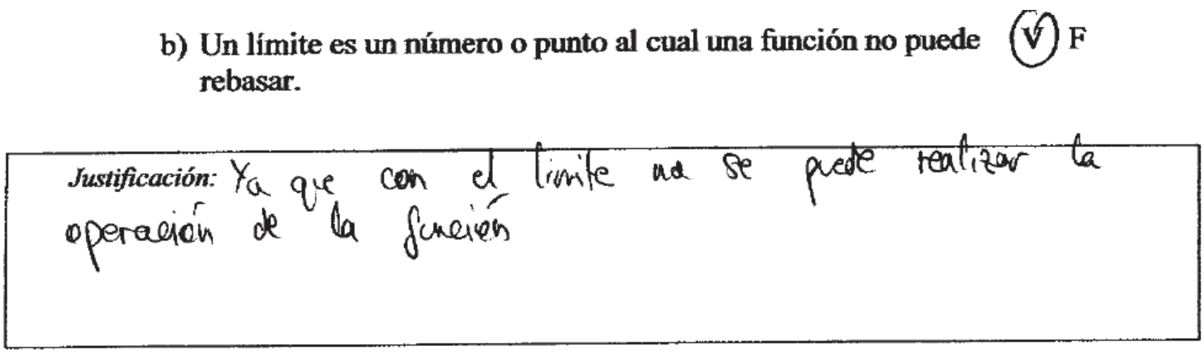
Podemos reconocer dos motivos por los que estos sujetos sostienen la inalcanzabilidad del límite: Proceso numérico infinito (5 casos, figura 2) y posible exclusión del punto donde se estudia el límite (A14) (1 caso, figura 3). Además, inferimos de las respuestas que la convergencia al límite ha de ser estrictamente monótona, necesariamente.



b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: verdadero porque un límite es un punto al que ~~el número~~ una función se aproxima infinitamente sin llegar a él.

Figura 2. Respuesta de tipo I.1 debido a proceso numérico infinito



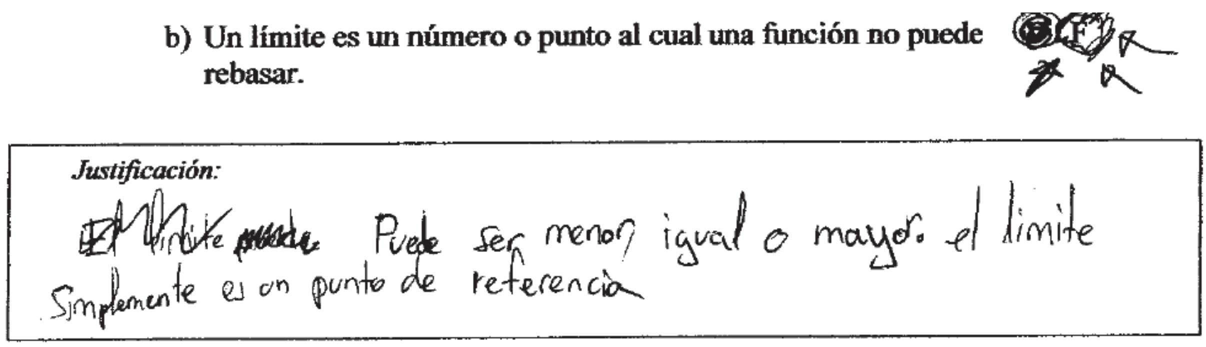
b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar. V F

Justificación: Ya que con el límite no se puede realizar la operación de la función

Figura 3. Respuesta de tipo I.1 debido, posiblemente, a la exclusión del punto donde se toma el límite.

- **Perfil (II) (Valor del límite rebasable en casos particulares)**: 5

  - **Subperfil (II.1) (Valor del límite alcanzable en casos particulares):** 1 de 5 (Figura 4)


b) Un límite es un número o punto al cual una función no puede rebasar.

Justificación:

~~El límite puede~~ Puede ser menor igual o mayor. el límite simplemente es un punto de referencia

Figura 4. Respuesta de tipo II.2 que considera el límite alcanzable y rebasable en casos particulares, a juzgar por la expresión “puede”.

- **Excluidos:** 2 (No argumentan), 1 (referencia a límite infinito)

En síntesis, lo que discrimina los distintos tipos de perfiles es el carácter general o particular de la rebasabilidad del límite. La no alcanzabilidad del límite se considera causa principal de su no rebasabilidad, y el carácter particular de la rebasabilidad y la alcanzabilidad se deduce por el uso de ejemplos. Conjeturamos con vistas a una futura planificación de una experiencia de aula que las respuestas del primer perfil pueden venir inducidas por un uso inadecuado de ejemplos donde la convergencia es estrictamente monótona y el valor del límite es, de hecho, una cota superior y, por tanto, inalcanzable, con lo cual es de esperar que excluyan de su razonamiento la imagen del punto donde se está haciendo el estudio, incluso si ésta coincide con el límite.

Conclusiones

El análisis conceptual ha permitido, por un lado, reconocer posibles concepciones debidas al uso coloquial y cotidiano de los términos clave que inducen errores en la comprensión de los estudiantes sobre el concepto de límite finito de una función en un punto. Por otro lado, el análisis conceptual también ha servido para describir los perfiles empleados para interpretar las respuestas de los estudiantes.

De los resultados obtenidos del análisis del uso de términos clave concluimos que los estudiantes han utilizado un lenguaje poco elaborado y preciso, caracterizado por un uso amplio de la terminología proporcionada por los ítems del cuestionario, aunque mezclado con algunos términos sinónimos proporcionados que son originales. El análisis detallado de las categorías de respuesta para el ítem A1.1.b, con el que hemos ejemplificado el estudio, pone de manifiesto la persistencia del carácter no rebasable y no alcanzable del límite, confirmando la fuerte influencia que tiene el uso coloquial e informal del término límite en las concepciones de los escolares reconocida por Cornu (1991), Esto contribuye al cumplimiento de parte del objetivo específico O.2.

El instrumento diseñado ha permitido recoger información y realizar un análisis satisfactorio, aunque con algunas limitaciones que una adecuada revisión y secuenciación de las tareas puede subsanar; se satisface así la consecución del objetivo O.1.

El objetivo O.3 vinculado a la descripción del modo en que los estudiantes relacionan expresiones simbólicas con la gráfica de funciones con distinto nivel de complejidad, se aleja de la finalidad de este informe y está relacionado con otra actividad (Pregunta 2 Cuestionario B) cuyo análisis desarrollamos en Fernández-Plaza, (2011, pp. 52-55), destacando como conclusión principal, que salvo la existencia de contradicciones lógicas, que consideramos como indicadores de complejidad de las gráficas, en general hacen buen uso de las expresiones simbólicas a las que están cotidianamente acostumbrados.

Referencias Bibliográficas

Azcárate, C. y Camacho, M. (2003) Sobre la Investigación en Didáctica del Análisis. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, Vol. X, No. 2, pp. 135- 149.

Azcárate, C., Camacho M. y Sierra M. (1999). Perspectivas de investigación en didáctica de las matemáticas: Investigación en didáctica del análisis. En Ortega del Rincón, T. (Coord.) *Actas del III Simposio de la SEIEM*. Valladolid.

Blázquez, S. (2000). *Noción de límite en matemáticas aplicadas a las ciencias sociales.* Tesis doctoral. Valladolid: Universidad de Valladolid.

Blázquez, S., Gatica, N. y Ortega, T. (2009). Análisis de diversas conceptualizaciones de límite funcional. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, *12*(1), 145-168.

Claros, F.J. (2010). *Límite finito de sucesiones: Fenómenos que organiza*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Cornu, B. (1991). Limits. In Tall, D. (Ed.) *Advanced Mathematical Thinking.*(pp.153-166). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Davis, R.B. & Vinner, S. (1986). The notion of Limit: Some Seemingly Unavoidable Misconceptiones Stages. *Journal of Mathematical Behavior,* 5, 281-303.

Edwards, B.S., Dubinsky, Ed. & McDonald, M.A. (2005). Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 15-25.

Fernández-Plaza, J.A. (2010). *Unidad Didáctica: Límite y Continuidad de Funciones.* Memoria final del Máster universitario de profesorado de educación secundaria obligatoria, bachillerato, formación profesional y enseñanza de idiomas (especialidad de matemáticas). Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Jose_Ant_Fernandez.pdf

Fernández-Plaza, J.A. (2011). *Significados puestos de manifiesto por estudiantes de bachillerato respecto al concepto de límite finito de una función en un punto. Un estudio exploratorio.* Trabajo de tercer ciclo. Granada: Universidad de Granada. Disponible en http://fqm193.ugr.es/media/grupos/FQM193/cms/Fernandez%20Plaza_TrabInvTut.pdf

Gray E.M. & Tall, D.O. (1994). Duality, Ambiguity and Flexibility: A Proceptual View of Simple Arithmetic, *The Journal for Research in Mathematics Education*, *26*(2), 115-141.

Gutiérrez, A. & Boero, P. (eds.) (2006): *Handbook of research on the psychology of mathematics education.* Sense Publishers: Rotterdam, Holanda.

Harel, G. & Sowder L. (2005). Advanced Mathematical-Thinking at Any Age: Its Nature and Its Development. *Mathematical thinking and learning*, *7*(1), 27-50

Lauten,A.D., Graham,K. & Ferrini-Mundy,J. (1994). Student understanding of basic calculus concepts: Interaction with the graphics calculator. *The Journal of Mathematical Behavior, 13*(2), 225-237.

Moliner, M. (1998). *Diccionario del uso del español.* (2ª Ed, Vol. 2). Madrid: Editorial Gredos.

Monaghan, J. (1991). Problems with the Language of Limits. *For the Learning of Mathematics*, *11*(3), 20-24.

Oxford (2011). *Oxford Dictionaries.* Oxford: Oxford University Press. Disponible en: http://oxforddictionaries.com. Consultado [24-06-2011].

Real Academia Española (2001). *Diccionario de la Lengua Española.*(22ª Ed). Madrid. Disponible en http://www.rae.es/rae.html.Consultado [24-06-2011].

Rico, L. (2001). Análisis Conceptual e Investigación en Didáctica de la Matemática. En Gómez, P. y Rico, L. (Eds.).*Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*.(pp. 179-193). Granada: Editorial Universidad de Granada.

Rico, L. (2007). *Sistema de Significados de un Concepto en las Matemáticas Escolares*. Documento no publicado. Granada: Universidad de Granada.

Romero, I. (1995). *La introducción del número real en educación secundaria*. Tesis doctoral. Granada: Universidad de Granada.

Selden A. & Selden J. (2005). Perspectives on Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 1-13.

Tall D.O (1980). Mathematical intuition, with special reference to limiting processes, *Proceedings of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Berkeley, 170-176.

Tall, D.O & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*,*12*, 151- 169.

Tall, D.O (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In Grouws D.A. (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning,* MacMillan, New York, 495-511.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. *14*(3), 293-305.

Zaskis, R. & Applebaum M. (2007). Advancing mathematical thinking: Looking back at one problem. *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME).* Working group 14, 2389-2397