



UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

**REFLEXIÓN DE DOCENTES SOBRE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA
EN UN PROGRAMA FORMATIVO**

Elisabeth Ramos Rodríguez

GRANADA, 2011



UNIVERSIDAD DE GRANADA

FACULTAD DE CIENCIAS DE LA EDUCACIÓN

DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

**REFLEXIÓN DE DOCENTES SOBRE ENSEÑANZA DEL ÁLGEBRA
EN UN PROGRAMA FORMATIVO**

Trabajo de Fin de Máster presentado por

D^a. Elisabeth Ramos Rodríguez

para optar por el máster en Didáctica de las Matemáticas,

bajo la dirección del Dr. Pablo Flores Martínez.

D^a. Elisabeth Ramos Rodríguez

El Director

Dr. D. Pablo Flores Martínez

GRANADA, 2011

Este estudio se realizó dentro del grupo de investigación *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* de la Universidad de Granada, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193), en la línea de investigación Formación del profesorado de Matemáticas.

Agradecimientos

Es menester dar gratitud a todos aquellos que colaboraron, de alguna forma, a la concreción de este trabajo. Mencionaré a aquellos que por diversas situaciones han estado más cerca del proceso.

De la Universidad de Granada, con aprecio especial, a mi tutor, profesor Pablo Flores, quien con su pasión y sabiduría, me mostró con detalles dos mundos de encantos: los estudios cualitativos y la formación docente. También a los miembros de los destacados grupos de investigación de esta Casa de Estudio, por los espacios de análisis y discusión sobre Didáctica.

A los representantes de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso, quienes gestionaron para poder llevar una mejor calidad de vida durante mis estudios. A mis profesores Arturo Mena y Jaime Mena, quienes me alentaron a seguir perfeccionándome. A mis alumnos de la Carrera de Pedagogía en Matemáticas, que estimularon cada día mi vocación docente y la investigación en formación de profesores.

A mis colegas, Betsabé González, María Verónica Fernández, Nielka Rojas y Pamela Reyes, quienes me apoyaron a lo largo de este proceso, gracias amigas.

A los profesores participantes de los programas de formación que he trabajado, en especial, a Ana Vera y Lylian Cornejo, gracias por acceder a utilizar sus informes para esta investigación.

Al Gobierno de Chile, a través de la Comisión Nacional de Investigación Científica y Tecnológica, CONICYT, quien me otorgó la Beca para realizar estos estudios.

Agradezco a mi familia. A mis tres hijos, por el tiempo que les he robado. A mi esposo, Cristian, sin él, no estaría en esta etapa profesional, ni en este rincón del mundo. A mis padres, por su ejemplo de formación y espíritu de superación. A mis hermanos, en especial a Isabel, gracias por tu apoyo y preocupación constante.

Por último, al ser más importante, quien ha hecho posible todo y cuanto soy: Dios.

Índice Temático

Capítulo 1 Problema de investigación	1
1.1 Introducción	1
1.2 Problema de investigación	4
Capítulo 2 Marco Teórico y Antecedentes	6
2.1 Marco Teórico	6
2.1.1 Formación de profesores y desarrollo profesional del docente.....	6
2.1.2 La reflexión docente	7
2.1.3 Formación de profesores, desarrollo profesional docente y reflexión	10
2.1.4 Modelos de reflexión	11
2.1.4.1 Algunos modelos de reflexión	12
2.1.4.2 Modelo de reflexión para la investigación: modelo ALACT de Korthagen	13
2.1.5 Niveles de reflexión	16
2.1.5.1 Modelos para los niveles de reflexión	16
2.1.5.2 Niveles de reflexión de la investigación: Hatton y Smith	17
2.1.6 El álgebra escolar: expresiones algebraicas	20
2.1.6.1 Análisis de contenido	21
2.1.6.1.1 El álgebra en el Currículo de Chile.....	21
2.1.6.1.2 Mapa conceptual	24
2.1.6.2 Análisis cognitivo.....	27

2.1.6.2.1 Expectativas de aprendizajes: Mapa de progreso de aprendizajes	27
2.1.6.2.2 Oportunidades de aprendizaje.....	30
2.1.6.2.3 Errores y dificultades en el tratamiento del álgebra	30
2.2 Antecedentes: Contexto e investigaciones sobre la temática.....	31
Capítulo 3 Metodología.....	38
3.1 Tipo de estudio	39
3.2 Dimensiones del estudio.....	39
3.3 Diseño de la investigación	40
3.4 Contexto y sujetos del estudio.....	40
3.5 Recolección de datos	47
3.6 Proceso de codificación de datos: análisis de contenido.....	48
3.6.1 Unidades de análisis.	49
3.6.2 Diseño de las tablas con el material a analizar y establecimiento de dominios de apoyo.....	50
3.7 Articulación del proceso formativo con el modelo ALACT	54
3.7.1 Situación problema 1: problemática	55
3.7.2 Situación problema 2: la clase en estudio	56

Capítulo 4 Análisis de la información	59
4.1 Análisis de la situación problema 1: La problemática.	59
4.2 Análisis de la situación problema 2: La clase en estudio	73
4.3 Resumen de apreciaciones sobre el proceso reflexivo 1: La problemática.....	90
4.3.1 El ciclo reflexivo	91
4.3.2 El nivel de reflexión	92
4.4 Resumen de apreciaciones sobre el proceso reflexivo 2: La clase en estudio.....	93
4.4.1 El ciclo reflexivo	93
4.4.2 El nivel de reflexión	96
Conclusiones, limitaciones y perspectivas del estudio	98
Referencias	102
Índice de figuras	109
Índice de tablas y de anexos	110

Capítulo 1

Problema de investigación

1.1 Introducción

En el último siglo, los cambios sociales, tecnológicos y educativos van tomando cada vez un ritmo más vertiginoso que se apodera de la sociedad, la familia y su entorno. En esta línea las ideas de profesionalización y especialización adquieren fuerza y preponderancia en la sociedad actual y ponen de manifiesto una necesidad de tomar la formación de profesionales como un tema relevante dentro de las investigaciones en las diversas áreas. Entre ellas, en educación, se puede observar un surgimiento de estudios que ponen énfasis en el desarrollo profesional del docente, que se inicia en su etapa inicial de formación para continuar en su práctica habitual.

En esta profesionalización, se le exige al docente¹ actualizarse en aspectos tales como las nuevas tecnologías para la enseñanza, los cambios curriculares, nuevas ideas o constructos que se incorporan en educación (y otras áreas), como la noción de competencia, la diversificación, la diferenciación de género, etc. Por otro lado, y en particular los docentes de matemáticas, tienen una presión social adicional debido a que continuamente sus alumnos son enfrentados a sistemas de mediciones nacionales e internacionales que permiten dar una panorámica de la educación en cada país y en los que alcanzan resultados descorazonadores. Para afrontar esta realidad, los docentes en servicio han optado por cursos de formación continua, como son los postítulos, postgrados, cursos online, entre otros, que les permita desarrollar y ampliar su ámbito de conocimiento para la enseñanza.

Estos procesos de formación toman distintos objetivos de acuerdo a las necesidades educativas más relevantes de cada país. Es así, por ejemplo, en Chile se cuenta con procesos de formación institucionales de largo plazo y alcance nacional como son los Talleres Comunales² en enseñanza primaria y las Redes Pedagógicas Locales en la enseñanza secundaria. Por su parte, el Estado ha incorporado la posibilidad de optar a capacitaciones locales (por región geográfica o específicamente, por escuelas) a través de subvenciones y coordinando con el Ministerio de Educación de Chile.

El reto para el docente es sacar provecho de esta gama de procesos formativos y aplicarlo en el aula para lograr su desarrollo y mejorar la calidad de la educación. El reto para el Estado es

¹ Con intención de simplificar la lectura, adoptaremos un convenio de la real academia de la lengua que tiene relación al género, en donde utilizaremos el término genérico que indica a ambos sexos, es decir, por ejemplo, al referirse al docente, estamos aludiendo tanto a la docente como a el docente.

² Al respecto puede verse la página del ministerio de Educación en el link: www.ministerioeducacionchile.com

aportar al profesorado procesos de formación que permitan realmente mejorar la calidad de la educación, pero a la vez evaluar si estos procesos van teniendo impacto a corto, mediano y largo plazo.

Es aquí donde en las últimas décadas, el gobierno chileno ha prestado atención a la evaluación de los docentes que participan en procesos de formación, como, por ejemplo, a través del proyecto Inicia³ o el “Programa de evaluación docente a través de portafolios y videos”. Contamos con algunas investigaciones que apuntan a esta temática, como, por ejemplo, Olfos, Soto y Silva (2007) que dirigen la atención a la realidad educativa en Chile e inciden en la problemática sobre cómo evaluar a los docentes participantes en procesos formativos. A nivel internacional se observa la inquietud de investigadores expertos en la formación de profesores sobre el desarrollo profesional y la forma de comprenderlo. Se aprecia una tendencia a valorar a los docentes de diversas formas, como a través de los resultados académicos de sus alumnos o por medio de evaluaciones inmediatas al curso de formación.

Estos medios permiten tener una panorámica parcial de los programas formativos y su trascendencia en el docente a más largo plazo. Desde la investigación (Schön, 1983; Shulman, 1986) se reconoce la necesidad de introducir nuevos elementos para comprender mejor la actuación del profesor, especialmente los relacionados con el conocimiento profesional del profesor (Ball et al. 2008; Shulman, 1986), su desarrollo profesional (Jaworski, 1993), y nuevos elementos que faciliten la comprensión del papel docente y los procesos formativos en los que está inmerso. Desde los aportes de Schön (1983), se está realzando la importancia de la reflexión como elemento que marca la actuación profesional. Desde esta perspectiva, hemos focalizado nuestra atención en la reflexión del profesor, como uno de los aspectos que mejor colabora al desarrollo profesional del docente, en el que se manifiesta la naturaleza práctica del trabajo del profesor (Schön, 1983), da protagonismo al profesor concebido como un intelectual adulto, que depende del momento en que se encuentra en su propio desarrollo profesional y que a la postre llevará a una repercusión en su enseñanza, integrando los elementos tratados en los cursos de formación, siempre a través de su forma de concebir su actuación profesional (Jaworski, 1993).

De este modo, el problema que se aborda en este trabajo se enmarca dentro de la formación docente, en particular en la formación continua, pretendiendo estudiar el proceso de reflexión sobre la práctica docente. Estas apreciaciones nos permitirán potenciar, a través de este elemento, posteriores alternativas de formación. En este contexto, hay varias aristas a considerar, entre ellas, el desarrollo profesional del profesorado, la formación continua y la

³ Al respecto ver: <http://www.programainicia.cl/>.

reflexión. En este trabajo se articularán estos elementos, considerando la reflexión como eje principal de análisis por los motivos antes expuestos.

Nos situamos en un curso de formación continua que tiene lugar dentro del proyecto Comenius 2.1 (el cual se detalla en el capítulo 2), cuyo punto de partida fue la práctica en el aula de los docentes que participan en un programa de formación. Pretendemos examinar el proceso de reflexión sobre problemas relacionados con la práctica docente, que llevan a cabo profesores participantes en el mismo. Estudiar la reflexión nos ayudará a comprender mejor a los profesores, a profundizar en sus motivos, problemas, cualidades intelectuales, etc., lo que llevará a construir conjuntamente propuestas para la mejora en aquellos puntos en que la eficacia sobre los aprendizajes de los alumnos no se considera exitosa. Promover la reflexión de los profesores y ayudarles en su práctica eran algunos de los objetivos planteados en el programa de formación seleccionado para este estudio, un seminario de llevado a cabo en Chile en el año 2009, en el que se reunieron docente de los tres niveles educativos junto a una formadora-investigadora, para analizar situaciones problemáticas que surgen de sus prácticas y dar propuestas de solución a través del diseño de una o más clases que apunten al fenómeno observado. De este grupo de docentes nos centramos en analizar a dos profesoras que se plantean una problemática que surge de su propia práctica relacionada con la enseñanza del álgebra para el nivel de secundaria. El contenido matemático, en particular, es la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.

Este informe consta de cinco capítulos. El primero de ellos describe el problema y los objetivos de investigación. El capítulo 2 presenta el marco teórico y los antecedentes que permiten profundizar en nuestro estudio, centrado en la formación docente, el desarrollo profesional docente, la reflexión y el álgebra escolar.

La metodología utilizada se describe en el capítulo siguiente (capítulo 3), en el que se dan los detalles del programa de formación en que nos hemos focalizado y los aspectos relevantes del enfoque metodológico empleado.

En el capítulo 4, se describe en extenso la investigación analizando la reflexión llevada a cabo por las dos maestras.

El último capítulo presentamos las conclusiones del estudio, las limitaciones y proyecciones dentro de la investigación en el área de la Didáctica de las matemáticas.

1.2 Problema de investigación

Resumimos los elementos desarrollados en la introducción que permiten definir el problema de investigación:

- . El avance vertiginoso de tecnología de información, paradigmas educativos, cambios sociales y políticos, entre otros, va exigiendo un alto nivel de profesionalización y especialización en las diversas áreas, en particular, en el ámbito educativo, se exige un profesor profesional.
- . La profesionalización exige al docente una preparación adecuada para enfrentar dichos avances y ser un participante activo de la evolución social y cultural que lo rodea.
- . Para enfrentar con éxito estas exigencias el profesor tiene a su disposición diversos cursos de formación que presentan distintos objetivos atendiendo a las necesidades locales y nacionales.
- . El desafío del profesor es incorporar las bases académicas e instruccionales tratadas en estos cursos y darles contenido en su práctica educativa. El desafío del Estado es asegurar cursos que cumplan con las expectativas docentes y las necesidades sociales.
- . Para asegurar que un proceso de formación cumpla con los objetivos propuestos, se han diseñado dispositivos de valoración que tienen distintos enfoques, entre ellos la evaluación de los programas de los cursos, el rendimiento de los estudiantes de dichos profesores, o el cambio (si es que lo hubo) de la práctica docente que se imparte, entre otros.
- . Estos dispositivos son de índole exterior, es decir, se focalizan en herramientas externas a la formación. Nuestra postura es considerar un dispositivo interno, que también apunte al desarrollo profesional del docente, es aquí donde cabe la reflexión, como medio de valoración del proceso de formación.
- . Situados en un curso de formación continua que arranca de problemas profesionales de los profesores y su repercusión en la práctica de aula, nos planteamos como problema de investigación estudiar la reflexión sobre su práctica que llevan a cabo profesores que asisten a un curso de formación.

En estas ideas se parte desde un ámbito general, la sociedad actual y sus exigencias educativas, hasta focalizarnos en el desarrollo profesional. Es así, como planteamos la necesidad de analizar un elemento de este desarrollo, la reflexión del docente, como un dispositivo que permita comprender posteriormente un programa de formación.

La motivación de la autora por abordar este tema tiene sus raíces en dos facetas, por una parte, en la experiencia personal en relación al tema y por otra en la realidad chilena. Sobre la primera cuestión, la coordinación de la autora en diversos seminarios, la participación en postítulos de formación en matemática, Talleres Comunales⁴, entre otros, le han llevado a una preocupación personal sobre el papel que juega la reflexión en el docente y su relación con los saberes presentados, así como el efecto en el desarrollo profesional de estos cursos de formación. En lo que se refiere al otro factor de motivación, nos referiremos a él en el apartado de antecedentes el capítulo 2.

Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001), señalan dos grandes bloques de problemas que dirigen las investigaciones que se pueden situar dentro de la línea de desarrollo profesional: el conocimiento profesional del profesor y la forma en que el profesor construye su propio conocimiento profesional. Nuestro trabajo observa un proceso de formación de docentes de matemáticas, utilizando como herramienta de análisis la reflexión de éstos, por lo que se ubica en el segundo bloque. De aquí, surge la pregunta de investigación de nuestro estudio:

Pregunta de investigación:

¿Cómo reflexionan y con qué nivel, los docentes de matemáticas en un programa de formación?

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la reflexión de los profesores participantes en un programa de formación continua.

Para ello, se plantean objetivos específicos:

Objetivo 1: Identificar cómo se articula el programa de formación con los procesos que generan reflexión, es decir, relacionar las etapas que conforman el programa de formación con el proceso reflexivo.

Objetivo 2: Describir el proceso de reflexión sobre su práctica que se ha producido en docentes de matemáticas participantes en un programa de formación.

Objetivo 3: Caracterizar el nivel de reflexión que se observa en los docentes de matemáticas participantes en un programa de formación.

⁴ Al respecto puede verse la página del ministerio de Educación en el link: www.ministerioeducacionchile.com.

Capítulo 2

Marco Teórico y Antecedentes

2.1 Marco Teórico

El marco teórico que sustenta este trabajo se basa en tres aspectos fundamentales, en primer lugar la *formación de profesores* y el *desarrollo profesional del profesorado*, como punto inicial de nuestro estudio dentro de lo que atañe a la formación de profesores. Considerando uno de sus elementos: la *reflexión del docente*, el cual constituye el segundo aspecto teórico. Por último, desde el contenido matemático emerge nuestro tercer elemento teórico, en nuestro caso, la enseñanza del *álgebra*, que estudiaremos a través de distintas facetas de ésta.

2.1.1 Formación de profesores y desarrollo profesional del docente

La **formación de profesores** es una línea de investigación ampliamente desarrollada dentro de la didáctica de la Matemática, teniendo una diversidad de estudios en esta área como lo detallamos en el apartado siguiente sobre los antecedentes. El foco de atención de ella tiene varias aristas, el Handbook Internacional de Educación de Profesores realizado en el 2008, refleja parte de esta diversidad, contemplando temáticas como conocimientos y creencias en la enseñanza de la matemática, herramientas y procesos en la formación del profesorado, análisis de los diversos participantes en esta formación y el desarrollo profesional tanto de los formadores de profesores como de los profesores en formación y en servicio, entre otros aspectos. Dentro de último aspecto, cabe nuestro estudio, donde nos ubicamos para introducirnos en nuestra temática investigativa.

Centrándonos en el **desarrollo profesional**, explicitamos que entendemos por éste a través de las palabras de Eraut:

“Un proceso natural de crecimiento profesional en que un profesor va adquiriendo gradualmente confianza, ganancias de nuevas perspectivas, incrementando en el conocimiento, descubriendo nuevos métodos y asumiendo nuevos roles.” (Eraut, 1977, p. 10-11).

Desde el ámbito de la educación matemática, Cardeñoso, Flores y Azcárate (2001) presentan el desarrollo profesional a través de diversas investigaciones que van en esta línea, indicando el sentido que tiene en la docencia de matemáticas. Partiendo de que la explosión de la sociedad industrial lleva a la necesidad de profesionalización y, tomando en cuenta la tarea asistencial del profesor, en la que no sólo pone en juego cualidades humanas con una intención ética, si no que

también atiende a las necesidades de las personas, les lleva a plantear la necesidad de considerar al profesor como un profesional crítico. Este profesor profesional cambia continuamente de perspectiva durante su proceso de actuación, por lo que tenemos que hablar de un proceso de desarrollo profesional, continuo, en el que atraviesa diversos papeles y momentos. El desarrollo profesional es personal, y se ve influenciado tanto por agentes externos (como los procesos de formación) e internos (como la reflexión). Podemos apreciar a través de los autores como una necesidad social lleva al docente (y al sistema educativo) a contemplar su desarrollo profesional como un proceso que debe evolucionar y en el cual los procesos de formación y el proceso de reflexión son preponderantes a la hora de definir el momento y nivel de este desarrollo. Durante el mismo, el profesor suele comenzar adoptando una postura descriptiva para ir evolucionando hasta llegar a alcanzar una postura crítica respecto a su entorno y práctica docente. En el proceso de crecimiento, caracterizado por una evolución continua, posiblemente marcada por momentos, es el profesor el que asume el papel de protagonista como lo afirma Da Ponte (2008).

De este modo, en el desarrollo profesional del docente existen permanentemente procesos de revisión de la propia tarea, en donde se produce una evolución personal de acuerdo a las circunstancias individuales y su historia, es decir, el profesor es el protagonista de un proceso que se inicia en la formación inicial de la carrera profesional y que evoluciona a lo largo de la vida, tomando en cuenta los sucesos personales como factores que influyen en su desarrollo.

2.1.2 La reflexión docente

Al observar la literatura sobre reflexión de profesores, podemos clasificarla en dos temáticas:

- La reflexión como herramienta para el desarrollo profesional.
- La reflexión como medio para analizar la práctica docente.

Ambas se están dando tanto en la formación inicial como en la permanente, aunque prioritariamente encontramos trabajos en la primera línea. Destacamos el rol relevante que se le presta a la reflexión en el ámbito docente, desde ya hacia varias décadas cuando John Dewey (1910) presentó los cimientos de la noción de *reflexión*, desde la que han surgido diversas precisiones al término. En este sentido, debemos tener ciertos cuidados con el término *reflexión*, como lo explica Zeichner (1993), quien afirma que “hemos llegado al extremo de que el conjunto de creencias existentes en la comunidad educativa sobre la docencia, el aprendizaje, la enseñanza y el orden social, se ha incorporado al discurso sobre la práctica reflexiva, vaciando prácticamente de sentido el término *reflexión*.” (p.44). Es decir, el uso de este término puede

aparecer de manera ligera, sin la profundización que ella requiere, desde esta perspectiva creemos necesario presentar varias aristas al respecto (Flores, 2007).

John Dewey (1910) basándose en las ideas de educadores anteriores, como Platón, Aristóteles, Confucio, Lao Tzu, Salomón y Buda, introduce el concepto de reflexión y distingue la *acción impulsiva*, basada en ensayo y error, la *acción rutinaria*, basada principalmente en la autoridad y la tradición, y la *acción reflexiva*, cuestionadora, basada en la voluntad y la intuición, en busca de soluciones lógicas y racionales a los problemas de la práctica. La acción reflexiva “supone una consideración activa, persistente y cuidadosa de toda creencia o práctica a la luz de los fundamentos que la sostienen y de las consecuencias que la conducen.” (p. 9). Mientras las dos primeras se toman sin pensar y de manera pasiva, la acción reflexiva “implica no sólo una secuencia simple de ideas, sino que una consecuencia” (Dewey, 1910, p. 9).

La noción de *profesor reflexivo*, que cobra realce en la actualidad, une la concepción humanística presentada por Dewey con la epistemología en la práctica, que aporta Donald Schön (Flores, 2007). Schön afirma (1983, 1987) que la reflexión está íntimamente ligada a la acción y distingue entre la *práctica reflexiva*, que supone comprender y perfeccionar la práctica, la enseñanza o la acción (Dewey, 1933 y Zeichner, 1993) y la *racionalidad técnica* que reduce la solución de los problemas a la selección de los medios técnicos más idóneos para determinados propósitos. Si bien su postura no se inicia desde la educación, sus trabajos tienen repercusión en el área educativa, más aún, al conectar la reflexión con la acción, introduce la noción de reflexión durante la acción y reflexión sobre la acción, que de alguna forma están presentes en nuestro trabajo, a través de las ideas de Korthagen presentadas más adelante. En relación a la acción docente, la *reflexión durante acción (reflection-in-action)* es aquella que surge cuando aparece en la práctica docente ese momento de incertidumbre que el profesor debe enfrentar (momento *sorpresa* denominado por Schön, 1983). Es una reflexión rápida, condicionada por la presencia y persistencia del problema en sí, que se afronta empleando el *conocimiento en acción*, que es aquel que el profesor(a) obtiene a partir de la conjugación de la práctica y la reflexión. La reflexión durante la acción se lleva a cabo en la acción misma, en el momento presente. Nuestra acción de pensar sirve para reorganizar lo que estamos haciendo mientras lo estamos haciendo. Cuando el profesor ha realizado alguna acción, surge la *reflexión sobre la acción (reflection-on-action)*, que es un proceso de reflexión profundo y duradero que lleva al profesional a replantearse las soluciones y buscar otras alternativas. Reflexionamos sobre la acción, cuando retomamos nuestro pensamiento sobre lo que hemos hecho para describir cómo nuestro conocimiento en la acción puede haber contribuido a un resultado inesperado. Esto lo podemos modelar a través de la figura 1.

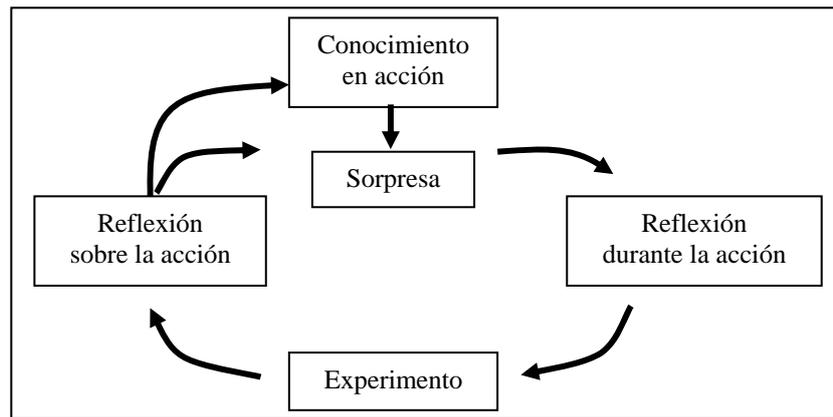


Figura 1. Reflexión de la práctica según Donald Schön. (1983)

En al ámbito de la didáctica de la matemática, Korthagen y Verkuyl (1987), nos presentan una definición de *reflexión* como resultado del análisis de esta noción aparecida en la literatura:

“Una persona reflexiona cuando está mirando hacia atrás sobre sus experiencias y/o conocimiento y se dedica a establecer por sí mismo una nueva estructura o evaluación de esas experiencias y/o conocimiento.” (Korthagen y Verkuyl, 1987, p. 4).

Korthagen mantiene y articula esta visión elaborando un modelo de actuación que la posibilita, el modelo ALACT, el cual hemos seleccionado para esta investigación y que detallamos en el apartado 2.1.3. La visión de reflexión que plantean se asemeja a la planteada por Dewey y Schön, en el sentido que parte y se desarrolla en el sujeto, arranca de un problema de la práctica, de un estado de sorpresa que tiene que afrontar mediante un proceso de revisión de creencias, para replantearse soluciones y buscar otras alternativas, ideas que compartimos y establecemos como parte de la caracterización de reflexión que utilizamos en este estudio.

Smyth (1987) inicia una visión sobre la reflexión docente a partir de la idea de *distanciamiento* y de *reflexión crítica*. En 1989, Smyth se enfoca en la reflexión como eje central en la formación del profesorado, pero también analiza algunos de los impedimentos para la capacitación de los profesores y formadores de docentes frente a su intento de poner en práctica la idea de *reflexión crítica* en sus planes de estudio. Afirma que para obtener una reflexión crítica, el maestro debe llevar a cabo cada fase del *distanciamiento* como fases de reflexión, concepto que también utilizaremos, como Jaworski (1993) y Flores (2007), en donde además, éste último, menciona que “el proceso de reflexión parte por detectar una situación de duda e implica un distanciamiento de la realidad” (p. 145). El trabajo de Jaworski en el tema la lleva a presentar un modelo descriptivo para el ciclo reflexivo basado en su experiencia e ideas de John Mason, modelo que explicaremos en la sección 2.1.4.

Después de dar un barrido a diversas miradas y sabiendo que otras más existen, presentamos elementos que se ajustan a nuestra postura adoptando una posición frente al tema, señalamos además que para la reflexión se tiene un proceso personal, en donde el docente toma conciencia de sus acciones, con una preocupación por la búsqueda de soluciones a problemas reales, al mirar hacia atrás y modificar o fundamentar futuras acciones a raíz de la necesidad de incorporar miradas externas (aportes, conocimiento teórico, por ejemplo). De esta manera, el profesor toma una postura activa hacia su práctica, en la que sostiene y fundamenta sus acciones con las consecuencias que ello pudiese conducir.

2.1.3 Formación de profesores, desarrollo profesional docente y reflexión

Hemos delineado aspectos sobre la formación docente, el desarrollo profesional y la reflexión, en este apartado pretendemos presentar algunas relaciones explícitas o no entre estos elementos, rescatadas de autores que han trabajado en la temática. Para ello, destacamos la importancia atribuida a la reflexión en el desarrollo profesional y la formación docente, y por otro, el papel que juega la reflexión en el desarrollo profesional.

Zeichner (1993), desde el ámbito educativo general, aporta ideas sobre la importancia de contar con maestros como profesionales reflexivos, en donde afirma que “el concepto del maestro como profesional reflexivo, reconoce la maestría que encierran las prácticas de los buenos profesores. Desde la perspectiva del profesor concreto, significa que el proceso de comprender y perfeccionar el propio ejercicio docente ha de arrancar de la reflexión sobre la propia experiencia.” (Zeichner, 1993, p. 45).

Desde la didáctica de la matemática, Jaworski (1993) establece once conceptos asociados con la vida profesional del docente, en donde uno de ellos es la reflexión en la práctica profesional. Además, se refiere a las etapas del desarrollo profesional (hacer frente a la gestión de clases, expansión del repertorio de la enseñanza, profundidad y diversidad asociado con el desarrollo curricular), a las cuales añade una cuarta etapa: **reflexión del profesor**.

Adoptaremos, al igual que Flores, que un profesional práctico reflexivo es aquel que reúne cuatro disposiciones y hábitos siguientes: (Flores, 2007, pp. 145-146)

- A percibir situaciones del entorno que requieren una actuación personal de su parte.
- A distanciarse de ellas para poder analizar sus elementos.
- A explicitar y eliminar elementos que condicionan la forma de percibir esas situaciones, incluidos los derivados de sus creencias o esquemas implícitos.

- A recurrir a otras fuentes para buscar otras formas de interpretar las situaciones y de responder a las mismas.

Flores (1998a, 1998c, 2007) respecto al profesor como un profesional práctico reflexivo, destaca que la reflexión tiene que organizar la acción de manera nueva, pero fundamentada, esto es lo que conlleva una evolución en el profesor y un desarrollo profesional. Además, considera que el distanciamiento del docente frente a las situaciones de su entorno (necesario para el proceso de reflexión) forma parte de la caracterización de este profesional práctico reflexivo. Para contar con un profesional práctico, Flores (2007) alude a la propuesta de Schön (1983) llevando a cabo un modelo de reflexión en la acción. En este contexto, contamos con programas de formación inicial y continua, en donde la reflexión es un tema específico, como, por ejemplo, los liderados por Korthagen (Korthagen et al. 2001) y Mewborn (1999). En particular, Korthagen (1985, 2001) nos expresa que la reflexión es un medio adecuado para dirigir el propio desarrollo profesional.

Por último, en el Handbook Internacional de Educación de Profesores del año 2008, Schönfeld y Kilpatrick presentan y desarrollan un conjunto de competencias para la enseñanza de las matemáticas, entre las que incluyen como último elemento la reflexión sistemática del docente sobre la práctica (Schönfeld y Kilpatrick, 2008). Así mismo, es un elemento que aparece en otros de los artículos de este volumen, como en los capítulos de Tsamir, Clarke, Empson y Jacobs's. Estos últimos presentan tres recomendaciones para trabajar con los profesores, en donde la tercera se refiere a la reflexión de docentes sobre su experiencia (Empson y Jacobs's, 2008). En estos artículos vemos como la reflexión es una preocupación de un campo de investigación, en donde ubicamos nuestro trabajo.

2.1.4 Modelos de reflexión

Empleamos la palabra modelo como “una representación analógica de la realidad” (Castro, 2001, p. 36). Ésta constituye una representación abstracta de cierto aspecto de la realidad y tiene una estructura que está formada por los elementos que caracterizan el aspecto de la realidad modelado, y por las relaciones entre estos elementos (Castro, 2001). Sirve para ordenar y simplificar nuestra apreciación de la realidad mientras representa sus características. De esta forma, cuando hablamos del proceso reflexivo aludimos a las fases que lo componen y cuando hablamos del “modelo de reflexión” nos referimos a la representación de la estructura del proceso y a las relaciones entre los elementos (al “modelo del proceso de reflexión”). Dentro de los autores que se han dedicado a explorar el tema de la reflexión, hay algunos que elaboraron diversos modelos que nos ayudan a abordarla de manera sistemática. Primero presentamos el

modelo del proceso de reflexión de Jaworski (1993) y el modelo de Smyth (1989), para luego profundizar en el modelo de reflexión que utilizaremos.

2.1.4.1 Algunos modelos de reflexión

Nos permitimos presentar dos modelos de reflexión, para que el lector, a través de ellos, tenga una pequeña panorámica del tema y así ubicar posteriormente el modelo a utilizar en este trabajo, presentando luego argumentos que sustente su elección.

Jaworski (1993), presenta un modelo descriptivo para el proceso reflexivo el cual es cíclico, en breves palabras menciona:

“Reflexionar sobre un acontecimiento de la clase lleva al profesor a “salirse del evento”, planteándose preguntas como ¿Qué? y ¿Cómo? Esto le conduce a un “distanciamiento” que es necesario para el análisis crítico del evento. El análisis crítico deriva de su intento de explicación. Para ello requiere explorar las razones o motivaciones, “el ¿por qué? del caso”. El análisis crítico conduce a un conocimiento más abierto, lo que puede afectar a las opciones y decisiones que se toman para el aula, conduciendo al cambio de su práctica.” (Jaworski, 1993, p. 40)

Esto lo muestra con el diagrama de la figura 2:

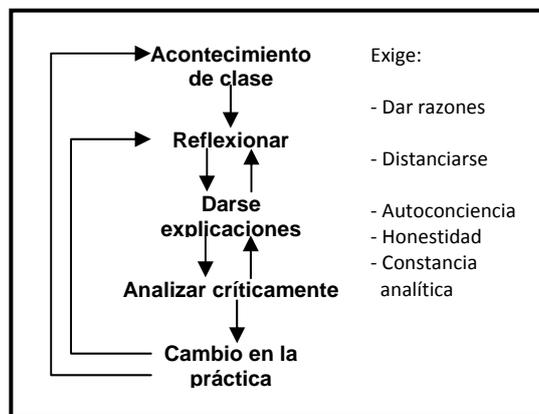


Figura 2. Modelo del proceso de reflexión de Jaworski (1993)

El **modelo de Smyth**, proceso de *distanciamiento* que indica en 1987 y que luego ya en 1989 lo declara como proceso de reflexión, contiene cuatro fases: descripción, inspiración, confrontación y reconstrucción. A pesar que es un modelo que emerge desde la educación general, existen varios estudios dentro de la didáctica de la matemática que ha considerado este modelo como base para el análisis de la reflexión docente (Flores, 1997 y 2007; Peñas, 2002,

2003; Peñas y Flores, 2005; Flores y Fernández, 2001). La siguiente figura representa el modelo con algunos interrogantes que el autor menciona para enfrentar cada fase.

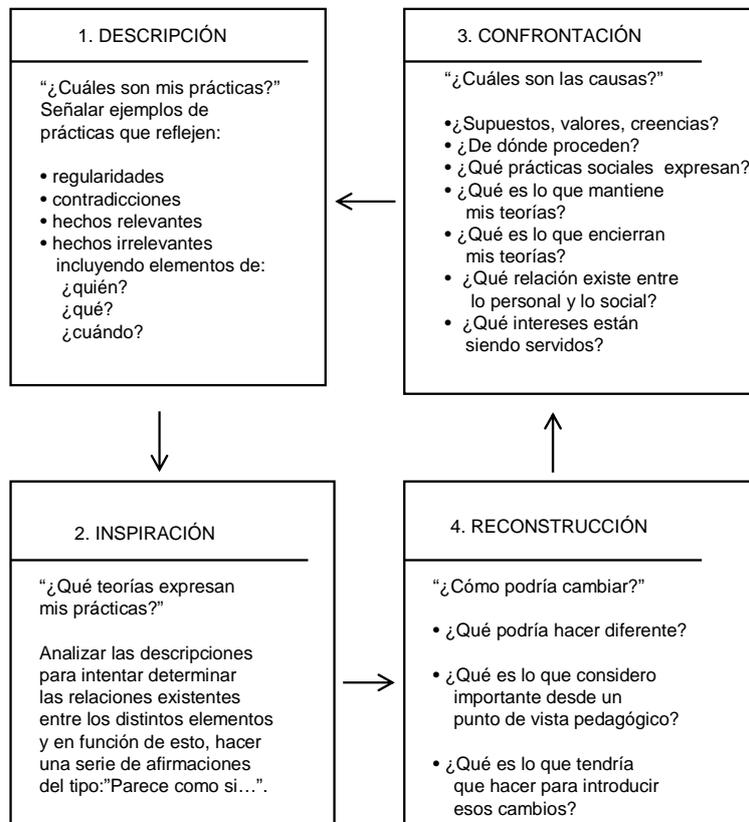


Figura 3. Modelo de Smyth (1989, 1991).

2.1.4.2 Modelo de reflexión para la investigación: modelo ALACT de Korthagen

Dentro de los modelos utilizados en educación matemática, hemos seleccionado uno que se basa en el modelo cíclico de reflexión de Kolb, desde la psicología cognitiva (Korthagen y Verkuyl, 1987). Nos referimos al modelo reflexivo ALACT de Korthagen. Tiene sus albores en la formación continua y se amplió a la formación inicial del profesorado, por lo cual, los elementos aquí vertidos son útiles en ambos ámbitos.

Cabe destacar, que este modelo fue el resultado de un proyecto (Comenius 2.1⁵) que un grupo de profesionales europeos intentaron desarrollar, con la intención de abordar de manera operativa la dialéctica entre teoría y práctica que se establece en el ámbito del docente. El grupo abordó en momentos distintos ambos contextos, la formación inicial y la continua, procurando mantener una pieza clave para ambos, el modelo.

⁵ Link del proyecto: <http://www.oapee.es/oapee/inicio/pap/comenius.html>.

Se plantea para el *aprendizaje reflexivo*⁶, es decir, como una alternancia entre “acción” y “reflexión”. Las características más representativas de este tipo de formación, fundamentado en la perspectiva sociocultural del aprendizaje humano, son: interactuar con los demás y con uno mismo, reflexionar y contrastar para co-construir y reconstruir conocimiento (Alsina, Planas y Calabuig, 2009).

En este contexto, aprender se puede considerar una forma de aprendizaje a través de experiencias. Korthagen define “el aprender de las experiencias” como la adquirir conocimientos, actitudes y habilidades con respecto a uno mismo y su entorno a través de observaciones propias o mediante una reflexión sistemática bajo condiciones de supervisión (Esteve, Melief, Alsina, 2010). Ideas que tiene relación con la noción de aprendizaje en la práctica como lo aborda Jaworski (2006).

Korthagen describe el proceso destinado al aprendizaje reflexivo, al que denomina proceso ALACT, como un proceso cíclico en el que se pueden distinguir cinco etapas o fases. En la tabla 1, se especifica cada fase, incluyendo algunas preguntas orientadoras de ellas, que puedan servir para estimular al docente ampliar el repertorio de preguntas reflexivas en torno a cada fase (Tigchelaar y otros, 2005).

Tabla 1

Fases del proceso reflexivo ALACT (Korthagen, 1985; Korthagen et al, 2001)

Fase	Definición	Preguntas de apoyo ⁷
Fase 1 Acción o experiencia	Es la situación que da el punto de partida a la reflexión, de donde se extrae la problemática que el observador (u observadores, activo(s) en la clase o no) identificará y analizará. En esta fase se describe lo que pretende la actividad, en qué se quiere centrar el docente en forma especial, entre otros. Esta fase está relacionada con la idea de Dewey de partir de un problema, una situación conflictiva o importante para el profesor.	¿Qué quería conseguir? ¿En qué me quería centrar de forma especial? ¿Qué quería intentar poner en práctica?
Fase 2 Mirar hacia atrás en	Consiste en esbozar una “imagen” de lo que fue la situación real.	¿Cuáles fueron los acontecimientos concretos? ¿Qué quería? ¿Cómo lo hice? ¿Cómo me sentí?

⁶ El aprendizaje reflexivo tiene su origen en Platón y Aristóteles (impulsores del diálogo como elemento clave de la reflexión y del pensamiento crítico), pasando por Rousseau y Dewey (máximos representantes del aprendizaje a través de la Experiencia), hasta llegar a interpretaciones más modernas.

⁷ Si bien cada fase se describe tanto de la acción propia y de la acción de otro (observada), las preguntas están expresadas para el caso que el problema surja de la acción propia, en el caso que surja de la acción de otro, observada, estas preguntas personales se deben posicionar desde la mirada del observador.

la acción.		¿Qué, en mi opinión, pensaban, sentían o hacían mis alumnos?
Fase 3 Conocimiento de los puntos importantes o esenciales.	Focalizamos la atención en tomar conciencia de los aspectos fundamentales que dieron lugar a las respuestas de la fase anterior. En esta etapa es donde suele intervenir un agente externo (en forma de experto o mediante la lectura de documentos) que orienten al profesor a examinar las teorías que subyacen al problema que ahora se hace explícito.	¿Cuál es la relación entre las respuestas dadas a las preguntas en la fase 2? ¿Qué influencia tiene el contexto/la escuela como un todo? ¿Qué significa esto para mí? ¿En qué consiste el problema (o el descubrimiento positivo)?
Fase 4 Crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción	En este momento los docentes buscan estrategias o soluciones de cómo abordar posteriormente la problemática(s), para aplicarlas en un nuevo evento escolar. Se buscan soluciones o caminos para aprovechar el descubrimiento de la etapa anterior.	¿Qué alternativas posibles veo? (soluciones o caminos para aprovechar mi descubrimiento) ¿Cuáles son las ventajas y des ¿Qué decido hacer la próxima ¿Cómo hago eso exactamente y en concreto?
Fase 5 Comprobar en una nueva situación	En esta etapa se estudia una nueva situación a partir de la reflexión realizada en el ciclo anterior, empezando un ciclo nuevo de reflexión, pero desde las apreciaciones anteriores.	

Este proceso cíclico Korthagen lo modela a través de la siguiente figura:

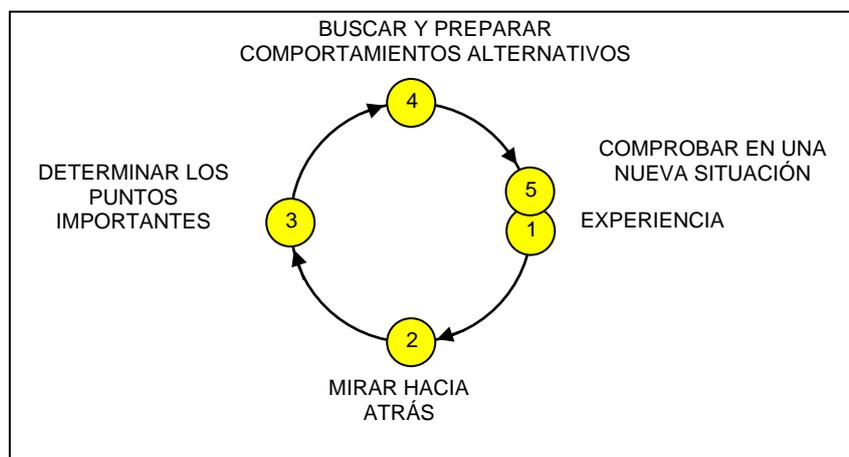


Figura 4. Modelo ALACT (Korthagen, 1985; Korthagen et al, 2001)

Korthagen utiliza la sigla ALACT haciendo alusión a los nombres en inglés de las fases:

Action.

Looking back on the action.

Awareness of essential aspects.

Creating alternative methods of action.

Trial.

Hemos elegido este modelo por diversos factores. Por una parte en que nace y se desarrolla desde el ámbito de la educación matemática, es decir, se ha aplicado en el área en donde trabajamos y ya ha mostrado resultados al respecto en diversos proyectos (Comenius, por ejemplo). En segundo lugar, contempla las fases de la mayoría de los modelos ya expuestos, pero además agrega una fase, la de validación en una nueva experiencia que es a la vez inicio de un nuevo proceso de reflexión. En tercer lugar, el modelo se centra en una situación problema del profesor, por lo cual éste lo hace suyo, en el sentido que se apropia y se identifica con la situación y con el proceso que conlleva posteriormente. Además, es un modelo que se focaliza en el proceso de reflexión no solo en relación a los conocimientos del docente, sino también en sus acciones y fundamentaciones. Por último, es un modelo que ya se ha implementado tanto en formación inicial como continua, lo cual amplía el espectro de usos que se le puede dar.

2.1.5 Niveles de reflexión

Recordemos que la cuestión de nuestro trabajo es describir la reflexión del docente, la complejidad de este constructo nos lleva a una caracterización mas precisa, la que exige considerar además de las fases del proceso de reflexión que lleva a cabo el profesor, los niveles de reflexión que se describen. Entenderemos por nivel de reflexión al grado de profundidad que puede alcanzar el docente en su proceso reflexivo, el grado de complejidad de la reflexión.

A continuación presentaremos algunos de los modelos que se encontraron en la literatura en relación a investigaciones en educación y en particular en didáctica de la matemática, que permiten observar y analizar los niveles de reflexión, para luego profundizar en el modelo que adoptaremos en este estudio.

2.1.5.1 Modelos para los niveles de reflexión

Niveles de reflexión de Van Mannen (1995). El autor plantea algunas preguntas sobre el significado y el lugar de la reflexión práctica en la enseñanza y sobre la relación entre conocimiento y acción en la enseñanza. De esta manera, identifica tres niveles de reflexión: la *reflexión técnica*, la *reflexión práctica* y el *pensamiento crítico*. (Van Mannen, 1977, 1995)

Niveles de reflexión de Korthagen: “modelo onion”. El autor se centra en el proceso de reflexión y en este sentido apunta a la formación de profesores (inicial y continua), a través de la propuesta de un modelo que indica niveles de cambio que podría servir de marco para la reflexión y el desarrollo. Este modelo llamado "Onion" (cebolla), consta de seis niveles de reflexión que se refieren al campo sobre el que reflexiona. Incorpora las reflexiones de docentes en los aspectos personales de enseñanza y se presenta a través de la figura 5.

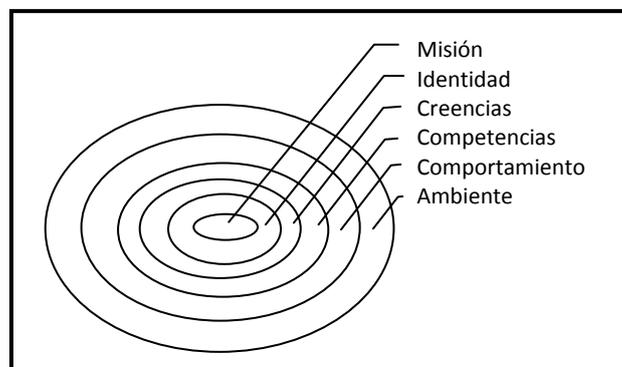


Figura 5. Niveles de reflexión según Korthagen (2004, 2005), llamado modelo cebolla.

Niveles de reflexión de Valli (1992, 1997), Valli propone seis niveles en 1992, que luego en 1997, refunde en cinco: la reflexión técnica, la reflexión en y sobre la acción, la reflexión deliberante, la reflexión personalista, y la reflexión crítica. Estos niveles son similares a los de Van Mannen.

Niveles de Ross (1989), para evaluar la reflexión Ross asigna tres niveles a partir de una perspectiva de desarrollo, desde 1 a 3, en donde 1 indica un nivel bajo (es decir, se observa una descripción con un pequeño análisis del contexto) y 3 indica un nivel alto (se observan múltiples perspectivas con el reconocimiento de efectos generalizados de las acciones de los docentes).

2.1.5.2 Niveles de reflexión de la investigación: Hatton y Smith

Smith y Hatton (1993), identifican niveles de reflexión, obteniendo un marco operativo que ilustra la relación dinámica esencial entre los datos (en su caso extraídos de escritos de los estudiantes) y la teoría que caracteriza la investigación, la que se ocupa del proceso de reflexión (Hatton y Smith, 1992; Smith y Hatton, 1992). En esta operativización, identifican cuatro tipos

de escritura, uno de los cuales es meramente descriptivo y los otros tres implican diferentes niveles de reflexión. Los escritos del primer nivel simplemente informan de los eventos o la literatura. Los del segundo, *descriptivo*, pretenden motivar basándose en el criterio personal o en la interpretación que de la literatura hacen los participantes. Los escritos de la tercera forma, *dialógica*, presentan una forma de discurso con uno mismo, una exploración de las posibles razones. El cuarto nivel, *crítico*, se caracteriza por justificar las decisiones o acontecimientos teniendo en cuenta los más amplios contextos histórico, social y/o político. (Hatton y Smith, 1995b)

En la tabla 2 mostramos los cuatro tipos de escritura respecto a la reflexión, dando la descripción de cada una ellas. Hemos agregado descriptores que identifican el tipo de escritura, junto con ciertos criterios y ejemplos que presentan Hatton y Smith que pueden sernos útiles a la hora del reconocimiento de los niveles en los escritos.

Tabla 2

Niveles de reflexión en escritos, por Hatton y Smith (1995b)

Niveles de reflexión	Detalle	Criterios	Ejemplos
Escrito descriptivo	Se refiere únicamente a la descripción de acontecimientos o acciones.	- No reflexivo. - Descripción de los hechos que ocurrieron/informe de la literatura. - Intención descriptiva, relato de acontecimientos o intenciones.	
Reflexión descriptiva	Muestra una mirada retrospectiva de la práctica y tiene, cuando proceda, opciones posibles para la acción.	Reflexivo, hay algún intento de dar una justificación para eventos o acciones, pero de una manera descriptiva. Reconocimiento de los puntos de vista alternativos en la investigación y la literatura. Dos formas de reflexión: a) Basada generalmente en un punto de vista de la razón de ser. b) Basada en el reconocimiento de múltiples factores y perspectivas.	<i>'Yo escogí resolver esta actividad porque creo que los estudiantes deben ser activos en lugar de alumnos pasivos'</i>

<p>Reflexión dialógica</p>	<p>Forma un discurso con uno mismo explorando las posibles razones.</p> <p>Refleja una descripción de los acontecimientos junto con algún intento de justificación, tratando de reconocer puntos de vista alternativos en la literatura.</p>	<p>Muestra un distanciamiento para contemplar los acontecimientos y acciones, lo que posibilita un nivel diferente para reflexionar sobre el discurso, mediante la exploración de la experiencia, eventos y acciones, empleando para explicar cualidades alternativas.</p> <p>Tal reflexión es analítica y/o de integración de factores y puntos de vista y puede reconocer incoherencias cuando intenta dar razones y hacer críticas.</p>	<p><i>“Aunque yo había planeado utilizar principalmente textos escritos me di cuenta muy rápidamente de que muchos estudiantes no responden a ellos. Pensando en eso descubrí varias razones. Algunos estudiantes, aunque eran razonablemente competentes en inglés, pueden no tener confianza en su manejo del nivel de lenguaje del texto. Otros estudiantes pueden ser visuales y táctiles. En cualquier caso, me encontré con que tenía que emplear más actividades concretas en mi enseñanza.”</i></p>
<p>Reflexión crítica</p>	<p>Muestra conciencia de acciones y eventos, explica y justifica con referencia a múltiples perspectivas e influenciado por múltiples contextos históricos, social y/o políticos.</p>	<p>Demuestra una conciencia de que las acciones y eventos no sólo se encuentran y explican en referencia a múltiples perspectivas, sino se encuentran e influyen por múltiples factores históricos y contextos socio-políticos.</p>	<p><i>"Hay que reconocer, sin embargo, que las cuestiones de la gestión de los estudiantes experimentos en esta clase sólo puede entenderse dentro de un amplio contexto estructural de poder, establecido entre profesor y alumnos en las escuelas, como instituciones sociales basadas en el principio de control".</i></p>

Al analizar la tabla, podemos ver que el marco descrito reconoce que un punto final ideal para promover el acercamiento reflexivo es el desarrollo eventual de una capacidad para emprender la reflexión en la acción, el profesional practicante debe ser capaz de pensar conscientemente acerca de una acción que está tomando, dando sentido a lo que está pasando y dar forma a las sucesivas medidas prácticas con múltiples puntos de vistas según corresponda (Hatton y Smith, 1995a).

Los autores reconocen la dificultad de establecer condiciones para hacer operativos estos niveles en los escritos y otros instrumentos de investigación, por lo que es un reto considerable **desarrollar los medios para reunir y analizar datos** de manera que la evidencia muestre claramente que ha tenido lugar la reflexión. A la hora de analizar los datos se tratará de dilucidar si estas dificultades también formaron parte de nuestra investigación.

Hemos seleccionado este marco para describir los niveles de reflexión, debido a las razones que se desglosan a continuación:

- Dentro de la literatura que se encontró respecto a los niveles de reflexión, éste es el único que aborda la reflexión a través de escritos (además de Valli en 1992, pero esa propuesta mezcla las ideas de tipos y niveles de reflexión, tal como mencionan Hatton y Smith, 1995b), y los instrumentos de recogida de información que contamos en nuestro trabajo son justamente escritos.
- Es un marco de referencia que ya se ha operativizado en programas de formación de profesores, como, por ejemplo, el de Sydney en 1992, que mencionan los autores.
- Considera los estudios referidos a los niveles de reflexión de otros autores, tales como Valli y Van Mannen.
- Relaciona esta temática con los momentos de reflexión en la práctica de Schön: reflexión en la acción y sobre la acción.

2.1.6 El álgebra escolar: expresiones algebraicas

Tal como han indicado los autores anteriores, la reflexión debe centrarse en un problema de la práctica de los profesores. En el curso de formación que analizamos en este trabajo, los profesores se centraron en un problema surgido en la enseñanza y aprendizaje del álgebra. Es por ello que en este apartado vamos a detenernos a analizar el papel del álgebra en la enseñanza secundaria.

Para facilitar este análisis, en esta sección desarrollaremos parte del análisis didáctico (del álgebra, en este caso) tal como lo concibe el grupo PNA (Rico, 1997a, 1997b; Gómez, 2007). El análisis didáctico (Rico, 1997^a, 1997b) tiene un origen teórico, pero su objetivo es facilitar al profesor el proceso de diseño de unidades didácticas (Rico, 1997b). Es un procedimiento que facilita el diseño de una clase. Gómez (2007) señala: “el análisis didáctico es un procedimiento que permite explorar, profundizar y trabajar diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje” (op. cit. pp.18-19). Por tanto, permite al profesor organizar el saber desde dos ámbitos, desde la matemática y desde la enseñanza. En nuestro caso, aunque las docentes no aplicaron este modelo de análisis didáctico para diseñar su unidad didáctica, profundizaron de manera práctica y teórica sobre su enseñanza y aprendizaje, incluyendo en ello análisis relacionados con el modelo.

En trabajos actuales, el grupo Pensamiento Numérico y Algebraico de la Universidad de Granada está ampliando el papel que corresponde al análisis didáctico. Nosotros hemos propuesto (Rojas, Flores y Ramos, en prensa) que su uso se extienda a convertirse una

herramienta para el investigador que trabaja con profesores. Por ello consideramos que es posible abordarlo de tal forma que nos sirva como referente que nos permita entrar con mayor profundidad en la reflexión del profesor en relación a los conocimientos puestos en juego por él, cuando se plantea una problemática sobre un contenido matemático (en este caso, de álgebra).

Es por ello que hemos abordado la realización de un análisis didáctico sobre la enseñanza del álgebra, que resumimos presentando algunos de los organizadores del análisis de contenido y del análisis cognitivo.

2.1.6.1 Análisis de contenido

El análisis de contenido comienza con el estudio del currículo y se continúa analizando los conceptos y procedimientos que cubren el tema. Por consiguiente, examinamos el álgebra escolar en el contexto del sistema escolar en Chile, presentando las facetas más relevantes que conforman el Currículo y el sistema educativo (Mineduc, 2009^a, 2009^b); luego abordamos el contenido, a través de un mapa conceptual, que resume los elementos y sus relaciones. Desarrollamos estos aspectos, focalizándonos en las expresiones algebraicas, contenido específico que consideran las profesoras en nuestro estudio.

2.1.6.1.1 El álgebra en el Currículo de Chile

El sistema escolar en Chile se divide en dos ciclos de formación a los que denomina: básica y media. El primero, la educación básica contempla la enseñanza obligatoria para los alumnos y las alumnas entre 6 y 14 años y considera dentro de él 2 subciclos, llamados NB1, es decir, Nivel Básico 1: de 1° a 4° Básico (correspondiente a las edades de 6 a 10 años aproximadamente) y NB2, es decir, el Nivel Básico 2: de 5° a 8° básico (correspondiente a las edades de 11 a 14 años aproximadamente). En el segundo ciclo, la enseñanza media, está compuesta por cuatro años de educación, en donde los estudiantes pueden elegir entre un establecimiento educativo de **formación general: humanista científica** (que entrega las herramientas básicas para egresar de la enseñanza media y le da opciones para ingresar a la enseñanza superior o universitaria), y un establecimiento educativo de formación **Técnico Profesional** (que se orientan a atender las aptitudes e intereses personales, y las disposiciones vocacionales de alumnos, entregando al finalizar su formación una especialidad técnica de nivel básico). Cabe destacar que los niveles 1° y 2° medio son de tipo general en ambos establecimientos, para luego en 3° y 4° medio, continuar con la enseñanza diferenciada: humanista científica o técnico profesional. Después de terminar estos dos ciclos de formación, los jóvenes optan por continuar estudios superiores o bien ingresar al ámbito laboral.

El currículo general aparece explicitado a través de la página oficial del Ministerio de Educación de Chile (Mineduc), por medio de los programas de estudios, planes de estudio y mapas del progreso. El programa de estudio agrupa todas las asignaturas que contempla el currículo que son determinantes para el aprendizaje de las competencias generales necesarias para desempeñarse en forma activa, reflexiva y crítica a lo largo de la vida. En particular, se menciona (Mineduc, 2009a) que el sector de matemática tiene la finalidad de comprender la realidad, facilitar la selección de estrategias para resolver problemas y contribuir al desarrollo del pensamiento crítico y autónomo en todos los estudiantes, sean cuales sean sus opciones de vida y de estudios al final de la experiencia escolar. El Ministerio de Educación de Chile, hace énfasis en que “aprender matemática contribuye a que alumnos y alumnas valoren su capacidad para analizar, confrontar y construir estrategias personales para la resolución de problemas y el análisis de situaciones concretas, incorporando formas habituales de la actividad matemática, tales como la exploración sistemática de alternativas, la aplicación y el ajuste de modelos, la flexibilidad para modificar puntos de vista ante evidencias, la precisión en el lenguaje y la perseverancia en la búsqueda de caminos y soluciones.” (Mineduc, 2009a, p. 81)

Los aprendizajes y los conocimientos matemáticos están organizados de manera transversal a lo largo de la enseñanza escolar de acuerdo a cuatro ejes temáticos o transversales (Mineduc, 2009a):

- **Números y Operaciones**, describe el desarrollo del concepto de cantidad y de número y la competencia en el uso de técnicas mentales y escritas para calcular y resolver problemas que involucran distintos tipos de números.
- **Álgebra**, describe el progreso de la capacidad para utilizar símbolos en la representación de generalidades y el modelamiento de situaciones y fenómenos así como también el desarrollo de la argumentación matemática.
- **Geometría**, describe el progreso de las competencias relacionadas con la comprensión, medición y el modelamiento de las formas, las transformaciones, la posición y el espacio.
- **Datos y Azar**, describe el progreso de las habilidades para organizar y representar información disponible, para describir y analizar situaciones, hacer interpretaciones de sucesos en los que interviene el azar y la incertidumbre.

En el año 2009, se realizó un ajuste curricular a nivel nacional, en el que se incorporó la necesidad de **adelantar la introducción al álgebra**, lo cual fue incorporado en el nuevo currículo de Chile. Más detalles sobre el ajuste curricular se explicitan en el anexo 3.

Si revisamos el currículo chileno (Mineduc, 2009a, 2009b), las expresiones algebraicas toman cuerpo a medida que son progresivamente articuladas en los distintos niveles, es así, que de manera secuencial, en 5° básico (10 años aproximadamente) se presentan las ideas básicas del álgebra, y nociones de variable, entre otras, y ya en 1° de enseñanza media (14 años aproximadamente) se tratan las expresiones algebraicas.

Es en segundo año de secundaria (15 años aproximadamente) donde la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias aparece en el proceso de enseñanza y aprendizaje, para luego tomar distintos roles, como el de mitigador de esfuerzo por parte del estudiante en la resolución de ecuaciones y al enfrentar las situaciones problemáticas de manera más simple. Es decir, en el 2° año de enseñanza media (15 años aproximadamente), los alumnos conocen y trabajan las fracciones algebraicas en la unidad 2, que más adelante, en la misma unidad, se exige para resolver ecuaciones que involucran fracciones algebraicas. Además, se les presentan diversos problemas de aplicación con el propósito de que los estudiantes puedan observar la presencia de los contenidos enseñados en diferentes contextos matemáticos y cotidianos.

Se observan dos puntos claves en donde los estudiantes requerirán y pondrán en juego sus conocimientos sobre las fracciones algebraicas: las ecuaciones y los problemas de planteo. En este sentido:

“El desarrollo de esta unidad (fracciones algebraicas) se orienta no sólo al aprendizaje de un conjunto de procedimientos de operatoria sino que, fundamentalmente, para que las alumnas y alumnos valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora y continúen sus procesos personales de desarrollo del pensamiento matemático, las utilicen para modelar situaciones y recurran a ellas para resolver problemas.” (Mineduc, 2009a, p. 58).

Esto queda más evidente si observamos el esquema de la unidad de fracciones algebraicas de este nivel de enseñanza (2° medio, 15 años aproximadamente, ver figura 6). En él se muestra cómo las expresiones algebraicas (y en particular las expresiones algebraicas fraccionarias, y dentro de éstas la simplificación) son elementos que se articulan para la resolución de ecuaciones y de problemas de planteo.

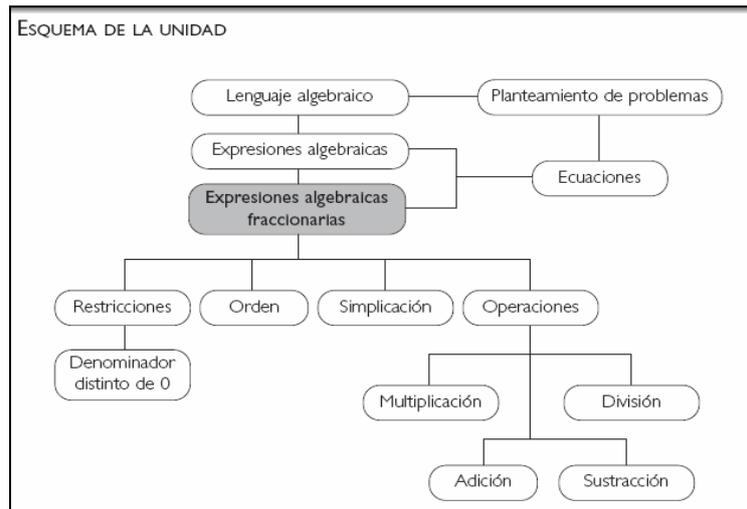


Figura 6. Esquema de unidad de expresiones algebraicas, Zañartu, Darrigandi y Ramos (2011)

2.1.6.1.2 Mapa conceptual

Para organizar sistemáticamente el campo de las expresiones algebraicas, hemos elaborado un mapa conceptual en el que se presenta una panorámica de los elementos involucrados y/o relacionados con las expresiones algebraicas, dentro de los contenidos algebraicos de la enseñanza básica y media. Se presenta en la figura 7. Para elaborar dicho mapa hemos partido del análisis de contenido del tema, determinando los contenidos (conceptuales y procedimentales), las relaciones entre ellos, las formas de representación que utilizan y los campos de fenómenos que abarcan (análisis fenomenológico). Aunque no aparece explícitamente, hemos realizado también un análisis histórico sobre el álgebra que nos ha ayudado a organizar las ideas sobre contenidos, su enseñanza y aprendizaje.

En el mapa conceptual de la figura 7 se identifican cuatro categorías de procesos relativos a las expresiones algebraicas, cada una representada de un color: definición, clasificación, sistema de representación y tratamiento, la especificación de estas categorías se encuentran en el anexo 3.

Al diseñar el mapa conceptual y explicar someramente los elementos que lo componen (anexo 3) destacan algunos de los organizadores del análisis de contenido: sistema de representaciones, fenomenología y estructura conceptual, los cuales articulan y forman un todo que se visualiza a través del mapa.

Como complemento del mapa conceptual hemos examinado el significado de las expresiones algebraicas, que son los objetos matemáticos de atención de las profesoras que estudiamos en este trabajo. Para ello también contemplamos:

- Su papel en el álgebra.
- Algunos estudios que han analizado su papel en la enseñanza y aprendizaje.
- La variable en el álgebra escolar, presentando una panorámica de lo que es esta noción, su tratamiento y relación con las expresiones algebraicas.

El desarrollo de estas ideas se encuentra en el anexo 3.

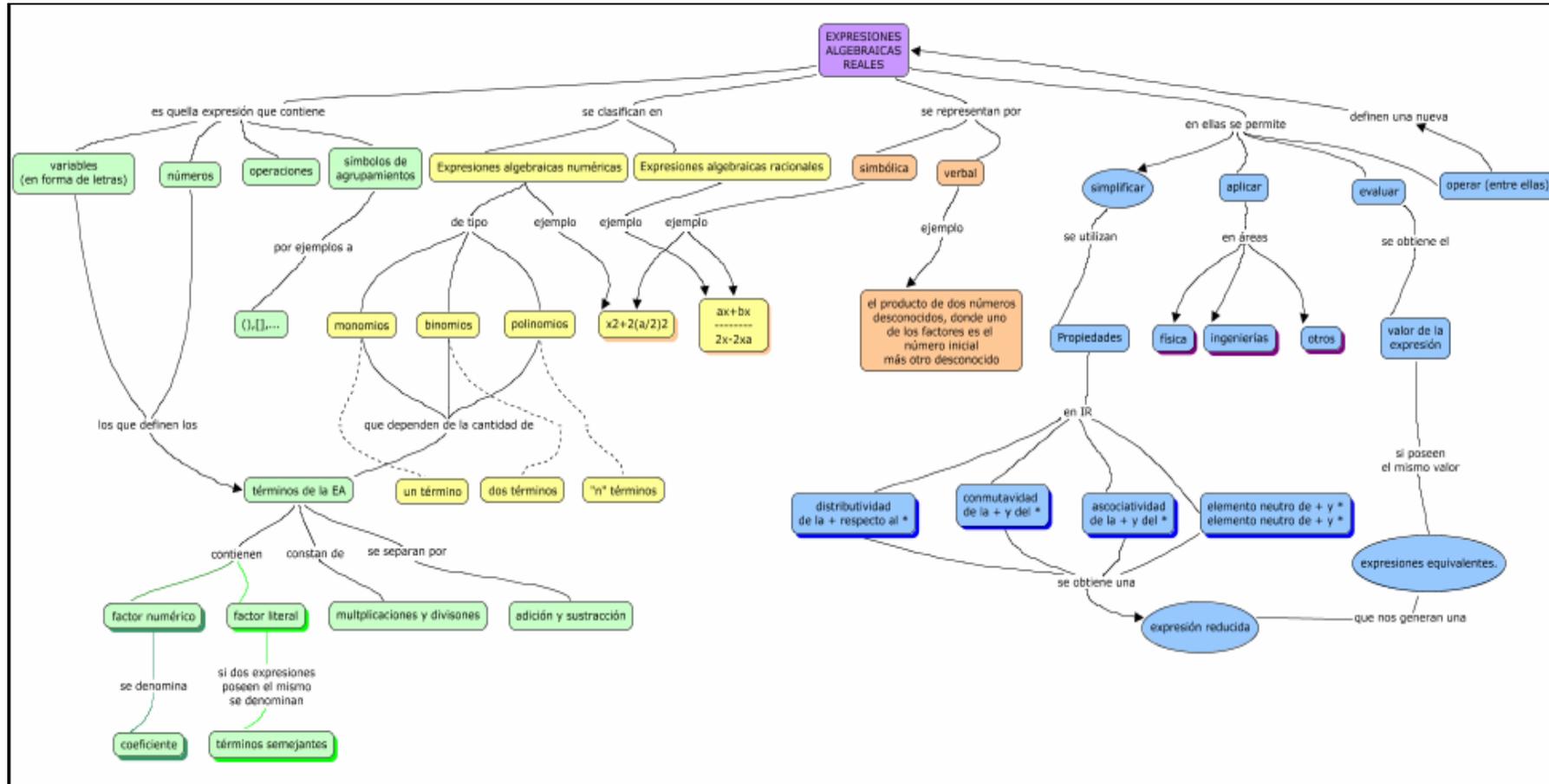


Figura 7. Mapa conceptual sobre las expresiones algebraicas en el álgebra escolar.

2.1.6.2 Análisis cognitivo

Para llevar a cabo el análisis cognitivo, nos centraremos en los organizadores: expectativas y oportunidades de aprendizajes, junto con los errores y dificultades en el tratamiento del álgebra.

2.1.6.2.1 Expectativas de aprendizajes: Mapa de progreso de aprendizajes

Para fortalecer el ajuste curricular, el Ministerio de Educación de Chile, construyó Mapas de Progreso del Aprendizaje, los cuales son criterios o estándares que señalan con precisión los aprendizajes que los estudiantes deben ir logrando a lo largo de su trayectoria escolar. Estos criterios o estándares especifican la expectativa de aprendizaje en ciertas etapas de esta trayectoria, las que se encuentran ordenadas en una secuencia de niveles que describen la progresión de una misma competencia o dominio temático dentro de cada disciplina. Los mapas de progreso describen en siete niveles el crecimiento típico del aprendizaje de los estudiantes en un ámbito o eje del sector (matemática). Cada uno de estos niveles presenta una expectativa de aprendizaje correspondiente a dos años de escolaridad. Por ejemplo, el Nivel I corresponde al logro que se espera para la mayoría de los niños y niñas al término de Segundo Básico (7 años aproximadamente); el nivel 2 corresponde al término de Cuarto Básico (7 años aproximadamente), y así sucesivamente. El nivel 7 describe el aprendizaje de un alumno o alumna que al egresar de la Educación Media es “sobresaliente”, es decir, va más allá de la expectativa para Cuarto Medio, que describe el nivel 6 (18 años aproximadamente) en el mapa.

Haremos una revisión sobre los aprendizajes descritos en el Mapa de Progreso de Álgebra, los cuales progresan considerando tres dimensiones que se desarrollan de manera interrelacionada (Mineduc, 2009a):

i. Comprensión y uso del lenguaje algebraico. Se refiere a la puesta en juego de las habilidades para interpretar el significado y escribir expresiones algebraicas haciendo uso de las convenciones del álgebra, representarlas de diversas maneras y usarlas en la designación de números, variables, constantes u otros objetos matemáticos.

ii. Comprensión y uso de relaciones algebraicas. Se refiere a la habilidad para establecer relaciones entre expresiones simbólicas mediante igualdades, ecuaciones, inecuaciones o funciones y a la capacidad para aplicar reglas y procedimientos que permitan transformarlas en expresiones equivalentes.

iii. Razonamiento Matemático. Involucra habilidades relacionadas con el reconocimiento y descripción de regularidades, el modelamiento de situaciones o fenómenos y la argumentación matemática.

La tabla 3 presenta el Mapa de Progreso de Álgebra con una presentación sintética de todos los niveles.

Tabla 3
Mapa de Progreso de Álgebra

<p>Nivel 7 Sobresaliente</p>	<p>Interpreta y usa convenciones del álgebra para representar generalizaciones y relaciones entre números, variables, funciones u otros objetos matemáticos estableciendo nuevas representaciones algebraicas de un nivel de abstracción mayor. Muestra autonomía y flexibilidad en la transformación de expresiones simbólicas escribiendo, reconociendo y eligiendo formas equivalentes de distintas representaciones algebraicas. Modela situaciones o fenómenos provenientes de diversos contextos y utiliza argumentos y propiedades matemáticas para demostrar proposiciones.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 6</p>	<p>Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones cuadrática y las potencia, caracteriza y representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Distingue funciones inyectivas, sobreyectivas y biyectivas. Representa e interpreta de diversas formas las soluciones de inecuaciones y sistemas de inecuaciones. Resuelve ecuaciones de segundo grado e inecuaciones de primer grado identificando el conjunto al cual pertenecen sus soluciones. Resuelve problemas que pueden ser modelados por medio de las funciones potencia y cuadrática. Elabora estrategias de resolución, las desarrolla y justifica usando lenguaje algebraico.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 5</p>	<p>Reconoce el tipo de situaciones que modelan las funciones lineal, afín, exponencial, logarítmica y raíz cuadrada, y las representa a través de tablas, gráficos y algebraicamente. Transforma expresiones algebraicas de forma entera y fraccionaria haciendo uso de convenciones del álgebra. Resuelve sistemas de ecuaciones lineales en forma algebraica y gráfica. Resuelve problemas que involucran composición de funciones, modelos lineales y afines o sistemas de ecuaciones lineales. Justifica la pertinencia del modelo aplicado y de las soluciones obtenidas.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 4</p>	<p>Traduce expresiones desde el lenguaje natural al lenguaje matemático y viceversa. Reduce expresiones algebraicas por medio de la aplicación de propiedades de las operaciones. Resuelve en diferentes contextos problemas que involucran ecuaciones de primer grado con la incógnita en ambos lados de la igualdad, utilizando propiedades y convenciones del álgebra. Reconoce funciones en contextos cotidianos y sus elementos constituyentes, distinguiendo entre variables independientes y dependientes. Resuelve problemas que involucran aplicar el modelo de variación proporcional, explicando la relación entre las variables. Justifica la pertinencia de los procedimientos aplicados aludiendo a la situación que modela.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 3</p>	<p>Comprende que en las expresiones algebraicas las letras pueden representar distintos valores de acuerdo al contexto. Reconoce las expresiones algebraicas que representan las propiedades de las operaciones e interpreta expresiones algebraicas que representan la generalización de una operación matemática. Comprende que una misma expresión tiene distintas representaciones algebraicas equivalentes. Resuelve ecuaciones de primer grado donde la incógnita se encuentra a un solo lado de la igualdad, utilizando estrategias informales. Justifica sus soluciones explicitando las estrategias utilizadas.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 2</p>	<p>Expresa relaciones de orden utilizando la simbología correspondiente. Determina el valor desconocido en situaciones de multiplicación y división. Identifica, describe y continúa patrones numéricos y geométricos con figuras conocidas, mencionando alguna regla que genere la secuencia. Explica las estrategias aplicadas en la determinación de un valor desconocido y justifica la regla elegida para continuar un patrón aludiendo a los términos dados.</p>
<p>↑</p> <p>Nivel 1</p>	<p>Comprende que el signo igual representa una igualdad entre dos expresiones y reconoce que símbolos no numéricos pueden representar valores numéricos. Determina el valor desconocido en situaciones de adición y sustracción. Continúa el desarrollo de patrones numéricos y geométricos, dada la regla que lo genera. Fundamenta su respuesta en la determinación de un valor desconocido aludiendo al concepto de igualdad y da razones de por qué un término numérico pertenece o no a una secuencia refiriéndose a una regla dada.</p>

2.1.6.2.2 Oportunidades de aprendizaje

En el nivel 5 (1° y 2° de enseñanza media, 15 y 16 años aproximadamente), aparece el contenido de expresiones algebraicas fraccionarias. Para observar las oportunidades de aprendizaje, hemos rescatado información desde dos ámbitos, por una parte, desde la propuesta del Marco curricular chileno y por otra desde los textos escolares oficiales.

Dentro de la propuesta del **marco curricular**, destacamos las actividades que el Ministerio de Educación de Chile presenta como ejemplos para especificar cuando un alumno logra el nivel 5 mencionado, las cuales se detallan en el anexo 3. En este nivel de progreso, se contempla la transformación de expresiones algebraicas de forma entera y fraccionaria haciendo uso de convenciones del álgebra, tema que abordan las profesoras de nuestra investigación. Los ejemplos que se plantean son los que se sugieren en Mineduc (2009a), los cuales tienen estrecha relación con los que presentan las profesoras en su situación problema del estudio que hemos realizado.

Por otro lado, realizamos un pequeño **análisis de los textos escolares** del nivel 5, en relación al contenido específico que abordan las profesoras de nuestra investigación. Hemos considerado como referencia los textos que aporta el Ministerio de Educación de Chile a cada alumno de todas las escuelas y liceos públicos y subvencionados del país. El detalle de este análisis se encuentra en el anexo 3.

2.1.6.2.3 Errores y dificultades en el tratamiento del álgebra

La enseñanza aprendizaje del álgebra trae consigo diversos errores y dificultades de los alumnos, dentro de éstas, señalaremos aquellas desde distintas perspectivas: desde el Ministerio de Educación de Chile, a través del programa de estudio de 2° año medio (15 años aproximadamente), desde los textos escolares oficiales, a partir de estudios internacionales y por último, desde la noción de variable.

Desde el **Ministerio de Educación** de Chile, en el Programa de Estudio de 2° año medio (15 años aproximadamente), plantea algunas sugerencias didácticas, dentro de las cuales mencionan dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre el tema de álgebra (Mineduc, 2009a), las cuales detallamos en el anexo 3.

Al revisar los **textos escolares oficiales**, hemos examinamos el Texto Guía (Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2011b) para el profesor de matemática de 2° de Educación Media (15 años aproximadamente) y el texto del estudiante al iniciar la unidad 2, expresiones algebraicas

fraccionarias, en donde mencionan algunas posibles dificultades que puedan tener los alumnos en esta pregunta, las cuales se especifican en el anexo 3.

En **estudios internacionales**, como el de Cervantes y Martínez (2007) cuyo objetivo era describir algunos tipos de errores que, con mayor frecuencia, presentan los alumnos en los primeros cursos de pre-grado cuando pretenden solucionar ejercicios que requieren manipulaciones algebraicas, se constataron cuatro tipos de errores comunes en el trabajo algebraico de éstos, error de lineación, error de extensión de la cancelación, error de extensión del producto nulo y errores de truncamiento. Entre estos tipos de errores, destacamos el segundo, ya que tiene estrecha relación con la situación problemática que se plantean las profesoras de nuestro estudio, el cual se detalla en el anexo 3.

Por último, estudiamos algunas dificultades y errores respecto a la **noción de variable** en relación a las expresiones algebraicas, que resumimos a continuación.

En los cursos de álgebra la mayoría de los estudiantes enfrenta grandes dificultades. La transición de la aritmética al álgebra genera obstáculos difíciles de superar. El rol que le damos a la noción de variable en el tratamiento del álgebra es preponderante en el éxito o fracaso que tendremos en el proceso de enseñanza aprendizaje de ésta, debido a la complejidad de este concepto, a los diversos significados en diferentes contextos y a que dependiendo de ellos se maneja de distintas maneras. Esta variedad en las formas de empleo hace que el concepto de variable sea difícil de definir y que los estudiantes tengan dificultades para aprenderlo (Trigueros, 1999).

En este contexto, podemos mencionar sobre el cuidado con el uso del signo igual, la noción de variable como número generalizado, la interpretación de expresiones algebraicas como fórmulas geométricas, entre otras, las cuales detallamos en el anexo 3.

Este Análisis Didáctico del tema nos da información que permite examinar con más detalle el papel que los profesores estudiados le atribuyen al álgebra, lo que ayuda a ver cuál es la reflexión que ha tenido lugar.

2.2 Antecedentes: Contexto e investigaciones sobre la temática

El estudio de los programas de formación continua en Chile se puede hacer desde varias perspectivas. Destacamos por un lado la que analiza los resultados de los alumnos de estos docentes (Olfos, Soto y Silva, 2007; Ávalos, 2004). Otros autores señalan que debe verse la docencia que el profesor imparte (Ávalos, 2004). Creemos que ambas posturas tienen un efecto a más largo plazo, en el que variables distintas están involucradas, pero tienen un objetivo

común: analizar resultados. Nuestra posición tiene otro foco, estudiar qué efecto tienen los programas de formación sobre los profesores, analizando de qué manera el profesor afronta los problemas profesionales ligados a su práctica, qué proceso de reflexión se produce y con qué nivel de reflexión.

Desde esta perspectiva daremos un esbozo del estado de la cuestión, para ello, en primer lugar nos ubicaremos dentro del campo de investigación a través del Handbook Internacional de Educación de Profesores realizado en el 2008. En segundo lugar presentamos algunas investigaciones de autores que trabajan en la formación de profesores, el desarrollo profesional y en el análisis de la reflexión docente, en relación a nuestro trabajo, señalando investigaciones que abordan la reflexión docente y aquellas que la estudian en programas de formación, como es nuestro caso.

Partiendo de la línea de investigación de **formación de profesores**, el Handbook Internacional de Educación de Profesores del 2008, contiene cuatro volúmenes con sus correspondientes temáticas, que son las siguientes:

- Conocimientos y creencias en la enseñanza de la matemática, donde se examina el papel del conocimiento y las creencias de los maestros de matemáticas.
- Herramientas y procesos en la formación del profesorado de Matemáticas, diversas experiencias.
- Los participantes en la formación del profesorado de Matemáticas: los individuos, equipos, comunidades y redes, centrandó la atención en los distintos tipos de participantes en el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas.
- Los formadores de profesores de matemáticas como profesionales en desarrollo, focalizándose en el conocimiento y el papel de los formadores de docentes que trabajan con los profesores en los procesos de la formación.

Las dos últimas temáticas (volumen 3 y 4) apuntan al formador de profesores y a otros participantes en la formación de profesores. El volumen 1, se ocupa del profesor de matemáticas como un profesional en desarrollo, en especial en relación a los conocimientos para la enseñanza de las matemáticas. En este volumen, Clarke (2008), se centra en el *desarrollo profesional*, destacando distintos modelos de desarrollo profesional de diversos autores, además presenta 10 objetivos y principios para el desarrollo profesional, en donde incluye la *reflexión del docente* entre ellos. En el segundo volumen podemos encontrar elementos que colaboran en

el *desarrollo profesional* del docente como lo manifiestan Schöenfeld y Kilpatrick (2008). Además, los autores presentan y desarrollan un conjunto de competencias para la enseñanza de las matemáticas, entre las que incluyen como último elemento la *reflexión sistemática del docente* sobre la práctica. En estos dos primeros volúmenes es donde vemos como el desarrollo profesional está presente en investigaciones actuales en la formación de profesores y vemos como la reflexión, foco de nuestro trabajo, toma posición dentro de este desarrollo profesional, por lo tanto, es una preocupación dentro del campo de investigación de la formación docente.

En quinto capítulo del segundo Handbook de investigación sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas (2007), Sowder se ciñe al tema de la enseñanza de las matemáticas y el *desarrollo de los profesores*, sentando la base de la teoría y la evidencia de la investigación del tema, a través de 10 interrogantes. De éstas destacamos la siguiente *¿qué se puede aprender de la investigación sobre el cambio docente?* Al abordar dicha pregunta la autora se refiere al rol que tiene la reflexión del docente en su cambio, mencionando que la importancia de la reflexión docente sobre su práctica es un tema recurrente en estudios sobre enseñanza y que el grado y tipo de *reflexión* se utiliza a menudo para describir el cambio docente (Sowder, 2007).

Dentro de los **autores que trabajan en esta línea** contamos con Freud Korthagen, cuyo principal campo de interés es el *desarrollo profesional* de los docentes, el papel que desempeñan en la educación la reflexión y la relación entre teoría y práctica en la *formación docente*, reflejado en sus más de cien artículos de investigación publicados y en el libro "Linking Practice and Theory in Teacher Education". En él realiza un análisis de cómo se ha estudiado la reflexión en la literatura, lo que le lleva a dar una definición de este concepto (ver en capítulo 2, sección 2.3), que abarca el análisis de los aspectos afectivos en la propia función docente. Trabaja en programas de formación inicial y continua, donde la reflexión es un tema específico, como, por ejemplo, los liderados por él (Korthagen et al., 2001) y Mewborn (1999), para ellos plantea un *modelo de reflexión* denominado ALACT, que es el que utilizamos en nuestro estudio y detallamos en el apartado 2.1.3.

Hatton y Smith, trabajan desde hace varias décadas en programas de formación docente, y de ellos destacamos una investigación sobre la *reflexión* dentro del curso de Licenciatura de Educación en Secundaria de la Universidad de Sydney, Australia (Hatton y Smith, 1992, 1995a), que tiene como objetivos estudiar la naturaleza de la reflexión en la enseñanza, definir las formas específicas de reflexión y evaluar las estrategias usadas en el programa de formación de profesores de esta carrera en términos del grado en que facilita determinados tipos de reflexión en sus estudiantes. La información más relevante estaba dada por medio de las producciones escritas de los estudiantes (informes al final del año académico),

autoevaluaciones, cintas de vídeo de su enseñanza y entrevistas. Debido a que no encontraron literatura sobre la reflexión en la formación docente que les pudiese aportar para dicho análisis, trataron de identificar los tipos de escritura y escritura reflexiva en los datos, obteniendo al fin un marco operativo que ilustra la relación entre los datos y la teoría de una investigación que se ocupa de la reflexión (Hatton y Smith, 1992). En él se definen niveles de reflexión, los cuales son los que empleamos en nuestro trabajo y se detallan en la sección 2.1.5.2.

Una autora destacada en el ámbito del desarrollo profesional del docente de matemáticas y en particular la reflexión, es Bárbara Jaworski, de ella señalamos uno de sus trabajos referido al potencial que tiene la *reflexión crítica* para el *desarrollo profesional* del docente (Jaworski, 1993, 1998). En este trabajo, Jaworski presenta un *modelo de reflexión* que especificamos en el apartado 2.1.4.1. Establece once conceptos asociados con la vida profesional del docente, en donde uno de ellos es la reflexión en la práctica profesional. Además, como ya lo mencionamos en el apartado citado se refiere a las etapas del desarrollo profesional (hacer frente a la gestión de clases, abrir el repertorio de la enseñanza, profundizar y diversificar en relación con el desarrollo curricular), a las cuales añade una cuarta etapa: *reflexión del profesor*. En este documento, ejemplifica la noción de “distanciamiento”, a través del análisis de tres docentes en servicio. La autora se plantea el reto de desarrollar la teoría en relación con las prácticas de enseñanza de las matemáticas (Jaworski, 2006), abordándolo a través de comunidades de investigación, en las que da importancia a los procesos de desarrollo reflexivo en el que la práctica de investigación conduce a un mejor entendimiento y desarrollo de la teoría.

En la Universidad de Granada, Pablo Flores ha mostrado interés por profundizar en la *reflexión docente*. Así destacamos uno de sus trabajos donde realiza una revisión de las diversas investigaciones en la línea del desarrollo profesional presentando aspectos de éste, indicando el sentido que tiene en la docencia de matemáticas (Cardeñoso, Flores y Azcárate, 2001), y una investigación consistente en el diseño de parte de un curso de formación práctica de profesores de matemáticas de secundaria en el que utiliza el ciclo de reflexión de Smyth (Flores, 1998b). En su ponencia en el Simposio de la SEIEM (Flores, 2007) realiza una caracterización sobre *profesionales prácticos reflexivos en matemáticas*, la que adoptamos en nuestro trabajo, al igual que la idea de distanciamiento, como lo señalamos en el apartado 2.1. Al finalizar este documento, se plantea dos interrogantes que pueden ser fruto de nuevas investigaciones: ¿Cómo articular la teoría y la práctica en nuestra tarea profesional de formadores de profesores de matemáticas? y ¿Cómo distinguir y hasta que punto hace falta hacerlo, la investigación cualitativa, interpretativa, de la práctica formativa que pretende formar profesores de matemáticas prácticos reflexivos? Parte de nuestro trabajo apunta a responder a estas preguntas, ubicando nuestro trabajo de investigación. El estudio de procesos de formación inicial de

profesores, planteados atendiendo al modelo de reflexión de Smyth, le han llevado a examinar la reflexión que se produce en los estudiantes (Flores 1997b y 2007), la forma en que los estudiantes se relacionan con el conocimiento profesional (Peñas y Flores 2005), y el empleo de viñetas para promover la reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje del álgebra (Flores y Fernández, 2001).

Ribeiro (2010), se refiere al *desarrollo profesional* de los docentes (de matemáticas) como una temática que ha tenido su lugar en diversas investigaciones en la didáctica de la matemática, examinando el rol de la *reflexión* en este ámbito. Menciona que algunos de estas investigaciones se centran en asumir la posibilidad de relacionar el desarrollo profesional con las creencias/concepciones que los profesores poseen y/o muestran, el conocimiento que demuestran, la participación en grupos de trabajo colaborativo, la reflexión sobre la práctica o la mejora de la comunicación en el aula de matemáticas. Desde esta perspectiva, la reflexión toma una posición relevante en el desarrollo profesional del docente como vehículo gestor de nuevos conocimientos.

Da Ponte y Chapman (2008) señalan sobre la complejidad de la formación docente de pregrado, centrándose en aspectos particulares del conocimiento y desarrollo de éstos y en la influencia de los temas dominantes de la investigación reciente en la formación del profesorado de matemáticas. Poniendo de relieve aspectos de las investigaciones actuales sobre el conocimiento y desarrollo de del profesor de matemáticas de pregrado. En este contexto, aparece la reflexión como un elemento relevante entre varios de los estudios mencionados, como, por ejemplo, el de Chapman (2005) o bien el trabajo de Jaworski y Gellert (2003). Los autores mencionan respecto a la reflexión:

“La reflexión es un proceso clave para crear conciencia de este conocimiento. Sin embargo, el logro de una reflexión eficaz puede ser problemática en función de la forma en que se conceptualiza y se lleve a cabo.” (Da Ponte y Chapman, 2008, p. 19).

Múñoz (2009), aborda el *desarrollo profesional* en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas a través del caso de una maestra novel. Nos menciona en sus conclusiones que:

“la reflexión fue un elemento decisivo para explicar el desarrollo logrado por la maestra experta de su estudio, también la incluimos junto a los anteriores, considerándola no sólo como motor de cambio, sino también como un referente importante a la hora de identificar y comprender el desarrollo profesional. Con este

estudio nos hemos querido acercar al desarrollo profesional del maestro respecto de la enseñanza de la matemática, al papel en éste de sus concepciones, conocimiento, y reflexión sobre la práctica.” (Muñoz, 2009, p. 54).

En relación a trabajos donde estudian la reflexión de docentes distinguimos la contribución de Petropoulou, Potari y Zachariades en la 35ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, en donde en el nivel universitario, investigan la enseñanza de las matemáticas a través de un episodio sobre el uso de contraejemplos para refutar las afirmaciones no válidas. En él la atención se centra las decisiones del profesor de enseñanza, acciones y reflexiones, y sobre la forma en que estos estaban relacionados con sus investigaciones y experiencias docentes. El estudio se basa en la colaboración de tres investigadores de la educación matemática y el profesor del curso (un curso de un año de cálculo en un programa de estudios conducentes a un grado de matemáticas), que también era un matemático investigador. En el estudio utilizan la *reflexión del profesor* y el cuestionamiento crítico de los otros dos investigadores (Petropoulou, Potari y Zachariades, 2011).

En la misma conferencia, Rowland, Thwaites y Pared (2011), abordan la relación teoría y práctica a través del conocimiento disciplinario de los contenidos y la pedagogía de profesores de matemáticas. Focalizándose en aquellas situaciones de aula que denominan como contingente, es decir, en las que un profesor se enfrenta a la necesidad de alterar el orden de exposición previsto para la lección. Presentan y analizan ejemplos de la *reflexión en la acción* de algunos episodios de clases de docentes de matemáticas, en un momento de contingencia, basándose en la noción de Schön de *práctica reflexiva* y de *reflexión en la acción*. Como resultados, aportan una clasificación de los orígenes de los episodios de clase contingente, situándolos en los estudiantes, el profesor mismo, o en las herramientas y los recursos pedagógicos (Rowland, Thwaites y Pared, 2011). Por otro lado, Turner (2011) presentan los resultados de una investigación de cuatro años de duración, cuyo marco se basa en el Cuarteto del Conocimiento (Rowland et al., 2009), utilizado como una herramienta para identificar y apoyar el desarrollo del conocimiento de los contenidos matemáticos de un grupo de profesores de carrera de primaria. Considerando las observaciones y discusiones de la enseñanza, el autor, basándose en las ideas de Schön sobre la *práctica reflexiva*, sugiere que la reflexión apoyada en la enseñanza que se centra en el contenido matemático puede mejorar el desarrollo de conocimiento de los contenidos matemáticos para la enseñanza.

Sobre investigaciones que estudian la reflexión docente en programas de formación, contamos con un estudio presentado en la 33ª Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (PME), en el que Cavanagh y Prescott (2009) focalizan la atención en

la relación entre teoría y práctica, abordando el pensamiento reflexivo de tres profesores durante un año en un programa de *formación docente*. Entrevistan a los participantes en tres ocasiones durante su práctica y una vez más en su primer año de enseñanza, para investigar la naturaleza y la profundidad de su auto-reflexiones. Para ello consideraron *tres niveles de la práctica reflexiva*, con ejemplos de cada uno de ellos tomados de los datos de entrevistas: descriptivo, racionalización práctica y reflexión crítica. Los resultados muestran una mejoría leve en la práctica de la reflexión de los participantes y una mayor capacidad de reflexión en su primer año de enseñanza, aunque sus respuestas fueron en general de carácter descriptivo. Concluyen que intensificar la reflexión puede ser peligroso y desalentador, sobre todo para los profesores principiantes que no tienen los conocimientos que pueden venir de la experiencia en el aula. En cambio, parece que el trabajo de reflexión es más probable que se realice cuando los maestros principiantes hacen la transición a sus propias aulas donde se puede dar forma a su identidad profesional con más libertad (Cavanagh y Prescott, 2009, p. 280).

Delgado y Da Ponte (2004), describen cómo tres futuros docentes de 1er ciclo de educación básica reflexionan sobre sus prácticas de enseñanza de las matemáticas, apuntando a la necesidad de enriquecer la reflexión sobre las cuestiones más directamente relacionadas con la enseñanza de las matemáticas durante la época de la práctica docente de los futuros docentes. Parten de un enfoque metodológico cualitativo basado en tres estudios de caso (futuros profesores de 4 ° año de educación universitaria). La recopilación de datos constó de dos entrevistas semi-estructuradas y tres momentos de reflexión. El análisis de datos incluye la construcción de la narrativa y el análisis documental. Concluyen afirmando que las experiencias previas de los futuros profesores de matemáticas influyen en su trabajo con sus alumnos y que las dificultades que revelan en la puesta en práctica de algunas de sus intenciones originales parecen ser el resultado de su falta de conocimiento matemático. Además, las debilidades en esta área destacan, sobre todo en relación a situaciones imprevistas que surgen en el aula y en los momentos de *reflexión sobre la práctica*.

De esta forma, contamos con una panorámica de las investigaciones actuales a nivel internacional y de algunos los autores que trabajan en este campo, que es donde nos ubicamos e introducimos para nuestro trabajo de investigación: la reflexión docente.

Capítulo 3

Metodología

Establecido el problema de investigación, sus objetivos y marco teórico, este capítulo continúa el proceso investigativo abordando la especificación metodológica, que en primer lugar es establecer el enfoque en el cual se enmarca la investigación, el que puede ser cuantitativo, cualitativo o mixto (que conjuga elementos de ambos ámbitos). Nuestro estudio se refiere a analizar el proceso de reflexión de dos docentes participantes de un programa de formación, por lo cual el enfoque es **cualitativo** considerando las apreciaciones que hacen diversos autores al respecto, entre ellos:

- Tiene como propósito “la riqueza, profundidad y calidad de la información, y no la cantidad, y estandarización” (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 232).
- “La inquietud principal está en un entendimiento del modo en que el individuo crea, modifica e interpreta el mundo en el cual él o ella se encuentran” (Cohen y Manion, 2002, p. 31)
- “Trata de identificar, básicamente, la naturaleza profunda de las realidades, su estructura dinámica, aquella que da razón plena de su comportamiento y manifestaciones.” (Martínez, 2006, p. 66).

Para continuar y a modo de orden, desarrollaremos los siguientes pasos:

Paso 1: Establecer el tipo de estudio.

Paso 2: Detectar, definir y operativizar las dimensiones del estudio.

Paso 3: Seleccionar el diseño apropiado de investigación.

Paso 4: Describir el contexto y los sujetos.

Paso 5: Recolectar datos.

Paso 6: Codificar datos, análisis de contenido.

Además, para poder cubrir el objetivo 1 del estudio, se agrega un siguiente paso:

Paso 7: Articular del proceso formativo con el modelo ALACT.

3.1 Tipo de estudio

Los estudios que se realizan en las ciencias sociales son básicamente de tipo descriptivo, exploratorio, correlacional y explicativo o experimental (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 58), en donde para cada uno de ellos tendremos una estrategia de investigación particular. Este trabajo se ubica dentro de lo que es un **estudio exploratorio**. Según Kerlinger (1986) los estudios exploratorios buscan hechos sin el objetivo de predecir las relaciones existentes entre las variables. Por otra parte, para Claire Sellitz (1970) en los estudios exploratorios se procura un avance en el conocimiento de un fenómeno, con frecuencia con el propósito de precisar mejor un problema de investigación o para poder explicitar hipótesis. En nuestro caso, es exploratorio por las intenciones de percibir la reflexión de los profesores, sin disponer de hipótesis de referencia, además porque pretendemos según el objetivo 1, ajustar el modelo de reflexión a un curso que no se ha planificado con esta intención, por lo que no sabemos que resultados tendremos de tal ajuste o articulación.

3.2 Dimensiones del estudio

Los objetivos del trabajo plantean la descripción del proceso de **reflexión del docente**, para el que, de acuerdo a la literatura relacionada con el tema, nuestras dimensiones de índole cualitativa, serán las siguientes:

- **Indicadores de la reflexión.**
- **Nivel de la reflexión.**

La dimensión *Indicadores de la reflexión* de un docente hace alusión a los elementos que muestran que el profesor se adapta al proceso reflexivo. Para operativizarla nos basaremos en el modelo ALACT, proceso cíclico de cinco fases explicitadas en el capítulo anterior, identificando las fases del mismo. Estas fases nos sirven para apreciar la reflexión que están llevando a cabo, empleando las respuestas de las profesoras a las tareas de formación que se han puesto en el Seminario.

Como ya lo hemos mencionado anteriormente, entenderemos por la dimensión *nivel de reflexión* al grado en que se produce la reflexión, el tipo de preocupación que manifiesta, el grado de justificación de sus afirmaciones, etc., que evidencian el nivel de complejidad o profundidad al que ha llegado la reflexión. Para operativizar este factor, nos ceñiremos a los niveles de reflexión de Hatton y Smith, desarrollados en el marco teórico.

3.3 Diseño de la investigación

Los estudios de tipo exploratorio pueden ser de diseño experimental y no experimental.

La investigación no experimental es aquella que se realiza sin manipular deliberadamente variables... Lo que hacemos en la investigación no experimental es observar fenómenos tal y como se dan en su contexto natural, para después analizarlos. (Hernández, Fernández y Baptista, 2010, p. 154)

En nuestro caso, el diseño del estudio es de **tipo no experimental**, ya que pretendemos describir la reflexión de docentes de un programa de formación tal cual sucedió, sin intervención o manipulación.

Este tipo de diseño, tiene una subclasificación, que organizamos en la figura 8.

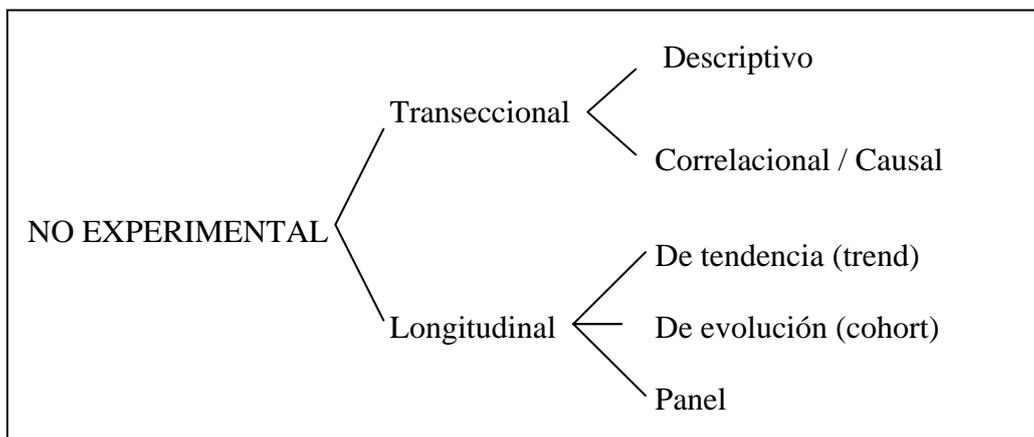


Figura 8. Clasificación de diseños no experimentales. (Hernández et al., 2010, p.153)

Podemos ubicar el estudio como **longitudinal de panel**; es longitudinal, ya que considera la recopilación de datos en un varios momentos del programa de formación como lo indica la tabla 4, y pretendemos ver la evolución de los profesores en su proceso reflexivo; es longitudinal de panel, ya que es el mismo grupo específico de sujetos (en nuestro caso, las dos docentes) son las seleccionadas para observar su evolución en todos los tiempos o momentos. (Hernández, Fernández y Baptista, 2010)

3.4 Contexto y sujetos del estudio

El contexto

Entre los años 2008 y 2010, en la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso de Chile, se realizó un programa de formación de profesores, al que desde ahora llamaremos Seminario, con

el fin de promover instancias de desarrollo profesional en docentes de matemáticas. El año 2009, se tuvo la necesidad de introducir un elemento teórico en la dinámica de formación basada en la actuación conjunta de los profesores de manera sistemática, incorporando así la metodología de Estudio de Clases japonés. De esta forma, en ese año, se contempló los siguientes objetivos específicos:

- Capacitar en algunas nociones de didáctica, a saber, nociones básicas de la Teoría de Situaciones didácticas (Brousseau, 1993), sobre la diferencia entre un problema y un ejercicio, y por último, el diseño de una clase. Además, para que los docentes tuvieran conciencia del proceso metodológico que estaban llevando a cabo se contempló una sesión en donde se presentaron las nociones más relevantes del Estudio de Clases.
- Desarrollar la discusión y reflexión sobre experiencias docentes, sus dificultades y retroalimentarse de ellas.
- Formar un equipo colaborativo y crítico que continúe reflexionando en torno a su quehacer docente y promueva esta iniciativa entre sus pares.

Y contó con las siguientes características:

- Se invitó a docentes que imparten la asignatura de matemáticas.
- No tuvo costo económico para los interesados.
- La metodología empleada se basaba en el Estudio de Clases japonés.
- Se impartió dos veces al mes (los días viernes en la tarde) con sesiones de 3 a 4 horas cada una.
- El Seminario tuvo la participación de 12 docentes (2 de primaria, 7 secundaria y 3 de enseñanza superior) y fue dirigido por una profesora-investigadora de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

El programa de formación tuvo 9 sesiones, que se recogen en el tabla 4:

Tabla 4

Sesiones en el Curso de formación (SEMINARIO)

Sesión	Objetivo central	Tareas grupales, puesta en común ⁸ .	Detalles
1	Formulación de una situación problema. Búsqueda de artículos relacionados con la problemática	<ul style="list-style-type: none"> • Bienvenida. • Presentación, objetivos y metodologías de trabajo. • Distribución de grupos. • Tarea grupal: <ul style="list-style-type: none"> - discusión y selección de una problemática a trabajar por grupo. - búsqueda de literatura relacionada con el tema. • Puesta en común, sobre la selección de una <i>problemática</i>. 	<p>Cada grupo define una <i>problemática</i> (algún fenómeno o situación conflictiva que han observado en su práctica), ejemplificando con un caso donde se evidencie tal fenómeno, explicando o detallando qué es lo que ocurre en el aula o en los estudiantes en tal situación.</p> <p>Se deja como trabajo fuera del Seminario la profundización de la búsqueda de artículos en la literatura de investigación y profesional, sobre la <i>problemática</i>, buscando cómo se relacionan y las diferencias con la problemática que el grupo aborda.</p>
2	Búsqueda de evidencias en las aulas.	<ul style="list-style-type: none"> • Puesta en común, sobre la búsqueda básica de literatura. • Presentación sobre nociones del Estado del Arte. • Tarea grupal: <ul style="list-style-type: none"> - reformular propuestas, ajustar ideas y objetivos. - instrumento exploratorio, buscar o seleccionar una tarea de enseñanza en donde se vislumbre la <i>problemática</i>. 	<p>Observando dificultades de los profesores en la búsqueda de literatura, se les presentan nociones básicas de lo que es Estado del Arte y lo que implica una búsqueda de literatura.</p> <p>Para profundizar en la problemática, cada grupo debe elaborar un “instrumento exploratorio” (alguna tarea de enseñanza en donde se vislumbre la <i>problemática</i>, la que se luego realizarán en un curso).</p>
3	Selección o diseño de una tarea de enseñanza.	<ul style="list-style-type: none"> • Puesta en común, breve retroalimentación sobre la problemática, hipótesis, búsqueda de literatura, instrumento exploratorio de cada grupo. • Presentación sobre diferencia entre un problema y un ejercicio. • Tarea grupal, selección o 	<p>Cada grupo selecciona y/o diseña una tarea de enseñanza que el grupo considere adecuado para una clase que se relacione con la <i>problemática</i> propuesta por ellos.</p>

⁸ Las *tareas grupales* son tareas de formación propuestas por la profesora guía para realizarlas cada grupo por separado. La *puesta en común* es la instancia en donde participan profesores y formadora, con el objeto de que todos los grupos exponen sus avances y se forma una conversación en torno a ellos.

		diseño de alguna tarea de enseñanza para su temática grupal.	
4	Desarrollo del análisis a priori.	<ul style="list-style-type: none"> • Puesta en común, breve retroalimentación sobre la selección de una tarea de enseñanza. • Presentación “Análisis a priori”. • Tarea grupal, análisis a priori de la tarea de enseñanza. • Puesta en común, sobre el análisis a priori. 	Cada grupo expone los avances de sus trabajos. La formadora entrega por escrito los comentarios y observaciones sobre sus avances. Se produce una comunicación y lluvia de ideas entre los participantes. Además, el grupo reformula su <i>problemática</i> .
5	Diseño de una <i>clase en estudio</i> .	<ul style="list-style-type: none"> • Puesta en común, breve retroalimentación sobre el análisis a priori. • Presentación “Diseño de una clase” • Tarea grupal, diseño de una clase. 	El grupo prepara una clase (la que, en la sesión siguiente, llamaremos <i>clase en estudio</i>) sobre el tema o contenido de uno de sus cursos relacionada con la <i>problemática</i> planteada por ellos.
6	Organización de de la clase en estudio, metodología de Estudio de Clases.	<ul style="list-style-type: none"> • Presentación: Metodología de Estudio de Clases. Video japonés. • Definición de fecha de implementación de las clases programadas. • Puesta en común, revisión del diseño de cada <i>clase en estudio</i>. 	A partir de la etapa anterior, el grupo reformula el diseño de su <i>clase en estudio</i> .
	Implementación de la <i>clase en estudio</i> programada	Realizada por uno de los profesores del grupo y observada por el otro docente. En los casos que fueron posibles, la formadora también fue observadora.	Esta se llevó a cabo en un curso de los establecimientos educacionales de los mismos docentes. Se grabaron en vídeo.
7	Análisis grupal de la <i>clase en estudio</i> .	Tarea grupal: <ul style="list-style-type: none"> - análisis de la <i>clase en estudio</i>. - reformulación del diseño. 	Cada grupo realiza el análisis de la <i>clase en estudio</i> , elaborando un escrito que incluya: el análisis general de lo sucedido, reformulación (en caso que sea pertinente) y observaciones.
8	Puesta en común de la <i>clase en estudio</i>	Puesta en común, discusión del diseño e implementación de la <i>clase en estudio</i>	

	<i>estudio.</i>	<i>clase en estudio</i> de cada grupo.	
9	Informe final	Dudas y detalles sobre el informe final del trabajo realizado por cada grupo.	Diseño del informe final que incluya todos los elementos vistos durante las sesiones anteriores, desde la formulación de la <i>problemática</i> y la <i>clase en estudio</i> hasta la reformulación (si que es la hubo) de ambas.

La metodología de trabajo se basó en el Estudio de Clases japonés, medio de capacitar a los profesores para que desarrollen sus propias prácticas pedagógicas, basado en la investigación sobre su propia clase (Mena, 2006). Es un modelo de desarrollo profesional que se origina en Japón (1912), cuando se desarrolló como una práctica educativa con la función de permitir a los profesores desarrollar y estudiar sus propias prácticas de enseñanza (Elipane, 2011). Se vale de un trabajo colaborativo realizado por los profesores con objeto de mejorar su conocimiento de contenidos y metodologías de enseñanza, así como profundizar sobre los aprendizajes de los alumnos (Isoda, Mena y Arcavi, 2007). Se inserta directamente en la práctica para generar modelos y formas concretas de buenas prácticas, constituyéndose en un enfoque clave para compartir actividades de perfeccionamiento, como el que queremos dar en nuestro contexto. Es un proceso cíclico compuesto las siguientes etapas (Bruce et al, 2011)

1. Preparación (identificación del problema y preparación de la clase). Los profesores participantes comienzan por establecer un objetivo para abordar en su clase. Esto es a menudo un área temática difícil, ya que tienden a ver lo que no funciona en el proceso de enseñanza aprendizaje. Lleva a una exploración de las mejores estrategias de enseñanza que podrían ser utilizados para lograr el objetivo. En la planificación de las lecciones de colaboración, los profesores participantes se benefician del acceso a fuentes externas de conocimiento, tanto en versión impresa (por ejemplo, los libros de texto, recursos profesionales, artículos fuera de la investigación) como por medios humanos (por ejemplo, educadores externos, especialistas en contenido, los investigadores, otras personas que conocen), para apoyar la planificación de las clases.

2. Clase a investigar (implementación). Consiste en la realización de las lecciones planificadas a las que asisten los participantes y otros invitados, que actúan como observadores en directo. Es una etapa fundamental y emocionante en el proceso de estudio de la lección.

3. Sesión de revisión (evaluación de la clase y revisión de resultados). En una sesión de debate, los participantes comparten sus impresiones, donde todos contribuyen a la reflexión y la construcción de conocimiento colectivo a partir de la lección, identificando o repensando otras

estrategias de enseñanza en torno a las utilizadas. Este interrogatorio impulsa la continuación del ciclo para aplicar a nuevos objetivos.

En relación al proceso reflexivo que hemos utilizado (ALACT), podemos identificar elementos de éste en el proceso cíclico del Estudio de Clases, así, por ejemplo, el establecimiento de objetivos de la clase y a su planificación (fase A, acción), en el acceso a fuentes externas de conocimiento impresas y humanas (fase L, mirar hacia atrás), el compartir las observaciones de la clase en estudio (fase a, conocimiento de puntos importantes), identificando o repensando otras estrategias de enseñanza en torno a las utilizadas (fase L: comportamientos alternativos) y la continuación con un nuevo ciclo (fase T: nueva experiencia).

Para disponer de herramientas con las que afrontar el Estudio de Clases, como formadora responsable del Seminario, la formadora se propuso incluir algunas nociones teóricas desde la Didáctica de la Matemática, por lo que en la propuesta consideraba el diseño en común de tareas de enseñanza que incluyeran elementos de la *Teoría de Situaciones Didácticas* (Brousseau, 1989, 1991), que los profesores participantes debían incluir en sus *clases en estudio*.

Tras presentar esta teoría, los docentes elaboraron las tareas de enseñanza para los estudiantes en base a la Teoría de Situaciones de Guy Brousseau (1989, 1991), la cual considera situaciones adidácticas y didácticas. Se trata de una teoría de enseñanza, que busca las condiciones para originar conocimientos matemáticos en los estudiantes, partiendo de que éstos no se construyen de manera espontánea. Está sustentada en una concepción constructivista –en el sentido piagetiano– del aprendizaje, caracterizada por Brousseau y reflejada a través del siguiente párrafo:

“El alumno aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, de dificultades, de desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Este saber, fruto de la adaptación del alumno, se manifiesta por respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje.” (Brousseau, 1993, p. 11)

De esta forma los constructos: Teoría de situaciones didácticas y Estudio de Clases, se articulan de manera de formar un todo que pueda generar en los participantes nuevos conocimientos e interrogantes frente a su práctica docente, esta articulación la vemos reflejada a través del siguiente esquema de la figura 9.

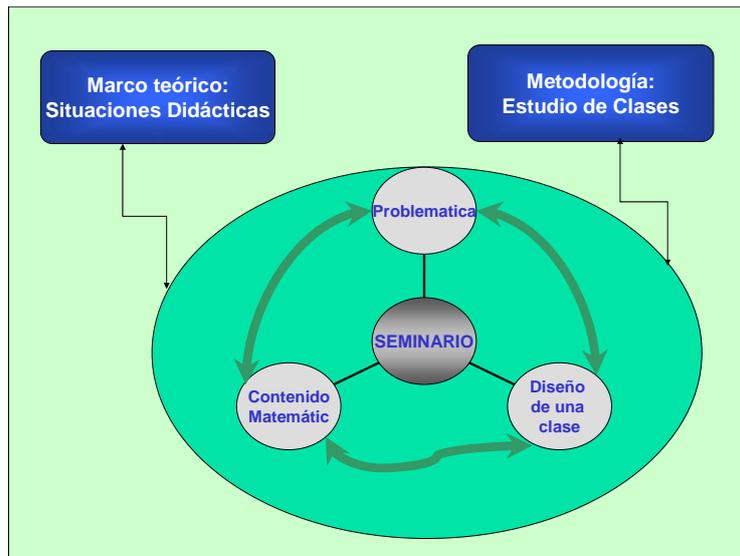


Figura 9. Esquema de la dinámica del Seminario.

Los sujetos

La población a quien se dirige esta investigación son docentes de la quinta región y región metropolitana de Chile, que imparten clases de matemáticas en los tres niveles educativos (primaria, secundaria y superior) y de los distintos ámbitos institucionales existentes en nuestro país (con y sin financiamiento del Estado). Dentro de este espectro, el Seminario contó con la asistencia de 12 docentes (11 de la quinta región y uno de la región metropolitana del país), descritos en la tabla 5.

Tabla 5

Características de los participantes en el seminario

Tipo de Institución	Primaria	Secundaria	Superior
Con financiamiento	1	5	3
Sin financiamiento	1	2	0

El trabajo realizado en este Seminario agrupó a los profesores en parejas, de las que seleccionamos intencionalmente una pareja formada por dos profesoras de secundaria de la quinta región, quienes trabajaron en un tema de álgebra, la enseñanza u aprendizaje de la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias. Considerando que en una selección intencional: “se eligen una serie de criterios que se consideran apropiados o altamente convenientes para tener una unidad de análisis con las mayores ventajas para los fines que persigue la investigación.” (Martínez, 2006, p. 86)

Nuestra selección de sujetos es intencional, seleccionando esta pareja por las siguientes circunstancias:

- La disposición de las docentes a que sus informes sean parte de este estudio.
- Presentaron todos los informes pedidos. (material de análisis que utilizaremos)
- No han participado en algún programa de formación que involucrara el Estudio de Clases.
- Reconocen no tener una formación específica en didáctica de la matemática.

Una de las docentes trabaja en un establecimiento público y la otra en un establecimiento subvencionado (de los 12 profesores, 4 eran de establecimientos públicos, 6 de subvencionados y 2 de privados). Ambas tienen más de 15 años de experiencia laboral (en promedio de años de experiencia de los 12 profesores participantes es de 12 años) y han participado en diversos programas de formación. Además, son profesoras mentoras, es decir, reciben en sus cursos a los futuros profesores de Matemáticas de la misma Universidad, colaborando y guiando sus prácticas docentes.

Creemos que esta *selección no probabilística* es adecuada, debido a que nos sirve para describir la reflexión en el programa formativo y produce menos ruido que otros sujetos que si bien, también iban de manera voluntaria, ya tenían experiencia o conocimientos con algunos de los componentes que articulaban el programa, lo cual puede ser un factor de sesgo para el estudio y de esta forma pueden aportar de mejor forma a una *replicabilidad* del estudio.

3.5 Recolección de datos

Una vez caracterizado el estudio, establecido el contexto en que se realiza y los sujetos, pasamos a describir los datos que nos sirven para estudiar la reflexión de los profesores participantes. Para ello vamos a comenzar por identificar estos datos e indicar los procesos de interpretación que llevamos a cabo con ellos.

Los datos e instrumento de recolección

Para estudiar la reflexión de las profesoras, requerimos información que nos de luz sobre sus etapas de pensamiento, la forma en que organizan su visión del problema afectado. Para ello, en este estudio vamos a limitarnos a emplear como instrumento para recoger la información los informes escritos y entregados por las profesoras en el transcurso del proceso formativo. Los

datos que utilizaremos para el estudio son los comentarios, ideas y observaciones de las profesoras en dichos informes, por tanto, son textos escritos de las profesoras. Se explicita su contenido en la tabla 6.

Tabla 6

Documentos que se utilizan en toma de datos

Informes	Contenido
Informe 1	La <i>problemática</i> a abordar y la hipótesis planteada. Artículos de literatura profesional y de investigación sobre la <i>problemática</i> seleccionada por el grupo La situación con la que ejemplifican la <i>problemática</i> . Un instrumento exploratorio donde se obtengan evidencias que confirmen (o refuten) la hipótesis. Su aplicación en algún curso y un análisis breve de resultados.
Informe 2	Tres tareas de enseñanza redactadas en forma de problema, para emplear en una clase que se relacionen con la <i>problemática</i> .
Informe 3	El diseño de la <i>clase en estudio</i> .
Informe 4	El análisis a priori de las <i>tareas de enseñanza</i> .
Informe 5	Análisis grupal de la <i>clase en estudio</i> realizada.
Informe 6	El análisis en el Seminario de la <i>clase en estudio</i> . Reformulación de la <i>problemática</i> y del diseño de la <i>clase en estudio</i> . Informe final, recopilación de los aspectos de los otros informes reformulados.

Los informes tenían una estructura inicial dada por la formadora, con el propósito de guiar las ideas vertidas en cada uno de ellos. Los profesores los enviaban a la formadora, quien agregaba sugerencias o comentarios y se los reenviaba a cada grupo para tomarlos en consideración en el desarrollo posterior del proceso.

3.6 Proceso de codificación de datos: análisis de contenido

Dado que los datos con los que contamos son escritos y de ellos necesitamos extraer información para detectar las dimensiones del estudio (indicadores del proceso de reflexión y niveles de profundidad en la reflexión), recurrimos a una metodología de investigación cualitativa que permite interpretar textos, el análisis de contenido.

El análisis de contenido es una herramienta metodológica en la que, como afirma Martínez (2006):

“el núcleo central de todo análisis de texto no se refiere al texto en sí, a algo que esté dentro del texto, sino a algo que está fuera de él, en un plano distinto, es decir, a lo que el texto significa, a su significado” (Martínez, 2006, pp. 130-136).

Nuestro interés es describir el contenido manifiesto de la comunicación (Krippendorff, 1990), en nuestro caso la *reflexión del docente*. El análisis de contenido tiene por finalidad establecer las conexiones entre el análisis sintáctico de un texto y sus referencias semánticas y pragmáticas. Lo consideramos adecuado para nuestro estudio, dado el tipo de material al que se tenía acceso (los informes escritos de los profesores) y el objetivo del análisis que se requería. En esta línea, hemos considerado el **análisis de contenido semántico**, que se dirige específicamente a la clasificación de las unidades de análisis de acuerdo con sus significados (Krippendorff, 1990).

Para llevar a cabo este análisis de contenido se llevaron a cabo la definición de las unidades de análisis y de las dimensiones, el diseño de las tablas con el material a analizar y establecimiento de indicadores de apoyo, aspectos que se detallan a continuación.

3.6.1 Unidades de análisis y categorías

Para realizar el análisis de contenido de un texto hay que comenzar por establecer unidades de análisis. Krippendorff (1990) llama *unidad de análisis* a cada una de las porciones que se van a observar y registrar. Son unidades portadoras de información de distinto tipo: físicas, sintácticas, referenciales, proposicionales y temáticas.

Se estableció utilizar como unidades de análisis del texto las *unidades referenciales* (Krippendorff, 1990, p. 88), en nuestro caso, los párrafos o conjunto de éstos, que tuvieran alguna conexión o idea en común. No se procedió a un muestreo de la información, ya que la cantidad de datos era suficientemente operable para este estudio.

Categorías. Krippendorff (1990) establece que el análisis de contenido requiere definir un sistema de categorías que identifiquen la información recogida en los informes, en relación a las dimensiones del estudio propuestas. En nuestro caso, para la dimensión *indicadores de la reflexión*, las categorías están dadas por los posibles estados de reflexión que se detectan. Para identificar estas fases requerimos elementos intermedios (situación problema, tareas, estado del arte), que están relacionados con la actuación de las profesoras y de la formadora durante el curso, tal como se mostrará en el siguiente apartado.

La dimensión *nivel de reflexión* emplea como categorías las propuestas por el modelo utilizado, de Hatton y Smith (1992), que han quedado suficientemente operativizadas en la tabla 2 (p. 22).

Las relaciones entre dimensiones y categorías del estudio la describimos en la figura 10.

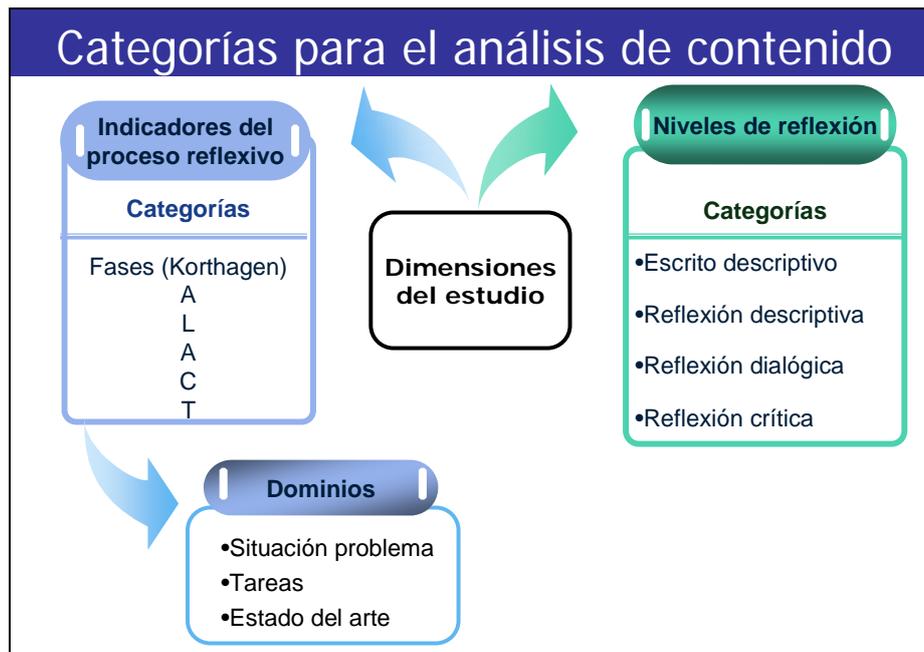


Figura 10. Esquema con las dimensiones del estudio y las categorías del análisis de contenido.

3.6.2 Diseño de las tablas con el material a analizar y establecimiento de dominios de apoyo

En esta fase se pretende asegurar la validez semántica y la validez interna. Para apreciar la reflexión de las profesoras procedimos a estudiar los elementos con los que contábamos para extraer la información, analizando el proceso formativo y las finalidades y documentos que componen cada sesión. En este proceso, de acuerdo a la literatura extraída de los antecedentes y marco teórico, se seleccionaron y definieron cinco *dominios de apoyo*: creencias de los profesores, gestión de la clase, las tareas, la situación problema y el estado del arte. Diseñamos las tablas para cada informe con sus respectivas unidades de análisis, describiéndolas e identificando las dimensiones a las cuales se asignaban. Se vuelven a discutir los indicadores, se refunden algunos (tarea y gestión⁹) y se eliminan otros (creencias del profesor¹⁰) que a nuestro parecer no aportaban o desviaban la atención del estudio, contribuyendo elementos para la **validez semántica** (Krippendorff, 1990) del análisis de contenido. Pasamos a describir los aspectos que nos permiten extraer información para poder incluir los textos en los dominios:

⁹ Considerando la definición de “tarea” del análisis didáctico como lo concibe el grupo PNA, ésta incluye la noción de gestión que estábamos empleando, por lo cual optamos dejar el dominio de apoyo tareas, considerando la gestión en ella.

¹⁰ Si bien este es un elemento analizado en diversos estudios sobre reflexión docente, consideramos que dado el tipo de instrumento de recolección de datos (informes escritos) era insuficiente. Creemos necesario considerar entrevistas y otras fuentes de recolección de información que permitan inferir con mayor profundidad sobre las creencias de los profesores, lo que no fue posible para este estudio.

- **La situación problema.** Un elemento que nos transmite información sobre el proceso reflexivo es el tipo de situación problema que plantean los profesores como origen o móvil de sus trabajos en el curso de formación. El proceso de reflexión se ve reflejado en la amplitud y precisión con que identifican la situación problema (Flores, 2003). Con esta perspectiva en nuestro trabajo identificamos dos situaciones problemas que constituyen el punto de inicio para dos procesos de reflexión (Korthagen et al., 2001). Estas dos situaciones emergen de dos tareas grupales planteadas en el Seminario y están en constante evolución a raíz del proceso mismo de reflexión, tomando nuevas formas y permitiendo a los docentes adoptar una postura sistemática y fundamentada al respecto. Una de estas situaciones problemas tiene que ver con la elección por parte de las docentes de un fenómeno docente que les lleva al planteamiento y desarrollo de un problema al que hemos llamado “PROBLEMÁTICA”; y una segunda situación problema que tiene que ver con el diseño, aplicación y reformulación de una clase que aborde dicho problema profesional y que intenta seguir la metodología de Clase japonés. Llamamos a esa situación “CLASE EN ESTUDIO”.
- Dentro del programa de formación se consideró que los profesores abordaran algunos aspectos básicos del **estado del arte** sobre su problemática con el fin de ubicar su situación problema en la disciplina, en su presente y futuro, analizando en qué grado ha sido estudiado (y quizás ya tenga solución), o bien encontrando aportes o aristas que permitan contar con una mirada más amplia sobre la misma. Extrayendo ideas de Hernández, Fernández y Baptista (2010) se trata de que los profesores detecten, obtengan y consulten la bibliografía y otros materiales que pueden ser útiles para los propósitos de su estudio, extraigan y recopilen la información relevante que atañe a la problemática (disponible en distintos tipos de documentos). Es una revisión selectiva, puesto que cada año se publican en diversas partes del mundo cientos de artículos de revistas, libros y otras clases de materiales dentro de las diferentes ramas del conocimiento, lo que hace necesario seleccionar solamente las más importantes y recientes. En este referente podríamos centrar la atención en el tipo de fuente (de investigación en educación, o en educación matemática, de profesores, de matemática divulgativa, libros de alumnos o de profesor, etc.), el autor (relevancia del mismo en relación a la problemática), la antigüedad de la referencia, la pertinencia del material, entre otros. Durante el proceso hemos apreciado la poca experiencia de los participantes en este campo, lo que ha dado lugar a que hayamos analizado especialmente esta perspectiva, es decir, el grado en que se relacionan los artículos encontrados, la *problemática* y la *clase en estudio*.

- Las **tareas de enseñanza** seleccionadas para el diseño de *clases en estudio* es el tercer dominio que nos servirá de apoyo para el análisis de la reflexión de los escritos, ya que cumple un rol relevante para la reflexión sobre la *clase en estudio*. Un referente importante de la clase es el tipo de tareas de enseñanza propuestas, especialmente en la distinción entre problema (problema no rutinario) y ejercicio (problema rutinario), ya que fueron las ideas que se trabajaron en esta etapa con los docentes en el Seminario. Nos basamos en las ideas de Callejo (1998) quien señala los siguientes criterios para distinguir ejercicio de problema:
 - El comportamiento que debe seguir un alumno para llegar a la solución: en un ejercicio basta que aplique mecánicamente conocimientos ya adquiridos, en un problema es necesario que se familiarice con la situación, busque, relaciones, etc., hasta elaborar una estrategia que le conduzca a la solución.
 - El objetivo del profesor cuando plantea un ejercicio es que el alumno aplique conocimientos de forma rutinaria, en cambio en un problema es que investigue.
 - El tiempo a emplear en un ejercicio es predecible, en un problema es difícil de estimar.
 - La dimensión afectiva al abordar un ejercicio no suele suscitar emociones importantes, en un problema supone una carga afectiva importante del alumno.

Completamos con los aportes de Gaulin (1982), quien indica que la diferencia entre un ejercicio y un problema es relativa a la persona, dependiendo de los conocimientos y experiencias que ella posea. Por tanto tenemos que atender a las conductas esperadas del alumno, al objetivo del profesor, el tiempo previsto de resolución y la actitud que se suscita, siempre contando con la experiencia concreta que tienen los alumnos a los que va dirigida la clase.

Nos interesa también examinar la gestión de las tareas de enseñanza, para lo que nos basaremos en algunos elementos del análisis didáctico (Gómez, 2007, Rico 1997a, 1997b). Si bien en origen se ha propuesto este análisis como una herramienta para que el docente diseñe unidades didácticas, nosotros (Rojas, Flores y Ramos, en prensa) lo estamos empleando para analizar al docente y su práctica profesional. En este caso observaremos qué elementos describió en su análisis de actuación. En el análisis cognitivo, el profesor debe desarrollar su postura de cómo sus estudiantes progresan en la construcción de su conocimientos al enfrentarse a las tareas de enseñanza propuestas

en la clase, estamos frente a lo que ya otros autores también denominan análisis a priori, en donde el docente estudia la situación de aula antes de llevarla a cabo, desde la mayor cantidad de aristas posibles, en especial desde los aspectos cognitivos relacionados con el contenido matemático particular que se tratará en la clase. Este análisis a priori permite detallar fundamentadamente aquellas tareas de enseñanza que los estudiantes podrán resolver, los errores y obstáculos que puedan surgir en el desarrollo de éstas. En este análisis se identifican diversos elementos que nosotros adoptaremos como criterios para analizar la evolución de la gestión de la clase, éstos son:

- Las tareas de enseñanza que sus estudiantes pueden resolver.
- Los errores en los que los estudiantes han incurrido al abordar las tareas de enseñanza.
- Las dificultades que subyacen a esos errores.
- Los obstáculos que es necesario superar para resolver esas dificultades.

En el análisis de actuación se retoman estos elementos los cuales nos proporciona información sobre cómo el profesor se plantea actuar frente a las acciones y producciones dadas en la clase. De esta forma, podemos observar la evolución de la gestión de las tareas de enseñanza, entre el antes y el después de la clase, observando cómo se manifiestan los elementos que se utilizan dentro del análisis cognitivo y de actuación mencionados.

Un último aspecto del análisis de tareas de enseñanza se refiere a examinar la coherencia de éstas con el objetivo de la *problemática* planteada por las profesoras. A este efecto será importante tomar en consideración los análisis cognitivo y de contenido realizados sobre la enseñanza del álgebra en secundaria.

En los párrafos anteriores se muestran los criterios que nos permiten identificar reflexión en los informes. Como hemos mencionado, la codificación de los niveles de reflexión se hace utilizando la tabla 1 (p. 16 de este trabajo).

La **fiabilidad de la codificación**. Como se ha mostrado, los indicadores de reflexión se van a caracterizar mediante los dominios presentados en los párrafos anteriores, teniendo una codificación mínima. Los niveles de reflexión se van a codificar de acuerdo con las categorías señaladas, lo que requiere una interpretación.

Procedemos a realizar el análisis de contenido de los textos elaborando unas tablas en las que en cada columna aparece una unidad de análisis (suficientemente identificada en el documento y fase del proceso formativo), y dos columnas, relativas a las dos dimensiones del estudio señaladas. En la primera destacamos todos los dominios implicadas en la unidad (según la tarea formativa a la que corresponda). En la segunda columna se indica el nivel de reflexión de esa unidad de análisis, según los niveles de reflexión de Hatton y Smith. Esta codificación se lleva a cabo por la investigadora, teniendo una segunda revisión por una profesora de la Universidad de Augsburg (Alemania) y un académico de nuestra Universidad. De esta manera, atendemos a la **fiabilidad de la codificación o validez interna** (Krippendorff, 1990; Fox, 1981).

Queriendo extraer de los informes dos visiones, por una parte, una mirada global sobre el proceso reflexivo y por otra, un análisis del proceso de reflexión, se diseñaron dos tablas. La primera es la descrita en el párrafo anterior (anexo 1), donde las columnas corresponden a cada informe. Luego, con miras a detallar nuestra identificación y análisis del proceso de reflexión, se diseñó una segunda tabla (anexo 2), donde las columnas corresponden a las fases del ciclo reflexivo, ubicando en ellas las unidades de análisis correspondientes de cada informe.

En las transcripciones (que se encuentran en el anexo 1), a las unidades de análisis se les asigna un código de la forma Ti_Ui con $i \in \mathbb{N}$, donde Ti identifica la tabla correspondiente y Ui identifica la unidad de análisis de aquella tabla. Por ejemplo, $T2_U1$, es la unidad 1, de la tabla 2.

3.7 Articulación del proceso formativo con el modelo ALACT

En relación al objetivo 1: *Identificar cómo se articula el programa de formación con los procesos que generan reflexión, es decir, relacionar las etapas que conforman el programa de formación con el proceso reflexivo*, se realizó un proceso de modelización, para identificar cómo se articula el programa de formación con los procesos que generan reflexión, es decir, relacionar las etapas que conforman el programa de formación con el proceso reflexivo. Para ello, centrándonos en las fases del ciclo de Korthagen, se consideró cada situación problema y las dimensiones que ellas requerían, es decir, para cada situación problema se estudia un ciclo reflexivo.

En un principio, la categorización se vio influenciada por el proceso de articulación del ciclo reflexivo con el programa de formación, el cual pasó por varias etapas debido a que el programa de formación no fue diseñado ni se llevó a cabo pensando en la reflexión, como se explica en detalle en el apartado siguiente. De esta manera, se intentó hacer la correspondencia entre las etapas del Seminario con las fases del proceso reflexivo ALACT. De la misma forma se intentó

asociar las fases del proceso ALACT con los escritos de los informes de las profesoras. La correspondencia no era completa, lo que nos llevó a discriminar en el objetivo de cada apartado en cada informe para situarlo en la fase correspondiente. El estudio del proceso formativo y de la actuación de las profesoras nos llevó a observar en el programa de formación dos situaciones problemas que se plantearon a las docentes, cada una de ellas promueve un proceso reflexivo, como se menciona en el apartado 2.6 de este trabajo.

Así pues, en el proceso de categorización, se incorpora la identificación de la situación problema a la que está asociada cada unidad de análisis. Ahora procedía entrar de lleno a explicitar el proceso ALACT en relación al programa formativo y a los dominios de apoyo, que es lo que desarrollaremos en la siguiente subsección. Con estos elementos damos consistencia a la *validez pragmática*, es decir, el interés en que los resultados representen o se correlacionen con lo que se pretendía representar (Krippendorff, 1990).

3.7.1 Situación problema 1: problemática

Fase 1: Acción o experiencia. Esta primera fase gira en torno a la situación problema, que parte de la *problemática* que las docentes se plantean y que se describe en los escritos del informe 1. Recordemos que los participantes debían definir un problema profesional, a partir de su práctica, ejemplificándolo en alguna situación o fenómeno concreto donde la han evidenciado.

Fase 2: Mirar hacia atrás en la acción. Consiste en realizar un esbozo de lo que realmente es cada situación problema. Para ello, como menciona Korthagen, en esta fase debe haber cuestionamientos del tipo ¿qué quería? ¿Cómo lo hice? ¿Cómo me sentí? ¿Qué pensaban, qué sentían o que hacían mis alumnos? Preguntas implícitas o explícitas, que intentaremos clarificar analizando en los informes 1, 2, 3 y 4. Estos informes nos van a permitir evidenciar de qué forma las docentes describen lo que pretendían y cómo lo materializan con alumnos de sus propios cursos, focalizando la situación concreta que perciben respecto a la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.

Fase 3: Conocimiento de los puntos importantes o esenciales. Se trata de identificar elementos importantes de la situación problema. En nuestro caso vamos a emplear la etapa del seminario que les pedía buscar artículos que trataran la situación problema planteada. Por tanto, el estado del arte que elaboren será el referente que usaremos en esta fase del proceso reflexivo. Este aspecto (el que evidencia la lectura de documentos que hicieron las docentes y que se encuentra en informe 1), el análisis que realizan las docentes sobre la clase en estudio (informe 5) y la retroalimentación de la formadora (a través de comentarios y sugerencias en los escritos

en estos ámbitos) nos aportará información acerca de la toma de conciencia de las profesoras sobre los aspectos fundamentales que dieron lugar a las respuestas de la fase anterior.

Fase 4: Crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción. Se trata de que las docentes busquen estrategias o soluciones para abordar posteriormente la problemática, es decir, para un nuevo evento en su práctica docente. Esta fase la analizaremos a través de la reformulación del estado del arte y de la situación problema (informe 6).

Fase 5: Comprobar en una nueva situación. Como es la etapa donde volvemos al punto inicial, empezando un ciclo nuevo de reflexión, en esta fase consideramos la nueva propuesta de acción que emerge de la reformulación de la problemática descrita en la fase 1 y se explicita en el informe 6.

Podemos resumir lo anterior a través del esquema que se presenta en la figura 11:

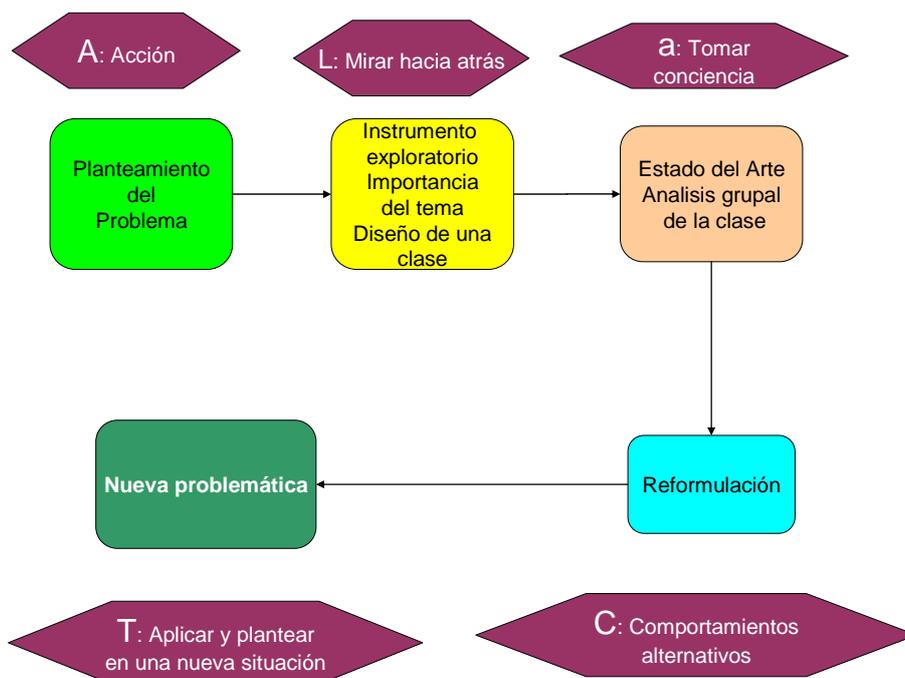


Figura 11. Esquema para el proceso reflexivo de la situación problema 1, La problemática.

3.7.2 Situación problema 2: la clase en estudio

Fase 1: Acción o experiencia. Esta primera fase consiste en definir una situación problema, que en este caso se centra en el diseño (que se extrae de los informes 1, y 3) y realización de una clase que se relacione con la *problemática* (extraído del informe 2, 3 y 4). Se verá evidenciada en el dominio de apoyo tarea, debido a lo que nos aporta sobre el diseño y aplicación de la clase.

Fase 2: Mirar hacia atrás en la acción. En esta fase revisaremos el análisis grupal que hacen las profesoras después de la realización de la clase, en términos de las tareas de enseñanza, buscando, por ejemplo, si hubo cuestionamientos como, entre otros, ¿qué quería hacer? ¿Cómo se sintieron mis alumnos? Esto se observa a través del informe 5, análisis de la clase realizada por las docentes.

Fase 3: Conocimiento de los puntos importantes o esenciales. Como se trata de poner en el tapete las teorías que están detrás del problema en cuestión, en este caso la *clase en estudio*, su diseño y realización, se contempla para esta etapa la puesta en común y las observaciones de la formadora en los informes, que se plasman en el apartado “análisis de la clase” reformulado, presentados en el informe 6. En este proceso no se contó con lecturas que apoyaran esta fase. Las tareas de enseñanza nos ayudan a interpretar la reflexión.

Fase 4: Crear, buscar y preparar comportamientos alternativos para la acción. Luego de contar con los elementos vertidos en la fase anterior, las docentes elaboran nuevas estrategias de cómo abordar la *clase en estudio*, buscando soluciones a las dificultades que se evidenciaron en ésta y proponiendo formas de mejorar la propuesta. Estos aspectos se evidencian en el apartado “confrontación” del informe 6. El dominio tareas será clave para el análisis de esta fase del proceso reflexivo.

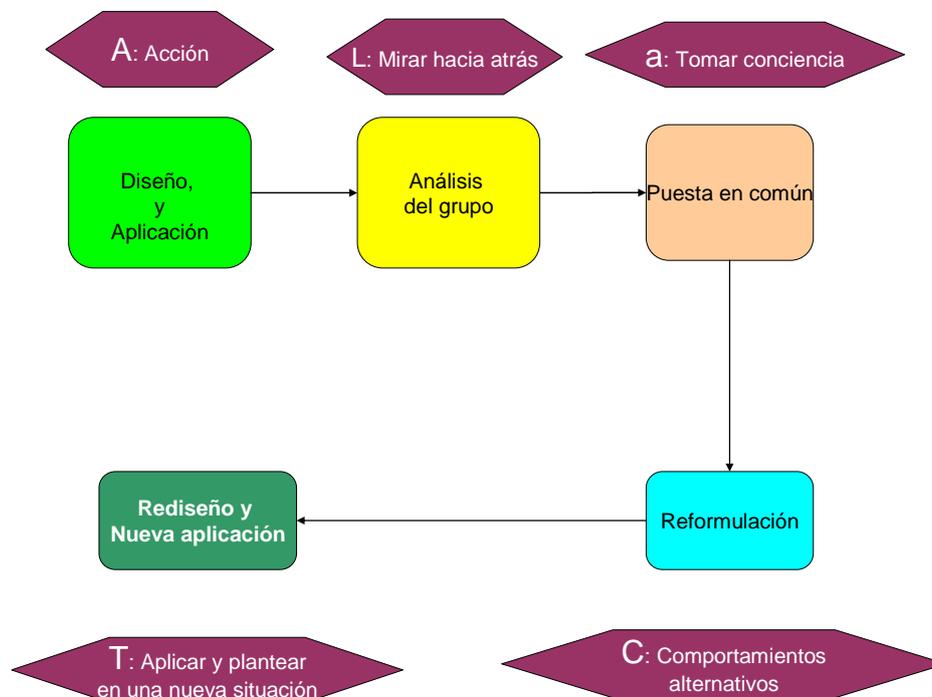


Figura 12. Esquema del proceso reflexivo para la situación problema 2, La clase.

Fase 5: Comprobar en una nueva situación. Se trata de volver al punto inicial a través de una nueva situación, en este caso, la reformulación y aplicación de la nueva clase. Esta fase la describimos a través de los dominios situaciones problema y tareas.

Podemos resumir lo anterior a través del esquema que se presenta en la figura 12:

Tomando los informes escritos de las profesoras, se realiza el análisis de contenido para ambos procesos reflexivos, extrayendo de formas distintas la información relevante para cada situación problema, como queda reflejado en la figura 13.

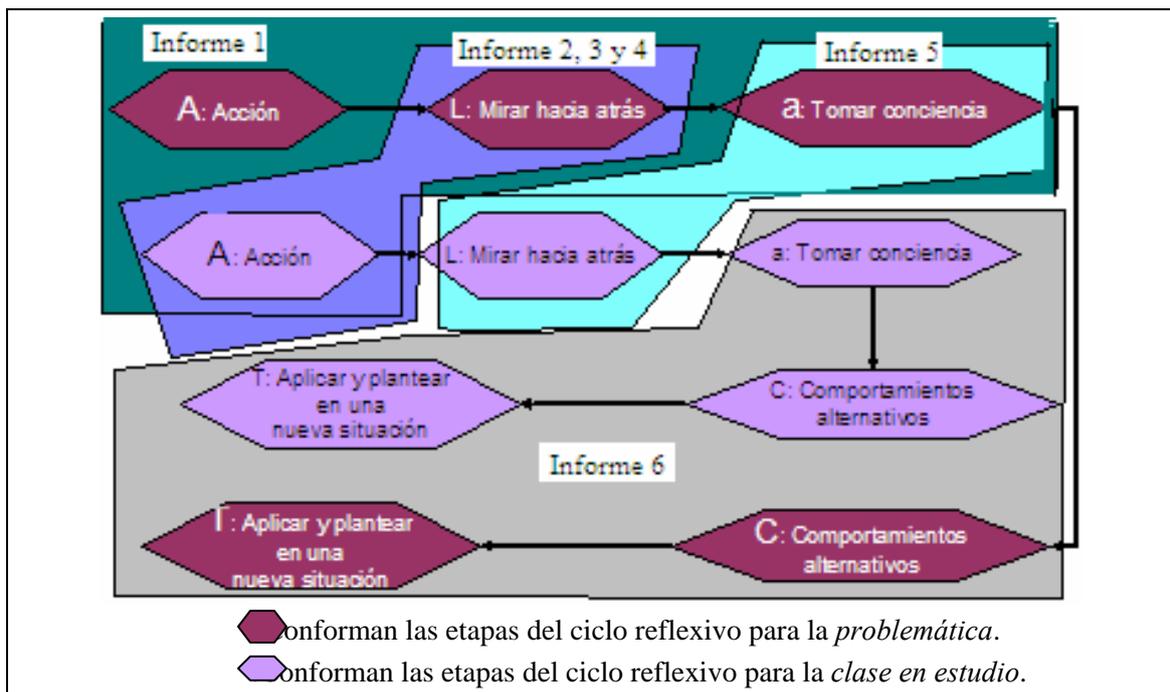


Figura 13. Esquema de la identificación de los informes con cada proceso ALACT.

Cabe destacar, que los informes se iban elaborando a medida que se avanzaba en las temáticas, por tanto, un informe no representa un solo momento del proceso formativo, pues, en ocasiones recoge varios momentos del proceso formativo y de reflexión. Así por ejemplo, el informe 1 se constituye del trabajo realizado en las sesiones 1, 2 y parte de la sesión 3.

Capítulo 4

Análisis de la información

Una vez establecido el procedimiento de recogida, análisis y tipificación de datos, convertimos el texto de los informes en tablas como las recogidas en el Anexo 1. A partir de estas tablas seleccionamos los informes y textos que nos suministran información para estudiar las dimensiones del estudio previstas, los indicadores de reflexión y el nivel de reflexión. Con ello hicimos una nueva tabla que figura en el Anexo 2. A partir de este anexo, tipificando e interpretando las unidades podemos pasar a describir lo que observamos en el proceso, respecto a los dos aspectos a medir. A continuación presentamos las apreciaciones recogidas en este análisis, agrupadas en los dos ciclos descritos en el capítulo anterior, el referente a la *problemática*, y el de la *clase en estudio*.

4.1 Análisis de la situación problema 1: La problemática.

Fase 1: “A”, acción. En la primera sesión del Seminario los docentes en parejas se plantearon alguna situación que les provocara conflicto o incertidumbre en el aula, que les llamara la atención. La pareja de docentes de este estudio se planteó una *problemática*, que extraemos de los escritos del informe 1, a través del siguiente párrafo:

Párrafo¹¹ (u.a.: T1_U1, T1_U2 y T1_U3)

¿Por qué los alumnos no descomponen en factores al momento de simplificar una fracción algebraica cuyo numerador es un polinomio?

¿Por qué los alumnos transfieren el procedimiento de simplificación de un monomio al momento de simplificar una fracción algebraica no contemplando la diferencia?

Este trabajo pretende llegar a reconocer los errores que los alumnos realizan al momento de simplificar una fracción algebraica.

En este primer párrafo, las profesoras presentan una *problemática* que mezcla elementos relacionados con la simplificación de expresiones algebraicas: su intención inicial es encontrar las razones por las cuales los alumnos tienen dificultades en las simplificación de expresiones algebraicas cuyo numerador es un polinomio, luego en buscar razones por las cuales se produce

¹¹ Llamamos “párrafo” a una parte del texto de los informes, constituido por una o más unidades de análisis.

un tipo de error en el proceso de simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias y por último plantean como objetivo de estudio reconocer los tipos de errores de los estudiantes cuando simplifican expresiones algebraicas.

Si miramos la tabla del anexo 1, veremos que los errores que presentan las profesoras:

- Se fundamentan desde su experiencia, pero el error que ejemplifican es de la misma naturaleza que lo planteado en las sugerencias didácticas que el Ministerio de Educación de Chile presenta. (ver anexo 3)
- Son de la misma naturaleza que los que se presentan en el Texto oficial del Ministerio de Educación de Chile (Zañartu, Darrigrandi, Ramos, 2011) de matemática de 2° de Educación Media (15 años aproximadamente) en donde aparece:

2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.

b. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$

c. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a} = b$

- Son de naturaleza similar a los que aparece en estudios internacionales, como el de errores en la simplificación de expresiones fraccionarias algebraicas de Cervantes y Martínez (2007) que destacamos en el capítulo 3, como por

ejemplo, el error: $\frac{AB+CD}{AC} = B+D$.

Esto puede sugerir que las docentes incorporan (de manera conciente o inconsciente) en su problemática elementos que el Ministerio de Educación de Chile plantea dentro de sus directrices, tanto a través de sus sugerencias didácticas como de sus textos escolares oficiales. También incorporan errores que son reconocidos en investigaciones.

El contenido matemático está focalizado en la simplificación de expresiones fraccionarias cuyo numerador es un polinomio, en donde aparecen también mencionados los conceptos de monomio y reglas de operatoria. Este contenido matemático está en relación con la

conceptualización de variable como número generalizado como lo afirma Trigueros (1999), que involucra la capacidad de simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

Plantean dificultades que surgen en el tratamiento del tema, entre ellas las profesoras se refieren al pasaje de la aritmética al álgebra de la siguiente forma:

Párrafo (u.a.: T1_U8)

Ausencia del significado del álgebra, es decir, los alumnos no establecen el vínculo entre la aritmética y la generalización que conlleva el álgebra, por lo cual errores que cometen en aritmética se convierten en una dificultad para el nuevo proceso cognitivo del alumno en particular en el problema de simplificación.

Respecto a esto, Trigueros (1999), menciona que la generalización de la aritmética al álgebra parece ser un obstáculo difícil de superar, lo que de alguna forma las profesoras contemplan en el párrafo mencionado.

En esta fase se aprecia en cuanto al **nivel de reflexión** que las unidades de análisis (u.a.) son de tipo:

- *Escrito descriptivo*, señalando aspectos de la *problemática*. (T1_U1, T1_U2, T1_U13, T1_U5)
- *Reflexión descriptiva*. (u.a.: T1_U3, T1_U6, T1_U7, T1_U8, T1_U9, T1_U10, T1_U12) describiendo errores y dificultades que han evidenciado en su práctica en relación a la *problemática*, realizando una mirada retrospectiva de ella.

Un ejemplo del nivel de reflexión de tipo *reflexión descriptiva*, ese extrae de la unidad de análisis T1_U7, presentada a continuación:

Párrafo (u.a.: T1_U7)

También existen errores de procedimientos operatorios, ya que los alumnos transfieren la forma de simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, a una simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios, saltándose las reglas de sumas y productos sin importar el orden prioritario de las operaciones de éstas.

En este párrafo, las docentes señalan errores de sus alumnos observados en su práctica con una mirada retrospectiva de ella.

Fase 2: “L”, mirar hacia atrás. Al avanzar en el informe 1, las docentes redactan sobre la importancia del tema, como lo describen en el párrafo siguiente:

Párrafo (u.a.: T1_U11)

La importancia del tema radica que los alumnos no le encuentran sentido al momento de la simplificación de una fracción algebraica, lo cual genera un problema para el aprendizaje, ya que éste no presenta la mejor actitud para aprender.

En esta redacción las docentes miran hacia su práctica buscando argumentos que le den soporte a su *problemática*, desarrollando las ideas de ésta.

Una forma de que los docentes desarrollaran su *problemática* era buscando evidencias de ella en sus *clases en estudio*, para que así pudiesen constatar que la *problemática* tiene un componente de vulnerabilidad relacionado con el contexto. El siguiente párrafo muestra parte de lo que escribieron sobre ello:

Párrafo (u.a.: T1_U18, T1_U19, T1_U20 y T1_U21)

Se planteó el siguiente problema en un Liceo técnico Profesional y en un Colegio Científico Humanista Subvencionado.

Pregunta: Considere la siguiente expresión:

$$\frac{a^2 + b}{b}$$

¿Es posible simplificarla?

Observa cómo lo resolvieron dos alumnos:

$$\begin{array}{c} \diagup \quad \frac{a^2 + b}{b} \quad \diagdown \end{array}$$

Juan lo simplifica
y obtiene como
resultado a^2

Pedro indica que no es
posible simplificar

- ¿Quién tiene la razón?
- Si $a = 2$ y $b = 3$ ¿la fracción resultante es simplificable?
- ¿Qué puedes decir en relación a tu respuesta anterior?

Este problema fue desarrollado por tres 3° Medios de la Escuela Industrial de Valparaíso equivalente a 100 alumnos y el 42% de ellos respondió correctamente la pregunta 1. La mayoría respondió que Juan tenía la razón.

Este resultado se debe a que los alumnos asocian la simplificación de expresiones algebraicas con una simplificación numérica, otro factor puede ser que olvidaron el procedimiento para poder simplificar fracciones algebraicas donde el numerador es un binomio, ya que no alcanzaron a madurar el concepto el año anterior.

Con respecto a la pregunta 2 en general la respondieron bien, aunque algunos alumnos cometieron errores de cálculo y también simplificaban primero los números iguales antes de resolver la potencia.

Muchos de los alumnos no respondieron la pregunta.

Al analizar los resultados del instrumento exploratorio mencionado en el párrafo anterior, las profesoras observan que el error más común que los alumnos comenten al abordar la expresión algebraica se mantiene al abordar la expresión numérica del enunciado. Sería interesante saber si las profesoras se dan cuenta de la relación entre ambos ámbitos o bien sólo hacen una descripción de los resultados.

Podemos percatarnos a través de éstos y los demás párrafos cómo las docentes miran la *problemática* presentando razones por las que se produce, las cuales están relacionadas con dificultades cognitivas respecto a la enseñanza y aprendizaje del álgebra, como se manifiesta en el siguiente párrafo respecto al instrumento exploratorio:

Párrafo (u.a.: T1_U22)

El mismo problema fue desarrollado por un 2º, un 3º y un 4º Medio del colegio Alberto Hurtado. Aquí el resultado fue mejorando a medida que el curso aumentara. Creemos que se debe a que a medida que los alumnos van creciendo ellos van madurando y comprendiendo mejor el concepto de simplificación de fracciones algebraicas y del álgebra en general.

El tipo de error que las docentes pretenden observar en el instrumento exploratorio sobre la problemática:

- Es también de la misma naturaleza que los planteados en las sugerencias didácticas que el Ministerio de Educación de Chile presenta (ver anexo 3, marco teórico) y las presentadas en los textos escolares oficiales.
- Es similar a los presentados en el estudio de Cervantes y Martínez (2007), tal como apreciamos en la primera fase, pero las profesoras incorporan dos elementos matemáticos más en el enunciado: la valoración de expresiones algebraicas, e, implícitamente, la noción de restricción.

Sobre el contenido matemático que plantea la tarea de enseñanza se observa que:

- Tiene relación con la simplificación de expresiones algebraicas en dos variables.
- Propone una expresión que no es factorizable.
- Incorpora un nuevo elemento en juego, el cual es parte de los conocimientos previos del alumno en esta etapa escolar: la valoración de expresiones algebraicas.

Por otro lado, al desafiar a las profesoras con el diseño de una clase relacionada con la problemática, éstas se involucran de otra forma en la explicitación de su problemática. Los informes 2, 3, 4 tienen este objetivo, dentro de los que extraemos el siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.: T3_U7)

Escriba la institucionalización del contenido de la clase.

Que el alumno sea capaz de transformar la expresión fraccionaria en factores, a partir de las técnicas de factorización de modo de obtener una expresión más simple y de mejor manejo, considerando las restricciones previamente.

Podemos percatarnos en este párrafo, que las profesoras se centran en la obtención de expresiones más simple y fáciles de tratar a partir de la simplificación, considerando la noción de restricción. La identidad también es una noción que empiezan a contemplar en esta fase del proceso.

En esta fase las unidades de análisis tienen un **nivel de reflexión** de tipo:

- *Escrito descriptivo* (u.a.: T1_U18, T1_U21, T2_U1, T2_U2, T2_U3, T3_U1, T3_U4, T3_U5, T3_U6, T3_U9, T4_U1, T4_U3, T4_U4, T4_U6, T4_U7), cuando enuncian la actividad que proponen para mostrar evidencias empírica de la problemática.
- *Reflexión descriptiva* (u.a.: T1_U11, T1_U19, T1_U20, T1_U22, T3_U7, T4_U8) al plantear la importancia del tema y los resultados del instrumento exploratorio, mostrando una mirada retrospectiva de su práctica, como, por ejemplo, el párrafo siguiente correspondiente a la unidad T1_U20.

Párrafo

Este resultado se debe a que los alumnos asocian la simplificación de expresiones algebraicas con una simplificación numérica, otro factor puede ser que olvidaron el procedimiento para poder simplificar fracciones algebraicas donde el numerador es un binomio, ya que no alcanzaron a madurar el concepto el año anterior.

En el párrafo las docentes señalan las razones por las que se obtuvieron los resultados en el instrumento exploratorio, intentando dar alguna razón que la justifique.

Fase 3: “a”¹², puntos importantes. Se incorpora un nuevo elemento al trabajo de las docentes, revisar el estado del arte, elemento que debería permitirles contar con una panorámica sobre los estudios realizados en relación al tema seleccionado. Este trabajo lo realizan sin conocimientos previos de cómo buscar, elegir e incorporar en el estudio aquellos trabajos que le son útiles para el propio. En el informe 1, donde presentan lo referido a ello, se muestran tres documentos:

Respecto al primer documento observamos que:

¹² Para no confundir la primera y tercera fase del proceso reflexivo ALACT, utilizaremos la “a” para identificar la fase 3, es decir, ALaCT.

- Es un artículo publicado en 1998 en la Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado. Los autores trabajan la línea del álgebra desde hace varias décadas, teniendo otros trabajos en el área.
- Las referencias del documento contiene literatura que aportaría información respecto a la problemática de las docentes.
- El tema matemático que aborda es el lenguaje algebraico, el cual tiene relación con la simplificación de expresiones algebraicas. Vemos en él una herramienta útil para las profesoras respecto a su investigación, ya que presenta el análisis didáctico del lenguaje algebraico en la enseñanza secundaria.
- Las profesoras focalizan su atención en el apartado del documento que se refiere a las dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje del álgebra, copiando textualmente un párrafo. Esto nos sugiere que las profesoras buscan material que tenga que ver con los errores en relación a la simplificación de expresiones algebraicas, su temática de estudio. De todas maneras no percibimos que este apartado se plasme en el desarrollo de la *problemática*.
- Las docentes se remiten a describir las ideas relevantes del artículo.

Del segundo documento apreciamos:

- Es una presentación en power point que muestra la planificación de la unidad de álgebra para el nivel segundo medio (14-15 años aproximadamente) de enseñanza media.
- Se trata el tema de la simplificación de expresiones algebraicas de acuerdo al marco curricular en este nivel, por lo que, en ese sentido el documento aporta a las profesoras la ubicación curricular de tema, los contenidos mínimos para abordar la temática.
- En el documento se plasman variados elementos del análisis didáctico, del análisis de instrucción (a través de una propuesta metodológica para su enseñanza), del análisis de contenido (como conocimientos previos, los aprendizajes esperados de la unidad).
- Se extrae del material que presenta el Ministerio de Educación de Chile a través de uno de sus proyectos. Esto nos sugiere sobre la importancia o sobre el acceso que tienen las profesoras al material digital que aporta el Ministerio de Educación de Chile.

- Los autores son chilenos y tienen otros trabajos relacionados con el álgebra y en particular, con el tema de su problemática.
- En este documento aparece la tarea de enseñanza que las docentes plantean en su versión inicial para la clase en estudio, lo cual puede evidenciar que las docentes encontraron utilidad en el material del estado del arte para abordar la segunda situación problema.
- El documento hace alusión indirecta al rol de la variable como número generalizado, a través de la propuesta “comprensión más profunda de la relación entre las expresiones algebraicas y los números que ellas representan”. Esto también se observa en otro apartado del documento cuando en éste se alude al Mineduc con la afirmación “...valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora...” (u.a.:T1_U16)
- Las docentes se remiten a presentar textualmente parte de lo que aparece en el archivo.

El tercer material:

- Es un programa gratuito diseñado para trabajar en distintos ámbitos de la matemática, en particular permite al docente ejercitar con expresiones algebraicas, como reducción de términos semejantes, valoración de expresiones algebraicas, entre otras.
- Es una aplicación que el Ministerio de Educación de Chile ha promovido a través de la red Enlaces (proyecto para profesores que fomenta el uso de TIC), por lo que nuevamente nos cabe plantearnos la cuestión sobre el acceso que tienen las profesoras al material digital que aporta el Ministerio de Educación de Chile. Incluso en unos de los recursos didácticos de la página del proyecto Enlaces del Mineduc (disponible en <http://www.comenius.usach.cl/enlacesmatsp/files/File/MLANZ2006/materialprofalg.pdf>), hacen uso de este programa en relación al álgebra, como lo muestra la siguiente imagen extraída de dicho documento (figura 14):

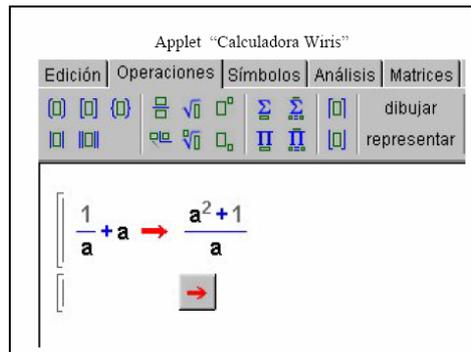


Figura 14. Captura de imagen del programa “Calculadora Wiris”

- Parece que las profesoras contemplaron este recurso como posibilidad para abordar la situación problemática dos, la clase, aunque al revisar los informes posteriores, vemos que las tareas de enseñanza propuestas prescinden del uso de tecnologías.

Por otra parte, a raíz de los aportes de la formadora sobre la *problemática*, las docentes hacen explícito el error que desean estudiar en sus alumnos, manifestándolo a través del siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.: T6_U4)

Al reconocer distintos errores hemos notado uno muy común por parte de los alumnos: el de transferir la forma de simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, a una simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios, obviando las reglas de sumas y productos sin importar el orden prioritario de las operaciones de éstas.

Además, se observa en otros párrafos de esta fase que las profesoras toman otros componentes matemáticos de la *problemática*:

- El rol en el cálculo de las valoraciones numéricas de las expresiones algebraicas.
- Diferenciar la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de las de polinomios.

Las profesoras al referirse a la **importancia del tema**, incorporan nuevos elementos en relación al rol que tiene este contenido para la adquisición de nuevos conocimientos, como la resolución de ecuaciones con denominadores fraccionarios y la resolución de problemas. Esto nos sugiere que las docentes ubican puntos importantes sobre la *problemática* que en un principio no habían visualizado, pero también parece ser que las docentes plasman (no sabemos si concientes o no)

las ideas del Ministerio de Educación de Chile, en relación al siguiente párrafo extraído de Mineduc (2009a):

“El desarrollo de esta unidad (fracciones algebraicas) se orienta no sólo al aprendizaje de un conjunto de procedimientos de operatoria sino que, fundamentalmente, para que las alumnas y alumnos valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora y continúen sus procesos personales de desarrollo del pensamiento matemático, las utilicen para modelar situaciones y recurran a ellas para resolver problemas.”. (Ministerio, 2009a, p. 58).

Si lo vemos desde el punto de vista del análisis didáctico (Gómez, 2007, Lupiáñez, 2009) podemos decir que las profesoras amplían su mirada sobre la *problemática* considerando aspectos del análisis fenomenológico.

Se puede apreciar en esta fase cómo las profesoras de nuevo se enfrentan a la necesidad de incorporar nuevos elementos, lo que nos da luces de cómo le dan más riqueza y complejidad a su *problemática*. Revisando el mapa conceptual del capítulo 2, vemos que la simplificación de expresiones algebraicas convive con otros elementos que rodean a las expresiones algebraicas y apreciamos que las docentes se vieron en la necesidad de considerarlo en su *problemática*.

De esta forma las profesoras ya toman conciencia de la *problemática* y centran el estudio en una situación particular observada en sus prácticas, como lo vemos reflejado en el siguiente párrafo extraído del informe 5, que recoge el análisis de la clase.

Párrafo (u.a.: T5_U3)

Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relaciones en la tabla, muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas.

Sobre el **nivel de reflexión**, se observa que es de tipo:

- *Escrito descriptivo*, (u.a.: T1_U15, T1_U16, T1_U17, T6_U20, T6_U23, T6_U29) donde se remiten a presentar los aspectos relevantes de los documentos encontrados (dominio estado del arte).
- *Reflexión descriptiva*, (u.a.: T6_U4, T6_U8), respecto al dominio situación *problemática*, al plantear el error que focalizará el estudio.
- *Reflexión dialógica* (u.a.: T5_U3, T6_U5, T6_U19), sobre la dominio situación *problema*.

Fase 4: “C”, comportamientos alternativos.

A raíz de la puesta en común con los pares y la retroalimentación de la formadora, surgieron dos referencias más en el apartado sobre el estado del arte.

Un artículo que analiza una propuesta didáctica sobre la factorización de expresiones algebraicas, empleando calculadoras gráficas.

- El documento es el resumen de una tesis para optar al grado de licenciatura de matemáticas y física en la Universidad del Valle.
- La autora no se especializó en el área del álgebra.
- Las profesoras se remiten a leer el artículo, sin indagar en las referencias, ya que al revisar éstas, una tiene relación con su *problemática*.
- Se focaliza en la factorización de expresiones algebraicas, contenido previo al de *la problemática* de las profesoras.

La otra referencia es un artículo que analiza las concepciones erróneas en matemáticas, del que se extraen aquellas relacionadas con álgebra.

- Es un artículo publicado en la revista Educar en 1990.
- El contenido matemático del documento considera otros tópicos aparte del álgebra, pero tiene un apartado sobre concepciones erróneas en ella, en donde las profesoras focalizan su mirada para detallar aspectos del documento (escribiendo parte del contenido de él), por lo que nuevamente vemos en ellas un interés en profundizar en el tema de los errores de los estudiantes, temática que abordan en su *problemática*.
- Las profesoras se remiten a leer el documento, sin indagar en las referencias bibliográficas del documento, las cuales contienen un artículo que está de referencia en el documento anterior que presentan y que señala errores en la adquisición de los conceptos matemáticos, y en particular de álgebra.

En el nuevo desarrollo del estado del arte, se observa una mayor pertinencia de los referentes considerados, ya que en los últimos aportes tienen mayor relación con el tema de estudio en cuestión.

Al volver a redactar la situación problema, las docentes incorporan la **motivación** que las llevó al estudio, lo cual se manifiesta a través del siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.: T6_U3)

Mediante las preguntas sentimos la necesidad de conocer cuáles eran los errores que los alumnos cometían al momento de simplificar una fracción algebraica, a qué se debían, ya que nuestra experiencia nos indica que los alumnos simplifican expresiones algebraicas transfiriendo la simplificación de monomios, perdiendo el significado de lo que representa una expresión algebraica y sólo aplicándola en forma mecánica.

Así, muestran que:

- Su problemática surge desde su experiencia, erradicando del discurso escrito la creencia de que era un problema generalizado, lo que nos sugiere el papel que causó en ellas la búsqueda del estado del arte, al evidenciar que su problemática es posible encontrarlas tanto en sugerencias del Ministerio de Educación de Chile como en investigaciones.
- Plantean nuevos caminos para abordar posteriormente la problemática, es decir, para afrontar un nuevo evento, al focalizar su atención en el contenido matemático y concretar el error que quieren estudiar de los alumnos.
- Manifiestan una preocupación preponderante sobre el conocimiento procedimental que tiene sus alumnos, sobre el conceptual, ya que consideran que los estudiantes hacen una mera aplicación mecánica, sin significado. También se muestra que en la motivación surge desde su experiencia.

En esta fase, el **nivel de reflexión** en los escritos es de tres tipos:

- *Escrito descriptivo* (u.a.: T6_U13, T6_U14), al presentar dos documentos más sobre la revisión literaria, extrayendo las ideas principales relacionadas con el tema de su *problemática*.
- *Reflexión descriptiva*, (u.a.: T6_U3, T3_U26, T6_U27, T6_U34), respecto al dominio *problemática*, al expresar la motivación que les surgió para abordar la problemática, dando algunas justificaciones de ello.
- *Reflexión dialógica* (u.a.: T6_U1, T6_U35), ya que para el dominio *problemática* forman un discurso con ellas mismas, pero también refleja una descripción de los

acontecimientos, acompañado de algún intento de justificación, mirando reconocer puntos de vista alternativos en la literatura.

Fase 5: “T”, comprobar en una nueva situación, la reformulación del problema de estudio.

En esta fase final, el problema planteado toma nuevos elementos matemáticos, se replantean la problemática, explicitan el objetivo del estudio, aunque lo presentan desde el objetivo de la *clase en estudio*. El siguiente párrafo, en el que definen el objetivo general del estudio, evidencia parte de lo que acabamos de mencionar.

Párrafo (u.a.: T6_U9) [Informe 6, Objetivo general del estudio:]

Identificar las fracciones algebraicas equivalentes a través de la simplificación de fracciones algebraicas valorando su rol en el cálculo de expresiones numéricas y distinguiendo la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.

En él incorporan nuevos elementos:

- Valorar el rol de la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas.
- Distinguir la simplificación de expresiones algebraicas con monomios de las demás.
- Ampliar el tipo de expresiones algebraicas incorporando aquellas en las que el numerador y denominador son monomios o bien donde el denominador es binomio.
- Incorporar la noción de equivalencia de expresiones algebraicas.

Sobre el primer punto vemos que los docentes hacen explícita otra faceta de las expresiones algebraicas, la cual tiene que ver con la utilidad de éstas en el ámbito numérico, esto nos da cuenta del interés de las docentes por darle sentido a la matemática para el estudiante, mostrando qué rol cumple la simplificación en otros ámbitos de las matemáticas; además retoman la dificultad del pasaje de lo aritmético a lo algebraico, cuestión mencionada por Trigueros (1999) en su investigación.

El segundo punto es primordial para explicitar qué es lo que pretenden con sus alumnos en relación a un error que ellas detectaron de principio. Por último, en el tercer y cuarto punto

destacamos que las profesoras detallan los elementos matemáticos asociados a expresiones algebraicas a estudiar, dejando las ambigüedades iniciales de la *problemática*.

El **nivel de reflexión** en las unidades de análisis es de tipo *escrito descriptivo*, (u.a.: T6_U9, T6_U31, T6_U32) donde enuncia el objetivo de la *clase en estudio*, relacionándolo con la *problemática* e incorporando nuevos elementos matemáticos en él.

4.2 Análisis de la situación problema 2: La clase en estudio

A partir de la cuarta sesión, tendiendo más definido el problema de estudio, las docentes deben trabajar en paralelo la segunda cuestión que conforma el curso: diseñar, aplicar y analizar una clase que aborde dicha situación. Esto es lo que da origen a un proceso reflexivo casi a la par con el anteriormente descrito.

Fase 1: “A”, acción. Considerando la interrogante que emerge de *la problemática*, las docentes deben diseñar y aplicar una clase que aborde dicha situación, es decir, cuyo objetivo sea afrontar y dar solución (si fuese posible) a la *problemática*. De los escritos del informe 1, extraemos lo siguiente en relación al dominio *situación problema*:

Párrafo (u.a.:T1_U4)

Este trabajo pretende... y además establecer las estrategias para mejorar el entendimiento del problema de manera que ellos puedan mejorar su proceso de simplificación y lo usen como una herramienta para resolver problemas.

En él, las docentes establecen que la situación problema 2 (establecer estrategias, diseñar y aplicar una clase), está en relación a la situación problema 1, la *problemática*. A medida que se avanza en los informes el objetivo de la *clase en estudio* toma otra arista, más específicamente, al referirse a los aspectos de la planificación, escriben:

Párrafo (u.a.: T3_U7)

Que el alumno sea capaz de transformar la expresión fraccionaria en factores, a partir de las técnicas de factorización de modo de obtener una expresión más simple y de mejor manejo, considerando las restricciones previamente.

Al analizar los dos párrafos anteriores, observamos que las profesoras tienen la intención de abordar un contenido en su clase (la simplificación de expresiones algebraicas) que les permita a su vez considerar *la problemática*, es decir, aplicar estrategias para que los alumnos no cometan

errores al simplificar. También vemos cómo incorporan más elementos matemáticos que los que plantean en *la problemática*, como son las técnicas de factorización, de expresiones más simples y el identificar sus restricciones de validez.

Sobre las tareas de enseñanza propuestas para el diseño y realización de la clase, en el informe 2, las profesoras presentan tres propuestas para la clase. En el informe 3, presentan una cuarta y quinta tarea. En el informe 4, presentan una sexta y séptima tarea. En cada una de ellas hemos observado: el contexto en que se plantea, si es de tipo ejercicio o problema, la matemática involucrada y la coherencia con los objetivos de la clase, elementos que hemos vertido en la tabla 7.

Tabla 7

Tareas propuestas para la enseñanza

Tareas / Informes	Contexto	Correspondencia con el objetivo de la clase	con el Ejercicio o problema	Aspectos matemáticos	Otros
Tarea 1 Informe 2 Propuesta para la clase	Geométrico	Parcialmente se corresponde con el objetivo de la clase, ya que considera otro tipo de expresiones algebraicas, en donde el numerador y denominador son monomios.	Ejercicio	Sugiere la necesidad de utilizar las expresiones algebraicas para expresar una relación entre variables, en este caso, una relación funcional de dos variables sobre el perímetro y el área respecto al lado de un rectángulo, por lo tanto, amplía el ámbito matemático en juego. Por tanto, las funciones implícitas en esta tarea de enseñanza son: $f: \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}_*^+$ $(x, y) \mapsto \frac{xy}{xy^2}$ $g: \mathbb{R}_* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(x, y) \mapsto \frac{2x + 2y}{4x}$	
Tarea 2 Informe 2 Propuesta para la clase	Vida cotidiana	Escasamente se corresponde con el objetivo de la clase, ya que amplía el uso de expresiones algebraicas fraccionarias a funciones que las emplean, perdiendo de vista su simplificación.	Ejercicio	Plantea la necesidad de utilizar las expresiones algebraicas para expresar una relación entre variables, en este caso, una relación funcional lineal en una variable real respecto al sueldo de una persona, que se explicita como: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $x \mapsto \frac{2x + 8}{12}$	
Tarea 3 Informe 2 Propuesta	Matemático	Se corresponde parcialmente con el objetivo de la clase, ya que lo amplía considerando	Ejercicio	Plantea la equivalencia de expresiones algebraicas a partir de su valor numérico, restringiendo su estudio a cuatro valores. Por	Dirigen la atención de los alumnos para que deduzcan la identidad,

para la clase		otros elementos matemáticos, como el valor numérico, que utiliza como criterio de equivalencia de expresiones algebraicas.		tanto involucra otros elementos matemáticos no mencionados anteriormente en los informes. Utiliza números enteros para reemplazar. Incorporando un número que indefina una de las expresiones algebraicas, lo que sugiere una intención de las profesoras por abordar el tema de la restricción. Aparecen paréntesis innecesarios en algunas expresiones. Hay expresiones con letras en distintos formatos.	a través de la igualdad de sus valores numéricos. Incorpora pocos valores, lo que podría dar lugar a equivalencias falsas, aunque en el enunciado de la tarea de enseñanza no aparecen.
Tarea 4 Informe 3 Propuesta para la clase	Matemático	Se corresponde parcialmente con el objetivo de la clase, ya que considera expresiones algebraicas fraccionarias involucradas en una igualdad. Además, de incorporar otros elementos matemáticos, como la noción de equivalencia de expresiones algebraicas.	Ejercicio	El contenido matemático que se pone en juego incluye: noción de identidad, valorar y restringir expresiones algebraicas. Se presenta en una sola variable.	Se encuentra en uno de los documentos que las profesoras proponen en la revisión de literatura, por lo que, como lo hemos mencionado en la problemática, han encontrado en estos materiales un aporte para la segunda situación problema,
Tarea 5 Informe 3 Propuesta de instrumento de evaluación para la clase	Matemático	Se corresponde parcialmente con el objetivo de la clase, ya que considera expresiones algebraicas fraccionarias involucradas en una igualdad. Además, de incorporar otros elementos matemáticos.	Ejercicio	El contenido matemático del instrumento incluye expresiones equivalentes y la noción de restricción, además incluye tres expresiones algebraicas, las dos primeras con numerador y denominador monomios, y la tercera expresión algebraica cuyo numerador y denominador es un binomio (el del numerador factorizable como producto notable de suma por diferencia). Pone en juego la noción de identidad (como igualdad de expresiones).	Se espera que los alumnos factoricen el numerador del término de la izquierda. Cabe esperar que algún alumno estudie equivalencia a través de valores numéricos, con el problema de las

	<p>Contempla expresiones algebraicas con dos variables.</p>	<p>restricciones. La respuesta sería incompleta, ya que no mostraría la equivalencia.</p> <p>Las tres igualdades propuestas son correctas, salvo restricciones.</p> <p>Se encuentra en uno de los documentos que el Mineduc promueve a través del proyecto enlaces. (disponible en: http://www.comenius.usach.cl/enlacesmatsp/files/File/MLANZ2006/materialguias/), aunque en el enunciado de ésta no consideran las restricciones como aparece en el documento original. .Lo que sugiere sobre la importancia, o facilidad de acceso, que las profesoras le dan a los recursos que presenta el Ministerio de Educación de Chile.</p>
<p>Tarea 6 Matemático</p>	<p>Se corresponde con el objetivo Es la</p>	<p>Promueve que los alumnos anticipen la igualdad</p>

<p><i>Informe 4 Propuesta para la clase</i></p>	<p>de la clase.</p>	<p>modificaci ón de la tarea 3, transformá ndola a tipo problema</p>	<p>de valores numéricos, dándoles la oportunidad de prestar atención a la estructura de las expresiones, como criterio para buscar la equivalencia. Mantiene pues el criterio de equivalencia por igualdad de valor, pero da un paso más hacia la equivalencia formal considerando las mismas expresiones algebraicas de la tarea 4.</p> <p>No se dan valores a las variables, se deja abierto.</p> <p>Aparecen paréntesis innecesarios en algunas expresiones.</p>
---	---------------------	--	---

Al plantear estas tareas de enseñanza se observa que:

- Presentan dos de las seis tareas de enseñanza en situaciones prácticas, buscando darle utilidad en otros contextos a las expresiones algebraicas, lo que muestra el interés de las profesoras en aspectos fenomenológicos al plantear tareas de enseñanza.
- En las tareas del informe 2 (tarea 1, 2 y 3), se emplea el lápiz y papel, en cambio en las restantes se observa el uso de un recurso complementario presentado en el estado del arte y de otro relacionado con aquel, ambos pertenecen a los recursos digitales que presenta el Mineduc a través del proyecto Enlaces, lo que sugiere la importancia que le otorgan las docentes a estos recursos para la planificación de sus clases.
- Las tareas de enseñanza 2 y 4 consideran expresiones algebraicas con una variable, las restantes son con dos variables.
- Las cinco primeras tareas son de tipo ejercicio, la última es de tipo problema.
- Las profesoras incorporan otros elementos matemáticos a los identificados en la formulación del objetivo de la clase: valorar expresiones algebraicas, emplear binomios factorizables como productos notables, restringir explícitamente la validez de la simplificación y demostrar que las expresiones son equivalentes. En la versión final de la tarea de enseñanza para la clase, se elimina la expresión explícita de que se trata de “expresiones equivalentes” y no se atiende a restringir ni valorar expresiones algebraicas.

Un ejemplo de las primeras tareas de enseñanza que formulan las profesoras se presenta en el siguiente párrafo.

Párrafo (u.a.: T2_U3)

Completa la siguiente tabla dados los valores de a y b y contesta las siguientes preguntas

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	$(a+b)$	$(a-b)$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$
2	1						
3	2						
-2	4						
-1	0						

- Compara las columnas (6) y (1) ¿Qué puedes decir?
- Compara las columnas (7) y (2) ¿Qué puedes decir?
- ¿En que columna se obtienen los mismos resultados que en (8)? ¿Por qué crees tú que sucede?

Dentro de la *gestión de las tareas*, las profesoras amplían las tareas de enseñanza que los alumnos tienen que realizar, incorporando:

- Valorar las expresiones para justificar la equivalencia.
- Factorizar las expresiones, simplificar y obtener la expresión más simple dada.
- Comprobar la equivalencia mediante la multiplicación cruzada.

A través de ellas podemos ver cómo las docentes plantean tres aristas sobre las expresiones algebraicas. En la primera tarea de enseñanza está presente el pasaje de lo aritmético al algebraico. La segunda incluye la noción de simplificación de expresiones algebraicas, las expresiones algebraicas reducidas y las equivalentes. En la tercera tarea de enseñanza está también la noción de simplificación, pero poniendo el énfasis en su definición.

Además de las tareas de enseñanza, las docentes indican diversas dificultades y errores de los alumnos que se podrían suscitar en la clase. Sobre las dificultades mencionan que están en relación a la operatoria con fracciones y con expresiones algebraicas, a que los alumnos no le den significado la expresión algebraica y a las técnicas de factorización. Se observa que estas dificultades tienen que ver con los conocimientos previos que deben tener los estudiantes a la hora de abordar la tarea de enseñanza. Sobre los posibles errores que pueden cometer los alumnos, identifican cinco, dentro de los cuales los agrupamos en dos tipos:

- Aquellos que hacen alusión a que los alumnos no tomen en cuenta la restricción de la validez de las expresiones algebraicas o los errores relacionados con los conocimientos previos (aritmética y factorización).
- Errores relacionados con *la problemática* en cuestión. (Identifican como error: “Simplificar términos comunes [aditivos] de una expresión algebraica”)

Este último ratifica la idea de que a través de esta actividad las profesoras, a pesar de tener un objetivo no directamente relacionado con el error, lo quieren abordar cuando aparece en las estrategias de sus alumnos. Este error aparece citado en las sugerencias didácticas del Ministerio de Educación de Chile y en investigaciones internacionales que se mencionan en el capítulo 2.

El **nivel de reflexión** en las unidades de análisis de esta fase es de tipo:

- *Escrito descriptivo* (u.a: T2_U1, T2_U2, T2_U3, T3_U1, T3_U2, T3_U4, T3_U5, T3_U6, T3_U7, T3_U8, T4_U1, T4_U2, T4_U3, T4_U4, T4_U5, T4_U6, T4_U7) como, por ejemplo, al expresar el aprendizaje esperado de la clase, al enunciar el instrumento de evaluación de ésta, al señalar las estrategias posibles de los alumnos.
- *Reflexión descriptiva* (T1_U4, T3_U7, T1_U14) ya que luego de describir la situación problema (*problemática*), hay un intento por establecer acciones posibles para su mejora (estrategias), de la situación problemática 2 (*clase en estudio*), intentado dar justificaciones de ello.

Un ejemplo del nivel de reflexión de tipo *reflexión descriptiva* lo observamos en el primer párrafo que presentamos en este apartado, en donde las docentes, luego de describir la *problemática*, hacen un intento por establecer acciones posibles para su mejora (estrategias), a través de la *clase en estudio*, intentado dar justificaciones de ello.

Fase 2: “L”, mirar hacia atrás.

En los escritos del informe 5, las docentes escriben sus apreciaciones respecto de lo que fue la clase, incluyendo tres tipos de observaciones: pedagógicas¹³, didácticas y matemáticas.

En su valoración de la clase implementada, las profesoras hacen las siguientes observaciones pedagógicas sobre lo ocurrido en la misma:

¹³ En Chile se hace la distinción entre pedagogía y didáctica, en términos que la primera disciplina se preocupa por aspectos disciplinarios, de gestión de clase, entre otros, y la segunda se preocupa de hacer propuestas de enseñanza y de analizar errores, dificultades y limitaciones en el proceso de enseñanza aprendizaje, entre otros.

Párrafo (u.a.:T5_U1)

- *Buen dominio del curso.*
- *El tiempo utilizado para la actividad corresponde al tiempo planificado.*
- *Buen uso de la pizarra (los alumnos expresaron sus estrategias)*
- *Se presenta material visual y guías individuales.*
- *Se presenta una dificultad por no entregar la guía individual antes de presentar el problema en forma general.*
- *La profesora presenta una ansiedad controlada y normal.*
- *Se escogen para exponer las estrategias al azar lo que provoca la repetición de ellas, en resumen sólo hay dos estrategias.*
- *Se realiza una evaluación formativa en dos formatos, sin previa planificación de los ejercicios, no estableciendo la equivalencia en el grado de dificultad.*
- *La forma de evaluar fue colaborativa, obteniendo la retroalimentación en forma inmediata.*

En este párrafo se observa que focalizan su atención en las tareas de enseñanza a través de la forma en que se ponen en práctica, su gestión, ya que aluden a:

- El uso de recursos y el tiempo para el tratamiento de las tareas de enseñanza.
- La forma de llevar a cabo la puesta en común de las estrategias de resolución.
- La forma de llevar a cabo la tarea de enseñanza en la evaluación formativa.

Las observaciones didácticas sobre la clase, se recogen en el siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.:T5_U2)

La profesora lee el enunciado del problema y al no entender los alumnos, vuelve a explicar dando pie a posibles estrategias.

La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos.

La formalización la realiza la profesora, pudiendo entregar esta tarea de enseñanza a los alumnos.

No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos.

dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas, lo que permite el análisis en la esta en común.

Las profesoras nuevamente focalizan su mirada en las tareas de enseñanza:

- Las estrategias de resolución en las tareas de enseñanza, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento.
- El tratamiento que hubo por parte del docente de las estrategias de los alumnos.
- Identifican un aspecto no considerado en el análisis a priori en relación al uso de números consecutivos en el desarrollo de la tarea de enseñanza.

Por último, sobre las observaciones de carácter matemático, las profesoras escriben el siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.:T5_U3)

En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria.

Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relaciones en la tabla, muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas.

En él nuevamente se focalizan en el análisis de las tareas de enseñanza, el planteamiento de éstas y la forma de abordarlas por profesora y estudiantes. Observan que hay paréntesis innecesarios en algunas expresiones algebraicas.

Sobre el **nivel de reflexión** que se tiene en las unidades de análisis de esta fase se cuenta con tres tipos:

- *Reflexión descriptiva* (u.a.:T5_U3) al presentan aspectos matemáticos de la clase, con una mirada retrospectiva.
- *Reflexión dialógica* (u.a.:T5_U1) presentando aspectos pedagógicos de lo que fue la clase, pero con una mirada retrospectiva y formando un diálogo interno sobre ello.
- *Reflexión crítica* (u.a.:T5_U2), al enunciar elementos didácticos observados en la clase, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellos, dando además importancia a la observación de todos los estudiantes.

Fase 3: “a”, puntos importantes.

Luego de contar con los aporte de sus pares y de la formadora en la puesta en común y de las observaciones y sugerencias de la formadora en los escritos de los informes, las docentes reescriben el análisis de la clase, buscando las respuestas a las cuestiones planteadas en la fase anterior. Esto se plasma a través de los escritos del informe 6, por ejemplo, a través del siguiente párrafo extraído de la reformulación del análisis pedagógico de la clase:

Párrafo (u.a.:T6_U32)

Se presentó una dificultad por el fondo de la presentación del documento digitalizado. Se recomienda un fondo blanco, que permitiría escribir sobre él, de manera que cuando los alumnos vayan a la pizarra ocupen el cuadro digitalizado, para anotar sus resultados.

La profesora presenta una ansiedad controlada y normal, esto puede ser debido a que es la profesora titular del sector de aprendizaje y conoce a sus alumnos.

Se aprecian dos observaciones muy distintas, mientras la primera es tecnológica (elección inadecuada del fondo del documento), la segunda es una valoración sobre la actitud de la profesora. Las docentes continúan focalizadas en las tareas de enseñanza, pero incorporan sugerencias de cómo abordar, en una próxima ocasión, las dificultades dadas en la realización de éstas.

De igual forma en los aspectos didácticos las profesoras dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos en las tareas de enseñanza presentadas y el tratamiento que hubo de ellas por parte del docente, pero además plantean sugerencias para abordar las dificultades observadas al respecto. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución por parte de

los alumnos al abordar las tareas de enseñanza e identifican el tipo tarea (en el sentido que es un problema y no un ejercicio, dominio tareas). Se tiene el siguiente párrafo sobre ello:

Párrafo (u.a: T6_U34)

La profesora lee el enunciado del problema y al observar que sus alumnos no entienden totalmente el enunciado, vuelve a explicar dando posibles estrategias, se recomienda dar la palabra a los alumnos en relación a la lectura de este sin intervención de la profesora, de modo de dar un mayor protagonismo al alumno en la comprensión de este.

La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos, es importante que ellos tengan los tiempos necesarios para poner en práctica su experimentación, es decir, se logra a cabalidad la fase de acción según Brousseau.

La profesora realiza la formalización pero, se sugiere indagar en los propios alumnos y a partir de sus opiniones, precisar el conocimiento.

No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos,, por ejemplo, al reemplazar por los números 1, 2, 3 se dan otras relaciones entre las columnas que se aleja de la pretensión del educador.

Se dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas por los alumnos, lo que permite que los alumnos puedan visualizar dichas estrategias para apoyar el análisis en la puesta en común.

*Las estrategias realizadas por los estudiantes se pueden agrupar en dos. Una de ellas es reemplazar por valores enteros las variables **a** y **b**. La otra es aplicar la simplificación considerando la factorización de las expresiones algebraicas tanto del numerador como del denominador.*

Dentro de las dificultades consideradas en el análisis a priori no se contempló la dificultad de que sólo tomaran números consecutivos, lo que llevo a otras igualdades que no tienen ninguna relación con la equivalencia de las fracciones algebraicas.

Se observa además, en este párrafo, que las profesoras toman conciencia de que los alumnos aplican procedimientos diferentes para comprobar equivalencia. Más sería relevante saber hasta

qué punto las docentes lo relacionan con el hecho de que ellas les han propuesto tareas de enseñanza diferentes.

Por último, respecto a los elementos matemáticos, las docentes además de plantear aspectos sobre la forma y fondo de la tarea de enseñanza presentada a los estudiantes, exhiben razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior. Esto se evidencia a través del siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.:T6_U35)

- *En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria, lo que puede provocar alguna interpretación errónea por el estudiante, esto corresponde a la expresión de la columna tres.*
- *El formato del problema, presenta dos tipos de letra, esto puede incidir en la comprensión por parte del estudiante, dado que en rigor no representa la misma variable, es necesario corregir esta situación para una próxima aplicación.*
- *La generación de conocimiento se da en forma espontánea cuando un estudiante afirma que las expresiones de las respectivas columnas son equivalentes a partir de simplificar una expresión fraccionaria.*
- *Los alumnos al valorizar la tabla, sólo contemplan números naturales, esto puede ocurrir por la facilidad del cálculo o por no considerar números negativos.*
- *La profesora considera para la evaluación formativa, ejercicios de otro tipo de factorización como, por ejemplo, $\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y}$ a pesar de ello los alumnos son capaces de desarrollar el ejercicio.*
- *Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relación en la tabla, como, por ejemplo, en las columnas tres, cinco y siete se obtiene el mismo resultado y están muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas*

Por último, vemos que se hace más explícita en las profesoras la idea de considerar la fenomenología de las expresiones algebraicas, pero a la vez perciben las cualidades didácticas y matemáticas de su propuesta, tal como se percibe a través del siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.:T6_U20)

En una primera etapa diseñamos ejercicios relacionados con la geometría donde aplicarán el concepto de simplificación, pero nos dimos cuenta que no eran desafiantes para los alumnos dado que se resolvían directamente.

Se observa cómo en cada uno los aspectos ya mencionados en la fase anterior las profesoras van incorporando estrategias o caminos de solución a las dificultades o aspectos para mejorar la clase.

El **nivel de reflexión** de las unidades de análisis en esta fase es de tipo:

- *Reflexión descriptiva* (u.a.: T6_U22, T6_U24, T6_U27), como, por ejemplo, al señalar la posibles estrategias de los alumnos al abordar las tareas de enseñanza, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellas. Además plantean aspectos de gestión de la clase, desarrollando argumentos que los sustentan.
- *Reflexión dialógica* (u.a.:T6_U20, T6_U35), al describir la elección de la tarea de enseñanza y al atender a los aspectos didácticos observados en la clase, formando un discurso con ellas mismas.
- *Reflexión crítica* (u.a.:T6_U33, T6_U34), al enunciar elementos pedagógicos, didácticos y matemáticos observados en la clase, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellos, dando importancia a la observación de todos los estudiantes, pero además evidenciando elementos sociales, tales como el trabajo colaborativo, la preocupación por el interés del alumno y por promover un mayor protagonismo de ellos.

Un ejemplo de este último nivel de reflexión se encuentra en la unidad de análisis T6_U34 que se presenta en la página 85 de este trabajo, en la cual se observa como las profesoras le dan importancia a elementos de índole social y afectiva, como es el protagonismo de los alumnos en su proceso de enseñanza aprendizaje y el tiempo requerido por los estudiantes para desarrollar una actividad.

Fase 4: “C”, comportamientos alternativos.

Después de contar con la retroalimentación y dar estrategias de solución, las docentes buscan o crean alternativas de acción posterior, como las siguientes:

Párrafo (u.a: T6_U36)

1. *Se sugiere que desde un principio los alumnos tengan la guía individual en su poder.*
2. *Se sugiere observar las estrategias sin intervenir, para escoger mayor diversidad.*
3. *Se recomienda extraer las respuestas expertas de los propios alumnos.*

Vemos que las docentes plantean sugerencias para una nueva realización de la clase, relacionadas con estrategias de gestión en el tratamiento de las tareas de enseñanza y con el uso de recursos. Evidencian que la tarea de enseñanza tiene más de una estrategia de resolución y que los estudiantes pueden generar la respuesta.

El **nivel de reflexión** de las unidades de análisis en esta fase es de tipo *reflexión descriptiva* (T6_U25, T6_U26, T6_U36), planteando sugerencias para una nueva realización de la clase, pero intentando dar justificaciones en uno de los casos.

Fase 5: “T”, comprobar en una nueva situación, la reformulación del problema de estudio.

Esta fase en donde surge un nuevo ciclo reflexivo en relación a la acción original, las docentes consideran los elementos que surgen de las fases anteriores replanteando la clase y llevándola a cabo en otro curso del mismo nivel escolar. De esta forma sobre la reformulación de los objetivos de la clase (aunque los mezclan con los objetivos del estudio) se cuenta con el siguiente párrafo, extraído del informe 6:

Párrafo (u.a.:T6_U9)

Objetivo del estudio: Identificar las fracciones algebraicas equivalentes a través de la simplificación de fracciones algebraicas valorando su rol en el cálculo de expresiones numéricas y distinguiendo la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.

En este párrafo, las docentes explicitan el objetivo del estudio, aunque lo plantean desde el objetivo de la *clase en estudio*, además valorar el rol que juega la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas y distinguen la simplificación de expresiones algebraicas con monomios de las de binomios.

Esto nos da luces de cómo ahora las profesoras incorporan de manera explícita *la problemática* (ya que pretenden que el alumno distinga la diferencia en la simplificación de fracciones

algebraicas con monomios de aquellas con polinomios). En el objetivo de la *clase en estudio* está inmersa *la problemática*.

Más adelante en el mismo documento, se plantea el objetivo de la clase, el cual se corresponde parcialmente con *la problemática* reformulada (ver análisis del proceso reflexivo 1: *la problemática*), ya que incorpora expresiones algebraicas cuyo numerador y/o denominador son expresiones polinómicas. En esta etapa han prescindido de la cuestión de apreciar el rol de la simplificación en el cálculo de expresiones numéricas, cosa que hicieron en la primera fase del ciclo reflexivo. Esto queda en evidencia en el planteamiento de que se expresa en el siguiente párrafo:

Párrafo (u.a.:T6_U19)

Nuestro interés surge en diseñar una actividad que permita al alumno reflexionar en relación a la simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y/o denominador sean expresiones polinómicas. Nos interesaba que a partir de la comparación el alumno visualizara por que una expresión daba el mismo resultado que otra y entregara una hipótesis para luego argumentarla.

Sobre el dominio *tareas*, se observa que las profesoras presentan la tarea 6 que es un problema, aparecido en el informe 4, que se corresponde con el nuevo objetivo planteado. Sin embargo el instrumento de evaluación de esta nueva propuesta contiene una tarea que se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase, ya que no contempla apreciar su rol en el cálculo de expresiones numéricas. Es importante señalar que esta tarea es una modificación de la tarea 5, pero especificando restricciones, que en su versión original (tarea 5) no se había considerado y eliminando el distractor “signo igual”, trabajando sólo con expresiones algebraicas. Con ello se muestra una evolución de las docentes respecto al concepto de equivalencia de expresiones algebraicas y las formas de justificarla. La tarea de enseñanza que se plantea finalmente para la *clase en estudio* es la siguiente:

Párrafo (u.a.:T6_U21)

¿Se puede ahorrar cálculos?

En el segundo medio C, la profesora de Matemática escribió la siguiente tabla:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	$a+b$	$a-b$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$
...						
...						
...						
...						

Luego, empezó a recitar algunos valores para a y b, y pide completar la tabla.

Al cabo de poco tiempo, Aldo, un alumno del curso, dice que ya terminó, el resto de compañeros se encuentran asombrados por la rapidez en los cálculos de su compañero.

La profesora le pregunta ¿Completaste todas las columnas? y el responde:

“Si completé todas las columnas, pero no fue necesario el cálculo en algunas”

El **nivel de reflexión** de los escritos de esta fase es de tipo:

- *Escrito descriptivo* (u.a.: T6_21, T6_U23, T6_U32), al redactar el objetivo, la tarea de enseñanza y el instrumento de evaluación para la *clase en estudio*.
- *Reflexión dialógica* (u.a.:T6_U19), al describir el interés que persiguen, formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

La unidad de análisis que se identifica del tipo *reflexión dialógica* es la que se presenta en la página 89 de este trabajo, donde podemos apreciar como las profesoras describen el interés que persiguen, formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

A raíz de las observaciones realizadas de ambos procesos reflexivos se pueden extraer varias conclusiones las cuales daremos a continuación:

4.3 Resumen de apreciaciones sobre el proceso reflexivo 1: La problemática

Vamos a examinar en nuestra investigación dos aspectos, los indicadores de la reflexión, es decir, la evidencia de que se han llevado a cabo ciclos reflexivos, y el nivel al que reflexionan.

4.3.1 El ciclo reflexivo

Las profesoras a través de los escritos van cubriendo todas las fases del ciclo de reflexión. En la primera fase, las docentes se plantean una cuestión relacionada con la simplificación de expresiones fraccionarias, pero que a la vez manifiesta ambigüedad sobre los aspectos esenciales que la componen. En la fase dos, al tener que buscar evidencias sobre esta situación problema y plantear la importancia del tema, las docentes dan un esbozo de lo que se han planteado surgiendo así la necesidad de distinguirla con mayor claridad. Luego, a través de la búsqueda del estado del arte y la puesta en común con sus pares y la formadora (entrando en la fase 3), se formula de manera más explícita el problema, centrándolo en una situación particular observada por ellas en sus prácticas.

En el último informe se presentan comportamientos alternativos. Por un lado, buscan material de apoyo relacionado con la temática en cuestión y por otro lado, al hacer explícito que la situación problema surge de su práctica, erradicando del discurso escrito la creencia de que era un problema generalizado, planteando nuevos caminos de cómo abordar posteriormente *la problemática*, concretando el contenido matemático y el error relacionado con él, que quieren estudiar.

De esta forma en la fase final están en disposición de iniciar un nuevo ciclo, en el que las docentes se plantean una nueva problemática, que tiene elementos en común con la anterior, como es el contenido matemático (expresiones algebraicas fraccionarias) y los errores que cometen los estudiantes al simplificarlas, contempladas a través de formas más amplias de concebir la simplificación de expresiones algebraicas.

En el proceso de identificación de las fases del proceso formativo se pudo constatar que en el último informe las profesoras conservaron intactos algunos de los aspectos del primer informe, como es la identificación de los errores que ellas evidencian de sus prácticas, pero a la vez otros componentes fueron modificados o complementados con la intención de obtener mayor coherencia. Así, se observa como las profesoras van evolucionando su forma de percibir *la problemática* y como ésta adquiere nuevos dispositivos que la sustentan.

Más específicamente, podemos señalar una evolución en este proceso que se rige por **progresar en la atribución de las afirmaciones**, es decir, en relación a las frases en las que se refieren a la **importancia de tema**, (que se muestran en la tabla 8 y corresponden a las fases de **Acción** y de **aclaración de puntos importantes**), se observa una evolución, ya que en una primera instancia presentan una afirmación de índole general, para luego concretarlo y lanzar la hipótesis de que los errores derivan de que los estudiantes no ven sentido en las expresiones algebraicas.

Tabla 8

Evolución de la problemática a través de las fases

Fase Acción	Fase aclaración puntos importantes
La importancia del tema radica que los alumnos no le encuentran sentido al momento de la simplificación una fracción algebraica, lo cual genera un problema para el aprendizaje, ya que éste no presenta la mejor actitud para aprender.	<i>Según nuestra experiencia, la importancia del tema radica que los alumnos no le encuentran sentido a una fracción algebraica al momento de simplificarla..., lo cual genera un problema para el aprendizaje de la operatoria de expresiones fraccionarias, la resolución de ecuaciones con denominadores fraccionarios, la resolución de problemas, etc.</i>

4.3.2 El nivel de reflexión

La tabla 9, resume y recoge los niveles de reflexión en los escritos y el número de escritos de cada categoría de Hatton y Smith:

Tabla 9

Resumen de los niveles de reflexión en el ciclo sobre la problemática

Fase A	Fase L	Fase a	Fase C	Fase T
<i>escrito</i>	<i>escrito</i>	<i>escrito</i>	<i>escrito</i>	<i>escrito</i>
<i>descriptivo (4)</i>	<i>descriptivo (15)</i>	<i>descriptivo (6)</i>	<i>descriptivo (2)</i>	<i>descriptivo (3)</i>
<i>reflexión</i>	<i>reflexión</i>	<i>reflexión</i>	<i>reflexión</i>	
<i>descriptiva (7)</i>	<i>descriptiva (6)</i>	<i>descriptiva (2)</i>	<i>descriptiva (4)</i>	
		<i>Reflexión</i>	<i>reflexión</i>	
		<i>dialógica (3)</i>	<i>dialógica (2)</i>	

De acuerdo a la tabla, haciendo la correspondencia con el momento en donde surge dentro de cada informe y considerando, como Hatton y Smith lo manifiestan, que, por su naturaleza misma, todos los textos contienen escritos descriptivos, se puede concluir que, de manera preponderante, las profesoras reflexionan con un nivel de reflexión descriptiva. Tienden a presentar una mirada retrospectiva de su práctica, en donde en dos ocasiones realizan un diálogo con ellas mismas sobre la cuestión.

En cuanto a la evolución apreciada, se observa que 6 de 16 unidades de análisis tuvieron un cambio de nivel de reflexión, de uno más bajo a otro más alto. Las restantes, sufrieron cambios de escritura, pero no de nivel de reflexión. Por ejemplo, encontramos diferencias entre los

informes 1 y 6, correspondiente a fases de acción y de comportamientos alternativos, en que en el primero describen el objetivo del estudio y en el segundo lo describen elaborando un discurso en el que reflejan una descripción de los acontecimientos acompañada de algún intento de justificación, mirando reconocer en la literatura puntos de vista alternativos.

Este dato nos confirma que las profesoras, al expresar en sus informes distintos niveles de reflexión, sufren cierta evolución positiva en términos de la profundización en el tipo de reflexión (evolución de los niveles de reflexión).

4.4 Resumen de apreciaciones sobre el proceso reflexivo 2: La clase en estudio

Igualmente vamos a presentar un resumen de las apreciaciones sobre el ciclo de reflexión sobre la clase, seguido de una idea del nivel de reflexión que han alcanzado sobre ella.

4.4.1 El ciclo reflexivo

En esta segunda cuestión de estudio, nuevamente se observa que las profesoras en sus escritos cubren las fases del proceso reflexivo. Comenzando por la primera fase (Acción), los escritos expresan la situación problema en relación con *la problemática*, luego desarrollan una propuesta de clase y la llevan a cabo. En esta fase se observa, respecto al dominio situación problema, que las profesoras definen su clase en relación a la problemática (informe 1), pero al plantear el objetivo de la clase en el informe 4, éste no se corresponde en su totalidad con la problemática. De la misma forma, la tarea de enseñanza propuesta para el desarrollo de la clase y la tarea contemplada en la evaluación final amplía el tipo de expresiones algebraicas consideradas en el objetivo de la clase. Además inician la propuesta con una tarea de enseñanza de tipo ejercicio.

Al mirar hacia atrás (fase L) el diseño y realización de la clase, las profesoras focalizan la atención en las tareas de enseñanza, en las estrategias para aplicar las tareas de enseñanza y en las dificultades y errores en el tratamiento del tema, de forma que responden a preguntas como ¿Cómo lo hice? ¿Cómo me sentí? ¿Qué pensaban, qué sentían o que hacían mis alumnos? Hay escasa alusión a si se alcanzaron los objetivos de la clase o si la clase abordó *la problemática* como estaba previsto, por lo que no se aprecia su reacción a una pregunta clave de esta fase: ¿qué quería? Al continuar en la fase 3 (aclaración de puntos importantes), las profesoras incorporan consideraciones que les permite tomar conciencia de los puntos importantes que emergieron al hacerse las preguntas planteadas en la fase anterior. Así es como las docentes incorporan sugerencias sobre cómo abordar en una próxima ocasión las dificultades (dominio tareas), además de plantear aspectos sobre la forma y el fondo de las tareas de enseñanza, y exhiben razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior (dominio tareas).

Ya en la fase 4, sobre comportamientos alternativos, las docentes hacen sugerencias para cambiar el diseño de la clase, relacionadas con formas de llevar a cabo la clase, la gestión de las tareas de enseñanza, incluyendo el uso de recursos. La fase de iniciación de un nuevo ciclo reflexivo, en la que se trata aprovechar la reflexión para una nueva acción, consistió en el rediseño y aplicación la de clase. Las docentes se replantean el objetivo de la clase (aunque ya vimos en el análisis que éste vuelve a mostrar inconsistencias), explicitando un nuevo objetivo e incorporando nuevos elementos, como la valoración de las expresiones algebraicas para contrastar si son equivalentes a través de expresiones numéricas.

De esta manera, las profesoras cubren el ciclo de reflexión ALACT de Korthagen, en donde se evidencian distintos elementos:

- **Dificultades para afrontar el objetivo previsto para la clase**, dada la mezcla de componentes en su definición (tanto en la formulación como en la reformulación)
- **Falta de alusión al objetivo de la clase en el análisis** de lo ocurrido. Se percibe, por el contrario, que ponen el énfasis en analizar las tareas de enseñanza que ésta tuvo, por lo que se trata de cambiar las tareas de enseñanza, sin aludir al objetivo.
- **Aumento en la explicitación de elementos fenomenológicos** asociados a su problemática, al presentar en un inicio tareas de enseñanza desde el ámbito geométrico y posteriormente incluir nuevas actividades en el contexto matemático.
- **Progreso en el diseño de la tarea de enseñanza**, si bien parten con unas tareas de enseñanza de tipo ejercicio, al avanzar en los informes, modifican uno de ellos (presentado en la página 80, u.a.:T2_U3) hasta obtener un problema (presentado en la página 90, u.a.:T6_U21).
- **Progreso en la explicitación de los elementos matemáticos** que intervienen en la clase, de la misma forma que para la problemática, diseñamos la tabla 10, en donde detallamos los elementos matemáticos que se ponen en juego en las distintas fases del proceso reflexivo.

Tabla 10

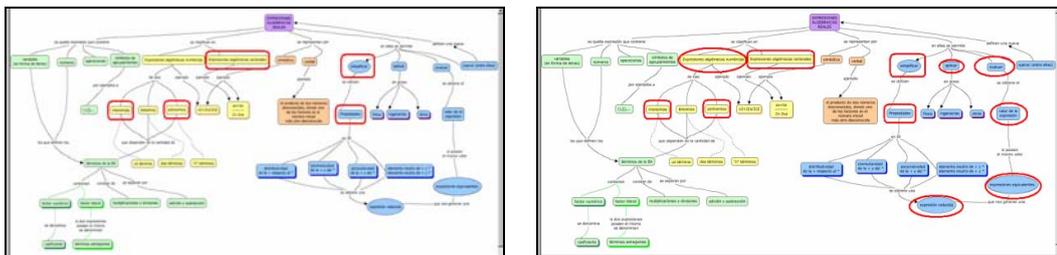
Progreso en los elementos matemáticos contemplados en proceso

Fase 1	Fase 2	Fase 3	Fase 4	Fase 5
<p><i>Valorar expresiones algebraicas.</i></p> <p><i>Técnicas de factorización, expresiones más simples.</i></p> <p><i>Restricciones</i></p>			<p>Expresiones algebraicas en el numerador y denominador, introduciendo binomios factorizables.</p>	<p>Apreciar el rol de la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas.</p> <p>Distinguir la simplificación de expresiones algebraicas con monomios de las que tienen binomios.</p>

Empleando el mapa conceptual elaborado y la tabla 10 anterior podemos comparar los elementos empleados en la formulación de los objetivos de la *clase en estudio* y aquellos que incorporan hasta llegar a la fase 5 del proceso reflexivo. Identificamos con rectángulos rojos las nociones matemáticas que utilizan en la fase inicial y con óvalos rojos los que se agregan en la reformulación de *la problemática* en la tabla 11.

Tabla 11

Mapas conceptuales con los términos usados en la fase inicial y final de proceso reflexivo



- **Aumento en la toma en consideración de elementos de la problemática** que aparecen en los artículos encontrados en el estado del arte. Vemos cómo en las últimas tareas de enseñanza consideran algunos de los recursos que descubrieron en su revisión de la literatura.
- **Progreso en la detección de posibles dificultades** en el diseño de las tareas de enseñanza, preferentemente ligados a la forma en que se presentan, como, por ejemplo, el uso de distintos tipos de letras o el uso innecesario de paréntesis, entre otros.

4.4.2 El nivel de reflexión

En la tabla 12 recogemos los niveles de reflexión en cada fase del proceso, indicando la cantidad de unidades de cada tipo.

Tabla 12

Resumen de los niveles de reflexión sobre la clase en estudio

Fase 1 A	Fase 2 L	Fase 3 a	Fase 4 C	Fase 5 T
<i>escrito descriptivo (17)</i>				<i>escrito descriptivo (5)</i>
<i>reflexión descriptiva (3)</i>	<i>reflexión descriptiva (2)</i>	<i>reflexión descriptiva (3)</i>	<i>reflexión descriptiva (3)</i>	
	<i>reflexión dialógica (1)</i>	<i>reflexión dialógica (2)</i>		<i>reflexión dialógica (1)</i>
	<i>reflexión crítica (1)</i>	<i>reflexión crítica (2)</i>		

En este proceso de reflexión se puede observar que aparecen en menor cantidad unidades de análisis de tipo escrito descriptivo y aparecen unidades de análisis con un nivel de reflexión crítica. Debido a que las unidades de análisis abarcan niveles de reflexión dialógica y crítica, junto con observar que en la fase primera el nivel de reflexión es prioritariamente de tipo escrito descriptivo, nos sugiere un progreso en la profundidad con que abordan las docentes su proceso reflexivo respecto a la situación problema 2, la *clase en estudio*.

Observando los cambios en los niveles de reflexión de algunas unidades de análisis, se aprecia que hay cuatro de éstas que tienen cambios de nivel, y que estos cambios son siempre de un nivel mas bajo a uno más alto. Un ejemplo de esto lo encontramos entre la fase L y la fase “a”, pues si bien en la primera las profesoras reconocen elementos matemáticos que observaron de la clase, como las relacionadas con el planteamiento de las tareas de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes, en la segunda presentan razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior, poniendo de evidencian que hubo más de una estrategia de resolución. Esto nos hace ver que pasan de una reflexión descriptiva, en la que presentan aspectos matemáticos de la clase con una mirada retrospectiva (en fase L), a justificar formando un diálogo con ellas mismas (Fase a).

Esto puede sugerir también un mayor nivel de reflexión en las docentes, ya que logran en las unidades de análisis una profundización en el nivel de reflexión desde un informe a los siguientes.

Capítulo 5

Conclusiones, limitaciones y perspectivas del estudio

A la luz de los resultados vertidos en el análisis de contenido, podemos extraer conclusiones respecto a los objetivos y las preguntas de investigación propuestas.

El **objetivo 1** de nuestro estudio afrontaba: *Identificar cómo se articula el programa de formación con el proceso que genera reflexión, es decir, relacionar las etapas que conforman el programa de formación con el proceso reflexivo*. Se puede observar que fue posible articular el programa de formación con las etapas del proceso reflexivo. Esto se manifiesta cuando, luego de abordar la dificultad subyacente a contar con un programa de formación que no fue diseñado explícitamente con la intención de que los profesores llevarán a cabo un proceso de reflexión, identificamos dos situaciones problemas que estaban implícitas en el trabajo de las profesoras, de tal forma que las fases del proceso de reflexión ALACT se debían observar para cada una de estas situaciones. Ha quedado reflejado en las secciones 3.7.1 y 3.7.2 de este trabajo, que el proceso formativo ha ido acompañado de un progreso en las profesoras, en el que hemos podido identificar elementos que caracterizan cada una de las fases de un proceso reflexivo. Para ello hemos identificado la evolución que sufre cada situación problema, en los diferentes informes, y relacionado con las fases del proceso reflexivo, originando los esquemas de las figuras 11 y 12 (p. 56 y 57) que representan esta articulación.

El **objetivo 2** pretende: *describir el proceso de reflexión sobre su práctica que se ha producido en docentes de matemáticas participantes en un programa de formación*. Se puede considerar alcanzado, tal como se refleja en la descripción de las fases del proceso reflexivo para cada situación problema, que aparece en la última parte del capítulo anterior. En la sección 4.3.1 se detallan las apreciaciones sobre el proceso reflexivo llevado a cabo por las docentes.

Podemos concluir además que el **objetivo 3**: *Caracterizar el nivel de reflexión que se observa en los docentes*, también ha sido alcanzado, dando lugar a una caracterización global del nivel de reflexión que realizan las docentes en cada fase del proceso reflexivo. Es así, como en la situación problema 1: la *problemática*, se concluye que las profesoras reflexionan, de manera preponderante, con un nivel de reflexión descriptiva. Sobre la situación problema 2: la *clase en estudio*, se observa un progreso en la profundidad con que abordan las docentes su proceso reflexivo respecto a esta situación problema 2, debido a que las unidades de análisis abarcan

niveles de reflexión dialógica y crítica, junto con observar que en la fase primera el nivel de reflexión es prioritariamente de tipo escrito descriptivo

De acuerdo a lo expuesto podemos concluir que el **objetivo principal** planteado para la investigación: *estudiar la reflexión de los profesores participantes en un programa de formación continua*, se ha logrado.

De esta forma hemos progresado para poder responder a la **pregunta de investigación** que nos hemos planteado, *¿Cómo reflexionan y con qué nivel, los docentes de matemáticas en un programa de formación?* Las apreciaciones sobre cómo se han puesto de manifiesto dos ciclos de reflexión en las docentes, durante la realización del seminario, nos han mostrado los elementos que han constituido sus motores de reflexión y cómo se han concretado. Hemos apreciado que los elementos matemáticos han ampliado su presencia, mejorando los aspectos que las docentes incorporan en sus tareas de enseñanza. Se perciben elementos didácticos que amplían la visión inicial, excesivamente técnica, para incorporar elementos fenomenológicos y cognitivos de los estudiantes. Respecto a la clase, se observa que las docentes van reflexionando de manera paralela sobre la problemática y su actuación en clase, aunque su proceso les lleva más a plantear nuevas tareas de enseñanza que a profundizar sobre el significado de los conceptos matemáticos y didácticos que están utilizando (papel de la letra, significados de la variable, formas de interpretar la simplificación de expresiones algebraicas y papel que en ello juegan las tareas de enseñanza, por ejemplo).

Por otra parte, dentro de las **limitaciones del estudio**, destacamos las siguientes:

- El proceso formativo no se diseñó atendiendo a las fases de un proceso reflexivo. Esta limitante trajo consigo procurar una articulación entre el programa de formación y las fases del proceso de reflexión, la cual consistió en identificar en los informes de las docentes del programa de formación las fases del proceso reflexivo, contemplando unas dimensiones que permitieran dar objetividad y consistencia al análisis de contenido de los informes escritos.
- Limitación en los datos disponibles, reducidos a los informes de las profesoras. Hubiera enriquecido el estudio dispone de las transcripciones de las intervenciones de los asistentes en las sesiones del curso, así como las de las clases impartidas. Hatton y Smith manifiestan que es evidente que son extremadamente difíciles las condiciones de hacer operativos los niveles de reflexión en escritos, de tal forma de reunir y analizar datos de manera que la evidencia muestre claramente que ha tenido lugar la reflexión. Hemos visto que esta limitante que Hatton y Smith tuvieron en sus investigaciones siguen presentes en este

trabajo. Surge entonces un interés de contar con otros medios, como parrillas de observación, grabaciones de intervenciones en las distintas fases, entre otros. Esta limitante surge desde varias aristas, a destacar:

- La naturaleza de un informe escrito: es inevitable que la redacción descriptiva aparezca para delinear un informe o propuesta que el docente redacta, por lo que a veces se puede confundir con la reflexión descriptiva en este tipo de datos. Es decir, puede que un escrito que refleje un nivel de reflexión de tipo descriptivo, corresponda a un proceso interno de las docentes que tuvo lugar un nivel de reflexión de tipo reflexión descriptiva.
- Las expectativas de la escritura establecidas por la formadora del programa sugieren inherentemente una inhibición de las capacidades y voluntad de reflejar en pieza de trabajo evaluable, es decir, el que escribe siente la presión de ser "evaluado" de cierta forma por ese escrito, lo cual puede interferir en su reflexión. Esto hace alusión a la cuestión de la "autoridad" que es un dominio que decidimos no abordar en nuestro estudio, por la envergadura de esta investigación, pero puede ser objeto de una proyección de este trabajo.
- A través de los escritos sólo se puede obtener evidencia de la *reflexión sobre la acción*, es decir, sólo pueden aportar evidencias sobre la reflexión que ocurrió durante la acción de reconstrucción después que la acción ha tenido lugar, por definición, la reflexión sobre la acción. En este sentido ampliar los instrumentos de recogida de información a grabaciones de vídeo sería una posibilidad interesante.

Por último, salvando las limitaciones expuestas, es posible proyectar el estudio, con vistas a una tesis doctoral de forma de poner en práctica en procesos de formación en el futuro, conservando los elementos teóricos de base de este trabajo. Para ello, planteamos las siguientes **perspectivas del estudio**:

- Diseñar cursos basados en el modelo de reflexión ALACT, aprovechando la experiencia adquirida, para estudiar el proceso formativo, reconociendo el papel de la reflexión en tres ámbitos: el proceso formativo, la finalidad del mismo (lograr un profesor reflexivo) y la investigación (examinar cómo reflexiona el profesor).
- Ampliar las dimensiones a considerar para estudiar la reflexión, como las creencias de los participantes y su evolución, el papel que adjudican a la autoridad, entre otros.

- Elaborar procesos de formación prácticos que tengan como objetivo lograr profesores reflexivos, como, por ejemplo, el realizado por Esteve, Melief, Álsina (2010), que ha dado lugar a cursos o el realizado por Flores (1998c) y Flores y Peñas (2003) en cursos de pregrado.
- Profundizar en el Estudio de Clases japonés, dado su grado de implantación en Chile, y estudiar su articulación con los cursos que promuevan la reflexión del profesor.
- Replicar el estudio en algún otro programa de formación en donde tampoco se haya considerado la reflexión en el diseño de éste, de tal forma de poder colaborar al estudio de cualquier programa de formación de profesores de matemáticas, aportando con elementos que puedan describir con mayor profundidad dichos programas.
- Ampliar el estudio contemplando otros instrumentos de recogida de información, como grabaciones de vídeo, entrevistas, entre otros.
- Diseñar cursos de formación que fortalezcan las áreas prioritarias en Educación, contemplando el modelo de reflexión ALACT.
- Ampliar el estudio sobre la noción de reflexión, articulándola con elementos como el trabajo colaborativo, comunidades de aprendizaje, cambio del profesor, investigación reflexiva e investigación acción, como el trabajo realizado por Jaworski & Gellert (2003).

En alguna de estas perspectivas pretendemos darle continuidad a este estudio a través de un trabajo doctoral que pueda fortalecer nuestra capacidad investigativa y a la vez ampliar los estudios en esta línea de investigación de la Didáctica de las Matemáticas.

Referencias

- Álsina, A., Planas, N. & Calabuig, M. (2009). *El aprendizaje reflexivo en la formación del profesorado de matemáticas*. VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria: la calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio, pp. 252-257.
- Ávalos, B. (2004). Desarrollo docente en el contexto de la institución escolar. Los microcentros rurales y los grupos profesionales de trabajo en Chile. En *Maestros en América Latina: Nuevas Perspectivas sobre su Formación y Desempeño*. Santiago: PREAL.
- Ball, D., Thames, M. & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 398-407.
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz y C. Garnier (eds.), *Construction des savoirs. Obstacles et conflits* (pp. 41-63). Québec, Les Editions Agence d'ARC.
- Brousseau, G. (1991). ¿Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la Didáctica de la Matemática? *Enseñanza de las Ciencias*, 9(1), 10-21.
- Brousseau, G. (1993). *Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática*, traducción realizada con autorización del autor por Dilma Fregona y Facundo Ortega. Argentina. Universidad Nacional de Córdoba.
- Bruce, C., Flynn, T., Ross J. & Moss J. (2011). Promoting teacher and student mathematics learning through lesson study: A design research methodology. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 193-200), Ankara, Turkey: PME.
- Callejo, M. (1998). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.
- Cardeñoso, J.M.; Flores, P. y Azcárate, P. (2001). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro*. (pp. 233-244) Granada: Publicaciones de la Universidad de Granada.
- Castro, J. (2001). *Metodología de la investigación*, V1 Fundamentos. Salamanca: Amarú.

-
- Cavanagh & Prescott (2009). The reflective thinking of three pre-service secondary mathematics teachers. En Tzekaki, M., Kaldrimidou, M. & Sakonidis, H. (Eds.). *Proceedings of the 33rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 273-280). Thessaloniki, Greece: PME.
- Cervantes, G. & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona Próxima, revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte*, 8, 34-41.
- Chapman, O. (2005). Constructing pedagogical knowledge of problems solving: Preservice mathematics teachers. En H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.), *Proceedings of the 29th PME International Conference*, 2, (pp. 225-232).
- Cohen, L. & Manion, L. (2002). *Research Methods in Education*. London: Routledge.
- Da Ponte, J. P. & Chapman, O. (2008). Preservice Mathematics Teachers' Knowledge and development. En L. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 225- 236). New York, NY: Routledge.
- Delgado, C. & Da Ponte, J. P. (2004). A reflexão sobre as práticas de ensino da Matemática de três futuras professoras do 1º ciclo do ensino básico. *Quadrante*, 13(1), 31-61.
- Dewey, J. D. (1910). *How we think*. Boston: D.C. Heath.
- Elipane, L. (2011). Incorporating lesson study in pre-service mathematics teacher education. In Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 257-282). Ankara, Turkey: PME.
- Empson, S. & Jacobs, V. (2008) Learning to Listen to Children's Mathematics. En Tirosh, D. & Wood, T. (Eds.) *Tools and processes in Mathematics Teachers Education. The International Handbook of Mathematics Teacher Education Vol. 2*, (pp. 257-282). Rotterdam: Sense Publishers.
- Eraut, M. (1977). Strategies for Promoting Teacher Development. *British Journal of Inservice Education*, 4(1&2), 95-99.
- Esteve, O.; Melief, K. & Alsina A. (Cord.) (2010). *Creando mi profesión. Una propuesta para el desarrollo profesional del profesorado*. Barcelona: Octaedro, S.L.

-
- Flores, P. (1997). El profesor de matemáticas, un profesional reflexivo. En Berenguer, M.I., y otros. (Eds.). *Investigación en el aula de matemáticas*. (pp. 13-27). Granada: THALES y Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Flores, P. (1998a). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre matemáticas, su enseñanza y aprendizaje*. Granada: Comares.
- Flores, P. (1998b). *Proyecto Docente*. Granada: Universidad de Granada.
- Flores, P. (1998c). Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 17, 37-50.
- Flores, P. (2007). Profesores de Matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(A), 139-159.
- Flores, P. & Fernández, F. (2001). Reflexiones sobre un problema profesional relacionado con la enseñanza del álgebra. En Perales, F.J. y otros (Eds.). *Congreso nacional de didácticas específicas*. (pp. 1781-1800). Granada: GEU.
- Flores, P. & Peñas, M. (2003). Formación inicial de profesores de matemáticas reflexivos. *Revista Educación y Pedagogía*, 35, 93-117. Colombia: Universidad de Antioquia.
- Fox, D. (1981). *El proceso de investigación en educación*. (1ª Ed. Inglesa, 1969). Pamplona: Eunsa.
- Gaulin, C. (1982). La résolution de problèmes: le mot d'ordre pour les années 1980-90. Quoi en penser? La didactique mathématique au primaire. En *Actes du Colloque mathématique*. Département des Sciences de l'éducation. Université du Québec au Chicoutimi.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral, Universidad de Granada, España.
- Hatton, N. & Smith, D. (1992). *Towards reflection in teacher education. What counts as evidence?* In Annual Conference of the Australian Association for Research in Education. Deakin University. Australia.

-
- Hatton, N., & Smith, D. (1995a). Facilitating reflection: Issues and research. *Forum of Education, 50*(1), 49-65.
- Hatton, N. & Smith, D. (1995b). Reflection in teacher education: towards definition and implementation. *Teaching and Teacher Education, 11*(1), 33-49.
- Hernández, R., Fernández C. & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Isoda, A., Arcavi, A. & Mena A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas. Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Jaworski, B. (1993). The professional development of teachers: The potential of critical reflection. *British Journal of In-service Education, 19*, 37-42.
- Jaworski, B. (1998). Mathematics Teacher Research: Process Practice and the Development of Teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 1*(1), 3-31.
- Jaworski, B. (2006). Theory and Practice in Mathematics Teaching Development: critical inquiry as a mode of learning in teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education. Special Issue: Relations between theory and practice in mathematics teacher Education, 9*(2), 187-211.
- Jaworski, B. & Gellert, U. (2003). Educating new mathematics teachers: Integrating theory and practice, and the roles of practicing teachers. En A. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Second International Handbook of Mathematics Education*. (pp. 829-875). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Kerlinger, F. N. (1986). *Foundations of behavioral research* (3ª Ed.). Forth Worth, TX: Holt, Rinehart and Winston.
- Korthagen, F. (1985). Reflective Teaching and Preservice Teacher Education in the Netherlands. *Journal of Teacher Education, 36*(5), 11-15.
- Korthagen, F. (2004). In search of the essence of a good teacher: towards a more holistic approach in teacher education. *Teaching and Teacher Education, 20*, 77-97.

-
- Korthagen, F. (2005). Practice, theory, and person in life-long professional learning. En D. Beijaard., P. C. Meijer., G. M. Dersheimer. & H. Tillema. (Eds.), *Teacher professional development in changing conditions* (pp. 79-94). Dordrecht: Springer.
- Korthagen, F., Kessels, J., Koster, B., Lagerwerf, B. & Wubbels, T. (2001). *Linking practice and theory: The pedagogy of realistic teacher education*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Korthagen, F., & Verkuyl, H. S. (1987). *Supply and Demand: Towards Differentiation in Teacher Education, Based on Differences in Learning Orientations*. Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington. D.C.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Paidós Comunicación.
- Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada, España.
- Martínez, M. (2006). *Ciencia y arte en la metodología cualitativa*. México: Trillas.
- Mena, A. (2006). *El estudio de clases japonés en perspectiva*. XIII Jornadas Nacionales de Educación Matemática, Chile.
- Mewborn, D. S. (1999). Reflexive thinking among preservice elementary mathematics teachers. *Journal For Research Mathematics Education*, 30(3), 316-341.
- MINEDUC. (2009a). *Mapas de progreso del aprendizaje: mapa del progreso de álgebra*. Descargado el 20 de mayo de 2011 de <http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-deprogreso/matematica/>.
- MINEDUC. (2009b). *Fundamentos del ajuste curricular en el sector de matemáticas. Unidad de currículo y evaluación*. Descargado el 20 de mayo de 2011 de http://www.curriculum-mineduc.cl/docs/apoyo/articulo_fundamentos_ajuste_matematica_300309.pdf.
- Múñoz, M. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral, Universidad de Huelva. España.

-
- Olfos, R., Soto D. & Silva H. (2007). Renovación de la enseñanza del álgebra elemental: un aporte desde la didáctica. *Estudios Pedagógicos*, 23(2), 81-100.
- Peñas, M. (2002). *Un estudio del proceso de reflexión sobre cuestiones profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas*. Granada: Universidad de Granada.
- Peñas (2003). Los números enteros y la calculadora: una experiencia de reflexión sobre la práctica. *Uno*, 32, 109-118.
- Peñas, M., & Flores, P. (2005). Procesos de reflexión en estudiantes para profesor de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 5-16.
- Petropoulou, G., Potari, D. & Zachariades, T. (2011). Inquiring mathematics teaching at the university level. En Ubuz, B. (Ed.), (2011), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 3 (pp 385-392). Ankara, Turkey: PME.
- Ribeiro, C. (2010). *El desarrollo profesional de dos maestras inmersas en un grupo de trabajo colaborativo, a partir de la modelización de sus clases de Matemáticas*. Tesis Doctoral, Huelva. España.
- Rico, L. (1997a). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Síntesis.
- Rico, L. (1997b). *La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria*. Barcelona: ice-Horsori.
- Rojas, N., Flores, P. y Ramos, E. (En prensa). El análisis didáctico como herramienta para identificar conocimiento matemático para la enseñanza en la práctica. En J.L. Lupiáñez, M. Molina y L. Rico. *El Análisis Didáctico*. Granada, Departamento de Didáctica de la Matemática. España.
- Ross, D. (1989). First steps in developing a reflective approach. *Journal of Teacher Education*, 40, 22-30.
- Rowland, T.; Thwaites, A. & Pared, J. (2011) Libby Triggers of contingency in mathematics teaching. In Ubuz, B. (Ed.) *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4 (pp. 73-80), Ankara, Turkey: PME.

-
- Rowland, T., Turner, F., Thwaites, A. & Huckstep, P. (2009). *Developing Primary Mathematics Teaching*. London: Sage Publications.
- Schöenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008) Toward a Theory of Proficiency in Teaching Mathematics. D. Tirosh & T. Wood (Ed.), (2008). En Tirosh, D. & Wood, T. (Eds.) *Tools and processes in Mathematics Teachers Education. The International Handbook of Mathematics Teacher Education* Vol. 2 (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publisehrs.
- Schön, D. (1983). *La formación de profesionales reflexivos: Hacia un nuevo diseño de la enseñanza y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid: Paidós.
- Schön, D. (1987). *Educating the Reflective Practitioner*. Jossey-Bass: San Francisco.
- Selltiz, C. & Jahoda, M.(1970). *Métodos de investigación en las relaciones sociales*. Madrid: RIALP.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15, 4-14.
- Smith, D. & Hatton, N. (1993). Reflection in Teacher Education; a Study in Progress. *Education Research and Perspectives*, 20(1), 13-23.
- Smyth, J. (1989). Developing and Sustaining Critical Reflection in Teacher Education. *Journal of Teacher Education*, 2(40), 2-14.
- Smyth, J. (1991). Una pedagogía crítica de la práctica en el aula. *Revista de Educación*, 294, 275-300.
- Sowder J. T. (2007). The mathematics education and development of teachers. En Lester, F.K.Jr (Ed.), *Second handbook on research on mathematic teaching and learning*. (1, pp. 157-224). Charlotte: Information Age Publishing y National council of teachers of mathematics.
- Tigchelaar, A., Melief, K., Rijswijk, M. & Korthagen F. (2005). *Elementos de una posible estructura de aprendizaje reflexivo en la formación inicial y permanente de profesores. Proyecto Aprender de la práctica, Comenius 2.1*. Descargado el 15 de febrero de http://www.xtec.net/formacio/practica_reflexiva/base/aprendre/comenius_elementos.pdf.

-
- Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid. España.
- Turner, F. (2011). Mathematical content knowledge revealed through the foundation dimension of the Kq. En Ubuz, B. (Ed.), *Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol 4, (pp. 281-288). Ankara, Turkey: PME.
- Valli, L. (1992). *Reflective Teacher Education: cases and critiques*, Albany: State University of New York Press.
- Valli, L. (1997). Listening to other voices: A description of teacher reflection in the United States. *Peabody journal of Education*, 72(1), 67-88.
- Van Manen, M. (1977). Linking ways of knowing with ways of being practical. *Curriculum Inquiry*. 6, 205-228.
- Van Mannen, M. (1995). On the Epistemology of Reflective Practice. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 1, 33-50.
- Zañartu, M.; Darrigrandi, F. & Ramos M, (2011a). *Matemática 2º para Segundo de Educación Media. Texto para el estudiante*. Santiago: Santillana.
- Zañartu, M.; Darrigrandi, F. & Ramos M, (2011b). *Matemática 2º para Segundo de Educación Media. Guía didáctica para el profesor*. Santiago: Santillana.
- Zeichner, K. (1993). El maestro como profesional reflexivo. *Cuadernos de Pedagogía*, 220, 44-49.

Índice de figuras

Figura 1	Esquema de Reflexión de Schön. (1983)	p. 9
Figura 2	Reflexión, Jaworski. (1993)	p. 12
Figura 3	Modelo de reflexión de Smyth. (1989)	p. 13
Figura 4	Modelo ALACT, Korthagen. (1983)	p. 15
Figura 5	Modelo Onion, Korthagen. (2005)	p. 17
Figura 6	Esquema Unidad didáctica Expresión algebraica.	p. 24
Figura 7	Mapa conceptual sobre expresiones algebraicas.	p. 26
Figura 8	Clasificación de diseños no experimentales. Hernández et al., (2010).	p. 40
Figura 9	Esquema del Seminario. (proceso formativo)	p.46
Figura 10	Relaciones entre dimensiones del estudio y categorías del análisis de contenido.	p.50
Figura 11	Esquema ALACT para la Problemática.	p.56
Figura 12	Esquema ALACT para la clase.	p.57
Figura 13	Esquema de identificación de informes en cada proceso ALACT.	p.58
Figura 14	Imagen del applet: “Calculadora Wiris”.	p.68

Índice de tablas

Tabla 1	Fases del modelo de Korthagen	p. 14
Tabla 2	Tipos de escritura respecto a reflexión. Hatton y Smith (1992)	p. 18
Tabla 3	Mapa de progreso en álgebra	p. 29
Tabla 4	Sesiones del programa formativo	p. 42
Tabla 5	Características de los participantes en el seminario	p. 46
Tabla 6	Documentos que se utilizan en la toma de datos	p. 48
Tabla 7	Tareas de enseñanza	p.75
Tabla 8	Evolución de afirmaciones en proceso de reflexión sobre problemática	p. 92
Tabla 9	Niveles de reflexión sobre la problemática	p. 92
Tabla 10	Evolución de afirmaciones en proceso de reflexión sobre la clase	p. 95
Tabla 11	Comparación de elementos matemáticos en mapas conceptuales	p. 95
Tabla 12	Niveles de reflexión sobre la clase	p. 96

Anexos

Anexo 1: Registros de los informes de las profesoras, con la identificación de los niveles y procesos reflexivos.

Anexo 2: Categorías por informe en cada proceso reflexivo.

Anexo 3: Elementos del análisis didáctico sobre las expresiones algebraicas.

Anexo 1

Registros de los informes de las profesoras

con la identificación de los niveles y procesos reflexivos

Tabla 1

Registro del informe 1, Situación Problema

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios	Niveles de reflexión
T1_U1	¿Por qué los alumnos no descomponen en factores al momento de simplificar una fracción algebraica cuyo numerador es un polinomio?	SP: problemática Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.	Escrito Descriptivo: Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.
T1_U2	¿Por qué los alumnos transfieren el procedimiento de simplificación de un monomio al momento de simplificar una fracción algebraica no contemplando la diferencia?		
T1_U3	Este trabajo pretende llegar a reconocer los errores que los alumnos realizan al momento de simplificar una fracción algebraica,	SP: problemática Señalan lo que este trabajo pretende abordar como problemática.	Escrito descriptivo Describe el objetivo del estudio.
T1_U4	y además establecer las estrategias para mejorar el entendimiento del problema de manera que ellos puedan mejorar su proceso de simplificación y lo usen como una herramienta para resolver problemas.	SP: clase en estudio Señalan un segundo objetivo de trabajo: establecer estrategias para abordar <i>problemática</i> .	Reflexión descriptiva Luego de describir la <i>problemática</i> , hay un intento por establecer acciones posibles para su

			mejora (estrategias), <i>clase en estudio</i> , intentado dar justificaciones de ello.
T1_U5	Hemos observado que los alumnos arrastran errores previos y que esos obstaculizan el proceso de enseñanza en lo que respecta a la simplificación de fracciones algebraicas.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar problemática: errores previos de sus alumnos que han evidenciado en su práctica y las consecuencias de ello.	Reflexión descriptiva Señalan errores previos de sus alumnos observados en su práctica. (mirada retrospectiva de ella)
T1_U6	No perciben [los alumnos] la relación entre la aritmética y el álgebra.	SP: problemática Especifican una razón por la cual abordar problemática: una dificultad en los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican una dificultad en los alumnos desde una mirada retrospectiva de su práctica.
T1_U7	Tipo de errores frecuentes También existen errores de procedimientos operatorios, ya que los alumnos transfieren la forma de simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, a una simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios, saltándose las reglas de sumas y productos sin importar el orden prioritario de las operaciones de éstas.	SP: problemática Especifican razones por la cual abordar problemática: un error de los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican un error de los alumnos, justificando a través de su práctica.
T1_U8	Por ejemplo, algunos errores típicos cometidos son:	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar	Reflexión descriptiva

	1) $\frac{a^2 + \cancel{b}}{\cancel{b}} = a^2$ 2) $\frac{2\cancel{a}^2 + \cancel{a}b}{\cancel{a}b} = 2a$ 3) $\frac{2a^2 + \cancel{a}b}{\cancel{a}b} = 2$	problemática: errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Identifican errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.
T1_U9	Otro error que aparece comúnmente es la ausencia del significado del álgebra, es decir, los alumnos no establecen el vínculo entre la aritmética y la generalización que conlleva el álgebra, por lo cual errores que cometen en aritmética se convierten en una dificultad para el nuevo proceso cognitivo del alumno en particular en el problema de simplificación.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar problemática: errores y dificultades en los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican errores y dificultades, intentando justificar a través de su práctica.
T1_U10	La actitud afectiva de los alumnos también es una causa que incide, ya que el alumno coloca como barrera el hecho que él es malo para las matemáticas o que le cae mal el profesor, muchas veces existe una falta de concentración de parte del alumno, poco interés en el área lo cual no le permite cuestionarse sobre lo que le están enseñando simplemente memoriza lo que le sirve para la prueba.	SP: problemática Señalan razones de tipo afectivo por la cual abordar problemática, las cuales han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican una dificultad, justificada a través de su práctica, realizando una mirada retrospectiva de ella.
T1_U11	La importancia del tema radica que los alumnos no le encuentran sentido al momento de la simplificación una fracción algebraica, lo cual genera un problema para el aprendizaje, ya que éste no presenta la mejor actitud para aprender.	SP: problemática Señalan la importancia que tiene el estudio de <i>problemática</i> .	Reflexión descriptiva Escriben sobre la importancia, intentando dar

			alguna razón de tipo actitudinal que la justifique.
T1_U12	Por otra lado también arrastran el concepto de simplificación numérica, lo implementan tal cual.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar problemática, identificando un error de los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican un error de los alumnos evidenciado desde su práctica.
T1_U13	Este trabajo nos permitirá reconocer los errores que se presentan al momento de enseñar la simplificación de expresiones algebraicas,	SP: problemática Señalan lo que este trabajo pretende abordar como problemática.	Escrito descriptivo Describe el objetivo del estudio.
T1_U14	y lo más importante es que nos permitirá diseñar estrategias para que el alumno mejore el entendimiento de la simplificación de fracciones algebraica cuyo numerador es un polinomio y poner en práctica dichas estrategias de manera de mejorar aquellas que lo requieran.	SP: clase en estudio Señalan el segundo objetivo de trabajo: Establecer estrategias para abordar <i>problemática</i> .	Reflexión descriptiva Luego de describir la <i>problemática</i> , hay un intento por establecer acciones posibles para su mejora (estrategias), <i>clase en estudio</i> , intentado dar justificaciones de ello.
Estado del Arte			
T1_U15	En relación a este tema en general se presenta como material de	EA	Escrito descriptivo

ejercitación.

En muchos documentos de planificación se establece como un elemento fundamental para el desarrollo del álgebra, saber simplificar correctamente.

En el artículo: Análisis Didáctico del Lenguaje Algebraico en la Enseñanza Secundaria, (Autores: Martín Socas Robayna, Matías Camacho Machin y Josefa Hernández Domínguez. España) se establece su implicancia en una propuesta en la formación de profesores de secundaria.

En este documento se considera el álgebra como una de las partes de la matemática que influyen considerablemente en el aspecto formativo, por su potencia y generalización y sus métodos, pero su aprendizaje genera grandes dificultades a los alumnos y estas dificultades son de diferente naturaleza, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos del pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con las metodologías utilizadas y con las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra.

http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=117980&orden=86395

Se presenta un artículo en donde se realiza el análisis didáctico del álgebra como contenido global. El artículo no hace mención directa a la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.

Describe las ideas principales de un artículo.

T1_U16 El Grupo Comenius de la Universidad de Santiago, en su proyecto Enlaces se plantea como objetivo que el alumno no sólo aprenda procedimientos algorítmicos relativos a la operatoria algebraica, sino que valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora, y se utilicen para modelar situaciones y resolver problemas, para ello y focalizado en la simplificación de expresiones consideran:

- Factorización (juego de los factores)
- Exploración (equivalencia de fracciones)
- Formalización (concepto)
- Ejercitación (aplicación)

EA

Se presenta un documento power point en donde muestra la planificación general del tópico de álgebra del segundo medio (14-15 años aproximadamente)

Escrito descriptivo

Describe el objetivo de un archivo power point.

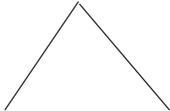
[http://www.comenius.usach.cl/enlacesmatasp/files/File/MLANZ2006/Prese
ntaAlgebra%202%20Medio.ppt](http://www.comenius.usach.cl/enlacesmatasp/files/File/MLANZ2006/Prese
ntaAlgebra%202%20Medio.ppt)

T1_U17	Dentro de las herramientas tecnológicas para apoyo de este tema se encuentra la Calculadora Wiris que permite comprobar resultados. http://www.wiris.com/demo/es/	EA Es un programa diseñado para trabajar en distintos ámbitos de la matemática.	Escrito descriptivo Presenta la dirección de una herramienta tecnológica para matemática.
T1_U18	Se planteó el siguiente problema en un Liceo técnico Profesional y en un Colegio Científico Humanista Subvencionado. Pregunta: Considere la siguiente expresión:	SP: problemática Se presenta una tarea de enseñanza que apunte a evidenciar <i>problemática</i> .	Escrito descriptivo Se enuncia una tarea de enseñanza para obtener evidencias sobre <i>problemática</i> .

$$\frac{a^2 + b}{b}$$

¿Es posible simplificarla?

Observa cómo lo resolvieron dos alumnos:

$$\frac{a^2 + b}{b}$$


Juan lo simplifica
y obtiene como
resultado a^2

Pedro indica que no es
posible simplificar

- ¿Quién tiene la razón?
- Si $a = 2$ y $b = 3$ ¿la fracción resultante es simplificable?
- ¿Qué puedes decir en relación a tu respuesta anterior?

T1_U19	Este problema fue desarrollado por tres 3° Medios de la Escuela Industrial de Valparaíso equivalente a 100 alumnos y el 42 % de ellos respondió correctamente la pregunta 1. La mayoría respondió que Juan tenía la razón.	SP: problemática Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.	Reflexión descriptiva Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio desde su experiencia personal.
T1_U20	Este resultado se debe a que los alumnos asocian la simplificación de expresiones algebraicas con una simplificación numérica, otro factor puede ser que olvidaron el procedimiento para poder simplificar fracciones algebraicas donde el numerador es un binomio, ya que no alcanzaron a madurar el concepto el año anterior.	SP: problemática Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.	Reflexión descriptiva Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio desde su experiencia personal.
T1_U21	Con respecto a la pregunta 2 en general la respondieron bien, aunque algunos alumnos cometieron errores de cálculo y también simplificaban primero los números iguales antes de resolver la potencia. Muchos de los alumnos no respondieron la pregunta.	SP: problemática Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.	Escrito descriptivo Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.
T1_U22	El mismo problema fue desarrollado por un 2°, un 3° y un 4° Medio del colegio Alberto Hurtado. Aquí el resultado fue mejorando a medida que el	SP: problemática	Reflexión

curso aumentara. Creemos que se debe a que a medida que los alumnos van creciendo ellos van madurando y comprendiendo mejor el concepto de simplificación de fracciones algebraicas y del álgebra en general.	Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.	descriptiva Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio desde su experiencia personal.
---	---	---

Tabla 2

Registro informe 2 sobre la selección de problemas para la clase

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios	Niveles de reflexión
T2_U1	<p>Sea un cuadrado de lado a y un rectángulo de ancho igual al lado del cuadrado y largo b.</p> <p>1.- ¿Qué parte del área del rectángulo es el área del cuadrado?</p> <p>2.- ¿Qué parte del perímetro del rectángulo es el perímetro del cuadrado?</p> $\left(\frac{ab}{a^2} = \frac{b}{a} \right)$ $\left(\frac{2a + 2b}{4a} = \frac{a + b}{2a} \right)$	<p>SP: problemática , tarea</p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Parcialmente se corresponde con el objetivo de la clase en estudio (relacionada con la <i>problemática</i>), al considerar otro tipo de expresiones algebraicas, en donde el numerador y denominador son monomios.,</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian una de las tareas de enseñanza posibles para llevar al aula.</p>
T2_U2	<p>Una persona recibe anualmente $(2a+8)$ pesos. Si recibe el mismo sueldo todos los meses</p> <p>1.- ¿Cuánto recibe al mes?</p>	<p>SP: problemática, tarea</p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. No se corresponde con el objetivo de la clase en estudio</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian una de las tareas de</p>

2.- ¿Y en un semestre?

$$\left(\frac{2a+8}{12} = \frac{a+4}{6} \right.$$

$$\left. \frac{2a+8}{2} = a+4 \right)$$

(relacionada con *problemática*), al enseñanza considerar otras expresiones algebraicas posibles para cuyo denominador es un número. llevar al aula.

T2_U3 Completa la siguiente tabla dados los valores de a y b y contesta las siguientes preguntas

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	(a+b)	(a-b)	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$
2	1						
3	2						
-2	4						
-1	0						

a) Compara las columnas (6) y (1) ¿Qué puedes decir?

b) Compara las columnas (7) y (2) ¿Qué puedes decir?

c) ¿En que columna se obtienen los mismos resultados que en (8)? ¿Por qué crees tú que sucede?

SP: *problemática* , **tarea**

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Parcialmente se corresponden con el objetivo de la clase en estudio (relacionada con la *problemática*), al tomar otro tipo de expresiones algebraicas, donde se tiene que:

- numerador y denominador son monomios.
- denominador es binomio.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas de enseñanzas posibles para llevar al aula.

Tabla 3

Registro informe 3 sobre la planificación de la clase

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios	Niveles de reflexión
T3_U1	<p>Seleccione un tema o contenido de alguno de sus cursos para preparar una clase, en la cual se trate problemática planteada por el grupo. Luego, diseñe o seleccione una situación para proponerlo en su clase.</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px; width: fit-content; margin: 10px auto;"> <p>Equivalencia de expresiones algebraicas</p> $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x + 2$ </div>	<p>SP: <i>problemática , tarea</i></p> <p>Presentan una tarea de enseñanza que los alumnos deberían poder resolver para la <i>clase en estudio</i> que se relacione con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el tema y la tarea de enseñanza para la <i>clase en estudio</i> que se relaciona con la <i>problemática</i>.</p>
T3_U2	<p>Indique el aprendizaje esperado de la clase.</p> <p>Explique.</p> <p>Transformen una determinada situación o problema en algo más simple y fácil de tratar.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio</i></p> <p>El objetivo de la clase se modifica: que los alumnos transformen expresiones algebraicas a su forma reducida.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el aprendizaje esperado de la clase según la propuesta que presenta.</p>
T3_U3	<p>Tema de Investigación: Equivalencia de expresiones algebraicas.</p> <p>Nivel: 2º Medio</p> <p>Título de la Unidad de Aprendizaje: Las fracciones en Lenguaje Algebraico.</p>		
T3_U4	<p>Objetivo Fundamental: Que el alumno mediante la factorización logre obtener una expresión más simple equivalente a la dada.</p>	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i></p> <p>Identifican el objetivo fundamental de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el objetivo de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>

T3_U5	<p>Aprendizaje Esperado: Utilicen la descomposición en factores en un cociente, de modo que al simplificar se obtenga una expresión equivalente.</p>	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i></p> <p>Expresan el aprendizaje esperado de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian el aprendizaje esperado de la <i>clase en estudio</i>, relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T3_U6	<p>Tarea de enseñanza: Analiza esta afirmación y responde las siguientes preguntas:</p> $\frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = x + 2$ <p>a) ¿Qué puedes decir acerca de esta afirmación? ¿Es verdadera o falsa?</p> <p>b) Si $x=3$, ¿La expresión cumple la igualdad?</p> <p>c) Si $x=1$ ¿Qué puedes decir del resultado obtenido?</p> <p>d) Busca evidencias para justificar tus respuestas.</p>	<p>SP: <i>problemática, tarea</i></p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo planteado para la <i>clase en estudio</i> (relacionada con la <i>problemática</i>), al considerar una identidad.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian la tarea de enseñanza que plantearán los alumnos para la <i>clase en estudio</i>.</p>
T3_U7	<p>Institucionalización del saber:</p> <p>Que el alumno sea capaz de transformar la expresión fraccionaria en factores, a partir de las técnicas de factorización, de modo de obtener una expresión más simple y de mejor manejo, considerando las restricciones previamente. A partir de la exploración y de la puesta en común se establecerá, que mediante la factorización y simplificación se obtiene una expresión más simple y fácil de tratar.</p>	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i></p> <p>Al presentar la institucionalización de la <i>clase en estudio</i> (relacionada con la <i>problemática</i>), ésta se centra en la obtención de expresiones más simple y fácil de tratar a partir de la simplificación.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Escriben el momento de la institucionalización del saber justificando en algunos casos.</p>
T3_U8	<p>Evaluación: Demuestre que las siguientes expresiones algebraicas son equivalentes indicando las restricciones.</p> <p>a) $\frac{5xy}{y} = 5x$</p>	<p>SP: <i>problemática, tarea</i></p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Este se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase en estudio (relacionada con la <i>problemática</i>), ya que considera la identidad.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian el instrumento de evaluación que pretende llevar al aula.</p>

$$\text{b) } \frac{35mn^2}{7mn} = 5n$$

$$\text{c) } \frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y$$

Tabla 4

Registro informe 4 sobre el análisis a priori de la tarea de enseñanza para la clase

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios	Niveles de reflexión																																																
T4_U1	<p>¿Cuál es la tarea prevista para la clase?</p> <div style="border: 1px solid black; padding: 10px;"> <p>¿Se puede ahorrar cálculos?</p> <p>En el segundo medio C, la profesora de Matemática escribió la siguiente tabla:</p> <table border="1" style="width: 100%; text-align: center;"> <thead> <tr> <th>(1)</th> <th>(2)</th> <th>(3)</th> <th>(4)</th> <th>(5)</th> <th>(6)</th> <th>(7)</th> <th>(8)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>$(a+b)$</td> <td>$(a-b)$</td> <td>$a^2 - b^2$</td> <td>$\frac{ab}{b}$</td> <td>$\frac{a+b}{a}$</td> <td>$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$</td> </tr> <tr> <td>....</td> <td>....</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>....</td> <td>....</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>....</td> <td>....</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>....</td> <td>....</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table> <p>Luego, empezó a recitar algunos valores para a y b, y pide completar la tabla.</p> <p>Al cabo de poco tiempo, Aldo, un alumno del curso, dice que ya terminó, el resto de compañeros se encuentran asombrados por la rapidez en los cálculos de su compañero. La profesora le pregunta <i>¿Completaste todas las columnas?</i> y el responde:</p> <p><i>“Si completé todas las columnas, pero no fue necesario el cálculo en algunas” ¿A qué columna(s) crees que se refiere Aldo? Explica</i></p> </div>	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	a	b	$(a+b)$	$(a-b)$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$							<p>SP: problemática , tarea</p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde con el objetivo planteado para la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Se enuncia la tarea de enseñanza que pretenden llevar al aula.</p>
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)																																												
a	b	$(a+b)$	$(a-b)$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$																																												
....																																																		
....																																																		
....																																																		
....																																																		
T4_U2	<p>¿Cuál es la respuesta experta de cada tarea?</p> <p>Que el alumno factorice la o las expresiones del cuociente y</p>	<p>SP: clase en estudio, tarea</p> <p>Señalan el desarrollo “ideal” de la tarea</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Redactan la respuesta</p>																																																

	luego simplifique aplicando propiedades.	de enseñanza para la clase de estudio.	experta de la tare de enseñanza.
T4_U3	<p>¿Cuáles son los conocimientos matemáticos involucrados en cada tarea?</p> <p>a) Descomponer en factores (parte literal y numérica).</p> <p>b) Aplicar las propiedades de inverso multiplicativo y de neutro multiplicativo.</p> <p>c) Conocer y aplicar las técnicas de factorización.</p> <p>d) Establecer las restricciones necesarias para que la expresión tenga sentido.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio, problemática, tarea.</i></p> <p>Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T4_U4	<p>¿Cuáles son los conocimientos adquiridos que debe tener el alumno(a), para desarrollar cada tarea?</p> <p>a) Operatoria en R.</p> <p>b) Propiedades de los números.</p> <p>c) Valorización.</p> <p>d) Técnicas de factorización.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio, problemática, tarea.</i></p> <p>Expresan los conocimientos adquiridos por un alumno para abordar la tarea de enseñanza de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben los conocimientos adquiridos por un alumno para abordar la tarea de enseñanza de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T4_U5	<p>¿Cuáles serían las posibles estrategias de los alumnos(as) para resolver las situaciones?</p> <p>a) Valorice la expresión de modo de satisfacer la igualdad.</p> <p>b) Factorice la o las expresiones, simplifique y obtenga la expresión más simple dada.</p> <p>c) Multiplique cruzado, obteniendo la misma expresión.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio, tarea</i></p> <p>Presentan las estrategias posibles de los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian las estrategias posibles de los alumnos.</p>
T4_U6	<p>¿Cuáles serían las dificultades que tendrían los alumnos (as)?</p> <p>a) Operatoria con fracciones.</p>	<p>SP: <i>problemática , tarea</i></p> <p>Presentan las posibles dificultades que</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian las posibles</p>

	<p>b) Operatoria con expresiones algebraicas.</p> <p>c) El significado de una expresión algebraica.</p> <p>d) Técnicas de factorización.</p>	<p>podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>dificultades de los alumnos para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T4_U7	<p>¿Cuáles serían los posibles errores de los alumnos?</p> <p>a) Valorizar en el valor que indefine la expresión.</p> <p>b) Errores de cálculo en la valorización.</p> <p>c) Error en la factorización por:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Desconocimiento de la técnica. - No saber las tablas de multiplicar. <p>d) Opera incorrectamente con expresiones algebraicas (Multiplicación).</p> <p>e) Simplificar términos comunes de una expresión algebraica.</p> <p>f) no considerando la expresión como un todo.</p>	<p>SP: <i>problemática</i> , <i>tarea</i></p> <p>Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian los errores posibles de los alumnos para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T4_U8	<p>¿Hay algún conocimiento nuevo que se prevé en la actividad?</p> <p>¿Cuál? y ¿para qué nivel?</p> <p>No nuevo, pero que adquiere relevancia en las expresiones fraccionarias.</p> <p>Corresponde a las restricciones para que la expresión dada tenga sentido.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio, problemática</i>.</p> <p>Plantean un “conocimiento relevante” para la clase en estudio (relacionada con la <i>problemática</i>) respecto a las expresiones algebraicas: las restricciones.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Plantean un conocimiento que consideran “relevante” para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>. El cual surge desde una mirada retrospectiva de su práctica.</p>

Tabla 5

Registro informe 5 sobre el análisis de la clase

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios de apoyo	Niveles de reflexión
T5_U1	<p>I Gestión Pedagógica:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Buen dominio del curso. • El tiempo utilizado para la actividad corresponde al tiempo planificado. • Buen uso de la pizarra (los alumnos expresaron sus estrategias) • Se presenta material visual y guías individuales. • Se presenta una dificultad por no entregar la guía individual antes de presentar el problema en forma general. • La profesora presenta una ansiedad controlada y normal. • Se escogen para exponer las estrategias al azar lo que provoca la repetición de ellas, en resumen sólo hay dos estrategias. • Se realiza una evaluación formativa en dos formatos, sin previa planificación de los ejercicios, no estableciendo la equivalencia en el grado de dificultad. • La forma de evaluar fue colaborativa, obteniendo la retroalimentación en forma inmediata. 	<p>Tarea</p> <p>Presentan fortalezas y dificultades que tuvo lugar la clase en relación a aspectos pedagógicos, como el uso de recursos y el tiempo para el tratamiento de las tareas de enseñanza propuesta para la clase, evidenciando que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento.</p>	<p>Reflexión dialógica</p> <p>Se evidencian elementos pedagógicos de la clase, Describen las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, con una mirada retrospectiva de la práctica y formando un diálogo interno sobre ello.</p>

T5_U2	<p>II Didáctica</p> <ul style="list-style-type: none"> • La profesora lee el enunciado del problema y al no entender los alumnos, vuelve a explicar dando pie a posibles estrategias. • La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos • La formalización la realiza la profesora, pudiendo entregar esta tarea a los alumnos • No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos. • Se dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas, lo que permite el análisis en la puesta en común. 	<p>Tarea</p> <p>Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento. Dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos y el tratamiento que hubo de ellas por parte del docente.</p>	<p>Reflexión crítica</p> <p>Evidencia sobre el tratamiento de las estrategias en la clase en estudio, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellas y dando importancia a la observación de todos los estudiantes.</p>
T5_U3	<p>III Matemático</p> <ul style="list-style-type: none"> . En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria. . Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relaciones en la tabla, muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas 	<p>SP: problemática , tarea</p> <p>Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes. Manifiestan que hay estrategias de los alumnos que no se vinculan con la temática de la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Reflexión dialógica</p> <p>Presentan aspectos matemáticos de la clase, con una mirada retrospectiva.</p>

Tabla 6

Registro informe 6, Informe final

Códigos	Unidades de análisis (párrafos)	Dominios de apoyo	Niveles de reflexión
T6_U1	A través de nuestra experiencia hemos observado que los alumnos arrastran errores tales como: la descomposición de un número en factores, la simplificación de números, la aplicación de las propiedades de potencias, la factorización, los que obstaculizan el proceso de enseñanza y aprendizaje en lo que respecta a la simplificación de fracciones algebraicas. No perciben la relación entre la aritmética y el álgebra, esta situación, lleva al educando a percibir el algebra como algo nuevo, de difícil aprendizaje, sin considerar su experiencia previa como lo indica la teoría empírico-sensualista o formulando hipótesis como la teoría empírico-apriorista o a partir de asimilaciones y acomodaciones de su conocimiento previo, como lo indica Piaget.	SP: problemática Señalan lo que este trabajo pretende abordar como <i>problemática</i> .	Reflexión dialógica Forman un discurso con ellas mismas pero también refleja una descripción de los acontecimientos, acompañado de algún intento de justificación, mirando reconocer puntos de vista alternativos en la literatura.
T6_U2 (*) ¹⁴	A través de esto surgen las siguientes preguntas: <ul style="list-style-type: none"> • ¿Por qué los alumnos no descomponen en factores al momento de simplificar una fracción algebraica cuyo numerador es un polinomio? • ¿Por qué los alumnos transfieren el procedimiento de simplificación de una fracción con un monomio al momento de simplificar una fracción algebraica con polinomios no contemplando la diferencia? 	SP: problemática Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.	Escrito Descriptivo Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.
T6_U3	Mediante las preguntas sentimos la necesidad de conocer cuáles eran los errores que los alumnos cometían al momento de simplificar una fracción algebraica, a que se debían, ya que nuestra experiencia nos indica que los alumnos simplifican expresiones algebraicas transfiriendo la simplificación de monomios, perdiendo el	SP: problemática Expresan la motivación que les surgió para abordar la <i>problemática</i> .	Reflexión descriptiva Expresan la motivación que les surgió para abordar la <i>problemática</i> , dando algunas

¹⁴ Esta unidad de análisis es la misma que T1_U1, es decir, no sufrió cambios, por lo que no se consideró parte de la fase T del proceso reflexivo. El mismo tratamiento se realizó para todas aquellas unidades de análisis destacadas con un *.

	significado de lo que representa una expresión algebraica y solo aplicándola en forma mecánica.		justificaciones de ello.
T6_U4	Al reconocer distintos errores hemos notado uno muy común por parte de los alumnos: el de transferir la forma de simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son monomios, a una simplificación de una fracción algebraica cuyo numerador y denominador son polinomios, obviando las reglas de sumas y productos sin importar el orden prioritario de las operaciones de éstas.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar la <i>problemática</i> : un error frecuente de sus alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Señalan errores de sus alumnos observados en su práctica. (mirada retrospectiva de ella)
T6_U5	Por ejemplo, algunos errores típicos cometidos por los alumnos son: 1) $\frac{a^2 + \cancel{b}}{\cancel{b}} = a^2$ Aquí los alumnos simplifican las letras iguales, no consideran la expresión del numerador como una sola. 2) $\frac{2a^2 + \cancel{ab}}{\cancel{ab}} = 2a$ Los alumnos simplifican las letras iguales, consideran en el numerador dos expresiones. 3) $\frac{2a^2 + \cancel{ab}}{\cancel{ab}} = 2$ Nuevamente simplifican las letras iguales y además no consideran el exponente de la letra a , solo tarjan las letras iguales.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar la <i>problemática</i> : errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión dialógica Identifican errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica, aportando algún diálogo sobre el desarrollo que haría el alumno(a).
T6_U6 (*)	Otro error que aparece comúnmente es la ausencia del significado del álgebra, es decir, los alumnos no establecen el vínculo entre la aritmética y la generalización que conlleva el álgebra, por lo cual errores que cometen en aritmética se convierten en una dificultad para el nuevo proceso cognitivo del alumno en particular en el problema de simplificación.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar <i>problemática</i> : errores y dificultades en los alumnos que han evidenciado en su práctica.	Reflexión descriptiva Identifican errores y dificultades, intentando justificar a través de su práctica.
T6_U7 (*)	Por otra lado también, arrastran el concepto de simplificación numérica, lo implementan tal cual.	SP: problemática Señalan razones por la cual abordar la <i>problemática</i> : errores previos de sus	Reflexión descriptiva Señalan errores previos de sus alumnos

		alumnos que han evidenciado en su práctica y las consecuencias de ello.	observados en su práctica (mirada retrospectiva de ella)
T6_U8	Según nuestra experiencia, la importancia del tema radica que los alumnos no le encuentran sentido a una fracción algebraica al momento de simplificarla, lo cual genera un problema para el aprendizaje de la operatoria de expresiones fraccionarias, la resolución de ecuaciones con denominadores fraccionarios, la resolución de problemas, etc.	SP: problemática Expresan la importancia de abordar la <i>problemática</i> , desde una perspectiva personal.	Reflexión descriptiva Expresan la importancia de abordar la <i>problemática</i> , dando algunas justificaciones de ello.
2. Objetivo General del estudio			
T6_U9	Identificar las fracciones algebraicas equivalentes a través de la simplificación de fracciones algebraicas valorando su rol en el cálculo de expresiones numéricas y distinguiendo la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.	SP: problemática, clase en estudio Explicitan el objetivo del estudio, aunque lo plantean desde el objetivo de la <i>clase en estudio</i> , además incorpora los siguientes elementos: <ul style="list-style-type: none"> • Valorar el rol de la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas. • Distinguir la simplificación de expresiones algebraicas con monomios y con binomios. 	Escrito descriptivo Enuncian el objetivo de la <i>clase en estudio</i> .
3.-Estado del Arte			
T6_U10 (*)	En varios documentos de planificación, se establece como un elemento fundamental para el desarrollo del algebra, saber simplificar correctamente. Específicamente podemos señalar: i.-En el artículo: Análisis Didáctico del Lenguaje Algebraico en la Enseñanza Secundaria, (Autores: Martín Socas Robayna, Matías Camacho Machín y Josefa Hernández Domínguez. España) En Socas y as (199.., bibliogr) se establece su implicancia ya que no siendo un tópico principal, se convierte en una dificultad en el aprendizaje del algebra, por lo cual se da relevancia en la propuesta en la formación de profesores de secundaria.	EA Se presenta un artículo en donde se realiza el análisis didáctico del álgebra como contenido global. El artículo no hace mención directa de la simplificación de expresiones algebraicas fraccionarias.	Escrito descriptivo Describe las ideas principales de un artículo.

En este documento se considera el álgebra como una de las partes de la matemática que influyen considerablemente en el aspecto formativo, por su potencia, y generalización y sus métodos, pero su aprendizaje genera grandes dificultades a los alumnos y estas dificultades son de diferente naturaleza, y tienen que ver con la complejidad de los objetos del álgebra, con los procesos del pensamiento algebraico, con el desarrollo cognitivo de los alumnos, con las metodologías utilizadas y con las actitudes afectivas y emocionales de los alumnos hacia el álgebra.

http://dialnet.unirioja.es/servlet/fichero_articulo?codigo=117980&orden=86395

T6_U11 (*)	<p>ii.-El Grupo Comenius de la Universidad de Santiago, en su proyecto Enlaces se plantea como objetivo que el alumno no sólo aprenda procedimientos algorítmicos relativos a la operatoria algebraica, sino que valoren el lenguaje algebraico como una herramienta generalizadora, y se utilicen para modelar situaciones y resolver problemas, para ello y focalizado en la simplificación de expresiones consideran:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Factorización (juego de los factores) • Exploración (equivalencia de fracciones) • Formalización (concepto) • Ejercitación (aplicación) 	<p>EA</p> <p>Se presenta un documento power point en donde muestra la planificación general del tópico de álgebra del segundo medio (14-15 años aproximadamente)</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Describe el objetivo de un archivo power point.</p>
T6_U12 (*)	<p>iii. Dentro de las herramientas tecnológicas para apoyo de este tema se encuentra la Calculadora Wiris que permite comprobar resultados.</p> <p>http://www.wiris.com/demo/es/</p>	<p>EA</p> <p>Es un programa diseñado para trabajar en distintos ámbitos de la matemática.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Presenta la dirección de una herramienta tecnológica para matemática.</p>
T6_U13	<p>iv.-Análisis de una propuesta didáctica sobre la factorización de expresiones polinómicas cuadráticas en educación básica secundaria empleando calculadoras graficadoras y algebraicas.</p>	<p>EA</p> <p>Se presenta un artículo que analiza una propuesta didáctica sobre la</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Describe las ideas principales de un</p>

http://74.125.47.132/search?q=cache:aVUbPCiL9fUJ:emynt.univall.e.edu.co/doc/Resumen_Trabajo_Grado_Ma.Fernanda_Mej%25EDa.doc+didactico+analisis+factorizaci%C3%B3n&cd=1&hl=es&ct=cln&gl=cl

El texto dice como la tecnología ha ayudado al que los alumnos obtengan un aprendizaje más significativo con respecto a la factorización de polinomios, ya que las calculadoras graficadoras y algebraicas tienen incorporado un potente sistema computacional algebraico que realiza rápidamente manipulaciones y cálculos de expresiones algebraicas como factorizar. Además comenta que durante los últimos años en varios países de América, Europa y Asia se han incorporado paulatinamente las NTI a los currículos y aulas de matemática, y se ha ido desarrollando estudios e investigaciones didácticas sobre los efectos de esta incorporación en los procesos de enseñanza, aprendizaje, formación de profesores e innovación curricular y didáctica.

factorización de expresiones algebraicas, empleando calculadoras gráficas. artículo.

T6_U14

v.- Concepciones erróneas en Matemáticas.

Revisión y Evaluación de las investigaciones.

<http://ddd.uab.cat/pub/educar/0211819Xn17p205.pdf>

Este artículo revisa las investigaciones sobre las concepciones erróneas que poseen diez estudiantes de Enseñanza Primaria y Enseñanza Secundaria acerca de diez principales temas del currículum de matemáticas. Manifiesta que los errores más frecuentes que cometen estudiantes al realizar ciertas tareas escolares relacionadas con álgebra son:

- No comprenden que las letras representan números y que el número representado puede tener un único valor o infinitos valores.
- Los alumnos no utilizan o no comprenden o cometen errores en la resolución algebraica de problemas porque no simbolizan ni formalizan los métodos usados al resolver problemas aritméticos.
- Los estudiantes no reconocen expresiones aditivas del tipo n

EA

Se presenta un artículo que analiza las concepciones erróneas en matemáticas, en donde se extrae aquellas relacionadas con álgebra.

Escrito descriptivo

Describen las ideas principales de un artículo, extrayendo aquello relacionado con álgebra.

+ 3 o 2 + a como resultados y tienden a fusionarlas en las formas 3n o 2a.

5.-Evidencias

T6_U15
(*)

Se planteó el siguiente problema en un Liceo técnico Profesional y en un Colegio Científico Humanista Subvencionado de la quinta región de nuestro país.

Pregunta: Considere la siguiente expresión: $\frac{a^2 + b}{b}$ ¿Es posible simplificarla?
 Observa como lo resolvieron dos alumnos:

1) $\frac{a^2 + b}{b}$

Juan lo simplifica indica que no es posible simplificar

Pedro y obtiene como resultado a^2 posible simplificar

¿Quién tiene la razón?

2) Si $a = 2$ y $b = 3$ ¿la fracción resultante es simplificable?

3) ¿Qué puedes decir en relación a tu respuesta anterior?

SP: *problemática*

Se presenta una tarea de enseñanza que apunte a evidenciar la *problemática*.

Escrito descriptivo

Se enuncia una tarea de enseñanza para obtener evidencias sobre *problemática*.

T6_U16

Este problema fue desarrollado por dos 2° Medio, dos 3° Medios y dos y 4° Medios de la Escuela Industrial de Valparaíso equivalente a un total de 162 alumnos.
 De los cuales 111 alumnos respondieron que Pedro tiene la razón, lo que equivale a un 69%

SP: *problemática*

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde su

45 alumnos respondieron que Juan tiene la razón, equivalente a un 28%.

6 alumnos no contestaron (3%)

La siguiente tabla muestra los resultados obtenidos por pregunta

Pregunta	Correcta %	Incorrecta %	Sin respuesta %
1	69%	28%	3%
2	60%	30%	10%
3	20%	17%	63%

experiencia personal.

T6_U17

En la parte numérica del problema, se pudo observar en las respuestas de los alumnos que el error más común fue que primero simplificaban los números iguales antes de resolver la potencia.

Por ejemplo:

$$\frac{2^2 + \cancel{3}}{\cancel{3}} = 4$$

SP: *problemática*

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde su experiencia personal.

T6_U18

El mismo problema fue desarrollado por un curso de 2º, un 3º y un 4º Medio del colegio Alberto Hurtado. Aquí el resultado fue mejorando a medida que el grado del curso aumentaba, esto puede suceder debido a la experiencia, maduración y aplicación del concepto por los alumnos al avanzar en los diferentes niveles.

SP: *problemática*

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde su experiencia personal.

La propuesta

T6_U19

Nuestro interés surge en diseñar una actividad que permita al alumno reflexionar en relación a la simplificación de fracciones algebraicas cuyo numerador y /o denominador sean expresiones polinómicas.

Nos interesaba que a partir de la comparación el alumno visualizara por que una expresión daba el mismo resultado que otra y entregara una hipótesis para luego argumentarla.

SP: *clase en estudio, problemática*

Se plantea el interés en el tipo de diseño de la tarea de enseñanza, el cual se corresponde parcialmente con la *problemática*, ya que incorpora expresiones algebraicas cuyo numerador y/o denominador sean

Reflexión dialógica

Describen el interés que persiguen, pero formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

expresiones poli nómicas. Tampoco se refiere a valorar el rol de la simplificación en el cálculo de expresiones numéricas.

Tarea

Explican sobre la elección del tipo de tarea de enseñanza que diseñarán.

T6_20

En una primera etapa diseñamos ejercicios relacionados con la geometría donde aplicarán el concepto de simplificación, pero nos dimos cuenta que no eran desafiantes para los alumnos dado que se resolvían directamente.

Tarea

Explican sobre la elección del tipo de tarea de enseñanza que diseñarán.

Reflexión dialógica

Describen sobre el diseño de la tarea de enseñanza, formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

Diseño de la Clase

T6_U21

¿Se puede ahorrar cálculos?

En el segundo medio C, la profesora de Matemática escribió la siguiente tabla:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
a	b	$a+b$	$a-b$	$a^2 - b^2$	$\frac{ab}{b}$	$\frac{a+b}{a}$	$\frac{a^2 - b^2}{a-b}$
....						
....						
....						
....						

Luego, empezó a recitar algunos valores para a y b , y pide completar la tabla.

Al cabo de poco tiempo, Aldo, un alumno del curso, dice que ya terminó, el resto de compañeros se encuentran asombrados por la rapidez en los cálculos de su compañero.

La profesora le pregunta *¿Completaste todas las columnas?* y él responde:

“Si completé todas las columnas, pero no fue necesario el cálculo en algunas” ¿A qué columna(s) crees que se refiere Aldo? Explica

SP: problemática, tarea

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Se corresponde con el objetivo planteado para la clase en estudio, relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escribe la tarea de enseñanza para la *clase en estudio*.

Análisis a Priori

T6_U22

Respuesta experta

Se debe descomponer en factores la expresión, es decir, factorizar la fracción algebraica de la columna 8, para luego simplificar con la expresión del denominador y así obtener el mismo resultado de la columna 3.

Es decir:

SP: clase en estudio, tarea

Señalan el desarrollo “ideal” de la tarea de enseñanza par la clase de estudio.

Reflexión dialógica

Redactan la respuesta experta de la tare de enseñanza dando algunas justificaciones de los pasos a seguir, realizando ciertos diálogos entre ellas.

$$\frac{a^2 + b^2}{a - b} = \frac{(a + b)(\cancel{a - b})}{(\cancel{a - b})} = a + b$$

(Columna 8) (columna 3)

También se debe simplificar el numerador con el denominador de la fracción que está en la columna 6 y así lograr el mismo resultado que la columna 1.

$$\frac{ab}{b} = \frac{a \cdot \cancel{b}}{\cancel{b}} = a$$

(columna 6) (columna 1)

Para el alumno es más directa la simplificación de monomios que la de polinomios, pues hay un paso previo que es la factorización.

T6_U23

Conocimientos Involucrados

- **Conocimientos Previos**
 - Concepto de potencia.
 - Operaciones Básicas (suma ,resta, multiplicación y división)
 - Valorización de expresiones algebraicas.
 - Factorización de expresiones algebraicas.
 - Simplificación numérica.
- **Conocimientos Adquiridos**
 - Factorización de expresiones algebraicas.
- **Conocimientos Posteriores**
 - Resolución de ecuaciones con numerador y denominador con expresiones algebraicas.
- **Conocimientos Nuevos**
 - Simplificación de expresiones algebraicas.
 - La equivalencia de expresiones algebraicas.

SP: *clase en estudio, problemática, tarea.*

Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escriben los conocimientos involucrados para la tarea de enseñanza de la *clase en estudio*.

T6_U24	<p>Posibles estrategias para resolver la tarea de enseñanza</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Estrategia numérica: Una primera estrategia seria que los alumnos pueden ir asignando números positivos a las distintas letras , para luego realizar la operación que se indica entre ellas y así darse cuenta cuales son las columnas iguales. ➤ Estrategia algebraica: simplificar las letras que son iguales a las del denominador con lo cual obtendrían columnas iguales , por ejemplo las columnas 2 y 6. Lo mismo pueden realizar con las columnas 1 y 8 ya que pueden transferir el procedimiento del caso anterior. ➤ Factorizar la expresión $a^2 - b^2$ como el producto de una suma por diferencia $(a+b)(a-b)$ para luego simplificar con la expresión que está en el denominador de la fracción $a-b$ y así lograr columnas iguales (3 y 6) 	<p>Tarea</p> <p>Presentan las estrategias posibles de los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta. Plantean aspectos técnicos relacionados con el uso de pizarra, el data. Además, sobre como se llevará a cabo la gestión de la puesta en común en la clase.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Enuncian las estrategias posibles de los alumnos, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellas.</p>
T6_U25	<ul style="list-style-type: none"> ➤ La pizarra debe ser utilizada como una herramienta eficaz para que los alumnos expongan sus estrategias y las discutan con el resto de la clase, es importante que estas queden en todo momento expuestas para retomarlas cuando sea necesario. ➤ Se debe presentar el problema en data de modo que pueda permanecer durante todo el desarrollo de la clase, esto permite que el alumno tenga otra observación del mismo y hacer uso de él en todo momento. 	<p>Tarea</p> <p>Plantean aspectos técnicos en relación al uso de pizarra y de data.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Plantea aspectos técnicos de la gestión de la clase, agregando argumentos que los sustentan.</p>
T6_U26	<p>Dificultades</p> <ul style="list-style-type: none"> ➤ Los alumnos no tienen adquirida la relación entre la descomposición en factores con la simplificación, es decir, el alumno no contempla que una expresión algebraica debe ser expresada como factores para luego eliminar lo común del 	<p>SP: problemática , tarea.</p> <p>Presentan las posibles dificultades que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Enuncian las dificultades posibles de los alumnos.</p>

numerador y el denominador, por ejemplo:

$$\frac{a^2 - b^2}{a + b} = \frac{(a + b)(a - b)}{a + b}$$

- Los alumnos no ven una expresión algebraica como un representante de un número (o de otras variables).
- Los alumnos no consideran que la simplificación puede involucrar la descomposición en factores.

T6_U27	<p>Posibles errores</p> <p>a. El arrastre de la simplificación numérica, es decir, los alumnos simplifican en la adición, sustracción, etc. De fracciones numéricas por sólo establecer elementos comunes en estas.</p> <p>b. Los alumnos transfieren el procedimiento de simplificación de un monomio a polinomios, no contemplando la diferencia entre las operaciones involucradas, puesto que la expresión del numerador de la fracción de la columna 8 es un binomio, es decir, una expresión algebraica compuesta por dos términos.</p>	<p>SP: problemática, tarea</p> <p>Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con problemática.</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Enuncian los errores posibles de los alumnos, con algún intento de justificación.</p>
T6_U28	<p>Tema de investigación: La simplificación de expresiones algebraicas.</p> <p>Nivel: Segundo Medio</p> <p>Título de la Unidad de Aprendizaje: Las Fracciones en Lenguaje Algebraico.</p>	<p>SP: la clase en estudio</p> <p>Presentan aspectos generales de la planificación de la clase.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Redactan los elementos para la planificación.</p>
T6_U29	<p>Objetivo Fundamental:</p> <p>Los alumnos y alumnas expresan en forma algebraica categorías de números enteros y fraccionarios valorando el nivel de generalización que permite el lenguaje algebraico y su poder de síntesis.</p>	<p>SP: problemática, clase en estudio</p> <p>Identifican el objetivo fundamental de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>, extraído de los planes y programas del Mineduc.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el objetivo de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
T6_U30	<p>Aprendizaje esperado:</p> <p>Utilicen la descomposición en factores en un cociente, de modo que al simplificar se obtenga una expresión equivalente.</p>	<p>SP: problemática, clase en estudio</p> <p>Expresan el aprendizaje esperado de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian el aprendizaje esperado de la <i>clase en</i></p>

		<i>problemática</i> , extraído de los planes y programas de Mineduc.	<i>estudio</i> , relacionada con la <i>problemática</i> .
T6_U31	<p>Institucionalización del Saber:</p> <p>Al factorizar las expresiones algebraicas que aparecen en una fracción algebraicas, éstas se puede simplificar obteniendo expresiones algebraicas equivalentes.</p>	<p>SP: <i>la clase en estudio, problemática</i></p> <p>Presentan la institucionalización considerando parte del objetivo de la clase en estudio (relacionada con la <i>problemática</i>), ya que no contempla:</p> <ul style="list-style-type: none"> - valorar su rol en el cálculo de expresiones numéricas. - distinguir la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios. - valorar su rol en el cálculo de expresiones numéricas. - distinguir la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios. 	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncian la institucionalización del saber.</p>
T6_U32	<p>Evaluación:</p> <p>¿Cuál o Cuáles de las siguientes expresiones son equivalentes en los Reales positivos? Fundamente su respuesta.</p> <p>a) $\frac{xy}{y}$ y yx</p> <p>b) $\frac{3mn}{mn}$ y $3n$</p> <p>c) $\frac{x-y}{x+y}$ y $x-y$</p>	<p>SP: <i>problemática, tarea</i></p> <p>Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicios. Se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase, ya que no contempla la valoración de su rol en el cálculo de expresiones numéricas.</p>	<p>Escrito descriptivo</p> <p>Redactan el instrumento de evaluación para la clase.</p>

T6_U33	Gestión Pedagógica	Tarea	Reflexión crítica
	<ul style="list-style-type: none"> • El profesor logra un clima propicio para enfrentar la actividad, ya que mantiene la atención y el interés de sus alumnos. En general logra que estos se sientan interesados en desarrollar el problema, esto se demuestra en la observación directa del trabajo de estos. • El tiempo utilizado para la actividad corresponde al tiempo planificado en el análisis a priori. Se utiliza los tres momentos de la clase. • Se presentó una dificultad por el fondo de la presentación del documento digitalizado. Se recomienda un fondo blanco, que permitiría escribir sobre él, de manera que cuando los alumnos vayan a la pizarra ocupen el cuadro digitalizado, para anotar sus resultados. Además se entregan guías individuales para la manipulación del problema por el estudiante. • Al iniciar la clase, la profesora lee el problema expuesto en forma general, pero al no entregar inmediatamente las guías individuales, provoca una dificultad en la comprensión de este. • Se recomienda dar la palabra a los alumnos en relación a la lectura del problema sin intervención de la profesora, de modo de lograr un mayor protagonismo del alumno. • La profesora presenta una ansiedad controlada y normal, esto puede ser debido a que es la profesora titular del sector de aprendizaje y conoce a sus alumnos. • Se escogen aleatoriamente a los alumnos para exponer sus estrategias lo que provoca la repetición de ellas, en resumen sólo hay dos propuestas. • Se realiza una evaluación formativa en dos formatos, sin previa planificación de los ejercicios, no estableciendo la equivalencia en el grado de dificultad. 	<p>Presentan fortalezas y dificultades que tuvo lugar la clase en relación a aspectos pedagógicos, como el uso de recursos y el tiempo, planteando sugerencias para abordar en una próxima ocasión. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, identifican la tarea de enseñanza del tipo problema.</p>	<p>Describen las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza protesta, formando un diálogo interno sobre ello, pero además, se evidencian elementos sociales, tales como el trabajo colaborativo, preocupación por el interés de los alumnos y de un mayor protagonismo de ellos.</p>

-
- La forma de evaluar fue colaborativa, obteniendo la retroalimentación en forma inmediata, las respuestas fueron dadas por la profesora.

T6_U34

II Didáctica

- La profesora lee el enunciado del problema y al observar que sus alumnos no entienden totalmente el enunciado, vuelve a explicar dando posibles estrategias, se recomienda dar la palabra a los alumnos en relación a la lectura de éste sin intervención de la profesora, de modo de dar un mayor protagonismo al alumno en la comprensión de este.
- La profesora tiene un rol protagónico en la clase, guiando demasiado las posibles estrategias que deben seguir los alumnos, es importante que ellos tengan los tiempos necesarios para poner en práctica su experimentación, es decir, se logra a

SP: problemática , tarea

Dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos y el tratamiento que hubo de ellas por parte del docente, planteando sugerencias para abordar las dificultades observadas al respecto. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento. Manifiestan respecto a las estrategias

Reflexión crítica

Enuncian elementos didácticos observados en la clase, describiendo las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, evidenciando un interés social, tales como preocupación por la importancia de indagar en los propios alumnos

cabalidad la fase de acción según Brousseau.

- La profesora realiza la formalización pero, se sugiere indagar en los propios alumnos y a partir de sus opiniones, precisar el conocimiento.
- No se contempló en el análisis a priori la posibilidad de que los valores tomados fueran números consecutivos, por ejemplo, al reemplazar por los números 1, 2, 3 se dan otras relaciones entre las columnas que se aleja de la pretensión del educador.
- Se dejan en pizarra las evidencias de las estrategias utilizadas por los alumnos, lo que permite que los alumnos puedan visualizar dichas estrategias para apoyar el análisis en la puesta en común.
- Las estrategias realizadas por los estudiantes se pueden agrupar en dos. Una de ellas es reemplazar por valores enteros las variables a y b . La otra es aplicar la simplificación considerando la factorización de las expresiones algebraicas tanto del numerador como del denominador.
- Dentro de las dificultades consideradas en el análisis a priori no se contempló la dificultad de que sólo tomaran números consecutivos, lo que llevó a otras igualdades que no tienen ninguna relación con la equivalencia de las fracciones algebraicas.

de los alumnos, que hay algunas que no se vinculan con la temática de la clase en estudio relacionada con la *problemática*. en la generación de los nuevos conocimientos.

T6_U35	<p>III Matemático</p> <ul style="list-style-type: none"> • En las expresiones presentadas, se utilizan algunos paréntesis en forma innecesaria, lo que puede provocar alguna interpretación errónea por el estudiante, esto corresponde a la expresión de la columna tres. • El formato del problema, presenta dos tipos de letra, esto puede incidir en la comprensión por parte del estudiante, dado que en rigor no representa la misma variable, es necesario corregir esta situación para una próxima aplicación. • La generación de conocimiento se da en forma espontánea cuando un estudiante afirma que las expresiones de las respectivas columnas son equivalentes a partir de simplificar una expresión fraccionaria. • Los alumnos al valorizar la tabla, sólo contemplan números naturales, esto puede ocurrir por la facilidad del cálculo o por no considerar números negativos. • La profesora considera para la evaluación formativa, ejercicios de otro tipo de factorización como, por ejemplo, $\frac{x^2 - y^2}{2x - 2y}$ a pesar de ello los alumnos son capaces de desarrollar el ejercicio. • Se observa un porcentaje de alumnos, que considera números consecutivos, lo cual establece otro tipo de relación en la tabla, como, por ejemplo, en las columnas tres, cinco y siete se obtiene el mismo resultado y están muy lejos de la equivalencia de fracciones algebraicas 	<p>SP: problemática, tarea</p> <p>Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes. Presentan razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, que hay generación de conocimientos (no se escribe sobre alguna aplicación de técnicas rutinarias). En ella manifiestan respecto al instrumento de evaluación y a las estrategias de los alumnos, que se vinculan parcialmente con la temática de la clase en estudio relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>Reflexión dialógica</p> <p>Presentan aspectos matemáticos de la clase, las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, con una mirada retrospectiva, justificando en ocasiones y formando un diálogo entre ellas.</p>
Confrontación			
T6_U36	<ol style="list-style-type: none"> 1. Se sugiere que desde un principio los alumnos tengan la guía individual en su poder. 2. Se sugiere observar las estrategias sin intervenir, para escoger mayor diversidad. 3. Se recomienda extraer las respuestas expertas de los propios alumnos. 	<p>Tarea</p> <p>Plantean sugerencias para una nueva clase en estudio en relación de las estrategias en las tareas de enseñanza y el uso de recursos par su realización. Evidencian que la tarea de enseñanza tiene más de una</p>	<p>Reflexión descriptiva</p> <p>Plantean sugerencias para una nueva aplicación de la clase, intentando dar justificaciones en alguno</p>

estrategia de resolución y que la de los casos.
respuesta se puede generar a partir de
los estudiantes.

Anexo 2

Categorías por informe en cada proceso reflexivo

1. Proceso reflexivo 1: la problemática.

Tabla 1

Registro del dominio: situación problema

Informe 1:	Informe 2	Informe 3	Informe 4	Informe 5	Informe 6
Situación problema: . Preguntas de estudio. . Motivación. . Fundamentación personal. . Instrumento exploratorio. . Estado del arte.	Diseño de tareas de enseñanza.	Diseño de la clase Tiempo, objetivos, tareas, aprendizajes esperados, etc.	Análisis a priori de la clase,	Análisis grupal de la clase.	Informe final: . Recopilación. . Reformulación informes anteriores. . Análisis de la clase. (en el Seminario)
Fase A L	L	L	L	a	Fase a C T
SP: <i>problemática</i> <i>(Fase A) (T1_U1,</i>					

T1_U2)

Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.

Escrito Descriptivo:

Expresan en términos de preguntas la cuestión que se plantean.

SP: *problemática*
(Fase A) (T1_U3)

Señalan lo que este trabajo pretende abordar como problemática.

Escrito descriptivo

Describe el objetivo del estudio.

SP: *problemática*
(Fase C) (T6_U1)

Señalan lo que este trabajo pretende abordar como *problemática*.

Reflexión dialógica

Forma un discurso con ellas mismas, pero también refleja una descripción de los acontecimientos acompañado de algún intento de justificación, mirando reconocer puntos de vista alternativos en la

literatura.

SP: *problemática*
(Fase C (T6_U3))

Expresan la
motivación para
abordar la
problemática.

**Reflexión
descriptiva**

Expresan en la
motivación para
abordar la
problemática, dando
algunas
justificaciones de
ello.

SP: *problemática*
(Fase A) (T1_U5)

Señalan razones por la
cual abordar la
problemática: errores
previos de sus
alumnos que han
evidenciado en su
práctica y las
consecuencias de ello.

Reflexión

descriptiva

Señalan errores previos de sus alumnos observados en su práctica (mirada retrospectiva de ella)

SP: *problemática (Fase A)* (T1_U6)

Especifican una razón por la cual abordar la problemática: una dificultad en los alumnos que han evidenciado en su práctica.

Reflexión descriptiva

Identifican una dificultad en los alumnos desde una mirada retrospectiva de su práctica.

SP: *problemática (Fase A)* (T1_U7)

Especifican razones por la cual abordar la problemática: un error de los alumnos que han evidenciado en su práctica.

SP: *problemática (Fase a)* (T6_U4)

Señalan razones por la cual abordar la *problemática*: un error frecuente de sus alumnos que han evidenciado en su

Reflexión descriptiva

Identifican un error de los alumnos, justificando a través de su práctica.

SP: *problemática (Fase A)* (T1_U8, T1_U12)

Señalan razones por la cual abordar la problemática: errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.

Reflexión descriptiva

Identifican errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.

SP: *problemática (Fase A)* (T1_U9)

práctica.

Reflexión descriptiva

Señalan errores de sus alumnos observados en su práctica (mirada retrospectiva de ella)

SP: *problemática (Fase a)* (T6_U5)

Señalan razones por la cual abordar la problemática: errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica.

Reflexión dialógica

Identifican errores de los alumnos que han evidenciado en su práctica, aportando algún diálogo sobre el desarrollo que haría el alumno(a).

Señalan razones por la cual abordar la problemática: errores y dificultades en los alumnos que han evidenciado en su práctica.

**Reflexión
descriptiva**

Identifican errores y dificultades, intentando justificar a través de su práctica.

SP: *problemática*
(Fase A) (T1_U10)

Señalan razones de tipo afectivo por la cual abordar la problemática, las cuales han evidenciado en su práctica.

**Reflexión
descriptiva**

Identifican una dificultad, justificada a través de su práctica, realizando una mirada

retrospectiva de ella.

SP: *problemática*
(Fase L) (T1_U11)

Señalan la importancia que tiene el estudio de *la problemática*.

Reflexión descriptiva

Escriben sobre la importancia, intentando dar alguna razón de tipo ACTITUDINAL que la justifique.

SP: *problemática*
(Fase A) (T1_U13)

Señalan lo que este trabajo pretende abordar como *problemática*.

Escrito descriptivo

Describe el objetivo

SP: *problemática*
(Fase a) (T6_U8)

Expresan la importancia de abordar *la problemática*, desde una perspectiva personal.

Reflexión descriptiva

Expresan la importancia de abordar *la problemática*, dando algunas justificaciones de ello de tipo CONCEPTUAL.

SP: *problemática*
(Fase T) (T6_U9)

Se explicita el objetivo del estudio, aunque lo plantean desde el objetivo de *la clase en estudio*, además incorpora los siguientes elementos:

- Valorar el rol de

del estudio.

la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas.

- Distinguir la simplificación de expresiones algebraicas con monomios y con binomios.

Escrito descriptivo

Enuncia el objetivo de la clase.

SP: *la problemática (Fase L) (T1_U18)*

Se presenta una tarea de enseñanza que apunte a evidenciar la problemática para trabajarla con alumnos.

Escrito descriptivo

Se enuncia una tarea de enseñanza aplicada para obtener

SP: *problemática*

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde

evidencias sobre la problemática.

su experiencia personal.

SP: *la problemática (Fase L)* (T1_U19, T1_22)

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio, argumentando el porqué de los errores cometidos por sus alumnos.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio desde su experiencia personal.

SP: *problemática (Fase L)* (T1_U20)

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.

Reflexión

SP: *problemática*

(T6_U16, T6_U18)

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde su experiencia personal.

descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio desde su experiencia personal.

SP: *problemática (Fase L)* (T1_U21)

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el “instrumento exploratorio”.

Escrito descriptivo

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

SP: *problemática*

(T6_U17)

Señalan y justifican los resultados obtenidos en el instrumento exploratorio.

Reflexión descriptiva

Señalan y justifican los resultados obtenidos en la “instrumento exploratorio” desde su experiencia personal.

SP: *problemática*

(Fase a) (T6_U19)

Se plantea el objetivo de la clase, el cual se corresponde

parcialmente con la *problemática*, ya que incorpora expresiones algebraicas cuyo numerador y/o denominador sean expresiones polinómicas. Tampoco se refiere a valorar el rol de la simplificación en el cálculo de expresiones numéricas.

Reflexión dialógica

Describen el objetivo que persiguen, pero formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

SP: *problemática*
(T2_U1)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Parcialmente se corresponde con el objetivo de la clase en

SP: *problemática*
(T3_U1, T3_U6)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde parcialmente con el

SP: *problemática*
(T4_U1)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde con el nuevo objetivo

SP: *problemática*
(Fase a) (T6_U21)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Se corresponde con el objetivo planteado

estudio (relacionada con la problemática), al considerar otro tipo de expresiones algebraicas, en donde el numerador y denominador son monomios.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas de enseñanza posibles para llevar al aula.

nuevo objetivo planteado para la *clase en estudio* (relacionada con la problemática), al considerar una identidad.

Escrito descriptivo

Escriben el tema y la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* que se relaciona con la *problemática*.

planteado para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Se enuncia la tarea de enseñanza que pretenden llevar al aula.

para la clase en estudio, relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escribe la tarea de enseñanza para la clase.

SP: *problemática*
(T2_U2)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. No se corresponde con el objetivo de la clase en estudio (relacionada con la problemática), al considerar otras expresiones algebraicas cuyo denominador es un número.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas posibles para

llevar al aula.

SP: *problemática*

(T2_U3)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Parcialmente se corresponden con el objetivo de la clase en estudio (relacionada con la problemática), al tomar otro tipo de expresiones algebraicas, donde se tiene que:

- numerador y denominador son monomios.
- denominador es binomio.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas posibles para llevar al aula.

SP: *problemática*

(T3_U7)

Al presentar la

SP: *clase en estudio*

(Fase T) (T6_U31)

Presentan la

institucionalización de la *clase en estudio* (relacionada con la *problemática*), ésta se centra en la obtención de expresiones más simple y fácil de tratar a partir de la simplificación.

Reflexión descriptiva

Escriben el momento de la institucionalización del saber justificando en algunos casos.

institucionalización considerando parte del objetivo de la clase en estudio relacionada con la *problemática*), ya que no contempla:

- valorar su rol en el cálculo de expresiones numéricas.

- distinguir la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.

- valorar su rol en el cálculo de expresiones numéricas.

- distinguir la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.

Escrito descriptivo

Enuncian la institucionalización del saber.

SP: *problemática*
(T4_U3, T4_U4)

Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escriben los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

SP: *clase en estudio, problemática, tarea.*

(Fase a) (T4_U23)

Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*, detallando algunos de ellos.

Escrito descriptivo

Escriben los conocimientos involucrados para la tarea de enseñanza de la *clase en estudio*.

SP: *problemática*
(T3_U4)

SP: *problemática y clase en estudio*

Identifican el objetivo fundamental de la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escriben el objetivo de la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

(Fase a) (T6_U29)

Identifican el objetivo fundamental de la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*, extraído de los planes y programas del Mineduc.

Escrito descriptivo

Escriben el objetivo de la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

SP: problemática

(T3_U5)

Expresan el aprendizaje esperado de la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Enuncian el aprendizaje esperado de la *clase en estudio*, relacionada con la *problemática*

SP: problemática

(T4_U6)

Presentan las posibles dificultades que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la problemática.

Escrito descriptivo

Enuncian las posibles dificultades de los alumnos para la clase en estudio relacionada con la problemática.

SP: problemática, tarea

(T6_U26)

Presentan las posibles dificultades que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la *problemática*.

Reflexión descriptiva

Enuncian las dificultades posibles de los alumnos.

SP: problemática

(T4_U7)

Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la problemática.

SP: problemática

(Fase C) (T6_U27)

Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la clase en estudio relacionada con la problemática.

Escrito descriptivo

Enuncian los errores posibles de los alumnos para la clase en estudio relacionada con la problemática.

Reflexión descriptiva

Enuncian los errores posibles de los alumnos, con algún intento de justificación.

SP: problemática

(T4_U8)

Plantean un “conocimiento relevante” para la clase en estudio (relacionada con la problemática) respecto a las expresiones algebraicas: las restricciones.

Reflexión descriptiva

Plantean un conocimiento que consideran “relevante” para la clase en estudio relacionada con la problemática. El cual surge desde una mirada retrospectiva de su

 práctica.

SP: *problemática*
(T4_U9)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Este se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase en estudio (relacionada con la *problemática*), ya que considera una identidad.

Escrito descriptivo

Enuncian el instrumento de evaluación que pretende llevar al aula.

SP: *problemática*

(Fase T) (T6_U32)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase, ya que no contempla la valoración de su rol en el cálculo de expresiones numéricas.

Escrito descriptivo

Redactan el instrumento de evaluación para la clase.

SP: *problemática*

(Fase C) (T6_U34)

Dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos y el tratamiento que hubo

de ellas por parte del docente, planteando sugerencias para abordar las dificultades observadas al respecto. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento.

Manifiestan respecto a las estrategias de los alumnos, que hay algunas que no se vinculan con la temática de la clase en estudio relacionada con la problemática.

Reflexión crítica

Enuncian elementos didácticos observados en la clase, describiendo las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta,

evidenciando un interés social, tales como preocupación por la importancia de indagar en los propios alumnos en la generación de los nuevos conocimientos.

SP: *problemática* (T5_U3)

Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes. Manifiestan que hay estrategias de los alumnos que no se vinculan con la temática de la clase en estudio relacionada con la problemática.

Reflexión dialógica

Presentan aspectos

SP: *problemática* (Fase C) (T6_U35)

Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes. Presentan razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, que hay generación de conocimientos (no se escribe sobre alguna aplicación de técnicas rutinarias).

matemáticos de la clase, con una mirada retrospectiva. En ella manifiestan respecto al instrumento de evaluación y a las estrategias de los alumnos, que se vinculan parcialmente con la temática de la clase en estudio relacionada con la *problemática*.

Reflexión dialógica

Presentan aspectos matemáticos de la clase, las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, con una mirada retrospectiva, justificando en ocasiones y formando un diálogo entre ellas.

Escrito descriptivo:	Escrito descriptivo:	Escrito descriptivo:	Escrito descriptivo: 5	Reflexión dialógica:	Escrito descriptivo:
<i>Fase A:</i> T1_U1, T1_U2, T1_U, T1_U13	T2_U1, T2_U2, T2_U3.	T3_U1, T3_U5, T3_U9.	T3_U4, T3_U6, T4_U1, T4_U4, T4_U7	T4_U3, T4_U6, T5_U3	<i>Fase a:</i> T6_U21, T6_U23, T6_U29.
<i>Fase L:</i>					

T1_U18, T1_U21

Fase C:

T6_U13, T6_U14

Fase T:

T6_U9, T6_U31,
T6_U32

Reflexión descriptiva:

Fase A:

T1_U3, T1_U6,
T1_U7, T1_U8,
T1_U9, T1_U10,
T1_U12.

Reflexión descriptiva:

T3_U7

Reflexión descriptiva:

T4_U8

Reflexión
descriptiva:

Fase a:

T6_U4, T6_U8

Fase C:

T6_U3, T3_U26,
T6_U27, T6_U34

Reflexión dialógica:

Fase a:

T6_U5, T6_U19

Fase C:

T6_U1, T6_U35

Tabla 2

Registro del dominio: Estado del Arte

Informe 1	Informe 6
Fase a	Fase C
<p>EA (T1_U15) Se presenta un artículo en donde se realiza el análisis didáctico del álgebra como contenido global. El artículo no hace mención directa a la simplificación de expresiones algebraicas.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo Describe las ideas principales de un artículo</p>	
<p>EA (T1_U16) Se presenta un documento power point en donde muestra la planificación general del tópico de álgebra del segundo medio (14-15 años aproximadamente)</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo Describe el objetivo de un archivo power point.</p>	
<p>EA (T1_U17) Es un programa diseñado para trabajar en distintos ámbitos de la matemática.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo Presenta la dirección de una herramienta tecnológica para matemática.</p>	<p>EA (Fase C) T6_U13 Se presenta un artículo que analiza una propuesta didáctica sobre la factorización de expresiones algebraicas, empleando calculadoras gráficas.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo</p>

	Describe las ideas principales de un artículo.
	EA (Fase C) T6_U13 Se presenta un artículo que analiza las concepciones erróneas en matemáticas, en donde se extrae aquellas relacionadas con álgebra.
	Escrito descriptivo Describen las ideas principales de un artículo, extrayendo aquello relacionado con álgebra.
Escrito descriptivo: <i>Fase a:</i> T1_U15, T1_U16, T1_U17	Escrito descriptivo: <i>Fase C:</i> T6_U13, T6_U14

2. Proceso reflexivo 2: la clase en estudio

Tabla 3

Registro del dominio: situación problema

Informe 1	Informe 3	Informe 6
Situación problema	Planificación de la clase	Informe final
<ul style="list-style-type: none"> . Preguntas de estudio. . Motivación. . Fundamentación personal. . Instrumento exploratorio. . Estado del arte. 	<p>Tiempo, objetivos, tareas, aprendizajes esperados, etc.</p>	<ul style="list-style-type: none"> . Recopilación. . Reformulación informes anteriores. . Análisis de la clase (del Seminario)

Fase A	Fase A	Fase T
<p>SP: <i>clase en estudio</i></p> <p>T1_U4, T1_U14</p> <p>Señalan un segundo objetivo de trabajo: Establecer estrategias para abordar <i>la problemática</i>.</p> <hr/> <p>Reflexión descriptiva</p> <p>Luego de describir la <i>problemática</i>, hay un intento por establecer acciones posibles para su mejora (estrategias), <i>clase en estudio</i>, intentado dar justificaciones de ello.</p>	<p>SP: <i>clase en estudio</i></p> <p>T3_U2</p> <p>El objetivo de la clase se modifica: que los alumnos transformen expresiones algebraicas a su forma reducida.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo:</p> <p>Escriben el aprendizaje esperado de la clase según la propuesta que presenta.</p>	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i> (T6_U9)</p> <p>Se explicita el objetivo del estudio, aunque lo plantean desde el objetivo de la <i>clase en estudio</i>, además incorpora los siguientes elementos:</p> <ul style="list-style-type: none"> - Valorar el rol de la simplificación de expresiones algebraicas en el cálculo de expresiones numéricas. - Distinguir la simplificación de expresiones algebraicas con monomios y con binomios. <hr/> <p>Escrito descriptivo</p> <p>Enuncia el objetivo de la clase.</p>
	<p>SP: <i>clase en estudio</i> (T3_U4)</p> <p>Identifican el objetivo fundamental de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el objetivo de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i> (T6_U29)</p> <p>Identifican el objetivo fundamental de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>, extraído de los planes y programas del Mineduc.</p> <hr/> <p>Escrito descriptivo</p> <p>Escriben el objetivo de la <i>clase en estudio</i> relacionada con la <i>problemática</i>.</p>
	<p>SP: <i>problemática, clase en estudio</i></p> <p>T3_U5</p> <p>Expresan el aprendizaje esperado de</p>	

la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Enuncian el aprendizaje esperado de la *clase en estudio*, relacionada con la *problemática*.

SP: clase en estudio (T3_U7)

El objetivo de la clase se modifica, considerando la obtención de expresiones más simple y fácil de tratar a partir de la simplificación.

Escrito descriptivo:

Describen el momento de la puesta en común.

SP: clase en estudio (T6_U19)

Se plantea el objetivo de la clase, el cual se corresponde parcialmente con la *problemática*, ya que incorpora expresiones algebraicas cuyo numerador y/o denominador sean expresiones polinómicas. Tampoco se refiere a valorar el rol de la simplificación en el cálculo de expresiones numéricas.

Reflexión dialógica

Describen el objetivo que persiguen, pero formando un discurso con ellas mismas sobre el objetivo planteado y como abordarlo.

SP: la clase en estudio (T6_U31)

La institucionalización considera parte del objetivo de la clase, ya que no contempla:

- valorar su rol en el cálculo de expresiones numéricas.
- distinguir la diferencia en la simplificación de fracciones algebraicas con monomios de aquellas con polinomios.

Escrito descriptivo

Redactan los elementos para la planificación.

Reflexión descriptiva: T1_U4, T1_U14	Escrito descriptivo: T3_U2, T3_U4, T3_U5, T3_U7	Escrito descriptivo: T6_U9, T6_U29, T6_U31 Reflexión dialógica: T6_U19
---	---	--

Tabla 4

Registro del dominio: Tareas

Informe 2	Informe 3	Informe 4	Informe 5	Informe 6
	Planificación de la clase			(Informe final)
Diseño de tareas de enseñanza.	Tiempo, objetivos, tareas, aprendizajes esperados, etc.	Análisis a priori de la clase.	Análisis grupal de la clase.	. Recopilación. . Reformulación informes anteriores. - Análisis de la clase. (del Seminario)
A	A	A	L	a C T
				Tarea (Fase a) (T6_U20) Explican sobre la elección del tipo de tarea de enseñanza que diseñarán.
				Reflexión dialógica Describen la elección de la tarea de enseñanza, formando un discurso con

ellas mismas.

Tarea (T2_U1)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Parcialmente se corresponde con el objetivo de la clase, al considerar otro tipo de expresiones algebraicas, en donde el numerador y denominador son monomios.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas posibles para llevar al aula.

Tarea (T2_U1)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. No se corresponde con el objetivo de la clase, al considerar otras expresiones algebraicas cuyo denominador es un número.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas posibles para llevar al aula.

Tarea (T3_U1, T3_U6)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo planteado, ya que considera una identidad.

Escrito descriptivo

Enuncian la tarea de enseñanza que pretenden llevar al aula.

Tarea (T4_U1)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Esta se corresponde con el objetivo planteado.

Escrito descriptivo

Se enuncia la tarea de enseñanza que pretenden llevar al aula.

Tarea (Fase T) (T6_U21)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo problema. Se corresponde con el objetivo planteado para la *clase en estudio*.

Escrito descriptivo

Escribe la tarea de enseñanza para la *clase en estudio*.

Tarea (T2_U3)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio.

Parcialmente se corresponden con el objetivo de la clase, al tomar otro tipo de expresiones algebraicas, donde se tiene que:

○ numerador y denominador son monomios.

○ denominador es binomio.

Escrito descriptivo

Enuncian una de las tareas posibles para llevar al aula.

Tarea (T3_U8)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio.

Escrito descriptivo

Enuncian el instrumento de evaluación que pretende llevar al aula.

Tarea (Fase T) (T6_U32)

Se presenta una tarea de enseñanza de tipo ejercicio. Se corresponde parcialmente con el nuevo objetivo de la clase, ya que no contempla la valoración de su rol en el cálculo de expresiones numéricas.

Escrito descriptivo

Redactan el instrumento de evaluación para la clase.

SP: *clase en estudio, tarea* (T4_U2)

Señalan el desarrollo “ideal” de la tarea de enseñanza para la clase de estudio.

Escrito descriptivo

Redactan la respuesta experta de la tare de enseñanza.

SP: *clase en estudio, tarea*

(Fase a) (T6_U22)

Señalan el desarrollo “ideal” de la tarea de enseñanza par la clase de estudio.

Reflexión dialógica

Redactan la respuesta experta de la tare de enseñanza dando algunas justificaciones de los pasos a seguir, realizando ciertos diálogos entre ellas.

SP: *clase en estudio, problemática, tarea.*

(T4_U3, T4_U4)

Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escriben los conocimientos matemáticos involucrados en la

SP: *clase en estudio, problemática, tarea.*

(Fase T) (T6_U23)

Expresan los conocimientos matemáticos involucrados en la tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Escrito descriptivo

Escriben los conocimientos involucrados para la tarea de enseñanza de la *clase en estudio*.

tarea de enseñanza para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Tarea (T4_U5)

Presentan las estrategias posibles de los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.

Escrito descriptivo

Enuncian las estrategias posibles de los alumnos.

Tarea (Fase a) (T6_U24)

Presentan las estrategias posibles de los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.

Reflexión descriptiva

Enuncian las estrategias posibles de los alumnos, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellas.

Tarea (T4_U6)

Presentan las posibles dificultades que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.

Escrito descriptivo

Enuncian las estrategias posibles de los alumnos.

SP: *problemática* , tarea (T6_U26)

Presentan las posibles dificultades que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta para la *clase en estudio* relacionada con la *problemática*.

Reflexión descriptiva

Enuncian las dificultades posibles de los alumnos.

Tarea (Fase a) (T6_U25)

Plantean aspectos técnicos relacionados con el uso de pizarra, el uso de proyector. Además, sobre como se llevará a cabo la gestión de la puesta en común en la clase sobre la tarea de enseñanza propuesta.

Reflexión descriptiva

Plantea aspectos técnicos como de gestión de la clase, agregando argumentos que los sustentan.

Tarea (T4_U7)

Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.

Escrito descriptivo

Enuncian los errores posibles de los alumnos.

Tarea (Fase a) (T6_U27)

Presentan los posibles errores que podrían tener los alumnos al abordar la tarea de enseñanza propuesta.

Reflexión descriptiva

Enuncian los errores posibles de los alumnos, con algún intento de justificación.

Tarea (T5_U1)

Presentan fortalezas y dificultades que tuvo lugar la clase en relación a aspectos pedagógicos,

Tarea (Fase a) (T6_U33)

Presentan fortalezas y dificultades que tuvo lugar la clase en relación a aspectos pedagógicos, como el uso de recursos y el tiempo, planteando

como el uso de recursos y el tiempo para el tratamiento de las tareas propuesta para la clase, evidenciando que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento.

Reflexión dialógica

Se evidencian elementos pedagógicos de la clase, describen las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, con una mirada retrospectiva de la práctica y formando un diálogo interno sobre ello.

sugerencias para abordar en una próxima ocasión. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, identifican la tarea de enseñanza del tipo problema.

Reflexión crítica

Describen las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza protesta, formando un diálogo interno sobre ello, pero además, se evidencian elementos sociales, tales como el trabajo colaborativo, preocupación por el interés de los alumnos y de un mayor protagonismo de ellos.

Tarea (T5_U2)

Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren indagar en los alumnos para precisar el conocimiento. Dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos

Tarea (Fase a) (T6_U34)

Dirigen la atención a las estrategias utilizadas por los alumnos y el tratamiento que hubo de ellas por parte del docente, planteando sugerencias para abordar las dificultades observadas al respecto. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, sugieren

y el tratamiento que hubo de ellas por parte del docente. indagar en los alumnos para precisar el conocimiento

Reflexión crítica

Reflexión crítica

Evidencia sobre el tratamiento de las estrategias en la tarea de enseñanza dada, agregando algunos fundamentos retrospectivos sobre ellos y dando importancia a la observación de todos los estudiantes.

Enuncian elementos didácticos observados en la clase, describiendo las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, evidenciando un interés social, tales como preocupación por la importancia del protagonismo del alumno en la generación de los nuevos conocimientos.

Tarea (T5_U3)

Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por los estudiantes.

Tarea (Fase a) (T6_U35)

Se plantean elementos matemáticos que las profesoras observaron de la clase, como el planteamiento de la tarea de enseñanza y la forma de abordarla por las y los estudiantes. Presentan razones o consecuencias que puedan surgir a partir de lo anterior. Evidencian que hubo más de una estrategia de resolución, que hay generación de conocimientos (no se escribe sobre alguna aplicación de técnicas rutinarias)

Reflexión descriptiva

Presentan aspectos matemáticos de la clase, con una mirada retrospectiva.

Reflexión dialógica

Presentan aspectos matemáticos de la clase, las estrategias usadas por los alumnos en la tarea de enseñanza propuesta, con una mirada retrospectiva, justificando en ocasiones y formando un diálogo entre ellas.

Tarea (Fase C) (T6_U36)

Plantean sugerencias para una nueva aplicación de la clase en relación de las estrategias y el uso de recursos. Evidencian que la tarea de enseñanza tiene más de una estrategia de resolución, y que la respuesta se puede generar a partir de los estudiantes.

Reflexión descriptiva

Plantean sugerencias para una nueva aplicación de la clase, intentando dar justificaciones en alguno de los casos.

Escrito descriptivo:
T2_U1, T2_U2, T2_U3

Escrito descriptivo:
T3_U1, T3_U6, T3_U8

Escrito descriptivo:
T4_U1, T4_U2,
T4_U3, T4_U4,
T4_U5, T4_U6,
T4_U7

Reflexión descriptiva:
T5_U3

Escrito descriptivo:
Fase T: T6_U21, T6_23, T6_U32

Reflexión descriptiva:
Fase a: T6_U22, T6_U24, T6_U27
Fase C: T6_U25, T6_U26, T6_U36

Reflexión dialógica:	Reflexión dialógica:
T5_U1	<i>Fase a:</i> T6_U20, T6_U35
Reflexión crítica:	Reflexión crítica:
T5_U2	<i>Fase a:</i> T6_U33, T6_U34

Anexo 3

Elementos del análisis didáctico sobre las expresiones algebraicas

De acuerdo a lo explicitado en el capítulo 2, presentamos a continuación elementos del análisis didáctico relativo a las expresiones algebraicas.

A3.1 Análisis de Contenido

A3.1.1 Categorías del mapa conceptual de las expresiones algebraicas.

Categoría 1: Conceptos, nos referimos en esta categoría a la construcción de las expresiones algebraicas y los objetos matemáticos que están involucrados en ésta, contamos entonces con:

- Números.
- Símbolos de variables. (en forma de letras)
- Símbolos de operaciones.
- Símbolos de agrupamiento (paréntesis, corchetes, etc)

Además, se indica que la combinación de números y variables a través de productos y/ divisiones se obtiene los *términos* de una expresiones algebraicas. Se definen lo que son los coeficientes y los términos semejantes.

Categoría 2: Clasificación de expresiones algebraicas, en esta categorías contamos con:

- Expresiones algebraicas numéricas.
- Expresiones algebraicas racionales.

Tomando en cuenta la cantidad de términos se identifican también:

- Monomios, aquellas que poseen un solo término.
- Binomios, aquellas que poseen dos términos.

- Polinomios, aquella que se genera con la combinación de términos a través de sumas y restas.

Se presentan ejemplos de los dos tipos de expresión algebraica.

Categoría 3: Sistemas de representación de las expresiones algebraicas:

- Sistema de representación simbólica, es la más usual y por excelencia el que identifica a las expresiones algebraicas, combinando símbolos de variables (en forma de letras), números, símbolos de agrupamiento (tales como paréntesis, corchetes) y símbolos de operaciones. Así, por ejemplo, están las expresiones algebraicas:

$$A(a + x) \text{ o bien } \frac{2x^2 + 5}{3xy}$$

- Sistema de representación verbal, que corresponde a la expresión con palabras de operaciones y relaciones de las expresiones anteriores, así, por ejemplo, en: “*el producto de dos números desconocidos, en donde uno de sus factores es la suma de otro número desconocido mas el original*”, o bien simplemente al plantear la proposición “*el doble de un numero aumentado en uno es siempre un número impar*”.

Se presentan ejemplos de cada tipo de sistema de representación.

Categoría 4: Tratamiento de las expresiones algebraicas, nos referimos en este apartado a las diferentes formas de trabajar con las expresiones algebraicas, es decir:

- Evaluar, al tener una expresión algebraica se reemplaza las variables por números conocidos, con los cual al reducir, se obtiene el valor de la expresión algebraica para aquellos números dados.
- Simplificar, búsqueda de expresiones algebraicas equivalentes y reducidas.
- Operar, se refiere a la clausura de las expresiones algebraicas, es decir, si tenemos dos o más expresiones algebraicas, al operarlas, se obtiene otra expresión algebraica.

- Aplicar en otros contextos y/o resolver problemas. Las expresiones algebraicas aparecen en diversos campos: geometría, física, economía, ingeniería, etc. Por ejemplo, el área de una circunferencia en términos de su radio r : $A = 2\pi r^2$ (nótese que aquí ya estamos en otro plano, en la noción de fórmula, la cual contiene a las expresiones algebraicas, pero que evoca usualmente un fenómeno o característica de un objeto).

A3.1.2 Ajuste curricular

En ajuste curricular del Chile, el Ministerio de Educación enlaza las siguientes ideas fundamentales: organización por ejes curriculares o dominios de aprendizaje, acercamiento a estándares internacionales, extender en el tiempo y dar continuidad al trabajo con tópicos centrales, transversalidad del razonamiento matemático, y distinguir con mayor precisión los aprendizajes propios de la formación general y la formación diferenciada humanística científica en 3° y 4° medio, entre otros.

Con este ajuste, el álgebra que se iniciaba antes en octavo básico (14 años aproximadamente), desde el año 2009 se inicia en quinto básico (11 años aproximadamente), mediante la expresión de relaciones generales y abstractas de la aritmética y la medición, que son parte de los aprendizajes de este nivel y anteriores. En el documento sobre los mapas de progresos de aprendizajes de álgebra, el firma que:

“la presencia del eje de álgebra desde 5° Básico en el ajuste curricular propuesto para el sector, no excluye de ninguna manera la observación temprana del desarrollo de habilidades tales como, la identificación de regularidades de los números y figuras geométricas, el reconocimiento de un símbolo como valor desconocido, la interpretación de relaciones y propiedades conocidas de los números descritas en lenguaje simbólico y la justificación de procedimientos. Estas capacidades, tradicionalmente inmersas en los contextos numéricos o geométricos, pueden ser analizadas con una mirada algebraica, constituyéndose de esta forma en valiosos elementos de pre-álgebra que conformarán la base para el desarrollo del pensamiento algebraico futuro.” (Mineduc, 2009a, p. 3)

A3.1.3 Hábitat de las expresiones algebraicas

Por otro lado, es necesario referirse a que las expresiones algebraicas viven junto a otros objetos matemáticos, tales como proposición, igualdad, función, equivalencia. Haremos unos

comentarios al respecto estudiando el lugar o rol que toma la simplificación de expresiones. Para empezar cuando nos referimos a polinomios estamos hablando de la expresión polinómica, la cual lleva a la noción de ecuaciones polinómicas. Esta última noción no se incluye en este mapa, pero eso no significa que no esté relacionada con las expresiones algebraicas, al contrario, es un contenido que se ve más adelante y que requiere de las nociones involucradas directamente con las expresiones algebraicas: en particular si tratamos con ecuaciones de fracciones algebraicas tendremos que manejar a las expresiones algebraicas fraccionarias. De la manera similar, en el mapa están implícitas las proposiciones u otros conceptos, como la noción de expresiones algebraicas equivalentes y por supuesto a la simplificación de ellas. Es importante destacar que a la hora de realizar simplificaciones de expresiones algebraicas fraccionarias se prescinda de las restricciones, debido a la naturaleza de las mismas. Queremos destacar que las expresiones algebraicas fraccionarias (y sus atributos) están y son necesarias para una gama de contenidos matemáticos posteriores a su enseñanza. Ampliamos este análisis en el apartado siguiente examinando la noción de variable, considerando que las matemáticas que un estudiante aborda en el nivel universitario requieren manejar el concepto de variable algebraica como un objeto, ya que este concepto será generalizado para incluir dentro de él nuevas facetas e interpretaciones. (Trigueros, 1999)

Por último, en la categoría 4 del mapa conceptual, sobre simplificación de expresiones algebraicas, o bien en el planteamiento y resolución de problemas que involucren simplificación de expresiones, es necesario que el estudiante recurra a diversas propiedades que caracterizan al cuerpo de los números reales.

A3.1.4 Estudios relacionados

Trigueros (1999) afirma que a nivel universitario, en el Cálculo Diferencial e Integral, la Probabilidad y la Estadística son asignaturas que demandan del estudiante una gran capacidad de abstracción. Los conceptos que las constituyen son complejos y muy estructurados, lo que hace que su comprensión sea imposible si no se sustenta sobre una base muy sólida constituida por las ideas más elementales del álgebra y de la geometría.

La autora, menciona que es particularmente importante el dominio del álgebra, ya que es básica para un buen manejo de las nociones de las matemáticas avanzadas, y es por ello que se le dedica mucho tiempo de instrucción durante la enseñanza secundaria.

Filloy (1999) presentan cómo otras áreas científicas recurren a sistemas simbólicos, en particular del álgebra, para representar diversos modelos explicativos que se dan en esos saberes. El dominio de las partes más abstractas y generales del currículo básico dota a los educandos de un

sistema simbólico que le permite no sólo modelar fenómenos sino también predecir lo que ocurrirá cuando los fenómenos modelados transcurren en el tiempo, o alguna variable evolucione de una manera determinada, etc. Por ello las partes finales del álgebra y otras áreas matemática, tienen “tanta importancia para el futuro de los individuos, así como para la sociedad, que requiere de las competencias en tales temas para poder dominar los fenómenos naturales y progresar en los ámbitos de lo social”. (Filloy, 1999, p. 24)

Para terminar, el tratamiento de expresiones, la solución de problemas y la modelación de situaciones reales mediante el uso del álgebra requieren de una comprensión global y flexible del concepto de variable. Como no sería exagerado decir que, a nivel elemental, el álgebra gira en torno a esta idea. Sin embargo, a pesar de su papel protagónico, este concepto es muy difícil de definir, ya que la variable en el álgebra se presenta con caracterizaciones que varían según el problema en el que ésta está involucrada. (Trigueros, 1999) Estas son algunas de las razones por las cuales hemos querido incluir un apartado especial a este tema matemático que viene a continuación.

A3.1.5 La variable en el álgebra escolar

Las profesoras protagonistas de nuestro estudio se ocuparon de un problema ligado a la enseñanza y aprendizaje de las expresiones algebraicas. De acuerdo con el análisis de contenido realizado, están enfatizando la representación simbólica formal de las expresiones algebraicas, para lo cual utilizan letras que adquieren un significado específico. Con objeto de comprender mejor el significado que le atribuyen a las letras, hemos estudiado el papel de la letra en el álgebra escolar, partiendo del papel que adquiere con mayor generalidad, el de variable. En este apartado vamos a basarnos en el estudio de Trigueros, partiendo con una de sus afirmaciones “El concepto de variable es de fundamental importancia en el desarrollo y comprensión de cualquier rama de las matemáticas.” (Trigueros, 1999, p. 266). En particular, obviamente en el álgebra debido a su rol protagónico y diversificado. Aunque muchos estudiantes piensan que todas las variables son letras que representan números (*Del Castillo, 2006*), dentro de las mismas matemáticas, contamos con distintos usos. La función que le asignamos a las letras y símbolos varían de acuerdo al contexto y el contenido matemático en donde se desenvuelve (por ejemplo, la letra A). En este sentido, Filloy (1999) hace hincapié en la fuerza que tienen los símbolos en este contexto:

“los símbolos matemáticos no tienen interpretación única y, por lo tanto, una lectura correcta de los mismos requiere de una reconceptualización de los objetos

matemáticos que dichos símbolos representan, cuando se pasa de un contexto a otro (del aritmético al algebraico)” (Filloy, 1999, p. 50).

Según Trigueros (1999), podemos identificar tres formas distintas en donde se manifiestan las variables en el álgebra escolar: la variable como número generalizado, la variable como incógnita y la variable como relación funcional. A continuación daremos una pincelada sobre estas concepciones.

- La **variable como incógnita**, es decir, como un número desconocido. Aparece desde los primeros años escolares cuando los alumnos empiezan a trabajar con problemas de este tipo aunque la incógnita no se representa mediante una letra sino mediante otros signos, como, por ejemplo: una raya, un cuadrado, un espacio vacío, etc. Este signo se sustituye por la letra al iniciarse la enseñanza del álgebra propiamente tal.
- La **variable como número generalizado**, se refiere a la variable como una herramienta que se usa en matemáticas para expresar propiedades derivadas de una generalización. Cuando se quiere expresar un patrón, una regularidad o un método general en matemáticas, se usan variables para indicar los números generales involucrados. Por ejemplo la expresión de las propiedades, como la conmutativa de la suma, que se expresa en la forma. La sucesión $1 + \frac{2}{3}, 2 + \frac{3}{4}, 6 + \frac{4}{5}, 24 + \frac{5}{6}, \dots$ se puede generalizar

con la expresión algebraica $n_i + \frac{n}{n+1}$.

- La **variable en una relación entre cantidades**, se refiere a que las variables se pueden usar para expresar una relación entre dos cantidades que cambian. Cuando se usa así, las características principales de la variable son su variación en un rango de valores y el hecho de que el cambio en una de las variables produce un cambio en el valor de la otra. Esta característica se enfatiza cuando la relación funcional se concibe como la expresión del cambio. (Trigueros, 1999) Bajo esta concepción, una variable es un *argumento* (es decir, un valor del dominio de una función) o un *parámetro* (es decir, representa un valor del cual dependen otros valores). Solo en esta concepción toman sentido las nociones de variable independiente “*y*” y variable dependiente.

Profundizando en la variable como número generalizado, Trigueros menciona que su conceptualización requiere la capacidad de:

- reconocer patrones y reglas en secuencias numéricas y en familias de problemas.

-
- reconocer el símbolo como una representación de un objeto indeterminado, desarrollar la idea de método general, distinguiendo los elementos variables de los invariantes en situaciones problemáticas similares, hasta llegar a la simbolización de un método general y del objeto general sobre el cual actúa.
 - simplificar o desarrollar expresiones algebraicas.

En este último punto se sitúa el problema que las profesoras de nuestro estudio se plantean como objeto de reflexión.

Vemos entonces que un estudiante puede asignar diferentes significados a la variable dependiendo del problema que se le presenta. Así necesita distinguir ecuaciones de equivalencia de expresiones algebraicas, saber simplificar expresiones y manejar la idea de variación en relaciones funcionales. Se espera del estudiante la posibilidad de reconocer, manejar y simbolizar expresiones algebraicas, de considerar los posibles valores que la variable puede tomar en distintas situaciones o problemas y sobre todo, la capacidad de distinguir las claramente de las ecuaciones (Trigueros, 1999). Pero, sabemos que en la práctica (Kaput, 1983 y 1987; Matz, 1982) estos distintos significados se convierten en un obstáculo difícil de salvar. Diversos estudios (como, por ejemplo, López, 1996) muestran que durante sus explicaciones los profesores de matemáticas hacen un uso amplio de los distintos aspectos de la variable dando por sentado que son comprendidos por los alumnos.

Trigueros (1999) sugiere que el uso de la variable como número general realmente introduce a los alumnos al pensamiento algebraico, y que considerar este objeto de forma integrada es preponderante para el paso de la aritmética al álgebra.

Como ya lo hemos mencionado en la sección anterior, las expresiones algebraicas se manifiestan en objetos matemáticos de la enseñanza posterior y en este sentido es de esperar que después de varios años de contacto con el álgebra, los estudiantes en la enseñanza superior tengan los tres aspectos del concepto de variable de forma simultánea e interrelacionados, ya que este concepto será generalizado para incluir dentro de él nuevas facetas e interpretaciones.

A3.2 Análisis Cognitivo

A3.2.1 Oportunidades de aprendizaje

El marco curricular chileno menciona que un alumno ha logrado el nivel 5 del mapa de progreso, cuando realiza actividades como las siguientes:

- Determina los valores numéricos que indefinen una expresión algebraica fraccionaria. Por ejemplo: Determina los valores que indefinen la expresión

$$(x^2 - x - 2) / (2x^2 + 2x + 3)$$

- Simplifica expresiones algebraicas fraccionarias que contienen binomios en el numerador o denominador. Por ejemplo: $(a^2 - b^2) / (a^2 + ab)$ cuando $a \neq -b$.
- Realiza adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones de expresiones algebraicas escritas en forma de fracción.

En particular, en las tareas de enseñanza propuestas en el Programa de Estudio (Mineduc, 2004) de 2° año de enseñanza media (15 años aproximadamente), se presenta el siguiente ejemplo:

Objetivo de la actividad: Relacionan la operatoria de números fraccionarios con la operatoria de las expresiones algebraicas fraccionarias; establecen analogías y diferencias.

Ejemplo: Considerar cálculos de cuocientes o productos en su forma aritmética y algebraica, comparando los resultados y los procedimientos utilizados.

$1 : \frac{1}{3} =$	$1 : \frac{1}{a} =$
$\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{9} =$	$\frac{a}{b^2} \cdot \frac{b}{a^2} =$
$\frac{3}{7} : \frac{4}{49} =$	$\frac{a}{(a+b)} : \frac{b}{(a+b)^2} =$

En relación al ejemplo se indica al docente la importancia de que los alumnos visualicen la relación entre ambos tipos de ejercicios: el aritmético y el algebraico; que puedan proponer otros ejemplos a partir de la forma general y constaten que los resultados que se obtengan son particularizaciones del caso general dado por el álgebra.

A3.2.2 Análisis de textos

Al revisar el Texto Guía (Jimenez y otros, 2011) para el profesor de matemática de Primero Medio (14 años aproximadamente) se presenta una tabla resumen para que el docente relacione los contenidos de álgebra con los niveles anteriores y superior a de primero medio. Esta tabla es la siguiente, en donde hemos resaltado en un recuadro el contenido abordado por las profesoras de nuestro estudio:

Tabla 1

Relación de contenidos abordados sobre la unidad de álgebra

Contenidos relacionados con niveles anteriores	Contenidos de la Unidad	Contenidos relacionados con niveles y/o unidades siguientes
<p>6º Básico</p> <ul style="list-style-type: none"> - Empleo de propiedades de las operaciones de los números naturales para resolver ecuaciones de primer grado. - Validación de la solución obtenida en la resolución de una ecuación de primer grado con una incógnita, mediante la sustitución de la incógnita. <p>7º Básico</p> <ul style="list-style-type: none"> - Reducción de expresiones algebraicas por medio de la aplicación de propiedades de las operaciones, adición y sustracción de términos semejantes y eliminación de paréntesis. - Traducción de expresiones del lenguaje natural a lenguaje simbólico y viceversa. - Resolución de problemas mediante el planteamiento de una ecuación de primer grado con una incógnita, interpretación de la solución en términos del contexto del problema. <p>8º Básico</p> <ul style="list-style-type: none"> - Resolución de problemas en diversos contextos que implican el uso de la relación de proporcionalidad como modelo matemático y su aplicación al cálculo de porcentajes. 	<ul style="list-style-type: none"> - Establecimiento de relaciones entre expresiones algebraicas no fraccionarias mediante la eliminación de paréntesis, reducción de términos semejantes, productos, productos notables y factorización. - Resolución de ecuaciones de primer grado con una incógnita y coeficientes literales y su aplicación en la interpretación y transformación de fórmulas. - Análisis de las distintas representaciones de la función lineal, su aplicación en la resolución de diversas situaciones problema y su relación con la proporcionalidad directa. - Interpretación de la función a fin, análisis de las situaciones que modela y estudio de las variaciones gráficas que se producen por la modificaciones de sus parámetros. 	<p>2º Medio</p> <ul style="list-style-type: none"> - Resolución de problemas mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas, en contextos variados. Discusión de pertinencia y existencia de soluciones. <div style="background-color: yellow; border: 1px solid black; padding: 2px;"> <p>- Simplificación de fracciones algebraicas simples, con binomios tanto en el numerador como en el denominador.</p> </div> <p>3º Medio</p> <ul style="list-style-type: none"> - Representación y análisis gráfico de la función cuadrática, para distintos valores de los parámetros. Discusión de las condiciones que debe cumplir la función cuadrática para la gráfica interseque el eje X.

Podemos observar cómo se vinculan los contenidos de los diversos niveles en forma progresiva, de acuerdo al mapa conceptual presentado en la sección anterior. Además, vemos que se hace explícito el contenido de simplificación de expresiones algebraicas en el nivel de 2º de Educación Media (15 años aproximadamente).

Si damos una mirada global al Texto del Estudiante (Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2011a), en la sección de simplificación de fracciones algebraicas, ésta tiene las siguientes características:

La secuencia propuesta:

- Parte con una situación problema en una situación aplicada en un contexto matemático abstracto.
- Explica el desarrollo correcto de la situación planteada, dando a la vez las definiciones de fracción irreducible y factorización, entre otras.

- Presenta un resumen de lo que es la simplificación de expresiones fraccionarias algebraicas.
- Termina entregando una lista de ejercicios para resolver en el cuaderno.
- Hay ausencia de la relación del tema con algún contexto no matemático o con aplicaciones con uso de tecnologías.
- Se observa una tendencia a fomentar el tratamiento procedimental sobre el conceptual.

Respecto al ejemplo y los ejercicios:

- Muestra los pasos a seguir para la simplificación, a través de tachado de factores.
- Hace alusión a las restricciones necesarias para cada expresión.
- Utiliza tanto en el ejemplo como en los ejercicios propuestos polinomios factorizables.
- En los ejercicios propuestos, utiliza primero el ámbito alfanumérico, una parte de ello es la siguiente:

1. Simplifica las siguientes fracciones, indicando las restricciones, si las hubiera:

a. $\frac{2x-4}{(x-2)(x+9)}$

d. $\frac{x^2 - a^2 + x + a}{x^2 + 2ax + a^2}$

g. $\frac{x - \sqrt{2}}{x^2 - 2}$

Luego, plantea ejercicios en el ámbito numérico (con número decimales finitos solamente), una parte de ellos se presenta a continuación:

2. Encuentra el valor de las siguientes expresiones fraccionarias sin desarrollarlas, como en el ejemplo:

Ejemplo: $\frac{1+(0,6)^3}{1+0,6} = \frac{\cancel{(1+0,6)} \left(1^2 + 1 \cdot (0,6) + (0,6)^2 \right)}{\cancel{(1+0,6)}} = 1 + 0,6 + 0,36 = 1,96$

a. $\frac{(0,7)^3 - (0,3)^3}{(0,7)^2 - (0,3)^2}$

c. $\frac{(0,21)^2 + 3(0,21) + 2}{(0,21)^2 - 1}$

Se presenta después de la sección “restricciones de expresiones algebraicas” y antes de la sección “multiplicación de expresiones algebraicas”.

A3.3.3 Errores y dificultades en el tratamiento del álgebra

A3.3.3.1 Planteados por el Ministerio de Educación de Chile

Plantean algunas sugerencias didácticas, dentro de las cuales mencionan dificultades de aprendizaje de los alumnos sobre el tema de álgebra (Mineduc, 2009a):

- Suelen tener dificultades en algunos puntos específicos de este tema, tales como en la interpretación de los paréntesis para indicar la base de una potencia, en el caso en que ésta sea un número negativo y el exponente un número par. Es así, como los estudiantes suelen confundir notaciones del tipo -2^n con $(-2)^n$. Dificultad asociada a la incidencia en los cambios de signo en el numerador de una fracción que se resta. Hay alumnos y alumnas que eliminan correctamente el paréntesis en expresiones de la forma $5a - (3b + a)$ en las que el paréntesis ayuda a visualizar la totalidad que se resta y que, sin embargo, no logran transformar correctamente expresiones del tipo $\frac{5a}{3b} - \frac{3a+b}{b}$ al expresarlas en una sola fracción.

- La simplificación de expresiones fraccionarias presenta también algunas dificultades para su aprendizaje; numerosos estudiantes confunden el modelo aditivo con el multiplicativo; ellos no han logrado diferenciar el significado del producto ab con la suma $a + b$; esto los lleva a errores del tipo $\frac{a+b}{ab} = 1 \text{ ó } 0$.

- Mencionan que la verbalización del significado de las operaciones en el ámbito de expresiones literales y su relación con la aritmética pueden ser buenos recursos para favorecer una mejor comprensión de las operaciones algebraicas con expresiones fraccionarias.

A3.3.3.2 Presentados en textos escolares

Al examinar el Texto Guía (Zañartu, Darrigrandi y Ramos, 2011b) para el profesor de matemática de 2° de Educación Media (15 años aproximadamente) y el texto del estudiante, al iniciar la unidad 2, expresiones algebraicas fraccionarias, observamos que presenta una evaluación diagnóstica con el objetivos de identificar los conocimientos previos que poseen los

alumnos y alumnas, titulada ¿Cuánto sabes? Respecto a esta evaluación, resaltaremos la siguiente pregunta:

- 2. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta.**
- a. La adición de fracciones cumple con las propiedades asociativa y conmutativa.
 - b. Si $a \neq 0$, entonces $\frac{0}{a} = 0$
 - c. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a+b}{a} = b$
 - d. Si $a, b \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, entonces $\frac{a \cdot b}{a} = b$
 - e. $\frac{1}{0}$ existe.
 - f. La multiplicación de fracciones cumple con las propiedades conmutativa y asociativa.

En este mismo texto se presenta algunas posibles dificultades que puedan tener los alumnos en esta pregunta, al respecto se afirma lo siguiente:

En el ítem 2, en la aseveración c, la principal dificultad es simplificar de la forma:

$$\frac{a+b}{a} = b, \text{ pero se debe recordar que: } \frac{a+b}{a} = \frac{a}{a} + \frac{b}{a} = 1 + \frac{b}{a} \neq b$$

En el ítem 3, se sugiere repasar la reducción de términos semejantes, ya que los y las estudiantes tienden a confundir la adición con la multiplicación de expresiones algebraicas, luego calcularán, por ejemplo, de la siguiente forma:

- $2x^6 + 5x^6 = 7x^{12}$
- $3x^3 - 5x^4 = 15x^{12}$

A3.3.3.3 Planteados en estudios internacionales

En estudios internacionales, como el de Cervantes y Martínez (2007) cuyo objetivo era describir algunos tipos de errores que, con mayor frecuencia, presentan los alumnos en los primeros cursos de pre-grado cuando pretenden solucionar ejercicios que requieren manipulaciones algebraicas, se constató cuatro tipos de errores comunes en el trabajo algebraico de éstos, error de lineación, error de extensión de la cancelación, error de extensión del producto nulo y errores de truncamiento. Entre estos tipos de errores, destacamos el

segundo, ya que tiene estrecha relación con la situación problemática que se plantean las profesoras de nuestro estudio. Este tipo de error surge a partir de las identidades siguientes:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{B}{C} \quad (1)$$

$$\frac{AB+AD}{AC} = \frac{B+D}{C} \quad (2)$$

Las cuales generan otras no válidas como las siguientes:

$$\frac{AB+CD}{AC} = B+D, \quad \frac{AB+CD}{A+C} = B+D, \quad \frac{B+AD}{C} = \frac{B+D}{C}$$

Los autores afirman que es posible que al presentar a los alumnos por primera vez las identidades (1) y (2) quede grabada más la acción de cancelar algo que la forma de la identidad en sí. Consideran que es preferible presentar (2) en la forma

$$\frac{AB+AD}{AC} = \frac{A(B+D)}{AC} = \frac{B+D}{C}$$

haciendo énfasis en la importancia del factor común para una correcta simplificación.

Para poder evitar que los estudiantes cometan dicho error, los autores sugieren presentar desarrollos errados para generar opiniones divididas, las cuales, al sustentarse, permiten al estudiante profundizar más y mostrar una visión más crítica de lo que piensa y hace, lo cual refuerza la importancia de un factor común en el numerador y el denominador de una expresión fraccionaria como requisito indispensable para la simplificación.

Cervantes & Martínez (2007) además explicitan que muchos errores se presentan como resultado de uno de los siguientes procesos:

- Tendencia generalizada a usar reglas, propiedades y definiciones de la primera forma en que fueron vistas, prefiriéndose incluso sobre formas más claras y eficientes.
- Uso inapropiado de una regla conocida en una situación nueva.
- Adaptación incorrecta de una regla conocida al resolver un nuevo problema.
- Asumir que en una regla general uno de sus componentes es más incidental que esencial.

Por ello, manifiestan que es claro que nuestra labor debe encaminarse a evitar en lo posible que estos procesos generen errores, por ello insisten en proponer situaciones contrastantes, aquellas que sabemos suelen aparecer con mayor frecuencia resueltas de manera errónea.

A3.3.3.4 En relación a la variable en el álgebra escolar.

Al abordar el álgebra escolar, es importante considerar varios aspectos, entre los cuales destacamos:

- Tomar cuidado con el uso del signo igual en expresiones algebraicas, ya que los estudiantes tienen a confundir la variable como incógnita, siendo que podemos estar en una equivalencia de expresiones algebraicas.
- Focalizándonos en la variable como número generalizado, un error frecuente de los estudiantes, es la conducta de ignorar la variable, o de asignarle un valor específico, aunque en algunas ocasiones la interpretan como un objeto determinado. “los estudiantes se desorientan cuando tienen que interpretar símbolos que representan números generales y en que su tendencia es a especificarlos de una manera arbitraria.” (Trigueros, 1999, p.72).
- Otra observación relevante que se presenta en Filloy (1999), sobre el tratamiento del álgebra tiene que ver con una tendencia de los alumnos a interpretar las expresiones algebraicas como fórmulas geométricas (base por altura sobre dos), o bien a “cerrarlas”, ya sea por medio de buscar un “resultado”, asignando valores numéricos específicos a los símbolos literales, o convirtiendo una de las literales en “dato” y la otra en incógnita”, es decir, llevándolo a la forma de variable como incógnita. En ambos casos, dice el autor, que se observa que las letras y los símbolos de operación evocan en el estudiante los significados asociados a dichos símbolos en la etapa inicial de la primaria, donde las expresiones algebraicas que incluyen letras, o bien son fórmulas o bien ecuaciones, pues aún cuando el signo de igualdad no esté presente en ambos casos, es el alumno quien “completa” la expresión a fin de poder leerla en contextos que le son familiares.
- Este fenómeno también fue estudiado en Rojano (1994), que lo observó al pedir a los estudiantes que interpretaran expresiones como $\frac{a+b}{2}$, ab , $3ab$, a^2 . A la primera expresión, la respuesta típica fue en relación a figuras geométricas, por ejemplo, “base

más altura sobre dos”, acompañada también de la necesidad de asignar valores específicos a las letras, con el fin de obtener un resultado y de cerrar la expresión.

Referencias del anexo 3

- Cervantes, G. & Martínez, R. (2007). Sobre algunos errores comunes en desarrollos algebraicos. *Zona próxima. Revista del Instituto de Estudios Superiores en Educación Universidad del Norte*, 8, 34-41.
- Del Castillo, A. (2006). Material Didáctico sobre Concepciones del Álgebra Escolar. Descargado el 20 de febrero del 2011 de http://www.mat.uson.mx/depto/diplomado/secundaria/pensamiento_algebraico.doc.
- Filloy, E. (1999). *Aspectos teóricos en la investigación en álgebra educativa*. México: grupo Editorial Iberoamericana.
- Jiménez, A.; Reyes, C.; Valenzuela, M. & Candía, E. (2011). *Matemática 1° Año Medio. Guía didáctica para el profesor*. Santiago: Ed. McGRAW-HILL.
- López, A. (1996). *Construcción de la noción de variable algebraica en alumnos de nivel medio superior*. Tesis Doctoral. México.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En D. Sleeman & J. S. Brown (Eds.), *Intelligent tutoring systems* (pp. 25-50). London: Academic.
- Kaput, J. (1987). PME XI álgebra papers: A representational framework. En J. C. Bergeron, N. Herscovics, & C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the 11th PME International Conference*, 1, (pp. 345–354).
- Kaput, J. & Sims-Knight, J. E. (1983). Errors in translations to algebraic equations: Roots and implications. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 5(3), 63–78.
- MINEDUC, (2004) *Matemática. Programa de Estudio, Segundo Año Medio, Formación General Educación Media*, Unidad de Currículum y Evaluación. Descargado el 30 de marzo del 2011 de <http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/programas-de-estudios/educacion-media>.
- MINEDUC, (2009a). *Mapas de progreso del aprendizaje: mapa del progreso de álgebra*. Descargado el 20 de mayo de 2011 de <http://www.curriculum-mineduc.cl/curriculum/mapas-deprogreso/matematica>.

MINEDUC, (2009b). *Fundamentos del ajuste curricular en el sector de matemáticas. Unidad de currículo y evaluación*. Descargado el 20 de mayo de 2011 de http://www.curriculum-mineduc.cl/docs/apoyo/articulo_fundamentos_ajuste_matematica_300309.pdf.

Rojano, T. (1994). La Matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 12(1), 45-56.

Trigueros, M. (1999). *Un modelo de medida con interacción*. Tesis doctoral, Universidad Complutense de Madrid. España.

Zañartu, M.; Darrigrandi, F. & Ramos, M. (2011a). *Matemática 2° para Segundo de Educación Media. Texto para el estudiante*. Santiago: Santillana.

Zañartu, M.; Darrigrandi, F. & Ramos, M. (2011b). *Matemática 2° para Segundo de Educación Media. Guía didáctica para el profesor*. Santiago: Santillana.