Universidad de Granada

DESCUBRIENDO

EL TEOREMA DE PITÁGORAS

TRABAJO FIN DE MÁSTER REALIZADO POR MARÍA DOLORES TORRES GONZÁLEZ BAJO LA SUPERVISIÓN DE D. JOSÉ LUIS LUPIÁÑEZ GÓMEZ DENTRO DEL MÁSTER UNIVERSITARIO DE FORMACIÓN DE PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS, EN LA ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS.

Fdo. María Dolores Torres González

Fdo. José Luis Lupiáñez Gómez

UNIVERSIDAD DE GRANADA. 2015/2016

ÌNDICE

PRESENTACIÓN 1
1. INTRODUCCIÓN 1
2. JUSTIFICACIÓN 2
2.1 Justificación didáctica 2
2.2 Justificación desde el currículum 3
3. INSTRUCCIÓN 7
3.1 Objetivos de aprendizaje 7
3.2 Contenidos 8
3.3 Criterios de evaluación 9
3.4 Desarrollo metodológico de las sesiones 9
4. RECURSOS EMPLEADOS 24
4.1 Descubriendo 1 25
4.2 Descubriendo 2 28
4.3 Descubriendo 3 31
5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE LOS DATOS 35
6. BALANCE Y PERSPECTIVA DE LOS RESULTADOS. HIPÓTESIS........... 50
7. CONCLUSIONES 53
8. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 55
9. ANEXOS 56
9.1.ANEXO I. Recursos entregados a los alumnos 56
9.2 ANEXO II. Datos obtenidos tras la entrega de los recursos 63

PRESENTACIÓN

Este trabajo de fin de máster se ha centrado en el campo de la educación matemática en la enseñanza secundaria enfocando su atención hacia las matemáticas que se aprenden en la escuela y cómo es el aprendizaje de los alumnos en el tema de la Geometría, concretamente se centra en el Teorema de Pitágoras. Este trabajo también se interesa por el qué y en el cómo las matemáticas podrían enseñarse y aprenderse en la escuela.

Este trabajo de fin de máster se ha realizado bajo la supervisión de D. José Luis Lupiáñez Gómez. La motivación del trabajo se debe a la suma de las inquietudes profesionales de innovar del supervisor del trabajo y a mi iniciativa propia de querer aplicar la experiencia de las prácticas del máster, con un grupo de alumnos de 2º ESO, para enriquecer el contenido que dará lugar a la reflexión sobre las posibilidades de mejora de la enseñanza de esta parte de la Geometría.

1. INTRODUCCIÓN

Las matemáticas son útiles porque nos sirven para reconocer, interpretar y resolver los problemas que aparecen en la vida cotidiana. Se utilizan en la ciencia, en la tecnología, la comunicación, la economía y tantos otros campos. Además nos proporcionan un poderoso lenguaje con el que podemos comunicarnos con precisión. Miremos donde miremos, las matemáticas están ahí, las veamos o no.

El presente trabajo tiene como centro de interés el campo de la enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras en el nivel educativo de secundaria. Lo que se pretende es analizar los resultados tras aplicar unos recursos creados para hacer que los alumnos identifiquen, interpreten y formulen conjeturas en torno a un método basado en preguntas sobre el Teorema de Pitágoras. De esta manera podremos aplicar los resultados obtenidos a la mejora de la enseñanza en este ámbito concreto para solventar los errores y salvar las dificultades que surgen en los alumnos ante este tema. Además se pretende que con el método utilizado los estudiantes adquieran la motivación necesaria para que ellos mismos se sientan con la autonomía de sacar sus propias conclusiones y descubran lo que han de aprender.

Aunque posiblemente más lento, el proceso de descubrimiento propio de lo que se ha de aprender a partir de los conocimientos previos del estudiante será sin duda el más eficiente dando lugar al proceso de elaboración, a través de operaciones mentales, por el cual se aprende. Lo que mejor se aprende es lo que descubre uno mismo y lo que un niño descubre jamás se le olvida.

Creo importante para este trabajo no olvidar el significado de lo que es comprender y aprender. Ya que; aprender hechos no es aprender para la comprensión. Aquellos que investigan la comprensión de la física en los estudiantes plantean problemas cualitativos que exigen a los estudiantes pensar sobre física más que girar una manivela una y otra vez. Por ejemplo, cuando un objeto es arrojado desde un avión, ¿llegará al suelo delante del avión, directamente debajo de éste o detrás del avión, desestimando la fricción del aire? Sin números a la vista, las respuestas y explicaciones de los alumnos revelan no sólo si entienden los principios físicos implícitos sino que además marcan el punto de partida desde el que se puede empezar a trabajar para construir una enseñanza idónea que contribuya al aprendizaje de los alumnos (Stone ,1999.) En esto es en lo que se trabajará.

2. JUSTIFICACIÓN

En esta parte se desarrollan las razones que fundamentan la realización de este trabajo justificándolo desde el punto de vista de la didáctica y el currículo.

2.1 JUSTIFICACIÓN DESDE LA DIDÁCTICA

La Geometría es una disciplina que tiene gran relación y aplicación en el mundo que nos rodea. Su estudio permite desarrollar el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización (Guillén, González y García, 2009). Podemos afirmar sin equivocarnos que la característica más importante e inseparable de la geometría es su componente visual. Realmente, es inconcebible estar inmerso dentro del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría sin utilizar representaciones gráficas. Es más, cuando se expone verbalmente una situación o figura geométrica siempre intentamos "dibujarla" mentalmente. Así pues, Figueras y Deulofeu (2005) consideran que la visualización es un aspecto clave para las matemáticas, tanto en la resolución de problemas como en su efecto sobre el significado que se atribuye a la matemática.

Las representaciones ayudan a describir, clarificar o ampliar una idea matemática centrándose en sus características esenciales. Las representaciones cumplen cabalmente un doble papel: son instrumentos para pensar y para comunicar. Al usar varias representaciones de un mismo concepto los alumnos pueden encontrar diferentes razonamientos y compararlos actuando así como las herramientas de la demostración y la justificación de una idea (NCTM, 2003, p. 366).

Unas de las capacidades a desarrollar en los alumnos son precisamente las de interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos matemáticos y situaciones además de la capacidad de escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito determinados. Así lo refiere el proyecto PISA eligiendo como una de sus competencias la de representar (OECD, 2004, p. 40).

Por ello, los recursos creados para este estudio se basan en representaciones gráficas que el estudiante ha de visualizar antes de contestar a las preguntas planteadas. Son importantes en geometría los elementos visuales por su influencia en la compresión y aprendizaje de los conceptos geométricos. De forma que los alumnos hacen conjeturas en torno a las preguntas mediante su capacidad de ver, examinar y relacionar las figuras o imágenes de las distintas tareas siendo esta la base de la mayor parte del pensamiento geométrico. En la técnica usada en los recursos que se plantean, la visualización aparece en un primer plano, en el primer nivel de razonamiento en cuanto a pensamiento geométrico (Fernández, 2011).

En este dominio de las Matemáticas se resuelven problemas geométricos donde se pueden realizar numerosas comprobaciones del Teorema de Pitágoras dentro de su acepción geométrica no sólo con triángulos rectángulos, sino también con semicírculos, triángulos equiláteros y otros polígonos regulares. Es importante la comparación entre las diversas áreas y el uso del recíproco del teorema para asentar el aprendizaje.

Se pretende con los recursos creados en este trabajo que los alumnos logren relacionar los conceptos a través de la recontrucción de un método, con los que se pretende analizar las respuestas de los alumnos a diferentes preguntas relacionadas con el Teorma de Pitágoras. Estos recursos recogen la componente visual de la que se hablaba anteriormente presentándolos a través de imágenes con lo que los alumnos podrán formular y comprobar conjeturas mediante las preguntas de cada tarea. Con el análisis de las respuestas se obtendrá información, de la forma en que los alumnos identifican, entienden y relacionan los conceptos para poder aprovecharla en la mejora de sus aprendizajes.

Nadie puede decirle a otra persona cómo debe pensar... No obstante, es posible indicar y describir a grandes rasgos las distintas maneras en que los hombres piensan realmente. Algunas de ellas son mejores que otras... Quien comprenda cuáles son las mejores maneras de pensar y por qué, son mejores, puede, si lo desea, modificar su propia manera de pensar para que resulte más eficaz (Dewey, 1933, p. 21).

Los recursos que se plantean son guías para conseguir que los alumnos profundicen y poder obtener conclusiones sobre sus resultados. Se espera ver que se puede ayudar a formular conjeturas a los alumnos de forma efectiva mediante preguntas y sugerencias, de tal manera que, sin imponerle la solución al alumno, éste sea capaz de descubrirla por sí mismo a partir de las indicaciones dadas.

Puig (1997) refiere que en la Geometría elemental se puede avanzar mucho sin conceptos, los objetos mentales son suficientes para organizar gran cantidad de fenómenos. La comparación entre cualidades de objetos es el comienzo de la actividad de medición. En su libro primero Descartes escribe; "Todos los problemas de Geometría pueden reducirse fácilmente a términos tales, que no es necesario conocer de antemano más que la longitud de algunas líneas rectas para construirlos"(Descartes, AT.VI.369).

Con los recursos creados basados en una metodología concreta, se espera lograr en los alumnos una serie de objetivos. Los **objetivos** que se esperan lograr son que los alumnos:

O1. Identifiquen los elementos y relaciones ya conocidos previamente de clase. En este caso, en torno al Teorema de Pitágoras.
O2. Relacionen los diferentes conceptos que se ponen en juego para elaborar conjeturas.
O3. Formulen conjeturas en torno al Teorema de Pitágoras.
O4. Comprueben esas conjeturas.
O5. Representen lo que se les pide en la tarea.
O6. Interpreten los pasos de una secuencia que pertenece a la demostración del Teorema de Pitágoras.
O7. Identifiquen patrones y conceptos conocidos en la secuencia.
O8. Comprueben las conjeturas que se planteen inicialmente.
O9. Aprendan descubriendo.
O10. Interpreten las relaciones entre figuras que aparecen en la generalización de Teorema de Pitágoras.

2.2 JUSTIFICACIÓN DESDE EL CURRÍCULO

Lo que se ha realizado mediante este trabajo está justificado por el conjunto de objetivos, competencias, contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje evaluables regidos por la ley de Educación LOMCE a nivel Nacional y la ley de Educación LOE a nivel autonómico.

A nivel Nacional el Ministerio de Educación mediante la Orden ECD/65/2015, de 21 de enero, por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015), presenta:

Artículo 2. *Las competencias clave en el Sistema Educativo Español.*

A efectos de esta orden, las competencias clave del currículo son las siguientes:

a) Comunicación lingüística.
b) Competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología.
c) Competencia digital.
d) Aprender a aprender.
e) Competencias sociales y cívicas.
f) Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor.
g) Conciencia y expresiones culturales.
(Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015. p 6988).

Donde lo relevante y tratado en el presente trabajo viene destacado en color.

Se destacan de las competencias clave en el currículo.

Artículo 5. *Las competencias clave en el currículo.*

1. Las competencias clave deben estar integradas en las áreas o materias de las propuestas curriculares, y en ellas definirse, explicitarse y desarrollarse suficientemente los resultados de aprendizaje que los alumnos y alumnas deben conseguir.
4. La selección de los contenidos y las metodologías debe asegurar el desarrollo de las competencias clave a lo largo de la vida académica.
(p. 6989).

Artículo 6. *Estrategias metodológicas para trabajar por competencias en el aula.*

La selección y uso de materiales y recursos didácticos constituye un aspecto esencial de la metodología. El profesorado debe implicarse en la elaboración y diseño de diferentes tipos de materiales, adaptados a los distintos niveles y a los diferentes estilos y ritmos de aprendizaje de los alumnos y alumnas, Se debe potenciar el uso de una variedad de materiales y recursos (p. 6989).

Según el REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establecen el currículo básico en la Educación Obligatoria (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015), se tiene que con el estudio llevado a cabo en este trabajo se trabajará el objetivo referente siguiente.

Artículo 11. *Objetivos de la Educación Secundaria Obligatoria.*

La Educación Secundaria Obligatoria contribuirá a desarrollar en los alumnos y las alumnas las capacidades que les permitan:
g) Desarrollar el sentido crítico, la iniciativa personal y la capacidad para aprender a aprender, planificar y tomar decisiones.
(Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2015. p. 176).

A continuación, se describen los contenidos, criterios de evaluación y estándares de aprendizaje que se trabajaran en este trabajo.

Matemáticas. 1º y 2º ESO

Contenidos	***Criterios de evaluación***	***Estándares de aprendizaje evaluables***
	Bloque 3. Geometría	
Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales. Clasificación de triángulos. Propiedades y relaciones. Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples. Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones. Semejanza: figuras semejantes. Criterios de semejanza. Razón de semejanza y escala. Razón entre longitudes y áreas de cuerpos semejantes.	*1. Reconocer y describir figuras planas, sus elementos y propiedades características para clasificarlas, identificar situaciones,* *3. Reconocer el significado aritmético del Teorema de Pitágoras (cuadrados de números, ternas pitagóricas) y el significado geométrico (áreas de cuadrados construidos sobre los lados) y emplearlo para resolver problemas geométricos.* *4. Analizar e identificar figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.*	*1.2. Define los elementos característicos de los triángulos, trazando los mismos y conociendo la propiedad común a cada uno de ellos, y los clasifica atendiendo tanto a sus lados como a sus ángulos.* *3.1. Comprende los significados aritmético y geométrico del Teorema de Pitágoras y los utiliza para la búsqueda de ternas pitagóricas o la comprobación del teorema construyendo otros polígonos sobre los lados del triángulo rectángulo.* *3.2. Aplica el teorema de Pitágoras para calcular longitudes desconocidas en la resolución de triángulos y áreas de polígonos regulares, en contextos geométricos* *4.1. Reconoce figuras semejantes y calcula la razón de semejanza y la razón de superficies y volúmenes de figuras semejantes.* *5.1. Analiza e identifica las características de distintos cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico adecuado.*

(p. 412).

En Andalucía se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria por el Real Decreto 1631/2006, de 29 de diciembre. Esta parte es relevante ya que al realizarse el trabajo de un curso par tenemos que atender también a la LOE. En el ***REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre*** se establece en el Anexo II*:*

Objetivos
La enseñanza de las Matemáticas en esta etapa tendrá como finalidad el desarrollo de las siguientes capacidades:

1. Mejorar la capacidad de pensamiento reflexivo e incorporar al lenguaje y modos de argumentación las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto en los procesos matemáticos o científicos
2. Reconocer y plantear situaciones susceptibles de ser formuladas en términos matemáticos, elaborar y utilizar diferentes estrategias para abordarlas y analizar los resultados utilizando los recursos más apropiados.
4. Identificar los elementos matemáticos (geométricos, gráficos, cálculos, etc.) presentes, analizar críticamente las funciones que desempeñan estos elementos matemáticos y valorar su aportación para una mejor comprensión de los mensajes. Analizar las propiedades y relaciones geométricas implicadas y ser sensible a la belleza que generan al tiempo que estimulan la creatividad y la imaginación.
8. Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando distintos recursos e instrumentos y valorando la conveniencia de las estrategias utilizadas en función del análisis de los resultados y de su carácter exacto o aproximado.
9. Manifestar una actitud positiva ante la resolución de problemas y mostrar confianza en la propia capacidad para enfrentarse a ellos con éxito y adquirir un nivel de autoestima adecuado que le permita disfrutar de los aspectos creativos, manipulativos, estéticos y utilitarios de las matemáticas.
(Ministerio de Educación y Ciencia, 2007. p 752).

Competencias básicas
1. Competencia en comunicación lingüística.
2. Competencia matemática.
3. Competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico.
4. Tratamiento de la información y competencia digital.
5. Competencia social y ciudadana.
6. Competencia cultural y artística.
7. Competencia para aprender a aprender.
8. Autonomía e iniciativa personal
(p. 686).

Contenidos. *Bloque 4. Geometría*
Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Proporcionalidad de segmentos. Identificación de relaciones de semejanza.
Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes.
Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras. Poliedros y cuerpos de revolución. Desarrollos planos y elementos característicos. Clasificación atendiendo a distintos criterios. Utilización de propiedades, regularidades y relaciones para resolver problemas del mundo físico.
Volúmenes de cuerpos geométricos. Resolución de problemas que impliquen la estimación y el cálculo de longitudes, superficies y volúmenes.

Utilización de procedimientos tales como la composición, descomposición, intersección, truncamiento, dualidad, movimiento, deformación o desarrollo de poliedros para analizarlos u obtener otros (p.753).

Criterios de evaluación del bloque correspondiente
Estimar y calcular longitudes y áreas con una precisión acorde con la situación planteada y comprender los procesos de medida, expresando el resultado de la estimación o el cálculo en la unidad de medida más adecuada. Se trata de comprobar, además, si se han adquirido las capacidades necesarias para estimar el tamaño de los objetos. Más allá de la habilidad para memorizar fórmulas y aplicarlas, este criterio pretende valorar el grado de profundidad en la comprensión de los conceptos implicados en el proceso y la diversidad de métodos que se es capaz de poner en marcha (p. 753-754).

Donde lo relevante para el trabajo ha sido subrayado en color.

Del currículum se resalta el interés de la geometría en cuanto a los problemas aplicados a la medida de longitudes, áreas y volúmenes, las formas y figuras y sus propiedades. Ya que la geometría se centra sobre todo en la clasificación, descripción y análisis de relaciones y propiedades de las figuras en el plano y en el espacio, su aprendizaje debe ofrecer continuas oportunidades para conectar al alumnado con su entorno y para construir, dibujar, hacer modelos, medir o clasificar de acuerdo con criterios previamente elegidos. El estudio de la geometría permitirá mejorar la visión espacial del alumnado y desarrollar capacidades que faciliten una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas (Ministerio de Educación y Ciencia, 2015). Por todo ello se intenta mediante los recursos planteados en este trabajo crear una situación para la introducción o el estudio de conceptos matemáticos en torno al Teorema de Pitágoras donde los alumnos puedan desarrollar las competencias y alcanzar los objetivos que se han mencionado.

3. Instrucción

Antes de pasar a la experiencia llevada a cabo en este trabajo, se ha de especificar en qué punto estaban lo alumnos para comprender mejor los resultados obtenidos. Así en esta parte dedicada a la instrucción en el aula se especificará la intervención docente llevada a cabo indicando los objetivos y contenidos planteados, desarrollo metodológico de las sesiones y las tareas propuestas al alumnado. Además se presentan los criterios por los que se evaluarán los conocimientos adquiridos por los alumnos mediante las tareas y un examen final. Los objetivos, los contenidos y los criterios de evaluación que aparecen a continuación se consensuaron junto con el tutor de prácticas del instituto, siendo en su mayoría los establecidos por el departamento de Matemáticas en la programación didáctica.

El tema al que se le dedicó 10 sesiones de tiempo es al tema: <u>GEOMETRÍA PLANA. TEOREMA DE PITÁGORAS Y SEMEJANZAS.</u>

3.1. Objetivos de aprendizaje

O.1. Conocer y aplicar el teorema de Pitágoras tanto en su concepto geométrico como aritmético.
O.2. Obtener áreas calculando, previamente, algún segmento mediante el teorema de Pitágoras.

O.3. Conocer y comprender el concepto de semejanza.
O.4. Comprender el concepto de razón de semejanza y aplicarlo para la construcción de figuras semejantes y para el cálculo indirecto de longitudes.
O.5. Relacionar el concepto de razón de semejanza con la escalas.
O.6. Conocer y aplicar los criterios de semejanza de triángulos rectángulos.
O.7. Resolver problemas geométricos utilizando los conceptos y procedimientos propios de la semejanza.
O.8. Identifiquen los contextos reales en los que se puede aplicar lo aprendido.

3.2. CONTENIDOS DESARROLLADOS

TEOREMA DE PITÁGORAS

- Relación entre áreas de cuadrados. Demostración.
- Aplicaciones del teorema de Pitágoras:
  - Cálculo de un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos.
  - Cálculo de un segmento de una figura plana a partir de otros que, con él, formen un triángulo rectángulo.
  - Identificación de triángulos rectángulos a partir de las medidas de sus lados.

FIGURAS SEMEJANTES

- Razón de semejanza. Ampliaciones y reducciones.
- Relación entre las áreas y los volúmenes de dos figuras semejantes.
- Planos, mapas y maquetas. Escala. Aplicaciones.

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

- Triángulos semejantes. Condiciones generales.
- Teorema de Tales. Triángulos en posición de Tales.
- La semejanza entre triángulos rectángulos.

APLICACIONES DE LA SEMEJANZA

- Cálculo de la altura de un objeto vertical a partir de su sombra.
- Otros métodos para calcular la altura de un objeto.
- Construcción de una figura semejante a otra.

Por otro lado se atenderá a los procesos, métodos y aptitudes matemáticas de los alumnos:

Resolución de problemas:

- Uso del lenguaje apropiado, gráfico, numérico…
- Reflexión sobre los resultados
- Revisión de las operaciones utilizadas
- Asignación de unidades a los resultados
- Planteamiento de otras preguntas
- La recogida ordenada y organización de datos
- Difundir y compartir la información y las ideas matemáticas

3.3. CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Lo que se pretende evaluar con las tareas y un examen es si los alumnos:

C.1. Resuelven problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies utilizando propiedades y relaciones.

C.2. Resuelven problemas contextualizados referidos al cálculo de longitudes, de cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico y algebraico adecuado.

C.3. Identifican o reconocen figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes.

C.4. Utilizan la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

C.5. Analizan distintos cuerpos geométricos e identifican sus elementos característicos.

3.4. DESARROLLO METODOLÓGICO DE LAS SESIONES

Se presentan de forma global las distintas sesiones empleadas para el tema: GEOMETRÍA PLANA. TEOREMA DE PITÁGORAS Y SEMEJANZAS.

Sesión 1
1.1 Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras
1.2 Justificación de las tareas de la sesión 1
Sesión 2
2.1 Aplicaciones del Teorema
2.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 3
3.1 Realización de tareas
3.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 4
4.1 Semejanzas
4.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 5
5.1 Repaso de los ejercicios propuestos para casa
5.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 6
6.1 Proporcionalidad de Tales
6.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 7
7.1 Aplicaciones de la semejanza. Escalas.
7.2 Justificación de las tareas de la sesión
Sesión 8
8.1 Corregir ejercicios y repaso.
8.2 Justificación de las tareas de la sesión

Sesión 9
9.1 Examen
9.2 Justificación de las tareas de la sesión

Sesión 10
10.1 Corrección del examen

Sesión 1

1.1 Demostración geométrica del Teorema de Pitágoras

El tema anterior que se impartió en clase fue el de ecuaciones algebraicas, así que se considera el salto de un tema algebraico a otro geométrico haciendo una reseña especial. Brevemente se les explicó lo que es la Geometría y en qué consiste, se explicó que nos centraríamos en la geometría plana y además se les informó sobre Euclides como el padre de la Geometría, dejándoles propuesto que buscaran en internet el nombre del libro que escribió Euclides con la intención de que interpretaran la importancia de a lo que se le iban a dedicar unas 10 sesiones de tiempo. En esta primera sesión se utilizó como recurso cartulinas, tijeras y pegamento. El objetivo en esta sesión era que los estudiantes comprobaran el teorema de Pitágoras no sólo como una relación métrica sino también mediante la relación de áreas con los cuadrados sobre los lados en un triángulo rectángulo.

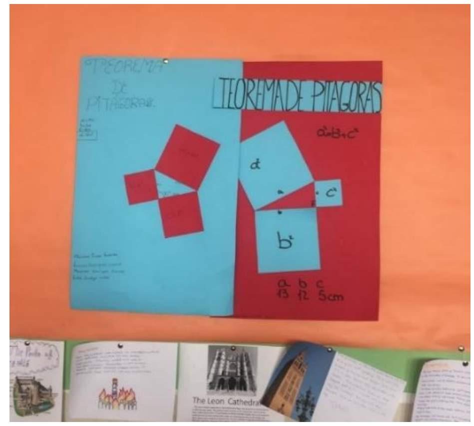
1. Se comenzó preguntándoles si se acordaban de la clasificación de los triángulos según sus lados y sus ángulos. Mientras los decían se iban dibujando en la pizarra. Cuando se terminó de dibujarlos todos, se borraron, salvo el triángulo rectángulo.

2. Entonces se les preguntó lo que sabían sobre ese triángulo. Se aprovecharon las respuestas correctas para ir añadiendo lo que decían al triángulo dibujado en la pizarra. Una vez completado se enunció:

   > *Hace muchos años, un filósofo y matemático griego, Pitágoras, descubrió un hecho muy importante. "En un triángulo rectángulo la suma de los catetos al cuadrado es igual a la hipotenusa al cuadrado."* $a^2 = b^2 + c^2$

3. Se demostrará, ahora, geométricamente mediante las áreas de tres cuadrados. Se recordó el concepto de área y el área de un cuadrado y se les explicó un concepto nuevo para ellos, el concepto de *terna pitagórica*. A continuación, se dividió la clase en dos, cada mitad se encargaba de demostrar el Teorema para una terna de números diferentes: (13, 5, 12), (10, 6, 8), lo primero que se hizo fue comprobar que efectivamente cumplían esas ternas el teorema de Pitágoras.

4. Para la demostración geométrica se hizo uso de las cartulinas de colores, las tijeras, la regla y el pegamento. Así que se pusieron a medir, a recortar y a pegar. Se les advirtió de que fuesen cuidadosos, porque se elegiría el mejor trabajo para pegarlo en el tablón de clase donde se cuelgan las actividades que realizan. Debían de escribir en la cartulina: la terna de números empleada, la medida de los lados del triángulo que quedaba al pegar los cuadrados, y el área de éstos.



5. Así que tras terminar la actividad se les preguntó a los alumnos cuanto sumaban las áreas de los cuadrados sobre los catetos, de esta forma ellos mismos vieron que era igual al área de la hipotenusa.

1.2 Justificación de la tarea de la sesión 1

Lo interesante de esta primera tarea es el acercamiento de los alumnos a una parte del teorema nueva para ellos en la que han tenido que relacionar conceptos previos como el concepto de área o de triángulo rectángulo para obtener la demostración geométrica del teorema. Además han debido identificar los números dados como ternas pitagóricas demostrando que efectivamente cumplen la relación del teorema. El hecho de que los alumnos tuvieran que recortar los cuadrados de las distintas medidas y pegarlos hace que estuvieran más atentos y motivados. De esta forma eran protagonistas del aprendizaje.

Tarea	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1, O2	C1, C5

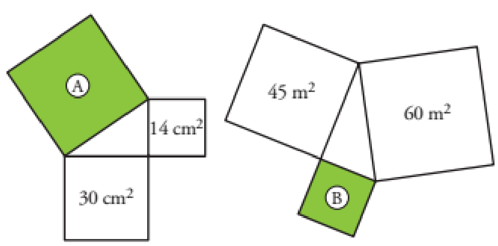
Sesión 2

2.1 Aplicaciones del Teorema

Lo primero que se hizo en esta sesión es pedirles que sacaran la agenda y anotasen para casa que el próximo día trajesen 4 tareas en una hoja aparte de la libreta relacionadas con lo visto en la primera sesión. El objetivo era poder corregirles lo que hacían y tener una primera visión del nivel de los alumnos.

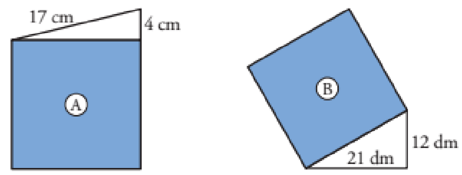
2.1.1 Tareas propuestas para casa

Tarea1[1]. Calcula el área del cuadrado verde en cada uno de los siguientes cuadrados (Cólera y Gaztelu, 2015).

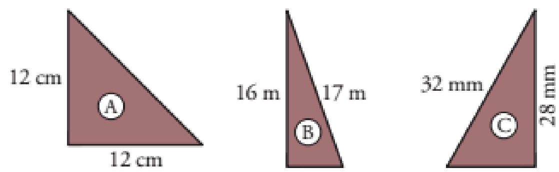


[1]Las tareas de las sesiones que no aparecen citadas son propuestas o adaptadas por mí.

Tarea 2. ¿Cuál es el área de los siguientes cuadrados? (p. 187).



Tarea 3. Calcula el lado desconocido en cada triángulo aproximando hasta las décimas (p. 187).



Tarea 4. Indicar que medidas corresponden a un triángulo rectángulo:

a) (3, 4, 5)
b) (7, 10, 15)
c) (4, 2, 3)

A continuación se empezaron a hacer ejercicios de aplicación contextualizados del Teorema de Pitágoras. Se planificaron las tareas de forma que fueran desde las más sencillas a las más difíciles. Se ha de comentar que todas las tareas propuestas en el aula fueron resueltas por los alumnos una vez que había pasado un tiempo para que las pensaran.

2.1.2 Tareas propuestas en clase

Aprovechando la iniciativa del centro sobre corregir las faltas de ortografía de los chicos, en la que todos los docentes ponen su grano de arena para conseguir una buena ortografía, les dicté los problemas enfatizando las palabras que pudieran generarles alguna dificultad.

Tarea 1. Se cae un poste de 14.5m de alto sobre un edificio que se encuentra a 10m de él. ¿Cuál es la altura a la que golpea el poste al edificio? (Cólera y Gaztelu, 2015).

Tarea 2. Un bambú de 16 m de altura se quiebra por el viento de tal forma que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de 6m de la base. ¿A qué altura a partir del suelo se ha producido la rotura?

Tarea 3. En el centro de un estanque crece un junco. Si se inclina la flor hacia un lado llega exactamente hasta el borde del estanque. ¿Cuál es la profundidad del estanque?

2.2 Justificación de las tareas elegidas en la sesión 2

Las tareas para casa tienen como fin que los alumnos se ejerciten con los nuevos conocimientos adquiridos en la anterior sesión. Con estas tareas para casa el alumno podrá comparar distintas formas de obtener lo pedido mediante el teorema siendo importante este proceso para el aprendizaje.

La finalidad de que los alumnos realicen las tareas propuestas en el aula es que se ejerciten en la puesta en práctica de la relación métrica del teorema en un contexto real. Los contenidos que se dan en la escuela son útiles porque se necesitan fueran de ella y la única forma de que los alumnos lo crean es mediante tareas que se perciban en un contexto real para los alumnos.

Los objetivos que se pretenden conseguir con las distintas tareas así como los criterios de evaluación utilizados se recogen en la siguiente tabla.

Tareas para casa	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1, O2	C1, C5
Tarea 2	O1, O2	C1, C5
Tarea 3	O1	C1, C5
Tarea 4	O1	C1, C5

Tareas en el aula	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1, O8	C1, C2, C5
Tarea 2	O1, O8	C1, C2, C5
Tarea 3	O1, O8	C1, C2, C5

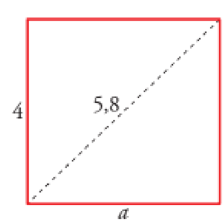
Sesión 3

3.1 Realización de tareas

Se recogieron los ejercicios propuestos el día anterior, y se les propuso a los alumnos otras tareas para casa con el objetivo de que las entregasen y en este caso se pudiera analizar cómo van avanzando y si se va cumpliendo con la función de profesora que tengo asignada en estos días.

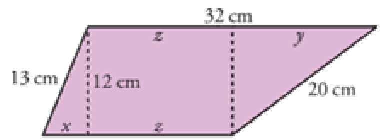
3.1.1 Tareas propuestas para casa

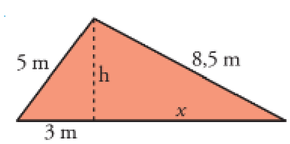
Tarea 7. Calcula el perímetro de un rectángulo cuya diagonal mide 5.8 cm y uno de los lados 4 cm (Cólera y Gaztelu, 2015).



Tarea 8. Halla la diagonal de un cuadrado cuyo perímetro mide 28 dam (p. 182).

Tarea 14 y 18. Halla el área y el perímetro de cada figura. Para ello, tendrás que calcular la medida de algún elemento (lado, diagonal, apotema, ángulo,...). Si no es exacta, hállala con una cifra decimal (p. 188).



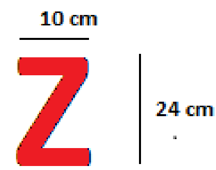


Seguimos con ejercicios de aplicación del teorema de Pitágoras.

3.1.2 Tareas propuestas en el aula

Tarea1. Una bandera se encuentra colocada en un asta sobre una columna de 8 m de altura. Desde la parte superior del asta, se extiende un cable de 18 m hasta un punto situado en el suelo de 15 m de la base de la columna. Calcular la longitud del asta.

Tarea2. El Jueves es el cumpleaños de mi amiga Zoraida y queremos poner su nombre con cintas de colores en la pare para recibirla. Nos falta por hacer la letra Z. ¿Cuánta cinta de color necesito para formar la letra Z si las medidas conocidas son las representadas en el dibujo?

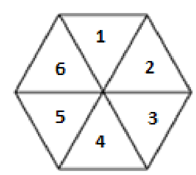


Estas tareas han servido de repaso de la clase anterior.

Lo siguiente será ver la aplicación del teorema para el cálculo de áreas de figuras planas. Se hizo mediante ejemplos de figuras planas, donde los mismos alumnos encontraban las soluciones.
No se focalizó la atención sobre la memorización de las expresiones útiles para el cálculo de áreas sino que se trabajó en que los estudiantes las obtuviesen de una de una forma que nunca se les olvidara, es decir mediante el área de las figuras elementales conocidas.

1. Se empezó con un triángulo equilátero. La primera pregunta obligada fue ¿Qué es un triángulo equilátero? ¿Cuál es su área? ¿Cuál será la altura del triángulo? Se les preguntó por el perímetro de ese triángulo. ¿Qué es el perímetro de una figura?

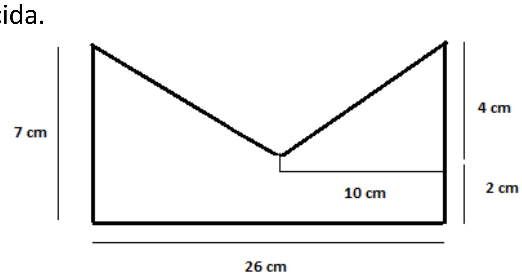
2. Se va a obtener el área de un hexágono regular. Se intenta que identifiquen la característica de este polígono regular. Se puede dividir el hexágono regular en triángulos equiláteros, luego sabiendo la característica de un triángulo equilátero que tiene sus lados iguales, ¿Qué podemos decir del radio y del lado de un hexágono regular?



Se explicó lo que era la apotema y se les guió para que se diesen cuenta de que en este caso la apotema era la altura de los tiángulos rectángulos.

3. Entones entendieron que se podía calcular el área del hexágono como la suma de las áreas de los seis triángulos equiláteros.

4. Con la idea de que interiorizaran el concepto de suma de áreas para dar la pedida se realizó otra tarea con una figura desconocida.



Los chicos dieron varias formas de dividir la figura en otras elementales y conocidas.

3.2 Justificación de las tareas elegidas en la sesión 3

Las tareas que se proponen en esta sesión vuelven a ser tareas pensadas en un contexto real para que los alumnos comprueben la utilidad de las matemáticas en este dominio. Para el cálculo de áreas de figuras planas se partió desde el triángulo equilátero, la idea es que con las posteriores tareas los alumnos fueran capaces de desarrollarlas con sólo conocer el área de este triángulo. Consiguiendo así que los alumnos identificaran las distintas áreas de figuras elementales y relacionaran sus conocimientos previos para realizar las tareas sin necesidad de memorizar ninguna expresión.

Las expresiones son útiles, desde luego, agilizan mucho trabajo, pero nuestros estudiantes no lo saben. Démosles la oportunidad de que lo averigüen.

De nuevo se exponen los objetivos y los criterios de evaluación en los que se basan las tareas.

Tareas en el aula	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1, O8	C1, C2, C5
Tarea 2	O1, O8	C1, C2, C5

Tareas para casa	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 7	O1, O2	C1, C5
Tarea 8	O1, O2	C1, C5
Tarea 14	O1, O2	C1, C5
Tarea 18	O1, O2	C1, C5

Sesión 4

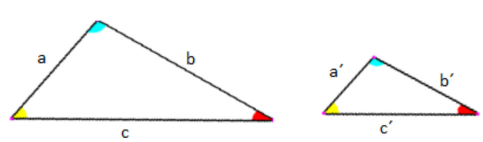
4.1. Semejanzas

Se comienza esta parte de la unidad dibujándoles dos triángulos en la pizarra con la misma forma pero distinto tamaño, le pongo las medidas de los lados uno es el doble del otro. Les pregunto, ¿Qué me podéis decir de estos triángulos? Los chicos contestan bien, no es algo que les cueste trabajo es muy intuitivo para ellos. Se les dijo que son semejantes porque tienen sus ángulos iguales (misma forma) y que sus lados son proporcionales (difieren en su tamaño).

Ahora intento que identifiquen la relación de proporcionalidad. ¿Puedo obtener un triángulo partiendo del otro? ¿Cómo? Los chicos de forma rápida me dicen que multiplicando por 2.

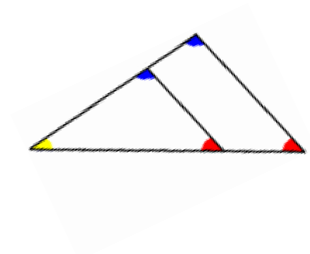
¿Qué múltiplo por dos? Me explican que los lados tienen que multiplicarse por dos, todos los lados para obtener el triángulo grande. (Yo voy dibujando en la pizarra el triángulo doble al inicial).

De esta forma ellos mismos dedujeron que:

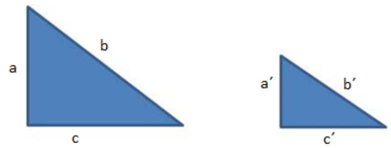


$$\frac{a}{a´} = \frac{b}{b´} = \frac{c}{c´}$$

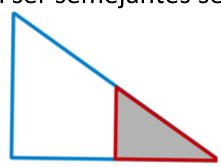
Se hizo hincapié en la razón de semejanza ya que luego será importante para estudiar la parte de la unidad correspondiente a escalas, que es un tema interesante para ellos dado su uso más habitual en la vida cotidiana.



Además se les indicó que a veces podemos encontrarnos un triángulo dentro de otro, haciendo coincidir uno de sus ángulos y quedando los lados opuestos paralelos obtenemos la posición de Tales. Cuando tenemos triángulos semejantes se pueden poner en posición de Tales.
Después particularizamos para el caso de triángulos rectángulos. De nuevo les pregunto. ¿Por qué son estos dos triángulos semejantes?



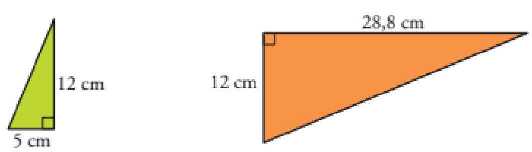
Se les hizo ver que serán semejantes cuando tengan dos catetos proporcionales o bien un cateto y la hipotenusa proporcionales y que además al ser semejantes se pueden poner en posición de Tales.



Se sigue con las tareas planteadas a los alumnos en esta sesión.

3.1.2 Tareas propuestas en el aula

Tarea 1.Explica por qué los triángulos siguientes son semejantes y encuentra su razón de semejanza (Cólera y Gaztelu, 2015).



El siguiente ejemplo es un poco más complicado tiene de distinto el cálculo de una distancia por Pitágoras

Tarea 2. Los catetos de un triángulo rectángulo miden 24m y 10m ¿Cuánto medirán los catetos de un triángulo semejante al primero cuya hipotenusa mide 52m? (p. 172).

4.1 Justificación de las tareas elegidas en la sesión 4

Tareas en el aula	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1, O3,O6	C1, C3, C5
Tarea 2	O1, O3, O4, O6, O7	C1, C3, C5

Sesión 5

5.1 Repaso de los ejercicios propuestos para casa

Esta sesión fue sólo de 30 minutos ya que ese día se tenía prevista otra actividad a nivel de centro. Así que como había corregido las tareas propuestas que me entregaron aproveché para comentarle los errores que habían tenido y preocuparme por reforzarles los conceptos que se consideran básicos dentro de la unidad.

Sesión 6

6.1 Proporcionalidad de Tales

Como de costumbre comienza la clase con tareas propuestas para casa.

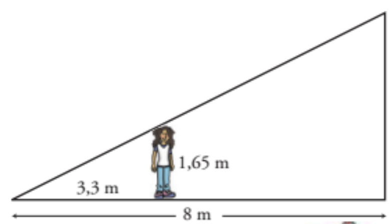
6.1.1 Tareas propuestas para casa:

Tarea 2. Las sombras de estos arbolitos medían a las cinco de la tarde, 12 m, 8 m, 6 m y 4 m, respectivamente. El árbol pequeño mide 2.5 m. ¿Cuánto miden los demás? (Cólera y Gaztelu, 2015).

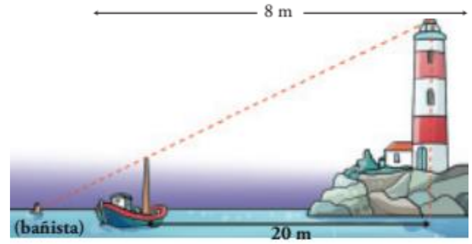
Como ya se vieron los conceptos necesarios sobre semejanzas pasamos a aplicarlos.

6.1.2 Tareas propuestas para el aula

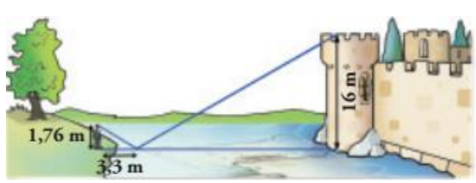
Tarea1. El salón de la casa de Raquel es abuhardillado y para medir la altura de la pared se coloca como se ve en el dibujo. Teniendo en cuenta las medidas, calcula la altura máxima del salón (p.183).



Tarea 2. El bañista se encuentra a 5 m del barco. La borda del barco está a 1 m sobre el nivel del mar. El mástil del barco sobresale 3 m de la borda. El bañista ve alineados el extremo del mástil y el foco del faro. ¿A qué altura sobre el nivel del mar se en cuenta el foco del faro? (p.191).



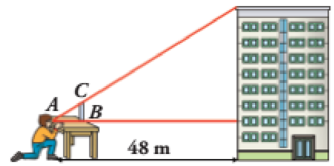
Tarea 3. ¿Cuál es la distancia entre el chico y la base de la torre (el chico ve la torre reflejada en el agua)? (p.192).



Tarea 4. Halla la altura del edificio sabiendo que:

- La mesa tiene 1 m de altura.
- AB = 80 cm y BC = 52 cm

(p. 192).



6.2 Justificación de las tareas elegidas en la sesión 6

Con la tarea 1 simplemente se trata de presentar lo que va a hacer de un forma sencilla y en un contexto cotidiano para los alumnos. En concreto las tareas 2 y 3 son interesantes para que los alumnos identifiquen las distintas posiciones de los triángulos en las imágenes y reconozcan la relación de semejanza en ambas. Esta estrategia ayuda a una mejor comprensión de lo que se estudia. Se considera importante también la última tarea como colofón de la clase ya que es otra forma de calcular una altura sin recurrir a la sombra.

Tareas para casa	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 2	O1, O2	C1, C5

Tareas en el aula	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1,O6, O8	C1, C2, C3
Tarea 2	O1, O6,O8	C1, C2, C3
Tarea 3	O1,O6, O8	C1, C2, C3
Tarea 4	O1, O6,O8	C1, C2, C3

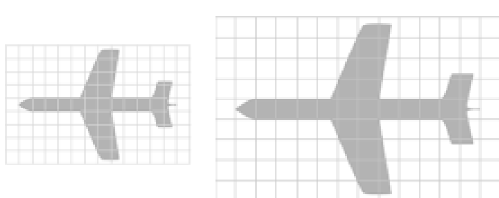
Sesión 7

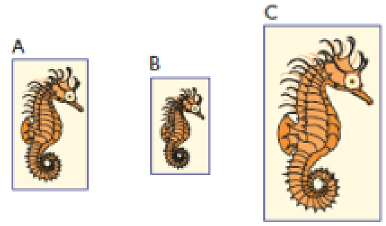
7.1 Aplicaciones de la semejanza.

Para esta sesión se preparó una presentación en power point.

Figuras semejantes

- Dos figuras son semejantes cuando tienen la misma forma pero distinto tamaño. Ángulos iguales y lados proporcionales.





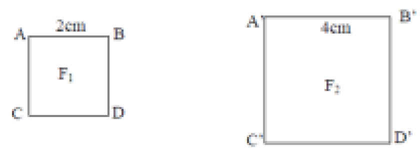
$$r = \frac{a}{a'}$$

Ampliación $r>1$

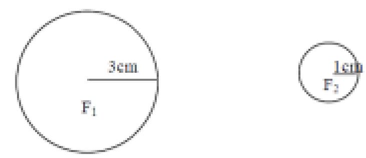
Reducción $r<1$

Figuras semejantes

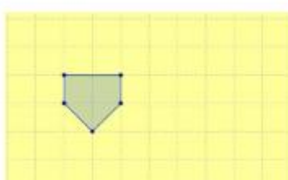
- Todos los cuadrados son semejantes: ángulos iguales y lados proporcionales.

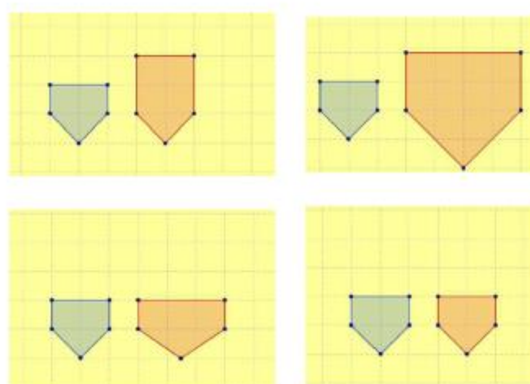


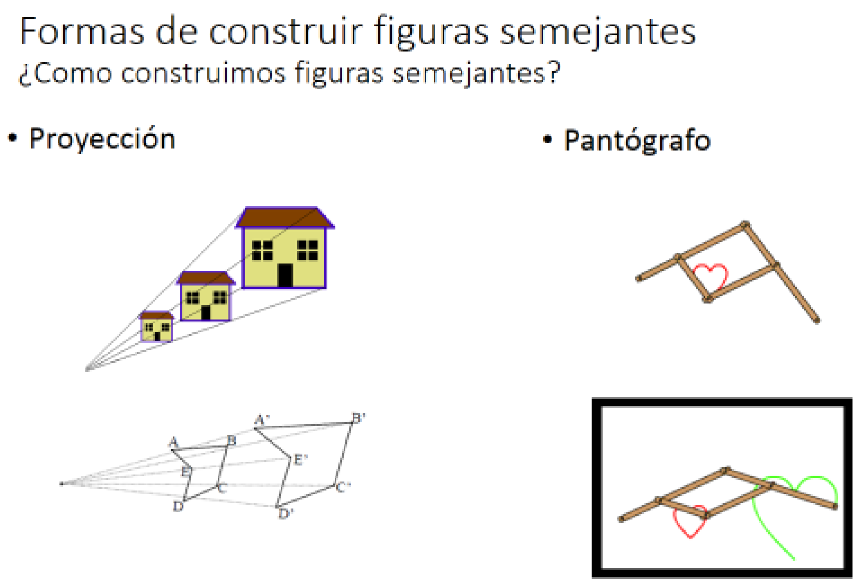
- Todas las circunferencias son semejantes. La razón de semejanza es el cociente de sus radios



¿Cuáles de estas figuras son semejantes?







Sesión 8

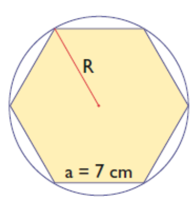
8.1 Corregir ejercicios y repaso.

Esta sesión fue la última antes de la prueba escrita de los conocimientos adquiridos, el examen. Así que la sesión se centró en corregir los ejercicios que quedaban por repasar, hacer algunos de repaso general de toda la unidad y por supuesto a atender las dudas de los alumnos.

Les recordé que el día del examen deberían traer una regla y si querían también la calculadora.

8.1.1 Tareas de repaso

Tarea1. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente hexágono de lado a = 7 cm (Arias y Maza, 2014).



Tarea 2. Los lados de un triángulo miden a =7 cm, b =8.5 cm y c = 12 cm. Halla la medida de los lados a', b' y c' de un triángulo semejante en el que r = 1.75 (p. 296).

Tarea 3. ¿Cuáles de las siguientes ternas son pitagóricas?

a) (5, 7, 9)
b) (6, 8, 9)
c) (7, 9, 11)
d) (10, 24, 26)

8.2 Justificación de las tareas elegidas en la sesión 8

En la tarea 1 aparece el hexágono regular, es el único polígono en el que se cumple que su lado es igual a su radio, el único, así que es importante que lo sepan identificar. En la tarea 2 se destaca la importancia de la identificación y la interpretación de r como la razón de semejanza.

La última tarea se centra en el recíproco del teorema de Pitágoras, mostrando otra visión del teorema al que no están acostumbrados y que de nuevo da otra perspectiva que ayuda al aprendizaje.

Tareas de repaso	Objetivos	Criterios de evaluación
Tarea 1	O1	C1
Tarea 2	O1, O3,O6	C3, C5
Tarea 3	O1	C1,

Sesión 9

9.1 Examen

Criterios de evaluación:

Estos criterios son los llevados a cabo también en la evaluación de las tareas que entregaban.

Lo que se pretende evaluar con este examen es si lo alumnos:

C1. Identifican o reconocen figuras semejantes, calculando la escala o razón de semejanza y la razón entre longitudes.

C2. Utilizan la escala para resolver problemas de la vida cotidiana sobre planos, mapas y otros contextos de semejanza.

C3. Analizan distintos cuerpos geométricos e identifican sus elementos característicos.

C4. Resuelven problemas que conlleven el cálculo de longitudes, superficies utilizando propiedades y relaciones.

C5. Resuelven problemas contextualizados referidos al cálculo de longitudes, de cuerpos geométricos, utilizando el lenguaje geométrico y algebraico adecuado.

Se puede asignar cada pregunta del examen con los diferentes criterios para evaluar y los objetivos establecidos:

Pregunta examen	**Objetivos**	**Criterios con los que evaluar**
1	O3, O4, O5 , O8	C2
2	O1,O4, O6, O7,	C1,C3,C4
3	O1,O2	C4
4	O3,O6,O7,O8	C1,C5
5	O3,O6,O7,O8	C1,C5
6	O1,O8	C1,C5
7	O1,O2, O3,O4	C1,C2,C3,C4
8	O3,O5,O8	C1,C2,C3,C4

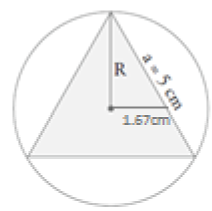
Examen. Matemáticas 2º ESO C. Geometría. Teorema de Pitágoras y Semejanzas

Nombre y apellidos: ____

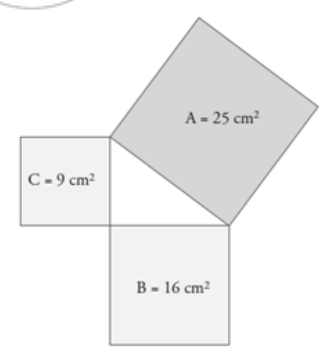
1. Midiendo con la regla en el mapa siguiente, calcula la distancia que hay en línea recta entre:
   a) Madrid y Bruselas.
   b) Londres y París.

Escala 1:100 000 000

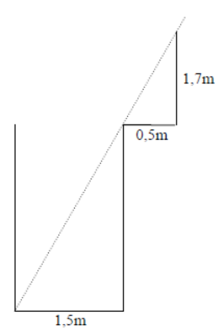
2. Halla el radio de la circunferencia circunscrita al siguiente triángulo equilátero:
   Sugerencia: busca una posición de Tales.



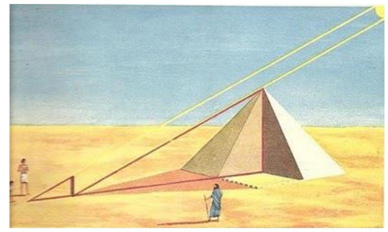
3. a) Escribe el enunciado del teorema de Pitágoras y pon un ejemplo de una terna pitagórica.
   b) Comprueba que se cumple el teorema de Pitágoras en la siguiente figura.



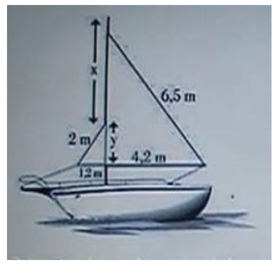
4. ¿Cuál es la profundidad del pozo si su anchura es 1,5m y alejándote 0,5 m del borde desde una altura de 1,7 m ves en la misma visual el borde del pozo y la esquina del fondo?



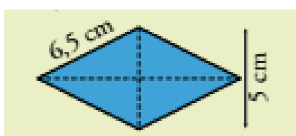
5. Cuenta la leyenda que Tales para medir la altura de la pirámide de Keops colocó un palo de un metro en el centro de una circunferencia de radio 1m y esperó hasta que la sombra midiese exactamente un metro, instante en el que la sombra de la pirámide media 147 m ¿cuánto mide de alto la pirámide?

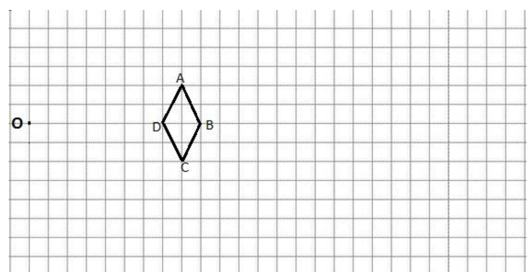


6. La siguiente figura es un barco de vela, determina los valores de x e y con ayuda de los datos dados.

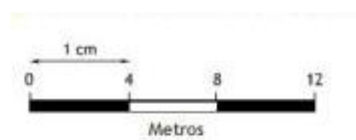


7. a) Calcula el área del siguiente rombo mediante las medidas que vienen representadas.
   b) En la cuadrícula, dibuja, mediante el método de la proyección, un rombo semejante a ese a razón de semejanza 2.





8. a) ¿Define qué es la escala de un mapa, un plano o una maqueta?
   b) Explica que quiere decir esta escala gráfica y pon su escala numérica?
   c) Explica qué relación hay entre una fotografía y un mapa o un plano.



9.2 Justificación de las tareas del examen

Se justifican las tareas que tienen que ver con el tema tratado este trabajo.

En la tarea 2 hace falta identificar una posición de tales y utilizar Pitágoras para determinar una longitud, es quizás la tarea más alta en dificultad pero también quizás la más interesante donde hay que relacionar más conceptos y profundizar en los conocimientos que cada alumno tiene. La tarea 3 nuevamente presenta la demostración geométrica del teorema de Pitágoras, se utiliza esta tarea para averiguar si los alumnos han aprendido la interpretación geométrica con las áreas de los cuadrados. La tarea 4 es interesante, de nuevo, para presentar la utilidad de las matemáticas en contextos que son reales y pueden ser cercanos a los alumnos. La tarea 5 es utilizada además de por las notas que sirven de cultura general para los alumnos relatadas en el enunciado de la tarea, tiene el detalle de que *(colocó el palo en el centro de una circunferencia de 1m),* de esta forma se está buscando precisión en la lectura y comprensión de los niños. La tarea 6 tiene la peculiaridad de que se introducen dos longitudes desconocidas y se espera que los alumnos en esta tarea aprecien que el cateto del triángulo mayor es x + y. En la tarea 7 básicamente se prioriza el concepto de semejanza, se pretende que los alumnos represente una figura semejante mediante un método anteriormente explicado en el aula.

Sesión 10
10.1 Corrección del examen.
Se resolvieron en la pizarra los problemas en los que habían tenido más dificultad, y se contestaron a las preguntas que planteaban los alumnos. Finalmente se asume que aunque parezca que los alumnos han entendido lo que se transmite esto no siempre es así, ya que se observó que era, en este momento, el último día de intervención, cuando algunos habían aprendido lo esperado. Más vale tarde que nunca.

Reflexión sobre la observación llevada a cabo en el aula, las tareas corregidas y la corrección del examen
En la observación llevada a cabo en el aula mediante las tareas que los estudiantes resolvían y las dudas que planteaban se obtiene como información que a los alumnos no les resulta intuitiva la forma de comenzar presentando el Teorema de Pitágoras mediante las áreas de los cuadrados, ellos conocen y aplican correctamente la relación métrica del teorema que vienen usando desde el curso anterior, más bien lo que hacen es el esfuerzo por aprender la nueva acepción del teorema ya que les parece que es otra cosa distinta. Entre los errores más comunes se destaca el elevar al cuadrado el área de los cuadrados cuando se les da como datos esas áreas. Algunos estudiantes todavía no relacionan la relación métrica con las áreas de los cuadrados, se ha observado que, en general, esta relación les cuesta mucho trabajo entenderla.

Entre otras dificultades se tienen que los alumnos no contestan a lo que se les pregunta. Por ejemplo en el problema del barco se olvidan de restar para dar el valor correcto de x e y, demostrando que no repasan o no leen con atención lo que se les preguntan. Otros aún no entienden el concepto de área, por ejemplo, en el problema referido al rombo, algunos alumnos suman las longitudes de los lados para dar el área.
En un futuro habría que insistir en estos conceptos, de nuevo, para solventar este tipo de errores.

4. RECURSOS EMPLEADOS

Se presentan los recursos creados para la toma de datos de la experiencia a fin de obtener los posteriores resultados y analizarlos. El estudio se ha llevado a cabo, utilizando el período de prácticas del máster, por un grupo de 28 alumnos de nivel educativo de 2º ESO pertenecientes al I.E.S La Madraza, situado en la zona norte de la ciudad de Granada. Se desarrolla en esta parte los objetivos que se pretenden conseguir en los alumnos con cada recurso.

Las preguntas que se realizan en torno a las representaciones gráficas mantienen un orden. Se comienza con las preguntas más intuitivas y más asequibles para ir acercando a los alumnos, paulatinamente, a los objetivos pretendidos.

4.1 Recurso Descubriendo 1

El primer recurso creado que se plantea atiende a la generalización del Teorema de Pitágoras. Se le da importancia a la orientación de los triángulos evitando la forma estándar a la que se acostumbra para enriquecer el conocimiento de los alumnos, esto se viene haciendo desde la instrucción como se aprecian en las tareas de esa sección. Además en este recurso se añade una tarea donde se representa un triángulo rectángulo isósceles como caso particular para el enriquecimiento del aprendizaje de los alumnos. El recurso consta de dos tareas, tarea 1.1 y tarea 1.2.

Tarea1. Generalización del teorema

El primer recurso preparado tiene como propósito obtener de los alumnos los objetivos que se describen a continuación mediante las tareas siguientes.

- Los **objetivos** que se esperan lograr son que los alumnos:

  O1. Identifiquen los elementos y relaciones ya conocidos previamente de clase. En este caso, en torno al Teorema de Pitágoras.

  O2. Relacionen los diferentes conceptos que se ponen en juego para elaborar conjeturas.

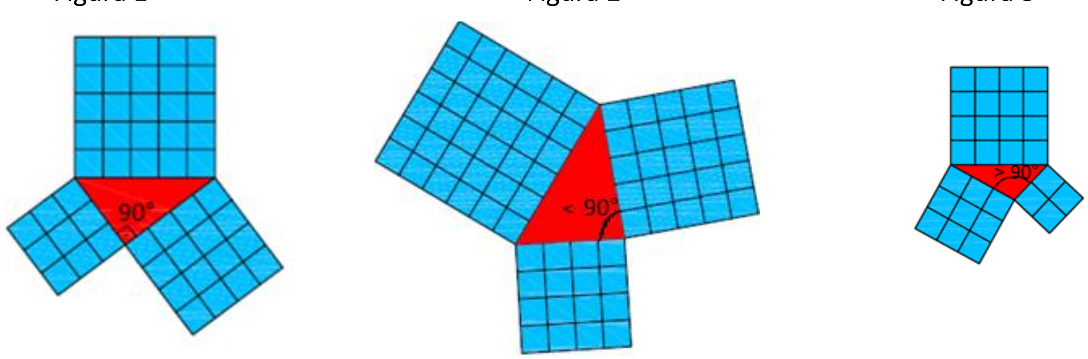
  O3. Formulen conjeturas en torno al Teorema de Pitágoras.

  O4. Comprueben esas conjeturas.

  O5. Representen lo que se les pide en la tarea.

Tarea 1.1 Observa las figuras con detenimiento y contesta a las peguntas.

Figura 1 Figura 2 Figura 3



1. **Fíjate bien en los triángulos que hay en cada figura. ¿Son iguales? Observa lo que miden sus lados y sus ángulos: ¿En qué se diferencian?**

- En la primera figura tenemos, claramente, un triángulo rectángulo. ¿Lo recuerdas? En clase usamos cartulina con esos mismos colores para obtener una representación así. Entonces ya sabemos de clase que la relación entre sus áreas es:

"El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

2. **Cuenta los cuadraditos para comprobar si se cumple o no esa misma relación entre las áreas en las otras dos figuras. ¿Qué has obtenido?, (Cada cuadradito pequeño es una unidad de medida).**

- En clase vimos que:

"*En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de cada uno de los catetos al cuadrado*".

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3. **Describe cómo sería esta relación para los otros dos triángulos.**

4. **Para la primera figura tenemos:**

$$5^2 = 4^2 + 3^2 \longrightarrow 25 = 16 + 9$$

Calcula ahora esa relación para la figura 2 y la 3. (*Ayuda: Cuenta los cuadrados de cada lado del triángulo, esa será la medida de cada lado.)* ¿Qué ocurre con esa relación en la figura 2 y la figura 3? Explícalo.

TABLA 1.1

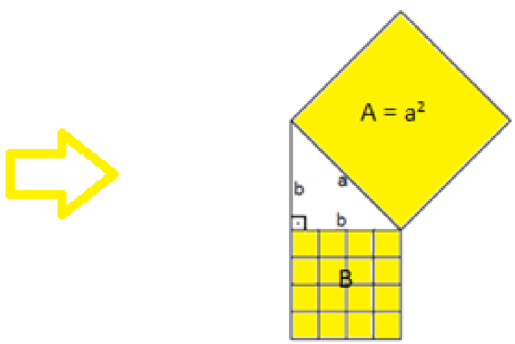
Se presenta la relación existente entre los objetivos que se pretenden conseguir con cada pregunta realizada en la tarea 1.1.

Preguntas de la Tarea 1.1	***Objetivos con los que se relaciona***
1. Fíjate bien en los triángulos que hay en cada figura. ¿Son iguales? Observa lo que miden sus lados y sus ángulos: ¿En qué se diferencian?	**O1, O2**
2. Cuenta los cuadraditos para comprobar si se cumple o no esa misma relación entre las áreas en las otras dos figuras. ¿Qué has obtenido?, (Cada cuadradito pequeño es una unidad de medida)	***O1, O2***
3. Describe cómo sería esta relación para los otros dos triángulos.	***O2, O3 , O4***

4. Para la primera figura tenemos: $5^2 = 4^2 + 3^2 \longrightarrow 25 = 16 + 9$ *Calcula ahora esa relación para la figura 2 y la 3. (Ayuda: Cuenta los cuadrados de cada lado del triángulo, esa será la medida de cada lado.) ¿Qué ocurre con esa relación en la figura 2 y la figura 3? Explícalo.*	***O2, O3 , O4***

TAREA 1.2 FÍJATE AHORA EN ESTA FIGURA:

Figura 4



5. ¿Qué es un triángulo rectángulo?

6. Fíjate en lo que miden los lados del triángulo. ¿Cómo se llaman estos tipos de triángulos rectángulos?

7. ¿Cuánto miden sus ángulos?

8. ¿Cómo sería el cuadrado que falta en la figura, en la zona señalada por una flecha? Dibújalo con lápiz.

9. María dice que ha encontrado que el área del cuadrado A es dos veces la del cuadrado B. ¿Tiene razón? Explica la respuesta.

TABLA 1.2

Se presenta la relación de objetivos que se pretenden conseguir con cada pregunta realizada en la tarea 1.2, así como los análisis que se pretenden obtener derivados de esos objetivos.

Preguntas de la Tarea 1.2	***Objetivos***
5. ¿Qué es un triángulo rectángulo?	***O1, O2, O3***
6. Fíjate en lo que miden los lados del triángulo. ¿Cómo se llaman estos tipos de triángulos rectángulos?	***O1, O2***
7. ¿Cuánto miden sus ángulos?	***O1, O2***
8. ¿Cómo sería el cuadrado que falta en la figura, en la zona señalada por una flecha? Dibújalo con lápiz.	***O2, O3, O5***
9. María dice que ha encontrado que el área del cuadrado A es dos veces la del cuadrado B. ¿Tiene razón? Explica la respuesta.	***O2, O3, O4.***

4.2 RECURSO DESCUBRIENDO 2

En este segundo recurso lo que se usa es una guía sobre la demostación del Teorema de Pitágoras para que los alumnos identifiquen, relacionen y lleguen a descubrir el teorema en esta otra demostración geomética que no conocen previamente. La primera tarea tiene la función de captar la atención del alumno para posteriormente, en las siguientes tareas formulen conjeturas en torno a las preguntas formuladas. El fin último, que no se pierde de vista, es el análisis de las respuestas de los alumnos para utilizarlo en la mejora de sus aprendizajes.

Este recurso consta de tres tareas, tarea 2.1, tarea 2.2 y tarea 2.3.

TAREA2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

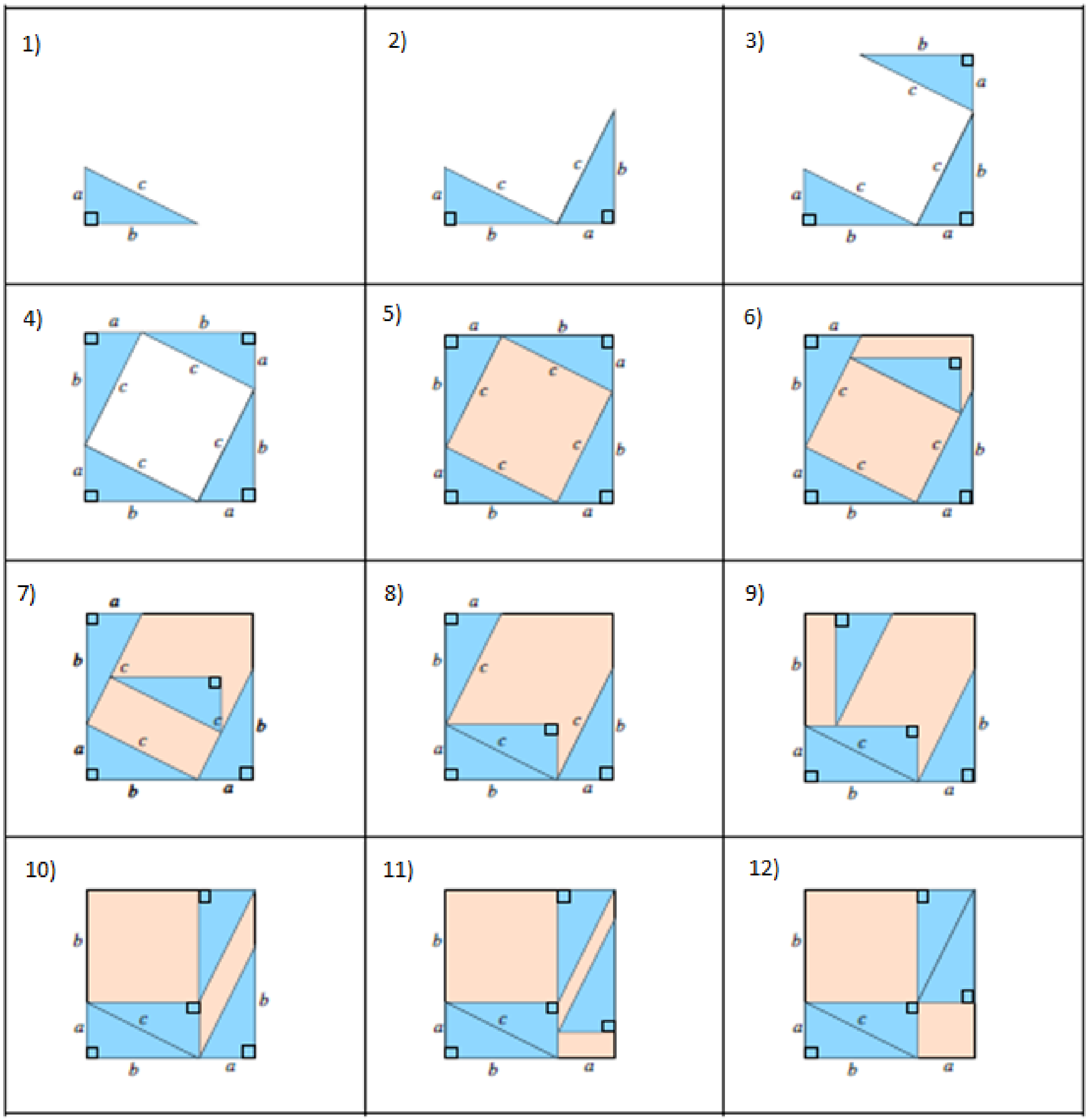
- Los **objetivos** que se quieren conseguir ,en los alumnos, con este recurso son que:

  O1. Interpreten los pasos de una secuencia que pertenece a la demostración de Teorema de Pitágoras.
  O2. Identifiquen patrones y conceptos conocidos en la secuencia.
  O3. Observen las situaciones y formulen conjeturas.
  O4. Comprueben las conjeturas que se planteen inicialmente.

Y como este recurso es una guía para que descubran que hay otra manera de demostrar una misma cosa, El Teorema De Pitágoras, se incluye como objetivo que los alumnos:

O5. Aprendan descubriendo.

TAREA 2.1 A CONTINUACIÓN, SE PRESENTAN UNAS IMÁGENES QUE CORRESPONDEN A UNA SECUENCIA DE PASOS. MIRA CON ATENCIÓN LAS IMÁGENES Y RESPONDE A LAS PREGUNTAS.



1. **¿Qué ha cambiado al pasar de la imagen 1 a la 4?**
2. **¿Cuántas figuras observas en la imagen 5?**

Ahora continúa la secuencia desde la imagen 5:

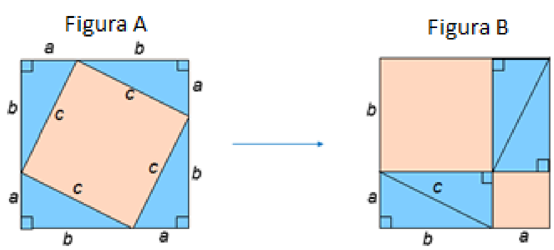
3. **¿Qué está ocurriendo en las imágenes 6, 7y 8?**
4. **Y en la imágenes 9, 10 y 11 ¿Qué está ocurriendo?**
5. **¿Qué figuras aparecen en la imagen 12?**

TABLA 2.1

En la siguiente tabla se recogen los objetivos que se pretenden lograr con cada pregunta de la tarea 2.1.

Preguntas de la tarea 2.1	*Objetivos*
1. ¿Qué ha cambiado al pasar de la imagen 1 a la 4?	***O1, O2, O3***
2. ¿Cuántas figuras observas en la imagen 5?	***O1, O2, O3***
3. ¿Qué está ocurriendo en las imágenes 6, 7 y 8?	***O1, O2, O3***
4. Y en la imágenes 9, 10 y 11 ¿Qué está ocurriendo?	***O1, O2, O3***
5. ¿Qué figuras aparecen en la imagen 12?	***O1, O2, O3, O5***

TAREA 2.2 AHORA SACAMOS DE LA SECUENCIA ESTAS DOS FIGURAS, FÍJATE EN ÉSTAS IMÁGENES:



6. **Explica lo que permanece igual y lo que es diferente entre ellas.**
7. **¿Qué relación hay entre los lados de las figuras representadas, a,b y c?**
8. **Ya que la distibución de las figuras se produce dentro de una misma región ¿Crees que el área del cuadrado grande de la figura A puede ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B? Explica la respuesta.**

TABLA 2.2

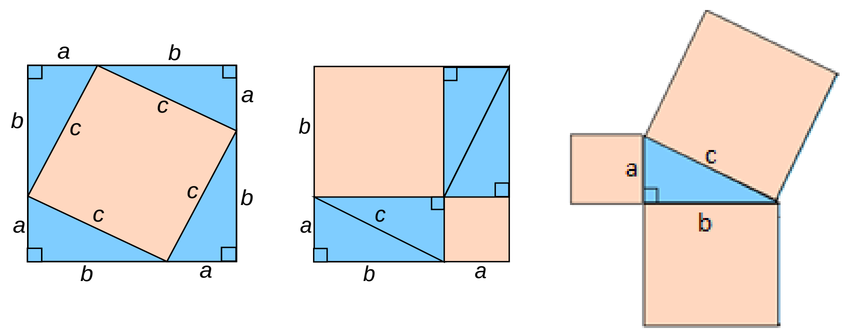
En la siguiente tabla se recogen los objetivos que se pretenden lograr con cada pregunta de la tarea 2.2.

Preguntas de la tarea 2.2	*Objetivos*
6. Explica lo que permanece igual y lo que es diferente entre ellas.	***O3, O4, O5***

7. *Qué relación hay entre los lados de las figuras representadas, a,b y c?*	***O3, O4, O5***
8. *Ya que la distibución de las figuras se produce dentro de una misma región ¿Crees que el área del cuadrado grande de la figura A puede ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B? Explica la respuesta.*	**O2, O3, O4 O5**.

TAREA 2.3 PARA FINALIZAR, SE PRESENTAN LAS SIGUIENTES FIGURAS. VISUALÍZALAS Y CONSTESTA A LA ÚLTIMA PREGUNTA.

Figura A Figura B Figura C



9. **Luis dice que con la figura A y la B puede demostrar el teorema de Pitágoras. Nosotros usamos en clase la figura C para explicar el teorema. Fíjate en la figuras A y B y en las medidas de sus lados ¿Crees que Luis tiene razón? ¿Por qué?**

TABLA 2.3

Se resumen los objetivos que se quieren adquirir con cada pregunta planteada en esta tarea.

Preguntas de la tarea 2.3	*Objetivos*
9. *Luis dice que con la figura A y la B puede demostrar el teorema de Pitágoras. Nosotros usamos en clase la figura C para explicar el teorema. Fíjate en la figuras A y B y en las medidas de sus lados ¿Crees que Luis tiene razón? ¿Por qué?*	***O3, O4, O5***

4.3 RECURSO. DESCUBRIENDO 3

El último recurso creado tiene que ver también con la generalización del Teorema de Pitágoras pero desde otra perspectiva. Tal vez sea el recurso que más interés despierte en la motivación de los alumnos dado que no es intiutivo que el Teorema de Pitágoras se pueda generalizar a todas tres figuras semejantes en las que las longitudes de sus lados formen una terna pitagórica. En este recurso se utilizan imágenes dinámicas y representativas de los conceptos que se tratan e invitan a alumno a sostener un mayor interés en las tareas como se comprobó durante la experiencia . Este recurso consta de dos tareas, tarea 3.1 y tarea 3.2.

TAREA3. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

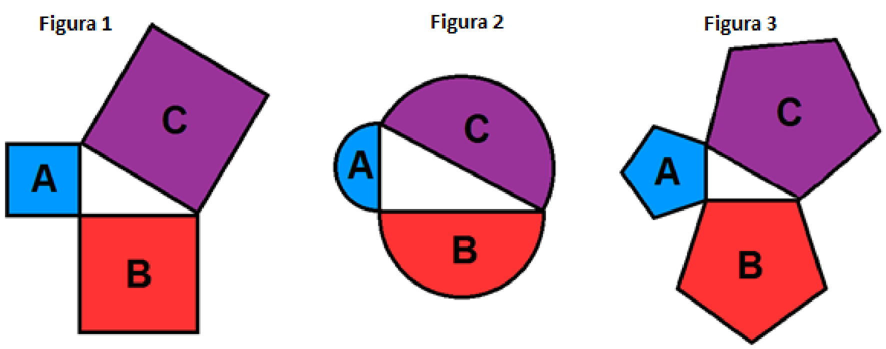
- Los **objetivos** que se esperan lograr es que los alumnos sean capaces de:

O1. Identificar los elementos y relaciones ya conocidos previamente, en torno al Teorema de Pitágoras.
O2. Interpretar las relaciones entre figuras que aparecen en la generalización de Teorema de Pitágoras.
O3. Relacionar los diferentes conceptos que se ponen en juego para elaborar conjeturas.
O4. Formular conjeturas en torno al Teorema de Pitágoras.
O5. Comprobar esas conjeturas.

Y como este recurso es una guía para que descubran que hay otra manera de demostrar una misma cosa, El Teorema De Pitágoras, se incluye como objetivo que los alumnos:

O6. Aprendan descubriendo.

TAREA 3.1. A CONTINUACIÓN, SE PRESENTAN UNAS FIGURAS GEOMÉTRICAS. OBSERVA DETENIDAMENTE Y CONTESTA A LAS PREGUNTAS:



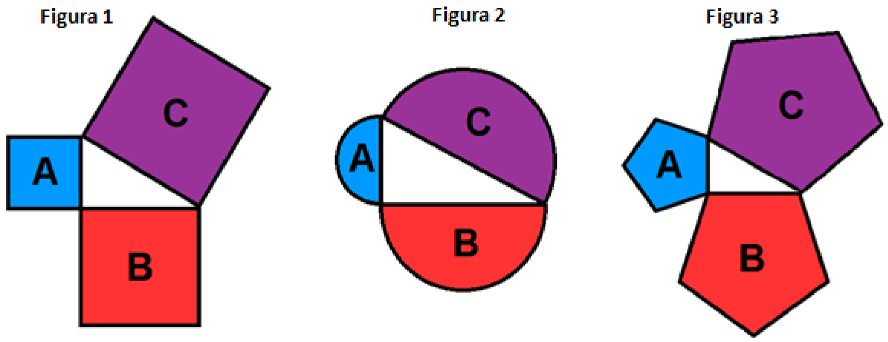
- Nuevamente lee la siguiente afirmación que demostramos en clase:

"El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

1. **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.**

- Aquí tienes de nuevo la pregunta anterior con la respuesta.

1. **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos?** ¡Sorprendentemente sí!, la respuesta es que sí. Se cumple la misma relación en las otras dos figuras. Parece increíble, ¿Verdad?



Entonces sabiendo esto:

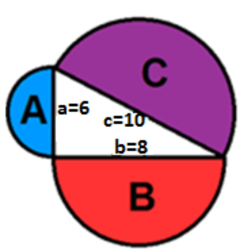
2. ¿Cómo enunciarías el Teorema de Pitágoras para las otras figuras?

TABLA 3.1

Se resumen los objetivos que se quieren adquirir con cada pregunta planteada en esta tarea además de relacionarlos con los análisis que se pretenden de cada respuesta.

Tarea 3.1	Objetivos
1. ¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.	O1, O2, O3, O4
2. ¿Cómo enunciarías el Teorema de Pitágoras para las otras figuras?	O1, O2, O4, O5, O6

TAREA 3.2. Y SI AHORA TE DOY MEDIDAS DE LOS LADOS DE LOS TRIÁNGULOS QUE APARECEN EN LAS FIGURAS SIGUIENTES EN CM Y TE FACILITO EL CÁLCULO DE LAS ÁREAS QUE APARECEN SOBRE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO:

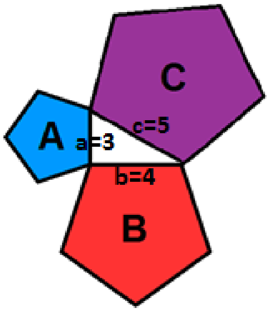


$$\text{Área de un semicírculo} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

$$\text{Área del semicírculo C} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2.5^2}{2} = 9.8\ cm^2$$

$$\text{Área del semicírculo B} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6.3\ cm^2$$

$$\text{Área del semicírculo A} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1.5^2}{2} = 3.5\ cm^2$$



$$\text{Área de un pentágono} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

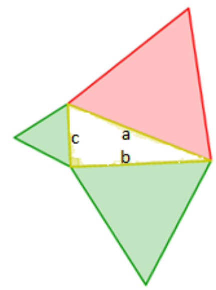
$$\text{Área del pentágono C} = \frac{25 \cdot 4.33}{2} = 54.1\ cm^2$$

$$\text{Área del pentágono B} = \frac{20 \cdot 3.46}{2} = 34.6\ cm^2$$

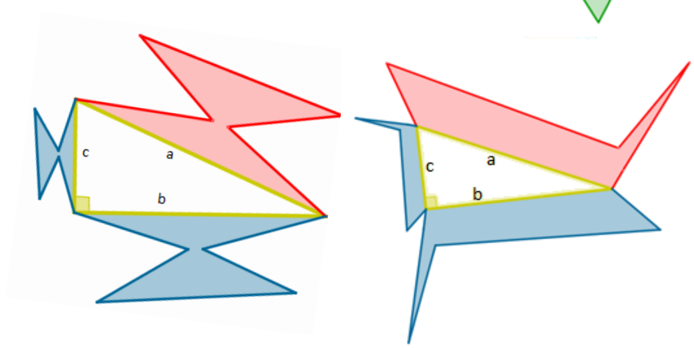
$$\text{Área del pentágono A} = \frac{15 \cdot 2.55}{2} = 19.5\ cm^2$$

3. **Entonces, ¿Crees que se ha demostrado el Teorema de Pitágoras en estos dos casos? Explica tu respuesta.**
4. **¿Crees que siempre es verdad, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? ¿Por qué?**

- Voy a ayudarte a comprobar si lo que has pensado en la pregunta anterior es cierto o no. Verás, fíjate en la figura de la derecha y recuerda de clase: **Los tres triángulos que aparecen en la figura, me refiero a los dos triángulos verdes y al rosa tienen la misma forma pero distinto tamaño, son, por tanto, triángulos semejantes.**

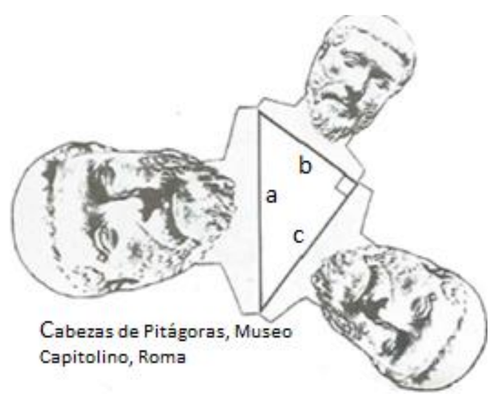


- Observa qué imágenes más divertidas. En ellas también puedes ver que las figuras sobre los lados de los triángulos tienen la misma forma pero distinto tamaño, luego son **figuras semejantes** también.



- Si te digo que también se cumple nuestro famoso Teorema de Pitágoras en estos casos**.** Piensa con detenimiento**:**

5. **¿Crees que siempre se cumple, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? Explica la respuesta.** Observa, también la figura de la derecha, comprueba si lo que piensas es cierto y contesta.
6. **Y por último, ¿Cómo enunciarías éste famoso Teorema de forma general para estas figuras divertidas?**



Cabezas de Pitágoras, Museo Capitolino, Roma

TABLA3.2

Se resumen los objetivos que se quieren adquirir con cada pregunta planteada en esta tarea.

Tarea 3.2	Objetivos
3. *Entonces, ¿Crees que se ha demostrado el Teorema de Pitágoras en estos dos casos? Explica tu respuesta.*	**O3, O5, O6**
4. *¿Crees que siempre es verdad, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? ¿Por qué?*	O1, O2, O3, O4
5. ***¿Crees que siempre se cumple, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? Explica la respuesta.** Observa, también la figura de la derecha, comprueba si lo que piensas es cierto y contesta.*	**O1, O2, O3, O4, O5, O6**
6. *Y por último, ¿Cómo enunciarías éste famoso Teorema de forma general para estas figuras divertidas?*	O3, O4, O5, O6

5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS DE DATOS

En esta parte se presentan los resultados de los datos obtenidos, es decir, el análisis de las respuestas de los alumnos a los recursos planteados. El tiempo que emplearon los alumnos en realizar las tareas fue de una hora y media. Se presentan mediante tablas de resultados en las que se especifican las distintas categorías de respuestas extraídas en función de los argumentos que dan los estudiantes.

5.1 DESCUBRIENDO 1. TAREA1. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA

El recurso creado para esta primera parte trata sobre la generalización del Teorema de Pitágoras y consta de dos tareas. Tarea1.1 y tarea 1.2.

RESULTADOS TAREA 1.1. PREGUNTA 1

Pregunta 1. ***Fíjate bien en los triángulos que hay en cada figura. ¿Son iguales? Observa lo que miden sus lados y sus ángulos. ¿En qué se diferencian?***

	Frecuencia
Las diferencias vienen dadas por la longitud de sus lados.	10
Las diferencias vienen dadas por los ángulos.	7
Las diferencias se deben tanto a los lados como a los ángulos.	10
*Son tres triángulos rectángulos	7
Respuestas en blanco	1

*El dato de la columna que toma otro color representa el número de alumnos, 7 de un total de 17 alumnos, cuyas respuestas ya están recogidas en las categorías anteriores.

Se exponen los resultados de los datos presentados relacionándolos con los objetivos pretendidos en cada pregunta presentados en la anterior sección del trabajo. Tabla 1.1.

Todos los alumnos señalan que ven diferencias entre los triángulos de las tres figuras. Cuando argumentan estas diferencias, 10 de los 28 alumnos, lo hacen identificándolas mediante las longitudes de los lados de los triángulos. Ningún alumno en esta categoría menciona alguna medida concreta aunque aparece el concepto de semejanza y proporcionalidad para argumentar que los lados son diferentes.
Por otro lado, en la segunda categoría de clasificación, 7 de los 28 alumnos identifican las diferencias atendiendo a los ángulos para contestar cuando se les pregunta. 3 de estos 7 alumnos afirman que los triángulos son iguales por contener al menos un ángulo de 90º. El resto de alumnos, un total de 4, afirman que el único triángulo rectángulo que hay es el de la primera figura.

Un total de 10 alumnos contestan atendiendo tanto a los lados como a los ángulos de los distintos triángulos. De nuevo no existe en las respuestas una medida concreta para los lados, volviendo a aparecer el concepto de proporcionalidad y semejanza en el mismo contexto que antes. 1 alumno afirma que los triángulos según sus lados son escalenos. 4 de 10 alumnos aseguran que los tres triángulos representados son rectángulos.

Unos 7 alumnos de un total de 28 han identificado los tres triángulos como triángulos rectángulos.

RESULTADOS TAREA 1.1. PREGUNTA 2.

Pregunta 2. "El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos". ***Cuenta los cuadraditos para comprobar si se cumple o no esa misma relación entre las áreas en las otras dos figuras. ¿Qué has obtenido?, (Cada cuadradito pequeño es una unidad de medida).***

	Frecuencia
La relación de las áreas no se cumple en la figura 2 y la figura 3	9
La relación entre áreas solo se cumple en la figura 1	3
La relación entre áreas se cumple en la figura 1 y no en la figura 2 y 3.	5
Respuestas en blanco	4
Respuestas irrelevantes	7

Se exponen los resultados de los datos obtenidos.

La tabla anterior muestra que 9 de los 28 alumnos contestan que el teorema no se cumple en la figura 2 y 3. De estos 9, un alumno lo argumenta diciendo que al no ser triángulos rectángulos no se cumple la relación debida al teorema de Pitágoras. El resto de alumnos lo argumentan refiriéndose a la diferencia entre las áreas sobre los catetos y la hipotenusa, 2 de ellos atienden a la relación métrica del teorema sin hablar del concepto de área de los cuadrados. 1 alumno eleva al cuadrado el área manteniendo la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Un total de 3 alumnos contestan haciendo sólo referencia al cumplimiento de la relación solo en la figura 1 sin relacionar el razonamiento con las figuras 2 y 3.
Por otro lado, los alumnos que responden relacionando los argumentos entre las figuras 1, 2 y 3 son 5 alumnos.

Entre las respuestas no útiles para el estudio se caracterizan por no argumentar las afirmaciones, por operar sin concluir en algo concreto, de esta forma no se precisan de datos para el análisis en estas preguntas. Pueden verse en el anexo correspondiente.

De esta forman los alumnos han tenido que identificar los elementos y relaciones necesarias entre los diferentes conceptos para dar una respuesta.

RESULTADOS TAREA 1.1. PREGUNTA 3.

Pregunta 3. ***En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de cada uno de los catetos al cuadrado".*** $a^2 = b^2 + c^2$. ***Describe cómo sería esta relación para los otros dos triángulos***

	Frecuencia
La relación en la figura 2 y 3 es igual que en la figura 1, $a^2 = b^2 + c^2$	8
La relación en la figura 2 y 3 es distinta que en la figura 1	4
No hay relación para las figuras 2 y 3	6
Respuestas en blanco	8
Otras Respuestas	2

En primer lugar, 8 de 28 alumnos piensan que la relación dada por teorema de Pitágoras, $a^2 = b^2 + c^2$, es aplicable a los otros dos triángulos: sustituyen las medidas de los lados de los triángulos en la ecuación sin percatarse de que no se cumple la igualdad al operar los cuadrados.
Por otra parte 4 alumnos piensan que la relación $a^2 = b^2 + c^2$, es distinta en las figuras 2 y 3. Dos de ellos argumentan que la relación en la figura 2 es $h^2 < b^2 + c^2$ y en la figura 3 es $h^2 > b^2 + c^2$. Cuando se les pide que describan la relación para los triángulos de las figuras 2 y 3, 6 alumnos contestan que no se puede describir esta relación para un triángulo que no sea rectángulo.

Se destaca un número alto de respuestas en blanco, 8 concretamente. Finalmente se observa que hay dos respuestas en las que los alumnos manifiestan que no vuelven a repetir los cálculos porque ya han hecho lo mismo anteriormente

RESULTADOS TAREA 1.1. PREGUNTA 4.

Pregunta 4. ***Para la primera figura tenemos:*** $5^2 = 4^2 + 3^2 \longrightarrow 25 = 16 + 9$ ***. Calcula ahora esa relación para la figura 2 y la 3. (Ayuda: Cuenta los cuadrados de cada lado del triángulo, esa será la medida de cada lado.) ¿Qué ocurre con esa relación en la figura 2 y la figura 3? Explícalo.***

	Frecuencia
Ocurre que no se cumple la relación porque las sumas de los catetos al cuadrado no es igual a la hipotenusa al cuadrado	9
Operan sin argumentar	8
Ocurre que no se cumple la relación porque no son triángulos rectángulos	4
Otras respuestas	4
Respuestas en blanco	3

Los alumnos que contestan que no se cumple la relación porque las sumas de los catetos al cuadrado no son igual a la hipotenusa al cuadrado son 9 alumnos. Sus argumentos se basan en el cálculo de los cuadrados y en la observación de que se cumpla o no la igualdad al usar la ecuación del Teorema. Tan sólo 1 alumnos precisa que en la figura 2 y 3 la relación de la hipotenusa al cuadrado será menos o mayor que la suma de los catetos al cuadrado. Por otro lado un grupo de 8 alumnos responden mediante una serie de operaciones sin dar una conclusión concreta.
Sin embargo 4 alumnos escriben que no se cumple la relación porque no son triángulos rectángulos.

En la categoría de otras respuestas aparece la reflexión de un alumno que piensa que los datos de los triángulos no son perfectos porque al aplicar la fórmula resultan unos valores distintos en ambos miembros de la igualdad. Otro alumno en la misma categoría hace referencia a las áreas de los cuadrados para argumentar su respuesta

RESULTADOS TAREA 1.2. PREGUNTA 5.

Pregunta 5 ***¿Qué es un triángulo rectángulo?***

	Frecuencia
Triángulo que contiene un ángulo recto	12
Triángulo que contiene un ángulo de 90º y los otros ángulos son menores	5
Triángulo formado por un ángulo recto entre dos catetos y la hipotenusa	4
Triángulo que contiene un ángulo recto formado por los catetos y otros dos agudos debido a la hipotenusa	1
Respuestas en blanco	2
Respuestas sin categorizar	4

De los 28 alumnos, 12 definen un triángulo rectángulo como aquel triángulo que tiene un ángulo recto. Sin embargo, 5 alumnos lo definen como aquel triángulo que tiene un ángulo recto y los otros dos ángulos son menores de 90º o agudos. Los alumnos siguen profundizando en el grado de precisión de sus respuestas. Son 4 alumnos lo que en su definición nombran a los catetos y a la hipotenusa. Tan sólo un alumno definió el triángulo rectángulo atendiendo a todas las categorías anteriores.

Entonces un total de 22 alumnos demuestran saber mediante sus respuestas lo que es un triángulo rectángulo.

De entre las respuestas sin clasificar se encontraron 4, dos de ellas irrelevantes para el estudio y otras dos que merecen una atención. Uno de ellos define un triángulo rectángulo como un triángulo rectángulo isósceles, el otro lo define como la mitad de un rectángulo.

RESULTADOS TAREA 1.2. PREGUNTA 6.

Pregunta 6. ***Fíjate en lo que miden los lados del triángulo. ¿Cómo se llaman estos tipos de triángulos rectángulos?***

	Frecuencia
Isósceles	14
Escalenos	4
Equiláteros	2
Respuestas en blanco	5
Otras respuestas	3

La mitad de los alumnos, 14, identifican como isósceles el triángulo representado gráficamente en la tarea1.2. 4 alumnos de los 28 lo identifica como escaleno y 2 lo identifican como equilátero. En la categoría de otras respuestas hay 2 alumnos que contestan atendiendo a los ángulos.

RESULTADOS TAREA 1.2. PREGUNTA 7.

Pregunta 7. ***¿Cuánto miden sus ángulos?***

	Frecuencia
90º, 45º y 45º	12
Un ángulo mide 90º y los otros menos de 90º	7

Todos sus ángulos son de 90º	3
Uno de ellos es 90º y los otros dos miden lo mismo	2
Respuestas en blanco	2
Respuestas irrelevantes	2

Como resultados se obtienen que 12 alumnos de los 28 afirman que la medida de los ángulos de un triángulo rectángulo isósceles son 90º, 45º y 45º. 7 alumnos escriben que un ángulo mide 90º y los otros menos de 90º sin atender a que la suma de los ángulos de un triángulo es 180º. Tres escriben que todos sus ángulos son de 90º y dos de ellos plantean que un ángulo es de 90º y los otros dos miden lo mismo sin dar valores concretos.

Luego se observa que 12 alumnos interpretan la relación entre los ángulos de este triángulo isósceles rectángulo correctamente. Pero 14 alumnos (la mitad del grupo) no han relacionado sus respuestas con el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo son 180º.

RESULTADOS TAREA 1.2. PREGUNTA 8.

Pregunta 8. ***¿Cómo sería el cuadrado que falta en la figura, en la zona señalada por una flecha? Dibújalo con lápiz.***

	Frecuencia
Igual que el cuadrado B	20
No igual que el cuadrado B	6
Respuestas en blanco	2

Claramente se ve que más de la mayoría de los alumnos representa el cuadrado igual que el cuadrado B. De los 28 alumnos, 6 de ellos muestran otras representaciones donde se aprecia que el cuadrado a dibujar es diferente que el cuadrado denominado por B. Tan sólo en un alumno consta que mide con regla la longitud del lado del cuadrado representado en la tarea y lo reproduce en el hueco marcado por la flecha. Teniendo así que un total de 8 alumnos que no identifican que el triángulo a dibujar tenga las mismas dimensiones que el representado.

RESULTADOS TAREA 1.2. PREGUNTA 9.

Pregunta 9. ***María dice que ha encontrado que el área del cuadrado A es dos veces la del cuadrado B. ¿Tiene razón? Explica la respuesta.***

	Frecuencia
María sí tiene razón	17
María no tiene razón	7

Respuestas en blanco	3
Respuesta sin clasificar	1

Más de la mayoría de los alumnos, 17, afirman que María esta en lo correcto. Sin embargo, 7 alumnos de la clase creen que María no tiene razón, los argumentos que presentan son de este tipo:" *No tiene razón porque B=*4^2 *y si fuese el doble sería A=*$8^2 = 64.$" Estos 7 alumnos no reconocen el significado geométrico del teorema de Pitágoras en esta tarea.

5.2 Descubriendo 2. Tarea 2. Demostración del teorema de Pitágoras

El recurso creado para esta segunda parte se basa en la demostración del Teorema de Pitágoras. Y consta de tres tareas. Tarea 2.1, tarea 2.2 y tarea 2.3.

Resultados tarea 2.1. Pregunta 1.

Pregunta 1. ***¿Qué ha cambiado al pasar de la imagen 1 a la 4?***

	Frecuencia
Con 4 triángulos rectángulos se ha formado un cuadrado	16
Ahora hay 4 triángulos	7
Ahora hay un cuadrado	1
Otras respuestas	4

Se observa en la tabla que 16 alumnos interpretan tras observar las fases de la secuencia que lo que sucede es que con cuatro triángulos rectángulos se forma un cuadrado. 7 alumnos sólo identifican que se han añadido triángulos sin hacer ninguna interpretación adicional.

Resultados tarea 2.1. Pregunta 2.

Pregunta 2. ***¿Cuántas figuras observas en la imagen 5?***

	Frecuencia
Se observan 5 figuras	11
Se observan 6 figuras	13
Otras respuestas	4

En la tabla se observa que 11 alumnos identifican que en esa fase de la secuencia existen 5 figuras cuatro triángulos y un cuadrado. En cambio 13 alumnos identifican 6 figuras. De estos 13, 6 alumnos escriben que identifican cuatro triángulos y dos cuadrados.

En la categoría de otras respuestas no se dan datos relevantes para el estudio. Puede verse el anexo II para corroborar este hecho.

RESULTADOS TAREA 2.1. PREGUNTA 3.

Pregunta 3. ***¿Qué está ocurriendo en las imágenes 6 ,7 y 8?***

	Frecuencia
El triángulo de la esquina superior derecha se desliza hacia abajo	15
Se relacionan más cosas no sólo se quedan en el desplazamiento del triángulo	7
Respuestas en blanco	2
Otras respuestas	4

La tabla muestra que 15 de los 28 alumnos, más de la mitad, sólo describen la imagen sin mostrar más relaciones. Escriben que lo que ocurre es que el triángulo de la esquina superior derecha se desliza hacia abajo. En cambio, 7 alumnos lo argumentan de diferentes formas, entre ellos 2 identifican que el triángulo se mueve para formar un rectángulo. En este caso, tampoco se extraen datos relevantes del estudio de otras respuestas.

RESULTADOS TAREA 2.1. PREGUNTA 4.

Pregunta 4. ***Y en la imágenes 9, 10 y 11 ¿Qué está ocurriendo?***

	Frecuencia
Se mueven los triángulos	12
Se mueven los triángulos para obtener otra cosa	10
Respuestas en blanco	1
Otras Respuestas	5

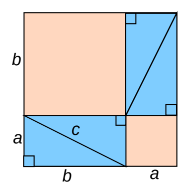
En la tabla se observa que 12 alumnos lo que hacen en esta tarea es limitarse a describir la imagen sin más relaciones. Sin embargo, 10 alumnos interpretan que los triángulos se mueven para obtener o rectángulos o rectángulos y cuadrados. De la categoría de otras respuestas se pueden destacar dos que hacen referencia a que el cuadrado se está dividiendo o a que a partir de triángulos rectángulos se forman nuevas figuras.

RESULTADOS TAREA 2.1. PREGUNTA 5.

Pregunta 5. ***¿Qué figuras aparecen en la imagen 12?***

	Frecuencia
Aparecen 4 figuras: dos cuadrados y dos rectángulos	13
Aparecen 5 figuras: dos cuadrados, dos rectángulos y el cuadrado de alrededor	7
Respuestas en blanco	3
Respuestas Irrelevantes	5

La tabla muestra que 13 de los 28 alumnos identifican 4 figuras en la representación gráfica, dos cuadrados y cuatro triángulos rectángulos. Todos los alumnos de esta categoría observan los triángulos en una posición en la que forman rectángulos, algunos de ellos responden que esos rectángulos están formados por triángulos. Véase la figura.



7 alumnos identifican cinco figuras, los dos cuadrados, dos rectángulos y un cuadrado exterior que limita a éstos y a la región coloreada. No todos los 7 lo expresan con precisión pero sí hacen referencia a la existencia de tres cuadrados.

Las respuestas que aparecen en la tabla como irrelevantes muestran signos de falta de compromiso en los alumnos ante la tarea no aportándose éstas como datos para el estudio.

RESULTADOS TAREA 2.2. PREGUNTA 6.

Pregunta 6. ***Explica lo que permanece igual y lo que es diferente entre ellas.***

	Frecuencia
Lo que cambia es la posición de los triángulos O lo que permanece igual es el cuadrado grande.	17
Permanece igual el triángulo de la parte inferior del cuadrado de la izquierda	7

Describen las diferencias entre las dos figuras representadas sin dar razones	2
Otras respuestas	2

La tabla muestra que 17 alumnos coinciden en que lo que cambia de una figura a otra es la posición de los triángulos. Unos 7 alumnos afirman que lo único que permanece igual es el triángulo inferior de la izquierda. De la categoría de otras respuestas no se tienen datos relevantes para el estudio. 2 alumnos describen cuales son las figuras que había y las nuevas que aparecen pero sin dar argumentos.
En cuanto a la primera categoría, 1 alumno de los 28 afirma que "Permanece el cuadrado en el que están inscritos los triángulos, se crean dos rectángulos y dos cuadrados sl moverse los triángulos".

Resultados tarea 2.2. Pregunta 7.

Pregunta 7. ***¿Qué relación hay entre los lados de las figuras representadas, a, b y c?***

	Frecuencia
Los lados a, b y c se mantienen constantes de una figura a otra	13
Los lados a y b son catetos. El lado c es la hipotenusa.	10
Respuestas en blanco	3
Otras respuestas	2

13 alumnos identifican que los lados a, b y c se mantienen constantes en la figura A y la B. Por otro lado 10 alumnos afirman que los lados a y b se corresponden con los catetos de un triángulo rectángulos y el lado c es la hipotenusa de este triángulo. La otras respuestas no nos ofrecen datos relevantes para el estudio.

Resultados tarea 2.2. Pregunta 8.

Pregunta 8. ***Ya que la distribución de las figuras se produce dentro de una misma región ¿Crees que el área del cuadrado grande de la figura A puede ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B? Explica la respuesta.***

	Frecuencia
Sí, las áreas son iguales	18
No, el área no es igual	3
Respuestas en blanco	2
Respuestas irrelevantes	5

Los alumnos que piensan que el área del cuadrado grande de la figura A puede ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B son 18 .
Sólo 3 alumnos escriben que no es igual y hay un grupo de 5 respuestas que no ofrecen datos relevantes para el estudio.

RESULTADOS TAREA 2.3. PREGUNTA 9.

Pregunta 9. ***Luis dice que con la figura A y la B puede demostrar el teorema de Pitágoras. Nosotros usamos en clase la figura C para explicar el teorema. Fíjate en la figuras A y B y en las medidas de sus lados ¿Crees que Luis tiene razón? ¿Por qué?***

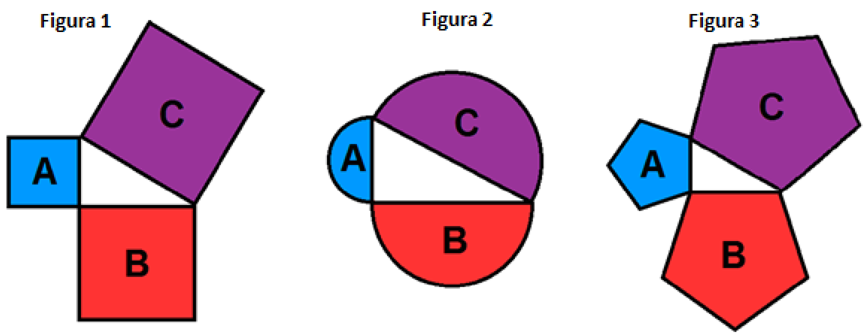
	Frecuencia
Sí, Luis tiene razón. Atendiendo a la distribución de las figuras	11
Sí, Luis tiene razón. Atendiendo a las dimensiones de los lados	4
No, Luis no tiene razón	2
Respuestas en blanco	4
Otras respuestas	7

Casi la mitad de los alumnos estan deacuerdo con Luis. 11 de ellos lo argumentan atendiendo a la distribución de las figuras, de forma que cambiando la posición se obtendría la demostración conocida de Pitágoras. 4 alumnos contestan atendiendo a las dimensiones de los lados y tan sólo 2 escriben que Luis no tiene razón.

En la categoría de otras respuestas no aparecen datos importantes para el análisis.

5.3 DESCUBRIENDO 3. TAREA3. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA

El recurso creado para esta última parte trata también sobre la generalización del Teorema de Pitágoras. Consta de dos tareas. Tarea 3.1 y tarea 3.2.



RESULTADOS TAREA 3.1. PREGUNTA 1.

*Pregunta 1. El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos" **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.***

	Frecuencia
La relación se cumple solo en los cuadrados	13
La relación se cumple tanto para pentágonos como para semicírculos	5
La relación se cumple para cualquier figura	5
La relación se cumple o en pentágonos o en semicírculos	2
Respuestas en blanco	3

Tras identificar los elementos e interpretar las relaciones entre las diferentes figuras, los alumnos formulan sus conjeturas. La relación se cumple solo en los cuadrados, es lo que afirman 13 alumnos. Ente los argumentos que aparecen destacan los que afirman que es así porque en clase no se ha visto para otras figuras. Los alumnos que han contestado que la relación se cumple solo en los cuadrados se apoyan en que el teorema visto en clase se demostró con cuadrados.

La cantidad de alumnos que piensan que la relación se cumple tanto para pentágonos o para semicírculos es la misma que los que piensan que la relación se cumplirá para cualesquiera figuras: un conjunto de 5 alumnos. Se destaca el argumento de quién piensa que la relación se cumple para cualesquiera figuras que se apoyen sobre un triángulo rectángulo y muestran cómo se relacionan los diferentes conceptos.

Algunos hacen mención a que las figuras han de tener un lado que pueda encajar bien con los catetos y la hipotenusa del triángulo rectángulo. Es el motivo por el que dos alumnos afirman que con un círculo no se podría obtener esta relación por carecer de lados.

RESULTADOS TAREA 3.1. PREGUNTA 2.

Pregunta 2. **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos?** ¡Sorprendentemente sí!, la respuesta es que sí. Se cumple la misma relación en las otras dos figuras. Parece increíble, ¿Verdad? Entonces sabiendo esto: ***¿Cómo enunciarías el Teorema de Pitágoras para las otras figuras?***

	Frecuencia
Haciendo uso de la ecuación del Teorema	10
Sin hacer uso de la ecuación del Teorema	15
Respuestas en blanco	3

Para enunciar el teorema de Pitágoras los alumnos se dividen claramente en dos categorías, los que lo enuncian haciendo uso de la ecuación del teorema, $c^2 = a^2 + b^2$ y los que lo enuncian atendiendo al concepto de área sin la expresión de la ecuación. En la primera categoría se encuentra un grupo de 10 alumnos; 6 de ellos utilizan las letras mayúsculas A, B, C, usadas por convenio para designar áreas, para designar las longitudes de los lados de los triángulos.
Otros 15 alumnos enunciaron el teorema atendiendo al concepto de área. Las demás respuestas o quedaron en blanco o son irrelevantes para el trabajo.

Con esta cuestión los estudiantes han podido comprobar las conjeturas que habían hecho previamente.

RESULTADOS TAREA 3.2. PREGUNTA 3.

Pregunta 3. ***Entonces, ¿Crees que se ha demostrado el Teorema de Pitágoras en estos dos casos? Explica tu respuesta.***

	Frecuencia
Se ha demostrado el Teorema de Pitágoras	18
No se ha demostrado el teorema de Pitágoras	4
Respuestas en blanco	3
Respuestas irrelevantes	3

Los alumnos que responden que el teorema de Pitágoras no se ha demostrado lo argumentan escribiendo que faltaría por determinar la relación métrica $\boldsymbol{c^2} = a^2 + b^2$. De nuevo surge la dificultad generalizada en la clase sobre la relación geométrica del teorema.

Por otro lado hay 18 alumnos que afirman que sí se ha demostrado el teorema. Entre los argumentos propuestos destacan los que se fundamentan en que "si sumas las áreas de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado" o en que "se cumple pero faltaría elevar al cuadrado los catetos y la hipotenusa".

RESULTADOS TAREA 3.2. PREGUNTA 4.

Pregunta 4. ***¿Crees que siempre es verdad, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? ¿Por qué?***

	Frecuencia
Siempre con cualquier figura	3
Siempre que las figuras sean iguales	4
Sólo para algunas	13
Si las figuras son círculos no es verdad	2
Respuestas en blanco	1
Respuestas irrelevantes	5

13 de los 28 alumnos creen que siempre es verdad para algunas figuras, dentro de esta categoría los argumentos son entorno a regularidad de lados y semejanza de figuras. Entre ellos, 7 alumnos hacen referencia al concepto de semejanza y 3 hacen referencia al concepto de regularidad en las figuras. Vuelve a aparecer en estas respuestas la idea de que si una figura no contiene un lado que encaje con uno de los lados de un triángulo rectángulo, la relación no se podrá cumplir y lo ejemplifican con el círculo. Las respuestas definidas como irrelevantes carecen de interés para el trabajo por no poseer argumentos en los que sostener el análisis.

Con esta pregunta los estudiantes han de formular conjeturas relacionando conceptos.

RESULTADOS TAREA 3.2. PREGUNTA 5.

Pregunta 5. Voy a ayudarte a comprobar si lo que has pensado es cierto o no. Verás, fíjate en la figura y recuerda de clase. ¿Crees que siempre se cumple, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? Explica la respuesta

	Frecuencia
Siempre que las figuras sean semejantes	11
Siempre con cualquier figura	7
Sólo para algunas	5
No se cumple	3
Respuestas en blanco	1
Respuestas irrelevantes	1

En la primera categoría clasificada 11 de los 28 alumnos afirman que el teorema se cumplirá siempre que las figuras representadas sobre los lados del triángulo rectángulo sean semejantes. En la segunda categoría 7 alumnos contestan que el teorema se cumple siempre sean cuales sean las figuras. Una de estas respuestas se sostiene en el hecho de que si se ha cumplido en todas las figuras mostradas hasta ahora durante la tarea también tendrá que cumplirse en esta ocasión.

Los alumnos que responden que el teorema no se cumple son 3. En sus argumentos se muestra la imprecisión en el concepto de igualdad y la dificultad para identificar el triángulo rectángulo con el cambio de orientación. 5 son los alumnos que afirman que el teorema solo se cumple en algunas figuras; entre sus argumentos se considera la proporcionalidad, la regularidad de la figura y forma geométrica de la figura.

RESULTADOS TAREA 3.2. PREGUNTA 6.

Pregunta 6. ***¿Cómo enunciarías éste famoso Teorema de forma general para estas figuras divertidas?***

	Frecuencia
Lo enuncian atendiendo al concepto de área	11
Lo enuncian atendiendo a la relación métrica del Teorema	5
Lo enuncian atendiendo al concepto de semejanza	5
Respuestas en blanco	3
Respuestas irrelevantes	4

En primer lugar, de los 11 alumnos que contestan atendiendo al concepto de área, 4 escriben que lo que suman son figuras sin escribir la palabra área. Cuando enuncian el teorema atendiendo a la relación métrica, 3 de los alumnos, utilizan las letras mayúsculas usadas en las representaciones gráficas de la tarea para designar un área como medida de los lados de un triángulo. Por otro lado, al enunciar el teorema mediante el concepto de semejanza, aparecen 2 respuestas donde se aprecia que no se comprende el teorema a estudiar. Por ejemplo; "la suma de las figuras semejantes es igual a las que no son semejantes $a' = b' + c'$"

En cuanto a las respuestas irrelevantes para el trabajo se puede destacar la originalidad e imprevisibilidad de los alumnos.

6 BALANCE Y PERSPECTIVA DE LOS RESULTADOS. HIPÓTESIS

En este balance se tienen en cuenta los resultados más relevantes mostrando la influencia del recurso en el análisis de resultados. Hay cuestiones en este método que sólo han servido para dirigir y centrar al alumno en lo que se pretendía conseguir. Además tras exponer los resultados se hace necesaria la realización de un análisis más profundo en el que se intenta dar explicación a algunos de los hallazgos. Desde una experiencia personal, también se escriben algunas razones hipotéticas que podrían fundamentar algunos de los resultados descritos anteriormente.

- Se comienza por la pregunta 1 de la tarea 1.1 donde se destaca que unos 7 alumnos de un total de 28 identificaron todos los triángulos como triángulos rectángulos a pesar de que en la representación gráfica de la tarea aparecían detalladas las medidas de los ángulos.

Esto se cree puede ser debido al desconocimiento de los alumnos de los símbolos asignados a mayor que o menor que (<, >).

- Se comparan las preguntas 3 y 4 de la tarea 1.1. Tanto en una como en otra, los estudiantes hacen las mismas operaciones centradas en buscar el valor desconocido mediante $a^2 = b^2 + c^2$. Sin embargo, en la pregunta 3 aparece un elevado número de respuestas en blanco, concretamente 8. Las respuestas en blanco son debidas a que tras analizar los recursos en papel antes de transcribirlos a este trabajo aparecen indicaciones de los alumnos advirtiendo de que ya han contestado a esta pregunta anteriormente. Es decir, estos alumnos no tienen claro el sentido geométrico del Teorema, se obtienen respuestas donde es el área la que aparece elevada al cuadrado para obtener la relación $a^2 = b^2 + c^2$. En la pregunta 4 aplican el teorema en su sentido métrico sin dificultad. Analizando los datos de esta pregunta 4 se extrae información sobre el tratamiento que hacen sobre la igualdad.

Mi hipótesis es que el concepto de igualdad parecen no tenerlo claro ya que usan el signo asociado al igual sin que lo sea.

- Según los resultados de la pregunta 5 de la tarea 1.2, se observa que un total de 22 alumnos saben lo que es un triángulo rectángulo, sin embargo en la pregunta 1 de la tarea 1.1 hubo 7 alumnos que identificaron los tres triángulos como rectángulos.

De esta forma al comparar los resultados de ambas tareas se cree que aún cobra más importancia la hipótesis basada en el desconocimiento que tienen los alumnos de los signos asociados a menor o mayor que.

- De la tarea 1.2 pregunta 7 se obtiene que la mitad de los alumnos de esta clase de 2º de ESO no conocen el hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo suman 180º. 12 alumnos han identificado el triángulo representado como un triángulo con un ángulo recto y dos de 45º. e isósceles.

Los alumnos o no han recordado en esta tarea la propiedad de un triángulo o la desconocen. El hecho de que la suma de los ángulos de un triángulo sea 180º es una propiedad de la geometría plana, que en el caso de que fuese desconocida para los estudiantes, podría ser fácilmente demostrable a lo alumnos y útil para ellos en el aprendizaje de la geometría en secundaria.

- En la pregunta 9 de la tarea 1.2, hay 7 alumnos que argumenta que María no tiene razón. Mediante los argumentos se observa la dificultad de los alumnos en torno al significado geométrico de teorema a de Pitágoras. Mediante los datos estos alumnos demuestran no comprender que a^2 es el área de un cuadrado de tal forma que despejan para obtener el área pedida: $x^2 = 4^2 + 4^2$; $x^2 = 16 + 16$; $x^2 = \sqrt{32} = 5.65$.

Hay dificultad en los alumnos para la compresión del sentido geométrico del teorema, además se obtienen respuestas donde es el área la que aparece elevada al cuadrado para obtener la relación $a^2 = b^2 + c^2$. Realmente, y desde una experiencia propia y concreta, los alumnos se muestran cómodos con la relación métrica del teorema. Desde 1º de ESO han adquirido de forma metódica el ejercicio de aplicación del teorema en su sentido métrico precipitando ahora en un sobreesfuerzo de los alumnos por aprender la acepción geométrica del teorema y relacionarla con el sentido métrico. Creo que quizás con esta forma, más metódica, de introducir el concepto matemático que nos ocupa se está perdiendo la esencia del aprendizaje. A priori lo que resulta más intuitivo es la visión geométrica del teorema, con este primer nivel de razonamiento adquirido sería mucho más fácil relacionar el sentido métrico y deducirlo.

- En la pregunta 2 de la tarea 2.1, se destaca que 13 alumnos identifican 6 figuras de los cuales 6 escriben que identifican cuatro triángulos y dos cuadrados. En la pregunta 3 y 4 de la tarea 2.1 se destaca que hay alumnos que interpretan que el cambio de posición de los triángulos se da para formar rectángulos y cuadrados. En la pregunta 5 de la tarea 2.1 hay 7 alumnos que identifican 5 figuras, dos cuadrados, dos rectángulos y un cuadrado exterior que limita a éstos y a la región coloreada.

Es interesante la comparación entre estas preguntas, se observa que los alumnos identifican no sólo las figuras coloreadas sino también las región que limita a éstas, siendo esta región otro cuadrado.

- En la pregunta 7 de la tarea 2.2, 10 alumnos afirman que los lados a y b se corresponden con los catetos de un triángulo rectángulo y el lado c es la hipotenusa de este triángulo. Es importante este resultado para interpretar los resultados de la siguiente cuestión. En la pregunta 8 de la tarea 2.2, 18 alumnos piensan que el área del cuadrado grande de la figura A es igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B. 12 alumnos lo argumentan escribiendo que ha de ser igual ya que lo único que cambia es la distribución de las figuras dentro de un mismo espacio e incluso relacionan los lados de los catetos y la hipotenusa para concretar que es un ejemplo de demostración del teorema.

Se puede concluir a partir de los resultados que hay alumnos que han aprendido con el método. Han explicado la nueva demostración del Teorema de Pitágoras basándose en las representaciones gráficas que aparecen en la tarea. Los estudiantes han identificado y comparado los diferentes elementos presentes en las representaciones para finalmente describir la idea matemática que se pretendia que alcanzasen con este recurso.

- En la pregunta 9 de la tarea 2.3, 11 alumnos afirman que Luis tiene razón y exponen argumentos donde se relacionan las dos demostraciones.

Tras este resultado se ve como los alumnos descubren con el método. Esta vez no sólo han identificado y comparado sino que además han relacionado las dos demostraciones del teorema.

- Lo importante a destacar de la pregunta 1 de la tarea 3.1 es que 13 alumnos afirman que la relación se cumple solo en los cuadrados porque el teorema visto en clase se demostró con cuadrados.

Efectivamente, el teorema se presentó en clase con cuadrados, se hicieron tareas con cuadrados, se hizo hincapié en que el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos, pero en ningún momento se generalizó. Los casos peculiares, diferentes y concretos enriquecen el aprendizaje y hace que se afiancen los conceptos. Desde luego estos alumnos llevan razón.

- En la pregunta 3 de la tarea 3.2 se vuelve a reflejar la dificultad de los alumnos para comprender el significado geométrico del teorema de Pitágoras.

Sin duda es la dificultad generalizada no sólo a lo largo de los recursos planteados sino también en la propia instrucción anterior.

El último análisis se hace mediante la comparación de resultados entre preguntas:

- Se sigue con las pregunta 4 y 5 de la tarea 3.2. La pregunta 4 es igual que la pregunta 5. Antes de contestar a la pregunta 5 los alumnos han pasado por un breve recorrido visual por las imágenes creadas en el recurso que dirigen al alumno para ayudarle a formular conjeturas. Lo interesante entonces es comparar los resultados de estas dos cuestiones. Se obtiene que en la pregunta 4 ,7 sostienen que la relación se cumple sólo para algunas figuras haciendo referencia al concepto de semejanza. En la pregunta 5, sin embargo, son 11 alumnos los que ahora afirman que la relación se cumplirá siempre que las figuras sean semejantes.

Se concluye que gracias al método aumenta el número de alumnos que piensan que la relación se cumple cuando las figuras sean semejantes, por lo que han aprendido con el método seguido.

- Se comparan también la pregunta 2 de la tarea 3.1 y la pregunta 6 de la tarea 3.2 en las que ambas pedían que enunciaran el teorema de Pitágoras para las distintas figuras. En la primera, 10 alumnos lo enuncian atendiendo a la relación métrica del teorema y 15 teniendo en cuenta la relación entre áreas. En la pregunta 6 son ahora 11 alumnos lo que lo enuncian mediante la relación métrica, 5 lo hacen mediante la relación entre áreas y 5 mediante el concepto de semejanza.

Se concluye un cambio de razonamiento en los alumnos mediante esta comparación. Han mejorado su pensamiento reflexivo al incorporar nuevos argumentos. Ahora aparece una nueva categoría de respuestas; las basadas en el concepto de semejanza. Se puede decir entonces, que hay alumnos que han aprendido con el método, detectándose una compresión más profunda de los conceptos implicados y dando lugar a respuestas como esta: "sean cuales sean las figuras, mientras formen un triángulo rectángulo y las figuras sean semejantes el Teorema se podrá realizar".

7 CONCLUSIONES

Gracias a los resultados extraídos en ese estudio se puede valorar tanto mi intervención docente durante la experiencia ofrecida por este máster como el método usado para recoger los datos de los alumnos.

Entre las expectativas que esperaba conseguir con el máster estaba la de ser capaz de planificar sesiones previendo las dificultades y los posibles errores que pudieran tener los alumnos y la de poder transmitirles a los estudiantes que las matemáticas se dan en la escuela porque tienen una utilidad en la vida real.

Desde luego y ahora con la experiencia de estos meses de prácticas y tras los resultados obtenidos puedo decir que prever las dificultades de los alumnos no es fácil. Los resultados han demostrado que hay conceptos que no han adquirido todos los alumnos y que los errores han sido reincidentes en varias tareas. El hecho de que no todos los alumnos hayan entendido la relación geométrica del teorema hace que me plantee otras posibilidades en la metodología de acción con las que poder mejorar este déficit.

En cuanto a la expectativa de lograr en los alumnos que vean la utilidad de las matemáticas, en este caso concreto de la geometría, es algo que me ha importado desde el comienzo del máster. Me gustaría que los alumnos fuesen capaces de responder a ¿Por qué nos enseñan Geometría? En mi instrucción he intentado contextualizar las tareas pero creo que me ha faltado tiempo para hacerles ver los distintos campos de aplicación de la geometría. Es necesario que los alumnos valoren la importancia de estudiar matemáticas ya que es la única materia que es estudiada en todas las escuelas del mundo y que cuenta con casi tres milenios de antigüedad. Hay razones para que esto sea así. La geometría es una de las ciencias más antiguas y son las grandes e increíbles posibilidades prácticas de aplicación de esta disciplina lo que la hace una disciplina necesaria en áreas del conocimiento tales como las ciencias e ingeniería. Tanto en el campo teórico-académico, como en la vida cotidiana, la geometría nos rodea, y es parte de la propia humanidad.

En cuanto a los recursos empleados para el estudio se ha intentado introducir los conceptos geométricos mediante figuras utilizando dinámicas y variadas representaciones gráficas. Se han incluido distintas orientaciones en los triángulos rectángulos representados evitando la posición estándar; esto ya se ha venido haciendo desde la instrucción, con el objetivo de que los alumnos no limiten y condicionen su pensamiento geométrico, asociando las propiedades, relaciones e invariantes de las figuras geométricas a características posicionales y de forma que no son necesariamente relevantes.

Se han expuesto casos particulares y especiales para enriquecer la definición personal que elaboran los alumnos sobre un concepto geométrico en cuanto a la generalización y a una nueva demostración del teorema. Creo que los recursos pueden ser recomendables para no mecanizar reglas y relacionar conceptos y ahí reside la importancia de considerarlos de manera frecuente en las diferentes sesiones de una unidad didáctica. Me satisface el haber comprobado que hubo alumnos que descubrieron algo nuevo con el método usado en las distintas partes de los recursos.

La geometría ofrece medios para describir, analizar y comprender el mundo y además ha sido siempre un campo rico en el que los estudiantes pueden descubrir patrones y formular conjeturas (NCTM, 2003. p.313). Por ello, como futura docente, me gustaría plantear estos recursos a mis alumnos enfatizándoles el carácter geométrico y antes de que memoricen fórmulas ya que al ofrecer un repertorio amplio y variado de imágenes para introducir un concepto facilita que no surjan las dificultades o errores en el aprendizaje de este concepto, que aparecen cuando hay una escasa variedad de representaciones llevando a una formación errónea del concepto geométrico.

Tras el máster cursado y el desarrollo de este trabajo se ha acentuado la conciencia sobre la responsabilidad que recae en el docente en cuanto a la enseñanza, comprensión y aprendizaje que los alumnos obtienen de los distintos conceptos matemáticos. Durante este curso de máster ha sido patente el esfuerzo de los profesores por transmitirnos el objetivo de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Este trabajo de innovación no se ha desviado del objetivo, el análisis de todos los datos me ha ofrecido una visión real de las dificultades de los alumnos y de las mías propias en mi instrucción que servirá para la mejora de las futuras intervenciones. Pero además he aprendido a lo largo del año que para conseguir crear una didáctica de la matemática idónea no sólo basta con estar al tanto de las dificultades anteriores sino que además hay que adaptar esta educación a los recursos disponibles y a las circunstancias determinadas. Espero, con la formación recibida y con la que me queda por recibir, ser capaz de ofrecer una educación matemática de calidad.

8 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Arias & Maza. (2014). *Matemáticas 2º ESO.* Bruño.

[2] Barrantes, M., López, M. y Fernández, M. A. (2015). Análisis de las representaciones geométricas en los libros de texto. *PNA*.

[3] Cólera, J. & Gaztelu, I. (2015). *Matemáticas 2º ESO.* Anaya.

[4] Descartes. *La Geometría* (G.AT.VI.369).

[5] Dewey. J. (1933*). Cómo pensamos.* Barcelona. Paidós.

[6] Fernández Blanco, M. (2011*). Una aproximación ontosemiótica a la visualización y el razonamiento espacial* (tesis doctoral). Universidad de Santiago de Compostela.

[7] González y Guillén. (2009). *De la enseñanza / aprendizaje de la geometría en la formación de profesores de primaria a la enseñanza de esta materia en el aula.* Universitat de València. Valencia.

[8] González. P. (2003). *Los orígenes de la geometría analítica.* Tenerife*.* Fundación Canaria Orotava.

[9] Ministerio de Educación y Ciencia, (2007) REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria. BOE, 5, 693 – 754.

[10] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015) Orden ECD/65/2015, de 21 de enero por la que se describen las relaciones entre las competencias, los contenidos y los criterios de evaluación de la educación primaria, la educación secundaria obligatoria y el bachillerato. BOE, 25, 6988 – 6990.

[11] Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015) REAL DECRETO 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. BOE, 3, 176 – 412.

[12] National Council of Teacher of Mathematics (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

[13] OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana.* Madrid: Editorial Santillana.

[14] Puig. L. (1997). *Análisis fenomenológico*. Universidad de Valencia. Valencia.

[15] Rico, L. (2007). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), 47-66.

[16] Stone Wiske, M. (1999). *La enseñanza para la comprensión*. Bs. As. Paidós.

[17] Swan, M., Clarke, N., Dawson, C., Evans, S., Foster, C., Joubert, M., et al. (2015). Proving the Pythagorean Theorem. University of Nothingham. Descargado el 29 de febrero de 2016 de http://map.mathshell.org/download.php?fileid=1756

9 ANEXOS

9.1. ANEXO I. RECURSOS ENTREGADOS A LOS ALUMNOS

Se presentan los recursos tal cual se les entregaron a los alumnos.

Curso 2º ESO

NOMBRE Y APELLIDOS____ DESCUBRIENDO 1

TAREA 1.1 OBSERVA LAS FIGURAS CON DETENIMIENTO Y CONTESTA A LAS PREGUNTAS.

Figura 1

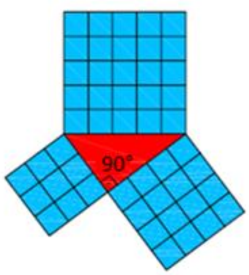


Figura 2

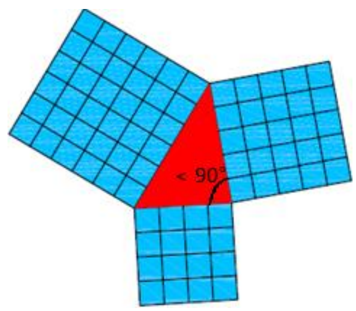
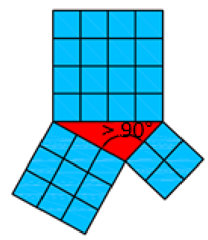


Figura 3



1. **Fíjate bien en los triángulos que hay en cada figura. ¿Son iguales? Observa lo que miden sus lados y sus ángulos: ¿En qué se diferencian?**

- En la primera figura tenemos, claramente, un triángulo rectángulo. ¿Lo recuerdas? En clase usamos cartulina con esos mismos colores para obtener una representación así. Entonces ya sabemos de clase que la relación entre sus áreas es:

“El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos”.

2. **Cuenta los cuadraditos para comprobar si se cumple o no esa misma relación entre las áreas en las otras dos figuras. ¿Qué has obtenido?, (Cada cuadradito pequeño es una unidad de medida).**

- En clase vimos que:

"En un triángulo rectángulo la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de cada uno de los catetos al cuadrado".

$$a^2 = b^2 + c^2$$

3. Describe cómo sería esta relación para los otros dos triángulos.

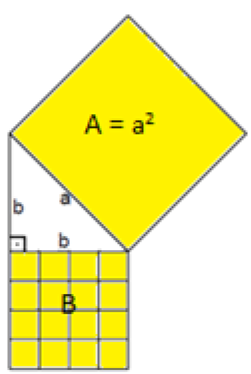
4. Para la primera figura tenemos:

$$5^2 = 4^2 + 3^2 \longrightarrow 25 = 16 + 9$$

Calcula ahora esa relación para la figura 2 y la 3. (***Ayuda: Cuenta los cuadrados de cada lado del triángulo, esa será la medida de cada lado.)*** **¿Qué ocurre con esa relación en la figura 2 y la figura 3? Explícalo.**

TAREA 1.2 FÍJATE AHORA EN ESTA FIGURA:

Figura 4



6. ¿Qué es un triángulo rectángulo?

7. Fíjate en lo que miden los lados del triángulo. ¿Cómo se llaman estos tipos de triángulos rectángulos?

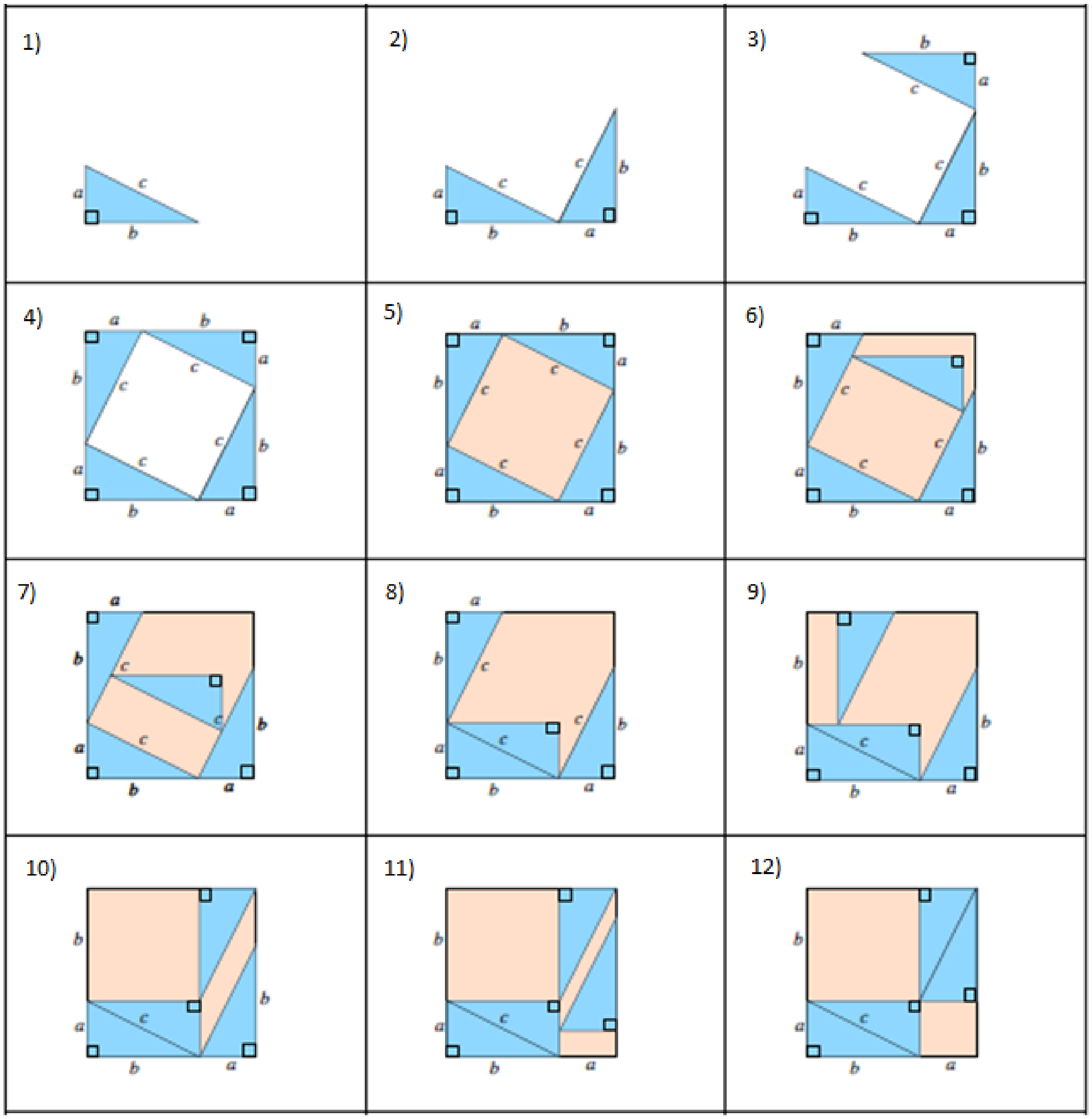
8. ¿Cuánto miden sus ángulos?

9. ¿Cómo sería el cuadrado que falta en la figura, en la zona señalada por una flecha? Dibújalo con lápiz.

10. María dice que ha encontrado que el área del cuadrado A es dos veces la del cuadrado B. ¿Tiene razón? Explica la respuesta.

DESCUBRIENDO 2

TAREA 2.1 A CONTINUACIÓN, SE PRESENTAN UNAS IMÁGENES QUE CORRESPONDEN A UNA SECUENCIA DE PASOS. MIRA CON ATENCIÓN LAS IMÁGENES Y RESPONDE A LAS PREGUNTAS.



1. **¿Qué ha cambiado al pasar de la imagen 1 a la 4?**

2. **¿Cuántas figuras observas en la imagen 5?**

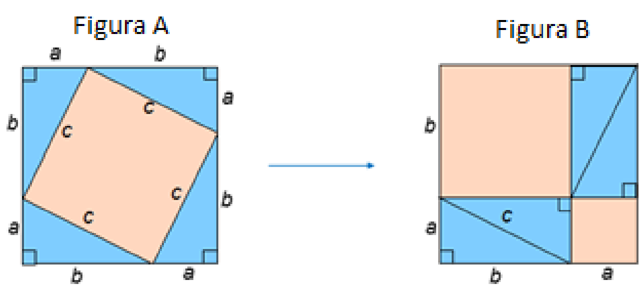
Ahora continúa la secuencia desde la imagen 5:

3. **¿Qué está ocurriendo en las imágenes 6,7 y 8?**

4. **Y en la imágenes 9, 10 y 11 ¿Qué está ocurriendo?**

5. **¿Qué figuras aparecen en la imagen 12?**

TAREA 2.2 AHORA SACAMOS DE LA SECUENCIA ESTAS DOS FIGURAS, FÍJATE BIEN EN ELLAS:



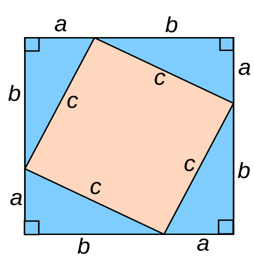
6. **Explica lo que permanece igual y lo que es diferente entre ellas.**

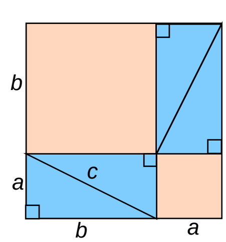
7. **¿Qué relación hay entre los lados de las figuras representadas, a,b y c?**

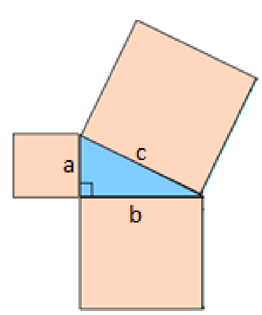
8. **Ya que la distibución de las figuras se produce dentro de una misma región ¿Crees que el área del cuadrado grande de la figura A puede ser igual a la suma de las áreas de los cuadrados pequeños de la figura B? Explica la respuesta.**

TAREA 2.3 SE PRESENTAN LAS SIGUIENTES FIGURAS. VISUALÍZALAS Y CONSTESTA A LA ÚLTIMA PREGUNTA.

Figura A Figura B Figura C



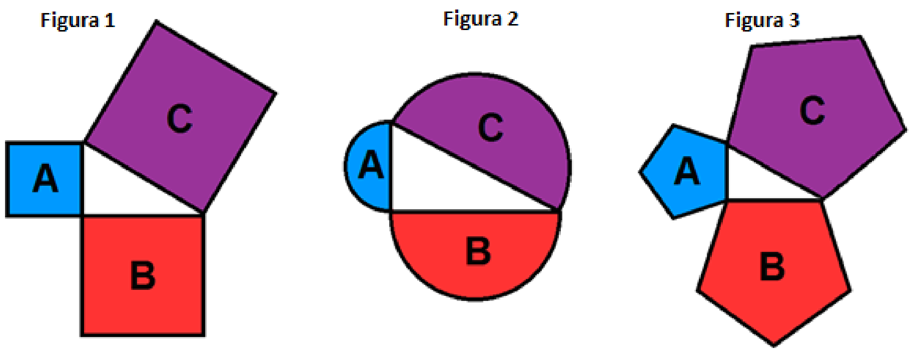




9. **Luis dice que con la figura A y la B puede demostrar el teorema de Pitágoras. Nosotros usamos en clase la figura C para explicar el teorema. Fíjate en la figuras A y B y en las medidas de sus lados ¿Crees que Luis tiene razón? ¿Por qué?**

DESCUBRIENDO 3

TAREA 3.1 OBSERVA LAS SIGUIENTES FIGURAS Y CONTESTA A LAS PREGUNTAS:



- Nuevamente lee la siguiente afirmación que demostramos en clase:

"El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos".

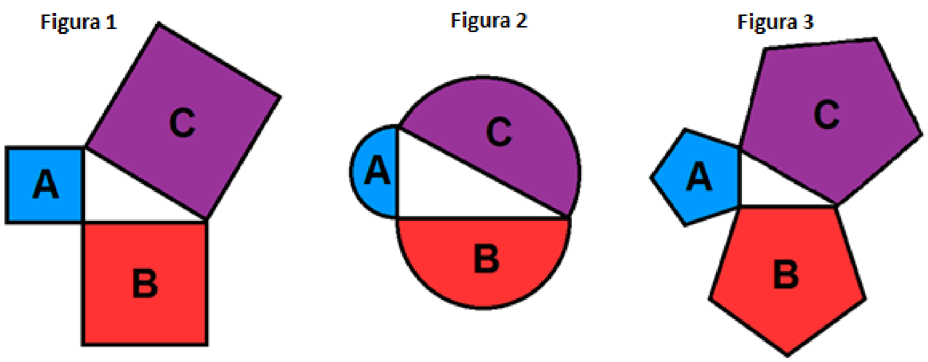
2. **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos? ¿Por qué? Justifica tu respuesta.**

Esta siguiente parte se les entregó una vez que habían finalizado la anterior con el fin de que los resultados fuesen fiables.

Nombre y apellidos____ DESCUBRIENDO 3

Aquí tienes de nuevo la pregunta anterior con la respuesta.

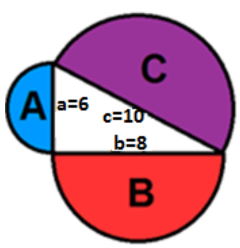
7. **¿Crees que esta relación se cumple solamente para los cuadrados o también se cumple para los semicírculos y para los pentágonos?** ¡Sorprendentemente sí!, la respuesta es que sí. Se cumple la misma relación en las otras dos figuras. Parece increíble, ¿Verdad?



Entonces sabiendo esto:

8. **¿Cómo enunciarías el Teorema de Pitágoras para las otras figuras?**

TAREA 3.2. Y SI AHORA TE DOY MEDIDAS DE LOS LADOS DE LOS TRIÁNGULOS QUE APARECEN EN LAS FIGURAS SIGUIENTES EN CM Y TE FACILITO EL CÁLCULO DE LAS ÁREAS QUE APARECEN SOBRE LOS LADOS DEL TRIÁNGULO:

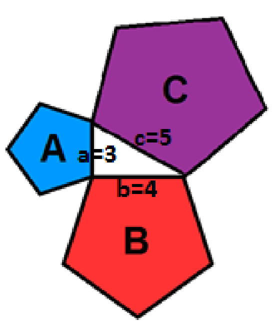


$$\text{Área de un semicírculo} = \frac{\pi \cdot r^2}{2}$$

$$\text{Área del semicírculo C} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2.5^2}{2} = 9.8\ cm^2$$

$$\text{Área del semicírculo B} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 2^2}{2} = 6.3\ cm^2$$

$$\text{Área del semicírculo A} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 1.5^2}{2} = 3.5\ cm^2$$



$$\text{Área de un pentágono} = \frac{\text{Perímetro} \cdot \text{apotema}}{2}$$

$$\text{Área del pentágono C} = \frac{25 \cdot 4.33}{2} = 54.1\ cm^2$$

$$\text{Área del pentágono B} = \frac{20 \cdot 3.46}{2} = 34.6\ cm^2$$

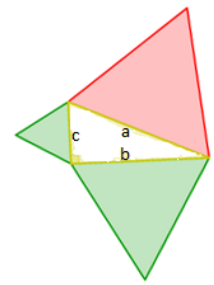
$$\text{Área del pentágono A} = \frac{15 \cdot 2.55}{2} = 19.5\ cm^2$$

9. **Entonces, ¿Crees que se ha demostrado el Teorema de Pitágoras en estos dos casos? Explica tu respuesta.**

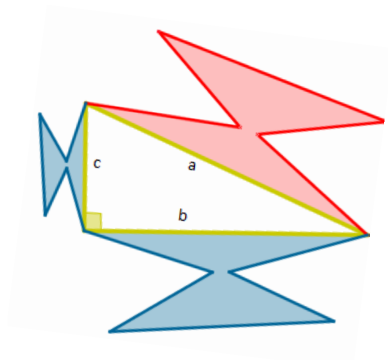
10. **¿Crees que siempre es verdad, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? ¿Por qué?**

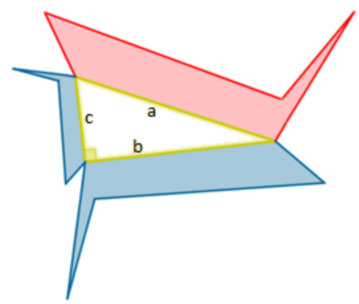
- Voy a ayudarte a comprobar si lo que has pensado en la pregunta anterior es cierto o no. Verás, fíjate en la figura de la derecha y recuerda de clase**:**

  Los tres triángulos que aparecen en la figura, me refiero a los dos triángulos verdes y al rosa tienen la misma forma pero distinto tamaño, son, por tanto, triángulos semejantes.



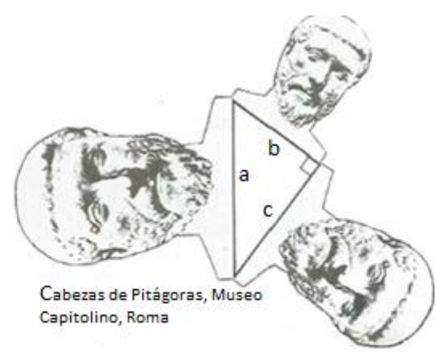
- Observa qué imágenes más divertidas. En ellas también puedes ver que las figuras sobre los lados de los triángulos tienen la misma forma pero distinto tamaño, luego son **figuras semejantes** también.





- Si te digo que también se cumple nuestro famoso Teorema de Pitágoras en estos casos**.** Piensa con detenimiento**:**

11. ¿Crees que siempre se cumple, sean cuales sean las figuras, o sólo para algunas? Explica la respuesta. Observa, también la figura de la derecha, comprueba si lo que piensas es cierto y contesta.



Cabezas de Pitágoras, Museo Capitolino, Roma

12. Y por último, ¿Cómo enunciarías éste famoso Teorema de forma general para estas figuras divertidas?

9.2. ANEXO II. DATOS OBTENIDOS TRAS LA ENTREGA DE LOS RECURSOS

En este anexo se recogen todas las respuestas textuales de los 28 alumnos a las preguntas plateadas y son los datos tratados a lo largo de todo el estudio. En alguna de las tareas ha habido datos repetidos idénticos que no se han transcrito a este trabajo.

DESCUBRIENDO 1. TAREA1. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA

TAREA1.1.PREGUNTA 1

Se exponen las respuestas de los alumnos de forma literal:

- **Las diferencias entre los triángulos vienen dadas por la longitud de sus lados.**
  - *No son iguales se diferencian en los lados.*
  - *Se diferencian en el tamaño.*
  - *No son iguales, se diferencian en el tamaño.*
  - *Se diferencian en el tamaño pero son proporcionales.*
  - *No son iguales pero son semejantes en la medida de sus lados.*
  - *Se diferencian en tamaño pero son iguales.*
  - *No son iguales son semejantes. Se diferencian en que unos tienen lados más grandes que otros.*
  - *No son iguales tienen diferentes medidas.*
  - *No son iguales porque no miden lo mismo.*
  - *Se diferencian en que los lados no son iguales.*

- **Las diferencias son debidas a los ángulos**.
  - *No son iguales porque el 1º su ángulo es de 90º en el 2º menos de 90º y en el 3º más de 90º.*
  - *No son iguales, sólo hay un triángulo rectángulo*
  - *No. El único triángulo rectángulo es el de la figura 1.*
  - *Son iguales tienen un ángulo de 90º.*
  - *No son iguales el 1º es un triángulo rectángulo el segundo es menos que el primero y el tercero es mayor que el segundo.*
  - *Si son iguales tienen ángulos de 90º*
  - *Los triángulos son iguales rectángulos*

- **Las diferencias son debidas tanto a los ángulos como a los lados.**
  - *Son triángulos rectángulos semejantes en los cuales sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales, su ángulo común es el ángulo recto de 90º.*
  - *Los triángulos son iguales en sus ángulos, rectángulos, pero no lo son en sus lados que miden diferente pero de forma proporcional.*
  - *No son iguales porque la medida de sus lados son diferentes y sus ángulos también.*
  - *No, los lados tienen distinta medida y los ángulos también.*
  - *Son tres triángulos rectángulos y se diferencian en la medida de sus lados y por lo tanto, en los cuadrados.*

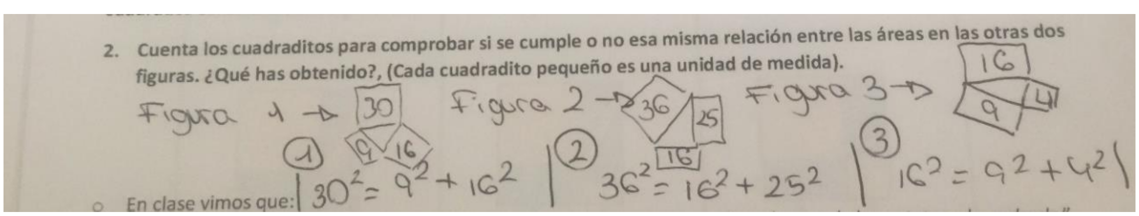
- *Se diferencian en sus ángulos que no son todos de 90º. Uno rectángulo otro obtusángulo y otro acutángulo. Según sus lados son escalenos.*
- *No son iguales tienen diferentes medidas y ángulos.*
- *Son tres triángulos rectángulos y se diferencian en la medida de sus lados.*
- *Son iguales pero se diferencian en el tamaño y en los ángulos.*
- *No, se diferencian en que tienen lados desiguales y en ángulos solo coinciden dos.*

- **De estos dos últimos grupos, 7 contestan que los tres triángulos representados son rectángulos.**
  - *"Los tres tienen un ángulo de 90º"*
  - *Si son iguales tienen ángulos de 90º*
  - *Los triángulos son iguales rectángulos.*
  - *Son triángulos rectángulos semejantes en los cuales sus ángulos son iguales y sus lados son proporcionales, su ángulo común es el ángulo recto de 90º.*
  - *Los triángulos son iguales en sus ángulos, rectángulos, pero no lo son en sus lados que miden diferente pero de forma proporcional.*
  - *Son tres triángulos rectángulos y se diferencian en la medida de sus lados y por lo tanto, en los cuadrados*
  - *Son tres triángulos rectángulos y se diferencian en la medida de sus lados.*

TAREA 1.1. PREGUNTA 2

Se escriben las respuestas que han sido argumentadas por los alumnos de forma literal.

- **No se cumple la misma relación entre las áreas en las figuras 2 y 3.**
  - $5^2 = 3^2 + 4^2, 25 = 9 + 16, \quad 25 = 25$. *Si se cumple.*
    $6^2 = 5^2 + 4^2, 36 = 25 + 16, \quad 36 = 41$. *No se cumple*
    $4^2 = 3^2 + 2^2, 16 = 9 + 4, \quad 16 = 13$. *No se cumple*
  - *En la figura 2 no se cumple si sumas las áreas de los catetos no te da la hipotenusa. En la figura 3 tampoco.*



2. Cuenta los cuadraditos para comprobar si se cumple o no esa misma relación entre las áreas en las otras dos figuras. ¿Qué has obtenido?, (Cada cuadradito pequeño es una unidad de medida).

Figura 1 → 30 9 16 Figura 2 → 36 25 16 Figura 3 → 16 9 4

o En clase vimos que: (1) $30^2 = 9^2 + 16^2$ | (2) $36^2 = 16^2 + 25^2$ | (3) $16^2 = 9^2 + 4^2$

  - *No se cumple esta relación en las figuras 2 y 3 ya que la suma de los catetos elevados al cuadrado es mayor que la hipotenusa y en la otra la relación es menor.*
  - *En la figura 2 no se cumple porque el área del cuadrado de la hipotenusa es 36 pero la de los catetos es 41. En la tercera tampoco, porque la suma del área sobre la hipotenusa es 16 y la de los catetos suman 13.*

- *En la figura 2 no se cumple porque el área del cuadrado de la hipotenusa es 36 y la de los catetos es 41, en la tercera pasa lo mismo que no cumple.*
- *En la figura 2 no se cumple porque el área del cuadrado de la hipotenusa es 36 pero la de los catetos es 41. En la tercera tampoco, porque la área sobre la hipotenusa es 16 y la suma del área de los catetos suman 13.*
- *No se cumple la relación y es porque no son rectángulos.*
- **"***No coinciden ya que hay más cuadraditos en la suma en los cuadraditos de los catetos que en los de la hipotenusa."*
- *No se cumple la relación.*

- **La relación entre áreas solo se cumple en la figura 1.**
  - *Sólo el primero cumple la relación.*
  - *Si se cumple para el primero.*
  - *25=16+9.Figura 1; lados hipotenusa= 25, lados de los dos catetos= 25.*

- **La relación entre áreas se cumple en la figura 1 y no en la figura 2 y 3**.
  - *No se cumple ya que no son triángulos rectángulos. El 1º si cumple el Teorema de Pitágoras, los otros dos no.*
  - *La figura 1 si lo cumple, 25=25, pero la 2 y la 3 no. 41≠36, 13≠16.*
  - *La figura 1 si lo cumple pero la 2 y la 3 no.*
  - *La figura 1 si lo cumple pero la 2 y la 3 no.*
  - *Se cumple la relación para la 1º figura pero no para las otras dos, ya que en la figura 2 no se cumple porque el área del cuadrado de la hipotenusa es 36 pero la de los catetos es 41. En la tercera tampoco, porque la suma del área sobre la hipotenusa es 16 y la de los catetos suman 13.*

- **Respuestas irrelevantes**
  - *La primera y la tercera tienen dos cuadrados iguales, la segunda tiene sólo uno.*
  - *Figura 1; 5+3+4=12. Figura 2; 6+5+4=15. Figura 3; 4+3+2=9*
  - *Obtuve el total de cuadraditos que hay en el cuadrado grande.*
  - *Fig. 2; (5, 4,6), Fig. 3; (2, 3,4).*
  - *Figura 1; a =25, b=16, c=9*
    Figura2; a=36, b=25, c=16
    Figura 3; a=16, b=9, c=4
  - *Figura 1;* $a^2 = 25cm^2$, $b^2 = 16cm^2, c^2 = 9cm^2$
    Figura 2; $a^2 = 36cm^2, b^2 = 25cm^2, c^2 = 16cm^2$
  - *Obtenemos el teorema de Pitágoras con todos los datos por lo que estamos comprobando si las medidas son ciertas.*

TAREA 1.1. PREGUNTA 3

- **La relación en la figura 2 y 3 es igual que en la figura 1.**
  - *Para las figuras 2 y 3:* $6^2 = 5^2 + 4^2, 4^2 = 3^2 + 2^2$
  - *Pues sería lo mismo en los otros triángulos, la hipotenusa que es igual a los dos catetos.*
  - $5^2 = 3^2 + 4^2$,$6^2 = 5^2 + 4^2$, $4^2 = 3^2 + 2^2$.

- *25=9+16, 36=25+16, 16=9+9*
- $6^2 = 5^2 + 4^2,\ 4^2 = 3^2 + 2^2$
- $6^2 = 5^2 + 4^2,\ 4^2 = 3^2 + 2^2$
- $6^2 = 5^2 + 4^2,\ 4^2 = 3^2 + 2^2$
- *25=9+16, 36=25+16, 16=9+9*

- **La relación en la figura 2 y 3 es distinta que en la figura 1**.
  - *Sería que la suma de los catetos al cuadrado es mayor o menor que la hipotenusa al cuadrado.*
  - $a^2 \neq b^2 + c^2$
  - $6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16 , mayor*
    $4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4=13, este es menor.*
  - *Es igual que la anterior:* $Para\ la\ figura\ 2,\ 6^2 \neq 5^2 + 4^2$*,*
    $Para\ la\ figura\ 3,\ 4^2 \neq 3^2 + 2^2$

- **No hay relación en las figuras 2 y 3.**
  - *No tiene ninguna relación ya que no son triángulos rectángulos.*
  - *No tienen relación porque no son triángulos rectángulos.*
  - *No tiene relación*
  - *El teorema de Pitágoras solo se cumple en triángulos rectángulos.*
  - *Esta relación saldría errónea al aplicar Pitágoras con la fórmula* $a^2 = b^2 + c^2$
  - *En el primero habría que hacer el teorema de Pitágoras y en el segundo y el tercero no se puede hacer porque no es un triángulo rectángulo.*

- **Hay una pregunta suelta**
  - *Igual que en el ejercicio anterior*
  - *Igual que en el ejercicio anterior*

TAREA 1.1. PREGUNTA 4

Se presentan las respuestas de los alumnos por categorías

- **Ocurre que no se cumple la relación porque las sumas de los catetos al cuadrado no es igual a la hipotenusa al cuadrado.**
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=41*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16=13*

  $no\ se\ cumple\ la\ relación\ porque\ la\ suma\ de\ los\ catetos\ no\ es\ igual\ a\ la\ hipotenusa\ al\ cuadrado$
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=41 es mayor (obtusángulo)*

  $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16=13 es menor (acutángulo)*
  - *No se cumple porque en la figura 2 da 36 que no es igual a 25+16 y en la figura 3 da 16 no es igual a 9+4.*
  - $Figura\ 2, 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16. No se cumple.*
    $Figura\ 3, 4^2 = 3^2 + 2^2$*; No se cumple tampoco.*
  - $6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*

$4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
$No\ estan\ bien\ porque\ el\ resultado\ no\ es\ igual$

- *Que no es correcta porque 36≠25+16 y 16≠9+4*
- $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=41*
  $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16=13*
  No se cumple la relación por la suma de los catetos.
- *Que no se podría hacer porque "a" no es lo mismo que b+c o en este caso, (figura 2), 36 no es igual que 25+16. Igual pasa en la figura 3.*
- $6^2 = 5^2 + 4^2$; 36=25+16
  $4^2 = 3^2 + 2^2$; 16= 9+4
  Con estas cuentas lo que pasa es que no nos dan los números que queremos

- **Operan sin argumentar**
  - $6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $4^2 = 3^2 + 2^2$*=13*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$; 36=25+16
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$; 16= 9+4

- **Ocurre que no se cumple la relación porque no son triángulos rectángulos**
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=41*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16=13*
    No funciona Pitágoras porque no son rectángulos.
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=25+16*
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16= 9+4*
    No hay relación porque no son triángulos rectángulos.
  - $Figura\ 2, 6^2 = 5^2 + 4^2$*; 36=41*
    $Figura\ 3,\ 4^2 = 3^2 + 2^2$*; 16=13*
    No son triángulos rectángulos porque la hipotenusa no es lo mismo que la suma de los dos catetos.
  - *En este caso la hipotenusa no está de forma proporcional con los catetos por lo que el ángulo entre los dos catetos no es recto. 36≠25+16 y 16≠9+4*

- **Otras respuestas**
  - Que en la primera y la segunda sale lo mismo y con la tercera no se puede.
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$; 36=25+16=41
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$; 16= 9+4= 13
    Al aplicar la fórmula resulta que los resultados no son correctos por lo que los datos de los triángulos no son perfectos.
  - Igual que la pregunta 2.
  - $Figura\ 2\ 6^2 = 5^2 + 4^2$; 36=25+16
    $Figura\ 3\ 4^2 = 3^2 + 2^2$; 16= 9+4
    Ocurre que no se cumplen las relaciones entre las áreas.

TAREA 1.2. PREGUNTA 5

- **Triángulo que contiene un ángulo recto.**
  - *Es un triángulo con un ángulo recto 90º*
  - *Es un triángulo con un ángulo recto*
  - *Un triángulo que tiene u ángulo de 90º*
  - *Triángulo con un ángulo recto.*
  - *Triángulo con ángulo de 90º.*
  - *Un triángulo que tiene un ángulo de 90º.*
  - *Cuando uno de sus ángulos mide 90º*
  - *Un triángulo con 90º de apertura en uno de sus ángulos.*
  - *Triángulo en el que uno de sus ángulos mide 90º.*
  - *Aquel que tiene un ángulo recto 90º*
  - *Es una figura plana con tres lados y un ángulo de 90º*
  - *Es una figura que con dos de sus lados se forma un ángulo de 90º*

- **Triángulo que contiene un ángulo de 90º y los otros ángulos son menores de 90º.**
  - *Es un triángulo que tiene un ángulo recto y los demás agudos.*
  - *Un triángulo formado por un ángulo de 90º y otros menores.*
  - *Es aquel que tiene un ángulo recto y dos agudos.*
  - *Figura con dos ángulos agudos y uno recto.*
  - *Es una figura que con dos de sus lados se forma un ángulo de 90º*

- **Triángulo formado por un ángulo recto entre dos catetos y la hipotenusa.**
  - Triángulo que tiene un ángulo recto y se compone de dos catetos y una hipotenusa.
  - Un triángulo que tiene el ángulo que une los dos catetos de 90º.
  - Es una figura geométrica formada por tres lados, dos llamados catetos que forman un triángulo rectángulo y una hipotenusa.
  - Aquel que tiene un ángulo recto 90º y tiene hipotenusa y dos catetos.

- **Triángulo que contiene un ángulo recto formado por los catetos y otros dos agudos debido a la hipotenusa.**
  - *Triángulo que tiene dos ángulos agudos y uno recto 90º. Formado por dos catetos y la hipotenusa.*

- **Respuestas sin categorizar**
  - *Es un tipo de triángulo que al juntar uno con otro se forma un rectángulo.*
  - *Triángulo con tres lados iguales*
  - *Que todos sus ángulos son iguales.*
  - *Una figura plana con un ángulo de 90º con dos lados iguales y otro diferente.*

TAREA 1.2. PREGUNTA 6

Las respuestas argumentadas por los alumnos y reflejadas de forma literal son:

- **Los triángulos de este tipo se llaman isósceles.**
  - *Isósceles. Dos lados iguales y otro desigual.*
  - *Isósceles, ya que tiene dos lados iguales.*
  - *Tiene dos ángulos iguales otro diferente.*

- **Los triángulos de este tipo se llaman escalenos.**
  - *Escaleno, ningún lado del triángulo es igual.*

- **Los triángulos de este tipo se llaman equiláteros.**
  - *Equiláteros o terna pitagórica.*

- **Otras respuestas.**
  - *Acutángulo*
  - *Obtuso*
  - *Catetos*

El resto de respuestas que no aparecen coinciden con las que ya están, es decir sólo contestan que el triángulo es isósceles.

TAREA 1.2. PREGUNTA 7

Se exponen las respuestas argumentadas de forma literal de los alumnos.

- **Sus ángulos miden 90º, 45º y 45º.**
  - *Los señala en el dibujo perfectamente 90º, 45º y 45º*

- **Un ángulo mide 90º y los demás menos de 90º.**
  - *90º, 40º, 40º*
  - *90º, 60º,60º*
  - *Uno 90º, otro 80º aprox y el tercero 80º aprox*

- ➢ *90º+30º+30º=180º*
- ➢ *Uno mide 90º y los otros menos de 90º*
- ➢ *C y b miden 90º , c y a 60º y b y a 60º*
- ➢ *90º, 60º,60º*

- **Todos sus ángulos son de 90º.**
  - ➢ **Todos son de 90º**

- **Uno de sus ángulos mide 90º y los otros dos miden lo mismo.**
  - ➢ Uno de sus ángulos mide 90º y los otros dos miden iguales.
  - ➢ Uno de ellos es 90º y los otros dos miden lo mismo.

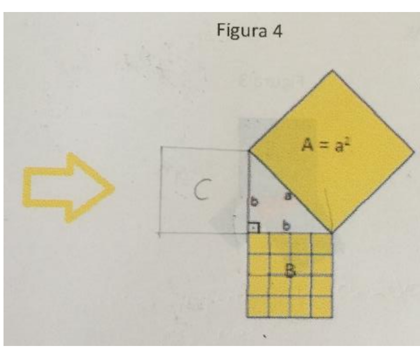
- **Respuestas irrelevantes.**
  - ➢ *Sus lados miden 1cm y medio los catetos y 2cm la hipotenusa*
  - ➢ *A = 6cm, b= 4 cm y C= 4cm*

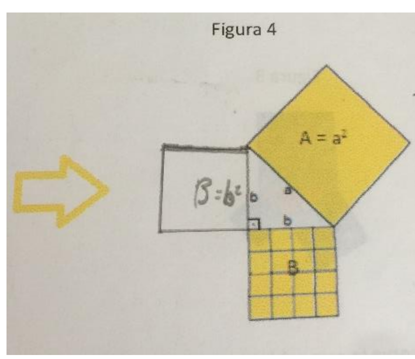
El resto de respuestas que no aparecen coinciden con las que ya están escritas y no se argumentan.

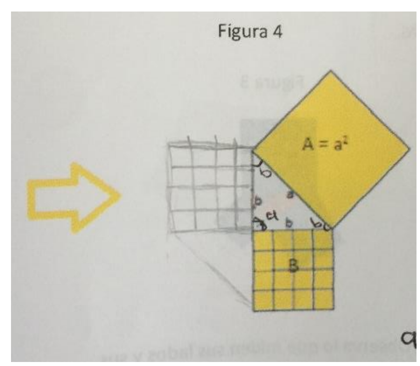
TAREA 1.2. PREGUNTA 8

Se exponen las fotografías de algunas representaciones gráficas de los cuadrados de los alumnos.

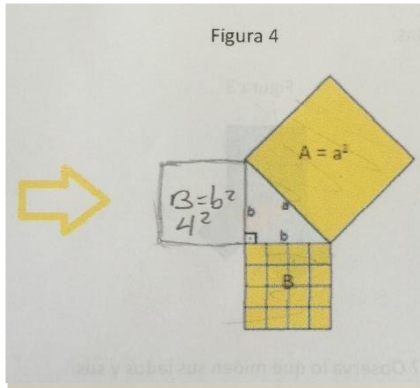
- **Igual que B.**
  - ➢ Igual que B porque el lado mide los mismo.

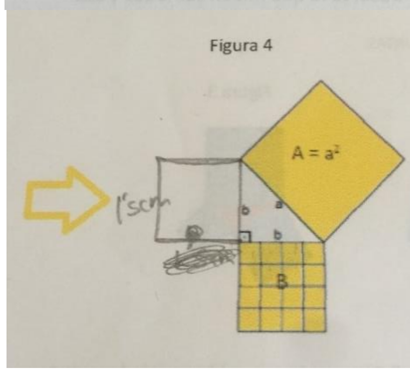




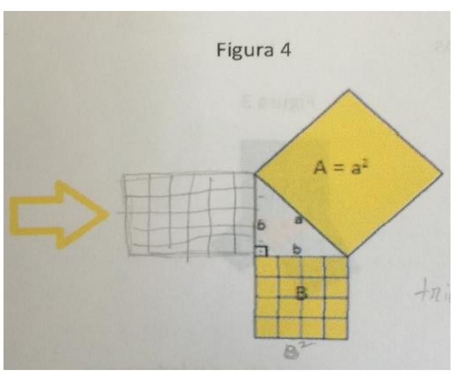


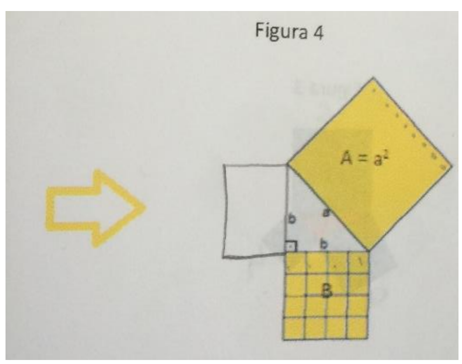
- Cuadrado de lado 1.5 cm igual que b

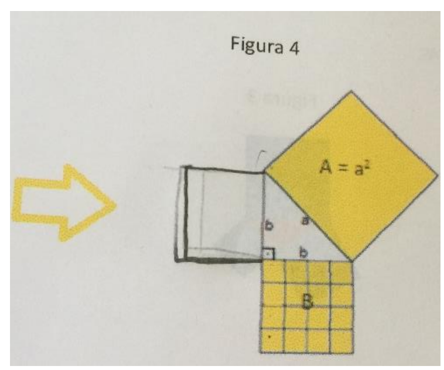




- **No igual que B.**







No se presentan argumentos para esta categoría.

TAREA 1.2. PREGUNTA 9

Se exponen las respuestas que se han argumentado por los alumnos de forma literal.

- **María sí tiene razón.**
  - *Si, porque la suma de las áreas de los dos catetos es igual al área de la hipotenusa.*
  - *Si porque los dos lados b miden lo mismo y la suma da el cuadrado A (* $a^2 = b^2 + c^2$) $A = 32$
  - *Si porque el Teorema de Pitágoras es* $a^2 = b^2 + c^2$
  - *Si porque* $h^2 = c^2 + c^2$ *y el cuadrado A es igual a la suma de los dos catetos.*
  - *Si porque los dos catetos son iguales y multiplicar uno por dos es lo mismo que sumarlos.*
  - *Si tiene razón ya que la hipotenusa la cuadrado es igual a un cateto al cuadrado más otro al cuadrado* $a^2 = b^2 + c^2$*. Pero como no tenemos C se coje B y se multiplica por dos debido a que la hipotenusa tiene que ser más grande que los catetos.*
  - *Si porque al ser el triángulo isósceles los catetos miden lo mismo y el área de la hipotenusa (cuadrado A) es igual a la suma de los catetos b y c.*
  - *Si porque aunque no sabemos cuanto mide el cuadrado a nos han explicado que el teorema d ePitágoras dice que la suma de los catetos es igual a la hipotenusa en los tiángulos rectángulos y como es el caso se cumplirá*
  - *Si porque al aplicar el teorema d ePitágoras nos sale igual* $x^2 = 4^2 + 4^2$*; x=*$\sqrt{32}$
  - *Si porque el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo es igual a la suma d elas áreas d elos cuadrados construidos sobre los catetos.*
  - *Si, tiene razón porque b mide cuatro y a mide ocho entonces sería,* $4^2 = 16;\ 8^2 = 32$
  - *Si tiene razón ya que el área del cuadrado A es la suma de el cuadrado B más el otro cuadrado que hemos dibujado.*
  - *Si la suma de las áreas de B y de C es igual a A.*
  - *Si tiene razón porque* $A^2 = B^2 + B^2$*. El teorema nos dice que la suma de los catetos es igual a la hipotenusa.*
  - *Si es correcta porque los dos cuadrados de los catetos miden igual y la suma de ellos es* a^2*.*
  - *Si porque el área del cuadrado grande es igual a la suma de los cuadrados pequeños y estos parecen ser iguales , aunque no siempre suele ser así ya que los cuadrados pequeños pueden ser de diferente medida. Entonces si son iguales* $a^2 = b^2 + b^2$*,* $a^2 = b^2 \cdot 2$

- **María no tiene razón.**
  - *No tiene razón porque B=*4^2 *y si fuese el doble sería A=*$8^2 = 64$.
  - *No porque A no es igual a B+C.*
  - *No porque según las medidas el B no es el doble del A*
  - $x^2 = 4^2 + 4^2;\ x^2 = 16 + 16; x^2 = \sqrt{32} = 5.65.\ Así\ que\ no\ tiene\ razón\ por\ que\ el\ área\ da\ parox\ 7.20$
  - *No porque la raíz cuadrada de A es:* $\sqrt{32}$
  - *No el cuadrado A mide 6 y el b 4.*
  - *No tiene razón.*

- **Respuesta sin clasificar.**
  - $x^2 = 15^2 + 16^2, x \quad = \sqrt{258.25} = 16.7$

DESCUBRIENDO 2. TAREA 2. DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

TAREA2.1.PREGUNTA 1

- **Con 4 triángulos rectángulos se ha formado un cuadrado**
  - *Que se ha completado el cuadrado*
  - *Que en la imagen 1 sólo teníamos un tiángulo rectángulo y en la 4 hemos formado el contorno de un cuadrado con 4 tiángulos rectángulos*
  - *Que con 4 triángulos rectángulos se ha formado un cuadrado*
  - *Que se han multiplicado los triángulos hasta formar un cuadrado*
  - *Se ha formado un cuadrado con 4 triángulos rectángulos*
  - *Que hay 3 triángulos más formando así un cuadrado cental*
  - *Que de un tiángulo rectángulo poniendo cuatro lo transforman en un cuadrado.*
  - *Ha cambiado que con 4 tiángulos rectángulos se han fomado dos cuadrados*
  - *Se han ido añaiendo triángulos hasta formar un cuadrado*
  - *Se ha formado un cuadrado a partir de triángulos rectángulos.*
  - *Se ha unido 4 tiángulos dejando un hueco para un cuadrado.*
  - *Que 4 triángulos han formado un cuadrado.*
  - *Que el triángulo se multiplica por 4 formando un cuadrado*
  - *Que se han añadido 3 triángulos más construyendo un cuadrado en el medio.*
  - *Que los 4 triángulos rectángulos han formado un cuadrado.*
  - *Ha pasado de haber un triángulo rectángulo a haber 4 triángulos rectángulos que forman un cuadrado.*

- **Ahora hay 4 triángulos**
  - *Que se añadieron más figuras*
  - *Que se han añaido 3 triángulos iguales*
  - *Ahora hay 4 tiángulos*
  - *Aparecen más triángulos*
  - *Se han añadido 3 tiángulos más.*
  - *Que hay 4 triángulos más*
  - *Que ahora hay 4 triángulos.*

- **Ahora hay un cuadrado**
  - *Pues que ha formado un cuadrado*

- **Otras respuestas**
  - *De tener una sóla figura a tener 4.*

- *Se han ido colocando tiángulos y se ha formado un cuadrado y dentro se ha formado otro cuadrado.*
- *Se ha pasado de ser triángulos a formar dos cuadrados*
- *Que han añadido triángulos y han formado un cuadrado que en su interior tiene un rombo.*

TAREA2.1.PREGUNTA 2

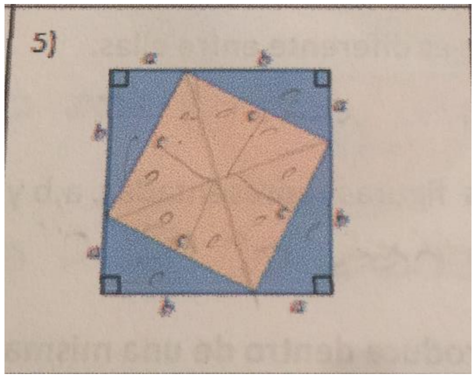
Se presentan las respuestas que dieron los alumnos de forma literal.

- **Se observan 5 figuras**
  - *5 figuras los cuatro triángulos y el cuadrado*
  - *5 figuras*
  - *5 figuras*
  - *Cuatro triángulos y un cuadrado*
  - *5*
  - *5 figuras. Cuatro triángulos y un cuadrado*
  - *5 figuras. Cuatro triángulos y un cuadrado*
  - *5 figuras. Cuatro triángulos y un cuadrado*
  - *5 figuras. Cuatro triángulos y un cuadrado*
  - *5*
  - *Cuatro triángulos y un cuadrado*

- Se observan **6** figuras
  - *6*
  - *4 triángulos y dos cuadrados.*
  - *Se ven dos figuras diferentes 2 cuadrados y 4 tiángulos*
  - *6. 4 triángulos y 2 cuadrados*
  - *6*
  - *6*
  - *6. 4 triángulos rectángulos y 2 cuadrados*
  - *6. 1 cuadrado, un rombo y 4 triángulos*
  - *4 tiángulos y dos cuadrados*
  - *6 figuras*
  - *6. 4 tiángulos y dos cuadrados*
  - *6*
  - *6*

- **Otras respuestas**
  - *Dos*

- *12 triángulos rectángulos*



- *3 figuras*
- *2 figuras*

TAREA2.1.PREGUNTA 3

Se presentan las respuestas de los estudiantes de forma literal

- **El triángulo de la esquina superior derecha se desliza hacia abajo**
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo
  - Uno de los triángulos rectángulos se ha ido bajando hasta que se ha puesto en el centro
  - Que el triángulo baja por el cuadrado quedándose en el medio
  - Se desplaza el triángulo
  - El tiángulo de arriba a la derecha baja hacia el centro d ela figura
  - Se desplaza un tiángulo
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo hacia la mitad d ela figura
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo
  - El triángulo se esta desplazando por su lado c
  - El triángulo del lado superior derecho cambia d e posición
  - El triángulo del lado superior derecho esta bajando
  - Se ha bajado un triángulo
  - El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo por el cuadrado

- **Se relacionan más cosas no sólo se quedan en el desplazamiento del triángulo**
  - El triángulo rompió la forma moviéndose para el centro naciendo un cuadrado y un rectángulo
  - Podemos decir que el cuadrado se ha cortado en dos partes
  - El cuadrado a pasado a ser un rectángulo el triángulo rectángulo de arriba a la derecha ha cambiadosu posición dejando pasar a una figura nueva

- El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo para juntarse con oto tiángulo.
- En la 6 el triángilo que baja a formado un cuarado y en la 7 ha formado un rectángulo
- Se estan formando más figuras diferentes pasando de un cuadrado a un rectángulo y el triángulo se ha situado en el centro
- El triángulo del lado superior derecho se desliza hacia abajo para juntarse con otro tiángulo

- **Otras respuestas**
  - El rectángulo que había le han quitado una parte y se le han puesto arriba a la otra figura rosa
  - Que hay triángulos iguales
  - Han metido un triángulo y han sacado otro
  - Que se añaden triángulos rectángulos a los cuadrados del centro

TAREA2.1.PREGUNTA 4

Se escriben las respuestas literales de los estudiantes

- **Se mueven los triángulos**
  - *Se van moviendo los triángulos*
  - *El triángulo superior izquierdo se esta desplazando hacia el triángulo inferior derecho*
  - *Están cambiando los triángulos de sitio*
  - *Han movido el triángulo*
  - *Otro triángulo ha sido trasladado*
  - *Pasa como antes el triángulo d ela esquina izquierda se junta con en el de la derecha*
  - *Se desplaza el tiángulo d ela izquierda hacia la derecha*
  - *Se mueve el tiángulo de arriba d e la izquierda y también se mueve un poco el de abajo*
  - *Se ha movido el triángulo d ela esquina superior izquierda y también el de la esquina derecha, abajo.*
  - *Que el triángulo rectánulo d ela esquina superior izquierda se mueve hacia la derecha.*
  - *Un tiángulo que estaba en la esquina de arriba a al izquierda se mueve hacia la derecha y el de abajo a la derecha se mueve hacia arriba*
  - Uno d elos triángulos se mueve y otro en la figura 9 se mueve hacia arriba hasta coincidir con el de antes

- **Se mueven los triángulos para obtener otra cosa**
  - *Los otros dos tiángulos han formado un rectángulo*
  - *El rectángulo ha segudo rotando hasta tener la imagen 11*
  - *El triángulo se junta con otro y forma un rectángulo y un cuadrado*
  - *Los triángulos azules se mueven para formar dos cuadrados y dos rectángulos*
  - *Que los triángulos que faltan también se mueven para formar un rectángulo*
  - *El triángulo se mueve haciendo que disminuya la figura del centro*

- *Se están juntando los tiángulos para formar rectángulos iguales y dos cuadrados*
- *Que los triángulos que faltan también se mueven para formar un rectángulo*
- *Que el triángulo izquierdo de arriba y el d ela otra esquina estan moviéndose para unirse y formar otro rectángulo*
- *Los dos triángulos se han ido desplazando uno hacia la derecha y otra hacia arriba y a formado un rectángulo*

- **Otras respuestas**
  - A partir de triángulos rectángulos se forman figuras.
  - Se está dividiendo el cuadrado
  - Que hay 4 tiángulos iguales y un rectángulo
  - Ha vuelto aparecer un cuadrado y la otra figura se ha ido encogiendo
  - El tiánulo d ela izquierda s emueve a la derecha y el de debajo de la derecha ha subido quedándose las hipotenusas paraleslas

TAREA2.1.PREGUNTA 5

Se escriben las respuestas literales de los estudiantes

- **Aparecen 4 figuras: dos cuadrados y dos rectángulos**
  - *Dos cuadrados y dos rectángulos formados por triángulos.*
  - *Se forman dos rectángulos y dos cuadrados*
  - *Cuadrados ,triángulos y rectángulos*
  - *2 rectángulos y dos cuadrados*
  - *4 triángulos rectángulos y dos cuadrados*
  - *2 rectángulos y dos cuadrados*
  - *Dos cuadrados uno más grande que el otro y dos rectángulos de las mismas medidas.*
  - *4 triángulos rectángulos, 2 cuadrados, 2 rectángulos*
  - *Dos cuadrados, dos rectángulos(dento de ellos dos triángulos)*
  - *2 cuadrados y dos rectángulos*
  - *2 cuadrados y 2 rectángulos*
  - *2 cuadrados y otros dos rectángulos*
  - *Dos rectángulos y dos cuadrados semejantes.*

- Aparecen **5 figuras: dos cuadrados, dos rectángulos y el cuadrado de alrededor**
  - *5 figuras. 2 cuadrados, 2 rectángulos y el cuadrado de alrededor*
  - *2 rectángulos formados por 4 tiángulos rectángulos unidos y 3 cuadrados*
  - *Hay un cuadrado en el que dentro hay 2 cuadrados y 2 rectángulos. Cada rectángulo esta formado por dos triángulos.*
  - *3 cuadrados 2 rectángulos y 4 triángulos*
  - *Ahora hay 3 cuadrados*
  - *2 rectángulos 3 cuadrados y 4 triángulos*

- *4 triángulos, 2 rectángulos, un cuadrado y dos cuadrados más pequeños*

- **Otras Respuestas**
  - *Aparecen dos cubos y dos rectángulos que son 4 tiángulos*
  - *4 tiángulos iguales y dos rectángulos*
  - *1 cuadrado 1 rectnagulo y un triángulo rectángulo*
  - *Se forman dos rectángulos y un cuadrado.*
  - *4 tiángulos, un rectángulo y un cuadrado*

TAREA2.1.PREGUNTA 6

Se exponen las respuestas de los alumnos de forma literal.

- **Lo que cambia es la posición de los triángulos.**
  - *Esta igual el triángulo de la esquina izquierda de abajo y esta diferente que han cambiado de sitio todos los triángulos menos el de la esquina izquierda de abajo.*
  - *Los tiángulos cambiaron a ser rectángulos y los cuadrados permanecieron.*
  - *Todo sigue igual pero las figuras estan cambiadas de sitio.*
  - *Permanecen iguales los triángulos de lados a, b, c, pero han cambiado de sitio.*
  - *Han cambiado de sitio los tiángulos pero siempre en la misma orientación.*
  - *Los triángulos de los lados se van juntando y ha quedado dos cuadrados uno grande y otro pequeño.*
  - *Los triángulos siguen igual, la diferencia es que han cambiado de distibución.*
  - *Todo es igual pero cambiando de posición los triángulos unidos formando rectángulos y el cuadrado dividido en dos.*
  - *Igual sigue el contorno cuadrado. Diferente: se han formado diferentes figuras, antes había 1 cuadrado y muchos triángulos rectángulos y ahora dos rectángulos y dos cuadrados más el cuadrado del contorno.*
  - *Hay cuatro triángulos iguales, la diferencia es que ahora hay dos cuadrados y dos rectángulos.*
  - *Permanecen igual los triángulos rectángulos y la diferencia es que ahora forman dos cuadrados.*
  - *Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda y el cuadrado de fuera, cambian la posición del resto de figuras.*
  - *Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda, los otros tiángulos se han movido y por tanto forman figuras diferentes.*
  - *Lo que permanece igual es un cuadrado grande y permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda. Los otros tres tiángulos se han movido.*
  - *Permanece el cuadrado en el que están inscritos los triángulos, se crean dos rectángulos y dos cuadrados sl moverse los tiángulos.*
  - *Los triángulos cambiaron a ser rectángulos y el cuadrado cental se ha dividido en dos cuadrados.*
  - Que están inscritos en un cuadrado, cambia la posición de figuras.

- **Permanece igual el triángulo de la parte inferior del cuadrado de la izquierda.**
    - *Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda, todo lo demás cambia.*
    - *Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda.*
    - Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda.
    - *El único que permanece en su sitio es el triángulo de abajo a la izquierda*
    - *Permanece igual el triángulo de abajo a la izquierda.*
    - *Sólo son iguales los triángulos*
    - *Es igual la medida de los triángulos*

- **Describen las diferencias entre las dos figuras representadas sin dar razones**
    - *Los triángulos rectángulos permanecen iguales, pero ahora en lugar de un cuadrado aparecen dos.*
    - *La primera figura tiene un cuadrado formado por triángulos y en la otra figura forman dos cuadrados*.

- **Otras respuestas**
    - *Se ve un cuadrado pero una de sus esquinas aparece por debajo*
    - *Permanece igual el triángulo de la esquina inferior izquierda y parte del cuadradado en la esquina inferior derecha.*

TAREA2.2.PREGUNTA 7

- **Los lados a, b y c se mantienen constantes de una figura a otra**
    - *Que miden lo mismo*
    - *Continuan teniendo las mismas medidas*
    - *Unos miden igual que otros*
    - *Son las mismas pero transportadas*
    - *Que esos lados no se han movido*
    - *Que esos lados no se han movido*
    - *Que todos son iguales*
    - *Que no cambian*
    - *Son iguales*
    - *Son las mismas medidas*
    - *Son las mismas medidas pero en diferentes figuras.*
    - *Son iguales en todos los triángulos.*
    - *Que son iguales*

- **Los lados a y b son catetos. El lado c es la hipotenusa.**
    - $c^2 = b^2 + a^2$
    - $c^2 = b^2 + a^2$

- $c^2 = b^2 + a^2$
- $c^2 = b^2 + a^2$
- *Que forman ángulos rectos*
- *Que forman un triángulo y (lo señala).*
- *Son triángulos*
- *Que forman triángulos rectángulos.*
- *Pues que a y b son catetos y c es la hipotenusa, siempre.*
- Que forman un triángulo.

- **Otras respuestas**
  - *Que forman un triángulo.*
  - *Que es un cuadrado*

TAREA2.2.PREGUNTA 8

- **Sí, las áreas son iguales**
  - *Si porque al sumar las áreas de los dos cuadrados pequeños te da el área del grande.*
  - *Si puede ser igual porque hay los mismos triángulos y el espacio es el msmo que el A.*
  - *Si. Son iguales las áreas porque como los triángulos miden lo mismo, lo que sobra (rosa), tiene que ser lo mismo.*
  - *Si en la pregunta anterior d ela secuencia se ve como se forman los dos cuadrados y como hacen una misma área al sumarlo.*
  - *Si porque el área d elos cuadrados rosas sumándolos da el cuadrado de la figura A.*
  - *Si porque las áreas no cambian sólo se mueven las posiciones.*
  - *Si porque tienen el mismo espacio en las dos y las mismas figuras también que están distribuidas d eforma y tamaño diferente.*
  - *Si porque es un mismo cuadrado pero dividido en dos más pequeños.*
  - *El cuadrado grande es igual a la suma de los pequeños porque las medidas no cambian dentro de la figura.*
  - *Si ya que si haces la suma siempre dará el cuadrado A.*
  - *Si porque las figuras rosas equivalen a las azules, se podría encanjar 4 rectángulos de los azules y cabrían perfectamnete.*
  - *Si ocupan el cuadrado grande entero*
  - *Si porque el cateto c es igual al lado del cuadrado grande, el cateto a igual al lado del cuadrado pequeño y el cateto c igual al lado del cuadrado de la figura A, por lo que cumple la relación.*
  - *Si porque el cuadrado de la figura tiene de lado las hipotenusas de los triángulos y los de la b tienen de lado los catetos, y si son triángulos rectángulos se cumplirá el Teorema d ePitágoras y serán iguales.*
  - *En la figura b el cuadrado sufre un ejemplo del Teorema de Pitágoras.*
  - *Si, la diferencia es que la distribución de los triángulos cambia*
  - *Sí, es como si el cuadrado de A fuera* a^2 *y la de B* $b^2 + c^2$
  - Si porque la suma de esos rectángulos es igual al cuadrado.

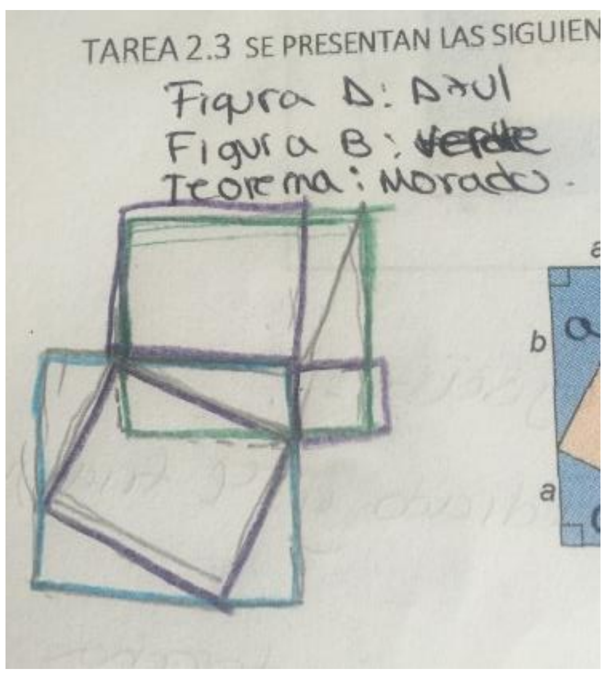
- **No, el área no es igual**
  - *No porque faltaría el área de los dos rectángulos*
  - *No porque también habría que añadirle el área de los rectángulos.*
  - *No, porque faltaría el área de los dos rectángulos para que sea igual que el área del cuadrado grande.*

- **Respuesta irrelevantes**
  - *Puede ser porque,* $c^2 = b^2 + a^2$.
  - *Si, gambién se podría demostar con Pitágoras.*
  - *Si porque se pueden poner como una terna pitagórica, posición que comprueba el teorema de pitágoras.*
  - *Si porque* $c^2 = b^2 + a^2$
  - *Si pero tendríamos que hacer una posición de Tales*

TAREA2.3.PREGUNTA 9

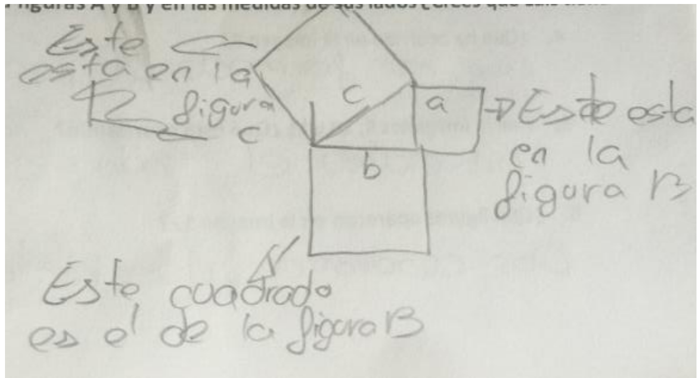
Se exponen los argumentos dados por los alumnos.

- **Sí, Luis tiene razón atendiendo a la distribución de las figuras.**
  - *Si, porque se pondrían en determinada posición para explicar Pitágoras.*
  - *Si, porque aunque cambies los triángulos de sitio no cambias su medida.*
  - *Si, porque si superponemos los dos triángulos "b" tendríamos las áreas de sus catetos e hipotenusa.*

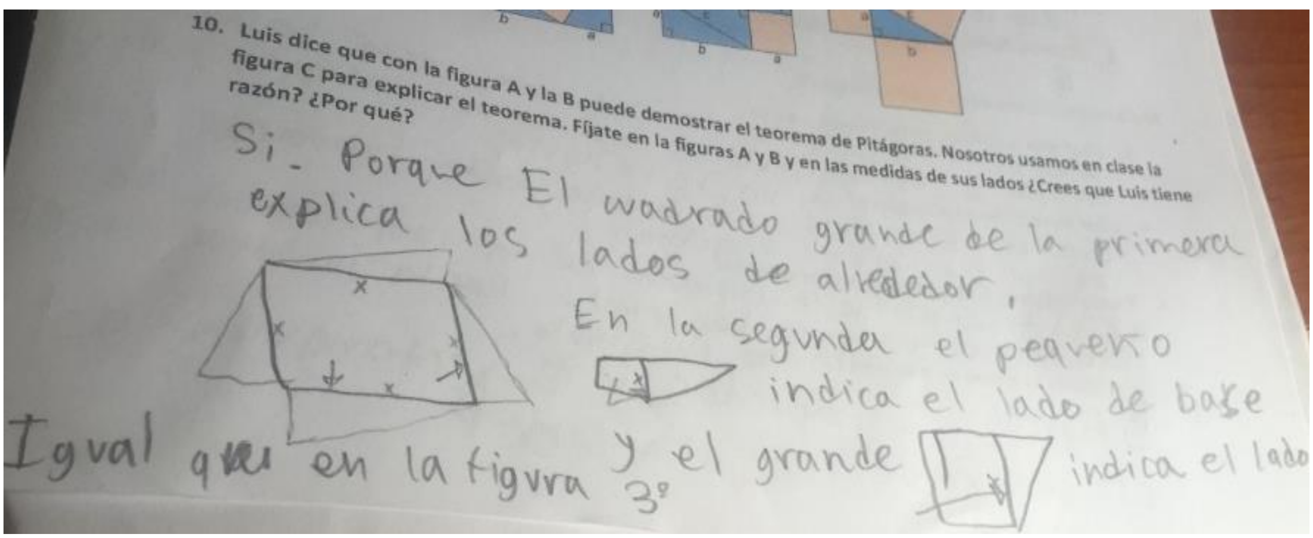


  - *Si tiene razón, porque los lados encajan para poder formar el Teorema de Pitágoras*

- *Si porque:*



- *Si porque la figura es igual, solo que distibuida de diferente manera.*
- *Si porque si colocamos todas las figuras (A y B) se obtiene la figura C.*
- *Sí, ya que si ponemos los cuadraditos naranjas en posición forman uno de los tiángulos de "A".*
- *Si porque al desplazarlos consigues hacer el teorema de Pitágoras.*
- *Si porque el cuadrado grande de la primera explica los lados de alrededor. En la segunda el pequeño indica el lado de base y el grande indica el lado igual que en la figura C.*
- Si porque podemos sacar los tres cuadrados



- **Sí, Luis tiene razón. Atendiendo a las dimensiones de los lados.**
  - *Si porque los lados de las tres figuras A,B, C (lados) son iguales y los triángulos son los mismos con lo cual si puede haber una relación.*
  - *Si tiene razón porque la hipotenusa de los triángulos es igual al cuadrado grande.*
  - *Si porque los lados "a" miden todos lo mismo, igual pasa con los lados "b" y "c".*
  - *Si porque con las figuras A y B se ve que el cuadrado que forman las hipotenusas es igual a los que forman los catetos, lo que dice el Teorema de Pitágoras.*

- **No, Luis no tiene razón.**
  - *No, porque nos falta espacio.*
  - *No, porque cada triángulo tiene que tener 3 cuadrados (como sus lados) y en la A y B no hay.*

- **Otras respuestas**
  - *Si porque hay triángulos.*
  - *Luis tiene razón, ya que los cuadraditos de color naranja aparecen representados en las figuras A y B.*
  - *Si, tenemos las medidas de los cuadrados y además lo más importante los triángulos rectángulos.*
  - *Si porque casi todos los triángulos de A y B tienen un cuadrado que sirve de guía.*
  - *Si porque si sumamos todos las A y B te sale el teorema de Pitágoras.*
  - *Si porque se puede explicar Pitágoras en cualquier triángulo rectángulo.*
  - *Creo que si porque puedes averiguar lo que miden los triángulos.*

DESCUBRIENDO 3. TAREA3. GENERALIZACIÓN DEL TEOREMA

TAREA 3.1.PREGUNTA 1

Se presentan las respuestas que han sido argumentadas por los alumnos.

- **La relación se cumple solo en los cuadrados.**

  - *Sólo se cumplen para los cuadrados porque todos sus lados son iguales.*
  - *No porque en la afirmación de clase habla de los cuadrados y no de otras figuras. Dependerá del triángulo y de la figura que sea, pero para eso no hay ningún teorema que conozcamos.*
  - *Creo que sólo es para los cuadrados porque su área es lado por lado.*
  - *No puede aplicarse ya que las áreas de un pentágono no son iguales a las de los cuadrados construidos sobre los catetos.*
  - *No porque dijimos que eran para cuadrados.*
  - *Sólo en los cuadrados porque con los demás no puedes calcular su área del mismo modo.*
  - *No se cumple en las otras figuras porque no son las mismas áreas.*
  - *Sólo para los cuadrados porque al ser círculos o pentágonos no encajarían.*
  - *No, sólo se cumple en los cuadrados así lo vimos en clase.*
  - *No, sólo para cuadrados.*
  - *No porque estas figuras no tienen ángulos rectos, con lo cual no tiene nada que ver con los triángulos rectángulos.*
  - *Si solo en cuadrados porque no saldría bien la medida en relación con el triángulo.*
  - *En la figura 2 y 3 no porque Pitágoras no lo dijo así.*

- **La relación se cumple tanto para pentágonos como para semicírculos.**
  - *Si, ya que si calculamos el área y aplicamos Pitágoras sale.*
  - *Si se cumple ya que son figuras regulares con la medida del lado que forma el triángulo proporcionales.*
  - *Creo que si porque con que tenga un apoyo en el triángulo si se puede.*
  - *Se cumple para los semicírculos y pentágonos siempre que cumplan la misma área.*
  - *Creo que si ya que sumando las áreas de las figuras de los catetos se consigue el área de la figura de la hipotenusa.*

- **La relación se cumple o en pentágonos o en semicírculos.**
  - *Para los círculos no porque no tienen hipotenusa y tampoco ángulos de 90º*
  - *No para los círculos y sí para los pentágonos, porque los círculos no tienen los lados iguales y los pentágono sí. Pienso que mientras tengan los lados iguales siguen el mismo teorema.*

- **La relación se cumple para cualquier figura.**
  - *Si porque las dos áreas de los catetos sumadas es igual al área de la hipotenusa y eso es para todas las figuras que puedan tener el lado de la hipotenusa o cateto pegado a la figura.*
  - *Creo que sí para cualquier figura que tenga un apoyo en el triángulo si se puede.*
  - *Creo que si porque la suma de la hipotenusa es igual a los dos catetos en cualquier figura sobre un triángulo rectángulo.*
  - *Si porque da igual la figura que sea da la misma área.*
  - *Si, averiguas el área del pentágono o la figura que sea, luego coges lo que mide el lado y lo haces igual que los cuadrados.*

TAREA 3.1.PREGUNTA 2

Se exponen las respuestas argumentadas de forma literal de los alumnos.

- **Enuncian el teorema mediante la ecuación del teorema.**
  - Igual que para la primera: $\boldsymbol{C^2} = A^2 + B^2$
  - *Para la figura 2 y 3:* $\boldsymbol{C^2} = A^2 + B^2$
  - $\boldsymbol{c^2} = a^2 + b^2$.

- **Enuncian el Teorema sin hacer uso de la ecuación.**
  - *La suma de las áreas de los semicírculos pequeños es igual al área del semicírculo grande. Igual con los pentágonos*
  - *El área de la figura C es igual al área de la figura A y B.*
  - *La suma de las áreas de los semicírculos y pentágonos formadas por los catetos es igual a el pentágono o el semicírculo formado por la hipotenusa.*
  - *La suma de las áreas de los semicírculos y pentágonos formadas por los catetos es igual a el pentágono o el semicírculo formado por la hipotenusa.*
  - *La suma del área de la figura C es la misma que la figura A+B.*

- *El área del pentágono es igual al área del pentágono construido sobre los catetos.*
- *El teorema de Pitágoras dice que la suma de las áreas de las figuras de los catetos es igual al área de la figura de la hipotenusa.*

TAREA3.2.PREGUNTA 3

De nuevo se dan los argumentos de los niños en las diferentes categorías clasificadas.

- **Se ha demostrado el Teorema de Pitágoras.**
  - *Si porque la suma de las áreas de los pentágonos o semicírculos pequeños es igual a las áreas del pentágono o semicírculos grandes.*
  - *Si porque sumando las áreas de los catetos te da el área de la hipotenusa*
  - *Si porque si sumamos en el semicírculo 6.3 y 3.5 sale 9.8 es decir el área de C e igual con los pentágonos.*
  - Si ya que al aplicar a=b + c es correcto.
  - Si porque si sumas las áreas de los catetos es igual a la hipotenusa al cuadrado. Esto es lo gordo que hay que hay que comentar
  - *Si porque si sumas el área de los catetos es igual a la hipotenusa como ocurre en los cuadrados.*
  - *Si porque al elevar al cuadrado las medidas quedan 100=36+64 y 25=16+9*
  - *Si porque con la fórmula sale igual que con los cuadrados*

El Teorema de Pitágoras no se demuestra.

- *Aunque se cumple no se ha demostrado porque ahí te da la medida del área pero hay que comprobar si la suma de las de los catetos da la hipotenusa.*
- *Están sin finalizar ya que falta la última cuenta. Ejemplo* $9.8^2 = 6.3^2 + 3.5^2$
- *No porque no da exacto*
- *No porque la fórmula del teorema de Pitágoras es* $H^2 = C^2 + C^2$ *y la que ahí usamos es diferente*.

TAREA3.2.PREGUNTA 4

- **Siempre sean cuales sean las figuras.**
  - *Si creo que para cualquier figura porque siempre se cumple el Teorema.*
  - *Yo creo que siempre porque eso es de lógica, calculas el lado como sea y ya está.*
  - Si porque el Teorema se cumple siempre.

- **Siempre que las figuras sean iguales.**
    - *Si con todas las figuras que sean iguales.*
    - *Sí sea cual sea siempre y cuando las tres figuras sean las mismas*
    - Si siempre que sean iguales las figuras $C^2 = A^2 + B^2$
    - No para todas porque pueden tener distintas medidas por eso las tres tiene que ser iguales pero de distinto tamaño

- **Sólo para algunas.**
    - *Creo que sí siempre y cuando sean figuras regulares (ángulos y lados iguales), y creo que en los semicírculos siempre. Esto se debe a que si son irregulares el área no combinaría y no se podrá hacer.*
    - *Para todas las que se puedan pegar al lado de la hipotenusa y los catetos*
    - *Sí para algunas porque tienen que ser semejantes.*
    - *Sólo para los polígonos regulares y semicírculos porque si no son iguales la formula no sale*
    - *Si las figuras son semejantes el Teorema puede aplicarse.*
    - *Siempre es verdad si se respeta el área y son semejantes.*
    - *Tienen que ser semejantes ente sí*
    - *Si siempre que haya un lado que sea regular.*
    - *Yo creo que se puede hacer con todas siempre y cuando se pueda hallar la formula.*
    - *No siempre es verdad porque depende de cada figura.*
    - *Sean cuales sean mientas todas sean semejantes*
    - *Si como son siempre semejantes son así.*
    - *Se cumplen siempre que las figuras sean semejantes*

- **Si las figuras son círculos no se cumple la relación.**
    - *Sólo para algunas porque por ejemplo un círculo no tiene lados pero con las demás sí.*
    - *No para todas. Por ejemplo el círculo que no tiene un lado recto.*

- **Respuestas irrelevantes.**
    - *Si.*
    - *No, yo pienso que con otras figuras no.*
    - *Sólo para algunas porque en otras no se podrá hacer*.
    - *Yo creo que no que en algunas figuras no se puede.*
    - No es siempre verdad para algunas se pueden realizar otra operaciones.

TAREA3.2.PREGUNTA 5

- **Siempre que las figuras sean semejantes.**

- *Siempre se cumple mientas las figuras sean semejantes.*
- *Si pero tienen que ser semejantes.*
- *Si son semejantes se cumple.*
- *Sí, unas serán más grandes que otras pero serán semejantes.*
- *Si porque es igual pero en distinto tamaño.*
- *Se cumple siempre que las figuras sean semejantes.*
- *Si las figuras son de distinto tamaño pero son semejantes debería de cumplirse.*
- *Sí siempre se cumple si las tres figuras tienen la misma forma pero distinto tamaño. El área de la cabeza A es igual a la suma de las áreas de las cabezas B y C.*
- *Se cumple siempre y cuando las figuras sean semejantes.*
- *Siempre que las figuras sean semejantes.*
- *Creo que si mientras formen un triángulo rectángulo y las figuras sean semejantes.*

- **Siempre se cumple.**
  - *Si porque todas las áreas de los catetos es igual a el área de la hipotenusa. Todas.*
  - Si se cumple en todas las que hemos visto ahora, aquí también se cumplirá, así que si se cumple en todas.
  - *Si sigue siendo igual el Teorema de Pitágoras sean cuales sean todas las figuras.*
  - *Para todas porque siempre la suma de los catetos da la medida de la hipotenusa.*
  - *Si porque sean cuales sean las figuras sus áreas de los catetos van a dar el área de la hipotenusa*.
  - *Si siempre, para las cabezas sumas el área de las cabezas chicas y te da la grande.*
  - *Si siempre porque aquí solamente son muy grandes, se cambian las medidas, el mismo número por todos los lados o restan las medidas el mismo número por todos los lados.*

- **No se cumple el Teorema de Pitágoras.**
  - *No se cumple porque las tres figuras no son iguales.*
  - *No se cumple porque no forman un triángulo rectángulo. Decir lo de variar la forma del rectángulo*
  - *No siempre se cumple. Lo que he pensado en la pregunta anterior no es cierto.*

- **Sólo para algunas**
  - *Sólo para algunas porque con un círculo no puedes hacerlo.*
  - *Yo creo que si se puede mientas haya un lado regular.*
  - *Yo creo que si se puede para todas las que se adaptan a la figura.*
  - *Sólo para algunas.*
  - *Si pero si son proporcionales. La forma de la figura no sale.*

TAREA3.2.PREGUNTA 6

- **Enuncian el teorema atendiendo al concepto de área.**
  - *El área de la primera cabeza es igual a la suma del área de las otras cabezas.*
  - *Haciendo el área de las cabezas de los catetos sumarlas y te dan la de la hipotenusa.*

- $a^2 = b^2 + c^2$*, El área de la figura de la hipotenusa es la misma que las figuras de los catetos sumadas.*
- *El área de la forma formada por la hipotenusa es igual a la suma de las áreas de las formas formadas por los catetos.*
- *El área del grande es igual al área de las otras dos, el lado del grande es igual a la suma de los lados pequeños.*
- *La suma de las áreas de las dos figuras menores es el área de la figura mayor.*
- *El área de la figura a es igual al área de la figura C + la b.*
- *La suma de las dos figuras pequeñas es igual a la grande.*
- *La suma de las figuras formadas en los lados de los catetos es igual a la figura formada por el lado de la hipotenusa.*
- *Que la figura divertidas a es la misma que las figuras divertidas b + c.*
- *El área del lado a es igual a la suma del área de las áreas sobre los lados b y c.*

- **Lo enuncian atendiendo a la relación métrica del Teorema.**
  - $\mathrm{a}^2 = \mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2$
  - $\mathrm{C}^2 = \mathrm{A}^2 + \mathrm{B}^2$
  - $\mathrm{hipotenusa}^2 = 1\mathrm{cateto}^2 + 2\mathrm{cateto}^2$
  - A=b=c, porque a es lo mismo que b pero más grande y b e so mismo que c pero más pequeño también
  - $C^2 = A^2 + b^2$

- **Lo enuncian atendiendo al concepto de semejanza.**
  - *Sean cuales sean las figuras, mientras forme un triángulos rectángulo y las figuras sean semejantes el Teorema se podrá realizar.*
  - $a' = b' + c'$*, La suma de las figuras semejantes es igual a las que no son semejantes.*
  - *Teorema de Pitágoras con figuras semejantes irregulares.*
  - *Sea cual sea la figura, si son semejantes pueden cumplir el Teorema.*
  - *Las figuras semejantes al cuadrado.*

- **Respuestas irrelevantes.**
  - *Teorema de Pitágoras irregular.*
  - *Pitágoras de formas raras.*
  - *Teorema de Pitágoras para esculturas.*
  - *El área de los perímetros son iguales al perímetro por apotema entre 2.*