UNIVERSIDAD DE GRANADA
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: UN ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE MAESTROS EN FORMACIÓN

TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

ANA GABRIELA VALVERDE SOTO

GRANADA
2008

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE GRANADA

RAZONAMIENTO PROPORCIONAL: UN ANÁLISIS DE LAS ACTUACIONES DE MAESTROS EN FORMACIÓN

Trabajo Final de Máster presentado
por D[a]. Ana Gabriela Valverde Soto
para su aprobación por el Departamento
de Didáctica de la Matemática de la
Universidad de Granada.

La Directora

Dra. Encarnación Castro Martínez

GRANADA 2008

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo de fin de máster ha sido elaborado bajo la tutela de la Dra. Encarnación Castro Martínez, a quien le agradezco profundamente su colaboración durante el proceso de realización de este estudio.

A la Universidad de Costa Rica por el otorgamiento de mi beca de estudios de postgrado y por la constante atención de mis necesidades.

A mi familia, amigos y compañeros de la Facultad de Educación de la Universidad de Costa Rica, quienes a la distancia me han brindado su apoyo y motivación en todo momento.

A mis compañeros y profesores del Programa de Máster quienes solidariamente me brindaron sugerencias en pro de la mejora del trabajo.

A los estudiantes de la Universidad de Granada que participaron en esta experiencia.

Granada, 5 Septiembre del 2008

INDICE

Sección 5. Conclusiones

Referencias Bibliográficas

Anexos

Presentación

El estudio que aquí se presenta es un Trabajo de Fin de Máster, desarrollado en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, bajo la dirección de la doctora Dª. Encarnación Castro Martínez.

Se plantea el problema de analizar las actuaciones, que como resolutores, exhiben un grupo de maestros en formación en problemas de proporcionalidad simple directa. En el estudio participan 76 estudiantes de la asignatura Enseñanza de las Matemáticas para alumnos con Necesidades Educativas Especiales, del curso académico 2007-2008. A estos sujetos se les administra un instrumento con 10 problemas en los cuales están presentes cantidades que mantienen una relación de proporcionalidad simple directa.

En este trabajo nos hemos centrado en: identificar las estrategias que aplican los sujetos para relacionar las cantidades cuando resuelven problemas sobre situaciones de proporcionalidad directa, describir el uso de la unidad que prevalece en estas situaciones, identificar las estrategias incorrectas o errores conceptuales que manifiestan los participantes, identificar y describir los procedimientos aplicados para abordar estos problemas, finalmente el estudio se orienta a clasificar las actuaciones de los sujetos según el tipo de razonamiento proporcional mostrado en cada uno de los problemas.

El contenido de este trabajo está organizado en las siguientes secciones; en la sección 1 se plantea y justifica el problema de investigación, en la sección 2 se presenta una revisión de la literatura relacionada con el razonamiento proporcional, en la sección 3 se describe el tipo de investigación y el método, la sección 4 incluye los resultados observados tras el análisis de los datos; y, para finalizar, en la sección 5 se presentan las conclusiones, limitaciones y posibles vías para la realización de futuros estudios.

Sección 1. Planteamiento del Problema

En esta sección se plantea el problema a investigar y se presentan razones que justifican la necesidad de realizar estudios dentro de la temática del razonamiento proporcional, particularmente con maestros en formación. Inicia con una reseña de estudios previos que han abordado el razonamiento proporcional así como cuales han sido los focos que los orientaron. En segundo lugar presentamos el problema de investigación que ha sido el objeto de nuestro estudio, posteriormente justificamos la realización del mismo con base en la deficiente existencia de estudios orientados exclusivamente a indagar sobre el razonamiento proporcional en el contexto de la formación de maestros. Finalmente, se presentan los objetivos e hipótesis de la investigación, con los cuales se trata de conceder un mayor detalle de cómo se aborda, en nuestro estudio, el problema planteado.

Antecedentes

El razonamiento proporcional[1] ha sido estudiado ampliamente por algunos investigadores (Inhelder y Piaget, 1958; Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Tourniaire y Pulos, 1985; Lamon, 1993; Fernández, 2001; McLaughlin, 2003; Rapetti, 2003; Bjorg, 2005; Alatorre y Figueras, 2005; Ruiz y Valdemoros, 2006; Modestou y Gagatsis, 2007) quienes han planteado su propia visión acerca de lo que significa razonar proporcionalmente.

En las investigaciones efectuadas por los autores citados anteriormente, y con el fin de caracterizar el razonamiento proporcional que aplican los sujetos, se ha recurrido al planteamiento de tareas matemáticas que se diferencian en aspectos tales como el contexto, en la estructura numérica o en los tipos de razones involucradas.

De este modo en las investigaciones iniciales, al menos hasta las realizadas en la década de los 80, podemos reconocer tres tipos de tareas matemáticas utilizadas para caracterizar el razonamiento proporcional de los sujetos. En primer lugar los problemas que requieren de la comprensión de algunos principios de la física, adicionalmente a la comprensión de la proporcionalidad (Inhelder y Piaget, 1958), en segundo lugar se reconocen las tareas de tasas en las cuales aparecen razones relativas a objetos de distinta clase y bajo contextos de distinta índole, por ejemplo Quintero y Schwartz (citados en Tourniaire y Pulos, 1985) usan problemas que relacionan pacientes y médicos; y por último los problemas de mezclas (Noelting, 1980a, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983) los cuales, según Tourniaire y Pulos (1985) difieren de los problemas de tasas en varios sentidos; en los problemas de mezclas se constituye un nuevo objeto, por ejemplo vasos con agua y vasos con zumo de naranja originan un refresco de naranja, en contraste en los problemas de tasas en los cuales no emergen objetos nuevos, luego en los problemas de mezclas se requiere que el sujeto comprenda lo que sucede cuando los dos elementos son mezclados, y por último en la mayoría de los problemas de mezclas las cantidades están expresadas en la misma unidad mientras que en los problemas de tasa las cantidades son expresadas en diferentes unidades.

Otros investigadores (Tourniaire y Pulos, 1985; Karplus y col., 1974; Cramer y Post, 1993; Post y col., 1988; Singer y Resnick, 1992, citados en Fernández 2001), plantean otras

[1] Al hablar de razonamiento proporcional no lo hacemos en el mismo sentido que cuando se hace referencia al razonamiento inductivo o deductivo.

tipologías de problemas tales como de probabilidad, valor perdido, comparación y predicción numérica, problemas tipo “por cada” o “de cada” sin embargo en muchas ocasiones se refieren a problemas, esencialmente del mismo tipo de los ya reportados previamente. Entre las tipologías más recientes y mencionadas en trabajos más actuales (Fernández, 2001; Allain, 2000) está la clasificación de Lamon (1993), quien plantea una agrupación de los problemas con base en aspectos semánticos y matemáticos, tal clasificación resulta en 4 categorías, a saber: problemas bien compactos, parte-parte-todo, conjuntos asociados y los ampliadores o reductores.

Al margen de las variaciones y características particulares de los diferentes tipos de problemas, los investigadores (Tourniaire, 1986; Lamon, 1993, Karplus y col., 1983, Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Fernández, 2001; Rapetti, 2003; Alatorre y Figueras, 2005; Modestou y Gagatsis, 2007) se han interesado por analizar las actuaciones de los sujetos; en este sentido, la pregunta: ¿Cómo resuelven el problema sujetos con diferentes conocimientos y edades? aparece reiteradamente en los reportes de investigación. En consecuencia la descripción cualitativa del razonamiento proporcional en términos de estrategias y errores, así como la identificación de dificultades relativas a las tareas de proporcionalidad ha sido uno de los focos primordiales y constantes en estos estudios.

Los trabajos previos han hecho referencia a estrategias de resolución, errores y obstáculos que niños y adolescentes manifiestan ante estos tipos particulares de problemas. Por ejemplo, a partir del análisis fenomenológico de Freudenthal (1983) en el que, entre otras cosas, se reconoce dos tipos de razones (internas y externas), investigaciones (Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Karplus y col., 1983) reportan dos estrategias básicas que examinan la manera en la que los sujetos relacionan las cantidades del problema, según pertenezcan al mismo o a diferente espacio de medida. En relación con las dificultades que experimentan los estudiantes, recientemente Modestou y Gagatsis (2007) proporcionan argumentos para afirmar que los errores que cometen los alumnos al trabajar con la proporcionalidad no son casuales, los resultados de su investigación revelan que la aplicación errónea del razonamiento proporcional en situaciones que no son directamente proporcionales subyace a la existencia de un obstáculo epistemológico de linealidad.

El problema a Investigar

El problema surge a partir de nuestra experiencia como docentes de matemáticas de secundaria y en la formación de maestros de primaria, contextos desde los cuales reconocemos que la proporcionalidad es uno de los temas más sugerentes en la enseñanza de las matemáticas, dado que éste es un concepto básico en las matemáticas y es un tema de gran importancia en el currículo escolar (Fiol y Fortuny, 1990), ya que está relacionado con la mayoría de los contenidos de matemáticas y con otras asignaturas como Física, Biología, Química, entre otras. Así, nuestro estudio tiene como propósito principal el análisis de los procesos de resolución empleados por un grupo de maestros en formación en problemas de estructura multiplicativa que implican relaciones de proporcionalidad directa entre cantidades.

Justificación de la Investigación

Después de la teoría del desarrollo humano de Piaget, en la que señalaba el razonamiento proporcional como elemento fundamental en la etapa de las operaciones formales (Inhelder y Piaget, 1958) la investigación sobre el Razonamiento Proporcional se ha centrado en estudios con adolescentes (Tourniaire, 1986). No obstante, diferentes estudios han mostrado consistentemente que muy pocos alumnos de secundaria, con habilidades promedio, usan el razonamiento proporcional de manera sólida (Post, Behr y Lesh, 1988)[2]. El tópico incluso permanece problemático para muchos estudiantes universitarios y existen evidencias sobre que una gran parte de nuestra sociedad nunca adquiere fluidez en el pensamiento proporcional (Ben-Chaim y col., 1998).

Las investigaciones orientadas a estudiar el razonamiento proporcional lo han hecho desde el análisis de las actuaciones de los estudiantes de la escuela primaria o de secundaria, a partir de esta situación surge nuestro interés por estudiar este fenómeno en otros contextos de aprendizaje, tal y como lo es la formación de maestros de primaria.

Dado el rol fundamental de los números racionales en la matemática escolar, el amplio reconocimiento de las dificultades en el aprendizaje de este tópico, y el rol crucial que en los procesos de instrucción juega el conocimiento matemático de los contenidos escolares que poseen los maestros, nos parece sorprendente que pocos investigadores hayan estudiado las bases de conocimiento que los maestros requieren para enseñar los números racionales en sus múltiples subconstructos, incluyendo la razón y la proporcionalidad que constituyen el foco primordial de nuestra investigación.

Investigaciones sobre Números Racionales y Maestros en Formación

Después de la revisión de la literatura sobre el tema de nuestro estudio, a la que hemos accedido en esta etapa, hemos comprobado que los trabajos realizados en el contexto de maestros en ejercicio o en formación (Graeber, Tirosh y Glover, 1989; Harel, Behr, Post y Lesh, 1994, citados en Lamon, 2007) no se han orientado, exclusivamente, al estudio del razonamiento proporcional, sino que tratan con varios constructos de los números racionales (Tirosh y Graeber, 1990a, 1990b). A continuación presentamos una breve exposición de las investigaciones que hemos consultado.

Algunos de los estudios llevados a cabo en el contexto de la formación de maestros se han centrado en aspectos tales como: las justificaciones que éstos daban a la división de fracciones (Ball, 1990; Wheeler, 1983), su actuación en la resolución de problemas verbales que implicaban la multiplicación y división de fracciones (Graeber y Tirosh, 1988), y sus creencias acerca de la multiplicación y división (Tirosh y Graeber, 1990a, 1990b). Tales estudios han mostrado que el conocimiento que los maestros en formación poseen sobre los números racionales es procedimental y escasamente conectado. Aunque muchos de estos sujetos podían hacer cálculos con números racionales, mostraron dificultades significativas en la resolución de los problemas verbales de multiplicación y división, y sus creencias sobre las operaciones de multiplicación y división de racionales se basaban exclusivamente en las operaciones con números naturales (Ball, 1990; Simon, 1993). Resultados de tales estudios muestran que tanto los maestros activos como aquellos en formación lidian con los mismos conceptos y manifiestan las mismas ideas primitivas y falsas concepciones que los estudiantes de primaria o secundaria.

Los profesores de matemática, implicados en los programas de formación de maestros de primaria, a menudo expresan su insatisfacción con el conocimiento de las matemáticas y las actitudes hacia las mismas que muestran los futuros maestros. El conocimiento matemático de los maestros en formación frecuentemente es descrito como insuficiente (Ball, 1990; Even 1990; Graeber, Tirosh, y Glover, 1989; Reys, 1974; Simon, 1993; Wheeler, 1983)[3]. Además algunas investigaciones reportan que la visión de las

[2] Citados en Ben-Chaim y col. (1998)
[3] Citados en Tirosh, Graeber y Wilson (1998)

matemáticas, que estos estudiantes poseen, corresponde a un cuerpo estático de conocimientos compuestos de hechos, métodos y reglas comprendidas por una pequeña porción de la población, mientras que al resto no le gustan las matemáticas y creen que ellos están condenados a no tener éxito (Tirosh, Graeber y Wilson, 1998). De acuerdo con Durmus (2005) la insuficiencia del conocimiento pedagógico y matemático de los maestros es una de las causas primarias de las dificultades que experimentan los estudiantes en las aulas. Las competencias matemáticas de los maestros juegan un rol importante como fuente de las dificultades que los estudiantes en la escuela primaria tienen con los números racionales. Esta imagen poco prometedora supone un desafío real para aquellos formadores de maestros que crean que las formas de pensamiento y actitudes hacia una disciplina son un componente principal en cualquier nivel de instrucción.

Por todo lo anterior, consideramos que el conocimiento comprensivo que surge de una investigación acerca de las formas de razonar o sobre actuaciones de los maestros en formación, en un determinado tópico de las matemáticas, tal como lo es la Proporcionalidad, constituye un material fundamental para orientar los procesos de formación en las facultades de educación.

Objetivo General

Analizar las actuaciones de los estudiantes del 3º curso de la carrera de Maestro de la especialidad de Educación Especial, de la Universidad de Granada, ante problemas de estructura multiplicativa que involucran la proporcionalidad directa entre las cantidades.

Objetivos Específicos

1. Identificar y clasificar las estrategias que aplican maestros en formación en la resolución de problemas que pueden resolverse mediante proporcionalidad directa entre sus cantidades.

2. Determinar el índice de dificultad, que presentan para dichos estudiantes cada uno de los problemas planteados.

3. Describir los procedimientos, técnicas y algoritmos que aplican los futuros maestros en la resolución de problemas que incluyen la proporcionalidad directa entre las cantidades.

4. Describir los errores que cometen estos sujetos en la resolución de dichos problemas.

5. Categorizar las actuaciones de los sujetos considerados, maestros en formación, en función del tipo de razonamiento proporcional que aplican.

A partir del objetivo general y los objetivos específicos, hemos planteado las siguientes hipótesis, con el fin de que, posterior al análisis de datos, podamos aceptarlas o rechazarlas.

Hipótesis de Investigación

H1. Las estrategias que utilizan, en la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa, los maestros en formación participantes en nuestro estudio están relacionadas con el tipo de cantidades[4] que se incluyen en el problema.

H2. El instrumento aplicado posee un nivel bajo de dificultad para los participantes de nuestro estudio.

H3. Las estrategias utilizadas por los maestros en formación, participantes en nuestro estudio, coinciden con las reportadas en investigaciones previas.

H4. Los maestros en formación participantes en nuestro estudio manifiestan errores conceptuales relativos a la proporcionalidad simple directa similares a los reportados en otras investigaciones.

H5. Las actuaciones de los maestros en formación, sujetos participantes en nuestro trabajo, no obtienen el más alto nivel de razonamiento proporcional considerado en nuestro estudio.

[4] Cantidades de la misma o de distinta magnitud.

Sección 2. Marco Teórico

Esta sección contiene una serie de aportaciones teóricas procedentes de investigaciones relevantes en al área del razonamiento proporcional. Está dividida en tres apartados fundamentales para nuestro trabajo. En la primera parte describimos los subconstructos de los números racionales dentro de los cuales se encuentra la razón, elemento clave de nuestro estudio, en esta parte hemos hecho alusión al significado de razón, proporción, y tipos de razones. En el segundo apartado se hace referencia a los tipos de situaciones de proporcionalidad simple directa y a las estrategias de resolución reportadas en estudios previos. Finalmente en el último apartado presentamos algunas definiciones del razonamiento proporcional, así como características específicas del mismo, que permiten diferenciar las actuaciones mostradas por los resolutores de problemas de proporcionalidad simple directa.

2.1 Subconstructos de los Números Racionales

Desde el punto de vista fenomenológico y semántico no es lo mismo 8/12 que 2/3. Por supuesto ambas fracciones representan o pertenecen al mismo número racional, pero existen situaciones cotidianas que dan sentido a una y no a otra. Hay, por ejemplo, botellas de 2/3, cuya capacidad se ha obtenido duplicando las de 1/3. No es la misma acción trocear una tarta en 12 partes y tomar 8 que dividirla en 3 y tomar 2; en el primer caso pueden haber comido 8 personas, y en el segundo, 2.

A partir de los ejemplos anteriores podemos concluir que la expresión $\frac{a}{b}$, o fracción[5], se emplea en distintos contextos y tiene distintas interpretaciones. A estas interpretaciones se les ha denominado por distintos autores de diversas formas: contextos, significados, interpretaciones o subconstructos. Muchos investigadores en educación matemática se han dedicado a estudiar los números racionales y sus distintos significados y se han elaborado clasificaciones de significados o subconstructos a partir del constructo de número racional. (Behr, Harel, Post y Lesh, 1992, Kieren, 1976, citado por Felip y Castro 2003; Llinares, 1997).

Kieren (1976, citado por Felip y Castro 2003), consideró siete interpretaciones del número racional: la aritmética de las fracciones, como clase de equivalencia de las fracciones, como razón, como operador, elementos de un cociente, como medida y como fracción decimal.

Freudenthal (1983), considera cuatro significados fundamentales para la fracción: parte-todo, cociente, comparación y fracción-magnitud. Otra clasificación es la propuesta por Llinares (1997), quien sugiere las siguientes interpretaciones:

- La relación parte-todo y la medida, en la que incluye las representaciones en contextos continuos y discretos, los decimales y la recta numérica.

- Las fracciones como cociente, interpretación que incluye la división indicada y como elemento de un cuerpo cociente.

- La fracción como razón (relación parte-todo o todo-todo), (escalas y proporciones).

- La fracción como operador.

[5] Fracciones como representantes de un número racional.

Behr, Harel, Post y Lesh (1992), proponen cinco subconstructos definidos en el Racional Number Proyect (RNP), tales son: parte-todo, cociente, medida, operador y razón. Kieren (1993, 1995)[6] partiendo del constructo de los racionales identifica cuatro subconstructos: cociente, medida, operador y razón. Esta clasificación es una depuración de su posición defendida en 1976 en la que consideraba siete interpretaciones del número racional.

Felip y Castro (2003) recogen una breve descripción de los subconstructos que aparecen referenciados en estudios relevantes sobre los números racionales, tales significados son:

- Cociente, se plantea en situaciones de reparto. La fracción 2/5, puede considerarse como un cociente entre los números 2 y 5, procedente de resolver un problema como el siguiente: *Se quieren repartir dos latas de refresco entre cinco niños de forma que todos tengan la misma cantidad ¿cuánto refresco recibe cada niño?*

- Razón, hace referencia a situaciones en las que se comparan dos grupos. La fracción 2/5 puede representar simbólicamente la expresión *dos de cada cinco niños tienen los ojos de color marrón*.

- Operador, en este caso se opera con la fracción para modificar una situación que puede ser el tamaño de un objeto inicial asumiendo el papel de transformador o para calcular la fracción de una cantidad dada. Es el caso de la situación: *los 2/5 de 50 Kg.*

- Parte-todo, se trata de dividir una unidad en partes iguales, y significar algunas de dichas partes: *2/5 de una tableta de chocolate*.

- Medida, son situaciones en las que se compara un objeto con el otro en el cual se considera como unidad, para ver cuántos del primero son el segundo, un ejemplo es: la medida del segmento A es 2/5 del segmento B.

En nuestra investigación, nos hemos centrado en el subconstructo de la razón, en la que la fracción m/n representa una comparación entre dos cantidades.

Razón y Proporción

La razón y proporción son maneras de comparar cantidades y examinar las relaciones entre cantidades. Por medio de una razón se puede comparar una parte de una cantidad con respecto al total de la misma (razones parte-todo) o se podría comparar dos partes de un todo (razones parte-parte). Un ejemplo de razón parte-todo puede ser el número de gominolas rojas en un frasco de gominolas multicolores y una razón parte-parte sería comparar el número de gominolas rojas respecto con el número de gominolas amarillas. Porcentajes y probabilidades son ejemplos dentro de la matemática de razones parte-todo.

Algunos autores plantean que las razones que comparan cantidades distintas se llaman tasas (rates), por ejemplo la velocidad en la que se compara la distancia (que puede ser medida en kilómetros) y el tiempo (que puede ser medido en horas), las tasas deberían de incluir la unidad de medida.

La forma convencional de escribir una razón es usando dos puntos, así 3:5 (se lee 3 es a 5) puede representar la razón entre el número de chicas dentro de un coche con respecto a las 5 personas que en total van en el mismo.

El concepto de proporción se construye sobre el concepto de razón, una proporción puede definirse como "una igualdad entre dos razones" (Van De Walle, 2005)[7], por ejemplo

---

[6] Citado en Felip y Castro (2003)
[7] Citado en D.Loder (2007)

2:4=3:6, no obstante es común escribir las razones como fracciones $\frac{2}{4}=\frac{3}{6}$. En las fracciones equivalentes, la cantidad es la misma pero expresada en otra forma equivalente. En una proporción las cantidades representadas pueden ser diferentes pero los razones son equivalentes (Van de Walle, 2005; citado en D. Loder, 2007). Cuando se representa una razón como fracción hay que ser cautelosos ya que el consecuente de la razón puede ser cero pero en una fracción el denominador cero no está definido.

La Entidad de la Razón

En el análisis fenomenológico de la razón y la proporcionalidad, Freudenthal (1983) plantea una idea base para nuestro trabajo, corresponde a la defensa de la entidad de la razón. La razón es una función de un par ordenado de números o valores de magnitud, y aunque también lo son la suma, la diferencia, el producto y el cociente, éstos lo son en sentido algorítmico: hay una receta (algoritmo) para obtener el valor de la función correspondiente a un par determinado o al menos para actuar como si se hubiera obtenido. Para el caso de la razón, el autor se pregunta ¿qué se ha obtenido si se contesta a 3:4 con $\frac{3}{4}$? Ciertamente alguien podría afirmar que la razón también puede obtenerse: transformándola en un cociente, esto es, leyendo 3 es a 4 como si dijera 3 dividido por 4, pero según Freudenthal (1983) esto es la violación de la razón. Si se hace, se priva a la razón de lo que la hace valiosa como razón.

La cuestión fundamental es que el significado propio de la razón es hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón, ser capaz de decir con sentido a es a b como c es a d, sin anticipar que a es a b puede reducirse a un número o valor de magnitud $\frac{a}{b}$. Cocientes y fracciones son medios para reducir esta complicación, para bajar su estatuto lógico, a costa de la intuición.

Según Fernández (2001) el estatuto lógico de la razón desde el punto de vista fenomenológico ha de escribirse entonces en términos de una relación de igualdad “tener la misma razón”. Este es, de hecho también el que dio Euclides, ya que en el libro V de los Elementos lo que realmente define no es “razón” sino “guardar razón” y cuando se refiere a cantidades proporcionales dice “tener una misma razón”. Según este mismo investigador el estatuto lógico de la razón es pues, desde este punto de vista, de un nivel más elevado que el de número, fracciones, longitudes y otros conceptos con los que los alumnos han tropezado previamente en su escolaridad. El sentido en el que califican el nivel más elevado es el que le da el provenir de una relación de equivalencia pues lo que organiza es una propiedad intensiva y no una propiedad extensiva de los objetos o conjuntos de objetos.

Tipos de Razones

Gran variedad de propiedades intensivas de objetos y de otros fenómenos son organizados por la razón, por lo que algunos investigadores han generado clasificaciones de las razones, algunos tipos se resumen en la tabla 1:

Tipos de Razones	Descripción General
Razones internas Razones externas	Si la relación se establece en una magnitud o entre magnitudes.
Exposiciones Composiciones Constructos	Si la razón se considera en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes.
Razones enteras Razones no enteras	Si el cociente correspondiente a la razón es o no un número entero.

Tabla 1. Tipos de Razones

Razones Internas y Razones Externas

Freudenthal (1983) clasificó una razón como interna si sus elementos (antecedente y consecuente) comparten el mismo espacio de medida, o en terminología de Freudenthal si provienen del mismo "sistema". Similarmente, una razón externa está compuesta por elementos que no comparten el mismo espacio de medida. Por ejemplo las dos razones en la siguiente proporción implican una comparación interna según la definición de Freudenthal:

4 personas: 20 personas=1 coche: 5 coches

Mientras la siguiente proporción utiliza razones externas o del tipo "between":

4 personas: 1 coche=20 personas: 5 coches

Sin embargo surge cierta confusión debido a que en las investigaciones que tuvieron origen en la tradición científica (o de la ciencia) (Karplus, Pulos y Stage, 1983; Noelting 1980a, 1980b), se usó una definición alterna de "sistema", este término se utilizó para referirse a un conjunto de elementos que se relacionan.

De acuerdo con esta concepción alterna, el ejemplo muestra dos sistemas con personas y coches relacionándose.

$$\underbrace{\text{4 personas: 1 coche}}_{\text{Sistema A}} = \underbrace{\text{20 personas: 5 coches}}_{\text{Sistema B}}$$

La noción de los científicos respecto a la razón interna corresponde a una comparación de elementos en (o dentro de) un estado científico o sistema (correspondiente a la razón externa de Freudenthal). Para ellos una razón externa es aquella que implica elementos de dos sistemas diferentes. De este modo, según la definición de estos investigadores las siguientes proporciones corresponden a razones internas y externas respectivamente:

1 milla:4 horas=3 millas:12 horas → razón interna desde la tradición de la ciencia

1 milla:3 millas=4 horas:12 horas → razón externa desde la tradición de la ciencia

Según Lamon (2007) la confusión es fácilmente eliminada usando la terminología "en (within) o entre (between) sistemas" o "en (within) o entre (between) espacios de medida".

En el presente trabajo consideramos la sugerencia propuesta por Lamon, ya que en aquellos problemas cuyas cantidades están dadas en la misma unidad y por ende pertenecen a un mismo espacio de medida consideramos que estamos en un contexto de sistemas y usamos la terminología "en" (within) o "entre" (between) sistemas, y si las cantidades dadas en el problema están expresadas en diferentes unidades de medida consideramos que estamos en un contexto de espacios de medida y usamos la terminología de Freudenthal (1983) para referirnos a las razones externas e internas.

Por ejemplo si consideramos el problema número 1 del instrumento aplicado:

Dos amigas Rosa y Ana compraron caramelos. Rosa compró 3 caramelos por los que pagó 12 céntimos y Ana compró 5 caramelos por los que pagó 20 céntimos. Indica si alguna de las dos amigas compró los caramelos más baratos.

Según Lamon (2007) el problema se puede analizar usando la terminología de Vergnaud de isomorfismo de medidas, en la cual la medida 1 (M_1) se refiere al número de caramelos y la medida 2 (M_2) se refiere a los costos. Los espacios de medida usualmente se refieren a diferentes conjuntos de objetos, diferentes tipos de cantidades o diferentes unidades de medida.

M_1	M_2
3 caramelos	12 céntimos
5 caramelos	20 céntimos

En este caso, 3:5=12:20 es una proporción cuyas razones son internas, ya que se originan *dentro (within) del espacio de medida.*

Por otro lado si consideramos el problema 6 del instrumento, se tiene la tarea de comparar el sabor a naranja entre las mezclas que resulten de las bandejas:

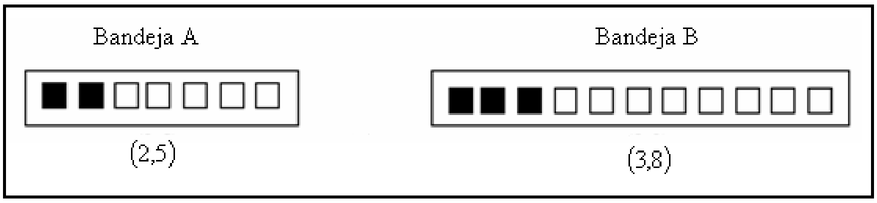


Figura 1. Problema 6 del instrumento

En este caso las razones que comparan vasos con zumo de naranja y vasos con agua tal como 2:5 y 3:8, son razones *dentro (within) de un sistema*.

Otros Tipos de Razones

Para Freudenthal (1983) la razón debe considerarse en un contexto más amplio que el de las relaciones en una magnitud y entre magnitudes. Así organiza distintos ejemplos de razones en tres clases denominadas:

Exposiciones: Una exposición es una terna (Ω, M, ω)donde Ωes un conjunto de objetos a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en *M* mediante una función ω. Un ejemplo de exposición puede ser el formado por un conjunto de provincias Ω y sus superficies M, en este contexto particular la razón puede usarse para comparar las superficies de varias provincias: Sevilla es tantas veces más extensa que Granada.

Composiciones: Una composición es una terna (Ω, M, ω), donde Ω es un conjunto de cosas, partes o clases de un universo a cada una de las cuales se le asocia una magnitud o una medida en *M* mediante una función ω. Aunque pudiera pensarse que las definiciones de exposiciones y composiciones son iguales, existe una diferencia entre ellas. En las exposiciones los elementos de Ω son objetos o cosas y en las composiciones los elementos de Ω son partes o clases de un universo. Un ejemplo de composición puede ser una mezcla de líquidos distintos que se unen para formar un refresco.

Constructos: Fernández (2001) expone este tipo con base en los siguientes ejemplos, en los cuales un conjunto de magnitudes se pone en correspondencia con otro mediante una ley (por ejemplo la semejanza):

> *"consideremos un barco del que se ha hecho un modelo reducido, o un país y su mapa a una cierta escala, o una foto o un dibujo de los que se ha hecho una ampliación. En cada uno de estos casos, se obtiene la distancia entre dos puntos cualesquiera del segundo objeto (el modelo reducido, el mapa, la ampliación), multiplicando por un mismo operador la distancia entre dos puntos homólogos del objeto de salida. El operador en cuestión se llama "factor de escala" (del modelo reducido o del mapa o de la ampliación). En este tipo de situaciones es donde se ve cómo un operador funciona con parejas repetidas (parejas de puntos que tienen la misma distancia)"*

También podemos considerar las razones desde otra perspectiva pues la relación multiplicativa puede ser "entera" o "no entera" (Abromowitz, 1975; Freudenthal, 1983; Karplus y col., 1983; Tourniaire y Pulos, 1985)[8]. Por ejemplo, en un problema cuya resolución se plantee por medio de $\frac{2}{4}=\frac{12}{x}$, podemos observar que tanto dentro de la razón dada (2x2=4) como entre las razones (2x6=12) hay múltiplos enteros. Por otro lado una razón no es entera, cuando al menos una de las relaciones multiplicativas (dentro o entre las razones) no es un número entero. Por ejemplo, en un problema cuya resolución se plantee por medio de $\frac{8}{5}=\frac{48}{x}$ observamos que hay un múltiplo entero entre las dos razones (8x6=48) pero en la razón interna la relación no es entera ($8\times\frac{5}{8}=5$ o $5\times 1\frac{3}{5}=8$).

2.2 Tipos de Situaciones de Proporcionalidad Simple Directa

Con el fin de caracterizar el razonamiento proporcional que aplican los sujetos, en la investigación se ha recurrido al planteamiento de distintos tipos de problemas, los cuales se diferencian en aspectos tales como el contexto, la estructura numérica o los tipos de razones involucradas.

Tourniaire y Pulos (1985) hacen una clasificación de las diferentes tareas y problemas que se han propuesto a los estudiantes en las distintas investigaciones llevadas a cabo hasta principios de los años 80.

Tareas de física: son aquellos en las que se requiere el conocimiento o comprensión de algunos principios físicos además del conocimiento y comprensión de la razón y proporción. Han sido criticadas por Karplus, Pulos y Stage (1983) por el hecho de requerir para su resolución conocimientos de física, además de los ligados a la razón y a la proporción.

Problemas de tasa (rate): aquellos problemas verbales en los que se comparan razones entre objetos distintos. Entre los más conocidos está el de Mr. Short y Mr. Tall y el de consumo de gasolina por coche.

[8] Citados por Bjorg (2005).

Problemas de mezclas: aquellos problemas verbales en los que se presenta una mezcla, tanto si son de comparación de razones como de valor perdido. Entre los más conocidos “el rompecabezas de limonada” de Karplus y col. (1983) y el de “rompecabezas del jugo de naranja” de Noelting (1980a).

Otra clasificación de los problemas utilizados (Cramer y Post, 1993; Post y col., 1988; Vergnaud, 1988; citados en Fernández 2001) para estudiar el pensamiento proporcional de los estudiantes es la siguiente:

Problemas de valor perdido (missing value problems): Tres datos de una cuarta proporcional o de una proporción están dados y el otro es desconocido. El ejemplo paradigmático en este caso es el problema de Mr. Short y Mr. Tall (Karplus y col., 1974), desde la perspectiva de Tourniaire y Pulos (1985), este problema es del tipo de tasa (rate).

Problemas de comparación numérica: En este caso la información numérica de las dos razones está dada de forma completa, bien sea de forma implícita o explícita, sin embargo no es necesario dar una respuesta numérica. Un ejemplo de este tipo es el rompecabezas del jugo de naranja de Noelting (1980a), no obstante Tourniaire y Pulos (1985) llamaron a éstos, problemas de mezclas. En este caso se varía los números de manera que las relaciones que hay entre los datos resulten enteras y no enteras “en” y “entre” espacios de medida. Considera más difícil la situación en la que la relación no es entera (por ejemplo en la jarra A, tres vasos de agua y siete de jugo de naranja, y en la jarra B cuatro vasos de agua y nueve de jugo de naranja)

Problemas de comparación y predicción cualitativa: este tipo de problemas de comparación cualitativa están construidos de manera que la comparación que han de hacer los estudiantes para resolver el problema no dependa de específicos valores numéricos ni de la información gráfica que se les proporciona. En contraste con los dos tipos anteriores, en los que algunas habilidades memorísticas o mecanizadas pueden ser usadas para su resolución, este tipo de problemas requiere la comprensión del significado de las proporciones

Atendiendo a las características semánticas de los enunciados de los problemas Lamon (1993) hace una clasificación en la que caracteriza cuatro tipos de problemas:

Problemas bien compactados (well-chunked measures): en este tipo de problemas se implica la comparación de dos cantidades extensivas, produciendo una cantidad intensiva o tasa (rate) que es bien conocida. Por ejemplo kilómetros por hora (velocidad), pesetas por kilo (precio). Según Fernández (2001), Lamon toma la denominación “well chunked” de Kaput (1985), y se refiere de hecho a la tercera cantidad, pues los problemas de tasa en los que la cantidad intensiva no está bien determinada los separa y caracteriza como sigue.

Conjuntos asociados: la relación entre dos elementos de dos conjuntos produce una cantidad intensiva que no es conocida o no está clara, al menos que esté bien definida en la situación del problema. Algunos de los ejemplos que usa Lamon pueden ser: (1) *Si en un caso siete chicas disponen de tres pizzas y en otro 1 pizza se reparte entre tres chicos ¿Quién tendrá más pizza?* (2) *En un restaurante ponen para cada comensal 7 piezas de cubertería y 3 de vajilla, ¿cuántas piezas de vajilla pondrán si han puesto 35 cubiertos?*

En estos ejemplos las nuevas cantidades intensivas: cantidad de pizza/persona y número de cubiertos/número de platos no son conocidas ni están bien compactadas o estructuradas.

Parte-parte-todo: una cantidad extensiva (la cardinalidad) de un subconjunto o parte de un todo es dada (relacionada) en términos de la cardinalidad con la de dos o más subconjuntos o partes de un mismo todo. Algunos ejemplos pueden ser: la razón en un aula de X chicos con Y chicas y la razón entre P respuestas correctas y Q respuestas incorrectas en un test.

Ampliadores y reductores: son problemas de escalas, tales como la comparación de la razón de crecimiento de dos árboles pasado un período de tiempo, la determinación del factor de escala entre dos figuras semejantes, etc.

Descripción de las Estrategias de Resolución

Al margen de las variaciones y características particulares de los diferentes tipos de problemas, los investigadores (Tourniaire, 1986; Cramer y Post, 1993; Lamon, 1993; Karplus y col., 1983; Noelting, 1980a; Noelting, 1980b; Fernández, 2001; Rapetti, 2003; Alatorre y Figueras, 2005; Modestou y Gagatsis, 2007) se han interesado por analizar las actuaciones de los sujetos, orientándose hacia la identificación y caracterización de estrategias correctas e incorrectas, con el fin último de categorizar las actuaciones de los sujetos según el tipo de razonamiento proporcional.

Estrategias Correctas

De acuerdo con las investigaciones previas (Noelting, 1980a, 1980b; Karplus, Pulos y Stage, 1983; Lamon, 1993; Fernández, 2001; Rapetti, 2003; Alatorre y Figueras, 2005; Ruiz y Valdemoros, 2006; Lamon, 2007) las estrategias aplicadas por los futuros maestros, se pueden considerar enfocadas en dos aspectos:

1. La forma en que establecen la razón, es decir observando cómo relacionan las cantidades.
2. El uso de la unidad[9] en el problema.

1. Relación entre las Cantidades

Con respecto al primer grupo de estrategias, iniciamos con dos tipos de estrategias que son mencionadas reiteradamente en las investigaciones previas: la Estrategia “en” (within) y la Estrategia “entre” (between), las cuales dada la distinción hecha en el apartado *Tipos de Razones* tendrán una doble acepción según se esté en el contexto de los “sistemas” o entre espacios de medida.

Freudenthal en 1978 (citado por Karplus y col., 1983) ha señalado que los problemas de comparación y de valor perdido pueden ser resueltos por medio de dos acercamientos, que son consistentes con la definición de razón interna y externa, y que difieren en las operaciones que se aplican a los datos. Estos dos enfoques se refieren a estrategias correctas que permiten comparar razones o resolver un problema de valor perdido. Para la explicación de las estrategias se consideran dos ejemplos:

Problema de valor perdido: Un coche recorre 175 km. en 3 horas. Si va a la misma velocidad, que tan lejos llegará en 12 horas.

Problema de comparación: El coche A recorre 180 km. en 3 horas. El coche B recorre 400 km. en 7 horas. ¿Cuál de los dos iba más rápido?

En relación a los ejemplos a y b, están las estrategias:

---

[9] Según Delgado y col. (s.f.) en procesos de resolución de problemas de proporcionalidad, se evidencia el uso de diferentes tipos de unidades por parte de los estudiantes, que pueden ser dos tipos: unidades simples (aquellas unidades que en si constituyen un todo o se componen de una sola “cosa”) y unidades compuestas (obtenidas al tomar la secuencia de ítems unitarios como una sola unidad que en si misma esta compuesta de unidades).

"En" (within): se refiere a considerar la razón entre cantidades correspondientes, ya sea entre las distancias o entre los tiempos, y después aplicar esa razón para resolver el problema. Los sujetos relacionan multiplicativamente cantidades homogéneas en un espacio de medida, en este caso aplican la noción de razones internas (en el sentido que le da Freudenthal). Esta estrategia también la denominan "escalar" o "en".

Por ejemplo para el problema a, primero se halla la razón entre los tiempos $\frac{12}{3} = 4$, y luego se usa el resultado para obtener la distancia así $175 \cdot 4 = 700$ km.

"Entre" (between): con respecto al ejemplo b, consiste en considerar la razón entre las cantidades extensivas kilómetros y horas, y posteriormente aplicar el resultado para resolver el problema. Las relaciones se establecen entre cantidades de distintos espacios de medida utilizan razones externas (en el sentido que le da Freudenthal). Esta estrategia también la denominan "funcional" o "entre".

Por ejemplo, en el problema b se tendría que hallar primero la razón para el auto A $\frac{180 \text{ km}}{3 \text{ h}}$ y hallar la razón para el auto B $\frac{400 \text{ km}}{7 \text{ h}}$, luego con los resultados correspondientes a saber $\frac{60 \text{ km}}{1 \text{ h}}$ para el auto A y $57.1 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ para el auto B, resolver el problema.

Sin embargo, Gerald Noelting (1980a, 1980b) en su investigación referente a las actuaciones de los alumnos ante tareas de comparación de razones, bajo el contexto de las mezclas (problema del refresco de naranja), presenta otra perspectiva en relación con las estrategias between y within, las cuales son consecuencia de la definición que utiliza para razones internas y externas.

En este sentido para Noelting (1980a, 1980b) las estrategias "entre" son aquellas en las que los términos relacionados son los términos entre distintos sistemas, mientras que las estrategias "en" son aquellas en las que los términos son los términos de un mismo sistema.

En nuestro caso, siguiendo a Fernández (2001) y con el fin de evitar confusiones respecto a las estrategias "en" y "entre" planteadas por Noelting (1980a, 1980b), si los estudiantes relacionan las cantidades en un mismo espacio de medida, diremos que hacen uso de una estrategia escalar, y si relacionan entre espacios de medida diferentes diremos que hacen uno de una estrategia funcional. Por otro lado si relacionan las cantidades en un mismo sistema, diremos que hacen uso de la estrategia "en" (within), y si relacionan las cantidades entre sistemas diferentes diremos que aplican la estrategia "entre" (between).

2. Uso de la Unidad

Otra manera de visualizar las estrategias aplicadas por los sujetos al resolver problemas de proporcionalidad directa, es considerar las estrategias empleadas por los sujetos en términos del uso que hacen de la unidad, en el caso de la resolución de problemas de valor perdido Lamon (1993) identifica tres estrategias correctas, dos de las cuales presentan un uso diferenciado de la unidad, y a las cuales haremos referencia después de considerar el siguiente ejemplo:

Si por 8 refrescos pago 4 euros ¿cuánto debo pagar por 24 refrescos?

Estrategia de la Unidad Simple (single unit strategy): en este caso los sujetos hallan el valor de un refresco ($4 \div 8 = 0{,}5$) y el resultado lo obtienen mediante la operación

$24 \cdot 0{,}5 = 12$ euros. Este tipo de estrategia también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de "razón unitaria" (unit-rate), también conocida ¿cuánto por uno?

Estrategia de la Unidad Compuesta (composite unit strategy): los sujetos consideran que 24 refrescos es 3 veces la unidad compuesta (8 refrescos) y calculan el costo como 3 veces el costo de la unidad, en este caso el costo de la unidad 8 refrescos era 4 euros. Este tipo de estrategia también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de "factor de cambio" o "tantas veces como" (factor of change method or times as many), en ella el sujeto reconoce el factor multiplicativo asociado a las relación interna entre los datos en cada espacio de medida. Según Fernández (2001) esta estrategia es fácil de usar cuando el factor es entero, y además plantea que este factor de cambio puede referirse tanto a la relación externa como a la interna.

Según Fernández (2001) el uso de la unidad, ya sea simple o compuesta, en la resolución de problemas de razón y proporción, se completa con la utilización de la razón como unidad. Lamon (2007) llama "unitización" a la capacidad de construir una unidad de referencia y reinterpretar la situación en términos de esa unidad. Para describir este mismo proceso Freudenthal usa el término de "normalización"

En los problemas de razón y proporción se puede dar el hecho de que el sujeto considere como unidad una razón ya dada en el enunciado del problema o que considere otra construida por él mismo.

Por ejemplo para el problema:

> *En una reunión hay 7 chicas y 3 chicos. Han comprado 4 pizzas y deciden repartirlas del siguiente modo: 3 pizzas para las chicas y 1 pizza para los chicos. Determina quiénes reciben más pizza las chicas o los chicos.*

en el marco de la "normalización", este problema se abordaría mediante el uso de la razón equivalente, en la que la razón 1 pizza:3 chicos es equivalente a la razón 3 pizzas:9 chicos y la unidad compuesta de referencia (3 pizzas) es la misma. Luego para resolver el problema los alumnos han de comparar únicamente los consecuentes de las razones 3:9 y 3:7.

En este marco Lamon (2007) describe particularmente el uso de la razón como unidad (ratio as unit). Considerando el problema anterior (pizzas), en la resolución se toma la razón 3 chicos:1 pizza como una unidad y se reinterpreta la otra razón 7 chicas:3 pizzas en términos de esta unidad. Los alumnos utilizan esta estrategia mediante técnicas de apareamiento de la siguiente forma: primero aparean 3 chicas con 1 pizza (una razón unidad), después aparean otra pizza con otras tres chicas (otra razón unidad), al final se quedan con 1 pizza para 1 chica, la cual comparan con 3 chicos:1 pizza, y concluyen que las chicas tienen más trozos de pizza.

De acuerdo con Fernández (2001) otra manera de considerar la normalización de razones es estableciendo un vínculo con el sistema de numeración decimal. En este, el consecuente de la razón es una potencia de diez y las expresiones verbales que se utilizan son: "el tanto por diez", "tanto por cien", "tanto por mil"…, entre las cuales el tanto por cien es de un uso más común. Cuando se toma el 100 como referente, se normaliza el todo a 100 y la relación que se establece se representa, usualmente, mediante el esquema parte-todo, diagramas de sectores o mediante barras. En este caso la relación se establece entre un número y 100, por lo que con la expresión simbólica % se evita el tener que usar las fracciones decimales.

Según Lamon (2007) la normalización no es un buen indicador del razonamiento proporcional ya que los estudiantes que a menudo la usan fallan en reconocer toda la relación estructural de una proporción.

Indistintamente del hecho de que el alumno utilice una unidad procedente de los datos del problema o de que conciba una nueva unidad para reinterpretar la situación, ya sea una nueva razón o que normalice con respecto a 100, en este trabajo y para estos tres casos, haremos referencia a la estrategia de normalización.

Estrategias Incorrectas

En la resolución de problemas, como consecuencia de errores conceptuales, los sujetos aplican estrategias que se consideran erróneas o no satisfactorias. A continuación describiremos algunas de las estrategias incorrectas que reportan diferentes autores en investigaciones relacionadas con las actuaciones de los sujetos ante tareas de razón y proporción.

Karplus y col. (1983) plantea que una estrategia errónea frecuente en la resolución de problemas de razón y proporción es "ignorar parte de los datos del problema", en este caso los estudiantes intentan resolver el problema con una parte de los datos. Por ejemplo si el problema es de comparación de razones entonces intentan resolverlo comparando únicamente los antecedentes o los consecuentes y con base en eso toman la decisión.

Si el problema es de valor perdido, los alumnos operan con parte de los datos para obtener una respuesta numérica. Lamon (1993) denomina a esta estrategia operaciones al azar ("random operations").

Según Fernández (2001), la estrategia errónea más documentada en las investigaciones corresponde a la "estrategia aditiva" o de "diferencia constante", en este caso los sujetos relacionan los términos de una razón aditivamente, la cuantifican por sustracción entre los términos y esta diferencia la aplican a la segunda razón.

Ricco (1982) citado en Fernández (2001), plantea que una estrategia incorrecta surge cuando la estrategia de reducción a la unidad se aplica erróneamente, por ejemplo en un caso usar un valor arbitrario como unidad (a ojo) para resolver el problema y en el otro usar el primer dato del problema como valor unitario. Por ejemplo en el problema "Si 3 lápices cuestan 12 francos ¿cuánto cuestan 5 lápices?", en este caso los alumnos toman como valor unitario 3 (lo toman como valor de 1 lápiz) y resuelven la cuestión multiplicando 3x5= 15.

Ilusión de Linealidad

Se conoce como *ilusión de linealidad* a la tendencia a aplicar modelos lineales en situaciones no propicias para que éstos puedan ser aplicados. Constituye así una estrategia incorrecta para abordar situaciones problemáticas en donde las cantidades no mantienen una relación de proporcionalidad simple directa. Según algunos autores (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 1998; Freudenthal, 1983) esta tendencia se debe principalmente a la importancia de la función lineal como una herramienta matemática para explicar fenómenos en diferentes campos de la actividad humana. Tanto la proporcionalidad como la preservación de la razón y la linealidad parecen ser considerados modelos universales, reforzándose esta consideración por el frecuente uso que se hace de las mismas.

La estructura lingüística básica de los problemas que implican proporcionalidad incluyen cuatro cantidades (*a, b, c y d*) y una implicación de esa misma relación multiplicativa enlaza a con b y c con d. De estas cuatro cantidades, en la mayoría de los casos, tres son conocidas y una desconocida. Cuando un problema encaja en ésta estructura general, la tendencia de evocar la proporcionalidad directa puede ser extremadamente fuerte, incluso si el problema no se ajusta a la proporcionalidad directa (Verschaffel, Creer, y De Corte, 2000)[10].

La investigación acerca de la tendencia de los estudiantes a aplicar el razonamiento proporcional en problemas en los cuales éste no tiene lugar (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 2002; Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel, 2005) ha proporcionado claros indicios de que éste fenómeno es parcialmente causado por las características de la formulación del problema con las cuales los estudiantes han aprendido a asociar el razonamiento proporcional a lo largo de su vida escolar. En particular, Greer (1997) señala que las estructuras multiplicativas de valor perdido, notablemente aquellas que sobre una lectura superficial pueden crear una ilusión de proporcionalidad, aportan un ejemplo de invocación inapropiada de proporcionalidad, como un resultado de una reacción inconsciente a la forma lingüística. Adicionalmente Van Dooren y col. (2005) argumentan que la tendencia de los estudiantes a usar estrategias proporcionales en situaciones no proporcionales se incrementa considerablemente con el paso por los diferentes niveles del sistema escolar.

Sin embargo Modestou y Gagatsis (2007) sugieren que las líneas anteriores de interpretación no proporcionan un marco suficiente y coherente dentro del cual el fenómeno de la ilusión de la linealidad pueda ser analizado; éstos investigadores plantean una nueva forma de abordar éste fenómeno. Se preguntan y trabajan sobre la hipótesis de que la linealidad constituye un obstáculo epistemológico. Entre sus argumentos señalan que los errores no siempre son el efecto de la ignorancia, la incertidumbre o del azar, éstos pueden resultar de la aplicación de una objeto de conocimiento previo el cual fue interesante y exitoso, pero que en otro contexto es falso o simplemente inadaptado (Brousseau, 1997)[11]. Errores de éste tipo no son irregulares e inesperados, sino que son reproducibles y persistentes.

Para Modestou y Gagatsis (2007) un obstáculo epistemológico se caracteriza por su aparición tanto en la historia de las matemáticas como en la actividad matemática cotidiana. En su trabajo acerca de la búsqueda de las raíces de la linealidad incluyen una lista de condiciones necesarias para el uso del término obstáculo epistemológico y no "dificultad", tales características son:

- Un obstáculo es un elemento de conocimiento o una concepción, no una dificultad o una falta de conocimiento.

- Este elemento de conocimiento produce respuestas que son apropiadas dentro de un contexto particular.

- Genera falsas respuestas fuera de éste contexto.

- Esta pieza de conocimiento se resiste tanto a contradicciones ocasionales como al establecimiento de un nuevo elemento de conocimiento. La necesidad de una nueva y mejor pieza de conocimiento no es suficiente para que la precedente desaparezca.

[10] Citados en Van Dooren y col. (2006)
[11] Citado en Modestou y Gagatsis (2007)

- Después de que ha sido reconocida ésta imprecisión, el elemento de conocimiento original continúa surgiendo de manera persistente.

Por ejemplo en el caso de errores típicos tales como $6 \div \frac{1}{2} = 3$, el conocimiento de los números naturales y el cociente entre ellos llega a constituirse en un obstáculo para la comprensión de los números racionales (Gagatsis y Kyriakides, 2000).

En términos generales, para Modestou y Gagatsis (2007) los errores de pseudo-proporcionalidad son el resultado del obstáculo epistemológico de linealidad. Consideran que la linealidad es un conocimiento exitoso en un contexto particular y para un conjunto particular de situaciones. Sin embargo, su aplicación fuera de ese contexto da como resultado falsas respuestas que van acompañadas por una fuerte creencia y seguridad de que la respuesta está correcta. Estas respuestas son recurrentes y parecen ser universales y muy resistentes a una variedad de formas de apoyo orientados a resolver el problema. Argumentan que la linealidad constituye un obstáculo epistemológico para la adquisición de funciones no lineales, y consecuentemente esos errores ocurren debido al obstáculo y no a las formulaciones lingüísticas estereotipadas.

Algunos casos de razonamiento lineal injustificado en geometría

En el dominio de la geometría, se ha informado sobre varios casos de exceso de dependencia de los estudiantes de los modelos lineales. Se sabe que frecuentemente se producen razonamientos lineales incorrectos en problemas sobre las relaciones entre los ángulos y los lados de las figuras geométricas (Bold, 1969; De Block-Docq, 1992; Rouche, 1992a)[12].

Van Dooren y col. (2006) señalan algunos ejemplos de la ilusión de linealidad en el dominio de la geometría que pueden encontrarse en el trabajo de De Bock- Docq (1992), el cual incluye varios procesos de razonamiento erróneos, todos basados en una aplicación inapropiada de la proporcionalidad directa (o inversa) entre cantidades no proporcionales, dos ejemplos son:

> *"El ángulo de un dodecágona regular puede obtenerse dividiendo el ángulo de un hexágono regular por 6 y multiplicando este resultado por 12".*
>
> *"Para construir un triángulo equilátero inscrito en una circunferencia, se debe tomar como lado del triángulo el diámetro de la circunferencia; un dodecágono regular puede construirse tomando como lado la mitad del radio de la circunferencia".*

Uno de los casos más conocidos y frecuentemente estudiados de uso indebido de la linealidad por parte de los estudiantes es el relacionado con los problemas sobre el efecto el agradamiento o reducción de una figura sobre su área o su volumen. El principio que gobierna este tipo de problemas es bien conocido: un aumento o reducción de cualquier figura geométrica (cuadrado, círculo, cubo, figura irregular,…) por un factor r, multiplica las longitudes por un factor r, las áreas por un factor r^2 y los volúmenes por un factor r^3.

Como señalan varios autores (NCTM, 1989; Outhread y Mitchelmore, 2000), alcanzar una intuición adecuada sobre las relaciones antes indicadas entre longitudes, áreas, y volúmenes de las figuras similares, suele ser lento y penoso, en las que los estudiantes a menudo resultan desorientados por la ilusión de la linealidad, pensado que si una figura se aumenta o se reduce r veces, el área y el volumen se hacen r veces mayores o menores

[12] Citados en Van Dooren y col. (2006)

también. Un ejemplo histórico de este fenómeno es el famoso diálogo de Platón "Menón", en el que se le pide a un esclavo que dibuje un cuadrado que tuviera el doble de área que un cuadrado dado y el esclavo propone en primer lugar duplicar el lado del cuadrado (Van Dooren y col., 2006). En el mismo sentido, leemos en los estándares del NCTM que "… la mayoría de los estudiantes de 5.º de primaria a 2.º de secundaria creen incorrectamente que si los lados de una figura se duplican para producir una figura semejante, el área y el volumen también se duplicarán" (National Council of Teachers of Mathematics, 1989, pp., 114-115). En otras palabras, los estudiantes tienden a ver las relaciones entre longitud y área o entre longitud y volumen como lineales en lugar de, respectivamente, como cuadráticas o cúbicas, y, en consecuencia, aplican el factor de escala lineal en lugar de su cuadrado o cubo para determinar el área o volumen de la figura ampliada o reducida.

En los últimos años ha sido ampliamente estudiada la idea, equivocada, de que el área y el volumen de una figura aumentan r veces cuando el lado de la figura aumenta r veces, (De Bock, Verschaffel, y Janssens, 1998, 2002; Modestou y Gagatsis, 2007). En una serie de estudios experimentales de De Bock y otros (1998, 2002), se administraron a grupos numerosos de estudiantes de 12 a 16 años, pruebas escritas con problemas verbales proporcionales y no proporcionales sobre longitudes, perímetros, áreas y volúmenes de distintos tipos de figuras.

Posteriormente con entrevistas en profundidad, De Bock y col. (2002) trataron de desvelar los procesos de resolución de problemas y los mecanismos subyacentes a los hallazgos de los estudios de papel y lápiz. Este estudio indicó que:

- La mayoría de los estudiantes utilizaron un modelo proporcional de forma espontánea, casi intuitiva no siendo conscientes de su elección de un modelo proporcional, mientras que otros estaban realmente convencidos de que las funciones lineales eran aplicables "en todas partes".

- Muchos estudiantes mostraron limitaciones en su conocimiento geométrico (p. ej., la creencia errónea de que el concepto de área sólo se aplica a las figuras regulares, o que una figura aumentada en tamaño y semejante a otra no aumenta necesariamente en la misma proporción en todas sus dimensiones).

- Muchos estudiantes tenían hábitos inadecuados, creencias y actitudes hacia la resolución de problemas aritméticos verbales en el contexto escolar (p. ej., la creencia de que los dibujos no sirven de ayuda, que la primera solución es siempre la mejor, etc.), que demostraron ser un abono fértil para un proceso de modelización superficial o deficiente. A menudo, esto impedía a los estudiantes desenmascarar por inadecuado su solución proporcional, y descubrir la solución correcta al problema.

Van Dooren, De Bock y Verschaffel (2006) han identificado tres categorías que incluyen los diferentes factores explicativos de de las ilusiones de linealidad de los estudiantes, tales categorías son:

(1) elementos relacionados con la linealidad/proporcionalidad como tal, su carácter intuitivo, su simplicidad y presencia en la vida diaria,

(2) elementos relacionados con las experiencias de los estudiantes en el sistema escolar formal y,

(3) elementos relacionados con el dominio matemático o científico específico en el que el fenómeno se produce.

En la Tabla 2 se recoge una descripción general de las estrategias correctas e incorrectas detectadas en la literatura y que utilizamos para describir el Razonamiento Proporcional mostrado en las actuaciones del grupo de sujetos con los que hemos trabajado. Les hemos asignado el código que usamos en nuestro estudio.

	Estrategias	**Foco**	**Código**
Correctas	Escalar: relacionar multiplicativamente cantidades homogéneas en un mismo *espacio de medida.*	Establecimiento de la razón	R_1
	Funcional: las relaciones se establecen entre cantidades de distintos *espacios de medida.*		R_2
	Within (en): las relaciones se establecen entre cantidades de un mismo *sistema*.		R_3
	Between (entre): son aquellas en las que los términos relacionados son los términos entre distintos *sistemas*.		R_4
	Unidad Simple: “razón unitaria” (unit-rate), también conocida ¿cuánto por uno?	Uso de la unidad	U_1
	Unidad Compuesta: reconocer el factor multiplicativo asociado a la relación interna o externa entre las cantidades en cada espacio de medida.		U_2
	Normalización: construir una unidad de referencia y reinterpretar la situación en términos de esa unidad.		U_3
Incorrectas	Ignorar parte de los datos: intentar resolver el problema con una parte de los datos, por ejemplo comparando sólo los antecedentes o consecuentes de cada razón.		EI_1
	Aditiva: relacionar los términos de una razón aditivamente, cuantificación por sustracción de los términos de una razón y esta diferencia aplicarla a la segunda razón.		EI_2
	Operaciones al azar: operar con los datos para obtener una respuesta numérica.		EI_3
	Ilusión de linealidad: aplicar modelos lineales en situaciones en las que éstos no son aplicables.		EI_4

Tabla 2. Tipos de Estrategias aplicadas en problemas de proporcionalidad directa

2.3 Razonamiento Proporcional

El razonamiento proporcional ha sido ampliamente estudiado a lo largo de los años e investigadores están de acuerdo de que éste es un concepto crucial para los estudiantes. En la escuela primaria, los estudiantes son introducidos en estrategias aditivas y multiplicativas que sientan las bases para el razonamiento proporcional formal. Behr y col. (1992) sugieren que existe evidencia que muestra que los estudiantes reconocen la similitud estructural en ambos lados de una proporción, sin embargo, tiempo después estos mismos alumnos no aplican el razonamiento proporcional en sus producciones.

Según Piaget e Inhelder (1958), el razonamiento proporcional es una relación de segundo orden que implica una relación de equivalencia entre dos razones. Por ejemplo, la afirmación “cuatro caramelos cuestan cinco dólares” describe una razón entre un cantidad de dinero y una cantidad de caramelos que pueden ser comprados con ese dinero. Ahora, el razonamiento proporcional es requerido para comprender de qué manera afecta el número de caramelos que se puede comprar, si se incrementa el dinero de cinco a quince dólares.

Por ejemplo, consideremos el siguiente problema "*El grupo A tiene 4 pizzas y 6 chicas. El grupo B tiene 6 pizzas y 8 chicos ¿Quién obtuvo más pizza, los chicos o las chicas?*" (adaptado de Lamon, 1993a). Para resolver este problema, algunos estudiantes pueden dibujar para llegar a entender que en el grupo A, cada miembro obtiene 2/3 de una pizza, mientras que en el grupo B, cada miembro obtiene 3/4 de una pizza. Ellos pueden comparar esas dos fracciones con las figuras o usar la notación decimal. Otros estudiantes pueden usar el razonamiento proporcional: "Si agregamos 2 pizzas al grupo A, se necesitarían agregar también 3 personas. Así que el grupo A tendría 6 pizzas y 9 miembros, por lo tanto el grupo B es el que obtiene más pizza". La habilidad de reconocer la similitud estructural y el sentido de covariación y de múltiples comparaciones ilustradas en el proceso de razonamiento constituyen el núcleo del álgebra y de matemáticas más avanzadas (Confrey y Smith, 1995)[13].

Algunos investigadores ven el razonamiento proporcional como el fundamento sobre el cual se construyen muchos conceptos de matemática más avanzada (Behr, Lesh, y Post, 1988)[14]. Muchos de los conceptos estudiados en Algebra, Geometría y Cálculo requieren que los estudiantes razonen proporcionalmente. Además, Karplus, Pulos y Stage (1983) enfatizan la importancia de un razonamiento proporcional efectivo en las ciencias. Razón de cambio, velocidad, densidad, kilometraje, composiciones químicas son algunos de los conceptos que implican el uso de razones y del razonamiento proporcional.

Desde esta posición debemos de considerar que el razonamiento proporcional es un tipo de pensamiento que los estudiantes probablemente apliquen en su profesión y en situaciones de la cotidianeidad. El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000) afirma que "la necesidad de comprender y usar las matemáticas en la vida cotidiana y en el lugar de trabajo nunca ha sido tan importante y esta importancia continuará incrementándose". Algunos ejemplos son: trabajos con modelos a escala y razones unitarias, comparaciones en las tiendas, diluir soluciones en un laboratorio, cálculo de medidas indirectas, comprensión de los índices de productividad o de natalidad en un país, etc. En resumen el razonamiento proporcional juega un importante papel en muchos escenarios del mundo real, así como también en muchos conceptos matemáticos avanzados.

Sobre la noción de Razonamiento Proporcional

En la literatura de investigación aparecen numerosas definiciones de razonamiento proporcional, sin embargo presentaremos algunas definiciones, las cuales corresponden a la visión de quienes han investigado los tipos de problemas usados en este trabajo.

Karplus, Pulos y Stage (1983) se refieren al razonamiento proporcional como un término que denota el razonamiento en un sistema de dos variables entre las cuales existe una relación de función lineal. Esta función lineal permite que varias situaciones sean descritas en términos de una razón constante.

Behr y col. (1988, citados en Fernández, 2001) consideran el razonamiento proporcional como una forma de razonamiento matemático que implica un sentido de covariación y de múltiples comparaciones, así como de la capacidad de almacenar mentalmente y procesar

[13] Citado en Lo y Watanabe (1997)
[14] Citados por Allain (2000)

varias piezas de información y cuya principal característica es el reconocimiento de la similitud estructural e invarianza en un sistema matemático simple. Se refieren a la covariación como el cambio simultáneo entre dos variables que se produce por la existencia de una relación entre ellas (esta es la relación que Freudenthal denominó externa o funcional entre magnitudes), y a la invarianza como la igualdad entre la razón de dos valores de una variable en una magnitud y la razón de los valores correspondientes de la otra variable en otra magnitud (en términos de Freudenthal la preservación de la razón o la igualdad de las razones internas).

Lamon (2007) propone que el razonamiento proporcional significa ser capaz de dar argumentos que apoyen afirmaciones hechas sobre la relación estructural entre cuatro cantidades (*a, b, c, d*) en un contexto que simultáneamente implica covarianza de cantidades e invarianza de razones o productos, específicamente esto podría consistir en la habilidad de distinguir una relación multiplicativa entre dos cantidades, así como también la habilidad de extender la misma relación a otros pares de cantidades. Cuando se hace referencia a las relaciones estructurales de una proporción, Lamon (2007) plantea que una buena ilustración de estos constructos es ofrecida por el marco de Vergnaud para analizar las estructuras multiplicativas.

El siguiente ejemplo muestra una proporción simple directa entre dos espacios de medida.

Si María puede coser 5 camisetas de fútbol con $7\frac{1}{2}$ *metros de tela, ¿cuántos metros de tela necesitará para hacer una camiseta para cada uno de los 15 chicos del equipo de fútbol?*

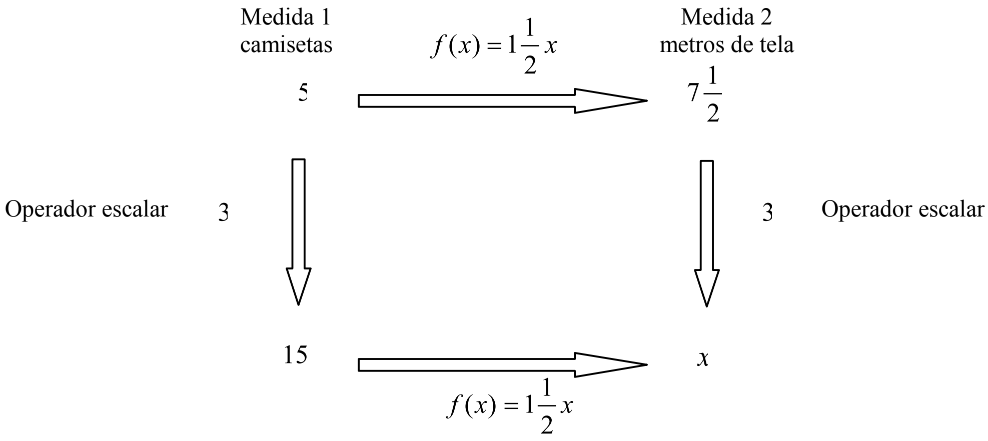


Figura 2. Relaciones estructurales en una proporción Lamon (2007)

De acuerdo con Lamon (2007) una relación funcional lineal existe entre elementos correspondientes de los espacios de medida, en este caso la función lineal cuyo criterio es $f(x) = 1\frac{1}{2}x$ relaciona el número de camisetas y la cantidad de metros de tela; y desde esta perspectiva un operador escalar transforma cantidades del mismo tipo, en este ejemplo en el espacio de medida correspondiente al número de camisetas la relación entre 5 camisetas y 15 camisetas está dada por el operador escalar tres.

Según Norton (2005) el término razonamiento proporcional es usado para describir los conceptos y pensamiento requeridos para comprender las tasas, la razón y la proporcionalidad. Según Norton algunos autores han señalado que la esencia de tal pensamiento es principalmente multiplicativo (Ben-Chaim, Keret, Ilany, 2007; Lo y Watanabe, 1997). La habilidad en tal pensamiento capacita al sujeto en la comprensión de porcentajes, la pendiente, función lineal, trigonometría, álgebra, etc.

Algunas debilidades de la enseñanza y aprendizaje del Razonamiento Proporcional

Lamon (2007) señaló que el razonamiento proporcional típicamente ha sido enseñado en una simple sección del texto de matemáticas, en el cual los símbolos son introducidos sin que se haya dado un suficiente trabajo previo para que los alumnos lleguen a comprender los conceptos. No es sorprendente que después muchos estudiantes, quienes de modo significativo podían aplicar buenos razonamientos en contextos de adición, no puedan aplicar tales perspectivas a las estructuras multiplicativas asociadas con el razonamiento proporcional (Karplus, Pulos, y Stage, 1983). Efectivamente muchos de los errores comunes que demuestran los alumnos en tareas de razonamiento proporcional ilustran que ellos aplican procesos de pensamiento aditivo en lugar de procesos multiplicativos (Karplus y col., 1983).

Desafortunadamente, la exposición a tareas rutinarias y aisladas de multiplicación y división, no contribuyen a desarrollar una comprensión profunda del razonamiento proporcional. En parte, esto se debe a que los estudiantes necesitan comprender las fracciones, decimales y conceptos multiplicativos (Lo y Watanabe, 1997).

La enseñanza y el aprendizaje de las fracciones y decimales es problemática (Pearn y Stephens, 2004). Esos autores han señalado que muchos de los errores conceptuales que muestran los alumnos son el resultado de un uso inapropiado del pensamiento aplicado en con los números enteros, incluyen además la incomprensión de la relación entre el numerador y el denominador. Pearn y Stephens (2004) encuentran que el mayor problema de los estudiantes se debe a que ellos no entienden la relación parte-todo, descrita en notación fraccionaria, y recomiendan el uso de múltiples representaciones de fracciones usando cantidades discretas y continuas, así como el uso de la recta numérica. Dado el desafío que plantea el aprendizaje de las fracciones, no nos debe sorprender que cuando el pensamiento multiplicativo asociado con la proporcionalidad es agregado al ciclo de aprendizaje, muchos estudiantes luchen con una sobrecarga cognitiva (Ilany y col., 2004).

El vínculo entre fracciones y razones es considerado en muchos libros de texto. En particular, "se les muestra a los estudiantes como, en problemas de proporciones, representar la información como una ecuación de fracciones equivalentes, y resolverla por medio del producto cruzado y dividiendo" (Karplus, y col. 1983). El problema con este enfoque es que en el contexto de las fracciones el numerador representa una parte y el denominador representa el todo, mientras en el caso de las razones tanto el numerador como el denominador pueden representar partes. De este modo, mientras el uso de la notación fraccionaria en la resolución de algunos problemas de proporciones puede parecer conveniente, en otros se podría generar confusión en relación al todo, en fracciones es el denominador mientras en las razones es la suma de las dos partes. Dado que los libros de texto no muestran las fracciones y la proporcionalidad en una manera integrada, y usualmente esta distinción no es explicita, es comprensible que los estudiantes desarrollen tal confusión.

Categorización del Razonamiento Proporcional

Varios investigadores (Karplus y col., 1983, Lamon 1993, Tourniaire y Pulos 1985) han analizado las actuaciones de los estudiantes, usando distintos indicadores, para describir el razonamiento proporcional que exhiben los sujetos en la resolución de tareas matemáticas en este dominio. Según Fernández (2001), en los trabajos, se hacen referencia a tres aspectos: las estrategias correctas, las estrategias incorrectas y la categorización de actuaciones de acuerdo con un mayor o menor uso del razonamiento proporcional.

Karplus, Pulos y Stage (1983), después de analizar las estrategias aplicadas por los alumnos en la resolución de un problema de comparación de razones basado en la tarea "Rompecabezas de la limonada", agrupan las actuaciones de los estudiantes en 4 amplias categorías:

Categoría I (incompleta, ilógica) que incluye las actuaciones de los alumnos que adivinan la respuesta por intuición y no dan explicaciones, o que utilizan los datos de manera ilógica o que utilizan operaciones cuantitativas no apropiadas.

Categoría Q (cualitativa), contiene las actuaciones de los alumnos que justifican su respuesta usando los cuatro términos dados y comparándolos mediante expresiones de tipo cualitativo como "más", "menos" o equivalentes.

Categoría A (aditiva), en la que se ubican las actuaciones de alumnos que usando todos los datos obtienen la respuesta mediante la estrategia aditiva de la diferencia constante.

Categoría P (proporcional), en la que se incluyen los alumnos que usan las relaciones proporcionales entre todos los datos para obtener la respuesta, aunque haya errores aritméticos. Esta categoría la dividen en tres subcategorías: Pb (between), si usan la relación externa o funcional; Pw (within), si usan la relación interna o escalar y Pu (unclassificable), si usan otro tipo de comparación.

En Lamon (1993) las resoluciones de los problemas propuestos fueron analizadas y codificadas a lo largo de las siguientes dimensiones matemáticas:

- Uso del pensamiento relativo o absoluto

- Tipo de representación (verbal, pictórica, tabular)

- Estructura de la cantidad (unidad simple, unidad compuesta)

- Sofisticación de la estrategia (estrategia incorrecta, razonamiento preproporcional, razonamiento proporcional cualitativo, razonamiento proporcional cuantitativo)

Con respecto a la sofisticación de la estrategia la autora, para el análisis de las soluciones hechas por niños de 6º grado a problemas de razones y proporciones, establece dos tipos de estrategias, las constructivas y las no constructivas, y según estas estrategias, propone seis niveles, en relación con un mayor o menor razonamiento proporcional; los niveles correspondientes a las estrategias no constructivas se denominan: evasiva, visual o aditiva, construcción de patrones y los niveles que corresponden a las estrategias constructivas se denominan: razonamiento preproporcional, razonamiento proporcional cualitativo y razonamiento proporcional cuantitativo.

Allain (2000) ofrece una escala para medir las actuaciones de los estudiantes en el instrumento, en esta escala se asigna a cada sujeto un número del 1 al 4, según algunos indicadores predeterminados por la investigadora. Su objetivo fue describir, a grandes rasgos, el razonamiento proporcional de los estudiantes que formaron parte de su estudio.

Categorización de las Actuaciones en Problemas de Proporcionalidad Simple Directa

Tomando como base la revisión hecha de las investigaciones relacionadas con el análisis de las actuaciones de los alumnos ante problemas de razón y proporción, y con el fin de categorizar las actuaciones del grupo de maestros en formación que han realizado la prueba, construimos unas categorías divididas en cuatro niveles jerárquicos, identificados con los números 1, 2, 3 y 4.

Para la elección de los indicadores que forman parte de cada categoría, hemos tomado como referencia los trabajos de Karplus, Pulos y Stage (1983), Lamon (1993), Lamon (2007) y Allain (2000); pero principalmente la información procedente de las resoluciones hechas por los participantes, tales como:

- Indicadores que describan el razonamiento proporcional.
- Indicadores que describan la comprensión del concepto de proporcionalidad.
- Tipos de estrategias específicas que pueden ser consideradas como correctas e incorrectas.
- Tipos de errores que ponen de manifiesto los sujetos al abordar las tareas.
- Tipos de conocimientos procedimentales aplicados al resolver este tipo de situaciones.

Cabe destacar que las categorías se presentan con un carácter escalonado, de modo que en la categoría 1 se ubicarán las actuaciones que denotan la ausencia del razonamiento proporcional, y en la categoría 4 las actuaciones que se corresponden con un razonamiento proporcional alto. En la Tabla 3 se presenta las categorías e indicadores usados en nuestra investigación.

Categoría de las Actuaciones	Indicadores de cada Categoría
1	a. Actuaciones que no tienen una interacción con el problema. b. No resolver el problema. c. No dar respuesta.
2	a. Dar respuestas sin justificación o dar respuestas erróneas debidas a la aplicación de alguna estrategia incorrecta. b. Aplicar un pensamiento absoluto. c. Aplicar estrategias incorrectas.
3	a. Dar una respuesta incorrecta debido a un error en la aplicación de alguna de las estrategias consideradas en este nivel, a un error procedimental o a una interpretación inadecuada de los datos. b. Aplicar un pensamiento relativo. c. Aplicar la estrategia de normalización. d. Aplicar la estrategia de la unidad simple. e. Mostrar la no comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.
4	a. Obtener la respuesta correcta. b. Usar la estrategia de suposición de razones equivalentes. c. Aplicar la estrategia de la unidad compuesta. d. Reconocer la razón constante de proporcionalidad entre dos cantidades en una situación de proporcionalidad directa. e. Mostrar la comprensión de las propiedades estructurales de una proporción.

Tabla 3. Categorías usadas en nuestro estudio para describir las actuaciones de un grupo de maestros en formación en problemas de proporcionalidad simple directa.

Descripción de cada Categoría

Categoría 1

En esta categoría se incluyen las no actuaciones de los sujetos en la resolución de las tareas propuestas, corresponden a aquellas situaciones en las cuales los sujetos dejan el espacio vacío, o sea no aparece ningún intento de resolución.

Categoría 2

En esta categoría ubicamos las actuaciones que, globalmente, responden a errores conceptuales en torno a la proporcionalidad directa; en consecuencia se ha incluido el indicador de aplicación de estrategias incorrectas, entre las cuales hemos considerado: la diferencia constante o aditiva, ilusión de linealidad, comparación de antecedentes o consecuentes aisladamente o el realizar operaciones al azar.

Además hemos incluido actuaciones que muestran la aplicación de un pensamiento absoluto, éste se contrasta con el pensamiento relativo, explicaremos ambos mediante la siguiente situación:

Un bebé y un adulto han aumentado dos libras de peso, en un mes.

Numéricamente hablando, podríamos razonar en este caso, al menos, en dos maneras distintas:

- se podría pensar en el hecho de que cada uno de ellos ha ganado igual cantidad de peso (2 libras) ó,
- se podría pensar en el hecho de que el bebé fue el que más peso ganó, debido a que el porcentaje de aumento del peso del bebé respecto a su peso original fue mayor que el del adulto.

Esto es un ejemplo de dos tipos de pensamiento. El primero tipo muestra un pensamiento absoluto, ya que se refiere a una cantidad por si sola, sin tomar en consideración otras cantidades. En contraste el segundo tipo muestra un pensamiento relativo ya que compara lo obtenido (2 libras) con el peso anterior de cada uno. Los dos tipos de pensamiento están relacionados con estructuras aritméticas, el pensamiento absoluto es aditivo, mientras que el pensamiento relativo es multiplicativo.

Categoría 3

En esta categoría ubicamos las actuaciones que, a grandes rasgos, responden a lo que en otros estudios se ha llamado razonamiento pre-proporcional, el cual incluye métodos informales (unidad simple, normalización, emparejamientos, sumas consecutivas, etc.) que llevan a soluciones correctas con ausencia de comprensión de las relaciones escalares y funcionales entre las cantidades.

Aunque los sujetos muestran un pensamiento relativo comparando las cantidades multiplicativamente, aplican estrategias tales como la unidad simple o la normalización en las cuales se muestra la no comprensión de la estructura que subyace a una proporción.

Otra manifestación de la no comprensión de las relaciones escalares y funcionales entre las cantidades es aplicar mecanismos para comparar fracciones (homogenizar, producto cruzado) o hallar el cociente de la razón, ya que siguiendo a Freudenthal (1983) esto es la violación de la razón, y un máximo razonamiento proporcional exigiría hablar sobre igualdad (o desigualdad) de razones sin conocer el tamaño de la razón.

Categoría 4

En este grupo de indicadores hemos incluido aquellos que corresponden con un alto razonamiento proporcional, exceptuando el indicador de “dar respuesta correcta” ya que siguiendo a Lamon (1993) la habilidad de dar respuestas correctas no es garantía de que el razonamiento proporcional se esté aplicando.

Una forma concreta de mostrar la comprensión de las propiedades estructurales de una proporción es dando argumentos que apoyen la relación entre las cantidades, referidas al operador escalar o a la relación de función lineal que existe entre las cantidades. Cuando se hace referencia a las relaciones estructurales de una proporción, Lamon (2007) plantea que una buena ilustración de estos constructos es ofrecida por el marco de Vergnaud para analizar las estructuras multiplicativas. Una relación funcional lineal existe entre elementos correspondientes de los espacios de medida, y un operador escalar transforma cantidades del mismo tipo.

Hemos incluido el indicador que corresponde a la aplicación de la estrategia de suposición de razones equivalentes debido a que al usarla, implícitamente se reconoce la invarianza de las razones consideradas (internas o externas). También se incluye el uso de la estrategia de la unidad compuesta como un indicador de la categoría 4 dado que implica el reconocimiento del factor multiplicativo asociado a la relación, interna o externa, entre los datos de cada espacio de medida.

Sección 3. Marco Metodológico

Esta sección se dedica a caracterizar el tipo de investigación, se describen los participantes y el instrumento que se ha utilizado para recoger los datos pertinentes para alcanzar los objetivos propuestos en el estudio. También se describen los datos obtenidos y el procedimiento que hemos seguido para analizarlos.

Tipo de Estudio

El presente estudio lo ubicamos dentro del tipo de investigaciones exploratorias, las cuales pretenden dar una visión general aproximada respecto a una determinada realidad. Este tipo de investigación se realiza especialmente cuando el tema elegido ha sido poco explorado y reconocido, y cuando sobre el mismo es difícil formular hipótesis precisas o de cierta generalidad (Padrón, 2002).

Como se desprende de la bibliografía consultada, aunque el tema del razonamiento proporcional haya sido ampliamente estudiado desde la década de los 70, los sujetos participantes de tales investigaciones fueron estudiantes de niveles de primaria y secundaria. Respecto a maestros en formación, hemos detectado investigaciones relacionadas con la comprensión y concepciones de los números racionales o de algunos subconstructos de los racionales (Tirosh, Graeber, Wilson, 1998; Durmus y col., 2005). Localizamos un estudio reciente relacionado con el diseño e implementación, por parte de maestros en formación, de problemas de proporcionalidad directa (Ben-Chaim, Keret, Ilany, 2007); sin embargo no hemos localizado estudios específicos acerca de cómo actúan estos sujetos resolviendo problemas de proporcionalidad directa.

Así que nuestro interés se centra en explorar las formas de razonamiento, actuaciones y características de los procesos de resolución que estos sujetos ponen en marcha al resolver problemas de proporcionalidad directa; con la idea de que la realización de ésta indagación permita:

a) Una formulación precisa del problema de investigación para la realización de nuestra tesis doctoral. La exploración realizada nos permitirá obtener nuevos datos y elementos que pueden conducir a formular con mayor precisión las preguntas de la investigación futura.

b) Establecer el planteamiento de hipótesis. La función de la investigación exploratoria es descubrir las bases y recabar información que permita como resultado del estudio, la formulación de hipótesis (Padrón, 2002)**.**

Consideramos que nuestro estudio nos ha ayudado a familiarizarnos con el Razonamiento Proporcional, ha permitido sentar las bases para la posterior realización de una investigación descriptiva o explicativa y ha creado el interés por el estudio de otros temas o problemas.

Participantes

Los participantes de este trabajo han sido 76 estudiantes del 3º curso de la carrera de Maestro de la especialidad de Educación Especial, de la Universidad de Granada del curso 2007-2008[15]. Cabe resaltar que durante su formación universitaria previa, estos sujetos no

[15] El plan de estudios de la diplomatura de Maestro en su especialidad de Educación Especial no contempla en su obligatoriedad asignatura alguna relacionada con las matemáticas. La asignatura "Matemáticas para

han estudiado los contenidos de razón y proporción. En el momento de la prueba cursan una asignatura cuyo título es Enseñanza de las Matemáticas para alumnos con Necesidades Educativas Especiales.

Instrumento

Para estudiar las actuaciones de estos futuros maestros en la resolución de tareas de proporcionalidad directa se aplicó una prueba de lápiz y papel (Anexo 1); el instrumento denominado Proportional Reasoning Assessment Instrument fue producto de un trabajo de investigación de Allain (2000). El propósito de tal estudio fue desarrollar un instrumento válido y fiable para medir el razonamiento proporcional de estudiantes (sólo mujeres) de 6º a 8º con alto rendimiento académico en matemáticas.

El instrumento fue desarrollado por la investigadora citada que, para la elección de los problemas, se basó en aquellos que habían sido propuestos en investigaciones previas relevantes (Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988; Lamon, 1993a, 1993b; Noelting, 1980a, 1980b; Karplus y col., 1983, citados en Allain, 2000). Los ítems elegidos para la prueba incluyen problemas de valor perdido, comparación, mezclas, conjuntos asociados, parte-parte-todo, interpretación gráfica de razones y problemas de escala. El instrumento está compuesto por diez problemas de desarrollo con diferentes niveles de dificultad.

Los problemas son de los tipos siguientes: El problema 1 es de comparación numérica, el 2 es de valor perdido, el 3 de conjuntos asociados, el 4 es del tipo parte-parte-todo, el 5, 6 y 7 son partes de un mismo problema de comparación numérica bajo el contexto de mezclas, el 8 es de comparación de razones expresadas gráficamente, el 9 es de tipo ampliador y el 10 consta de 2 ítems, uno de los cuales es de valor perdido (ancho de la bandera) y el otro es del tipo ampliador no lineal (área de la bandera). En la tabla 4 se recogen las investigaciones de las cuales proceden estos problemas así como el tipo de problema.

Problema	Tipo	Investigaciones de Referencia
1	Comparación numérica	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988)
2	Valor perdido	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988)
3	Conjuntos asociados	Lamon (1993a, 1993b)
4	Parte-parte-todo	Lamon (1993a, 1993b)
5	Comparación numérica-mezcla	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988) Noelting (1980a) Karplus y col. (1983)
6	Comparación numérica-mezcla	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988) Noelting (1980a, 1980b) Karplus y col. (1983)
7	Comparación numérica-mezcla	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988) Noelting (1980a, 1980b) Karplus y col. (1983)
8	Comparación, interpretación gráfica	(Cramer y Post, 1993; Post et al, 1988; Vergnaud, 1988) Allain (2000)
9	Ampliador	Lamon (1993a, 1993b)
10	Comparación, ampliador no lineal	Lamon (1993a, 1993b)

Tabla 4. Problemas incluidos en el instrumento de nuestro estudio.

alumnos con necesidades educativas especiales" es obligatoria de universidad por lo que puede suceder que no se contemple dicha asignatura en la carrera de estos maestros, impartidas en otras universidades.

Aunque el instrumento haya sido desarrollado para medir el razonamiento proporcional de estudiantes de 6º a 8º, con alto rendimiento académico en matemáticas, la investigadora plantea como sugerencia para futuras investigaciones la aplicación del instrumento a participantes de otras edades y con niveles diferentes de habilidades, ya que los resultados obtenidos podrían contribuir a aumentar la fiabilidad de la prueba.

Dado que la prueba original estaba escrita en inglés, decidimos realizar la traducción de la misma; con el fin de contextualizar las situaciones a las características de los alumnos participantes decidimos incorporar algunos cambios en los tipos de objetos incluidos en los problemas (goma de mascar por caramelos, clases de huevos por tipos de manzanas y un dibujo de la situación 9). Además, con el fin de mejorar la redacción y de evitar posibles dificultades en la lectura de los problemas, la prueba se aplicó previamente a un grupo de cuatro estudiantes de Máster en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Aplicación del Instrumento

La prueba se aplicó el día 13 de marzo de 2008 a 76 participantes que ese día asistían a clase. Estaban divididos en dos salones de clase. Para la administración del instrumento se contó con la colaboración de los profesores encargados de impartir la asignatura, la investigadora estuvo presente en uno de los grupos y la tutora de la investigación, en el otro. Cada estudiante realizó la prueba de manera individual y no se resolvieron dudas sobre la resolución de los problemas. Se les indicó que no era una prueba que puntuaría para su nota final. Los sujetos mostraron gran interés en la resolución de los problemas y pidieron una posterior realización de los mismos en clase para conocer como habían respondido. Aunque no se les marcó límite de tiempo para resolver las tareas, los estudiantes las resolvieron en un tiempo promedio de 45 minutos.

Datos

Dado que el instrumento esta formado por 10 problemas, y este fue resuelto por 76 estudiantes, se revisó un total de 836 respuestas y no 760 debido a que en el problema 10, los dos ítems se revisaron de manera separada.

Para su posterior análisis los datos se colocaron en tres parrillas: la primera incluía las estrategias de relación, estrategias de uso de la unidad, estrategias incorrectas, procedimientos y errores cometidos por estudiante en cada problema (Anexo 2); en la segunda parrilla se colocaron los datos correspondientes al cumplimiento de los indicadores de cada categoría (1, 2, 3 y 4) por alumno en cada problema (Anexo3); y finalmente la última parrilla contiene la categoría final que obtuvo la actuación de cada sujeto en cada uno de los problemas (Anexo 4).

Análisis de Datos

En una primera fase los datos se analizaron registrando las frecuencias de: tipos de respuestas, estrategias de relación de cantidades, estrategias de uso de la unidad, estrategias incorrectas, procedimientos y errores; todos los aspectos anteriores los hemos denominado criterios de observación (Anexo 5).

Como punto de partida de esta fase del análisis, iniciamos con una observación general acerca de las respuestas mostradas, para tal efecto se consideraron cuatro posibilidades: respuesta correcta (RC), respuesta incorrecta (RI), problemas sin respuesta pero con algún intento de resolución (SR) y finalmente consideramos aquellos que no resuelven el problema (NR).

Seguidamente las soluciones mostradas por los alumnos fueron observadas atendiendo al tipo de estrategia aplicada, en consecuencia, por un lado se tuvo en cuenta la forma de relacionar las cantidades del problema, procurando identificar las estrategias escalar (R_1), funcional (R_2), "en" (within, R_3) y "entre" (between, R_4), y por otro lado se puso atención al uso de la unidad, en este caso nos propusimos identificar las estrategias unidad simple (U_1), unidad compuesta (U_2) y normalización (U_3).

Como foco de observación se tomó en consideración la presencia de estrategias incorrectas, las cuales fueron codificadas de la siguiente manera: ignorar parte de los datos del problema (EI_1), estrategia aditiva o de diferencia constante (EI_2), la realización de operaciones al azar con los datos del problema (EI_3) y la ilusión de linealidad (EI_4).

Dos aspectos adicionales se tomaron en cuenta como criterios de observación de las actuaciones de los participantes:

Conocimiento Procedimental Aplicado: El conocimiento procedimental se refiere al conocimiento acerca de cómo ejecutar tareas, es decir se refiere a los algoritmos y procedimientos de cálculo que ellos usan como herramientas durante el abordaje de la situación (Hiebert y Lefevre, 1986; Rico y col., 1990). Dado que los sujetos que participaron en este estudio presuntamente tienen un mayor nivel de maduración, debido a la edad y a las experiencias previas en la escuela primaria y secundaria, pensamos que usarían técnicas de cálculo diferentes a las que podría aplicar un niño que no ha tenido suficiente experiencia con los algoritmos propios de la comparación de fracciones, operaciones aritméticas e incluso que no han aprendido la "regla de tres".

En esta línea, Cramer y Post (1993) reconocen un tipo particular de estrategia que se da cuando los alumnos toman las razones como fracciones y usan las ideas de equivalencia de fracciones para establecer la comparación. Por ejemplo, obtener la notación decimal de la "fracción", comparar mediante productos cruzados u homogeneizar los denominadores, a lo que llaman "estrategia de fracción" (fraction strategy).

Según Cramer y Post (1993) una de las estrategias más ampliamente utilizadas por las personas para resolver problemas de valor perdido corresponde a la aplicación del algoritmo de los productos cruzados (regla de tres), sin embargo según Fernández (2001) aunque es el método que usualmente se enseña en la escuela, no ha sido tenido en cuenta por los investigadores como una estrategia relevante, pues al usarlo de forma mecánica no se puede considerar como una estrategia de razonamiento proporcional.

En nuestro caso, para la observación de la resolución de los problemas de proporcionalidad directa consideramos cinco procedimientos, que han sido codificados como indicamos a continuación:

(P1) Comparar fracciones racionales tales como obtener la notación decimal, comparar mediante productos cruzados u homogeneizar los denominadores.

(P2) Uso de la regla de tres

(P3) División de números naturales

(P4) Planteamiento de una ecuación

(P5) Fórmula del área del rectángulo

Errores: Los errores forman parte de las producciones de los alumnos y han sido permanente objeto de estudio e investigación en educación matemática (Rico y Castro, 1994). Brousseau, Davis y Werner[16] sostienen que las respuestas incorrectas a las cuestiones que se plantean se consideran señales de serias deficiencias e incluso fracaso en el logro de un aprendizaje correcto. En este mismo sentido Socas (1997) plantea que aunque el error tiene procedencias diferentes, éste se considera como la presencia en el alumno de un esquema cognitivo inadecuado y no solo como consecuencia de una falta de conocimiento o despiste.

En la observación de la resolución de los problemas de proporcionalidad directa consideramos tres tipos de errores:

1. Errores en la aplicación de alguna de las estrategias relativas al uso de la unidad, en este tipo consideramos tres posibilidades:

   e_1: error en la aplicación de la estrategia de la unidad simple,

   e_2: error en la aplicación de la estrategia de la unidad compuesta

   e_3: error en la aplicación de la estrategia de la normalización.

2. Errores Procedimentales: se refieren a la aplicación incorrecta de un procedimiento, particularmente errores en el algoritmo de una operación aritmética, en alguno de los métodos de comparación de fracciones o en la aplicación de la regla de tres. Todos ellos se han codificado con e_4.

3. Errores de Interpretación: son aquellos que están relacionados con las interpretaciones incorrectas de la información dada en el problema verbal o gráficamente. Estos errores se han codificado con e_5.

Cabe resaltar que no hemos considerado errores relativos a la aplicación de las estrategias de relación de cantidades: escalar, funcional, within (en) o between (entre) ya que en esos casos no hay lugar para errores.

Posteriormente, las actuaciones de los estudiantes se analizaron según las categorías de la Tabla denominada *Categorización de las Actuaciones en Problemas de Proporcionalidad Simple Directa* (ver pág. 31), tomando algunos elementos de la fase inicial del análisis pero incorporando otros focos de atención tales como razonamientos concretos que muestren la comprensión (o la no comprensión) de las relaciones estructurales de una proporción.

A continuación, con la figura 3 mostramos un ejemplo de cómo observó el trabajo de un estudiante en el problema 4:

[16] (citados en Rico y Castro, 1994)

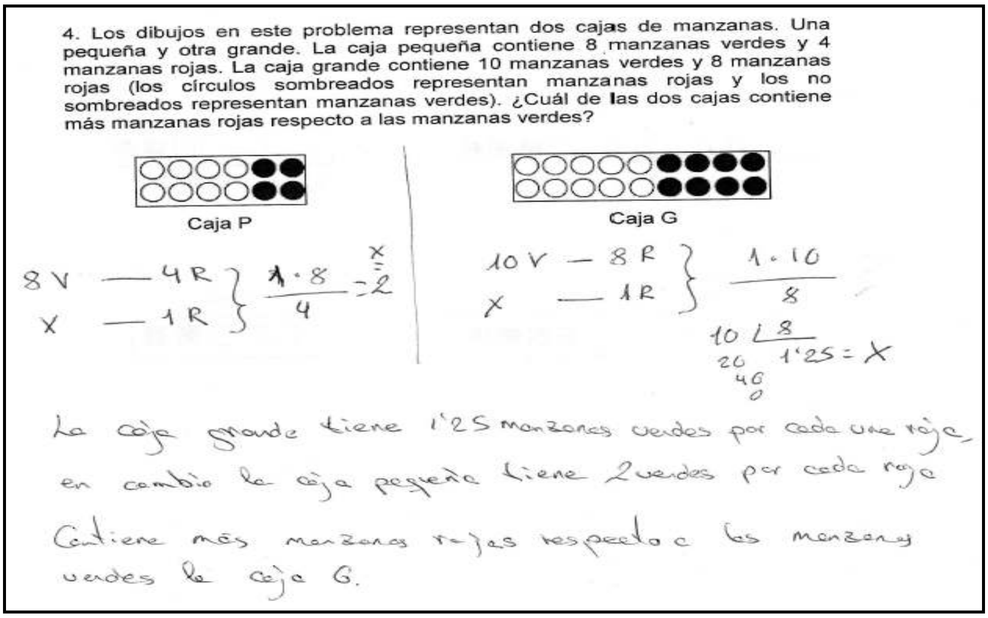


Figura 3. Actuación de un estudiante en el problema 4.

En este caso el estudiante estableció una relación "en" (R_3) entre las cantidades de cada sistema ya que ha relacionado de forma separada la cantidad de manzanas rojas y verdes en cada una de las cajas, por medio de una regla de tres (P_2) averiguó el número de manzanas verdes por cada manzana roja, en este sentido vemos que recurrió a la estrategia de la unidad simple U_1. Para comparar las razones vemos que este sujeto recurre a la aplicación de la estrategia de la unidad simple, mostrando la no comprensión de la estructura que subyace a una proporción, en el sentido en que lo plantea Lamon (2007). En consecuencia la categoría que hemos asignado a la actuación del sujeto en este problema es 3.

Índice de Dificultad del Problema

Otro de los focos de nuestro estudio se refiere al análisis de la dificultad de cada uno de los problemas. De acuerdo con Doran (1980)[17], la dificultad de un ítem es expresada como $P = \frac{R}{N}$, donde *R representa* el número de estudiantes que respondieron correctamente el problema y *N* representa el número total de estudiantes. Así que para obtener este índice seguimos a Doran (1980), calculando el cociente entre el número de aciertos y el total de respuestas en cada problema, seguidamente lo expresamos en porcentajes; cuanto mayor es ese porcentaje, menor dificultad tiene ese problema. Para efectos de nuestro trabajo, interpretamos la dificultad de cada problema según la tabla 5, que contiene la propuesta hecha por Doran (1980):

Índice de Dificultad expresado en %	Valoración de la Dificultad del Problema
85% a 100%	Muy Fácil
60% a 85%	Moderadamente Fácil
35% a 60%	Moderadamente Difícil
0% a 35%	Muy Difícil

Tabla 5. Interpretación de la dificultad según Doran (1980)

[17] Citado en Allain (2000)

Sección 4. Resultados del Análisis de Datos

Esta sección incluye los resultados obtenidos a partir del análisis de los datos, tales se han organizado en cuatro apartados. En el primero exponemos los resultados generales referentes a los tipos de respuestas, la dificultad de cada problema, las estrategias de relación de cantidades, otras estrategias de relación, estrategias incorrectas y el uso de la unidad. En el segundo apartado mostramos los resultados referentes a los procedimientos aplicados por los participantes para abordar los problemas y los errores cometidos más frecuentemente. En el tercer apartado presentamos los resultados particulares correspondientes a cada uno de los problemas y finalmente en el último apartado incluimos los resultados referentes a la categorización de las actuaciones de los participantes en los problemas de proporcionalidad simple directa.

4.1 Resultados Generales

Tipos de Respuestas

Destacamos que los problemas que tuvieron una mayor frecuencia de respuestas correctas fueron el 1 con 69 respuestas correctas, el 5 con 67 y el 2 con 59, estos tres problemas presentan una mayor diferencia en relación con la frecuencia de respuestas incorrectas. Cabe resaltar que el problema 1 es de comparación numérica, representa un contexto familiar para los estudiantes, las cantidades son de tipo discreto (caramelos) y de tipo cuasi continuo (dinero), las cantidades pertenecen a dos espacios de medida distintos y además la razón que se establece es entera.

El problema 5, es uno de los tres relacionados con la comparación de mezclas, en este caso aparece una razón unitaria con lo cual basta con establecer una comparación entre los consecuentes de cada una de las razones internas. El problema 2 es de valor perdido, las cantidades pertenecen a dos espacios de medida distintos y la regla de tres constituyó la única herramienta de resolución aplicada por los estudiantes.

Problemas como el 4 y 6 presentan resultados con una diferencia menor entre respuestas correctas e incorrectas, así en el problema 4 observamos una diferencia de 17 respuestas y en el problema 6 se presenta una diferencia de 21 casos. Aunque el problema 4 es de tipo parte-parte- todo y el 6 es de tipo comparación de mezclas, bajo una perspectiva general, ambos se pueden considerar de comparación de razones. Las cantidades están dadas en una misma unidad, y las razones que se deben de comparar no son ni unitarias ni equivalentes. En contraste los problemas 3, 7 y 10a, presentan una diferencia promedio cercana al 50% entre las respuestas correctas e incorrectas.

Los tres problemas que han presentado mayor frecuencia de respuestas incorrectas han sido el 8 con 42, este es un problema de comparación de razones representadas gráficamente, el 10b de tipo ampliador no lineal con 37 respuestas incorrectas y el 9 que es de comparación tipo ampliador con un total de 70 respuestas incorrectas. La alta frecuencia de respuestas incorrectas en el problema 9 confirma y afianza, con estos estudiantes, los datos ofrecidos por Allain (2000), con otros sujetos, respecto a la dificultad del mismo.

Aquellos estudiantes que no resolvieron el problema o que no dieron una respuesta constituyen un grupo pequeño, tal y como se observa en el gráfico 1.

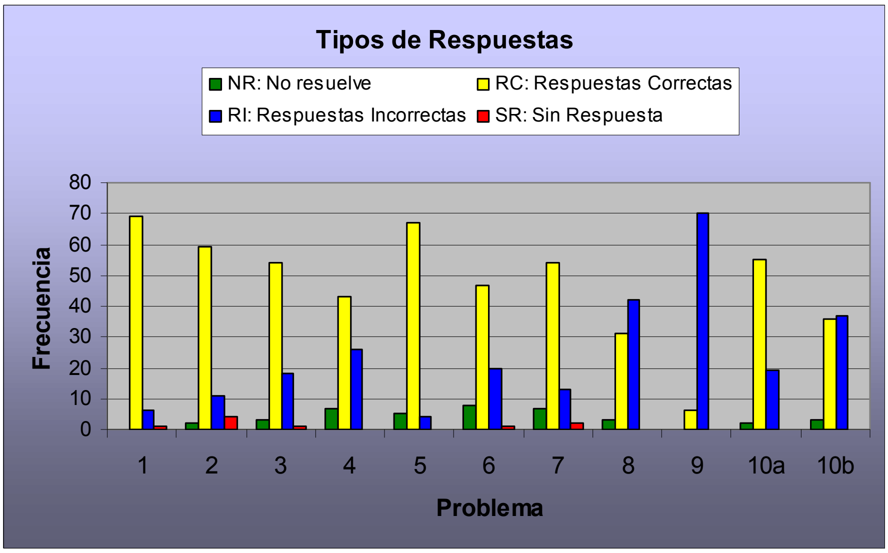


Gráfico 1

Dificultad del Problema

La media de los índices de dificultad es de 62%, lo cual nos dice que el instrumento, de una forma global y para este grupo de estudiantes, es moderadamente fácil. El análisis muestra que únicamente el problema 9 resultó muy difícil ya que tiene un 8% como indicador de dificultad. Un análisis del problema y de las respuestas de los alumnos en el mismo indica que los alumnos presentan un error conceptual importante. En el análisis de las estrategias incorrectas y en el análisis por problema se comenta esta situación con mayor detalle.

Los problemas 4, 8 y 10b son moderadamente difíciles, con valores de dificultad que se encuentran entre el 35% y el 60%. Como se observa en la tabla 8, los problemas 2, 3, 6, 7 y 10a resultaron ser moderadamente fáciles para este grupo de sujetos. Observamos que dos de los problemas resultaron ser muy fáciles, el 1 y el 5, las variables de la tarea que pudieron haber incidido en esta situación corresponden a la presencia de razones unitarias en el problema 5 y a la divisibilidad exacta de las cantidades en el problema 1.

Problema	Dificultad del Problema	Valoración de la Dificultad del Problema Doran (1980)
1	91%	Muy Fácil
2	78%	Moderadamente Fácil
3	71%	Moderadamente Fácil
4	57%	Moderadamente Difícil
5	88%	Muy Fácil
6	62%	Moderadamente Fácil
7	71%	Moderadamente Fácil
8	41%	Moderadamente Difícil
9	8%	Muy Difícil
10a	72%	Moderadamente Fácil
10b	47%	Moderadamente Difícil

Tabla 6. Resultados sobre la dificultad de cada problema

Estrategias sobre la relación de cantidades

Tal y como se muestra en el gráfico 2, en los problemas donde las cantidades estaban expresadas en diferentes unidades de medida, los alumnos, en general, muestran preferencia a aplicar la estrategia funcional. Por ejemplo en los problemas 1 (caramelos-dinero), 2 (tazas café-vasos de agua), 3 (pizzas-personas) y 8 (distancia-tiempo).

Mientras que en los problemas de mezclas 5 (vasos zumo-vasos de agua), 6, 7 o como el 4 (manzanas verdes-manzanas rojas), el 9 (altura inicial-altura final) y el problema 10a (metros largo-metros ancho) en donde las cantidades están dadas en la misma unidad, observamos que la aplicación de estrategias “en” y “entre” fueron compartidas por los participantes.

El problema 9 presentó la frecuencia más alta de aplicación de la estrategia “entre”, en este caso los estudiantes relacionaron las alturas iniciales entre sí y por otro lado las alturas después de 5 años, sin embargo la aplicación de esta estrategia estuvo acompañada por la aplicación incorrecta de la estrategia aditiva (ver resultados de estrategias incorrectas), creemos que la elección de dicha estrategia está determinada por la cuestión planteada, pues se les pregunta si alguno de los dos árboles ha crecido más en relación con la medida inicial. Consideramos que este enunciado ha influido en relacionar las cantidades homogéneas entre los sistemas, por ejemplo la altura inicial del árbol A con la altura final del mismo árbol, análogamente con las alturas del árbol B.

En el problema 10a, los participantes aplicaron ambos estrategias, sin embargo fue más común el establecimiento de la relación entre cantidades de la misma naturaleza, en cada uno de los sistemas (banderas), es decir largo con largo y ancho con ancho, así encontramos una frecuencia de 34 casos para la between y 29 aplicaciones de la estrategia “en”.

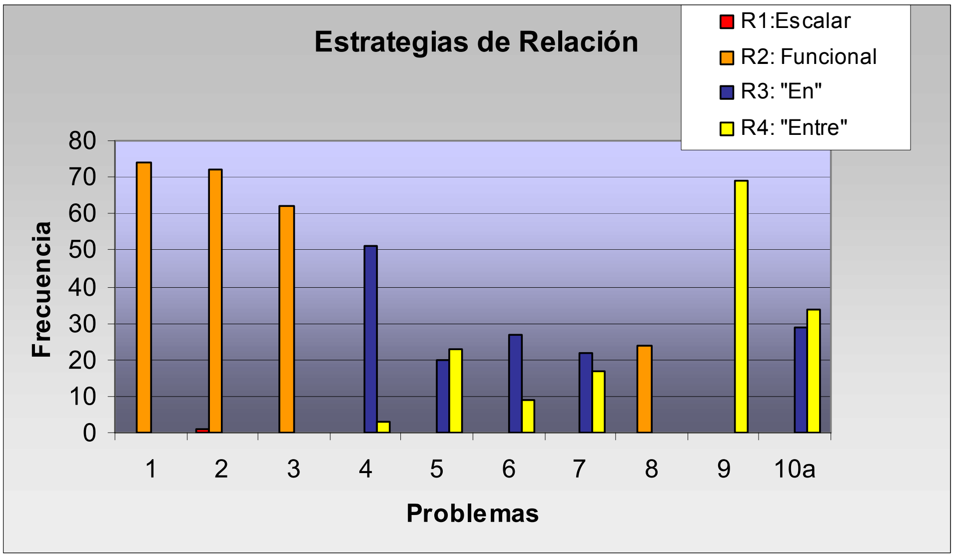


Gráfico 2

Otras estrategias de relación

A lo largo de la observación de las producciones de los sujetos, hemos estado abiertas a la posibilidad de encontrar variaciones en la aplicación de las estrategias reportadas por las investigaciones previas e incluso algunas otras no manifestadas por los sujetos de esos estudios.

Una particularidad que hemos detectado en los problemas 4, 5, 6 y 7 es que cuando los estudiantes aplican la estrategia "en" presentan dos maneras de hacerlo, una estableciendo la relación parte-parte (R_3), por ejemplo vasos de zumo con vasos de agua y otra es establecer la relación parte-todo (R_3*), por ejemplo vasos de zumo con respecto al total de vasos de la bandeja, esta variación se presentó con mayor frecuencia en el problema 4, en el cual los alumnos no relacionaban las manzanas rojas respecto a las verdes sino que las relacionaban respecto al total de manzanas de cada caja, de igual manera en el problema 6, de mezclas, relacionaron los vasos de zumo de naranja con respecto al total de vasos en cada bandeja.

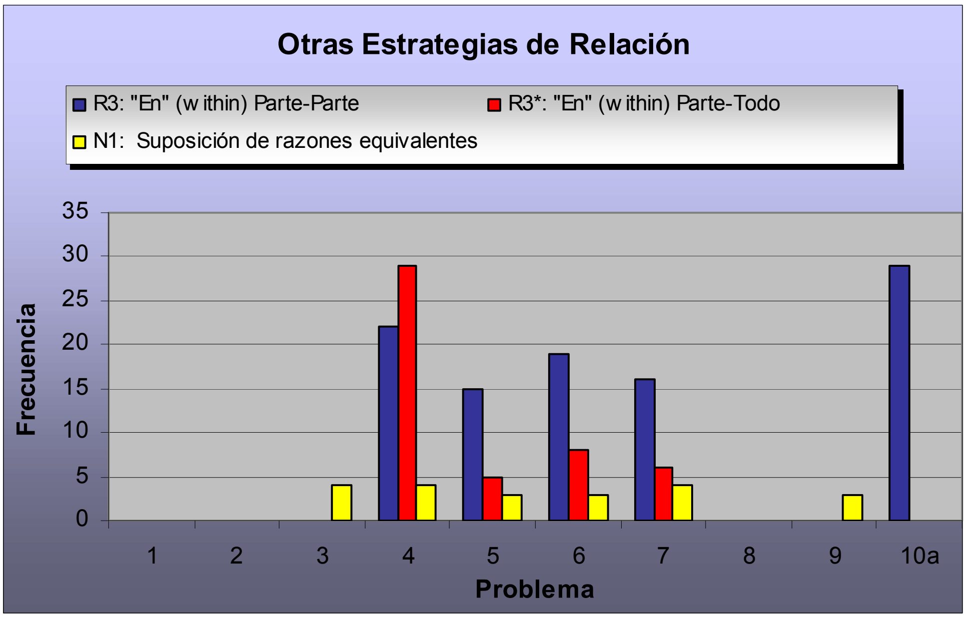


Gráfico 3

Además hemos detectado una estrategia, no reportada en las investigaciones anteriores que hemos analizado, para relacionar las cantidades, inicialmente la hemos denominado *Suposición de Razones Equivalentes* y codificamos por N_1. Aunque la frecuencia de aplicación fue muy baja (ver gráfico 3), se identificó en los problemas 3, 4, 5, 6, 7 y 9, todos estos son problemas de comparación de razones. Tal estrategia consiste en relacionar dos de las cantidades y a partir de esa razón suponer, de manera simulada, que las otras cantidades se relacionan bajo la misma razón. Luego proceder como en una regla de tres, y comparar el resultado obtenido con las cantidades dadas originalmente.

En la figura 4, como ilustración de la estrategia N_1, mostramos el trabajo realizado por un estudiante en el problema 9.

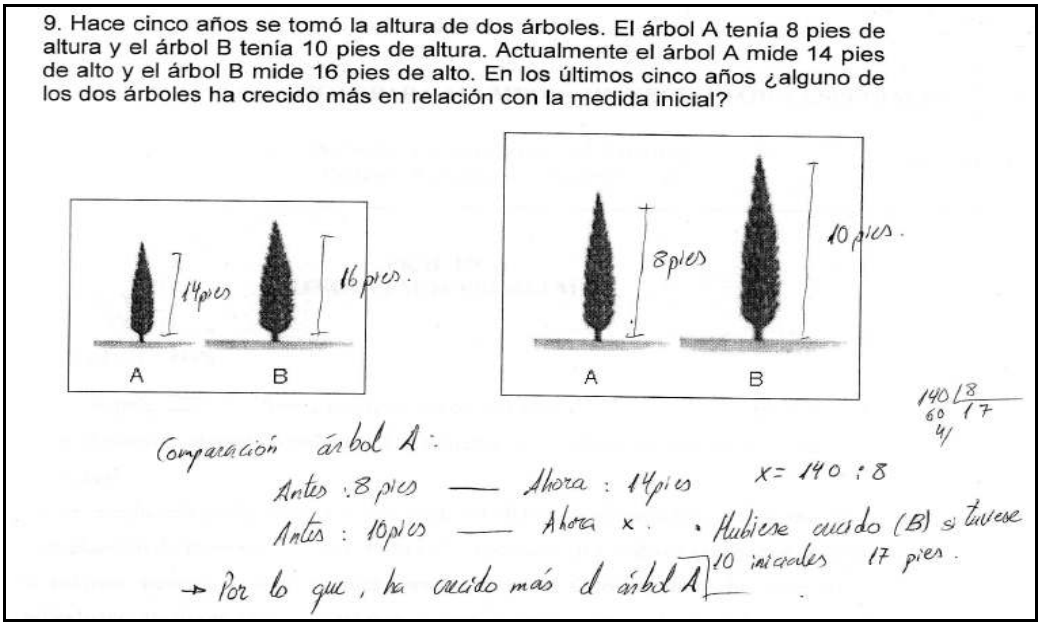


Figura 4. Ilustración de la estrategia suposición de razones equivalentes

Estrategias Incorrectas

A partir de la observación de las estrategias incorrectas, se destaca la presencia de la EI_2 en el problema 9, esta estrategia es de las más documentadas en las investigaciones y corresponde a la "estrategia aditiva" o de "diferencia constante", en este caso los sujetos relacionan los términos de una razón aditivamente, y con base en la diferencia entre los elementos correspondientes comparan las dos razones. Únicamente 6 sujetos razonan proporcionalmente y aplican una estrategia correcta, la aplicación de la estrategia aditiva responde correctamente a lo que ha crecido cada árbol en los últimos 5 años (6 pies), sin embargo no responde a la pregunta ¿alguno de los dos árboles ha crecido más en relación con la medida inicial? Se muestra una dificultad para interpretar lo que significa "en relación con", "relativamente" o "respecto con", la aplicación de la EI_2 en el problema 4 confirma esta situación (ver gráfico 4). En el estudio de Allain (2000) se reportan resultados muy similares respecto al rendimiento en este problema.

En los problemas de mezclas 5, 6 y 7 se presenta una frecuencia promedio de 26 respuestas sin justificación. Los estudiantes eligieron la bandeja que, según ellos, produciría la mezcla con mayor sabor a naranja, sin embargo, no justifican su elección.

En el problema 8 se ofrece una justificación poco satisfactoria por parte de 31 sujetos, basada en una interpretación errónea de la gráfica, interpretándola como la forma del camino recorrido en bicicleta; decidimos ubicarlos en el grupo sin justificación (SJ). Adicionalmente en este problema se presenta con mayor frecuencia la estrategia incorrecta EI1, con 18 casos. En esta estrategia los sujetos ignoran parte de los datos del problema y comparan las razones considerando únicamente los antecedentes o los consecuentes. Consideran la distancia y no toman en cuenta el tiempo para describir la velocidad en cada intervalo. Observamos que aunque esta cantidad intensiva (velocidad) forme parte de la cotidianeidad, los sujetos no muestran una comprensión del concepto de velocidad.

Una de las dos cuestiones que se preguntaban en el problema 10 se refiere al área de una bandera cuyas medidas de los lados son cantidades directamente proporcionales, la constante de proporcionalidad es dos; como es bien conocido la razón de las áreas de dos rectángulos no es igual a la razón de los lados correspondientes, no obstante observamos que 24 sujetos aplicaron la estrategia incorrecta de la ilusión de la linealidad (EI_4), dando como respuesta 12 m^2 que es el doble del área de la primera bandera. En otras palabras, los estudiantes consideraron la relación entre longitud y área como lineal en lugar de cuadrática, y, en consecuencia, aplicaron el factor de escala lineal en lugar de su cuadrado para determinar el área de la figura ampliada.

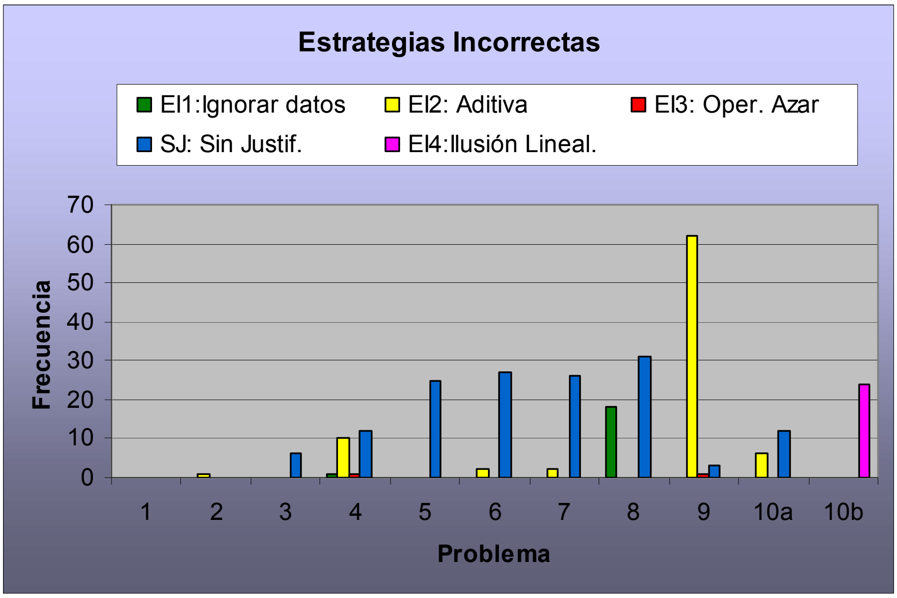


Gráfico 4

Uso de la unidad

En los problemas 1 y 3 se mostró una alta frecuencia de uso de la estrategia de la unidad simple, este tipo de estrategia también la reconocen Cramer y Post (1993) con el nombre de "razón unitaria" (unit-rate), también es conocida por ¿cuánto por uno? El contexto de reparto en ambos problemas, podría ser la variable del problema que está relacionada con el hecho de que los alumnos en el problema 1 determinen el precio de cada caramelo o la cantidad de pizzas que recibirá cada chico o chica en el problema 3.

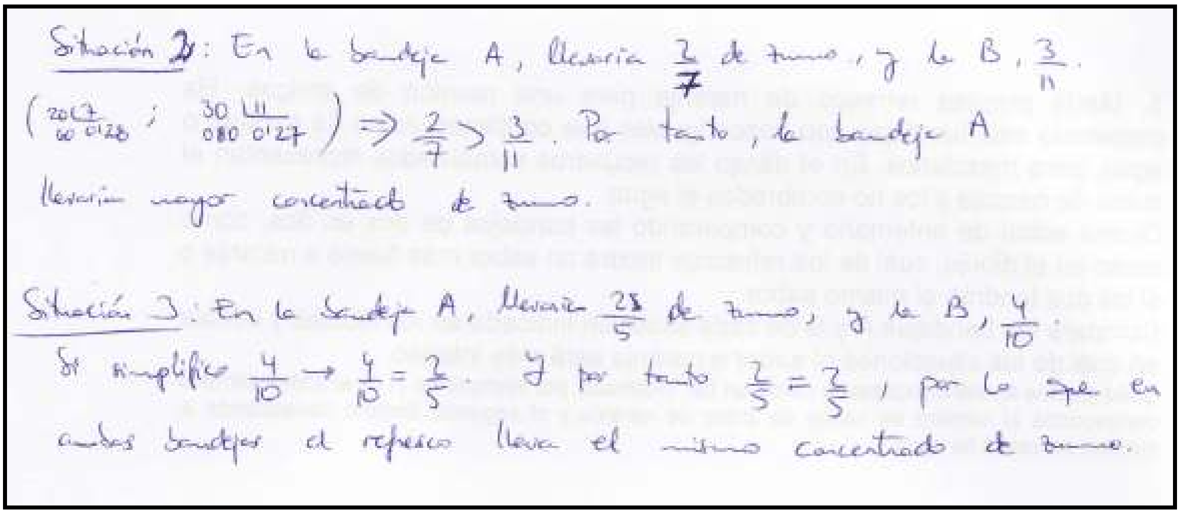
El uso de la estrategia de la unidad compuesta tuvo una frecuencia de 33 casos de aplicación en el problema 10a. Los sujetos reconocieron que la longitud de la nueva bandera era dos veces la longitud de la anterior, es decir reconocieron el factor multiplicativo asociado a la relación externa entre los datos en cada sistema. Consideramos que en la aplicación de la U_2 subyace el hecho de que el factor multiplicativo 2 les es familiar y además es entero. La mayor presencia de la estrategia de la normalización se presenta en el problema 3, con 7 participantes que la aplicaron, esto evidencia que sujetos con más edad no abandonan el uso de estrategias intuitivas.

4.2 Conocimiento procedimental y errores detectados

Procedimientos

A partir de la observación de las producciones de los estudiantes detectamos que en los problemas 3, 4, 5, 6 y 7 se presentaron las más altas frecuencias de aplicación de procedimientos usuales en la comparación de fracciones racionales (ver gráfico 5), esta situación nos permite afirmar que los sujetos consideran las razones como fracciones racionales, desvisten la razón como objeto matemático y las asumen como números racionales, separando la representación simbólica del significado de la fracción como una razón. Moss y Case (1999) plantean que el énfasis sintáctico sobre el semántico podría explicar esta situación. Según estos investigadores en los programas de educación secundaria, se dedica mucho tiempo en la enseñanza de procedimientos para manipular los números racionales y muy poco tiempo para enseñar su significado conceptual, y, particularmente, en las clases de matemática de primaria o secundaria existe una ausencia de trabajo y reflexión respecto a los diferentes significados de las fracciones.

En la figura 5 aportamos un ejemplo de esta situación:


Situación 2: En la bandeja A, llevaría $\frac{2}{7}$ de zumo, y la B, $\frac{3}{11}$.
(20|7 60 0'28 ; 30|11 080 0'27) $\Rightarrow \frac{2}{7} > \frac{3}{11}$. Por tanto, la bandeja A llevaría mayor concentrado de zumo.

Situación 3: En la bandeja A, llevaría $\frac{2}{5}$ de zumo, y la B, $\frac{4}{10}$.
Si simplifico $\frac{4}{10} \rightarrow \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$. y por tanto $\frac{2}{5} = \frac{2}{5}$, por lo que en ambas bandejas el refresco lleva el mismo concentrado de zumo.

Figura 5. Procedimientos aplicados por uno de los participantes en los problemas 6 y 7.

En la situación 2 del ejemplo anterior el sujeto toma la razones, las considera como fracciones racionales y busca la notación decimal de las mismas, perdiendo la razón su significado y tomándola como un número racional, aunque establece la relación de orden correctamente, no sabemos si el sujeto comprende lo que significa 0,28 o 0,27 en el contexto del problema.

En este grupo de maestros en formación se observa que la regla de tres se ha aplicado en la resolución de casi todos los problemas, a excepción del problema 8, la más alta frecuencia de aplicación de esta técnica se da en el problema 2 que es del tipo “valor perdido”, lo cual permite afirmar que este tipo de situaciones está cercanamente relacionada con la aplicación de la herramienta. Sin embargo, hemos notado que los alumnos aplican la regla de tres de diferentes formas. Así en los problemas de valor perdido, como el 2 o 10a, la usan para determinar un valor de una cuarta proporcional dadas las otras tres cantidades, ese valor es la cantidad que resuelve la situación, mientras que en los problemas de comparación, tales como el 3, 4, 5, 6, 7 y 9, la usan bajo una suposición de equivalencia de razones.

La división de números naturales fue el algoritmo que más frecuentemente aplicaron los sujetos en los problemas 1 y 3; algunas características que comparten estos problemas son que ambos incluyen una situación de reparto (en un caso caramelos y dinero, en el otro, porciones de pizza y personas). Además, la resolución de ambos problemas implica la comparación de dos razones. Por otro, lado en los problemas de mezclas observamos que también aplican la división de números naturales, pero en este caso su uso obedece a la conversión de expresión fraccionaria a número decimal.

Un hecho aislado que observamos es que algunos estudiantes recurrieron al planteo de una ecuación de 1º grado o de un sistema de dos ecuaciones de 1º grado con dos incógnitas para abordar los problemas 3 y 4. Este hecho denota una clara ausencia del razonamiento proporcional por parte de esos sujetos al resolver estos problemas.

Además en la parte b del problema 10, en la cual los sujetos debían hallar el área de la bandera con forma rectangular, observamos que la aplicación directa de la fórmula $A = b \cdot h$ (b: base, h: altura) tuvo una frecuencia de 44 lo que corresponde a un 57.9% del total. Además, este grupo de 44 sujetos no abordaron el problema desde la perspectiva de la ilusión de la linealidad. Sin embargo, ninguno de los alumnos halló el área de la bandera argumentando que la razón de las áreas es igual al cuadrado de la razón de los lados.

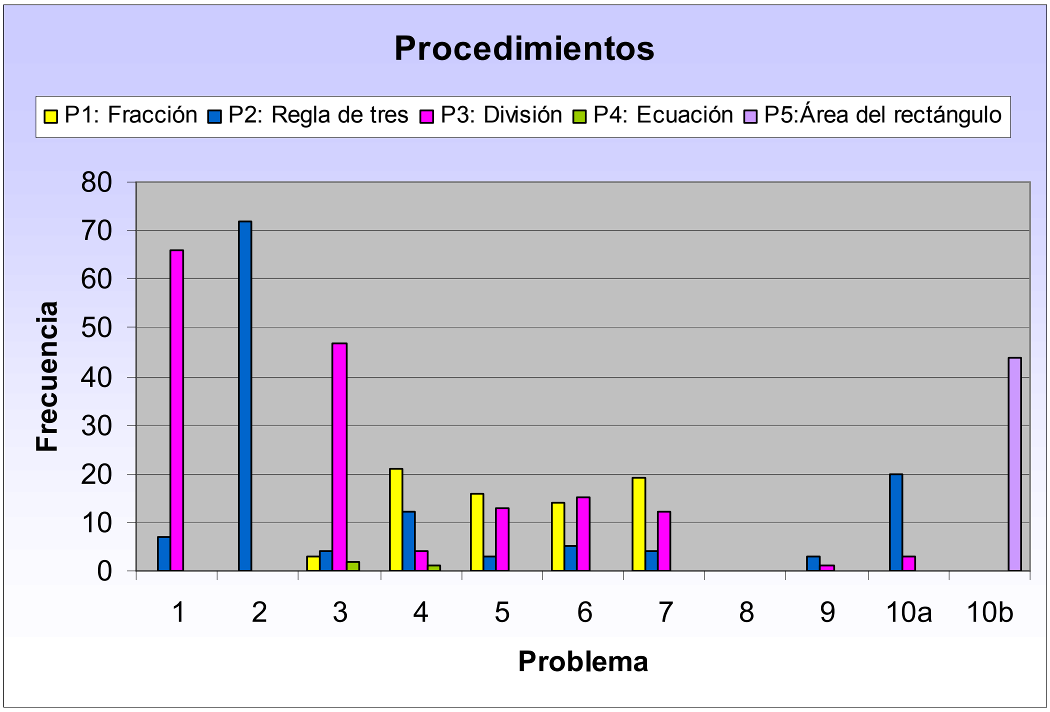


Gráfico 5

Errores

Los alumnos al aplicar la estrategia de la unidad simple cometen errores en la interpretación del procedimiento aplicado. Por ejemplo, si el sujeto aplicó una división de números naturales observamos una interpretación equivocada del cociente dentro del contexto del problema, particularmente en el problema 3 encontramos la máxima frecuencia de recurrencia, con 20 casos, un ejemplo de este error se muestra a continuación en la figura 6:

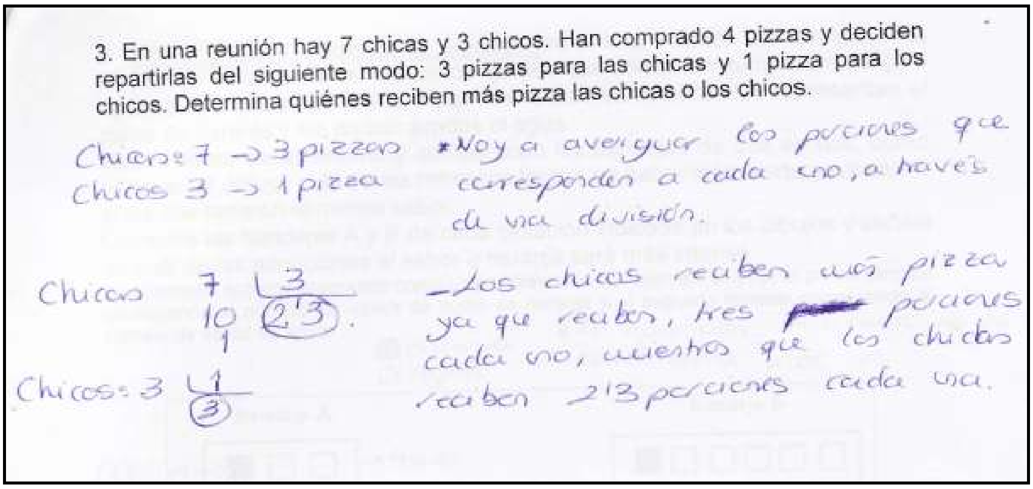


Figura 6. Error en la interpretación de la Unidad Simple

En este caso se observa cómo el estudiante recurre a la división para determinar la cantidad de pizza que le corresponde a cada chico y a cada chica, es decir su idea inicial es hallar la cantidad intensiva pizza por chico(a). No obstante, cuando coloca en el dividendo el número de personas y en el divisor el número de pizzas el cociente viene a ser la cantidad intensiva personas por pizza. Como lo interpreta según su idea inicial llega a una respuesta incorrecta. Este hecho evidencia la dificultad de estos sujetos para interpretar cantidades intensivas. Con menor frecuencia este error se presentó en los problemas 1 y 4.

También los alumnos mostraron errores en la aplicación de la estrategia de la normalización, aunque con baja frecuencia se presentó en los problemas 3, 4, 6 y 7, en los cuales observamos situaciones en las que los sujetos usaron una razón inadecuada para interpretar el problema o eligieron una razón adecuada como unidad pero interpretan incorrectamente la otra situación, por ejemplo:

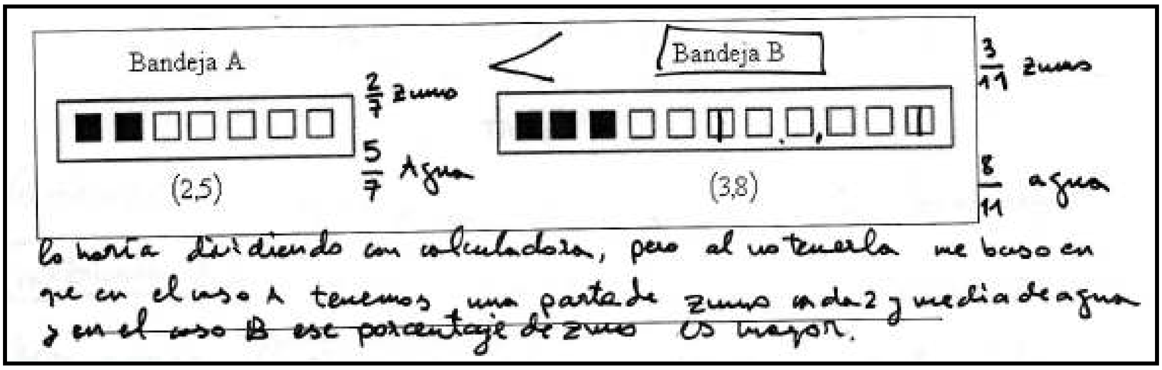
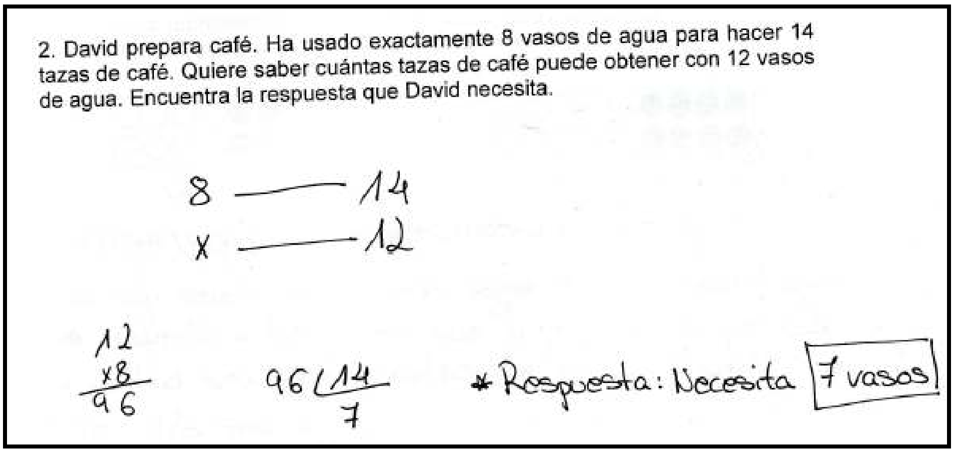


Figura 7. Error en la aplicación de la Normalización

El estudiante considera que en la bandeja A por cada vaso de zumo tiene 2 vasos y medio de agua. Cuando interpreta la situación de la bandeja B usa la relación anterior (inclusive se observa la división con una rayita cada dos vasos y medio de agua) pero no interpreta que el medio vaso de agua que queda en la bandeja B hace que el sabor a naranja sea menos fuerte que en la bandeja A, conduciéndolo a una respuesta incorrecta.

Las frecuencias más altas de errores procedimentales se presentaron en los problemas 2,4 y 6. En este grupo encontramos que los sujetos cometen errores cuando realizan una división de números naturales, o cuando aplican la regla de tres, por ejemplo:



2. David prepara café. Ha usado exactamente 8 vasos de agua para hacer 14 tazas de café. Quiere saber cuántas tazas de café puede obtener con 12 vasos de agua. Encuentra la respuesta que David necesita.

8 —— 14
x —— 12

12
x8
96

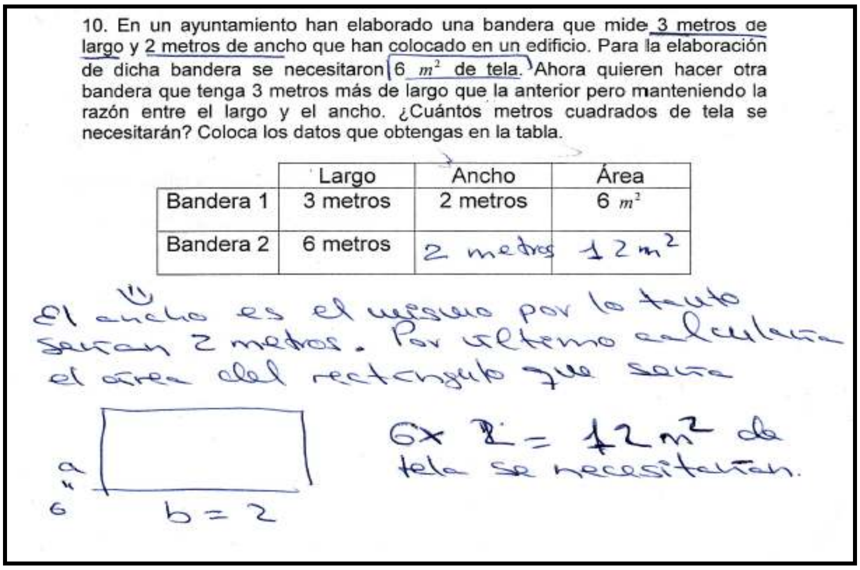
96 | 14
7

*Respuesta: Necesita 7 vasos

Figura 8. Error procedimental

El sujeto plantea la regla de tres incorrectamente ya que establece la razón de vasos de agua con las tazas de café y luego para establecer la otra razón invierte el orden entre el antecedente y consecuente, mostrando una incomprensión de la relación de proporcionalidad directa entre esas cantidades pues con más vasos de agua obtiene una menor cantidad de lo que deberían ser tazas de café sin embargo tampoco interpreta correctamente el resultado obtenido en relación con la pregunta del problema.

Los errores de interpretación se presentaron en sujetos que realizaron una lectura inadecuada de los datos suministrados en el problema, sin embargo estas interpretaciones no son todas del mismo tipo. Un caso se presentó cuando los sujetos realizan otra lectura de alguno de los datos del enunciado del problema, por ejemplo el problema 10 dice: "… quieren hacer otra bandera que tenga 3 metros más de largo que la anterior pero <u>manteniendo la razón entre el largo y ancho</u>", los sujetos interpretaron que la nueva bandera debía de tener el mismo ancho tal y como se muestra en la figura 9.



10. En un ayuntamiento han elaborado una bandera que mide 3 metros de largo y 2 metros de ancho que han colocado en un edificio. Para la elaboración de dicha bandera se necesitaron 6 m^2 de tela. Ahora quieren hacer otra bandera que tenga 3 metros más de largo que la anterior pero manteniendo la razón entre el largo y el ancho. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarán? Coloca los datos que obtengas en la tabla.

	Largo	Ancho	Área
Bandera 1	3 metros	2 metros	6 m^2
Bandera 2	6 metros	2 metros	12 m^2

El ancho es el mismo por lo tanto serían 2 metros. Por último calcularía el área del rectángulo que sería

a = 6
b = 2

6x 2 = 12 m^2 de tela se necesitarán.

Figura 9. Error en la interpretación de los datos

En el problema 8 la información sobre la velocidad debía de extraerse de la representación gráfica en la cual se daba el tiempo transcurrido y la distancia recorrida. Observamos que los estudiantes interpretaron la gráfica como si ésta fuera el dibujo del camino recorrido en bicicleta por la chica, por ejemplo uno de los estudiantes dice: "*La gráfica representa que el intervalo C se hizo más distancia que la A y esta más que la B ya que la línea C es más larga que la A y esta más larga que la C. El tiempo de cada intervalo es el mismo que se divide de la misma forma (tamaño)*".

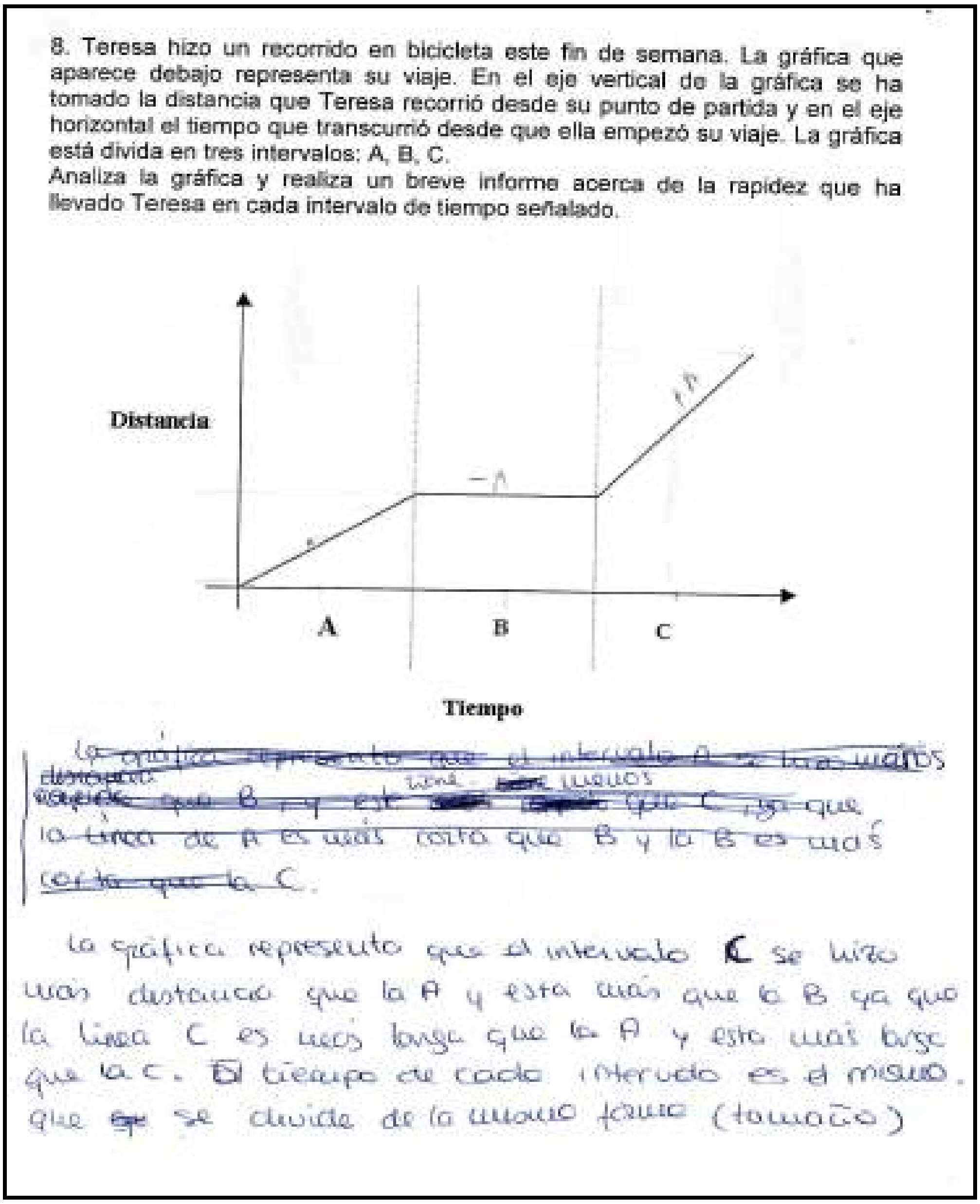


Figura 10. Error en la interpretación de la gráfica del problema 8

4.3 Resultados por Problema

Resultados del problema 1

Dos amigas Rosa y Ana compraron caramelos. Rosa compró 3 caramelos por los que pagó 12 céntimos y Ana compró 5 caramelos por los que pagó 20 céntimos. Indica si alguna de las dos amigas compró los caramelos más baratos.

En este problema, de comparación de razones, los estudiantes mostraron la más alta frecuencia de respuestas correctas. Ciertamente, el problema tiene un nivel de dificultad muy bajo y el contexto de reparto incidió directamente en el hecho de que el procedimiento predilecto para resolverlo fuese la división de números naturales, adicionalmente la cantidad de dinero es divisible por la cantidad de caramelos, es decir la razón externa es entera. Observamos que la estrategia "entre" tuvo una alta frecuencia pues de forma natural los sujetos relacionaron dinero con número de caramelos, la división se usó como herramienta para hallar el valor de cada uno de los caramelos (estrategia de la unidad simple U_1). Sin embargo se observa que ninguno de los sujetos reconoció la constante de proporcionalidad 4 en la relación funcional, ni tampoco el operador escalar $\frac{3}{5}$ en la relación interna, es decir requirieron de la división para determinar si alguna de las amigas compró los caramelos más baratos. Los errores e_1, e_4 y e_5 presentaron una frecuencia muy baja, sin embargo en relación al último tipo errores de interpretación (e_5) destacamos que algunos sujetos aunque realizan la división correctamente responden que Ana compró los caramelos más baratos porque compró una mayor cantidad que Rosa.

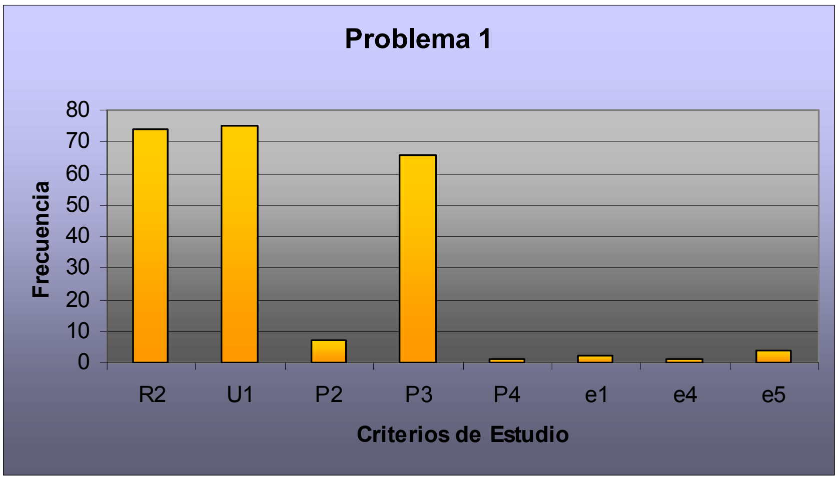


Gráfico 6

Resultados del problema 2

David prepara café. Ha usado exactamente 8 vasos de agua para hacer 14 tazas pequeñas de café. Quiere saber cuántas tazas pequeñas de café puede hacer con 12 vasos de agua. Encuentra la respuesta que David necesita.

Este problema es del tipo "valor perdido" en el cual se dan tres cantidades de una cuarta proporcional, observamos que casi la totalidad de los estudiantes (72) establecieron la relación funcional R_2 entre la cantidad de vasos de agua y la cantidad de tazas de café, únicamente 1 sujeto estableció la relación escalar R_1 entre el número de vasos de agua separadamente del número de tazas de café. La "regla de tres" constituyó el procedimiento más usado con 72 casos y 11 sujetos cometieron algún error al aplicar esta técnica (e_4). Este resultado está en línea con la consideración de Verschaffel, Creer, y De Corte (2000) (citados en Van Dooren y col. 2006), según los cuales en situaciones clásicas de valor perdido existe una fuerte tendencia de evocar la proporcionalidad directa y aplicar la regla de tres o de productos cruzados.

Cabe resaltar que, en este problema, la razón externa no es entera lo cual dificulta el reconocimiento de la constante de proporcionalidad entre las cantidades. Este hecho puede incidir en que ninguno de los participantes la identificase.

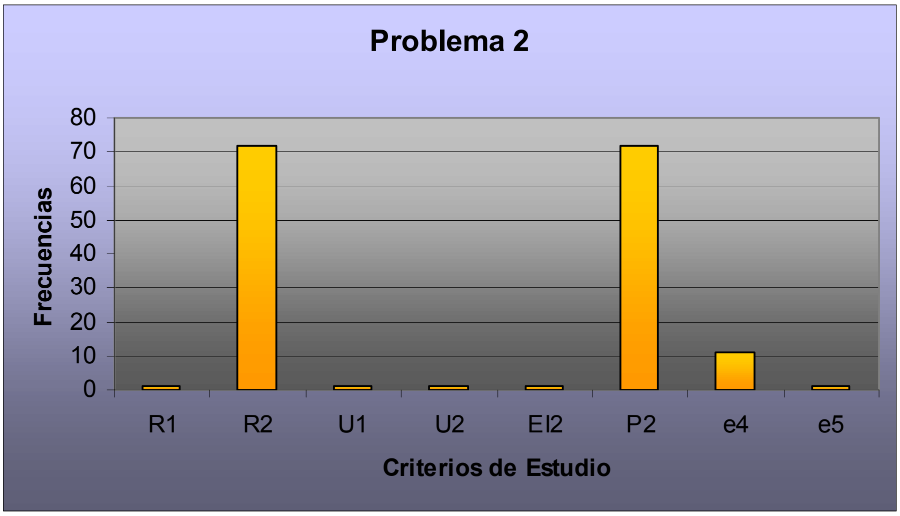


Gráfico 7

Resultados del problema 3

En una reunión hay 7 chicas y 3 chicos. Han comprado 4 pizzas y deciden repartirlas del siguiente modo: 3 pizzas para las chicas y 1 pizza para los chicos. Determina quiénes reciben más pizza las chicas o los chicos.

La situación tres, según Lamon (1993), es del tipo *conjuntos asociados* ya que se presenta la relación entre dos elementos de dos conjuntos, el conjunto de chicos (as) y el conjunto de las pizzas produciéndose una cantidad intensiva que no es conocida, pizzas por persona o personas por pizzas, según sea el orden establecido entre el antecedente y el consecuente de la razón. La situación requiere una comparación de razones. Observamos que 62 sujetos establecieron una relación funcional entre la cantidad de chicos (as) y las pizzas, en contraposición a la estrategia escalar que no fue utilizada por ninguno de los participantes. 4 sujetos aplicaron la estrategia N_1 *Suposición de Razones Equivalentes*, en la que se asume que tres de las cantidades mantienen una relación de proporcionalidad directa.

En relación con el uso de la unidad observamos una preferencia por aplicar la estrategia de la unidad simple, en ésta los sujetos buscan conocer la cantidad de pizza para cada persona o la cantidad de personas por cada pizza, resaltamos que en la aplicación de esta estrategia 20 sujetos cometieron errores del tipo (e_1) en la interpretación de los procedimientos aplicados. Respecto al uso de la unidad también observamos, aunque con menor frecuencia, la aplicación de la estrategia de la normalización. En ésta los sujetos eligen o construyen una razón para reinterpretar toda la situación, la razón que más frecuentemente usaron fue 1:3 (1 pizza para 3 chicos) que es equivalente a la razón 3 pizzas/9 chicos. Para resolver el problema los alumnos compararon únicamente los consecuentes de las razones 3:9 y 3:7. Observamos apareamientos de figuras de pizzas y chicos (as) por medio de flechas e inclusive división de figuras de pizzas usando cuartos.

El procedimiento que más usaron los estudiantes en este problema fue la división de números naturales (P_3), debido a que al aplicar la estrategia de la unidad simple y con el fin de comparar las razones, los estudiantes buscaron la notación decimal de cada una de ellas.

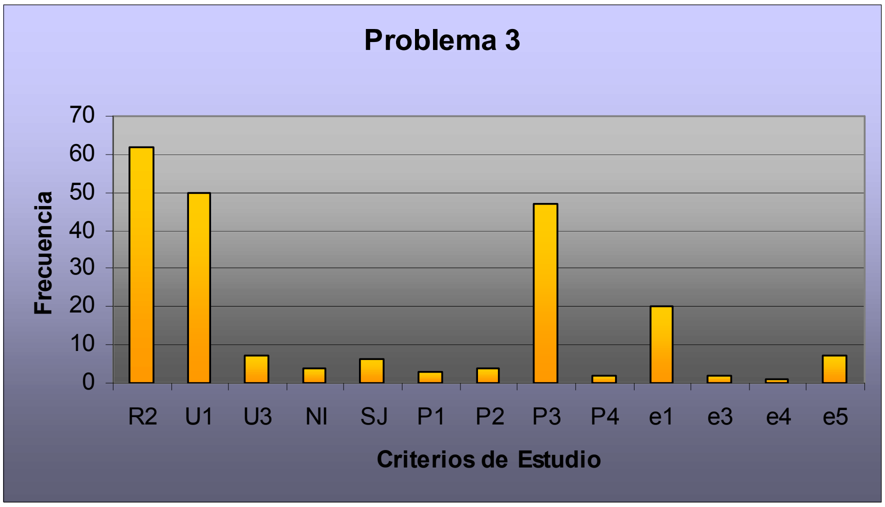
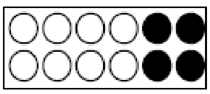


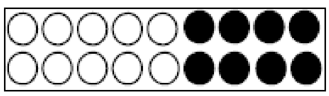
Gráfico 8

Resultados del problema 4

Los dibujos en este problema representan dos cajas de manzanas. Una pequeña y otra grande. La caja pequeña contiene 8 manzanas verdes y 4 manzanas rojas. La caja grande contiene 10 manzanas verdes y 8 manzanas rojas (los círculos sombreados representan manzanas rojas y los no sombreados representan manzanas verdes). ¿Cuál de las dos cajas contiene más manzanas rojas respecto a las manzanas verdes?



Caja P



Caja G

A partir de los resultados generales del problema 4, se observa una predilección por relacionar las cantidades dentro del mismo sistema, estrategia "en", así 51 participantes eligieron esta forma se relación. La estrategia de la unidad simple fue aplicada más que la estrategia de la normalización, sin embargo la diferencia fue únicamente de 2 casos.

En total 13 sujetos aplicaron la estrategia aditiva, de modo tal que después de plantear la razón obtuvieron la diferencia entre las manzanas verdes y rojas en cada caja y con base en este número razonaron su respuesta.

Los procedimientos que encontramos con mayor frecuencia, corresponden aquellos utilizados en la comparación de fracciones (21 sujetos), tales como la transformación a la notación decimal, la homogenización de denominadores o el producto cruzado. En correspondencia a este hecho, encontramos que la mayoría de los errores observados están relacionados con la aplicación incorrecta de algoritmos o procedimientos (e_4).

Al igual que en los problemas 3 y 7, en este problema 4 aparece el uso de la estrategia *Suposición de Razones Equivalentes,* codificada por N1.

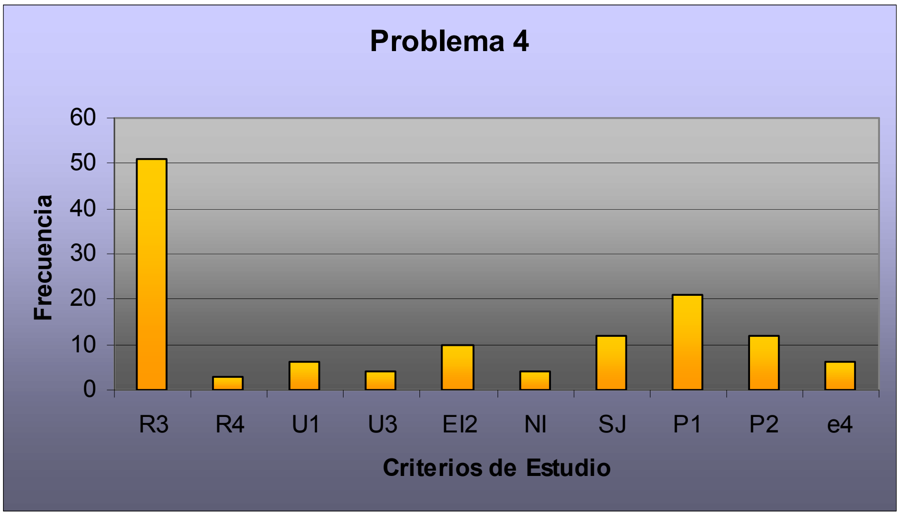


Gráfico 9

Una comparación, considerando de manera separada aquellos que dieron una respuesta correcta de los que dieron una respuesta incorrecta, nos permite observar que el uso de la estrategia "en" (parte-parte) aparece más frecuentemente en el grupo de quienes dieron una respuesta correcta, sin embargo ambos grupos usan la estrategia "en" parte-todo con casi igual frecuencia. Es importante observar que aquellos sujetos que dan una respuesta correcta no están exentos de cometer errores o inclusive de aplicar estrategias incorrectas, vemos de hecho que la estrategia incorrecta aditiva (EI2) es aplicada con más frecuencia por aquellos que dieron una respuesta correcta.

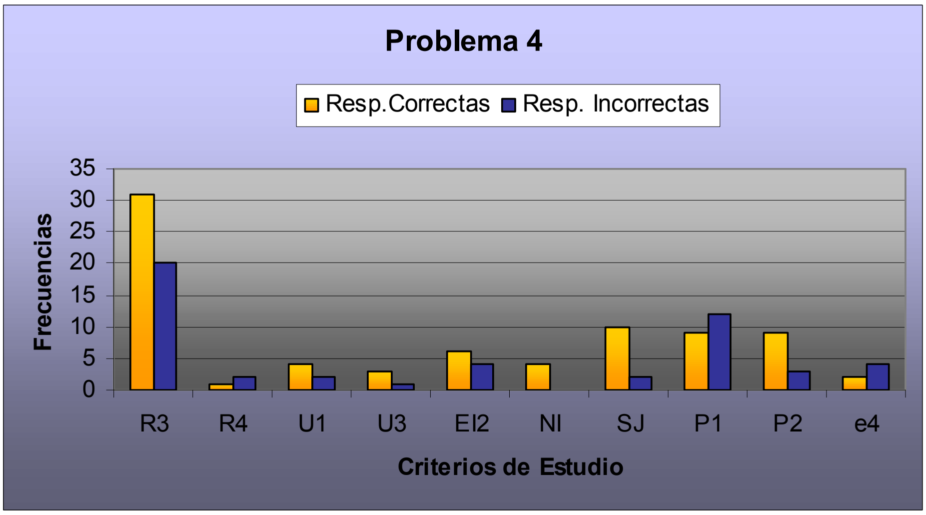


Gráfico 10

Resultados de los problemas 5, 6 y 7 de Mezclas

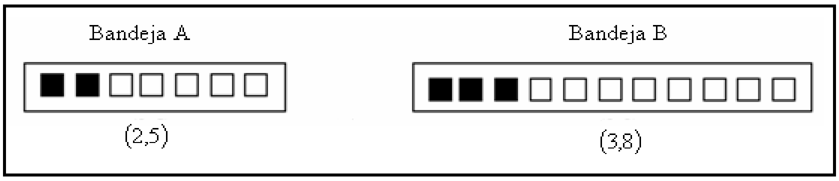
María prepara refresco de naranja para una reunión de amigas. Ha preparado seis bandejas con vasos iguales que contienen zumo de naranja o agua, para mezclarlos. En el dibujo los recuadros sombreados representan el zumo de naranja y los no sombrados el agua.

Quiere saber de antemano y comparando las bandejas de dos en dos, como están en el dibujo, cuál de los refrescos tendrá un sabor más fuerte a naranja o si los dos tendrán el mismo sabor.

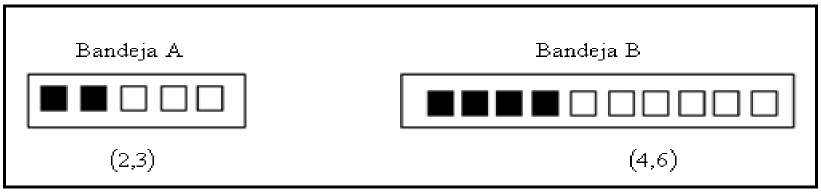
Cada mezcla aparece expresada como un par ordenado, por ejemplo en (1,3) el primer término corresponde al número de vasos de zumo de naranja y el segundo término corresponde al número de vasos de agua.

5.

6.



7.



Los problemas 5, 6 y 7 son de comparación de razones en el contexto de mezclas, aunque los tres tienen el mismo enunciado la observación de cada uno se realizó por separado ya que el tipo de razones en cada caso es diferente, en el 5 las razones son unitarias, en el 6 se trata de dos razones que no son unitarias ni equivalentes y finalmente en el 7 las razones son equivalentes.

En cuanto a las estrategias de relación observamos que tanto la estrategia “en” como la estrategia “entre” fueron aplicadas por los estudiantes en los tres ítems, no obstante el comportamiento en el ítem seis se diferencia notablemente de lo mostrado en los ítems cinco y siete, así en el seis cuya dificultad era mayor vemos que los sujetos prefieren usar la estrategia “en” frente a la “entre”, en el ítem 5 prevalece el uso de la estrategia “entre”, aunque no por mucha diferencia, sobre la estrategia en el mismo sistema (en); por otro lado en el ítem 7 prevalece la “en”, aunque no por mucho, sobre la estrategia entre sistemas (between). De los estudiantes que aplicaron la estrategia “en” (within), en los tres ítems, resaltamos que en cada caso alrededor de dos terceras partes prefirió establecer la relación parte-parte (R_3) frente a la relación parte-todo (R_3*).

La estrategia de la unidad simple y la de normalización se aplicaron en los ítems seis y siete y no en el cinco, en el cual para este grupo de sujetos no fue necesario posiblemente debido a que la razones eran unitarias y bastaba comparar los consecuentes para determinar el sabor más fuerte a naranja de cada refresco.

3 sujetos aplicaron la estrategia N_1, *Suposición de Razones Equivalentes*, en los ítems 5 y 6, mientras que 4 la aplican en el ítem 7. Resaltamos que quienes aplicaron esta estrategia para relacionar las cantidades fueron los mismos sujetos. Observamos muy baja frecuencia en la estrategia de la diferencia constante (EI_2), únicamente dos casos en los ítems 6 y 7.

Un aspecto relevante que observamos en éste problema es la dificultad de los sujetos para justificar sus respuestas. Así un promedio de 26 sujetos elegían la bandeja sin dar ninguna justificación escrita ni procedimientos. En estos casos puede ser que encontraran la respuesta por intuición o por ser obvia la respuesta- Sin embargo la incapacidad de dar explicaciones es una evidencia de la deficiencia en el razonamiento proporcional mostrado por los participantes.

Los procedimientos que prevalecieron en estos tres ítems fueron aquellos usados comúnmente para comparar fracciones[18] (fraction strategy P_1), tales como la homogenización de denominadores, transformación a notación decimal o el producto cruzado, además la división de números naturales P_3 se usó tanto para la obtención de la notación decimal, que les resultaba más sencilla para comparar, como en la aplicación de la estrategia de unidad simple para determinar la cantidad de zumo que había por cada vaso de agua o viceversa, en cada una de las bandejas. La regla de tres P_2 se usó, en casi todos los casos, como técnica para poner en marcha la estrategia *Suposición de Razones Equivalentes* N_1.

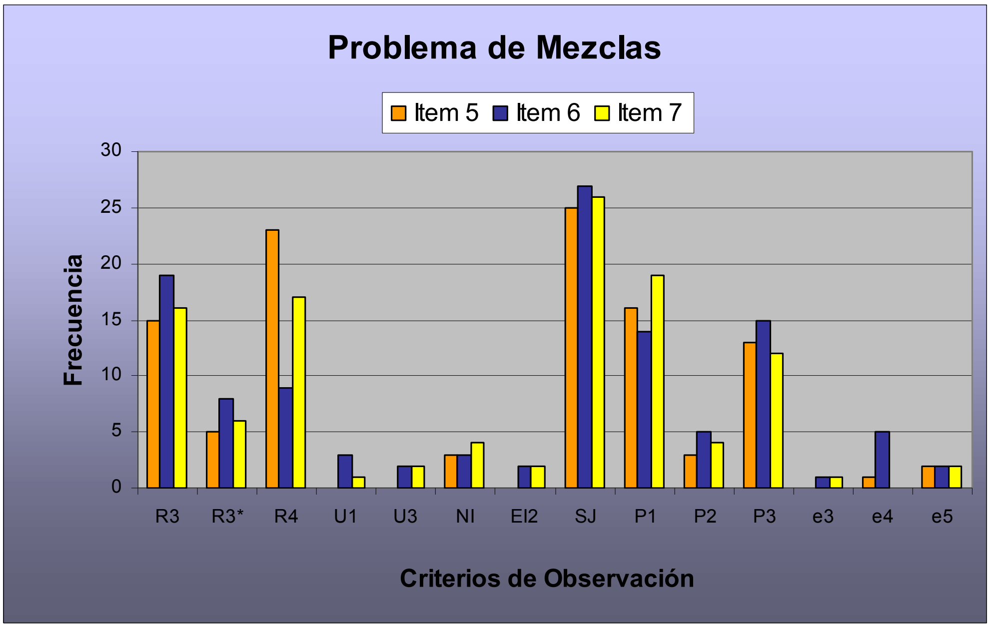


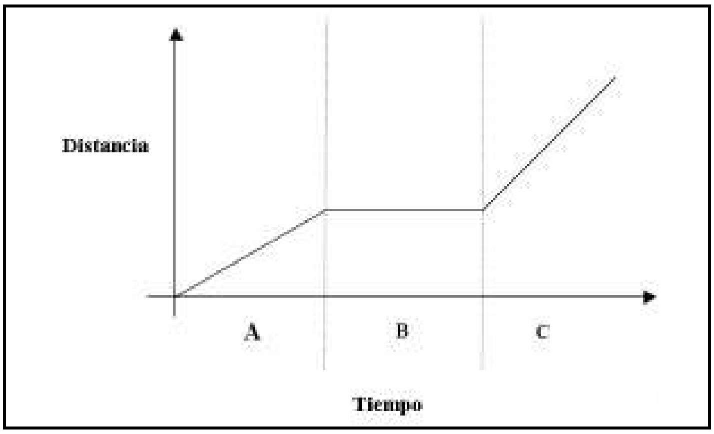
Gráfico 11

[18] Fracciones como representantes de un número racional.

Resultados del problema 8

Teresa hizo un recorrido en bicicleta este fin de semana. Abajo aparece una gráfica que representa su viaje. En el eje vertical de la gráfica se ha tomado la distancia que Teresa recorrió desde su punto de partida y en el eje horizontal el tiempo que transcurrió desde que ella empezó su viaje. La gráfica está divida en tres intervalos: A, B, C.

Analizando la gráfica realiza un breve informe acerca de la rapidez que ha llevado Teresa en cada intervalo de tiempo señalado.



Este problema involucra tanto la comparación de razones como la interpretación gráfica, así que los estudiantes deben deducir, a partir de la gráfica, qué tan rápido iba Teresa en cada intervalo de tiempo. Una de las características de estas razones es que las tres tenían el mismo consecuente, ya que la cantidad de tiempo en cada intervalo fue el mismo.

La relación funcional R_2 fue la única forma en la que los sujetos relacionaron las cantidades de distancia y tiempo. Los 24 participantes que la aplicaron fueron los únicos que llegaron a una respuesta correcta y justificada. 7 sujetos dieron una respuesta correcta pero ningún argumento o procedimiento que justificara su respuesta. Además observamos que algunos de los alumnos asignaron valores numéricos a la gráfica para determinar una solución correcta.

En este problema hubo 42 respuestas incorrectas lo cual corresponde aproximadamente a un 55,2% de los participantes, en este grupo se encuentran aquellos que aplicaron la estrategia incorrecta EI_1 la cual se refería a la comparación de las razones basándose únicamente en el antecedente o en el consecuente, es decir los estudiantes comparan ignorando parte de los datos, en este caso 18 sujetos determinan el orden en las velocidades en cada intervalo argumentando únicamente la relación entre las distancia, por ejemplo expresaban que en el intervalo C Teresa iba más rápido porque recorrió mayor distancia, ignorando el dato referido al tiempo para así poder comparar las velocidades en los intervalos A, B y C.

En este grupo del 55,2% ubicamos a aquellos sujetos que no dan ninguna justificación (11 sujetos), y a 19 estudiantes cuyas justificaciones no son satisfactorias ya que son afirmaciones basadas en una interpretación errónea de la gráfica (e_5), considerándola como el camino recorrido por Teresa. Un total de 31 sujetos conforman el grupo que hemos denominado “Sin Justificación” (SJ). La respuesta incorrecta más frecuente, en este grupo, se dio en la interpretación del intervalo B, la mayoría de los estudiantes escribió que Teresa llevaba una velocidad constante en este intervalo, en vez de responder que en realidad la chica durante todo ese tiempo estuvo parada.

Los resultados referentes a las respuestas, estrategias incorrectas y errores en este problema son evidencias de la dificultad que muestran los estudiantes en la interpretación de cantidades intensivas, en este caso la velocidad, y en su representación.

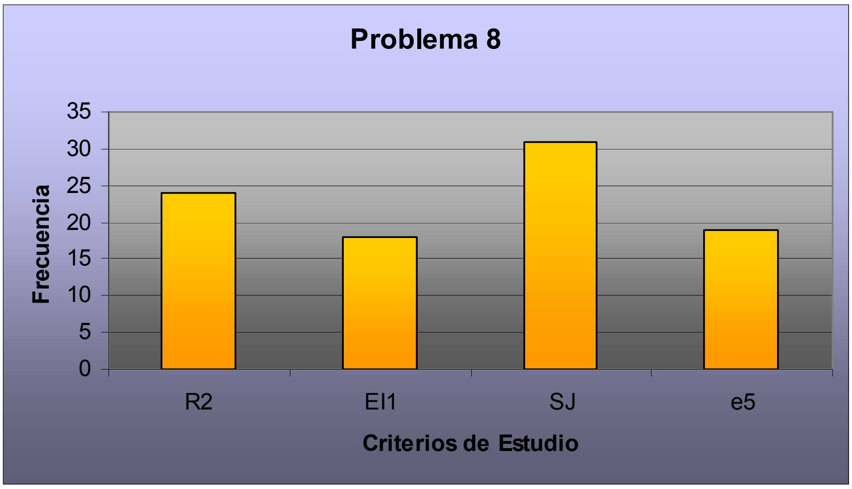
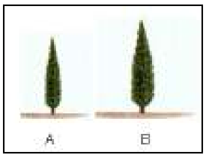
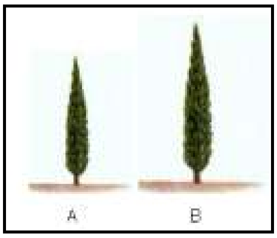


Gráfico 12

Resultados del problema 9

Hace cinco años se tomó la altura de dos árboles. El árbol A tenía 8 pies de altura y el árbol B tenía 10 pies de altura. Actualmente el árbol A mide 14 pies de alto y el árbol B mide 16 pies de alto. En los últimos cinco años ¿alguno de los dos árboles ha crecido más en relación con la medida inicial?





Según Allain (2000) este problema es una adaptación de uno de los problemas investigados en Lamon (1993) clasificado como ampliador o “stretcher”, a los estudiantes se les daba la información sobre las alturas de dos árboles y ellos debían determinar cuál de los dos árboles había incrementado más su altura en relación con la altura inicial tomada cinco años atrás. Para este problema además de la descripción del escenario se les presentó una representación del mismo.

Destacamos que la mayoría de los sujetos (69) relacionan las cantidades entre los sistemas, o sea aplican la estrategia “entre” R_4 tomando en cuenta la altura inicial y final del árbol A y del árbol B por separado, no obstante recalcamos que la relación que establecen no es multiplicativa sino aditiva.

A partir de la observación, destacamos la presencia de la estrategia EI_2 en el problema 9, esta estrategia es de las más documentadas en las investigaciones y corresponde a la “estrategia aditiva” o de “diferencia constante”, en este caso los sujetos relacionan los términos de una razón aditivamente, y con base en la diferencia entre los elementos correspondientes comparan las dos razones. Un total de 70 estudiantes dio una respuesta incorrecta al problema, de los cuales 62 sujetos aplicaron esta estrategia incorrecta.

La aplicación de la estrategia aditiva responde correctamente a lo que ha crecido cada árbol en los últimos 5 años (6 pies), sin embargo no responde a la pregunta ¿alguno de los dos árboles ha crecido más en relación con la medida inicial? Se muestra la dificultad para comprender lo que significa la expresión "en relación con". En relación con esta situación, Freudenthal (1983) plantea que algunos contextos requieren una verbalización más temprana de ideas tales como relativamente o comparativamente que subsanarían esta situación.

Únicamente 6 sujetos dan una respuesta correcta, de los cuales sólo tres de ellos aplican la estrategia N_1, suponiendo que ambos árboles han crecido proporcionalmente en relación con la altura inicial y comparando sus resultados con los datos del problema.

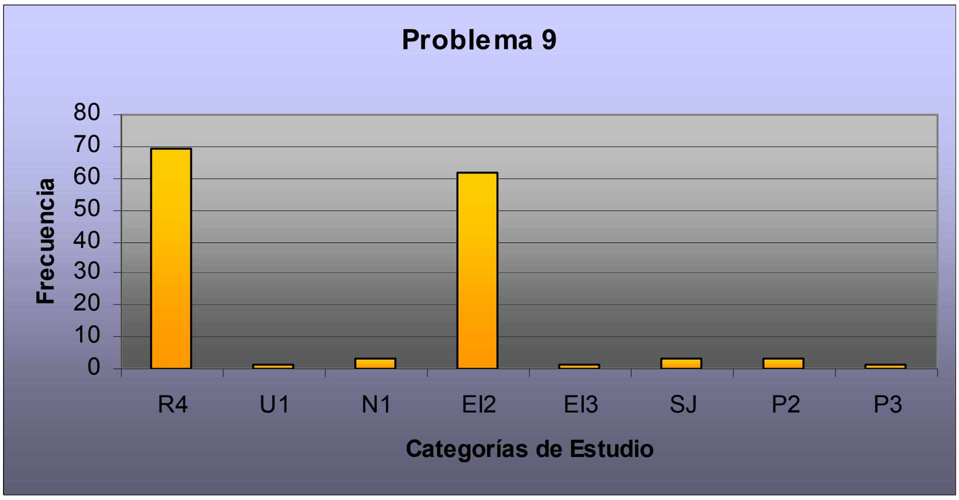


Gráfico 13

Resultados del problema 10a

En un ayuntamiento han elaborado una bandera que mide 3 metros de largo y 2 metros de ancho, que han colocado en un edificio. Para la elaboración se requirió de 6 m^2 de tela. Ahora quieren hacer otra bandera que tenga 3 metros más de largo que la anterior, pero manteniendo la razón entre el largo y el ancho. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarán? Coloca los datos que obtengas en la tabla.

	Largo	Ancho	Área
Bandera 1	3 metros	2 metros	6 m^2
Bandera 2	6 metros		

Este problema se observó considerando que cada una de las banderas constituye un sistema, así si los estudiantes establecían la relación entre el largo y el ancho de cada bandera estarían aplicando la estrategia "en" y si establecían la relación entre las medidas del largo entre las banderas estarían aplicando la estrategia "entre".

La parte 10a se refería a hallar la medida del ancho de la bandera, en este caso observamos que los alumnos para relacionar las cantidades aplican tanto la estrategia "en" con 29 casos, como la "entre", siendo ésta última la que presenta la mayor frecuencia de aplicación con 34 casos.

La aplicación de la estrategia "entre" estuvo acompañada del reconocimiento del factor multiplicativo asociado a la relación entre los datos en cada sistema. 33 estudiantes aplicaron la estrategia de la unidad compuesta U_2, expresando en sus soluciones que la constante entre las longitudes "largo" y "ancho" era dos, el doble o dos veces, consideramos que esta estrategia tuvo una presencia importante debido a que el factor de cambio era un número entero.

El procedimiento usado por 20 de los participantes, para determinar la medida del ancho fue la regla de tres (P_2), evidenciando que los sujetos no reconocieron la constante de proporcionalidad entre las longitudes de la bandera y tuvieron la necesidad de realizar un procedimiento, quizás debido a la tradición escolar que fomenta el justificar los procesos de resolución de problemas mediante algoritmos o técnicas.

De las 19 respuestas incorrectas, destacamos que once de éstas corresponden a respuestas sin procedimientos o argumentos que la justifiquen, seis de ellas corresponden a sujetos que aplicaron la estrategia aditiva o de diferencia constante EI_2, dado que la diferencia entre el ancho y el largo de la 1º bandera era de una unidad, la respuesta que dieron al ancho de la segunda bandera fue cinco, una unidad menor que el largo de la misma. 10 estudiantes cometen un error de interpretación de los datos del problema, ya que interpretan la frase "…manteniendo la razón entre el largo y ancho", como que la nueva bandera debía de tener el mismo ancho o que para mantener esa razón el ancho no debía de variar.

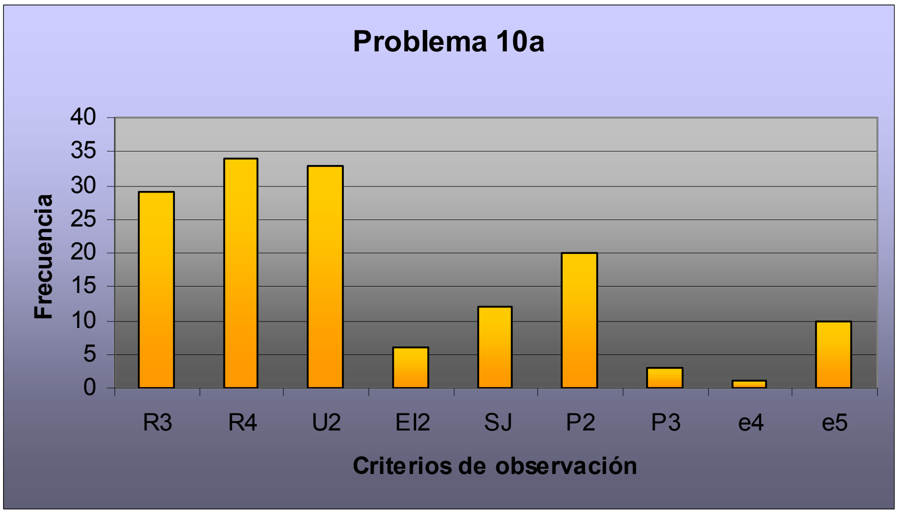


Gráfico 14

Resultados del problema 10b

La parte 10b de este problema estaba orientado a determinar el área de la segunda bandera, es del tipo "ampliador no lineal" dado que la relación entre las áreas no está modelada con una función lineal. Tal y como resaltamos en el apartado sobre los resultados de la aplicación de estrategias incorrectas, en este problema se destaca la presencia de la ilusión de la linealidad (EI_4). Como lo exponen otros investigadores (Van Dooren, De Bock y Verschaffel, 2006; Modestou y Gagatsis, 2007), las raíces de esta tendencia incluyen diferentes factores explicativos entre los cuales se encuentran los elementos relacionados con la linealidad/proporcionalidad como tal, su carácter intuitivo, su simplicidad y presencia en la vida diaria, elementos relacionados con las experiencias de los estudiantes en el sistema escolar formal e inclusive la teoría de que la ilusión de la linealidad constituye un obstáculo epistemológico y de ahí la persistencia de su presencia incluso en estudiantes con mayor edad tales como este grupo de maestros en formación.

Aquellos estudiantes que no incurrieron en la ilusión de la linealidad responden correctamente aplicando simplemente la fórmula del área del rectángulo (P_5). Es decir, ningún estudiante argumentó que la razón entre las áreas es igual al cuadrado de la razón de los lados, probablemente este hecho está relacionado con la baja dificultad del problema para este tipo de estudiantes, o con un poca capacidad del problema para discriminar entre aquellos alumnos que comprenden cuáles son las situaciones en las que los modelos lineales funcionan, de los que no las comprenden.

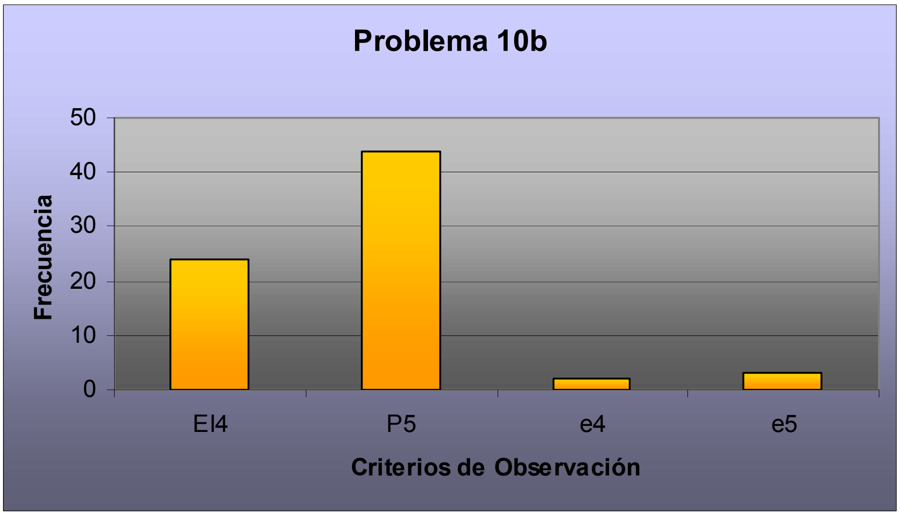


Gráfico 15

4.4 Categorización de las Actuaciones por Problema

En el gráfico 16 se concentran los resultados referentes a las frecuencias de las categorías correspondientes a las actuaciones mostradas por los participantes en cada uno de los problemas. Recordamos que las actuaciones se observaron con base en la tabla denominada *Categorización de las Actuaciones en Problemas de Proporcionalidad Simple Directa* la cual está constituida por cuatro categorías (ver pág. 31).

Observamos que en todos los problemas, excepto en el 9, la categoría 3 es la que presenta la mayor frecuencia, este hecho nos habla del predominio de un razonamiento pre-proporcional en las actuaciones de este grupo de maestros en formación. De manera global afirmamos que aunque los sujetos, en la resolución de las tareas, apliquen estrategias y procedimientos correctos, se da en falta el reconocimiento del operador escalar, de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación de orden entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón; prevaleciendo una serie de conocimientos procedimentales en lugar del reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción.

Destacamos que los problemas 4, 5, 6, 7, 9 y 10b presentan una frecuencia importante de actuaciones con categoría 2, estas actuaciones se caracterizan por la presencia de errores conceptuales, por ejemplo la aplicación de un pensamiento absoluto, así como de la aplicación de estrategias incorrectas al afrontar el problema, el caso más sobresaliente es el problema 9, en el cual algunas palabras incluidas en el enunciado podrían haber influenciado la aplicación de la estrategia aditiva. Este hecho es una evidencia que muestra cómo sujetos con características distintas a las de los niños o adolescentes participantes en otros estudios, continúan revelando los mismos errores conceptuales en torno a las relaciones de proporcionalidad simple directa.

En la mayor parte de los problemas, la frecuencia de actuaciones con categoría 4 fue muy baja, pocos estudiantes mostraron una comprensión de la relación de proporcionalidad directa entre las cantidades. El comportamiento atípico, en relación con los demás problemas, de las categorías de actuaciones en el problema 10a se explica por la presencia de un operador escalar entero y fácilmente reconocible (el número 2). Sin embargo, la diferencia entre actuaciones con categoría 3 y actuaciones con categoría 4 fue mínima.

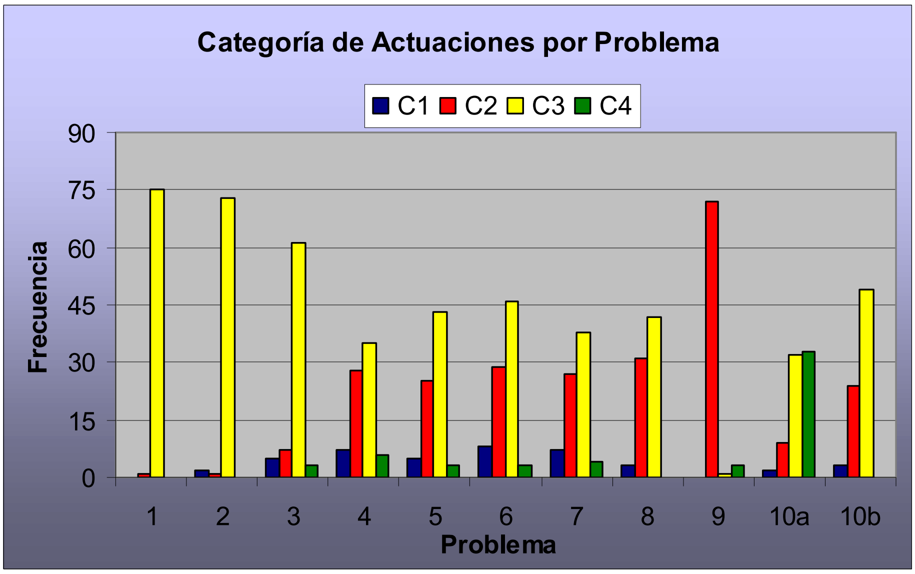


Gráfico 16

La moda correspondiente a las categorías de las actuaciones de cada sujeto por problema (ver anexo 4) nos dice cuál ha sido la categoría que más se repite para cada uno de los participantes, éste es un número que representa la actuación global del sujeto en todo el instrumento. Desde la perspectiva descrita anteriormente, la gráfica 17 muestra la frecuencia de cada categoría.

Del gráfico 17 se desprende que 58 de los sujetos obtuvieron una moda de 3 como actuación global en la prueba, lo cual nos dice que la mayoría de estos sujetos únicamente muestran actuaciones de tipo preproporcional y que a estas alturas de su formación universitaria, no llegan a identificar los elementos y características de una relación de proporcionalidad directa entre cantidades. Otra situación relevante que se confirma con este dato es el predominio de la aplicación de procedimientos matemáticos para hallar el valor de la razón, particularmente en situaciones en las cuales el factor multiplicativo es fácilmente reconocible.

Destacamos que 15 de los participantes, han obtenido la categoría 2 en sus actuaciones, esto nos dice que en la mayoría de los problemas estos alumnos mostraron errores conceptuales en torno a la proporcionalidad simple directa, solamente 1 sujeto obtiene una moda de 4 en sus resoluciones. Este hecho invita a la reflexión, pues estos alumnos universitarios llegarán a ser maestros activos, con el riesgo latente de transmitir esas mismas ideas erróneas en sus aulas.

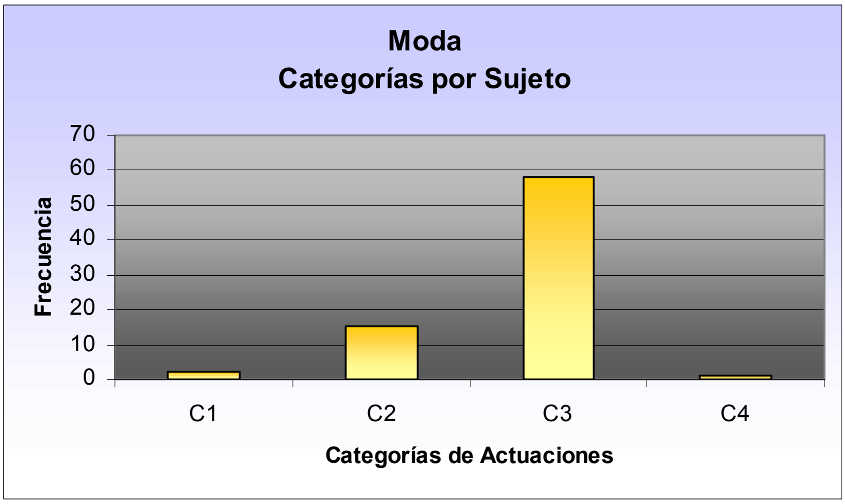


Gráfico 17

Para visualizar las actuaciones de los sujetos de otra forma, hemos calculado la puntuación total obtenida por cada uno de los participantes sumando los números de las categorías obtenidas en los problemas (anexo 4), además calculamos la puntuación relativa asumiendo que si un sujeto ha obtenido eficazmente un 4 en cada problema su puntuación total sería 44 y la relativa un 100.

A partir de las puntuaciones totales y relativas de cada uno de los sujetos, hemos observado que un 42,2% de los participantes (32 sujetos) han obtenido una puntuación relativa mayor o igual que 60 pero menor que 70, además 26 sujetos alcanzaron puntuaciones entre 70 y 80, los resultados del gráfico 18 confirman que la mayoría de las actuaciones no son sobresalientes o excelentes en este grupo de maestros en formación, y es otra manera de observar los datos relativos a la moda de categorías por sujeto.

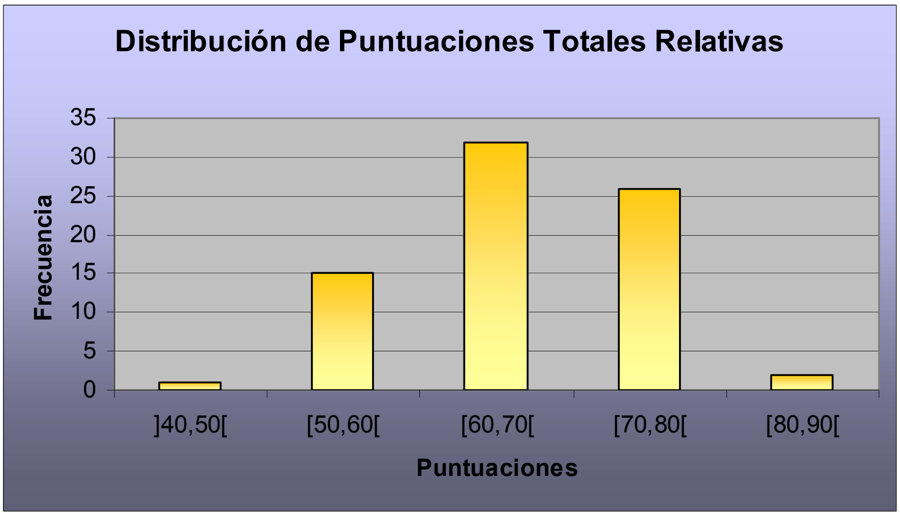


Gráfico 18

Sección 5. Conclusiones

En esta sección, se exponen las conclusiones de este trabajo, aunque en el anterior se presentaron algunos de los resultados, aquí hacemos una síntesis de todo aquello que consideramos más significativo de nuestro estudio. Hemos dividido esta sección en tres apartados, en el primero presentamos las conclusiones respecto a las hipótesis planteadas al inicio de la investigación, posteriormente describimos algunas limitaciones del trabajo y por último, con miras a realizar una tesis doctoral, indicaremos posibles vías para continuar el estudio.

5.1 Conclusiones respecto a las hipótesis planteadas

H1. Las estrategias que utilizan, en la resolución de problemas de proporcionalidad simple directa, los maestros en formación, participantes en nuestro estudio, están relacionadas con el tipo de cantidades[19] *que se incluyen en el problema.*

Después de la identificación de las estrategias que los estudiantes aplicaron para relacionar las cantidades de cada problema, observamos que una variable de los problemas que podría haber incidido en la decisión de relacionar las cantidades de una manera u otra, corresponde a la presencia de cantidades de un mismo espacio de medida o de cantidades que pertenecen a diferentes espacios de medida. Así en aquellos problemas donde las cantidades pertenecen a espacios de medida diferentes sobresale fuertemente el uso de la estrategia funcional (R_2) frente a la escalar (R_1), mientras que en los problemas en los que las cantidades están dadas en dos sistemas o expresadas en la misma unidad se usan las dos estrategias, "en" (R_3) y "entre" (R_4). Por lo expuesto anteriormente aceptamos esta hipótesis.

H2. El instrumento aplicado posee un nivel bajo de dificultad para los participantes de nuestro estudio

La media de la dificultad de cada uno de los problemas nos indica que la prueba, en general, resultó ser moderadamente fácil para este grupo de sujetos, lo cual nos permite aceptar la hipótesis planteada. Esta situación nos incita a modificar el instrumento, para continuar la investigación con sujetos de características similares. Hemos detectado que algunos de los problemas resultaron demasiado fáciles y por lo tanto no discriminan. En otro orden de cosas, aunque si bien los estudiantes responden correctamente, no podemos ignorar, tal y como lo afirmó Lamon (2007), que dar respuestas correctas, en algunos problemas, no garantiza que se esté aplicando razonamiento proporcional.

Considerando conjuntamente la dificultad del instrumento y el análisis cualitativo de los procesos de resolución aplicados por los sujetos se aprecia que las respuestas correctas, en muchos casos, están acompañadas de errores o de una ausencia de justificaciones, estos son aspectos que denotan ausencia del razonamiento proporcional.

[19] Cantidades de la misma o de distinta magnitud.

H3.Las estrategias utilizadas por los maestros en formación, participantes en nuestro estudio, coinciden con las reportadas en investigaciones previas.

Esta hipótesis la aceptamos ya que los sujetos mostraron una variación en la aplicación de la estrategia “en, estrategias de relación de cantidades y de uso de la unidad que aparecen reportadas en las investigaciones revisadas. Además de ello utilizaron otra estrategia para relacionar las cantidades del problema.

Hemos observado que en la estrategia “en”, reportada por Noelting (1980a, 1980b) es posible establecer dos tipos de relación: parte-parte y parte-todo. Tal distinción se identificó en aquellos problemas 4, 5, 6 y 7 en los cuales se presentaba un contexto de sistema[20]. Aunque Gerald Noelting, en sus estudios sobre problemas de mezclas, identifica y caracteriza la estrategia “en” no distingue entre la relación parte-parte y la relación parte-todo, consideramos que es importante señalar la frecuencia con que los alumnos usan una u otra, ya que en la mayoría de los ámbitos educativos de primaria y secundaria la relación parte-todo ha sido la base del aprendizaje de las fracciones es decir este ha sido el significado prevaleciente en la formación matemática escolar, y a partir de nuestro trabajo consideramos que éste significado ha permeado fuertemente la manera en que los alumnos establecen una razón, ya que por ejemplo aunque el enunciado del problema 4 sugiere una relación parte-parte la mayoría de los participantes establecen la razón parte-todo.

Además, hemos detectado una nueva estrategia que no habíamos encontrado en los trabajos que hemos manejado, en la cual los sujetos relacionan las cantidades bajo una suposición de equivalencia de razones. Tal estrategia consiste en relacionar dos de las cantidades y a partir de esa razón suponer, de manera simulada, que las otras cantidades se relacionan bajo la misma razón, luego proceder como en una regla de tres, y el resultado obtenido compararlo con las cantidades dadas originalmente. Esta estrategia constituye una manifestación de un alto razonamiento proporcional dado que el sujeto reconoce la relación multiplicativa entre las cantidades, muestra comprensión de la similitud estructural de la proporción ya que al aplicar esta estrategia implícitamente se reconoce la invarianza de las razones consideradas (internas o externas). Destacamos que en la literatura revisada no hemos encontrado referencias acerca de la aplicación de este tipo de estrategia por parte de los participantes de esos estudios.

H4. Los maestros en formación participantes en nuestro estudio manifiestan errores conceptuales relativos a la proporcionalidad simple directa similares a los reportados en otras investigaciones.

Aceptamos la hipótesis 4 porque a partir de los resultados referentes a las estrategias incorrectas y errores, observamos que estos maestros en formación manifiestan las mismas ideas primitivas y estrategias incorrectas que los estudiantes de primaria o secundaria, tal como es la aplicación de la estrategia incorrecta aditiva o de diferencia constante, esta estrategia es de las más documentadas en las investigaciones con niños y adolescentes, en este caso los sujetos relacionan los términos de una razón aditivamente, y con base en la diferencia entre los elementos correspondientes comparan las dos razones. Con esta situación constatamos que estudiantes con más edad aún no tienen claro el contraste entre las relaciones aditivas y las multiplicativas.

[20] Sistema como término que se utilizó, desde la tradición de las ciencias, para referirse a un conjunto de elementos que se relacionan (Karplus, Pulos y Stage, 1983; Noelting 1980a, 1980b) y que en nuestro estudio ha sido aplicado para distinguir los problemas.

Por otro lado, errores como los detectados en los problemas 1, 3 y 4 relacionados con la interpretación del dividendo, divisor y cociente en una división, nos invita a reflexionar acerca de las bases de conocimiento matemático que poseen estos maestros en formación así como en la manera en la que tal situación se puede subsanar con el objetivo de evitar que estos errores vayan a ser transmitidos durante su práctica profesional. Los errores mostrados por los sujetos en la interpretación gráfica de la razón, nos permiten establecer la necesidad de incluir en los procesos de formación de maestros otras representaciones para el concepto de razón que de alguna manera contribuyan al aprendizaje del mismo.

H5. Las actuaciones de los maestros en formación, sujetos participantes en nuestro trabajo no obtienen el más alto nivel de razonamiento proporcional considerado en nuestro estudio.

En relación con las categorías de las actuaciones de los maestros en formación en problemas de proporcionalidad simple directa observamos que la categoría 3 es la que presentó la mayor frecuencia, esta situación confirma el predominio de un razonamiento preproporcional en las actuaciones de este grupo de maestros en formación y nos permite aceptar la hipótesis 5.

Los resultados obtenidos en el análisis del conocimiento procedimental aplicado por los participantes de nuestro estudio, nos han mostrado que existe una fuerte influencia de procedimientos y algoritmos relacionados con otros significados de las fracciones ajenos al subconstructo de razón, en este sentido observamos una separación entre la representación simbólica y el significado de la fracción como razón. Es posible que estos sujetos hayan experimentado previamente las nociones de razón, proporción, proporcionalidad de forma algorítmica. Esta situación nos incita a reflexionar acerca de la importancia de desarrollar, en los procesos de formación de maestros, los diferentes subconstructos de los números racionales de una manera conectada, resaltando las situaciones o fenómenos que dan sentido a cada uno y proporcionando a los estudiantes de magisterio experiencias de aprendizaje que permitan establecer las diferencias entre los significados de las fracciones como representantes de un número racional.

De manera global concluimos que aunque los sujetos, en la resolución de las tareas, apliquen estrategias y procedimientos correctos, se hecha en falta el reconocimiento del operador escalar, de la relación funcional entre las cantidades y de argumentos que permitan establecer la relación de orden entre dos razones sin necesidad de hallar el valor de la razón; prevaleciendo una serie de conocimientos procedimentales en lugar del reconocimiento de las propiedades estructurales de una proporción.

En este sentido Freudenthal (1983) en su análisis fenomenológico de la razón y la proporción comenta su preocupación en relación con el razonamiento proporcional de los maestros en formación, compartimos la perspectiva de este autor que expone lo siguiente:

> "*Para los profesores en formación a los que he observado, "razón" es o bien una relación imprecisa que no ha sido hecha consciente, o un fenómeno completamente algoritmizado o automatizado —en el caso más favorable, expresado mediante matrices de proporción. Los objetos mentales "relativamente" y "razón" han sido bloqueados por asociaciones numéricas. Los que estudian para profesor tienen grandes dificultades para crear modelos mediante los cuales puedan abrir a sus alumnos la entrada a los objetos mentales: ni siquiera captan la pertinencia de tales modelos. Obviamente esto es una consecuencia de sus propios procesos de aprendizaje de la razón, que han sido dirigidos directamente hacia los algoritmos. Con esto no quiero decir que estos estudiantes no han pasado nunca por un período de intuiciones con respecto a "relativamente" y "razón". No hace falta suponer —*

y probablemente no sea así— que han experimentado estas nociones desde el comienzo de forma algorítmica (para automatizarlas más tarde). Es más probable —y esto es típico de muchos procesos de aprendizaje— que las fuentes originales de intuición hayan sido embozadas y el camino de vuelta a la intuición esté bloqueado por los procesos de algoritmización y automatización. La autonomía de los algoritmos y los automatismos es una propensión fuerte que es comprensible: demasiada intuición puede ser un estorbo bajo ciertas circunstancias. De todas maneras, tenemos que mirar críticamente las malas consecuencias de tales bloqueos. ¿Qué podemos hacer contra ellos?"

Otras Conclusiones

En relación con los resultados obtenidos por Allain (2000) en el grupo de 70 estudiantes de 6º a 8º, tenemos que existe similitud en los resultados de los problemas 1 y 9, ya que en este grupo, respecto a las respuestas correctas se obtuvo una frecuencia de 65 y 4 casos respectivamente, mientras que en nuestros participantes observamos una frecuencia de 69 y 6. En los problemas 2, 4 y los de mezclas (5,6 y 7) nuestros participantes mostraron en general un mayor número de respuestas correctas, sin embargo en el problema 8 referente a la comparación de razones dadas gráficamente las participantes de Allain mostraron mayor frecuencia de respuestas correctas un 60%, mientras que los maestros en formación sólo un 41% expresó una respuesta correcta.

Con base en los resultados de los problemas 2 y 10a, se constata el hecho de que los sujetos tienen menos dificultades en la resolución de problemas de valor perdido que en los de comparación de razones (Tourniaire y Pulos, 1985), ya que el proceso de resolución de los problemas de valor perdido, se basa en el conocimiento mecanizado de la regla de tres. Hemos detectado en estos maestros en formación (recordemos que al menos durante dos años no han trabajado institucionalmente situaciones de proporcionalidad directa) utilizan estrategias que dependen altamente del contexto del problema tal y como lo reportó Alatorre y Figueras (2005) con otro grupo de sujetos.

5.2 Limitaciones del estudio

En este apartado señalamos algunas de las limitaciones que tiene este estudio. Una cuestión importante que consideramos en las investigaciones en educación, en general, y en educación matemática, en particular, es que cuantos más medios se tengan para recolectar información, más rico será el análisis de la información y los resultados obtenidos adquirirán una mayor validez. Por ejemplo realizar una triangulación entre lo que los estudiantes ponen en el papel y lo que ellos piensan sobre eso. En nuestro caso la aplicación de un único instrumento y la ausencia, por ejemplo, de entrevistas, no nos permitió profundizar más allá en las resoluciones hechas por los participantes.

Consideramos que otro de los aspectos que se puede depurar se refiere a la muestra de sujetos, así una muestra más representativa puede mejorar la información con la que contamos.

En cuanto al instrumento aplicado para recolectar la información destacamos que algunos de los problemas no alcanzaron un nivel de dificultad adecuado para el grupo de sujetos, por lo que para una futura aplicación es necesario mejorarlos.

5.3 Posibles vías de investigación

En vista a la realización de una tesis doctoral, centrada en el estudio del razonamiento proporcional que manifiestan maestros en formación y la mejora del mismo a través de una intervención preparada específicamente para ello, consideramos que algunas de las posibles vías para continuar el estudio son:

- La construcción de un instrumento válido y fiable para medir el razonamiento proporcional de maestros en formación.
- Realizar experiencias con los maestros en formación orientadas al desarrollo del conocimiento matemático y didáctico de los subconstructos de los números racionales desde una perspectiva innovadora, por ejemplo con nuevas tecnologías.
- Llevar a cabo un estudio longitudinal con los mismos maestros en formación, en el ámbito del aprendizaje del conocimiento matemático y didáctico de los números racionales y del razonamiento proporcional.
- Continuar y ampliar las investigaciones realizadas acerca de las dificultades conceptuales que presentan maestros en formación asociadas a cada uno de los subconstructos de los números racionales.
- Indagar acerca de las competencias propias de los maestros de primaria en torno al razonamiento proporcional y trabajar en el aula sobre ellas.

Referencias Bibliográficas

Alatorre, S., Figueras, O. (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. *Proceedings of the 29th Conference of the Internacional Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, pp. 25-32. Melbourne: PME.

Allain, A. (2000). *Development of an instrument to measure proportional reasoning among fast-track middle school students*. Thesis for the degree of master of science. North Caroline State University. Versión digital recuperada el 26/02/2008 de http://www.lib.ncsu.edu/theses/available/etd-20010417-144134/unrestricted/etd.pdf

Ball, D. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, pp. 132-144.

Behr, M. J., Harel, G., Post, T. R., Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York: Macmillan.

Ben-Chaim, D., Fay, J. T., Fitzgerald, M. W., Benedetto, C., Miller, J. (1998). Proportional reasoning among 7th grade students with different curricular experience. *Educational Studies in Mathematics*, 36, pp. 247–273.

Ben-Chaim, D., Keret, J., Ilany, B. (2007). Designing and implementing authentic investigative proportional reasoning tasks: the impact on pre-service mathematics teachers' content and pedagogical knowledge and attitudes. *Journal of Mathematics Teacher Education*, Vol 10, pp. 333-340.

Bjorg, O. (2005). Girls journey towards proportional reasoning. *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 225-232. Melbourne: PME.

Cramer, K., Post, T. (1993). Proportional reasoning. *Mathematics Teacher*, 86 (5) ,404-407.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D. (1998). The predominance of the linear model in secondary school students' solutions of word problems involving length and area of similar plane figures. *Educational Studies in Mathematics, 35,* pp. 65–85.

De Bock, D., Verschaffel, L., Janssens, D. (2002). The effects of different problem presentations and formulations on the illusion of linearity in secondary school students. *Mathematical Thinking and Learning, 4,* pp. 65–89.

D.Loder (2007). What are ratio and proportion? Versión digital recuperada el 6/07/2008 de http://proportionalreasoning.blogspot.com/2007/03/what-are-ratio-and-proportion.html

Delgado, D., Olaya, L., Velásquez, M. (s.f.). *Razón y proporción: Un análisis desde los procesos de unitización y formación (problema de las pizzas)*. Versión digital recuperada el 20/02/2008 de http://www.pedagogica.edu.co/proyectos/geometria/docs/XVI/razon_proporcion.pdf

Durmus, S. (2005). Identifying pre-service elementary school teachers' conceptualization levels of rational numbers. *Kuram ve Uygulamada Egitim Bilimleri,* Vol 5 (2), pp. 659-666. Obtenido el 12 de abril de 2008 de la base de datos ProQuest Psychology Journals.

Felip, J., Castro, E. (2003). Una propuesta de análisis de problemas sobre fracciones. *Investigación en el Aula de Matemáticas*. Resolución de Problemas. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Fernández, A. (2001). *Precursores del razonamiento proporcional un estudio con alumnos de primaria.* Tesis Doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Valencia. España.

Fiol, M., Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Madrid: Editorial Síntesis.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Cap.6. Reidel, Dordrecht. Traducción de trabajo para uso interno. Luis Puig Espinosa. Universidad de Valencia.

Gagatsis, A., Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation, 6,* pp. 24–58.

Greer, B. (1997). Modeling reality in the mathematics classroom: The case of word problems. *Learning and Instruction, 7,* 293–307.

Graeber, A., Tirosh, D. (1988). Multiplication and division involving decimals: Preservice teachers' performance and beliefs. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, pp. 263-280.

Graeber, A., Tirosh, D., Glover, R. (1989). Preservice teachers misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20 (1), pp. 95-102.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and Procedural Knowledge in Mathematics: in Introductory Analysis. En J. Hiebert (Ed.). *Conceptual and ProceduralKnowledge: the case of Mathematics*. LEA.

Ilany, B., Ben-Chaim, D., Keret, Y. (2004). Implementation of a model using authentic investigative activities for teaching ratio and proportion in pre-service elementary education. *Proceedings of the 28th conference of the international group for the psychology of mathematics education*, vol. 3, pp. 81-88.

Inhelder, B., Piaget, J. (1958). *The growth of logical thinking from childhood to adolescence*. New York: Basic Books.

Karplus, R., Karplus, E., Wollman. (1974). Intellectual development beyond elementary school. IV: Ratio, the influence of cognitive style. *School Science and Mathematics*. vol 74, pp. 476-482.

Karplus, R., Pulos, S., Stage, E. (1983). Early adolescents proportional reasoning on "rate" problems. *Educational Studies in Mathematics*, 14, pp. 219-233.

Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: Connecting and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*, pp. 41-61.

Lamon, S. (2007). Rational numbers and proportional reasoning. Edited by Frank K, Lester Jr. National Council of Teachers of Mathematics. *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning*. (pp. 629-667). United States of América.

Llinares, S., Sánchez, M. (1997). *Fracciones*. Madrid: Síntesis.

Lo, J., Watanabe, T. (1997). Developing ratio and proportion schemes: A story of a fifth grader. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 28 (2), pp. 216- 237.

McLaughlin, S. (2003). *Effect of modeling instruction on development of proportional reasoning II: theoretical background*. Versión digital recuperada el 12/02/2008 de http://modeling.asu.edu/modeling/mclaughlins_propreas-ii_03.pdf

Modestou, M., Gagatsis, A. (2007). Students' improper proportional reasoning: A result of the epistemological obstacle of "linearity". *Educational Psychology,* Vol. 27, No. 1, pp. 75–92.

Moss, J., Case, R. (1999). Developing children's understanding of the rational numbers: A new model and an experimental curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*. Vol. 30 (2), pp. 122- 148.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation, standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The Council.

Noelting, G. (1980a). The development of proportional reasoning and the ratio concept: Part1. Differentiation of stages. *Educational Studies in Mathematics, 11*, pp. 217–253.

Noelting, G. (1980b). The development of proportional reasoning and the ratio concept. Part2. Problem-structure at successive stages. Problem-solving strategies and the mechanism of adaptive restructuring. *Educational Studies in Mathematics, 11*, pp. 331–363.

Norton, S. (2005). The construction of proportional reasoning. In Chick, H. L. y Vincent, J. L. (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 17-24. Melbourne: PME.

Outhred, L., Mitchelmore, M. (2000). Young children´s intuitive understanding of rectangular area measurement. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (2), pp. 144-167.

Padrón, J. (2002). *Acerca de las investigaciones llamadas "exploratorias"*. Versión digital recuperada el 11 de julio de 2008 de http://www.geocities.com/josepadron.geo/InvestExploratorias.htm

Pearn, C., Stephens, M. (2004). Why do you have to probe to discover what year 8 students really think about fractions. In I. Putt, R. Faragher y M. McLean. (Eds.). *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010. Proceedings of the 27th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Townsville, 27-30 June. (pp. 430-437).

Rapetti, M. (2003). Proporcionalidad. Razones internas y razones externas. *Revista Suma*, Vol. 44, pp. 65-70.

Rico, L., Castro, E., Fernández, A., Fortuny, J., Valenzuela, J., Valldaura, J. (1990). *Guía Didáctica Matemáticas 5º EGB*. Algaida: Salamanca.

Rico, L., Castro, E. (1994). Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico. Versión digital recuperada el 6/03/2008 de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RicoL94-148.PDF

Ruiz, E., Valdemoros, M. (2006). Vínculo entre el razonamiento proporcional cualitativo y cuantitativo: El caso de Paulina. *Revista Latinoamericana en Educación Matemática*. Vol. 9 (2), pp. 299-324.

Simon, M. (1993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education, 24,* pp. 233-254.

Socas, M., Sierra, M., Puig, L., Marín, A., Coriat, M., Castro, E., Castro, E., Rico, L. (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria.* Cap. V: Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. Horsori: Barcelona.

Tirosh, D., Graeber, A., Wilson, J. (1998). Prospective elementary teachers' conceptions of rational numbers. Versión digital recuperada el 26/03/2008 de http://jwilson.coe.uga.edu/Texts.Folder/Tirosh/Pros.El.Tchrs.html

Tirosh, D., Graeber, A. (1990a). Evoking cognitive conflict to explore preservice teachers thinking about division. *Journal for Research in Mathematics Education, Vol. 21*, pp. 98-108.

Tirosh, D., Graeber, A. (1990b). Inconsistencies in preservice elementary teachers' beliefs about multiplication and division. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 20,* pp. 95-102,

Tourniaire, F. (1986). Proportions in elementary school. *Educational Studies in Mathematics, 17,* 401-412.

Tourniaire, F., Pulos, S. (1985). Proportional reasoning: A review of the literature. *Educational Studies in Mathematics, 16,* pp. 181-204.

Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities for overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23 (1), pp. 57-86.

Van Dooren, W., De Bock, D., Verschaffel, L. (2006). La búsqueda de las raíces de la ilusión de linealidad. *Indivisa, Boletín de Estudios e Investigación*. Monografía IV, pp. 115-135.

Wheeler, M.M. (1983). Much ado about nothing: Preservice elementary school teachers' concept of zero. *Journal for Research in Mathematics Education, 14*, 147-155.

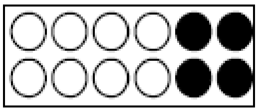
Anexo 1. El Instrumento

1. Dos amigas Rosa y Ana compraron caramelos. Rosa compró 3 caramelos por los que pagó 12 céntimos y Ana compró 5 caramelos por los que pagó 20 céntimos. Indica si alguna de las dos amigas compró los caramelos más baratos.

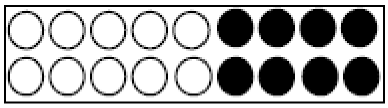
2. David prepara café. Ha usado exactamente 8 vasos de agua para hacer 14 tazas pequeñas de café. Quiere saber cuántas tazas pequeñas de café puede hacer con 12 vasos de agua. Encuentra la respuesta que David necesita.

3. En una reunión hay 7 chicas y 3 chicos. Han comprado 4 pizzas y deciden repartirlas del siguiente modo: 3 pizzas para las chicas y 1 pizza para los chicos. Determina quiénes reciben más pizza las chicas o los chicos.

4. Los dibujos en este problema representan dos cajas de manzanas. Una pequeña y otra grande. La caja pequeña contiene 8 manzanas verdes y 4 manzanas rojas. La caja grande contiene 10 manzanas verdes y 8 manzanas rojas (los círculos sombreados representan manzanas rojas y los no sombreados representan manzanas verdes). ¿Cuál de las dos cajas contiene más manzanas rojas respecto a las manzanas verdes?



Caja P



Caja G

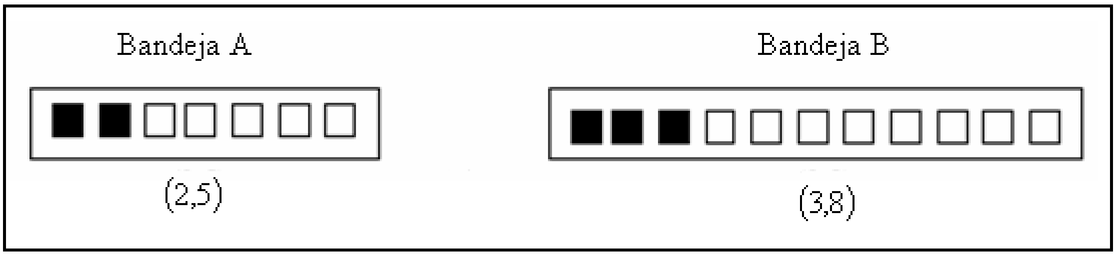
5. María prepara refresco de naranja para una reunión de amigas. Ha preparado seis bandejas con vasos iguales que contienen zumo de naranja o agua, para mezclarlos. En el dibujo los recuadros sombreados representan el zumo de naranja y los no sombrados el agua.

Quiere saber de antemano y comparando las bandejas de dos en dos, como están en el dibujo, cuál de los refrescos tendrá un sabor más fuerte a naranja o si los dos tendrán el mismo sabor.

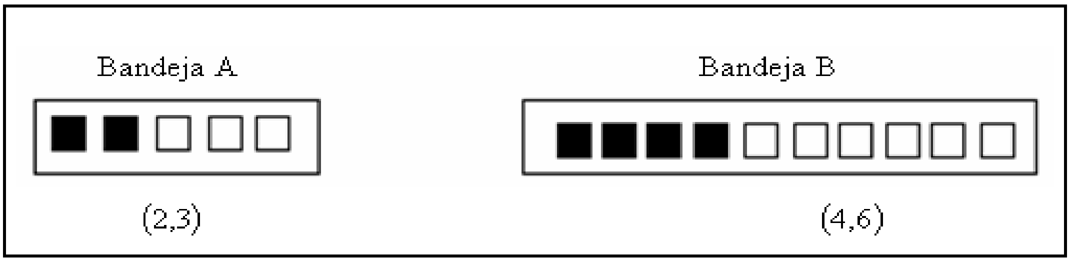
Cada mezcla aparece expresada como un par ordenado, por ejemplo en (1,3) el primer término corresponde al número de vasos de zumo de naranja y el segundo término corresponde al número de vasos de agua.

5.

6.

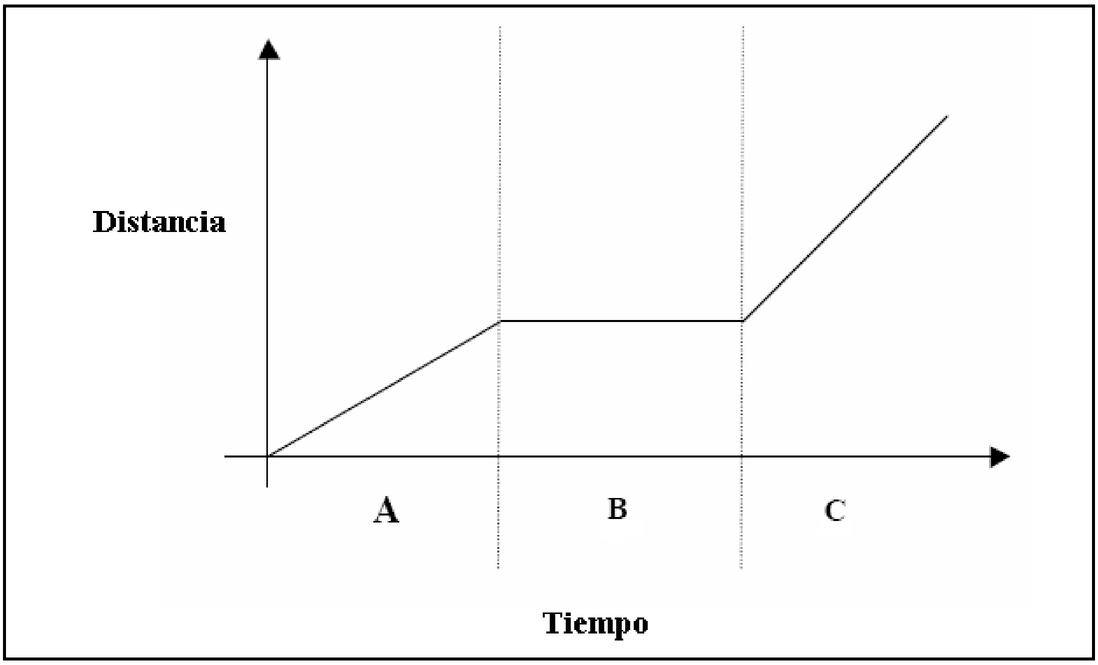


7.

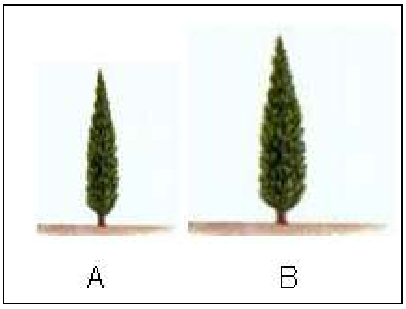


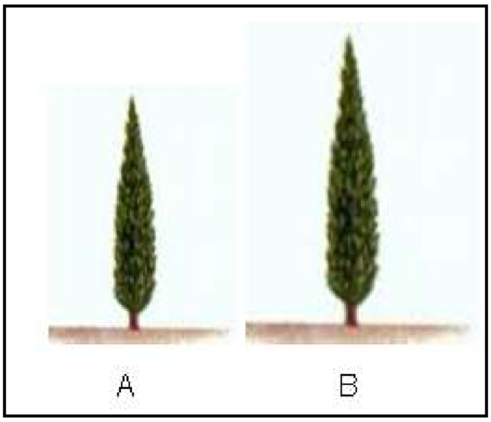
8. Teresa hizo un recorrido en bicicleta este fin de semana. Abajo aparece una gráfica que representa su viaje. En el eje vertical de la gráfica se ha tomado la distancia que Teresa recorrió desde su punto de partida y en el eje horizontal el tiempo que transcurrió desde que ella empezó su viaje. La gráfica está divida en tres intervalos: A, B, C.

Analizando la gráfica realiza un breve informe acerca de la rapidez que ha llevado Teresa en cada intervalo de tiempo señalado.



9. Hace cinco años se tomó la altura de dos árboles. El árbol A tenía 8 pies de altura y el árbol B tenía 10 pies de altura. Actualmente el árbol A mide 14 pies de alto y el árbol B mide 16 pies de alto. En los últimos cinco años ¿alguno de los dos árboles ha crecido más en relación con la medida inicial?





10. En un ayuntamiento han elaborado una bandera que mide 3 metros de largo y 2 metros de ancho, que han colocado en un edificio. Para la elaboración se requirió de 6 m^2 de tela. Ahora quieren hacer otra bandera que tenga 3 metros más de largo que la anterior, pero manteniendo la razón entre el largo y el ancho. ¿Cuántos metros cuadrados de tela se necesitarán? Coloca los datos que obtengas en la tabla.

	Largo	Ancho	Área
Bandera 1	3 metros	2 metros	6 m^2
Bandera 2	6 metros		

Anexo 2

	Problema 1 Compra de Caramelos					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					R2 U1 P3	
2					R2 U1 P3	
3					R2 U1 P2	
4					R2 U1 P3	
5					R2 U1 P3	
6					R2 U1 P3	
7					SJ	
8					R2 U1 P3	
9					R2 U1 P3	
10				X	U1	e1
11					R2 U1 P3	
12					R2 U1 P3	
13					R2 U1 P3	
14					R2 U1 P3	
15					R2 U1 P3	e1
16					R2 U1 P3	
17					R2 U1 P3	
18					R2 U1 P3	
19				X	R2 U1 P3	e5
20					R2 U1 P3	
21					R2 U1 P3	
22					R2 U1 P3	
23					R2 U1 P3	
24					R2 U1 P3	
25					R2 U1 P3	
26					R2 U1 P3	
27				X	R2 U1 P3	e5
28					R2 U1 P2	
29					R2 U1 P3	
30					R2 U1 P3	
31					R2 U1 P3	
32				X	R2 U1 P3	e4
33					R2 U1 P3	
34					R2 U1 P3	
35					R2 U1 P3	
36					R2 U1 P3	
37					R2 U1 P3	
38					R2 U1 P3	
39					R2 U1 P3	
40					R2 U1 P3	
41					R2 U1 P3	
42					R2 U1 P3	

	Problema 1 Compra de Caramelos					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
43					R2 U1 P2	
44					R2 U1 P3	
45					R2 U1 P2	
46					R2 U1 P3	
47		X			R2 U1 P3	
48					R2 U1 P3	
49					R2 U1 P4	
50					R2 U1 P3	
51					R2 U1 P2	
52					R2 U1 P3	
53					R2 U1 P3	
54					R2 U1 P3	
55					R2 U1 P3	
56					R2 U1 P3	
57					R2 U1 P2	
58					R2 U1 P3	
59					R2 U1 P3	
60					R2 U1 P3	
61					R2 U1 P3	
62					R2 U1 P3	
63				X	R2 U1 P3	e5
64					R2 U1 P3	
65					R2 U1 P3	
66					R2 U1 P3	
67					R2 U1 P3	
68					R2 U1 P3	
69					R2 U1 P3	
70					R2 U1 P3	
71					R2 U1 P3	
72					R2 U1 P3	
73					R2 U1 P3	
74					R2 U1 P2	
75					R2 U1 P3	
76				X	R2 U1 P3	e5

	Problema 2 Tazas de Café					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1		X			R2 P2	e4
2					R2 P2	
3					R2 P2	
4				X		
5					R2 P2	
6					R2 P2	
7					R2 P2	
8					R2 P2	
9					R2 P2	
10					R2 P2	
11					R2 P2	
12					R2 P2	
13					R2 P2	
14					R2 P2	
15				X	R2 P2	e4
16					R2 P2	
17					R2 P2	
18					R2 P2	
19					R2 P2	
20					R2 P2	
21	X					
22					R2 P2	
23					R2 P2	
24				X	R2 P2	e4
25					R2 P2	
26					R2 P2	
27					R2 P2	
28					R2 P2	
29					R2 P2	
30				X	R2 P2	e4
31					R2 P2	
32					R2 P2	
33					R2 P2	
34					R2 P2	
35					R2 P2	
36					R2 P2	
37					R2 P2	
38					R2 P2	
39					R2 P2	
40					R2 P2	
41					R2 P2	
42					R2 P2	
43	X					

	Problema 2 Tazas de Café					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
44					R2 P2	
45		X			R2 P2	
46				X	R2 P2	e4
47				X	R1 U2	e5
48					R2 P2	
49					R2 P2	
50					R2 P2	
51					R2 P2	
52					R2 P2	
53					R2 P2	
54					R2 P2	
55		X			R2 P2	e4
56					R2 P2	
57					R2 P2	
58					R2 P2	
59					R2 P2	
60				X	R2 P2	e4
61		X			R2 P2	
62				X	R2 P2	e4
63				X	R2 P2	e4
64					R2 P2	
65					R2 P2	
66					R2 U1 P2	
67				X	R2 P2	e4
68					R2 P2	
69					R2 P2	
70					R2 P2	
71					R2 P2	
72					R2 P2	
73					R2 P2	
74					R2 P2	
75					R2 P2	
76				X	R2 P2	e4

	Problema 3 Pizza					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					R2 U3	
2					R2 U1 P3	
3					R2 U1 P3	
4				X	R2 U3	e3
5					R2 U1 P3	
6					U1 P3	e5
7					R2 U1 P3	e1
8				X	R2 U1 P3	e1
9					R2 U1 P3	
10	X				-	
11					R2 U1 P3	
12					R2 U1 P3	e1
13					R2 U1 P3	
14					P4	e4
15					R2 U1 P3	
16					EI1	
17					R2 U1 P3	e1
18				X	R2 U1 P3	e1
19					R2 U3	
20					R2 U1 P3	
21					R2 U1 P3	e1
22					R2 U1 P3	e5
23					R2 U1 P3	
24		X			R2 U1 P3	e1
25					R2 U1 P3	
26					R2 U1 P3	
27					R2 U1 P3	e1
28	X				-	
29	X				-	
30					R2 U3	
31				X	R2 U1 P3	e1
32				X	SJ	
33					R2 U1 P3	
34					U1 P3	e5
35					R2 U1 P3	
36					R2 U1 P3	e5
37					R2 U1 P3	e5
38					R2 U1 P3	
39					R2 U1 P3	
40					R2 U1 P3	
41				X	R2 U3	e1
42					R2 P1	
43				X	R2 U1 P3	e1
44				X	EI3	

	Problema 3 Pizza					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45				X	R2 U1 P3	e1
46					R2 U3	
47					R2 U1 P3	
48				X	R2 U1 P3	e1
49					R2 U1 P4	
50					R2 U1 P3	
51				X	R2 U1 P3	e1
52					R2 N1 P2	
53				X	R2 U1 P3	e1
54					R2 N1 P2	
55					R2 U3	
56					SJ	
57					R2 U1 P3	e5
58					SJ	
59					SJ	
60					R2 U1 P3	
61					R2	
62					R2 U1 P3	e1
63					R2 N1 P2	
64					SJ	
65				X	R2 U1 P3	e1
66					R2 U1 P3	
67					R2 U1 P3	
68					R2 U1	e1
69				X	R2 U1	e1
70				X	R2 U1 P3	e1
71					R2 P1	
72				X	R2 U1 P3	e1
73					R2 U1 P3	
74				X	R2 N1 P2	e5
75					R2 P1	
76				X	SJ	

	Problema 4 Manzanas Verdes y Rojas					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					R3 U3	
2				X	R3∗ EI1	
3					R3∗ P1	
4				X	R4 EI2	e5
5				X	EI3 P1	
6				X	R3∗ EI2 P1	
7					R3∗	
8					R3 EI2	
9					R3 U1 P3	
10					SJ	
11					R3 EI2	e4
12					R3∗ P1	
13				X	EI1	e4
14				X	P4	e4
15					R3∗ N1 P2	
16					R3∗ P1	
17				X	R3 EI2	
18				X	R4 EI1 EI2	
19					EI2	
20					SJ	
21					SJ	
22				X	R3∗ U1 P2	e1
23					R3∗	
24				X	SJ	
25					R3 U1 P2	
26					R3∗ P1	
27				X	R3 EI2	
28	X				-	
29	X				-	
30					R3∗ P1	
31					R3 U1 P3	
32					N1 P2	
33					SJ	
34	X				-	
35					R3∗ N1 P2	
36				X	R3∗ EI2 P1	
37					R3∗ P1	
38					R3∗ N1 P2	
39					R3 U3	
40					R3∗ P1	
41				X	R3∗ P1	
42				X	R3∗ P1	
43				X	R3 SJ	
44				X	R3∗ EI2 P1	

	Problema 4 Manzanas Verdes y Rojas					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45				X	R3∗ P1	
46				X	R3 U3	e3
47	X				-	
48					R3∗ P1	
49					R3∗	
50				X	R3∗ U1 P1	e4
51				X	R3∗ P2	
52					R3 SJ	
53					R3 SJ	
54					R3∗ N1 P2	
55					R3∗	
56	X				-	
57				X	R3∗ P1	
58					R3 SJ	
59				X	R3 U1 P3	e1
60					R3∗ P1	
61					R3∗ P2	e4
62					R3 EI2	
63					R3 U1 P3	
64					R3 U3	
65				X	R3∗ P1	e4
66					R3∗ P2	
67					R3 SJ	
68					R3 EI2	
69	X				-	
70					R4 EI2	
71	X				-	
72				X	R3∗ P2	
73				X	R3∗ P1	
74					R3∗ N1 P2	
75				X	R3∗ P1	
76					SJ	

	Problema 5 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					SJ	
2					R4	
3					R4 P1	
4					R4	
5				X	SJ	
6					R4 P1	
7					R4	
8					R4	
9					R3 P3	
10					R4	
11					R3 P3	
12					R3 P3	
13					R3 P3	
14				X	R3 P3	e5
15					NI P2	
16					R4 P1	
17					SJ	
18					R3 P3	
19					SJ	
20					R3	
21					R4	
22					R3 P3	
23					SJ	
24					SJ	
25					R3 P3	
26					R4 P1	
27					R3 U3	
28	X				-	
29					SJ	
30					R4	
31					R4 P1	
32					SJ	
33					R3 P3	
34					SJ	
35					R4 P1	
36					R4 P1	
37					R4 P1	
38					N1 P2	
39					SJ	
40	X				-	
41					R4 P1	
42				X	R4 P1	
43					SJ	
44					R3∗ P1	

	Problema 5 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45	X				-	
46					R3∗ P1	
47					SJ	
48					R3∗ P1	
49					R4	
50					SJ	
51					R4	
52					R3∗	
53					SJ	
54					N1 P2	
55					R3 P3	
56					SJ	
57					R3 P3	
58					SJ	
59					R3 P3	
60					R3 P3	
61					SJ	
62					SJ	
63					SJ	
64					SJ	
65					SJ	
66	X				-	
67					R4 P1	
68					R4	
69					SJ	
70				X	SJ	
71	X				-	
72					R3∗ P1	
73					SJ	
74					SJ	
75					R4 P1	
76					R4	

	Problema 6 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					SJ	
2				X	R4	
3					R4 P1	
4					R4 EI2	
5				X	SJ	
6					R3∗ P1	
7				X	R3 U1 P3	
8				X	SJ	
9					R3 P3	
10				X	SJ	
11				X	R3 P3	e4
12					R3 P3	
13					R3 P3	
14				X	R3 P3	e5
15				X	N1 P2	e4
16				X	R3 U3	e3
17					SJ	
18					R3 P3	
19					SJ	
20					SJ	e5
21				X	SJ	
22					R3 P3	
23					SJ	
24				X	SJ	
25					R3 P3	
26					R3∗ P3	
27					R3 U3	
28	X				-	
29				X	SJ	
30					R3 U1	
31					R4 P1	
32					SJ	
33					R3 P3	
34	X				-	
35					R4 P1	
36					R4 P1	
37					R3∗ P1	
38					N1 P2	
39					SJ	
40	X				-	
41					R4 P1	
42					R4 P1	
43					SJ	
44					R3∗ P1	

	Problema 6 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45	X				-	
46				X	R3* P1	e4
47					SJ	
48				X	R3* P1	e4
49					R3 EI2	
50				X	SJ	
51					N1 P2	
52				X	R3*	
53					SJ	
54					N1 P2	
55		X			R3 P3	e4
56					SJ	
57					R3 P3	
58					SJ	
59					R3 P3	
60					R3 P3	
61					SJ	
62					SJ	
63					R3 U1 P2	
64					SJ	
65				X	SJ	
66	X				-	
67					R4 P1	
68	X				-	
69	X				-	
70				X	SJ	
71	X				-	
72					R3* P1	
73					SJ	
74					SJ	
75					R4 P1	
76				X	SJ	

	Problema 7 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1					R4 U3	
2				X	R3	
3					R4 P1	
4				X	R4 EI2	
5					SJ	
6					R4 P1	
7					SJ	
8					R4	
9					R3	
10				X	SJ	
11					R3 P3	
12					R3 P3	
13					R3 P3	
14				X	R3 P3	e5
15					N1 P2	
16					R3 P1	
17				X	SJ	
18					R3 P3	
19				X	SJ	
20				X	SJ	e5
21					SJ	
22					R4 P1	
23				X	SJ	
24				X	SJ	
25					R3 P3	
26					R3∗ P3	
27				X	R3 U3	e3
28	X				-	
29	X				-	
30					R3 U1	
31					R4 P1	
32					SJ	
33					R3 P3	
34					SJ	
35					R4 P1	
36					R4 P1	
37					R3∗ P1	
38					N1 P2	
39					SJ	
40	X				-	
41					R4 P1	
42					R4 P1	
43					SJ	
44					R3∗ P1	

	Problema 7 Refresco de Naranja					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45	X				-	
46					R3∗ P1	
47		X			SJ	
48					R3∗ P1	
49				X	R3 EI2	
50					SJ	
51					N1 P2	
52					R4 P1	
53					R4 P1	
54					N1 P2	
55		X			SJ	
56					SJ	
57					R3 P2	
58					SJ	
59					R3 P3	
60					R3 P3	
61					SJ	
62				X	SJ	
63					R4	
64					SJ	
65					SJ	
66	X				-	
67					R4 P1	
68	X				-	
69					SJ	
70					SJ	
71	X				-	
72					R3∗ P1	
73					SJ	
74					R4 P1	
75					R4 P1	
76				X	SJ	

	Problema 8 Recorrido en Bicicleta					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1				X	SJ	e5
2				X	SJ	e5
3					R2	
4				X	SJ	e5
5				X	SJ	
6					R2	
7					R2	
8				X	SJ	e5
9					R2	
10				X	SJ	e5
11					R2	
12					R2	
13					R2	
14				X	SJ	
15					R2	
16					R2	
17				X	SJ	e5
18				X	SJ	e5
19					SJ	
20				X	SJ	e5
21				X	SJ	e5
22					R2	
23				X	SJ	e5
24				X	SJ	
25					R2	
26					R2	
27				X	SJ	
28	X				-	
29					R2	
30					R2	
31					R2	
32				X	EI1	
33					SJ	
34					R2	
35				X	EI1	
36					R2	
37				X	EI1	
38					SJ	
39				X	SJ	e5
40				X	EI1	
41				X	EI1	
42				X	EI1	
43				X	SJ	e5
44					R2	

	Problema 8 Recorrido en Bicicleta					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45				X	SJ	e5
46	X				-	
47				X	EI1	
48					R2	
49					EI1	
50				X	EI1	
51				X	SJ	e5
52				X	SJ	
53					SJ	
54					SJ	
55				X	SJ	
56				X	EI1	
57				X	EI1	
58				X	EI1	e5
59				X	EI1	
60				X	EI1	
61				X	EI1	
62				X	EI1	
63					R2	
64					SJ	
65					R2	
66				X	R2	
67					R2	
68				X	EI1	
69				X	SJ	e5
70				X	SJ	e5
71				X	SJ	
72				X	EI1	
73					SJ	e5
74					R2	
75				X	SJ	e5
76	X				-	

	Problema 9 Altura de dos Árboles					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1				X	R4 EI2	
2				X	R4 EI2	
3				X	R4 EI2	
4				X	R4 EI2	
5				X	R4 EI2	
6				X	R4 EI2	
7				X	R4 EI2	
8				X	R4 EI2	
9					R4 U1 P3	
10				X	R4 EI2	
11				X	R4 EI2	
12				X	R4 EI2	
13				X	R4 EI2	
14				X	R4 EI2	
15				X	R4 EI2	
16				X	R4 EI2	
17				X	R4 EI2	
18				X	R4 EI2	
19				X	R4 EI2	
20				X	R4 EI2	
21				X	R4 EI2	
22				X	R4 EI2	
23				X	R4 EI2	
24				X	SJ	
25				X	R4 EI2	
26				X	R4 EI2	
27					EI3	
28				X	R4 EI2	
29				X	R4 EI2	
30				X	R4 EI2	
31				X	R4 EI2	
32				X	R4 EI2	
33				X	R4 EI2	
34				X	R4 EI2	
35				X	R4 EI2	
36				X	R4 EI2	
37				X	R4 EI2	
38					N1 P2	
39				X	R4 EI2	
40				X	R4 EI2	
41				X	R4 EI2	
42				X	R4 EI2	
43				X	R4 EI2	
44				X	R4 EI2	

	Problema 9 Altura de dos Árboles					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45				X	R4 EI2	
46				X	R4 EI2	
47				X	R4 EI2	
48				X	R4 EI2	
49				X	R4 EI2	
50				X	R4 EI2	
51				X	R4 EI2	
52				X	R4 EI2	
53				X	R4 EI2	
54					N1 P2	
55				X	R4 EI2	
56				X	R4 EI2	
57				X	R4 EI2	
58				X	R4 EI2	
59				X	R4 EI2	
60				X	R4 EI2	
61				X	R4 EI2	
62				X	R4 EI2	
63					N1 P2	
64				X	R4 EI2	
65				X	R4 EI2	
66				X	R4 EI2	
67				X	R4 EI2	
68				X	R4 EI2	
69				X	R4 EI2	
70				X	SJ	
71				X	R4 EI2	
72				X	R4 EI2	
73				X	R4 EI2	
74				X	R4 EI2	
75				X	R4 EI2	
76					SJ	

	Problema 10 a La Bandera					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1	X				-	
2				X	SJ	e5
3					SJ	
4				X	SJ	e5
5					R4 U2	
6					R4 U2	
7					R4 U2	
8					R4 U2	
9					R3 P3	
10					R4 U2	
11				X	R3 EI2	
12				X	R3 EI2	
13				X	R3 EI2	
14					R4 U2	
15					R3 P2	
16					R3 P2	
17				X	SJ	e5
18				X	SJ	e5
19					R4 U2	
20					R4 U2	
21				X	SJ	
22					R4 U2	
23					R4 U2	
24					R3 P3	
25					R3 P3	
26					R4 U2	
27				X	SJ	
28				X	SJ	e5
29					R4 U2	
30					R4 U2	
31					R3 P2	
32				X	SJ	e5
33					R4 U2	
34					R3 P2	
35					R4 U2	
36					R3 P2	
37					R3 P2	
38					R3 P2	
39					R4 U2	
40					R3 P2	
41				X	R3 P2	e5
42					R3 P2	
43					R4 U2	
44					R4 P2	

	Problema 10 a La Bandera					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45				X	R3 EI2	
46					R4 U2	
47					R4 U2	
48					R3 P2	
49					R3 P2	
50					R4 U2	
51				X	R3 EI2	
52					R3 P2	
53					R3 P2	
54					R3 P2	
55					R4 U2	
56					R4 U2	
57					R4 U2	
58				X	SJ	e5
59					R4 U2	
60					R4 U2	
61					R4 U2	
62					R4 U2	
63					R4 U2	
64					R4 U2	
65					R3 P2	
66	X				-	
67				X	R3 P2	e4
68					R4 U2	
69				X	R3 EI2	
70				X	SJ	e5
71					R4 U2	
72					R4 U2	
73					R3 P2	
74					R3 P2	
75					R4 U2	
76				X	SJ	e5

	Problema 10 b La Bandera					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
1	X				-	
2				X	P5	
3					P5	
4				X	-	e5
5				X	EI4	
6					P5	
7				X	EI4	
8					P5	
9					P5	
10				X	EI4	
11				X	P5	
12				X	P5	
13				X	P5	
14				X	-	e4
15				X	EI4	
16				X	EI4	
17				X	-	e5
18				X	EI4	
19				X	EI4	
20				X	EI4	
21				X	EI4	
22				X	EI4	
23				X	EI4	
24				X	EI4	
25					P5	
26					P5	
27				X	P5	
28				X	EI4	
29	X				-	
30					P5	
31				X	-	e4
32				X	EI4	
33				X	EI4	
34					P5	
35					P5	
36					P5	
37					P5	
38					P5	
39				X	EI4	
40					P5	
41				X	-	e5
42					P5	
43					P5	
44					P5	

	Problema 10 b La Bandera					
Sujeto	NR	SR	RC	RI	Estrategias aplicadas	Tipo de error
45					P5	
46					P5	
47					P5	
48					P5	
49					P5	
50					P5	
51				X	P5	
52					P5	
53					P5	
54					P5	
55					P5	
56					P5	
57					P5	
58				X	P5	
59					P5	
60					P5	
61					P5	
62				X	EI4	
63					P5	
64					P5	
65					P5	
66	X				-	
67				X	P5	
68				X	EI4	
69				X	EI4	
70				X	EI4	
71					P5	
72				X	EI4	
73				X	EI4	
74				X	EI4	
75					P5	
76				X	EI4	

Anexo 3

Problema 1

Sujeto	Categoría																Categoría de la Actuación
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	3
3																	3
4																	3
5																	3
6																	3
7																	2
8																	3
9																	3
10																	3
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	3
16																	3
17																	3
18																	3
19																	3
20																	3
21																	3
22																	3
23																	3
24																	3
25																	3
26																	3
27																	3
28																	3
29																	3
30																	3
31																	3
32																	3
33																	3
34																	3
35																	3
36																	3
37																	3
38																	3
39																	3
40																	3
41																	3

Sujeto	Categoría																Categoría de la Actuación
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
42																	3
43																	3
44																	3
45																	3
46																	3
47																	3
48																	3
49																	3
50																	3
51																	3
52																	3
53																	3
54																	3
55																	3
56																	3
57																	3
58																	3
59																	3
60																	3
61																	3
62																	3
63																	3
64																	3
65																	3
66																	3
67																	3
68																	3
69																	3
70																	3
71																	3
72																	3
73																	3
74																	3
75																	3
76																	3

Problema 2

Sujeto	**Categoría**																**Categoría del Sujeto**
	1			**2**			**3**					**4**					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	3
3																	3
4																	2
5																	3
6																	3
7																	3
8																	3
9																	3
10																	3
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	3
16																	3
17																	3
18																	3
19																	3
20																	3
21																	1
22																	3
23																	3
24																	3
25																	3
26																	3
27																	3
28																	3
29																	3
30																	3
31																	3
32																	3
33																	3
34																	3
35																	3
36																	3
37																	3
38																	3
39																	3
40																	3
41																	3
42																	3
43																	1
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	3
46																	3
47																	3
48																	3
49																	3
50																	3
51																	3
52																	3
53																	3
54																	3
55																	3
56																	3
57																	3
58																	3
59																	3
60																	3
61																	3
62																	3
63																	3
64																	3
65																	3
66																	3
67																	3
68																	3
69																	3
70																	3
71																	3
72																	3
73																	3
74																	3
75																	3
76																	3

Problema 3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	3
3																	3
4																	3
5																	3
6																	3
7																	3
8																	3
9																	3
10																	1
11																	3
12																	3
13																	3
14																	2
15																	3
16																	2
17																	3
18																	3
19																	3
20																	3
21																	3
22																	3
23																	3
24																	3
25																	3
26																	3
27																	3
28																	1
29																	1
30																	3
31																	3
32																	1
33																	3
34																	3
35																	3
36																	3
37																	3
38																	3
39																	3
40																	3
41																	3
42																	3
43																	3
44																	2

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	3
46																	3
47																	3
48																	3
49																	3
50																	3
51																	3
52																	4
53																	3
54																	4
55																	3
56																	1
57																	3
58																	2
59																	2
60																	3
61																	3
62																	3
63																	4
64																	2
65																	3
66																	3
67																	3
68																	3
69																	3
70																	3
71																	3
72																	3
73																	3
74																	3
75																	3
76																	2

Problema 4

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	2
3																	3
4																	2
5																	2
6																	2
7																	3
8																	2
9																	3
10																	2
11																	2
12																	3
13																	2
14																	2
15																	4
16																	3
17																	2
18																	2
19																	2
20																	2
21																	3
22																	3
23																	2
24																	2
25																	3
26																	3
27																	2
28																	1
29																	1
30																	3
31																	3
32																	4
33																	2
34																	1
35																	4
36																	2
37																	3
38																	4
39																	3
40																	3
41																	2
42																	2
43																	2
44																	2

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	3
46																	3
47																	1
48																	3
49																	3
50																	3
51																	3
52																	3
53																	3
54																	4
55																	3
56																	1
57																	2
58																	3
59																	3
60																	3
61																	3
62																	2
63																	3
64																	3
65																	3
66																	3
67																	2
68																	2
69																	1
70																	2
71																	1
72																	3
73																	3
74																	4
75																	3
76																	2

Problema 5

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	2
2																	3
3																	3
4																	3
5																	2
6																	3
7																	3
8																	3
9																	3
10																	3
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	4
16																	3
17																	2
18																	3
19																	2
20																	3
21																	3
22																	3
23																	2
24																	2
25																	3
26																	3
27																	3
28																	1
29																	2
30																	3
31																	3
32																	2
33																	3
34																	2
35																	3
36																	3
37																	3
38																	4
39																	2
40																	1
41																	3
42																	3
43																	2
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	1
46																	3
47																	2
48																	3
49																	3
50																	2
51																	3
52																	3
53																	2
54																	4
55																	3
56																	2
57																	3
58																	2
59																	3
60																	3
61																	2
62																	2
63																	2
64																	2
65																	2
66																	1
67																	3
68																	3
69																	2
70																	2
71																	1
72																	3
73																	2
74																	2
75																	3
76																	3

Problema 6

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	2
2																	3
3																	3
4																	2
5																	2
6																	3
7																	3
8																	2
9																	3
10																	2
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	3
16																	3
17																	2
18																	3
19																	2
20																	2
21																	2
22																	3
23																	2
24																	2
25																	3
26																	3
27																	3
28																	1
29																	2
30																	3
31																	3
32																	2
33																	3
34																	1
35																	3
36																	3
37																	3
38																	4
39																	2
40																	1
41																	3
42																	3
43																	2
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	1
46																	3
47																	2
48																	3
49																	2
50																	2
51																	4
52																	3
53																	2
54																	4
55																	3
56																	2
57																	3
58																	2
59																	3
60																	3
61																	2
62																	2
63																	3
64																	2
65																	2
66																	1
67																	3
68																	1
69																	1
70																	2
71																	1
72																	3
73																	2
74																	2
75																	3
76																	2

Problema 7

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	3
3																	3
4																	2
5																	2
6																	3
7																	2
8																	3
9																	3
10																	2
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	4
16																	3
17																	3
18																	3
19																	2
20																	2
21																	2
22																	3
23																	2
24																	2
25																	3
26																	3
27																	3
28																	1
29																	1
30																	3
31																	3
32																	2
33																	3
34																	2
35																	3
36																	3
37																	3
38																	4
39																	2
40																	1
41																	3
42																	3
43																	2
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	1
46																	3
47																	2
48																	3
49																	2
50																	2
51																	4
52																	3
53																	3
54																	4
55																	2
56																	2
57																	3
58																	2
59																	3
60																	3
61																	2
62																	2
63																	3
64																	2
65																	2
66																	1
67																	3
68																	1
69																	2
70																	2
71																	1
72																	3
73																	2
74																	3
75																	3
76																	2

Problema 8

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	3
2																	3
3																	3
4																	3
5																	2
6																	3
7																	3
8																	3
9																	3
10																	3
11																	3
12																	3
13																	3
14																	2
15																	3
16																	3
17																	3
18																	3
19																	2
20																	3
21																	3
22																	3
23																	3
24																	2
25																	3
26																	3
27																	2
28																	1
29																	3
30																	3
31																	3
32																	2
33																	2
34																	3
35																	2
36																	3
37																	2
38																	2
39																	3
40																	2
41																	2
42																	2
43																	3
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	3
46																	1
47																	2
48																	3
49																	2
50																	2
51																	3
52																	2
53																	2
54																	2
55																	2
56																	2
57																	2
58																	2
59																	2
60																	2
61																	2
62																	2
63																	3
64																	2
65																	3
66																	3
67																	3
68																	2
69																	3
70																	3
71																	2
72																	2
73																	3
74																	3
75																	3
76																	1

Problema 9

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			**2**			**3**					**4**					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	2
2																	2
3																	2
4																	2
5																	2
6																	2
7																	2
8																	2
9																	3
10																	2
11																	2
12																	2
13																	2
14																	2
15																	2
16																	2
17																	2
18																	2
19																	2
20																	2
21																	2
22																	2
23																	2
24																	2
25																	2
26																	2
27																	2
28																	2
29																	2
30																	2
31																	2
32																	2
33																	2
34																	2
35																	2
36																	2
37																	2
38																	4
39																	2
40																	2
41																	2
42																	2
43																	2
44																	2

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	2
46																	2
47																	2
48																	2
49																	2
50																	2
51																	2
52																	2
53																	2
54																	4
55																	2
56																	2
57																	2
58																	2
59																	2
60																	2
61																	2
62																	2
63																	4
64																	2
65																	2
66																	2
67																	2
68																	2
69																	2
70																	2
71																	2
72																	2
73																	2
74																	2
75																	2
76																	2

Problema 10

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			**2**			**3**					**4**					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	1
2																	3
3																	2
4																	3
5																	4
6																	4
7																	4
8																	4
9																	3
10																	4
11																	2
12																	2
13																	2
14																	4
15																	3
16																	3
17																	3
18																	3
19																	4
20																	4
21																	2
22																	4
23																	4
24																	3
25																	3
26																	4
27																	2
28																	3
29																	4
30																	4
31																	3
32																	3
33																	4
34																	3
35																	4
36																	3
37																	3
38																	3
39																	4
40																	3
41																	3
42																	3
43																	4
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	2
46																	4
47																	4
48																	3
49																	3
50																	4
51																	2
52																	3
53																	3
54																	3
55																	4
56																	4
57																	4
58																	3
59																	4
60																	4
61																	4
62																	4
63																	4
64																	4
65																	3
66																	1
67																	3
68																	4
69																	2
70																	3
71																	4
72																	4
73																	3
74																	3
75																	4
76																	3

Problema 10b

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
1																	1
2																	3
3																	3
4																	3
5																	2
6																	3
7																	2
8																	3
9																	3
10																	2
11																	3
12																	3
13																	3
14																	3
15																	2
16																	2
17																	3
18																	2
19																	2
20																	2
21																	2
22																	2
23																	2
24																	2
25																	3
26																	3
27																	3
28																	2
29																	1
30																	3
31																	3
32																	2
33																	2
34																	3
35																	3
36																	3
37																	3
38																	3
39																	2
40																	3
41																	3
42																	3
43																	3
44																	3

Sujeto	Categoría																Categoría del Sujeto
	1			2			3					4					
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	
45																	3
46																	3
47																	3
48																	3
49																	3
50																	3
51																	3
52																	3
53																	3
54																	3
55																	3
56																	3
57																	3
58																	3
59																	3
60																	3
61																	3
62																	2
63																	3
64																	3
65																	3
66																	1
67																	3
68																	2
69																	2
70																	2
71																	3
72																	2
73																	2
74																	2
75																	3
76																	2

Anexo 4

Sujetos ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10a	10b	Punt. Total	Punt.Relat.	Moda de Actuación de cada Sujeto
1	3	3	3	3	2	2	3	3	2	1	1	26	59	3
2	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	3	31	70	3
3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	31	70	3
4	3	2	3	2	3	2	2	3	2	3	3	28	64	3
5	3	3	3	2	2	2	2	2	2	4	2	27	61	2
6	3	3	3	2	3	3	3	3	2	4	3	32	73	3
7	2	3	3	3	3	3	2	3	2	4	2	30	68	3
8	3	3	3	2	3	2	3	3	2	4	3	31	70	3
9	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	33	75	3
10	3	3	1	2	3	2	2	3	2	4	2	27	61	2
11	3	3	3	2	3	3	3	3	2	2	3	30	68	3
12	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	31	70	3
13	3	3	3	2	3	3	3	3	2	2	3	30	68	3
14	3	3	2	2	3	3	3	2	2	4	3	30	68	3
15	3	3	3	4	4	3	4	3	2	3	2	34	77	3
16	3	3	2	3	3	3	3	3	2	3	2	30	68	3
17	3	3	3	2	2	2	3	3	2	3	3	29	66	3
18	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	2	30	68	3
19	3	3	3	2	2	2	2	2	2	4	2	27	61	2
20	3	3	3	2	3	2	2	3	2	4	2	29	66	3
21	3	1	3	3	3	2	2	3	2	2	2	26	59	3
22	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4	2	32	73	3
23	3	3	3	2	2	2	2	3	2	4	2	28	64	2
24	3	3	3	2	2	2	2	2	2	3	2	26	59	2
25	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	32	73	3
26	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4	3	33	75	3
27	3	3	3	2	3	3	3	2	2	2	3	29	66	3
28	3	3	1	1	1	1	1	1	2	3	2	19	43	1
29	3	3	1	1	2	2	1	3	2	4	1	23	52	1
30	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4	3	33	75	3
31	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	32	73	3
32	3	3	1	4	2	2	2	2	2	3	2	26	59	2
33	3	3	3	2	3	3	3	2	2	4	2	30	68	3
34	3	3	3	1	2	1	2	3	2	3	3	26	59	3
35	3	3	3	4	3	3	3	2	2	4	3	33	75	3
36	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	3	31	70	3
37	3	3	3	3	3	3	3	2	2	3	3	31	70	3
38	3	3	3	4	4	4	4	2	4	3	3	37	84	3
39	3	3	3	3	2	2	2	3	2	4	2	29	66	3
40	3	3	3	3	1	1	1	2	2	3	3	25	57	3
41	3	3	3	2	3	3	3	2	2	3	3	30	68	3
42	3	3	3	2	3	3	3	2	2	3	3	30	68	3
43	3	1	3	2	2	2	2	3	2	4	3	27	61	2
44	3	3	2	2	3	3	3	3	2	3	3	30	68	3
45	3	3	3	3	1	1	1	3	2	2	3	25	57	3
46	3	3	3	3	3	3	3	1	2	4	3	31	70	3
47	3	3	3	1	2	2	2	2	2	4	3	27	61	2

Sujetos ↓	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10a	10b	Punt. Total	Punt.Relat.	Moda de Actuación de cada Sujeto
48	3	3	3	3	3	3	3	3	2	3	3	32	73	3
49	3	3	3	3	3	2	2	2	2	3	3	29	66	3
50	3	3	3	3	2	2	2	2	2	4	3	29	66	3
51	3	3	3	3	3	4	4	3	2	2	3	33	75	3
52	3	3	4	3	3	3	3	2	2	3	3	32	73	3
53	3	3	3	3	2	2	3	2	2	3	3	29	66	3
54	3	3	4	4	4	4	4	2	4	3	3	38	86	4
55	3	3	3	3	3	3	2	2	2	4	3	31	70	3
56	3	3	1	1	2	2	2	2	2	4	3	25	57	2
57	3	3	3	2	3	3	3	2	2	4	3	31	70	3
58	3	3	2	3	2	2	2	2	2	3	3	27	61	2
59	3	3	2	3	3	3	3	2	2	4	3	31	70	3
60	3	3	3	3	3	3	3	2	2	4	3	32	73	3
61	3	3	3	3	2	2	2	2	2	4	3	29	66	3
62	3	3	3	2	2	2	2	2	2	4	2	27	61	2
63	3	3	4	3	2	3	3	3	4	4	3	35	80	3
64	3	3	2	3	2	2	2	2	2	4	3	28	64	2
65	3	3	3	3	2	2	2	3	2	3	3	29	66	3
66	3	3	3	3	1	1	1	3	2	1	1	22	50	3
67	3	3	3	2	3	3	3	3	2	3	3	31	70	3
68	3	3	3	2	3	1	1	2	2	4	2	26	59	3
69	3	3	3	1	2	1	2	3	2	2	2	24	55	2
70	3	3	3	2	2	2	2	3	2	3	2	27	61	2
71	3	3	3	1	1	1	1	2	2	4	3	24	55	3
72	3	3	3	3	3	3	3	2	2	4	2	31	70	3
73	3	3	3	3	2	2	2	3	2	3	2	28	64	3
74	3	3	3	4	2	2	3	3	2	3	2	30	68	3
75	3	3	3	3	3	3	3	3	2	4	3	33	75	3
76	3	3	2	2	3	2	2	1	2	3	2	25	57	2

Frecuencias de Puntuaciones Relativas				
]40,50[	[50,60[	[60,70[	[70,80[	[80,90[
1	15	32	26	2

Anexo 5

RESULTADOS GENERALES

Problema	NR	RC	RI	SR	R1	R2	R3	R3*	R4	U1	U2	U3	N1	SJ	EI1	EI2	EI3	EI4	P1	P2	P3	P4	P5	e1	e2	e3	e4	e5
1	0	69	6	1	0	74	0	0	0	75	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7	66	0	0	2	0	0	1	4
2	2	59	11	4	1	72	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	72	0	0	0	0	0	0	11	1
3	3	54	18	1	0	62	0	0	0	50	0	7	4	6	0	0	0	0	3	4	47	2	0	20	0	2	1	7
4	7	43	26	0	0	0	22	29	3	6	0	4	4	12	1	10	1	0	21	12	4	1	0	1	0	1	6	1
5a	5	67	4	0	0	0	15	5	23	0	0	0	3	25	0	0	0	0	16	3	13	0	0	0	0	0	1	2
5b	8	47	20	1	0	0	19	8	9	3	0	2	3	27	0	2	0	0	14	5	15	0	0	0	0	1	5	2
5c	7	54	13	2	0	0	16	6	17	1	0	2	4	26	0	2	0	0	19	4	12	0	0	0	0	1	0	2
8	3	31	42	0	0	24	0	0	0	0	0	0	0	31	18	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	19
9	0	6	70	0	0	0	0	0	69	1	0	0	3	3	0	62	1	0	0	3	1	0	0	0	0	0	0	0
10a	2	55	19	0	0	0	29	0	34	0	33	0	0	12	0	6	0	0	0	20	3	0	0	0	0	0	1	10
10b	3	36	37	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	24	0	0	0	0	44	0	0	0	2	3