MASTER DE EDUCACION SECUNDARIA. ESPECIALIDAD MATEMATICAS

Unidad didáctica. Sucesiones matemáticas. Progresiones aritméticas y geométricas

Trabajo fin de máster

MANUEL ORTEGA PEREZ

07/02/2012

Índice

Introducción **Pág. 3**

Justificación **Pág. 3**

Fundamentación **Pág. 4**

Análisis didáctico **Pág. 6**

Análisis de contenido **Pág. 6**

Análisis cognitivo **Pág. 19**

Análisis de instrucción **Pág. 23**

Unidad didáctica **Pág. 25**

Desarrollo por sesiones **Pág. 30**

Conclusiones **Pág. 56**

Bibliografía **Pág. 59**

ANEXO I. Tareas **Pág. 60**

ANEXO II. Análisis de contenido **Pág. 66**

ANEXO III. Oportunidades del aprendizaje **Pág. 85**

Introducción

A continuación, y a lo largo de la exposición del siguiente trabajo, se desarrollará el trabajo Final de Máster relativo al "Máster universitario de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas". Entre las opciones que se nos han ofrecido desde la coordinación del máster he decido elaborar una "**UNIDAD DIDÁCTICA**", en concreto, la citada unidad tendrá el nombre de "**SUCESIONES MATEMÁTICAS. PROGRESIONES ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS**".

Justificación

"Dime y lo olvido, enséñame y lo recuerdo, involúcrame y lo aprendo"
(Benjamin Franklin)

La cita anterior resume en cierto modo la estrategia que marcará el transcurso de la unidad. Durante el desarrollo de la unidad didáctica se pretende involucrar al alumnado mediante explicaciones matemáticas que se desarrollan en su entorno, tanto natural como social, desde el punto de vista de las sucesiones.

Teniendo en cuenta que los profesores de enseñanza media trabajamos a diario con sujetos que están en una fase importante de su interacción con el mundo físico, que mejor manera de involucrar al alumnado mediante la explicación matemática de algunos fenómenos observables.

Este acercamiento al funcionamiento natural del mundo que nos rodea pretende motivar al alumnado en el tema en cuestión, y sobre todo, despertar en el alumnado un interés que sirva de base para propiciar un aprendizaje satisfactorio.

Atendiendo a los objetivos de etapa de la educación secundaria, propuestos en la más reciente normativa del sistema educativo (*Real Decreto 16631/2006*), y teniendo presente el proyecto curricular de la misma, dicha unidad didáctica, pretende contribuir al desarrollo de las **competencias básicas**. Hemos de tener en cuenta que la enseñanza secundaria obligatoria aboga por "**una formación para la vida**", y esta idea se concreta en la necesidad de enfatizar que los alumnos desarrollen competencias. Siendo pues esta idea uno de los pilares básicos sobre los que se sostiene mi unidad didáctica.

A continuación, en el segundo capítulo, se realizará la fundamentación de nuestro trabajo, enfatizando pues, las principales investigaciones en las que se basará y trabajos que le preceden, que marcarán el rumbo de nuestra unidad. Además se explicará brevemente el marco legal que condiciona la elaboración de la susodicha unidad didáctica.

En el tercer capítulo, el correspondiente al "*Análisis didáctico*", se elabora un análisis del tema que nos permite organizar de forma óptima qué se va a enseñar, cómo se pondrá en práctica y las intenciones de aprendizaje que proponemos. Este análisis nos permitirá organizar las clases como es debido y además, al esquematizar y ordenar los elementos propios del área considerada, facilitará el aprendizaje de los escolares. El análisis didáctico se compone de "*Análisis de contenido*", "*Análisis Cognitivo*" y "*análisis de instrucción*".

Con el "Análisis de contenido" se pretende contextualizar el tema de sucesiones desde el punto de vista de su desarrollo histórico. A continuación se estudiarán los contenidos propios del tema desde una perspectiva conceptual y procedimental, sin olvidar las relaciones existentes entre ellas. Asimismo se estudiará las formas de representación que admiten los principales contenidos del tema, así como los fenómenos más importantes a los que da respuesta.

Mediante el análisis cognitivo, el docente fijará las principales expectativas que espera alcanzar con esta unidad, así como las limitaciones y errores que se puedan dar en el desarrollo del aprendizaje, siempre en referencia al análisis anterior.

Por último se presentará el análisis de instrucción que tendrá menos peso que las dos secciones anteriores fijadas ya que su propósito es fundamentalmente analizar detalladamente las tareas, y este propósito se ha tratado de hacer con exhaustividad durante la secuenciación de sesiones en la unidad didáctica.

En cuanto a la última parte de este trabajo, "Unidad Didáctica", en la que se detallará la planificación de las clases por parte del docente, nos centraremos en el desarrollo de contenidos (*dimensión conceptual*), objetivos (*dimensión cognitiva*), metodología (*dimensión formativa*) y evaluación (*dimensión social*). Sin dejar de lado otros aspectos relacionados con la enseñanza como puede ser la *atención a la diversidad* y la *innovación* en las tareas realizadas.

2.- Fundamentación

La finalidad del currículo es relacionar la organización y legislación educativa con la actividad docente del profesor. Si nos remitimos a la idea de currículo:

"Se entiende por currículo el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de cada una de las enseñanzas reguladas en la presente ley" (LOE 2/2006 de 3 de Mayo)

Así pues con la ayuda del currículo el docente podrá planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje y qué actividades resultan más interesantes para que el alumnado asimile mejor los conceptos propuestos.

Para realizar la fundamentación curricular nos basaremos principalmente en el trabajo de Luis Rico (1997). De esta forma el currículo intenta dar respuesta a las siguientes cuestiones: *¿En qué consiste el conocimiento? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Qué es la enseñanza? ¿En qué consiste el conocimiento útil?*. Estas cuatro cuestiones permiten establecer cuatro dimensiones que organizan los niveles de reflexión curricular: *Dimensión cultural, Dimensión cognitiva, Dimensión formativa ó ética y Dimensión social.*

Además, dependiendo de las personas que intervengan o de la profundidad tratada, Rico distingue diferentes grados en cada una de las dimensiones. De esta forma diferenciaremos los siguientes niveles: *"Teleológico ó de los fines, de las disciplinas académicas, del sistema educativo y de la planificación de los profesores"*. Tendremos que remontarnos a 2007 para que aparezca un nuevo nivel de la mano de Pedro Gómez: "***Análisis didáctico***". Finalmente nuestra unidad didáctica intentará ajustarse al nivel del análisis didáctico y al de la planificación del docente.

En el análisis didáctico distinguiremos cuatro niveles en relación con las dimensiones del currículo:

- *Análisis de Contenido (Dimensión conceptual)*
- *Análisis Cognitivo (Dimensión cognitiva)*
- *Análisis de Instrucción (Dimensión formativa)*
- *Unidad didáctica (Dimensión Social)*

Es importante también enmarcar nuestra unidad didáctica conforme establece la legislación vigente. Así pues, como se indica en la introducción, nuestra unidad didáctica está dirigida a los alumnos de 3º ESO. Siguiendo la normativa vigente tendremos en cuenta en la relación de esta unidad didáctica:

- **DECRETO 231/2007, de 31 de julio**, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la educación secundaria obligatoria en Andalucía. (BOJA 8-8-2007)
- **ORDEN de 10-8-2007**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA 30-8-2007)
- **ORDEN de 10-8-2007**, por la que se establece la ordenación de la evaluación del proceso de aprendizaje del alumnado de educación secundaria obligatoria en la Comunidad Autónoma de Andalucía. (BOJA 23-8-2007)

ANÁLISIS DIDÁCTICO

"Es un procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del contenido matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje"

Pedro Gómez (2007)

El enfoque del análisis didáctico que aquí se presenta pretende servir de guía al docente para facilitar su trabajo a la hora de programar las clases que deberá impartir, así como su respectiva evaluación.

Tal y como se ha expuesto en el apartado anterior el análisis didáctico se divide en cuatro análisis diferentes, que a su vez corresponden con cada una de las dimensiones del currículo. De esta forma estudiaremos pormenorizadamente el *"Análisis de Contenido, Análisis Cognitivo, Análisis de Instrucción y el Análisis de Actuación"* que se aluden directamente a las dimensiones del currículo conceptual, cognitiva, ética y social respectivamente.

ANÁLISIS DE CONTENIDO - ¿QUÉ ENSEÑAR?

Mediante el análisis de contenido se pretende profundizar en el significado del tema, de manera que el profesor pueda ubicar el contenido en relación al conocimiento matemático, captar su papel respecto a la ciencia, la técnica, etc., y poder de ello extraer información para decidir qué elementos del contenido enseñar.

Una vez descrito el tema con las relaciones subyacentes entre los conceptos, se podrá seleccionar cual es el método más adecuado para la instrucción, ya que después de todo, es el fin que se persigue mediante estos análisis.

En primer lugar se examinará cómo ha evolucionado el tema de sucesiones a lo largo de la historia de las matemáticas, para poder ubicar con más precisión la formulación escolar actual en relación con su papel en la matemática. A continuación se abordará el tema desde su estructura conceptual, seguido de los sistemas de representación, y finalizaremos el análisis de contenido con un análisis fenomenológico.

Tenemos que decir además, que el análisis de contenido que se presenta a continuación está orientado exclusivamente para la preparación de las clases de 3º ESO, si bien, el análisis el análisis de contenido del tema aparecerá desarrollado más ampliamente en el ANEXO II.

Contexto Histórico

Se pueden tomar las progresiones como ejemplo más sencillo del concepto de sucesión. Desde los albores de la historia de las matemáticas se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética comercial.

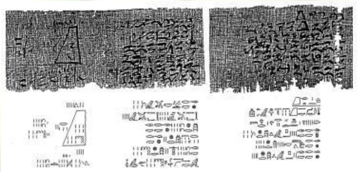
El origen de las progresiones, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto. Veamos su desarrollo en algunas civilizaciones:

Babilonia

Es conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las **progresiones geométricas**.

El Antiguo Egipto

En el antiguo Egipto ya se estudiaban las relaciones aritméticas en relación con sus problemas cotidianos. En cuanto al trato de las sucesiones sus conocimientos se recogen en el "**papiro Amhes**". Donde aparece tablas de descomposición de $\frac{2}{n}$ en suma de fracciones unitarias (con n impar pues para n par equivale a una unitaria al simplificarse), y otra en las que se escriben las descomposiciones de las fracciones de la forma $\frac{n}{10}$.



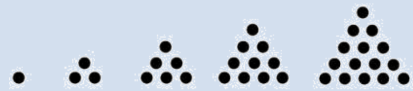
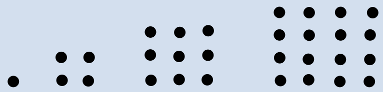
Otros de los textos importantes que recogen los conocimientos importantes de esta civilización es "**El papiro Rhind**". En él se recogen conocimientos generales sobre series geométricas y aritméticas.

La antigua india (900 a.C – 200 d.C)

Pingala (aproximadamente de los siglos III al I a. C.) en su obra expone ideas básicas sobre los **números de Fibonacci**, llamados mātrāmeru. Por otro lado, entre el 400 a. C. y el 200 a. C., los matemáticos yainas comenzaron el estudio de las matemáticas para el exclusivo propósito de las matemáticas, desarrollando matemáticamente las sucesiones y progresiones. El Manuscrito "**Bakhshali**", escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C., incluía soluciones de progresiones aritméticas y geométricas y de series compuestas entre otras cosas..

La antigua Grecia (hasta el 300 d.C)

En esta época ya se comienzan a usar los **números figurales**, debido a lo pobre que resultaba ser el sistema de numeración de la época. Así, mediante un enfoque geométrico, representaban mejor las cantidades, aludiendo a regularidades tales como:

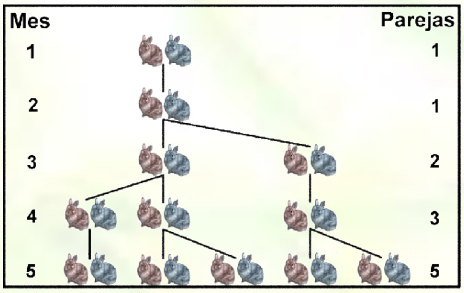
Nombre	Números triangulares	Números cuadrangulares
Expresión gráfica		
Regla de recurrencia	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(n+1)^2$

Además de otras aportaciones de la cultura Griega a las matemáticas, cabe destacar en nuestro tema que se comienza a hablar en este tiempo de **sucesiones de números pares e impares**. Aunque se asociaba lo "par" con lo ilimitado y lo "impar" con limitado.

Cabe destacar a Arquímedes (287 a.C– 212 a.C). Este matemático griego trabajo durante su vida con algunas sucesiones y series de gran importancia. Las relativamente pocas copias de trabajos escritos de Arquímedes que sobrevivieron a través de la Edad Media fueron una importante fuente de ideas durante el "Renacimiento". Entre otros trabajos e ideas que propuso Arquímedes podemos destacar: **El valor de Π** mediante la aproximación de una sucesión de polígonos circunscritos en la circunferencia y la **cuadratura de la parábola** mediante la serie: $\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots = \frac{4}{3}$

La edad media

En esta etapa histórica destacamos en cuanto al desarrollo de las sucesiones a Bhaskara II(1114 - 1185), importante matemático de la India en el siglo XII. En el libro IX de Los Elementos de Euclides aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Bhaskara plantea en su más conocida obra, **"En Lilavati"**, diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.



Además en la época destaca el matemático Leonardo de Pisa (1170-1250). Más conocido como Fibonacci, su principal aportación a las matemáticas fue el estudio y cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, que como se puede comprobar actualmente tiene múltiples aplicaciones en los fenómenos (especialmente naturales). Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci. De hecho el fondo de este trabajo es una sucesión de Fibonacci.

En 1220 Leonardo escribe su obra **"Geometría Práctica"** y además publica una obra menos conocida sobre teoría de números donde se estudian propiedades de los números y algunas series. De hecho hoy en día las sucesiones recurrentes llevan su nombre.

Las matemáticas en el renacimiento

En el renacimiento se abordan y resuelven problemas relacionados con el algebra, y por relación con las sucesiones, de gran envergadura. Nicolás de Cusa (1401-1464) sigue una vertiente filosófica, relacionada con las matemáticas. Sus escritos se basan en la crítica sobre la noción de infinito

Finalmente merece la pena subrayar la importancia de **Michael Stifel**, al cual se le debe el estudio tan serio que hizo de las series y de las progresiones Aritméticas y Geométricas.

Edad contemporánea

El desarrollo del tema en la época es más que notable, entre otros autores destacan:

- Isaac Newton (1642-1727), uno de los científicos más importantes de la historia, con su aportación más conocida: "El binomio de Newton". Mediante el Teorema del binomio Newton es capaz de desarrollar cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos. De esta forma se puede representar:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

- Gottfried Leibniz aporta al desarrollo del tema una fórmula, en forma de serie, para el cálculo de π:

$$\mathbf{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\Pi}{4}}$$

- Euler es sin duda uno de los matemáticos más relevantes de la historia (de hecho se le considera el maestro de los matemáticos). Contribuyó a todas las ramas de las matemáticas activamente. Trabajo con sucesiones y series, como por ejemplo:
- Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática. Además caracterizo el concepto de límite mediante las sucesiones.
- Joseph Fourier (1768-1830) introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier.

- Ya desde temprana edad Gauss destaca por sus habilidades matemáticas, incluso a los 7 años consiguió resolver el problema de la suma de los 100 primeros números en una clase en el colegió estableciendo una relación simétrica en esta progresión aritmética.
- Con Stolz nos encontramos ante uno de los grandes matemáticos austriacos y de la época. Es conocido por sus trabajos en materia de análisis matemático e

infinitesimal. Sobre el tema de sucesiones consiguió estudiar la convergencia de una sucesión a partir de otra sucesión monótona creciente y divergente.

Estructura conceptual

Mediante la elaboración de la estructura conceptual trataremos de identificar los conceptos propios de la estructura matemática del tema (*campo conceptual*), así como los procedimientos que conforman esta estructura en sí (*campo procedimental*). Por último atenderemos a la relación existente entre conceptos y procedimientos.

Campo conceptual

Atendiendo al campo conceptual, y por tanto al nivel más básico de complejidad, diferenciaremos entre tres niveles de creciente dificultad:

- ✓ **Hechos**: unidades de información
- ✓ **Conceptos**: Aúnan en sí varias unidades de información
- ✓ **Estructuras conceptuales**: Sistemas de conceptos conectados junto con sus relaciones

Hechos

1.-Términos: Número real, sucesión, término, término general, índice, regularidad, sucesión aritmética, sucesión geométrica, diferencia, razón, …

2.- Notación

(a_n) →**"Sucesión"**

a_n →**"Término n-ésimo"**

$a_n = f(n)$ →**"Término general"**

n →**"Indice"**

r →**"razón"**

d →**"diferencia"**

S_n →**"Suma de los n primeros términos de una sucesión"**

3.- Convenios

- ➢ Las sucesiones se representan entre paréntesis, con letras minúsculas y subíndice n.
- ➢ En caso de conocer el término general de la sucesión, ésta se puede expresar de la forma (a_n)= $(f(n))$.

4.- Resultados

- ➢ Todo término de una sucesión tiene un término siguiente y, excepto el primer término, un término anterior.

- Una sucesión sumada a otra sucesión cualquiera da como resultado otra sucesión numérica.

Una vez superado este nivel ínfimo de complejidad nos encontramos ante un nivel intermedio. Este nivel está formado íntegramente por los conceptos:

Conceptos

Como conceptos más importantes en nuestro tema nos encontramos con: *Sucesión de números reales, progresión aritmética, progresión geométrica, suma de sucesiones, sucesión de Fibonacci, fractales, interpolación aritmética, interpolación geométrica, producto de sucesiones, suma de los n primeros términos de una progresión, …*

Estructuras conceptuales

- $\{(a_n), +, \ .\} \rightarrow$ **Anillo unitario y conmutativo**
- $\{R, +, \ *\} \rightarrow$ **Cuerpo conmutativo**
- $\{(a_n), +, \ *\} \rightarrow$ **Espacio vectorial sobre R**

Campo procedimental

En este ámbito de conocimiento se desarrollarán los procesos y modos de actuación de las tareas matemáticas.

De forma similar al comportamiento del campo conceptual, el campo procedimental también presenta una serie de niveles de escalonada dificultad. Así pues diferenciamos entre destrezas, razonamientos y estrategias.

Destrezas

- Escribir y leer de forma adecuada una sucesión cualquiera.
- Identificar las diversas sucesiones numéricas de nuestro entorno.
- Obtener el término general de una sucesión numérica dada.
- Diferenciar entre progresión aritmética y progresión geométrica.
- Realizar operaciones con sucesiones.
- Construir una progresión, ya sea aritmética o geométrica, conociendo únicamente dos de sus términos.
- Sumar los primeros "n" términos consecutivos de una progresión, ya sea una progresión aritmética o geométrica.

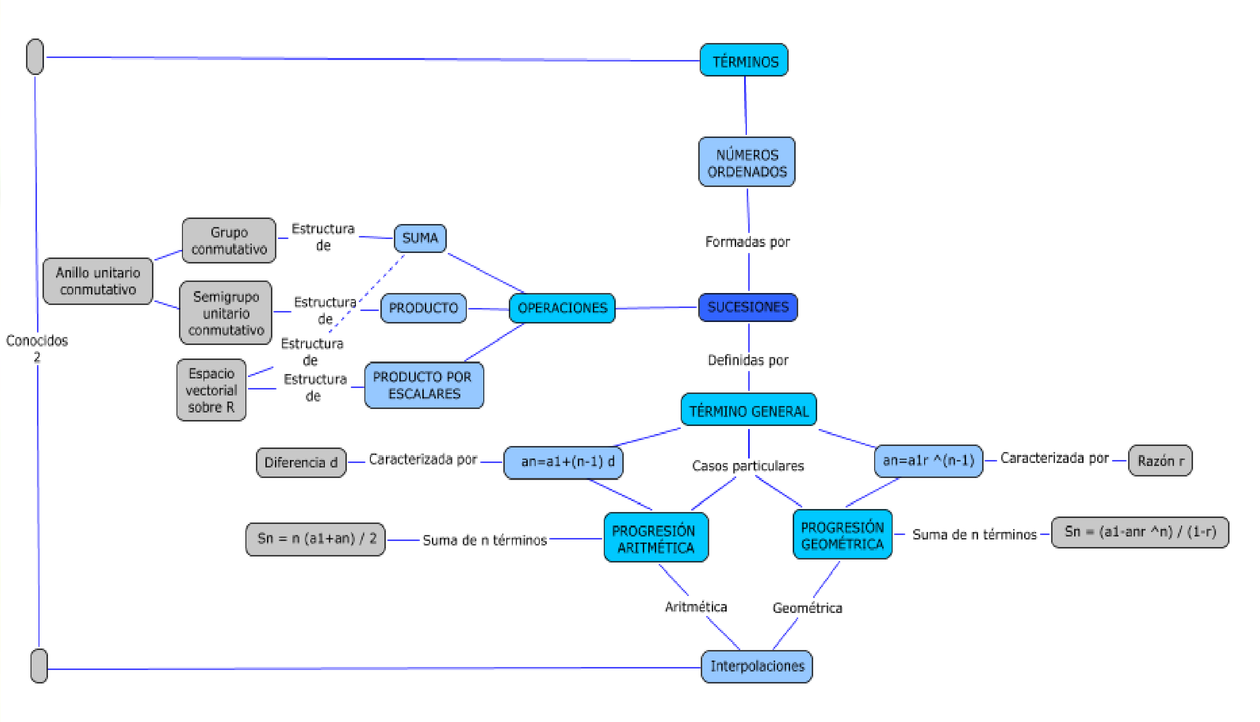
Razonamientos

- **Inductivo**
  - Detectar regularidades numéricas y saber expresarlas en forma de sucesión.
- **Figurativo**
  - Identificar patrones de sucesiones en estructuras gráficas, y posteriormente saber identificar su término general.
- **Deductivo**
  - Reconocer la presencia de progresiones aritméticas y geométricas en situaciones que se presentan en la vida cotidiana

Estrategias

- Construcción de un conjunto de números de forma ordenado siguiendo las pautas que nos marca un patrón.
- Reconocimiento de patrones comunes en un conjunto ordenado de números.
- Representación gráfica de una sucesión.

Veamos pues en el siguiente mapa conceptual como quedan organizados la gran mayoría de los conceptos tratados durante el análisis de contenido así como sus respectivas relaciones.



Sistemas de representación

A lo largo del apartado anterior hemos visto una serie de contenidos matemáticos que son susceptibles de ser representados gráficamente. A lo largo de este apartado veremos cómo se pueden clasificar los diferentes métodos existentes que nos permiten representar gráficamente los citados contenidos.

Antes de continuar con la descripción de los sistemas de representación resulta adecuado dar una definición que nos ayude a entender a qué nos referimos al hablar de "sistemas de representación". "Castro y Castro (1997)" define representaciones, en matemáticas, como aquellas notaciones simbólicas, o gráficas ó bien manifestaciones, verbales con las que se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes.

Para representar las sucesiones, al igual que en otros campos de las matemáticas, utilizaremos el ***sistema verbal, la utilización de materiales manipulativos TIC´s, el simbólico ó algebraico y el gráfico***.

El sistema de representación verbal

Ante todo merece la pena destacar que este sistema de representación alude directamente al lenguaje verbal. Así pues, algunos de los ejemplos referentes a nuestro tema son:

- "Sucesión de números pares"
- "Sucesión de números impares"
- "Progresión geométrica"
- "Progresión aritmética"
- "Sucesión de cuadrados"
- "Múltiplos de un número t "
- "Sucesión de Fibonacci"
- "Sucesión constante"

El sistema de representación simbólico ó algebraico

En un primer lugar destacaremos en esta forma de representación la forma de aludir a los términos propios del tema con el lenguaje puramente algebraico. Algunas representaciones son pues:

- $(\boldsymbol{a_n}) \rightarrow$ Representa simbólicamente al concepto de una sucesión
- $\boldsymbol{a_n} \rightarrow$ Representa a un término cualquiera de la sucesión, es decir, al término n-ésimo
- $\boldsymbol{a_n} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{n}) \rightarrow$ Representa simbólicamente al término general de la sucesión
- $(\boldsymbol{a_n} + \boldsymbol{b_n}) \rightarrow$ Representa simbólicamente la operación suma de sucesiones
- $\boldsymbol{S_n} \rightarrow$ Representa simbólicamente la suma de los n-primeros términos de una sucesión

Dentro de este tipo de representación debemos destacar por la gran importancia que cobra en el tema, la representación numérica. De esta forma, podemos representar una sucesión mediante los números que la componen;

- (1,3,5,7, …)

Además, dado el carácter de las sucesiones y la relación existente entre término e índice, también se puede representar una sucesión de forma tabular:

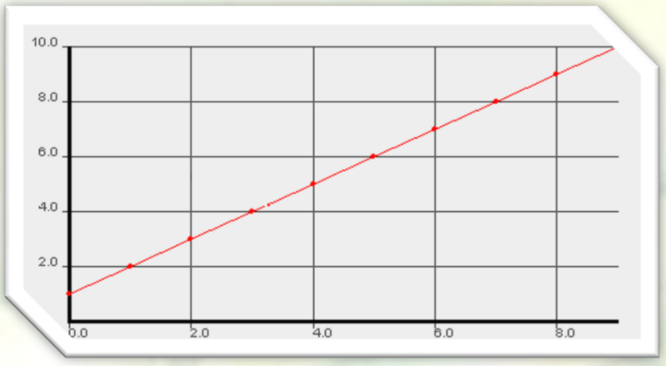
- *Representación de una sucesión en forma tabular*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	***4***	***6***	***8***	***10***

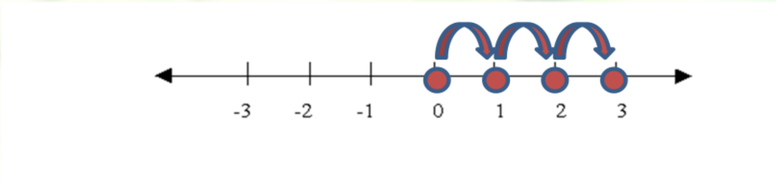
El sistema de representación gráfico

En el sistema de representación se pretende destacar tres posibilidades para representar una sucesión en cuestión:

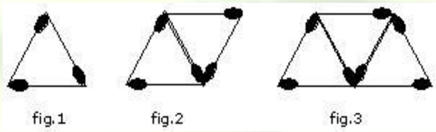
- *Representación de una sucesión en el plano*



- *Representación de una sucesión en la recta real*



- *Representación de una regularidad de forma gráfica*

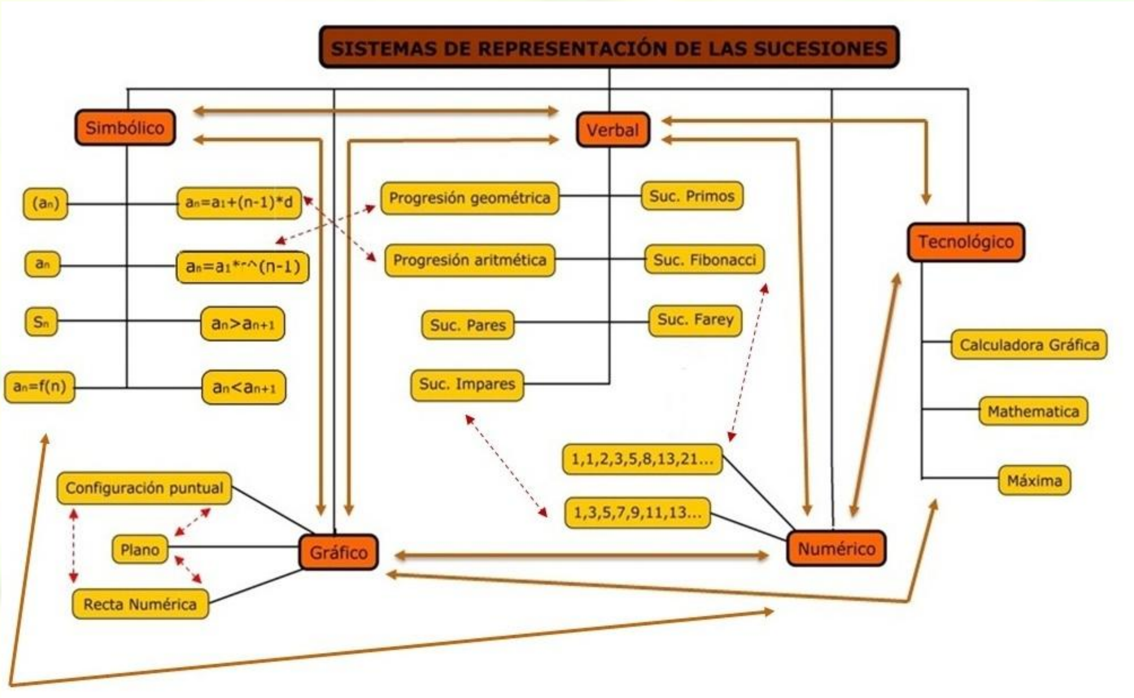


<u>El sistema de representación mediante materiales manipulativos TIC´s</u>

Como materiales manipulativos se pueden destacar los siguientes:

Mathematica	Algunos recursos online (página web descartes)

Finalmente estudiamos los sistemas de representación mediante el siguiente mapa conceptual:



Relación entre los sistemas de representación

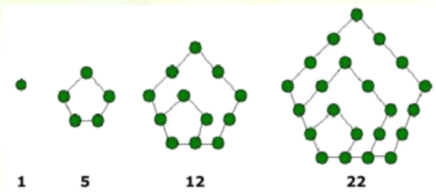
Finalmente se pretende resaltar la importancia de la relación existente entre los sistemas de representación. Asimismo, se suele identificar la comprensión con el "relacionar entre sí las formas de representar o aludir a los conceptos". Aquí radica fundamentalmente la importancia de que los alumnos asocien las distintas formas de representar un concepto determinado.

Una vez destacada la importancia de esta relación, se podrá contemplar un ejemplo que resuma lo anteriormente expuesto:

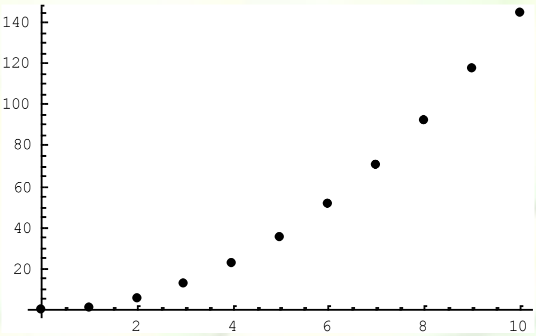
- **Verbal**: Sucesión de números pentagonales
- **Simbólico**: (an) = (n(3n-1)/2)
- **Tabular**

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	***4***	***6***	***8***	***10***

- **Numérico**: (1,5,12,22,...)
- **Gráfico**



- **TIC´s (Mathematica)**



Análisis fenomenológico

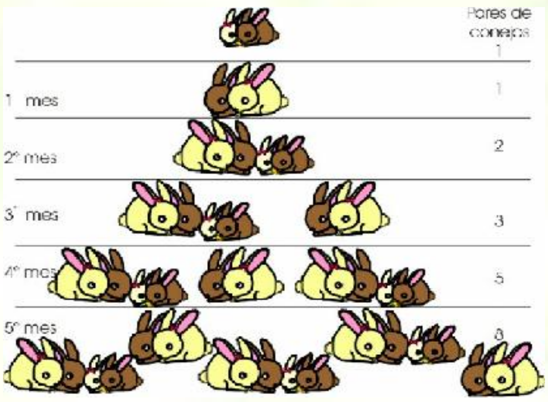
Por último pero no menos importante, vamos a estudiar el análisis fenomenológico del tema. El análisis fenomenológico del tema pone de manifiesto el carácter aplicado de las matemáticas, es decir, pretende realzar la visión de que las matemáticas explican el mundo y que han surgido para resolver unos problemas que no tenían solución. El fin último de este análisis es "conectar" el significado de conceptos y procedimientos con el mundo que nos rodea, con contextos reales que abarcan estos conceptos y procedimientos y con los fenómenos reales, que a la hora de tratarlos ponen estos conceptos en juego. Para conseguir desarrollar las competencias del alumnado, es necesario examinar cuáles son los campos en los que adquieren sentido los conceptos matemáticos del tema. Esto nos permitirá buscar situaciones en las que los conceptos adquieren sentido y significado, simplificando en cierta medida el proceso de aprendizaje.

De esta forma pasamos a presentar algunos fenómenos que se pueden encontrar tanto en la naturaleza como en la sociedad. Teniendo presente el objetivo de contextualizar nuestro tema, distinguiremos entre:

Regularidades matemáticas en fenómenos

De forma que empezaremos explicando fenómenos relativos a sucesiones. Los fenómenos que a continuación se van a exponer siguen una disposición en secuencia numéricas. Como principal fenómeno en este campo vamos a destacar "La sucesión de Fibonacci" por la multitud de fenómenos a los que da respuesta.

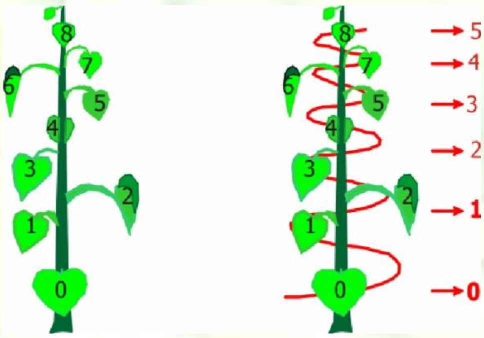
<u>La sucesión de Fibonacci</u>



La sucesión de Fibonacci cobra su mayor importancia a la hora de explicar fenómenos naturales, si bien son sus aplicaciones más directas, no podemos olvidar la relevancia que supone la misma en el arte y otros campos. Es sabido que esta sucesión consiste en sumar los dos términos inmediatamente anteriores, siempre comenzando por la unidad. Veamos algunos fenómenos relacionados con la famosa sucesión:

La sucesión de Fibonacci está estrechamente emparentada con la naturaleza. Algunos aseguran que Leonardo encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos, y es muy posible que así sea. Imaginemos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez (tras llegar a la edad de la fertilidad) engendrarán cada mes una pareja de conejos. *¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?* **Cada mes habrá un numero de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de Fibonacci**.

Las ramas y las hojas de las plantas son más o menos eficientes para atrapar el máximo de luz solar posible de acuerdo a la forma en que se distribuyen alrededor del tallo. Hay plantas en que las hojas se encuentren una justo en la vertical de la otra. En general, las hojas nacen siguiendo una espiral alrededor del tallo. Fijemos nuestra atención en una hoja de la base del tallo y asignémosle el número cero. Luego, contemos cuántas hojas hay en el tallo hasta encontrarnos directamente sobre la hoja "cero". Veremos que en la mayoría de las plantas este número pertenece la sucesión de Fibonacci. Además, si contamos cuántas vueltas dimos antes de obtener la superposición de las hojas, nuevamente se obtiene un número de la sucesión de Fibonacci.

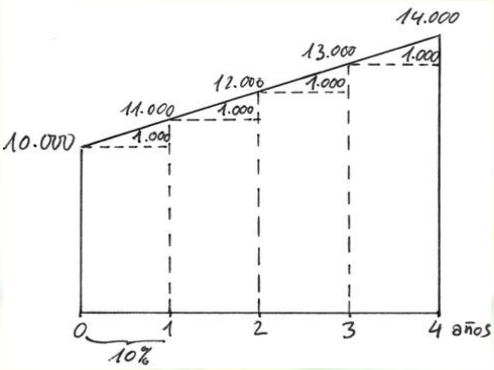


El número de espirales que pueden verse en numerosas variedades de flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión. El ejemplo más frecuentemente citado es la de la flor del girasol, cuya gran mayoría posee 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144 respectivamente.

Fenómenos relacionados con secuencias numéricas con reglas de construcción regulares

En este campo vamos a destacar fenómenos y casos que se describen mediante secuencias numéricas que tienen reglas de construcción regulares. Destacaremos como casos más importantes aquellos fenómenos relativos a las progresiones aritméticas y geométricas. De hecho gran parte de la unidad didáctica descansa sobre estos contenidos, por lo que es muy interesante para el docente tener un buen estudio fenomenológico que dé sentido a estos conceptos.

Progresiones aritméticas



La principal observación fenomenológica de las progresiones aritméticas concierne a la rentabilidad obtenida de una cantidad invertida a plazo fijo. Si supones pues que hemos invertido una depósito de 10.000 euros a plazo fijo, con un interés del 10% (un interés ficticio), obtendremos una ganancia de 1.000 por año, por lo que nuestro dinero irá creciendo en progresión aritmética de diferencia 10.

En general hay multitud de fenómenos que justifican y dan sentido al concepto de progresión aritmética, de hecho todas aquellas situaciones en las que se evolucione de un estado a otro con la única diferencia de la suma de una constante pueden ser explicadas por medio de las progresiones aritméticas.

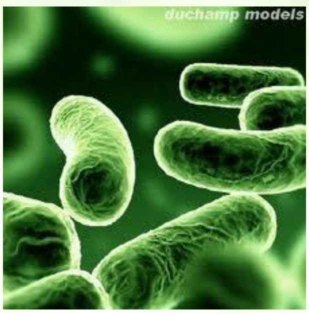
Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada número es igual al anterior multiplicado por una constante.

Año	Interés 4%	Interés 6%	Interés 8%	Interés 10%
1	100	100	100	100
5	116,99	126,25	136,05	146,41
10	142,33	168,95	199,90	235,79
20	210,68	302,56	431,57	611,59
30	311,87	541,84	931,73	1.568,31
40	461,64	970,35	2.011,53	4.114,48
50	683,33	1.737,75	4.342,74	10.671,90

En el mundo de la inversión es importante conocer la progresión geométrica y su velocidad de crecimiento. El denominado "interés compuesto" es una progresión geométrica. Comparemos varias inversiones con diferentes intereses compuestos, o progresiones geométricas:

Se define el rumor como una noticia vaga u oficiosa. El rumor existe desde que el hombre está en la tierra. El rumor, llamado frecuentemente y de manera despectiva chisme, es parte intrínseca de nuestra existencia. Alguien dice, cuenta algo, y rápidamente, cual veloz rayo, lo transmitimos, como dogma de fe, a todos los que encontramos en nuestro camino. De ahí que los rumores se propaguen tan rápidamente. Lo hacen en progresión geométrica.



El mecanismo de reproducción habitual en bacterias es la bipartición. Mediante este mecanismo se obtienen dos células hijas que a su vez volverán a reproducirse y cada una de ellas obtendrá sus correspondientes células hijas, y así sucesivamente. Este proceso se puede modelizar mediante una progresión aritmética

ANALISIS COGNITIVO - ¿QUÉ APRENDERÁN LOS ALUMNOS?

Ya expuesto el análisis de contenido es fundamental la organización de las nociones y relaciones que componen un tema de forma que organicen la dificultad del mismo.

En el Análisis Cognitivo, como parte del Análisis Didáctico, entendemos que es un proceso que llevará a cabo el profesor de matemáticas al planificar su actuación docente. En el Análisis Cognitivo el profesor estudiará un tópico matemático desde la perspectiva de que va a ser objeto de aprendizaje; *"se trata de analizarlo a efectos de su comprensión por los escolares de secundaria"* (José Luis Lupiañez).

Siguiendo con las consideraciones de "Lupiañez", y teniendo en cuenta que el tema tratado debe estar enfocado para alumnos de edad escolar, discerniremos en el Análisis Cognitivo dos componentes de gran importancia: Un primer componente relativo a las competencias que deseamos que los estudiantes desarrollen y otro componente en lo referente a los posibles errores en que los estudiantes pueden incurrir.

Dispuestos a abordar la problemática del aprendizaje de un tema por parte de los escolares estructuraremos el presente análisis en torno a dos organizadores: *Expectativas de Aprendizaje y Limitaciones del Aprendizaje*.

Por otro lado analizaremos las "*Oportunidades del Aprendizaje*" en el ANEXO III.

Expectativas de aprendizaje

En este organizador del análisis cognitivo se caracterizará lo que el docente espera que aprendan los escolares de 3º de E.S.O en relación con el tema de sucesiones.

Desde el análisis de contenido y desde el currículo, se acotarán unas prioridades de aprendizaje, estableciéndose así unas expectativas generales. Para ello se enunciarán unos objetivos específicos, que se pretende que alcance el alumnado, y finalmente se estudiará a que **competencias matemáticas PISA** contribuye a alcanzar cada unos de los objetivos propuestos.

Desde el esquema conceptual del análisis de contenido se ha seleccionado tres focos de gran importancia para el aprendizaje del alumnado. Los mencionados tres focos son los siguientes:

- **Clasificar las sucesiones según sus características**
- **Operar con sucesiones**
- **Matematización del problema**

Una vez establecidos los focos prioritarios de interés en los que se divide el tema de sucesiones, se pueden distinguir dos niveles de expectativas que un profesor debe tener en cuenta. Se hablará pues de "*objetivos específicos*" (que nos ayudará a alcanzar competencias) y "*competencias matemáticas*" (que nos ayudará a alcanzar competencias básicas).

Volviendo al tema que estamos tratando, se expondrán a continuación los objetivos específicos dentro de cada uno de los focos de interés que se han mencionado con anterioridad:

Bloque 1: Clasificar las sucesiones según sus características

1) Identificar regularidades en una secuencia de números

2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas

4) Identificar patrones en las regularidades gráficas, reconociendo la secuencia numérica de la misma

5) Representar sucesiones gráficamente

Bloque 2: Operar con sucesiones

6) Hallar la suma y multiplicación de sucesiones

7) Realizar las operaciones pertinentes mediante el software "mathematica"

8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.

9) Identificar cuando es necesario la realización de la suma de n términos consecutivos en un problema dado.

Bloque 3: Matematización del problema

10) Identificar sucesiones en nuestro entorno

11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión

Una vez establecidos los objetivos específicos por bloques o focos, se realizará un estudio de los mismos para detectar a qué competencias matemáticas PISA contribuye a desarrollar. Para ello comenzaremos enunciando cuáles son las citadas competencias matemáticas, que debido a su importancia, adquieren un gran interés en el desarrollo del análisis cognitivo:

***PR**: "Pensar y razonar"*
***C**:" Comunicar"*
***RP**: "Resolver y plantear problemas"*
***LS**: "Uso del lenguaje simbólico"*
***AJ**: "Argumentar y justificar"*
***M**: "Modelizar"*
***R**: "Representar"*
***HT**:"Emplear soportes y herramientas tecnológicas"*

Veamos pues a que competencias matemáticas PISA contribuye cada uno de los objetivos específicos establecidos:

Clasificar las sucesiones según sus características	*PR*	*AJ*	*C*	*M*	*RP*	*R*	*LS*	*HT*
Identificar regularidades en una secuencia de números	★			★				
Obtener el termino general de una sucesión conocidos varios términos de la misma	★						★	
Identificar progresiones aritméticas y geométricas		★				★		
Identificar patrones en las regularidades gráficas, reconociendo la secuencia numérica de la misma	★	★		★		★		
Representar sucesiones gráficamente						★		★

Operar con sucesiones	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Hallar la suma y multiplicación de sucesiones		★			★		★	
Realizar las operaciones pertinentes mediante el software "mathematica"	★			★	★		★	★
Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.	★	★			★		★	
Identificar cuando es necesaria la realización de la suma de n términos consecutivos en un problema dado.	★	★			★		★	

Matematización del problema	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Identificar sucesiones en nuestro entorno		★	★	★		★	★	★
Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión	★		★	★		★	★	

Análisis de las limitaciones

Una vez aclarados cuales son los objetivos que se pretenden conseguir, nos centraremos pues en cuáles son las *dificultades y errores* en que pueden incurrir los escolares en el tema que presentamos. De hecho el propósito principal de este apartado es analizar cuáles pueden ser los obstáculos que ralenticen el proceso de aprendizaje, de forma que podamos anticiparnos a esta indeseable situación y seamos capaces de solventarla.

Veamos a continuación cuales son los errores y dificultades que se han considerado relevantes, en cuanto al tema de sucesiones se refiere, relacionándolo con los objetivos a los que alude:

	ERRORES Y DIFICULTADES	OBJETIVOS
$\mathbf{E_1}$	*Confunden los conceptos de término e índices*	1,2
$\mathbf{E_2}$	*Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores*	1,2
$\mathbf{E_3}$	*Confunden progresión aritmética y geométrica*	3
$\mathbf{E_4}$	*No son capaces de identificar las sucesiones como un conjunto de elementos que tienen características comunes*	4
$\mathbf{E_5}$	*Confunden la suma de los términos de una progresión con la búsqueda del término general*	2,8,9
$\mathbf{E_6}$	*No son capaces de detectar regularidades*	1,4
$\mathbf{E_7}$	*En una representación grafica saben obtener el siguiente término de la representación pero no el término general de la sucesión.*	2,5
$\mathbf{E_8}$	*No saben contextualizar el problema*	9,10
$\mathbf{E_9}$	*No saben a partir del término general encontrar la sucesión*	1,3
$\mathbf{E_{10}}$	*No siguen el razonamiento para la obtención de la suma de los n primeros términos de una progresión, solo memorizan*	8,9
$\mathbf{E_{11}}$	*No saben razonar que la suma de los términos de una progresión se puede expresar en función de la diferencia o razón*	3,6

Nota: Aunque en los errores no aparezca destacado el "**objetivo 7**" tenemos que tener en cuenta que participa en casi todos los errores comentados ya que a la hora de realizar un problema con una herramienta informática se deben tener todos los conceptos claros. Si bien se podría citar un error específico que alude solamente a este objetivo, considerando pues:

$\mathbf{E_{12}}$	*No saben razonar que la suma de los términos de una progresión se puede expresar en función de la diferencia o razón*	3,6

ANALISIS DE INSTRUCCIÓN - ¿CÓMO ENSEÑAR?

El análisis de instrucción consiste en el desarrollo de las tareas en materia de diseño, selección y secuenciación. Este análisis alude directamente a la planificación de la "**Unidad Didáctica**".

La fundamentación de este análisis se realizará de acuerdo con lo visto en la asignatura "*Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas*" del Máster universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato. Sin embargo el análisis no será plenamente desarrollado ya que durante la unidad didáctica se tocarán varios temas que conciernen a este a análisis.

En primer lugar tendremos en cuenta las tareas expuestas durante la unidad didáctica, que se desarrollarán en 7 sesiones. Fundamentalmente mediante el análisis de instrucción se toman las bases para programar una serie de tareas que permitan a los escolares:

- *Alcanzar las expectativas fijadas en el análisis cognitivo.*
- *Superar los errores y limitaciones que se puedan encontrar los escolares.*
- *Alcanzar las competencias matemáticas definidas por PISA.*

ANÁLISIS DE LA EVALUACION

Una parte de especial importancia en el análisis de instrucción concierne al "**análisis de evaluación**". Mediante el análisis de evaluación se pretende fundamentalmente diseñar tareas que nos permitan evaluar a nuestros alumnos. Si bien cuando se habla de "evaluación" todo el mundo piensa en exámenes, se verá en el desarrollo del mismo que nuestra unidad didáctica tendrá en cuenta otros elementos que también nos servirán para evaluar a nuestros alumnos.

Se presentan a continuación las estrategias que se llevarán a cabo para la evaluación, de forma que se realizará una evaluación de carácter sumativo y formativo:

- **Evaluación continua**: Es uno de los aspectos más relevantes en el desarrollo de la unidad didáctica, ya que se evaluará al alumno de una forma constante en el desarrollo de la unidad. Como herramienta de evaluación utilizaremos la *"observación directa"* en el transcurso de las sesiones, teniendo en cuenta pues el trabajo realizado en casa, el interés del alumno, el comportamiento,… Otra herramienta importante a la hora de realizar la evaluación continua es la revisión del cuaderno de matemáticas, que reflejará, en cierta medida, el trabajo de los escolares en clase.

- **Presentación de trabajos**: Aunque estas tareas de evaluación se pueden entender como evaluación continua, merece la pena hacer de ellas una mención especial. Se propondrán dos trabajos de carácter obligatorio: Uno de ellos una presentación oral en grupos de 5 alumnos y otro individual concerniente a las prácticas de ordenador.
- **Evaluación final**: Se llevará a cabo en la última sesión programada y consistirá en el método tradicional de evaluación: "**Examen**". En esta prueba se intentará abarcar la mayor parte de los contenidos puestos en práctica durante el desarrollo de las clases.

En el ANEXO I de este trabajo encontraremos una propuesta de examen que se realizaría en la séptima y última sesión.

Esta prueba anteriormente citada, consistirá en la realización de 5 tareas, que en primer lugar, vamos a estudiarlas en función de su complejidad y contribución a los objetivos competencias matemáticas PISA. Veámoslo en la siguiente tabla:

Tarea	Puntuación	Objetivos	Competencias	Complejidad
1	2	1, 2, 6,	M, LS	Reproducción
2	2	4, 10, 11	PR, LS, RP, AJ	Reflexión Conexión
3	2,5	3,8,10	PR, LS, RP	Reflexión
4	2,5	3,8,10	PR, LS, RP	Reflexión
5	1	5, 10, 11	R	Reproducción

El examen tendrá una máxima calificación de "10" y una mínima de "0", y se supondrá superado si el alumno alcanza una nota mayor o igual a 5. La nota del examen supondrá un 50% de la evaluación general.

4.- Unidad didáctica: Sucesiones y progresiones

Contenidos:

Conceptuales	Procedimentales	Actitudinales
➢ Progresión aritmética ➢ Progresión geométrica ➢ Interpolación de términos ➢ Suma de n términos consecutivos ➢ Sucesión de Fibonacci ➢ Regularidad	➢ Deducir el término general de una sucesión ➢ Calcular un término cualquiera conocido el término general ➢ Reconocer progresiones aritméticas, obtener su término general y término cualquiera conocidos el primer término y la diferencia ➢ Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética ➢ Identificar una progresión geométrica, obtener su término general y otro cualquiera a partir del primer término y la razón ➢ Calcular el producto y la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. ➢ Reconocer la sucesión de Fibonacci y saber aplicarla a situaciones reales.	➢ Confianza en las capacidades propias para solucionar problemas numéricos ➢ Reconocer la presencia de progresiones aritméticas en contextos reales ➢ Reconocer la presencia de progresiones geométricas en contextos reales. ➢ Reconocer la presencia de la sucesión de Fibonacci en algunos fenómenos naturales

Objetivos específicos

Los objetivos específicos que vamos a intentar superar en esta unidad didáctica son:

1. *Encontrar regularidades en secuencias numéricas.*
2. *Encontrar algunas de las relaciones existentes entre las regularidades y las sucesiones numéricas.*
3. *Encontrar el término general de una progresión aritmética o geométrica.*
4. *Identificar y emplear sucesiones.*
5. *Hallar la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.*
6. *Hallar la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica.*
7. *Saber operar con sucesiones, especialmente sumas y restas.*
8. *Emplear los recursos TIC´s para representar sucesiones numéricas*
9. *Explicar fenómenos de la vida cotidiana con el lenguaje algebraico de las sucesiones, especialmente con la sucesión de Fibonacci.*

Metodología

En primer lugar vamos a considerar los conocimientos previos del alumnado, siendo esta la base de la que partamos para aplicar nuestra unidad didáctica. Además es de gran importancia tener en cuenta el ritmo de aprendizaje individual de cada alumno.

Como se introducía al principio de la unidad didáctica, se intentará captar la atención del alumnado mediante la exposición de ejemplos prácticos e interesantes desde el punto de vista social y natural. De esta forma se tratará de "*involucrar*" al alumno en el tema en la medida de lo posible y se tratará de relacionar las sucesiones con otros ámbitos más comunes para el alumno, como pude ser el arte. De esta forma se enfatizará *el enfoque funcional de las matemáticas*, tal y como propone el currículo oficial vigente.

Otra metodología que se intentará llevar a cabo en el desarrollo de la unidad será la intencionalidad por parte del docente de dirigir al alumno por un camino por el cual él mismo descubra algunos conceptos, es decir, se tendrá en cuenta *la perspectiva constructivista del aprendizaje.*

Por otro lado, se pretende que *la metodología sea activa y participativa*, fomentando en los escolares una actitud crítica mediante la realización de actividades de desarrollo en clase.

Se promoverá el uso adecuado del lenguaje matemático para expresar los términos matemáticos adecuados. Además se prestará especial atención a la interpretación de los resultados matemáticos que además se irá comprendiendo que, en este tema en cuestión, nos ayudan a conocer nuestro mundo.

Al encontrarnos en el ciclo de enseñanza secundaria obligatoria tenemos que tener en cuenta que las matemáticas escolares están enfocadas principalmente al entendimiento y aplicación de situaciones reales cotidianas, tal y como aparece redactado en la definición curricular de la competencia matemática. De esta forma se pretende preparar al alumno para que sepa desenvolverse en situaciones que se puedan dar con relativa facilidad en la vida social.

Nuestra unidad didáctica también tendrá en cuenta aspectos relacionados con la atención a la diversidad, de forma que se preparará, en cada caso, el material adecuado para aquellos casos en los que sea necesaria su aplicación.

Por último, y no menos importante, se hará especial hincapié en el uso de tecnologías de la información y comunicación. "El mundo está en constante evolución tecnológica" y esta unidad didáctica lo tendrá en cuenta.

Contribución al desarrollo de las competencias básicas

- **Desarrollo de la competencia matemática**
  - Interpretar datos numéricos en situaciones reales.
  - Resolver problemas de la vida cotidiana con los conocimientos adquiridos.
  - Interpretar y expresar con claridad informaciones y argumentaciones.
  - Poner en práctica razonamientos que conduzcan a la resolución de problemas.

- **Desarrollo de la competencia digital y en el tratamiento de la información**
    - Transformar la información en conocimiento.
- **Desarrollo de la competencia en el conocimiento y la interacción con el mundo físico**
    - Reconocer e interpretar sucesiones numéricas, como una importante herramienta para conocer el mundo que nos rodea.
- **Desarrollo de la competencia en comunicación lingüística**
    - Expresar con propiedad algunas situaciones reales relacionadas con las sucesiones.
- **Desarrollo de la competencia social y ciudadana**
    - Actuar a favor de los más "desfavorecidos", académicamente hablando.
- **Desarrollo de la autonomía e iniciativa personal**
    - Ser constante en el trabajo aprendiendo de los errores.
- **Desarrollo de la competencia para aprender a aprender**
    - Desarrollar el pensamiento creativo.

Recursos

"Contamos con gran cantidad de recursos y herramientas manipulativas que nos ayudan a diseñar tareas matemáticas que ponen en juego capacidades de los alumnos que de otro modo sería complicado lograr (Lupiañez, 2009)".

Como recursos se dispondrá de algunas herramientas tecnológicas como el programa informático "Mathematica". Dado el carácter del tema expuesto en la unidad didáctica, se llevará material a clase para que los alumnos observen como se pueden explicar algunos fenómenos naturales mediante las matemáticas.

Atención a la diversidad

Entendemos la ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD como el conjunto de acciones educativas que en un sentido amplio intentan prevenir y dar respuesta a las necesidades, temporales o permanentes, de todo el alumnado del centro y, entre ellos, a los que requieren una actuación específica derivada de factores personales o sociales relacionados con situaciones de desventaja sociocultural, de altas capacidades, de compensación lingüística, comunicación y del lenguaje o de discapacidad física, psíquica, sensorial o con trastornos graves de la personalidad, de la conducta o del desarrollo, de graves trastornos de la comunicación y del lenguaje de desajuste curricular significativo.

(Ángela María Vargas Merina. Revista digital "Innovación y Experiencias educativas")

La unidad didáctica considerará la atención a la diversidad conforme la ley lo dispone según la orden **25-7-2008**, en la que se regula la atención a la diversidad del alumnado. Nuestra unidad didáctica constará de:

Refuerzo: Dado que el tiempo que tenemos para trabajar el tema en cuestión es limitado, se contará con una serie de tareas que sirvan para que el alumnado "refuerce" sus conocimientos. De esta forma el alumno podrá trabajar algunos de los conceptos explicados en clase, mejorando así la comprensión de los mismos. Estas tareas serán principalmente tareas de ejercitación que ayuden a adquirir esa "destreza" tan importante para la materia. La batería de tareas de refuerzo se puede encontrar en el ANEXO I.

Ampliación: Es adecuado para mejorar el desarrollo del tema proponer una serie de actividades de ampliación, con las cuales, el alumno pueda profundizar aun más en el tema. Estas actividades serán de carácter voluntario pues no serán necesarias para superar la unidad didáctica, si bien se valorará positivamente que el alumno se haya involucrado en las mismas. Las tareas propuestas serán tareas principalmente de reflexión. La batería de tareas de ampliación se puede encontrar en el ANEXO I.

Necesidades específicas de apoyo educativo: Durante mi periodo de prácticas he tenido la oportunidad de tratar con una alumna con una discapacidad auditiva leve y con un alumno hiperactivo por tanto se procurará en esta unidad tratar dichas necesidades.

- ✓ En cuanto a la alumna con deficiencia auditiva se procurará hablar de frente de forma que pueda leer los labios con facilidad, además de sentarla en primera fila con el fin de que pueda escuchar mejor.
- ✓ Al alumno con problemas de hiperactividad trataremos de situarlo lo más cerca posible del profesor para controlar que efectivamente está realizando las tareas que conciernen. En caso de que esta medida no surja efecto nos pondremos en contacto con los padres y, con su consentimiento, llevaremos un seguimiento individualizado del alumno en común con los padres.

Actividades graduadas: Las tareas que se van a proponer en el transcurso de la unidad didáctica son tareas de dificultad graduada. Así pues se pretende que los alumnos vayan asimilando conceptos cada vez más complejos.

Evaluación

Criterios de evaluación

1. Hallar la regla de formación de una sucesión, si es posible.
2. Representar graficamente una sucesión.
3. Determinar términos en una sucesión.
4. Diferenciar las progresiones aritméticas y obtener su diferencia.
5. Hallar el término general de una progresión aritmética.
6. Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética.
7. Distinguir las progresiones geométricas y obtener su razón.
8. Hallar el término general de una progresión geométrica.
9. Calcular la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica.
10. Resolver problemas de sucesiones y progresiones con el software “Mathematica”.
11. Identificar la sucesión de Fibonacci y sus multiples utilidades.

MÍNIMOS EXIGIBLES

1. Distinguir los tipos de progresiones.
2. Determinar la diferencia de una progresión aritmética y la razón de una geométrica.
3. Calcular el término general de una progresión.
4. Resolver problemas reales de sucesiones y progresiones.

Estrategias de evaluación

- ✓ Observación directa
- ✓ Evaluación inicial
- ✓ Evaluación continua
- ✓ Evaluación final

Criterios de calificación

Veamos pues los criterios que se tendrán en cuenta a la hora de evaluar al alumnado:

- ✓ Cuaderno personal de clase y elaboración de las actividades diarias (10%)
- ✓ Participación en clase y comportamiento (10%)
- ✓ Elaboración del trabajo de prácticas (10%)
- ✓ Elaboración del trabajo de exposición oral (10%)
- ✓ Prueba escrita (60%)

Temporalización

Esta unidad didáctica se desarrollará durante el segundo trimestre, y tendrá una duración de 7 sesiones. A continuación veremos las sesiones en detalle:

DESARROLLO DETALLADO DE TODAS LAS SESIONES

SESION 1: INTRODUCCIÓN Y CONOCIMIENTOS ELEMENTALES. CONCEPTO Y REPRESENTACIÓN DE SUCESIONES

Contenidos básicos: Sucesión, secuencia numérica, representación grafica de sucesiones, regularidades, números triangulares, números cuadrangulares,

Situaciones: Educativa, Social

Sistemas de representación: Simbólico y gráfico

Expectativas de aprendizaje:

Las capacidades que se pretende que los alumnos adquieran son:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números

4) Identificar patrones en las regularidades gráficas, reconociendo la secuencia numérica de la misma

5) Representar sucesiones gráficamente

Además fijadas las expectativas del aprendizaje, las competencias matemáticas PISA con las que vamos a trabajar son:

Pensar y razonar (PR), Argumentar y justificar (AJ), Modelizar (M), Representar(R) y herramientas tecnológicas (HT)

Intenciones de la planificación de la sesión

En primera estancia se pretende durante el desarrollo de esta sesión introducir el tema propuesto: "**Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas**". La sesión comenzará con una tarea de un claro carácter motivador (*Tarea 1*), que ayude a "*involucrar*" en la medida de lo posible al alumnado. A continuación proseguiremos con los conceptos relativos a las expectativas marcadas para el desarrollo de la unidad didáctica. Por último se propondrán dos tareas que el escolar deberá realizar en casa y de forma individual que le servirá al mismo para repasar todos los conceptos vistos en clase.

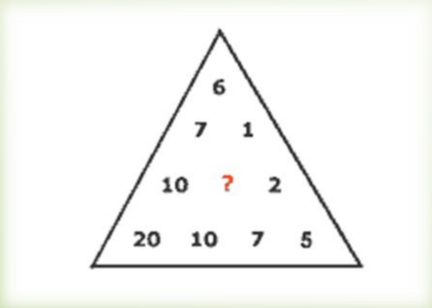
Enmarque de la sesión

En esta primera sesión, como se ha comentado, se pretende introducir el tema. Como docentes, hemos de ser consecuentes con el hecho de que los conceptos relativos a las sucesiones resultan completamente nuevos para los escolares ya que el tema no ha sido tratado en cursos anteriores y puede suponer un esfuerzo cognitivo notable para nuestros alumnos. Así pues se deberá tener especial cuidado a la hora de introducir conceptos e intentar llevar a cabo tareas que aclare el significado de los mismos.

Secuenciación

Tarea 1

Dada la siguiente figura triangular en la que aparecen una serie de números, examina las relaciones existentes y discute con tu compañero cual es el valor del signo "?". ¿Serías capaz de realizar por tu cuenta la fila de números siguiente? .Explica tu respuesta



Duración: 10 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Al comenzar la clase el profesor explica brevemente que los test para medir el coeficiente intelectual utilizan en varias ocasiones algunos conceptos matemáticos que aluden directamente al tema. A continuación el profesor deja propuesta esta tarea para que los alumnos trabajen en parejas y discutan cual sería la solución idónea. Finalmente se discutirá en clase la solución adecuada.

Materiales y recursos: Papel, pues el ejercicio se dará impreso a los escolares

Después de haber realizado el ejercicio anterior se ha conseguido captar la atención del alumnado y, aunque la mayor parte no sea consciente de ello, ellos solos han introducido el concepto de sucesión. A continuación el profesor explica en qué consisten las sucesiones numéricas. Explicando detenidamente:

- La relación que debe guardar la secuencia de números entre ellos.
- La terminología propia del tema: término, índice,…Así como la simbología que denotará cada concepto en cada caso:
  - (a_n) *para referirnos a una sucesión*
  - a_n *para referirnos al término enésimo*
  - *Los números naturales para referirnos al índice de los términos de la sucesión*
- Se hará especial hincapié en las diferencias entre cada uno de los conceptos, especialmente entre índice y término (puede suponer una dificultad, véase el análisis cognitivo)
- Finalmente se subrayará que las sucesiones tienen primer término pero carecen de un último término, es decir, las sucesiones tienen un carácter infinito

Duración de la explicación: 10 min

Para ver si los alumnos han comprendido bien el concepto, se propone la siguiente tarea.

Tarea 2

Halla los dos términos siguientes de las sucesiones:

- ***a)*** $(2, 4, 6, 8, \dots)$
- ***b)*** $(7, \frac{7}{2}, \frac{7}{4}, \frac{7}{8}, \frac{7}{16}, \dots)$

Representa las sucesiones en forma de tabla de entrada simple

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribirá en la pizarra la tarea para que los alumnos la anoten en sus cuadernos. El principal propósito de esta tarea es evaluar por parte del profesor el grado de asimilación del concepto de sucesión adquirido por los alumnos. A priori resulta una tarea sencilla de realizar, pero en la resolución de la misma el profesor preguntará a los escolares preguntas tales como: *¿qué índice corresponde con el valor del término "8" en la primera sucesión?* . Además se pondrá en juego la representación gráfica en forma tabular para que los alumnos diferencien entre término e índice. De esta forma se estará seguro si la explicación anterior ha dado sus frutos y si es necesario hacer alguna aclaración.

Materiales y recursos: El recurso que se empleará será la pizarra.

Una vez llegados a este punto se considera que el alumno se está familiarizando con el concepto de sucesión numérica y que asimila la misma como una relación entre una secuencia de números. Ahora el docente introduce como se podrían representar las sucesiones, de forma que ayude a la comprensión del carácter infinito de las sucesiones. El profesor explica en pizarra pues:

- Las sucesiones se pueden representar en la recta real por medio de puntos en la misma. Si bien se aclarará que esta representación es pobre pues solo se hace referencia a los términos de la misma. Para su explicación se pintará en la pizarra la representación mediante la recta de una sucesión cualquiera.
- Por otro lado las sucesiones se pueden representar mediante el plano cartesiano. Poniendo de manifiesto la relación entre el índice y el término de una sucesión. De igual forma la explicación se llevará a cabo mediante a ejemplificación en pizarra de una sucesión cualquiera.

Duración de la explicación: 5 minutos

Tarea 3

Representa las siguientes sucesiones en la recta real y en el plano de coordenadas cartesianas:

- ***a)*** $(1,\ 4,\ 7,\ 10, \dots)$
- ***b)*** $(-2,\ 4,\ -8,\ 16, \dots)$
- ***c)*** $(1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8, \dots)$

d) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}\right)$

Duración: 8 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribirá en la pizarra la tarea para que los alumnos la anoten en sus cuadernos. Se pretende que el alumno se familiarice con la representación de las sucesiones en sus diversas formas. El profesor además, aclarará que aunque facilite los primeros términos de la sucesión, los alumnos deberán representar la misma con más términos. La corrección de la tarea se realizará en pizarra por parte de los alumnos.

Materiales y recursos: El recurso que se empleará será la pizarra.

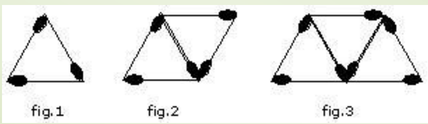
A continuación y para terminar la primera sesión el profesor explicará:

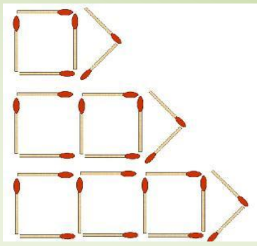
- El significado de regularidad como una secuencia de figuras que guardan relación entre sí.
- Mediante un ejemplo se verá la secuencia de una regularidad en concreto y la relación conceptual que guardan con las sucesiones.

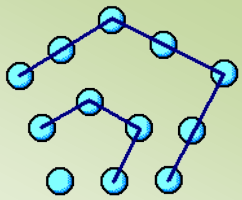
Duración de la explicación: 7 min

Una vez explicadas las regularidades el docente expondrá la siguiente tarea

Tarea 4







Dada las siguientes secuenciaciones de figuras, representa mediante un dibujo las dos siguientes figuras que corresponderían. A continuación completa la siguiente tabla en función del número de cerillas que forman cada elemento de la sucesión.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
Secuencia 1					
Secuencia 2					
Secuencia 3					

Duración: 10 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor proporcionará a los alumnos un folio impreso con la tarea expuesta. Acto seguido se pedirá a los escolares que resuelvan el problema en parejas, siempre justificando la decisión que han tomado oralmente a sus compañeros. El objetivo de esta actividad, al igual que la primera es motivar al alumnado ya que se pone en juego la utilización de destrezas matemáticas y lógicas para la resolución del problema. Además mediante la utilización de ***la tabla de simple entrada*** el alumno conseguirá discernir adecuadamente entre la dificultad que supone la diferenciación entre término e índice (véase errores y dificultades del análisis cognitivo), amén de la relación entre las diferentes representaciones gráficas de las cuales las sucesiones son susceptibles.

Materiales y recursos: El recurso empleado es el papel, además de la pizarra que ayudará en la resolución del ejercicio.

Tarea 5 (propuesta para casa)

Halla los dos siguientes términos y representa gráficamente las siguientes sucesiones en el plano de coordenadas cartesianas y en la recta real:

a) $\left({}^{1}/_{4},\ {}^{3}/_{4},\ {}^{5}/_{4},\ {}^{7}/_{4},\dots\right)$
b) $\left({}^{1}/_{2},\ {}^{1}/_{6},\ {}^{1}/_{18},\ {}^{1}/_{54},\dots\right)$
c) $(1,\ 3,\ 7,\ 15,\dots)$
d) $\left(3,\ 2,\ {}^{4}/_{3},\ {}^{8}/_{9},\dots\right)$

Representa las sucesiones anteriores en una tabla de simple entrada.

SESIÓN 2: SUCESIONES SEGÚN SU TÉRMINO GENERAL. OPERACIONES CON SUCESIONES.

Contenidos básicos: Deducir el término general de una sucesión, calcular un término cualquiera conocido el término general, modelizar matemáticamente una regularidad gráfica, suma y producto de sucesiones,…

Situaciones: Educativa, Social

Sistemas de representación: Simbólico y gráfico

Expectativas de aprendizaje:

Las capacidades que se pretende que los alumnos adquieran son:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números

2) Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma

4) Identificar patrones en las regularidades gráficas, reconociendo la secuencia numérica de la misma

6) Hallar la suma y multiplicación de sucesiones

Además fijadas las expectativas del aprendizaje, las competencias matemáticas PISA con las que vamos a trabajar son:

Pensar y razonar (PR), Argumentar y justificar(AJ), Modelizar(M), Representar(R), Lenguaje simbólico (LS), herramientas tecnológicas (HT)

<u>Intenciones de la planificación de la sesión</u>

En el desarrollo de esta sesión se pretende profundizar aún más en el concepto de sucesión teniendo como meta la representación de una sucesión cualquiera mediante su término general de forma que alumno observe que la sucesión queda perfectamente caracterizada mediante esta expresión algebraica. Además se intentarán desarrollar las pautas necesarias para que el alumno relacione el concepto de sucesión con el de regularidad. Finalmente se explicará que se puede operar con sucesiones, luego las sucesiones son susceptibles de ser sumadas, multiplicadas,…

Enmarque de la sesión

En esta sesión el alumno se está empezando a familiarizar con el concepto de sucesión, si bien hemos de ser consecuentes con las dificultades cognitivas que presenta el tema. Así pues, tendremos que tener cuidado al introducir nuevos conceptos como el de término general y expresar siempre las tareas y explicaciones desde un punto de vista funcional, explicando en cada caso cual es la utilidad de los mismos.

Secuenciación

Tarea 6

Considerando las siguientes sucesiones: halla su vigésimo y centésimo término:

a) $(2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10)$
b) $(2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32)$

Representa en forma de tabla de simple entrada las secuencias anteriores hasta su séptimo término ¿Cómo lo has hecho?. Explícalo al resto de tus compañeros

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Al comenzar la clase el profesor escribe en la pizarra las dos sucesiones en la pizarra y a continuación pregunta al alumnado cual sería el término vigésimo y el término centésimo. El objetivo final de esta tarea es que los escolares se den cuenta por sí mismos de la regla de recurrencia que siguen estas sucesiones, y que sepan la importancia de la misma al definir todos los términos de una sucesión.

Materiales y recursos: Papel y pizarra.

Después de haber realizado el ejercicio anterior se ha conseguido captar la atención del alumnado pues ellos solos han conseguido llegar a la solución. La tarea anterior servirá de base para la explicación del término general en la que se destacará:

- La forma de expresión del término general de una sucesión dada, y que se dará en función del término "n" $\rightarrow a_n = f(n)$
- Se explicará que expresando una sucesión cualquiera mediante su término general quedan definidos todos los términos de la misma

De hecho para afianzar los conocimientos adquiridos el profesor expresará algunos ejemplos de sucesiones numéricas en función de su término general en la pizarra.

Duración de la explicación: 5 min

Una vez terminada la explicación, para comprobar si efectivamente se ha entendido el procedimiento se realizará la siguiente tarea de ejercitación:

Tarea 7

Expresa las siguientes sucesiones en función de su término general:

a) $(\mathbf{2},\ \mathbf{8},\ \mathbf{14},\ \mathbf{20}, \dots)$

b) $\left(\mathbf{5},\ \frac{5}{2},\ \frac{5}{4},\ \frac{5}{6},\ \frac{5}{8}, \dots\right)$

Escribe los cuatro primeros términos de las siguientes sucesiones y represéntalas gráficamente en el plano de coordenadas cartesianas y en forma tabular:

a) $a_n = \frac{n-1}{2}$

b) $a_n = {}^{3}/_{2} + 2\,n$

Duración: 10 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Volviendo a hacer uso de la pizarra el docente expondrá las sucesiones que se pueden observar en la tarea, para que después los escolares las resuelvan. De esta forma nos aseguraremos que los alumnos entiendan la necesidad de representar las sucesiones mediante el término general. Finalmente y, teniendo en cuenta el tiempo disponible los ejercicios se resolverán en pizarra, bien por el profesor o bien por los alumnos.

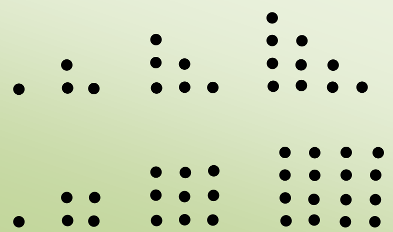
Materiales y recursos: El recurso que se empleará será la pizarra.

Hasta aquí suponemos que el alumno ha comprendido, en cierta medida, el concepto de sucesión y las distintas formas que podemos expresarlas. A continuación, tendremos en cuenta la teoría del desarrollo próximo de Vigotsky, e intentaremos relacionar casi todos los conceptos vistos hasta ahora, amén de algunos conocimientos matemáticos que el alumno domina y que les servirá de repaso en la siguiente tarea.

El aprendizaje se da cuando el alumno relaciona y pone en juego conocimientos que permanecen en su memoria permanente. Lo que pretende la tarea siguiente es que el alumno relacione los conocimientos adquiridos hasta este punto.

Tarea 8

Dada las siguientes regularidades, continúa con el elemento siguiente:



- ✓ ***¿Existe alguna relación geométrica entre cada uno de los elementos de las regularidades?. Dibuja el siguiente elemento de la regularidad.***
- ✓ ***¿Cuántos puntos forman cada uno de los elementos?. Expresa esta sucesión mediante su término general. Utiliza una tabla e simple entrada si es necesario***
- ✓ ***¿Existe alguna relación algebraica entre los puntos que forman la base?.***
- ✓ ***Si suponemos que la distancia entre puntos adyacentes horizontal es 1, ¿Existe alguna relación numérica entre las áreas de las figuras?***

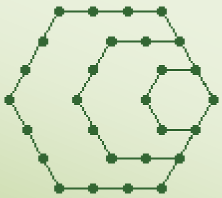
Duración: 10 minutos

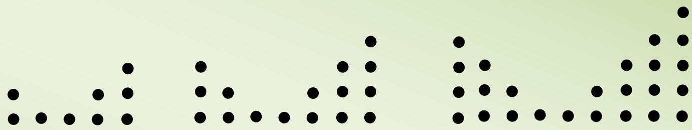
Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea se presentará al alumnado como una tarea de gran importancia debido a la relación que supone entre los conceptos vistos. El profesor repartirá la misma en papel a cada uno de los alumnos para que los examine.

Debido a la gran dificultad que la tarea presenta se irán realizando de forma graduada las preguntas propuestas y, el profesor, irá realizando indicaciones para que el alumno sea capaz de realizarlas (he aquí la gran duración de la actividad). Por ejemplo el profesor deberá indicar cuáles son las fórmulas para calcular las áreas. Además también se explicará que históricamente estas sucesiones se conocen como sucesión de números triangulares y sucesión de números cuadrangulares.

Materiales y recursos: Pizarra

Tarea 9





- ***a) Representa la sucesión numérica de los puntos en una tabla de simple entrada.***
- ***b) Expresa las regularidades mediante su término término general.***
- ***c) Explica el procedimiento que has usado para calcular el término general de la segunda regularidad.***

Duración: 5 minutos

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea propone al alumnado un ejercicio de gran similitud con el anterior. De hecho su principal objetivo es afianzar aprendizajes llevados a cabo durante la tarea anteriormente mostrada. Además para entender el apartado “b” de esta tarea el alumno tendrá que comprender que la figura se puede dividir en dos figuras triangulares y la sucesión se llevará a cabo sin más que sumar las regularidades. Esto llevará inconscientemente al concepto de suma de sucesiones que es lo que se pretende en última estancia.

La presentación en el aula se realizará de forma análoga a la tarea 8, es decir, el profesor repartirá la tarea en papel para que los alumnos la resuelvan. Finalmente se corregirá la actividad en pizarra.

Materiales y recursos: Pizarra y papel.

Por último, con la ayuda de la tarea realizada anteriormente, en esta sesión se pretende que el alumno conozca que se puede trabajar con sucesiones de forma algebraica, es decir, que se puede operar con sucesiones, realizando así sumas, restas, multiplicaciones,…

Es fundamental que el alumno entienda que el resultado de estas operaciones continúan siendo sucesiones. Para ello el profesor explicará que para realizar estas operaciones se utilizara el término general de las sucesiones implicadas en la operación. En el transcurso de la explicación el profesor realizará diversos ejemplos en pizarra.

Duración de la explicación: 10 minutos

Para finalizar la clase el profesor propondrá el siguiente ejercicio para que los alumnos se familiaricen con las operaciones entre sucesiones

Tarea 10

Considerando las siguientes sucesiones expresadas según su término general:

$$a_n = \frac{2+2n}{4}$$

$$b_n = 3 + \frac{n}{4}$$

Realiza las siguientes operaciones y representa la sucesión resultante en el plano de coordenadas cartesianas:

- *a)* $(a_n + b_n)$
- *b)* $(a_n - b_n)$
- *c)* $(a_n * b_n)$

Duración: 10 minutos

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor volverá a hacer uso de la pizarra para plantear la tarea. Con la tarea se pretende que el alumno adquiera destreza a la hora de operar con sucesiones y que comprenda que el resultado obtenido también es una sucesión. Finalmente el ejercicio se resolverá en pizarra por parte del alumnado con las intervenciones que el profesor considere oportunas.

Materiales y recursos: Pizarra

Tarea 11 (propuesta)

Expresa las siguientes sucesiones en función de su término general

$$(a_n) = \{1, 5, 9, 13, 17, \dots\}$$

$$(b_n) = \left\{\frac{1}{5}, \frac{3}{10}, \frac{9}{20}, \frac{27}{40}, \dots\right\}$$

A continuación realiza las siguientes operaciones:

a) $(a_n + b_n)$
b) $(a_n - b_n)$
c) $(a_n * b_n)$

SESION 3: Progresiones aritméticas. Suma de los n términos consecutivos. Contextualización de problemas

Contenidos: Progresión aritmética, suma de los primeros n términos consecutivos de una progresión aritmética, reconocer la presencia de progresiones aritméticas en contextos reales.

Situaciones: Educativa, Personal y Pública.

Sistemas de representación: Simbólico

Expectativas de aprendizaje

Durante esta sesión se pretende contribuir al desarrollo de los objetivos:

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas

5) Representar sucesiones gráficamente

8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.

9) Identificar cuando es necesario la realización de la suma de n términos consecutivos en un problema dado.

11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión

Además durante el desarrollo de la sesión trabajaremos con las competencias matemáticas PISA :

Pensar y razonar (PR), Resolver problemas, Argumentar y justificar(AJ), Modelizar(M), Representar(R), Lenguaje simbólico (LS), herramientas tecnológicas (HT)

Intenciones de la planificación

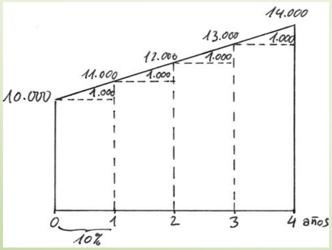
En esta sesión se diferenciarán las progresiones aritméticas como un caso particular de sucesión en la que un término dado es la suma del término anterior más una constante. Además se profundizará en la utilidad de las progresiones aritméticas aplicadas a la vida cotidiana. Por último se explicará el concepto de la suma de los n primeros términos de una sucesión aritmética siempre destacando el enfoque funcional del concepto.

Enmarque de la sesión

En esta sesión se pretende desarrollar el concepto de progresión aritmética. Como viene siendo normal en el desarrollo de las sesiones, las tareas no solo estarán elaboradas para que el alumno entienda el concepto, sino que se pretende que el escolar entienda el enfoque funcional del mismo, y que pueda aplicarlo en ciertas situaciones cotidianas. Aunque el escolar crea que el esfuerzo cognitivo en este apartado es menor (las progresiones aritméticas siguen un esquema bastante sencillo), no es así, ya que nos centraremos en explicar las mismas de una forma más matemática, desde el punto de vista algebraico.

Secuenciación

Tarea 12



Observamos la situación en que Juan invierte 10000 euros a plazo fijo. El banco, por su dinero invertido, le da una rentabilidad del 10% de su cantidad invertida por cada año que pasa ¿Cuánto gana Juan por cada año? ¿Puedes expresar esta situación en forma de sucesión? ¿Y mediante su término general?

Si el banco ofrece a Juan una rentabilidad del 5% de la cantidad invertida a principios de cada año, ¿hay alguna diferencia algebraica entre esta sucesión y la anterior? ¿Le merece la pena a Juan?

La clase comenzará con la exposición por parte del profesor de la caracterización de progresión aritmética. Para ello nos basaremos en la tarea anterior que aporta un contexto real y motivador que nos permitirá trabajar de una forma más adecuada. A la vez que vayamos solucionando la tarea, se irán introduciendo nuevos conceptos. El objetivo será que los escolares comprendan que:

- Las progresiones aritméticas son un tipo especial de sucesiones.
- Sabrán identificar el término “diferencia” notado por “d”.
- Diferenciarán entre progresiones aritméticas y las que no lo son

Duración de la explicación y tarea: 5 minutos aproximadamente.

Como ejemplificación de la explicación anterior se realizará la siguiente tarea:

Tarea 13

¿Cuál de las siguientes sucesiones es una progresión aritmética? .Explica tu respuesta

a) $(\boldsymbol{a_n}) = (\mathbf{2, 4, 6, 8, 10, \dots})$
b) $(\boldsymbol{b_n}) = (\mathbf{1, 2, 4, 8, 16, \dots})$

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Al proponer esta tarea, el alumnado sabe que es una tarea para ejemplificar la caracterización de “progresión aritmética”. Esta tarea se realizará entre toda la clase, siendo el profesor el que escriba en la pizarra, y los alumnos participen. Se pretende sobre todo que el alumnado identifique el término de diferencia “d” y lo asocie en las progresiones aritméticas. Además el docente propondrá que el alumnado busque en tareas anteriores progresiones aritméticas y explique porque lo son.

Materiales y recursos: Pizarra

Volviendo a la tarea que se propuso como ejemplo, el alumno identifico en la misma el término diferencia “d”, que corresponde al incremento de la cantidad por unidad de tiempo (se pretende que el alumno llegue a esta conclusión). A continuación el profesor propondrá que los alumnos establezcan la expresión del término general de la progresión en función del término “d”. Para ello se utilizará una estrategia constructiva realizando el cálculo de los primeros términos, y a continuación expresando los mismos mediante “d”. Finalmente el escolar llegará a la siguiente fórmula:

$$\boldsymbol{a_n = a_1 + (n-1).d}$$

Duración de la explicación: 5 minutos aproximadamente.

Para afianzar lo aprendido realizaremos la siguiente tarea:

Tarea 14

Argumenta en cada caso si la sucesión asociada es una progresión aritmética. En caso de serlo exprésala mediante su término general.

a) ***En la granja de Antonio hay 5 cerdos. Cada cerdo come dos kilos de pienso al día. Antonio tiene 80 kilos de pienso en la granja. ¿Cuantos kilos le van quedando por día?***
b) ***Una célula se reproduce por bipartición cada 6 horas. ¿Cuántas células habrá al paso de 48 horas?***
c) ***Salud está ahorrando para comprarse un móvil. Salud tiene ahorrado 10 euros. Si cada día ahorra 5 euros. ¿Cómo irán creciendo sus ahorros?***

Duración: 5 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: Al igual que la tarea anterior se pretende que el alumno ponga en práctica lo inmediatamente explicado. El objetivo más importante de la presente tarea es que el alumno adquiera una destreza significativa a la hora de presentar las progresiones aritméticas mediante su término general, si bien también es de gran importancia que identifique qué situaciones modelizan las progresiones aritméticas

Materiales y recursos: Pizarra

Se supone que el alumno ha comprendido el procedimiento mediante el cual se llega a expresar una progresión aritmética mediante su término general. Sin embargo, se pretende a continuación que el alumno profundice aún más en el concepto de progresión aritmética, poniendo en relación dos términos cualesquiera de la misma. Al finalizar la explicación el escolar entenderá la siguiente fórmula, con lo que conlleva:

$$a_n = a_m + (n - m).\,d$$

Como mecanismo para llegar a este resultado volveremos a la tarea 11, con la que empezamos a trabajar, y desde este ejemplo el escolar verá más claro el procedimiento que se ha de seguir para llegar a este resultado.

Duración de la explicación: 5 minutos aproximadamente

Para poner en práctica lo aprendido se realizará individualmente la siguiente tarea:

Tarea 15

Cierta ONG ha construido un pozo para abastecer de agua a la población de Somalia. Se sabe que el segundo metro costó 19 euros y el cuarto metro costó 27 euros. ¿Podrías expresar la progresión aritmética en función de su término general?

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribirá en la pizarra a modo de ejemplo la tarea. Con la elaboración de la misma el alumno pondrá en práctica lo aprendido (tarea de relación) y comprenderá la relación existente entre dos términos cualesquiera de una progresión aritmética dentro de un contexto real.

Materiales y recursos: Pizarra y cuaderno

Hasta aquí ha quedado más o menos claro la noción de progresión aritmética y como expresarla en función de su término general. Finalmente para quedar cerrado el apartado relativo a progresiones aritméticas nos queda el concepto de "suma de n términos consecutivos de una progresión aritmética".

Para explicar este procedimiento utilizaremos las siguiente tarea:

Tarea 16: "La suma de Gauss" (ver ANEXO I (tareas de ampliación))

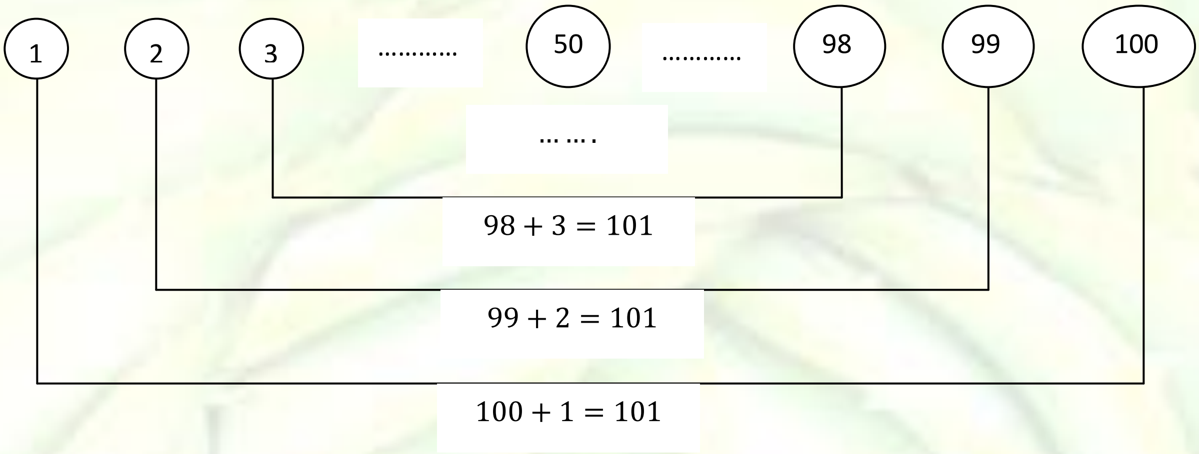
Realiza la suma de los 100 primeros números

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: En primer lugar el profesor propondrá a los alumnos esta tediosa suma. Los alumnos saben que se trata de una progresión aritmética (lo hemos visto antes) pero observan el largo tiempo que supone hacer 99 cuentas. Para sorpresa de los escolares el profesor les explicará que "esta operación es sencilla y que se tarda muy poco rato". Acto seguido se explicará a la clase el método que ha seguido para su resolución apoyándose sobre todo en la pizarra y representando gráficamente todo el procedimiento. Finalmente los alumnos comprenderán el procedimiento de la suma de los 100 primeros números

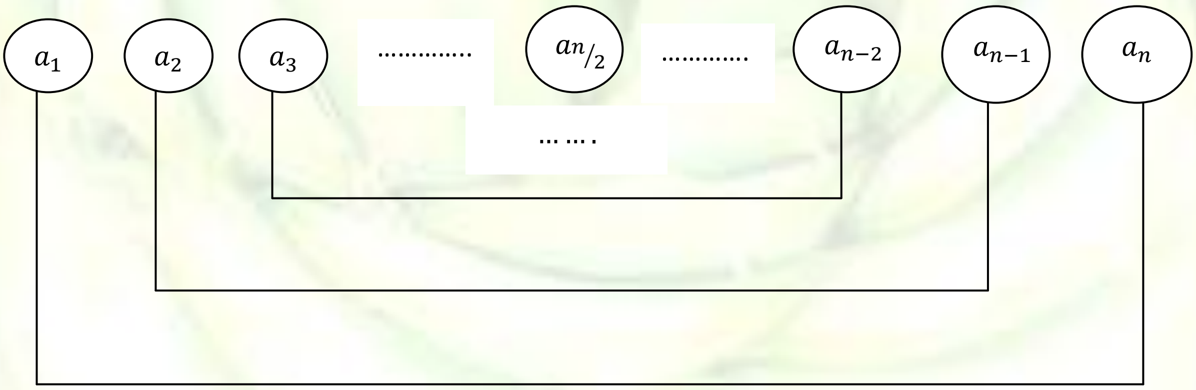
Además el profesor explicará que fue el famoso matemático Gauss el que resolvió el problema y le pedirá al alumnado un trabajo individual para entregar de cómo lo hizo.

Para que la resolución resulte más didáctica y el desarrollo del aprendizaje sea adecuado el profesor irá guiando al alumnado mediante esta representación en pizarra



Materiales y recursos: Pizarra e internet

Los escolares han entendido la suma de los n primeros términos en el caso del ejemplo de Gauss. Con esta base se propondrá entre toda la clase la formulación del problema para cualquier caso en que participe una progresión aritmética. Con esta estrategia constructivista el escolar llegará por sus propios medios (ayudado por el docente) a alcanzar la fórmula general:



Con la ayuda del esquema el alumno comprende, al igual que en la sucesión de Gauss que las sumas entre términos con posiciones simétricas son idénticas y llega a la fórmula por sus propios medios:

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n}$$

Duración de la explicación: 8 minutos aproximadamente

Finalmente para cerrar la sesión se propone el siguiente ejercicio, que resume lo visto:

Tarea 17:

El número de usuarios de un polideportivo los fines de semana comenzó siendo de 150 personas y aumento en 30 personas cada fin de semana a partir de entonces. ¿Cuántas personas asistieron al polideportivo a los 6 meses?. Si cada entrada cuesta 5 euros, ¿cuánto dinero habrán recaudado desde el primer fin de semana?

Duración: 12 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea pretende resumir todo lo visto durante esta sesión y servirá para afianzar los conceptos vistos hasta ahora. Además posee un contexto motivador, y enfocado en una situación cotidiana de forma que el alumno podrá ver la utilidad del tema. La tarea se resolverá en pizarra por un escolar de forma que se observa si el tema ha sido comprendido.

Materiales y recursos: Pizarra y calculadora

Tarea 18 (Tarea para casa)

Las edades de 4 hermanos forman una progresión aritmética, y su suma es 32 años. El mayor tiene 6 años más que el menor. Hallar las edades de los cuatro hermanos

Tarea 19 (Tarea para casa)

Un esquiador comienza la pretemporada de esquí haciendo pesas en un gimnasio durante una hora. Decide incrementar el entrenamiento 10 minutos cada día, ¿cuánto tiempo entrenará al cabo de 15 días?¿cuánto tiempo habrá dedicado al entrenamiento al cabo de un mes?

SESION 4: Progresiones geométricas. Suma de los n términos consecutivos.

Contenidos: Progresión geométrica, suma de los primeros n términos consecutivos de una progresión geométrica, reconocer la presencia de progresiones geométricas en contextos reales.

Situaciones: Educativa, Personal y Pública.

Sistemas de representación: Simbólico

Expectativas de aprendizaje

Durante esta sesión se pretende contribuir al desarrollo de los objetivos:

3) Identificar progresiones aritméticas y geométricas

5) Representar sucesiones gráficamente

8) Obtener la suma de los n primeros términos consecutivos de una progresión.

9) Identificar cuando es necesario la realización de la suma de n términos consecutivos en un problema dado.

11) Expresar algún problema de la vida cotidiana en forma de sucesión

Además durante el desarrollo de la sesión trabajaremos con las competencias matemáticas PISA :

Pensar y razonar (PR), Resolver problemas, Argumentar y justificar(AJ), Modelizar(M), Representar(R), Lenguaje simbólico (LS), herramientas tecnológicas (HT)

Intenciones de la planificación

Al igual que en la sesión anterior, diferenciarán las progresiones geométricas como un caso particular de sucesión en la que un término dado es el producto del término anterior por una constante. Para llevar a cabo este objetivo se propondrán tareas tanto motivadoras como frecuentes en la sociedad, como por ejemplo la forma en la que se extienden los rumores. Además se profundizará en la utilidad de las progresiones geométricas aplicadas a la vida cotidiana. Por último se explicará el concepto de la suma de los n primeros términos de una sucesión geométrica siempre destacando el enfoque funcional del concepto. Se dará especial importancia a la diferencia entre progresión aritmética y geométrica pues es aquí donde radican gran parte de los problemas.

Enmarque de la sesión

En esta sesión se pretende desarrollar el concepto de progresión geométrica, siempre diferenciando con progresión aritmética, y dejando claro que es una sucesión. Las tareas se plantearán desde el punto de vista funcional de las matemáticas (en la medida de lo posible). Teniendo en cuenta el amplio desarrollo del tema hasta la fecha, se procurará programar tareas sobre todo de reflexión para que el alumno adquiera los conocimientos que se desea y sea capaz de comprender las conexiones de todos los contenidos dados.

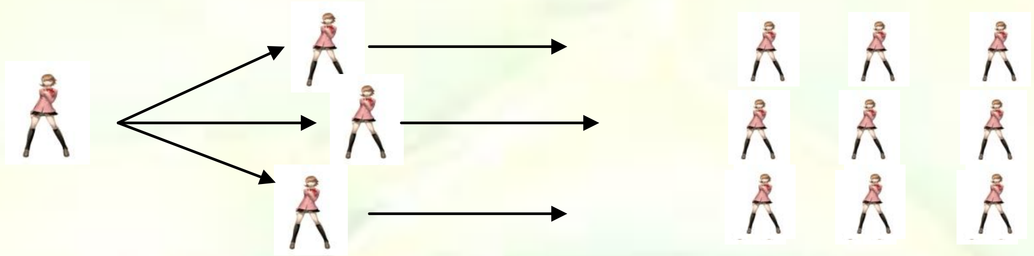
Secuenciación

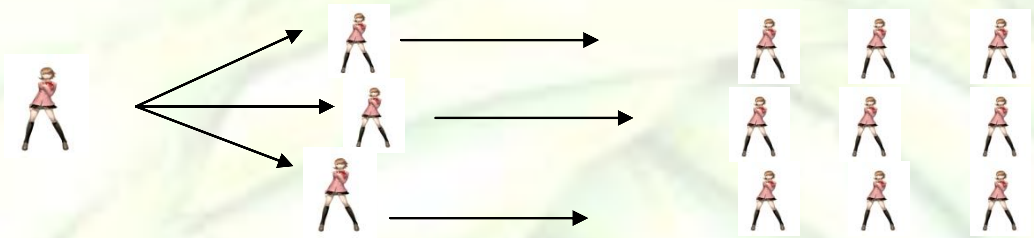
La clase comenzará con la explicación por parte del profesor de la caracterización de progresión geométrica. Para agilizar el aprendizaje y captar la atención de los escolares se propondrá a modo de ejemplo la siguiente tarea, sobre la que trabajaremos:

Tarea 20 .Un secreto a voces

A Luis y Aurora les han contado un secreto a las 9 de la mañana con la advertencia de que no se lo cuenten a nadie. ¿Está en la naturaleza humana la falta de discreción? El caso es que al cuarto de hora cada uno de ellos solo se lo ha contado a tres amigos, eso sí de absoluta confianza, que al cabo de un cuarto de hora se lo cuentan a otros tres y así sucesivamente cada cuarto de hora. ¿Cuánta gente se enteró del secreto a las once de la mañana?¿Estamos ante una progresión aritmética? ¿Entiendes ahora la causa de que los rumores se propaguen tan rápidamente?

Así pues el profesor expone la tarea, a la vez que explica los conceptos matemáticos que se ponen en juego en cada momento. Para la realización de la tarea el profesor usará el proyector del aula, para utilizar un recurso visual, tal como:





De esta forma el alumno comprenderá que:

- Al igual que las progresiones aritméticas, las progresiones geométricas son un tipo especial de sucesiones.
- Sabrán identificar el término “razón” notado por “r”.
- Diferenciarán las progresiones geométricas de las progresiones aritméticas.

Duración de la explicación: 5 minutos aproximadamente.

Como ejemplificación de la explicación anterior se realizará la siguiente tarea:

Tarea 21

¿Cuál de las siguientes sucesiones es una progresión geométrica? .Explica tu respuesta

a) $(\boldsymbol{a_n}) = (\mathbf{12, 14, 16, 18, 20, \ldots})$
b) $(\boldsymbol{b_n}) = (\mathbf{1, 2, 4, 8, 16, \ldots})$
c) ***Dobla un papel por la mitad, anota las partes que lo divide, vuelve a doblarlo, anota el resultado otra vez. Continua el procedimiento, ¿qué tipo de sucesión es? ¿por qué?***

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea se propone como ejemplo de la explicación anterior, de forma que sirva para ejercitar las destrezas recién adquiridas. Esta tarea se realizará entre toda la clase, siendo el profesor el que escriba en la pizarra y el que dirija el desarrollo en el caso del apartado “c”, y los alumnos participen. Se pretende sobre todo que el alumnado identifique el término de razón “r” y lo asocie en las progresiones geométricas.

Materiales y recursos: Pizarra

Entendido el concepto de progresión geométrica se procederá a su caracterización mediante el término general. Para la explicación de la caracterización del término general, el docente propondrá al alumnado la siguiente tarea:

Tarea 22

Considerando las tareas anteriores:

- ***Un secreto a voces***
- ***El doblez del papel***

Realiza las siguientes actividades en cada uno de los casos:

a) Realiza una tabla de entrada simple en el que se expresen los cuatro primeros términos de la progresión.
b) Representa su término general.

¿Existen algunas similitudes entre la expresión de los términos generales?

Duración : 5 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: Mediante esta tarea se pretende que alumnado se dé cuenta de los puntos en común que poseen las progresiones geométricas. De esta forma se sientan las bases para que los escolares descubran el término general de una progresión geométrica cualquiera. Es decir, llegarán por sí solos (con la leve ayuda del profesor) a:

$$a_n = a_1\, r^{n-1}$$

Materiales y recursos: Pizarra y papel

Para afianzar lo aprendido realizaremos la siguiente tarea:

Tarea 23

Halla el término general de las siguientes progresiones geométricas:

d) $(a_n) = (10, 20, 40, 80, 160, \dots)$
e) $(b_n) = (12, 3, {}^{3}/_{4}, {}^{3}/_{8}, {}^{3}/_{32}, \dots)$

Duración: 5 minutos aproximadamente.

Descripción de la interacción y gestión del aula: Al igual que la tarea anterior se pretende que el alumno ponga en práctica lo inmediatamente explicado. El objetivo más importante de la presente tarea es que el alumno adquiera una destreza significativa a la hora de presentar las progresiones geométricas mediante su término general.

Materiales y recursos: Pizarra y un folio

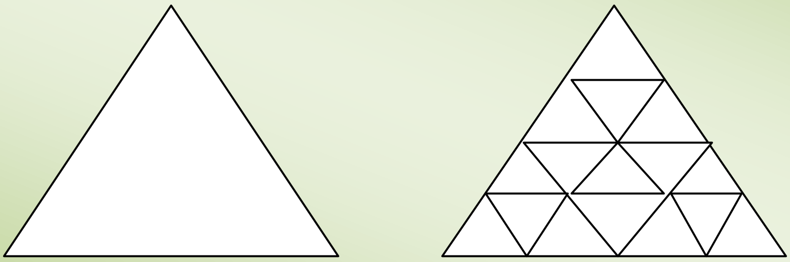
Se supone que el alumno ha comprendido el procedimiento mediante el cual se llega a expresar una progresión geométrica mediante su término general. Sin embargo, se pretende a continuación que el alumno profundice aún más en el concepto de progresión geométrica, poniendo en relación dos términos cualesquiera de la misma. Al finalizar la explicación el escolar entenderá la siguiente fórmula, con lo que conlleva:

$$a_n = a_m\, r^{n-m}$$

Duración de la explicación: 5 minutos aproximadamente

Para poner en práctica lo aprendido se realizará individualmente la siguiente tarea:

Tarea 24



Dada la siguiente sucesión compuesta por triángulos equiláteros. Halla el término general del número de triángulos, sabiendo que el primer término es la primera figura y el tercer término es la figura siguiente.

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: El profesor escribirá en la pizarra a modo de ejemplo la tarea. Con la elaboración de la misma el alumno pondrá en práctica lo aprendido (tarea de reproducción) y comprenderá totalmente a relación existente entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica.

Materiales y recursos: Pizarra y cuaderno

Hasta aquí ha quedado más o menos claro la noción de progresión geométrica y como expresarla en función de su término general. Finalmente para quedar cerrado el apartado relativo a progresiones geométrica nos queda el concepto de "*suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica*". Para trabajar sobre esto recordaremos la tarea de la difusión de los secretos:

¿Cuánta gente se enteró al final del secreto a las 10.15?

Para ello se procederá a insertar la siguiente tabla que ellos mismos resolverán.

$a_1(15\ min)$	$a_2\ (30\ min)$	$a_3(45\ min)$	$a_4(1\ hora)$	$a_5(1\ h\ y\ 15\ min)$
6	18			

Siempre se realizará el ejercicio de forma que sean los alumnos los que lo vayan resolviendo sobre la marcha, ya que lo que nos interesa es que aprendan el procedimiento en cualquier caso, evitando que realicen un aprendizaje asociativo.

A continuación realizarán la suma para observar el número total de personas que se hacen eco del secreto. Sin embargo, el docente explicará que hay un procedimiento más simple para este cálculo y se llevará a cabo mediante:

$$S_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 => r\ S_5 = r(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5) =>$$

$$rS_5 = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_5 r$$

Tenemos pues que:

$$rS_5 - S_5 = a_5 r - a_1 \Rightarrow S_5 = \frac{\boldsymbol{a_5\, r - a_1}}{\boldsymbol{r - 1}}$$

Y a continuación generalizaremos para el caso n-esimo:

$$\boldsymbol{S_n} = \frac{\boldsymbol{a_n\, r - a_1}}{\boldsymbol{r - 1}}$$

Duración de la explicación: 8 minutos aproximadamente

Para afianzar el procedimiento adquirido utilizaremos la siguiente tarea:

Tarea 25: La recompensa del soldado (Tarea para casa)

Un soldado veterano recibe como recompensa 1 euro por la primera herida sufrida; 2, por la segunda; 4, por la tercera, etc. Cuando se hizo el recuento, el soldado resultó recompensado con 65535 euros. ¿Cuántas heridas sufrió el soldado?.

Duración: 5 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: La expectativa del docente con esta tarea es que el escolar practique en el cálculo de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. El profesor escribirá la tarea en la pizarra y los alumnos la resolverán en sus cuadernos, realizando el profesor las aclaraciones que considere oportunas.

Materiales y recursos: Pizarra y calculadora.

Finalmente para cerrar la sesión se propone el siguiente ejercicio, que resume lo visto:

Tarea 26: La compra de un caballo

Cierta persona vendió su caballo por 156 euros. Mas el comprador se arrepintió de haberlo adquirido y devolvió el caballo diciendo:

- No me interesa comprar el caballo por ese precio, pues no lo merece.

El vendedor le propuso nuevas condiciones:

- Si te parece elevado ese precio, compra sólo los clavos de las herraduras y conseguirás de balde el caballo. En cada herradura hay 6 clavos; por el primer clavo me pagas tan sólo ¼ de euro; por el segundo, ½; por el tercero, 1 euro, etc.

El comprador, deslumbrado por las nuevas condiciones, en su afán de tener gratis un caballo, aceptó la propuesta, creyendo que tendría que pagar por los clavos no más de 10 rublos.

Describe la sucesión que siguen los clavos. ¿Cuál fue el importe de la compra?

Duración: 12 minutos aproximadamente

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea pretende resumir todo lo visto durante esta sesión y servirá para afianzar los conceptos vistos hasta ahora. Además posee un contexto motivador, y enfocado en una situación cotidiana, de forma que el alumno podrá ver la utilidad del tema. La tarea se resolverá en pizarra por un escolar de forma que se observa si el tema ha sido comprendido ya que es una tarea de repaso.

Materiales y recursos: Pizarra y calculadora

Tarea 27: La recompensa del soldado (Tarea para casa)

El número de bacterias de un cultivo está aumentando un 25 % cada hora. Si al principio había 300000 ¿Cuántas bacterias habrá al cabo de 5 horas?. Representa el número de bacterias en una tabla de simple entrada y en el plano de coordenadas cartesianas.

Tarea 28 (Tarea para casa)

Realiza un resumen de no más de dos folios con los aspectos más importantes de las progresiones, tanto aritméticas como geométricas

SESION 5: Exposición de los trabajos grupales

Contenidos: Sucesión de Fibonacci, Fractales, Regularidad, reconocer la sucesión de Fibonacci y saber aplicarla a situaciones reales, confianza en las capacidades propias para solucionar problemas numéricos.

Situaciones: Educativa, social y natural.

Sistemas de representación: Gráfica, simbólica y tecnológica

Expectativas de aprendizaje

Durante esta sesión se pretende contribuir al desarrollo de los objetivos:

1) Identificar regularidades en una secuencia de números

4) Identificar patrones en las regularidades gráficas, reconociendo la secuencia numérica de la misma

10) Identificar sucesiones en nuestro entorno

Además durante el desarrollo de la sesión trabajaremos con las competencias matemáticas PISA :

Pensar y razonar (PR), Argumentar y justificar (AJ), Modelizar (M), Herramientas tecnológicas

Intenciones de la planificación

Esta sesión se dedicará a la exposición de los trabajos grupales propuestos por el profesor al inicio de la unidad didáctica. Las indicaciones que el profesor ha realizado para la preparación del trabajo aparecen como tarea en el ANEXO I.

Además se preverá la posible finalización anticipada de las exposiciones. Por tanto se preparará algunas tareas para que el alumnado practique acerca de las diferencias entre progresiones aritméticas y progresiones geométricas (el resumen expuesto como tarea anterior les será de utilidad).

Enmarque de la sesión

Cuando el alumno se encuentra en esta sesión ya está familiarizado con términos tales como sucesión numérica, regularidad, progresiones,…

El objetivo final es que el alumno adquiera conocimientos acerca de la sucesión de Fibonacci y de las utilidades de las progresiones por medio del trabajo de indagación en los medios disponibles. Esta tarea, destaca sobre todo por contribuir al desarrollo de competencias básicas tales como:

- ***Competencia lingüística.***
- ***Competencia para aprender a aprender.***
- ***Competencia para la autonomía e iniciativa personal.***

Secuenciación

Antes de comenzar con la exposición de los trabajos, el profesor propone la siguiente tarea a los alumnos:

Tarea 29

Realiza un breve comentario de cada una de las exposiciones grupales de tus compañeros. En el comentario deberás resaltar como mínimo tres aspectos positivos y tres aspectos negativos.

Duración: Se realizará durante las exposiciones

Descripción de la interacción y gestión del aula: Esta tarea consiste en fomentar las críticas constructivas acerca de los trabajos realizados. De esta manera los alumnos mejorarán en trabajos futuros y, por otro lado, conseguiremos que los escolares mantengan la atención en el transcurso de presentaciones. Finalmente cada grupo recibirá por correo las opiniones de sus compañeros, además de su calificación.

Materiales y recursos: Cuaderno.

Duración de las exposiciones: 55 minutos aproximadamente.

En el caso de que se terminen las exposiciones antes de los previsto el docente hará uso de la batería de tareas expuesta en el ANEXO I para que los alumnos practiquen acerca de las diferencias entre progresiones aritméticas y geométricas

SESION 6: Sucesiones, progresiones aritméticas y geométricas. Prácticas de ordenador con "Mathematica"

Contenidos: Sucesión numérica, Progresión aritmética, Progresión geométrica, Suma de n términos consecutivos, Sucesión de Fibonacci.

Situaciones: Educativa

Sistemas de representación: Gráfica y simbólica, mediante “Mathematica”

Expectativas de aprendizaje

Durante esta sesión se pretende contribuir al desarrollo de casi todos los objetivos, pues sirve de repaso, pero se hará especial hincapié en el desarrollo de:

7) Realizar las operaciones pertinentes mediante el software “mathematica”

Además durante el desarrollo de la sesión trabajaremos con las competencias matemáticas PISA :

Pensar y razonar (PR), Argumentar y justificar (AJ), Herramientas tecnológicas (HT)

Intenciones de la planificación

La dinámica de la clase consistirá en que, tanto el profesor como el alumnado, irán realizando una serie de tareas de forma simultánea y, finalmente, se dejará propuesta una actividad para que los escolares la resuelvan por su cuenta. Esta actividad será entregada al profesor vía correo electrónico, y después será evaluada por el mismo. El criterio de evaluación de la tarea consistirá en evaluar el grado de comprensión del tema sumado a la utilidad del programa del que hacen uso.

Enmarque de la sesión

Con esta sesión se pretende que el alumno adquiera cierta destreza a la hora de realizar algunos ejercicios relacionados con el tema mediante el software “Mathematica”. Se prestará especial atención a que el alumno sepa en todo momento lo que está haciendo, es decir, no realice un aprendizaje asociativo sino constructivo.

Además esta sesión supone un repaso considerable de todo lo visto hasta ahora, con la diferencia de estar usando un programa informático que nos sirva de ayuda para resolver problemas.

Secuenciación

Para el desarrollo de la clase de prácticas el profesor realizará con su ordenador las prácticas propuestas al mismo tiempo que el alumnado. Estas prácticas seguirán el esquema que se muestra a continuación:

PRACTICA DE SUCESIONES PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMETRICAS

Expresión del término general

Dada una secuencia numérica, como por ejemplo la sucesión de números pares tenemos que su término general es:

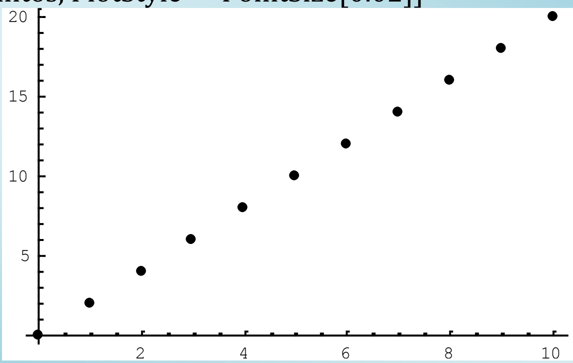
```
a[n_]:=2*n
```

Si queremos ver la secuencia de números no tenemos más que realizar la siguiente operación:

```
Puntos=Table[{n,a[n]},{n,0,10,1}]
{{0,0},{1,2},{2,4},{3,6},{4,8},{5,10},{6,12},{7,14},{8,16},{9,18},{10,20}}
```

Representación en el plano cartesiano de una sucesión

```
G1=ListPlot[Puntos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```

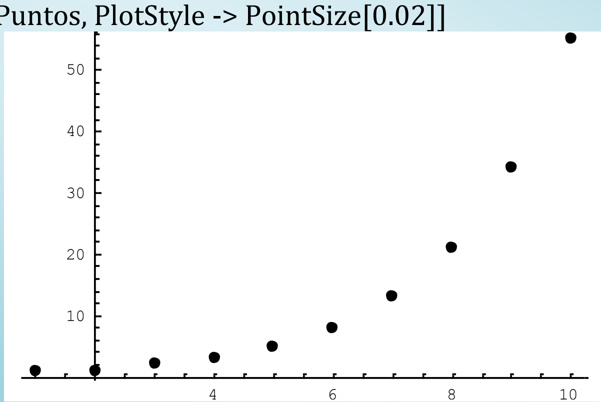


Graphics

Expresión del término general de una sucesión recurrentes

Ahora consideraremos alguna sucesión recurrente como puede ser la sucesión de Fibonacci

```
F[1]=1;
F[2]=1;
n=21;
For[i=3,i≤n,i++,F[i]=F[i-1]+F[i-2]]
Puntos=Table[{n,F[n]},{n,1,10,1}]
{{1,1},{2,1},{3,2},{4,3},{5,5},{6,8},{7,13},{8,21},{9,34},{10,55}}
G2=ListPlot[Puntos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



Suma y producto de sucesiones

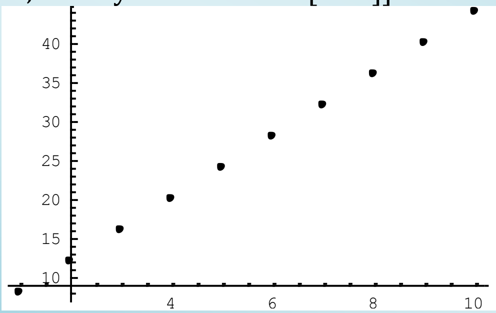
Consideremos

```
Clear["Global`*"]
a[n_] = n^2 + 3
3 + n^2
b[n_]=2 n+3
3+2 n
s[n_]=a[n]+b[n]
6 + 2 n + n^2
p[n_]=a[n]*b[n]
(3 + 2 n) (3 + n^2)
Expand[%]
9 + 6 n + 3 n^2 + 2 n^3
```

Progresiones aritméticas

Supongamos una progresión aritmética cualquiera. En primer lugar asignamos el parámetro "d". Ahora podemos aplicar la fórmula:

```
d=4;
a[1]=8;
a[n_Integer]=a[1]+d*(n-1)
8+4 (-1+n)
Puntos=Table[{n,a[n]},{n,1,10,1}]
{{1,8},{2,12},{3,16},{4,20},{5,24},{6,28},{7,32},{8,36},{9,40},{10,44}}
G2=ListPlot[Puntos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



Graphics

Ahora vamos a calcular la "suma de los n términos consecutivos" de una progresión aritmética.

$$S[n\_] = n * \frac{(a[1] + a[n])}{2}$$

$$\frac{1}{2} n (8 + a[n])$$

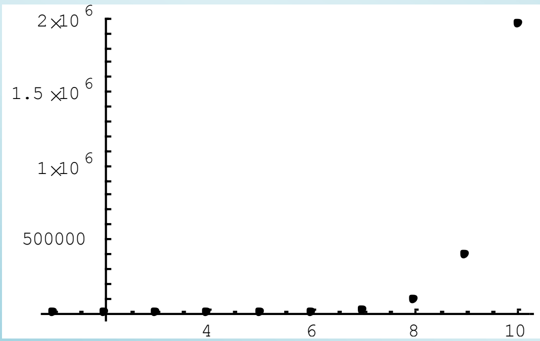
Por ejemplo la suma de los 5 primeros términos consecutivos de la progresión a[n] es:

```
S[5]
80
```

Progresiones geométricas

Supongamos una progresión geométrica cualquiera. En primer lugar asignamos el parámetro "r". Ahora podemos aplicar la fórmula:

```
r=5;
a[1]=4;
a[n_Integer] = a[1] + r^(n-1)
4 + 5^(-1+n)
Puntos=Table[{n,a[n]},{n,1,10,1}]
{1,4},{2,9},{3,29},{4,129},{5,629},{6,3129},{7,15629},{8,78129},{9,390629},{10,1953129}}
G2=ListPlot[Puntos, PlotStyle -> PointSize[0.02]]
```



⁅Graphics⁆

Ahora vamos a calcular la "suma de los n términos consecutivos" de una progresión geométrica.

$$S[n\_] = \frac{a[1]*(r^n - 1)}{r-1}$$

$-1 + 5^n$

Por ejemplo la suma de los 5 primeros términos consecutivos de la progresión a[n] es:

```
S[5]
3124
```

SESION 7: Prueba escrita.

La duración del examen será similar al de cada una de las sesiones anteriores, es decir, 55 minutos. Un ejemplo de esta prueba escrita puede verse en el **ANEXO I**

Conclusión

Para poder por finalizado este trabajo final de máster, es adecuado realizar una breve conclusión y valoración de los aspectos más destacados.

Los conocimientos adquiridos durante el desarrollo del máster han sido especialmente importantes a la hora de realizar esta unidad didáctica. Por un lado, el desarrollo de la parte específica del máster fundamenta casi en su totalidad el aspecto teórico-práctico de la unidad didáctica y, por otro lado, los conocimientos adquiridos durante la parte específica nos ayuda a entender los aspectos social psicológicos de los escolares en fase de aprendizaje.

Las asignaturas del módulo común nos mostraron la realidad social y psicológica del alumnado al que nos enfrentamos como profesores. En “Psicología y desarrollo de la personalidad” se mostró en qué consiste el aprendizaje y métodos para optimizarlo, mientras que en “Procesos y contextos educativos” y “Sociedad, Familia y Educación” se nos enseñó cuál es el contexto legislativo y el marco social en el que se desarrolla la educación en nuestros días. Todo ello ha sido especialmente útil a la hora de redactar la unidad didáctica pues estos aspectos se han tenido en cuenta:

Si nos fijamos en las asignaturas del módulo específico, se puede destacar la gran importancia que ha tenido la asignatura “Innovación docente e investigación educativa” pues cambió nuestra concepción de la enseñanza clásica y transmitió la necesidad de programar tareas innovadoras e insertar recursos que faciliten el aprendizaje de los escolares. Esta percepción de la enseñanza se contempla claramente en tareas tales como la tarea 23 (doblar un folio para explicar las progresiones geométricas). Además se profundizó en conocimientos matemáticos mediante la asignatura “Complementos de Formación”, que tiene gran parte de culpa del contexto histórico mostrado en el análisis de contenido.

Puestos a destacar alguna asignatura, subrayamos la importancia de la asignatura “Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas”, que fundamenta el análisis didáctico en su totalidad y da sentido a la unidad didáctica.

Durante el análisis de contenido, surgieron algunos aspectos de mayor dificultad como pudo ser la estructura conceptual del tema elegido. La principal barrera que se encontró fue posiblemente la profundidad con la que debíamos abordar el tema. Si bien el tema de sucesiones propuesto presenta una dificultad notable, no podemos olvidar que la orientación que debe marcar el rumbo en una unidad didáctica es que debe estar adaptada a la enseñanza de escolares. Después de varias sesiones en la asignatura de “Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas” descubrimos que en un análisis conceptual se debe profundizar en el tema sin olvidar su objetivo final (la enseñanza de matemáticas escolares), que debe ayudarnos a organizar tanto conceptual como procedimentalmente el tema.

Al hablar de errores y limitaciones en el aprendizaje, dentro del análisis de contenido, es obvio que los errores propuestos no sean del todo reales, ya que en mi caso no he tenido la oportunidad de realizar prácticas docentes a este nivel, ni este tema. Desde primera hora se ha intentado suponer cuales son efectivamente estos errores, si bien se es consciente de que nuestras conclusiones finales posiblemente no sean todo lo acertadas que deberían. Además es importante destacar de que, después de la realización de las prácticas docentes, nuestra concepción cambia de forma radical.

A la hora de realizar el análisis cognitivo las expectativas de aprendizaje pueden presentar especial dificultad ya que cada docente puede tener distintos objetivos de aprendizaje. Durante el transcurso de la asignatura de “Aprendizaje y enseñanza de Matemáticas”, en el desarrollo grupal del análisis cognitivo fue complicado llegar a un acuerdo sobre las expectativas que se tenían en el proceso de aprendizaje. Sin embargo, se pudo encontrar una solución satisfactoria para todos, sobre todo teniendo en cuenta que los objetivos establecidos son solo unos instrumentos que nos sirven para ayudar a alcanzar una serie de competencias básicas, y esto es realmente lo importante.

El análisis didáctico puede parecer a priori poco extenso. Mi opinión es que efectivamente lo es. Se podría desarrollar el mismo de una forma mucho más detallada, pero no podemos olvidar que lo realmente importante es la unidad didáctica y que esta merece una mención especial. De hecho todo el análisis didáctico tiene como finalidad sentar las bases para una buena planificación de la unidad didáctica.

En el desarrollo de la planificación de la unidad didáctica, se pretende realizar un aprendizaje constructivo, es decir, en primer lugar se intenta que el alumno descubra los conceptos por sí mismo, dirigiendo el docente el “rumbo” adecuado para que los escolares lo descubran. Las sesiones han sido diseñadas de acuerdo con el currículo establecido por real decreto, y muestran sesiones iniciales en las que se exponen conceptos muy generales, para ir concretando paulatinamente en el desarrollo de sesiones venideras.

Además de los conocimientos teóricos, pienso que esta unidad didáctica muestra el alto nivel de aceptación de competencias tales como la “planificación y gestión de un aula de enseñanza” detallada por sesiones, “diseñar y evaluar el proceso de aprendizaje propio de las matemáticas” mediante una abundancia de ejemplos de la vida cotidiana y un aprendizaje constructivo, que sin duda alguna, ayudan al desarrollo de la “Competencia Matemática”. Por otro lado, se han alcanzado destrezas en el máster tales como “Dominar competencias comunicativas” debido a la gran cantidad de exposiciones orales y a las prácticas en centros docentes. A pesar del gran desarrollo en competencias que supone lo anteriormente citado, el aprendizaje va mucho más allá, el alumno del máster también ha adquirido destrezas de otra índole, tales como “Trabajar en equipo con el resto de profesorado”, “interpretar diferentes necesidades educativas”,…

El método de evaluación es el más adecuado desde mi punto de vista puesto que tiene en cuenta aspectos tan diversos como el trabajo continuo en clase, la utilización de herramientas tecnológicas, la exposición de un trabajo oral y por último, un examen en que el alumno demuestra sus conocimientos.

Se puede observar que después de la realización del análisis didáctico se prosigue con el desarrollo de la unidad didáctica. Este análisis didáctico fundamenta la unidad didáctica y justifica su presencia pues en este trabajo. De hecho los objetivos asociados a cada sesión han sido considerados en las expectativas de aprendizaje dentro del análisis cognitivo.

En el desarrollo detallado de las sesiones, se ha tenido en cuenta el análisis de instrucción, que aunque no ha sido desarrollado en gran profundidad, se puede contemplar con relativa facilidad en la exposición de tareas.

Destacar la gran importancia, y el cambio que ha supuesto en nuestra percepción del desarrollo cognitivo del alumnado el periodo de prácticas. Si bien no he tenido la oportunidad de desarrollar este tema en clase, si que he aprendido en cierta medida algunas nociones importantes acerca del desarrollo cognitivo de los escolares a la hora de asimilar un concepto. Una de las estrategias importantes a la hora de dar clase es mantener la atención del alumnado, y esto se consigue intentando cambiar de tareas rápidamente, y ejemplificando conceptos aparentemente complicados con situaciones de la vida cotidiana.

En mi unidad didáctica, y dado los tiempos que corren, se tiene muy en cuenta la utilización de recursos y herramientas. Está demostrado que el uso de la mismas favorece una situación más idónea para el aprendizaje. El principal recurso utilizado es el del auto-aprendizaje, mediante el cual el alumno llega a construir los conceptos por sí solo, resultando así un aprendizaje más duradero.

Aunque durante todo el trabajo se han realizado unos análisis muy formales desde el punto de vista didáctico, también merece la pena destacar que se han usado conocimientos adquiridos en el máster relacionados con la enseñanza. Así pues, será de especial ayuda a la hora de educar nociones adquiridas en “Aprendizaje y desarrollo de personalidad” como puede ser: Fomentar el reforzamiento positivo, consejos del libro “Cómo educar a los que no quieren (Juan Vaello)”,…

La inclusión de una clase de prácticas permite al alumnado observar una potente herramienta de resolver problemas como es “Mathematica”. La elección de este software se debe a la gran utilización del mismo en el ámbito universitario y empresarial, siendo muy interesante para el alumnado familiarizarse con el mismo. De todas formas no se pretende que el alumno domine el programa sino que sepa interpretar los resultados que le proporciona.

En conclusión, pienso que la unidad didáctica es bastante completa y adecuada para el nivel que estamos tratando. Pienso que la programación de las sesiones es posible llevarla a cabo, aunque mi unidad didáctica es abierta y flexible y puede ser modificada según en tiempo del que disponemos.

Las matemáticas poseen no sólo la verdad, sino cierta belleza suprema. Una belleza fría y austera, como la de una escultura.

Bibliografía

Gomez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Lupiañez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Universidad de Granada.

Rico, L. (1997a). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación Secundaria. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marin, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. (1997b). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Coord.), E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marin, L. Puig, et al., *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona: ice - Horsori.

Rico, L. y Lupiañez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*.
Madrid: Alianza Editorial.

OCDE (2005). *Informe PISA 2003. Aprender para el mundo del mañana*. Madrid: Editorial Santillana.

Libro de texto de 3º E.S.O (editorial SM)

Webgrafía

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/Sucesiones_progresiones/index.htm

http://es.wikipedia.org/wiki/Historia_de_la_matem%C3%A1tica#Jap.C3.B3n

http://recursostic.educacion.es/descartes/web/Descartes1/Bach_HCS_2/Sucesiones_numeros_reales_limites/Sucesiones_representacion.htm

http://funes.uniandes.edu.co/592/1/LupiannezJ04-2738.PDF

http://www.csi-csif.es/andalucia/modules/mod_ense/revista/pdf/Numero_14/ANGELAM_VARGAS_1.pdf

http://www.testdeinteligenciagratis.com/

http://platea.pntic.mec.es/jfgarcia/editorialsm/es3_esfera/leccion_11.pdf

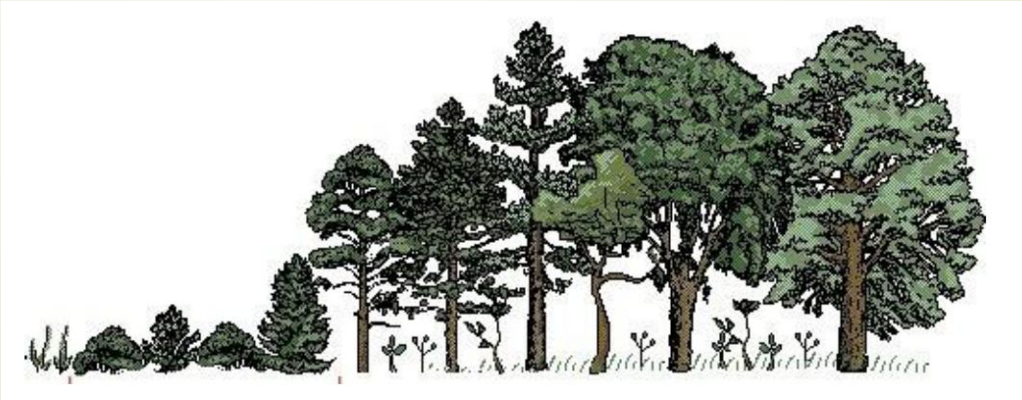
ANEXO I. TAREAS

TAREA DE EVALUACIÓN

Ejercicio 1

A. Rellena el hueco en cada sucesión
   a) $8,\ 10,\ 12, \_\_ , 16$
   b) $2/3, 4/3,\ \_\_ , 16/3\ 32/3$
   c) $27, -9,\ \_\_ , -1 , 1/3$
   d) $1,\ 5,\ 17,\ 53, \_\_$
B. Expresa cada una de las sucesiones anteriores en función de su término general
C. Realiza las siguientes operaciones
   a) Una suma cualquiera entre las sucesiones anteriores
   b) Una multiplicación cualquiera entre las sucesiones anteriores

Ejercicio 2



A. A los 6 días de vida, ¿cuál de las cuatro plantas es más alta?
B. Justifica tu respuesta

Ejercicio 3

Consideremos un castillo de cartas como el que aparece a continuación:


a) ¿Cuántas cartas necesitamos para construir un castillo de 4 pisos como el de la imagen? Resuelve el problema con ayuda de las sucesiones.
b) ¿Y para construir un castillo de doce pisos?

c) *El record del mundo se consiguió con un castillo de doce pisos. ¿Cuántas cartas hicieron falta?*

Ejercicio 4

Un padre decide colocar en una hucha 1 euro el día que su hijo cumpla un año, e ir duplicando la cantidad sucesivamente en todos los cumpleaños para hacerle un buen regalo a su hijo en su mayoría de edad.

a) ***¿Cuánto tendrá que colocar el día que su hijo cumpla 18 años?***
b) ***¿Cuánto habrá en la hucha en total?***

Ejercicio 5

Explica en qué consiste la sucesión de Fibonacci. Expón un ejemplo real en que se aplica la sucesión de Fibonacci. Represéntala en el sistema de coordenadas cartesianas

Tarea de investigación

El alumno deberá elaborar un trabajo de investigación de alguno de los dos siguientes temas:

I. ***LA SUCESIÓN DE FIBONNACCI***
II. ***PROGRESIONES ARITMETICAS Y GEOMÉTRICAS***

Para la realización del trabajo el alumno deberá seguir las siguientes indicaciones:

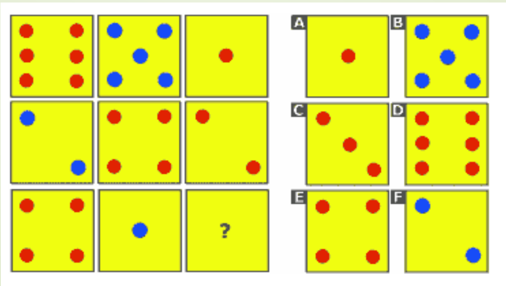
a) ***Se presentará una exposición por parte de los alumnos en un tipo de soporte informático (preferiblemente PowerPoint). En la exposición deberán participar activamente todos los miembros del grupo y no durará más de 15 minutos en ningún caso.***
b) ***Se presentará por escrito un informe en el que estén explicados al menos todos los contenidos que se pongan de manifiesto en la exposición. Este informe tendrá una longitud aproximada de 10 folios.***
c) ***Tanto el trabajo escrito como expuesto, se compondrá como mínimo de una introducción en la que se explique el concepto trabajado, y una parte de aplicación en fenómenos naturales.***

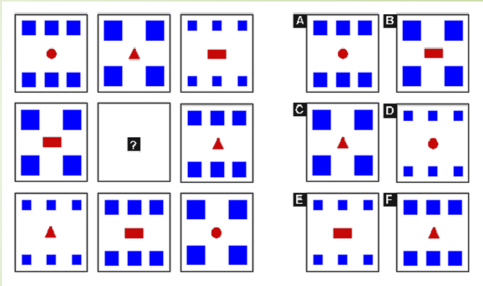
Para la evaluación del trabajo se tendrá en cuenta:

a) ***Presentación del trabajo.***
b) ***Expresión tanto oral como escrita.***
c) ***Rigurosidad matemática a la hora de expresar las situaciones.***
d) ***Variedad de aplicaciones presentadas.***
e) ***Autonomía e iniciativa personal.***

Tareas de ampliación

Tarea 1





Dada las siguientes secuenciaciones de figuras, elige entre las opciones dadas cual es la siguiente figura que corresponde.

Tarea 2

Los campeonatos de tenis dan mucho trabajo a sus organizadores. De los 128 jugadores que participan cada año ha de salir el campeón por medio de un sistema eliminatorio: cuando un jugador pierde un partido, es eliminado.

¿Cuántos partidos han de celebrarse para encontrar un ganador del campeonato?

Tarea 3

Un equipo de ciclismo prepara su entrenamiento semanal en 5 etapas. En la primera se recorre una distancia de 40 km y cada una de las restantes etapas es $^{5}/_{4}$ ***veces más larga que la anterior. ¿Cuántos km recorre el equipo en una semana?***

Tarea 4: "La sucesión del frutero"

Un frutero ha construido una pirámide con naranjas, todas iguales, cuya base tiene 10 naranjas de lado. En cada capa coloca las naranjas aprovechando los huecos que dejan las naranjas de la capa anterior.

- ***Escribir la sucesión de naranjas que hay en cada capa.***
- ***¿Cuántas naranjas tiene la pirámide?***
- ***Generaliza al caso de lado* n *naranjas.***
- ***Explica tu razonamiento.***

Tarea 5

Realiza un resumen de la sucesión de Fibonacci que se puede contemplar en el siguiente enlace:

www.youtube.com/watch?v=Xw4xFxzpy4s

Tarea 6

Realiza un resumen de las sucesiones que se puede contemplar en el siguiente enlace:

www.youtube.com/watch?v=QVzr3DdC8bE

Tarea 7

Realiza un resumen de las progresiones que se puede contemplar en el siguiente enlace:

www.youtube.com/watch?v=kbLYMg2r_ik

Tarea 8

"…Tenía Gauss 10 años cuando un día en la escuela el profesor manda sumar los cien primeros números naturales. El maestro quería unos minutos de tranquilidad… pero transcurridos pocos segundos Gauss levanta la mano y dice tener la solución: los cien primeros números naturales suman 5.050. Y efectivamente es así. ¿Cómo lo hizo Gauss? Pues mentalmente se dio cuenta de que la suma del primer término con el último, la del segundo con el penúltimo, etc., era constante:

Tareas de refuerzo

Tarea 1

Averigua el número que falta en la serie. Explica qué procedimiento has utilizado para averiguarlo

2 - 1 - 4 - [ ] - 6 - 5

Tarea 2

Halla el término general de las siguientes progresiones aritméticas:

a) $(a_n) = (10, 8, 6, 4, 2 \ldots)$
b) $(b_n) = \left(12, {}^{25}/_{2}, 13, {}^{27}/_{2}, 14 \ldots\right)$

Tarea 3

Se sabe que el cuarto término de una progresión aritmética es 8 y que el octavo es 14. Halla su término general

Tarea 4

Se sabe que el tercer término de una progresión geométrica es 12 y que el sexto es 1500. Halla su término general

Tarea 5

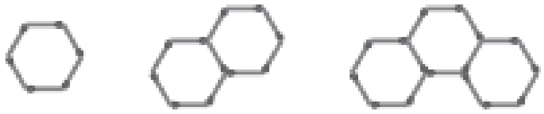
Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas ó geométricas. En caso afirmativo halla su término general. Representa los 5 primeros términos en la recta.

1. $8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4$
2. $\frac{1}{4}\ ,1\ ,4\ ,16\ ,64$
3. $2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27},\ \frac{32}{81}$
4. $4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64$

Además como tareas de refuerzo también se propondrán aquellas que se pueden observar en el libro de SM "**Pitágoras, Matemáticas 3º E.S.O**"

EJERCICIOS PROPUESTOS

11.1 **Con cerillas se han construido las figuras.**



a) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con 15 hexágonos?

b) ¿Cuántas cerillas se necesitan para formar una figura con n hexágonos?

a)

Número de hexágonos	1	2	3
Número de cerilla	6	11	16

$6 + 5(n - 1) = 6 + 5 \cdot 14 = 76$

b) $6 + 5(n - 1) = 5n + 1$

11.2 **Halla los tres términos siguientes de cada sucesión.**

a) 12, 12, 12, 12, 12 ...

b) 21, 23, 25, 27, 29 ...

c) 80, 70, 60, 50, 40 ...

d) $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2$ ...

a) 12, 12, 12. Sucesión constante.
b) 31, 33, 35. Se suma 2 al término anterior.
c) 30, 20, 10. Se resta 10 al término anterior.
d) 4, 8, 16. Se multiplica por 2 el término anterior.

11.3 **Encuentra el término $\square$ en cada sucesión.**

a) 17, 15, 13, $\square$, 9, 7 ...

b) $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}, \frac{9}{5}, \square, \frac{81}{5}$ ...

c) 60, 56, $\square$, 48, 44, 40 ...

d) 16, −8, $\square$, −2, 1 ...

a) 11. Se resta 2 al término anterior.

b) $\frac{27}{5}$. Se multiplica por 3 el término anterior.

c) 52. Se resta 4 al término anterior.

d) 4. Se divide entre −2 el término anterior.

11.4 **Calcula para cada sucesión los términos pedidos.**

a) Los seis primeros de $a_n = \frac{n-2}{n+1}$

b) Los diez primeros términos de $b_n = 3(n + 1)^2 + 1$

c) c_6 y c_{20} en $c_n = n^2 - n + 3$

d) d_3 y d_{10} en $d_n = +\sqrt{n^2 - 13n + 30}$

a) $-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}$

b) 13, 28, 49, 76, 109, 148, 193, 244, 301, 364

c) $c_6 = 33$; $c_{20} = 383$

d) $d_3 = 0$; $d_{10} = 0$

ANEXO II. Análisis de contenido

Estructura conceptual

Mediante la elaboración de la estructura conceptual trataremos de identificar los conceptos propios de la estructura matemática del tema (campo conceptual), así como los procedimientos que conforman esta estructura en sí (campo procedimental). Por último atenderemos a la relación existente entre conceptos y procedimientos.

Campo conceptual

Atendiendo al campo conceptual, y por tanto al nivel más básico de complejidad, diferenciaremos entre tres niveles de creciente dificultad:

- ✓ **Hechos**: unidades de información
- ✓ **Conceptos**: Aúnan en sí varias unidades de información
- ✓ **Estructuras conceptuales**: Sistemas de conceptos conectados junto con sus relaciones

Hechos

1.-Términos: Número real, sucesión, término, término general, índice, sucesión monótona, regularidad, sucesión aritmética, sucesión geométrica, diferencia, razón, razón áurea, límite,…

2.- Notación

(a_n) →**"Sucesión"**

a_n →**"Término n-ésimo"**

$a_n = f(n)$ →**"Término general"**

n →**"Indice"**

r →**"razón"**

d →**"diferencia"**

S_n →**"Suma de los n primeros términos de una sucesión"**

lim →**"Límite"**

φ → **"número de oro"**

P_n → **"Producto de los n primeros términos"**

3.- Convenios

- ➢ Las sucesiones se representan entre paréntesis, con letras minúsculas y subíndice n.

- En caso de conocer el término general de la sucesión, ésta se puede expresar de la forma (a_n)= ($f(n)$).

4.- Resultados

- Todo término de una sucesión tiene un término siguiente y, excepto el primer término, un término anterior.
- Una sucesión sumada a otra sucesión cualquiera da como resultado otra sucesión numérica.
- La división entre dos términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci forman una sucesión que converge rápidamente a la razón áurea.

Una vez superado este nivel ínfimo de complejidad nos encontramos ante un nivel intermedio. Este nivel está formado íntegramente por los conceptos:

Conceptos

Como conceptos más importantes en nuestro tema nos encontramos con: *Sucesión de números reales, sucesión creciente, sucesión decreciente, sucesión acotada, progresión aritmética, progresión geométrica, suma de sucesiones, sucesión de Fibonacci, interpolación aritmética, interpolación geométrica, producto de sucesiones, suma de los n primeros términos de una progresión, fractales, …*

Estructuras conceptuales

- $\{(a_n), +, \ .\}$ → **Anillo unitario y conmutativo**
- $\{R, +, \ *\}$ → **Cuerpo conmutativo**
- $\{(a_n), +, \ *\}$ → **Espacio vectorial sobre R**

Campo procedimental

En este ámbito de conocimiento se desarrollarán los procesos y modos de actuación de las tareas matemáticas.

De forma similar al comportamiento del campo conceptual, el campo procedimental también presenta una serie de niveles de escalonada dificultad. Así pues diferenciamos entre destrezas, razonamientos y estrategias.

Destrezas

- Escribir y leer de forma adecuada una sucesión cualquiera
- Identificar las diversas sucesiones numéricas de nuestro entorno
- Obtener el término general de una sucesión numérica dada
- Diferenciar entre progresión aritmética y progresión geométrica
- Realizar operaciones con sucesiones
- Construir una progresión, ya sea aritmética o geométrica, conociendo únicamente dos de sus términos
- Sumar los primeros "n" términos consecutivos de una progresión, ya sea una progresión aritmética o geométrica.
- Obtener el límite de una sucesión.

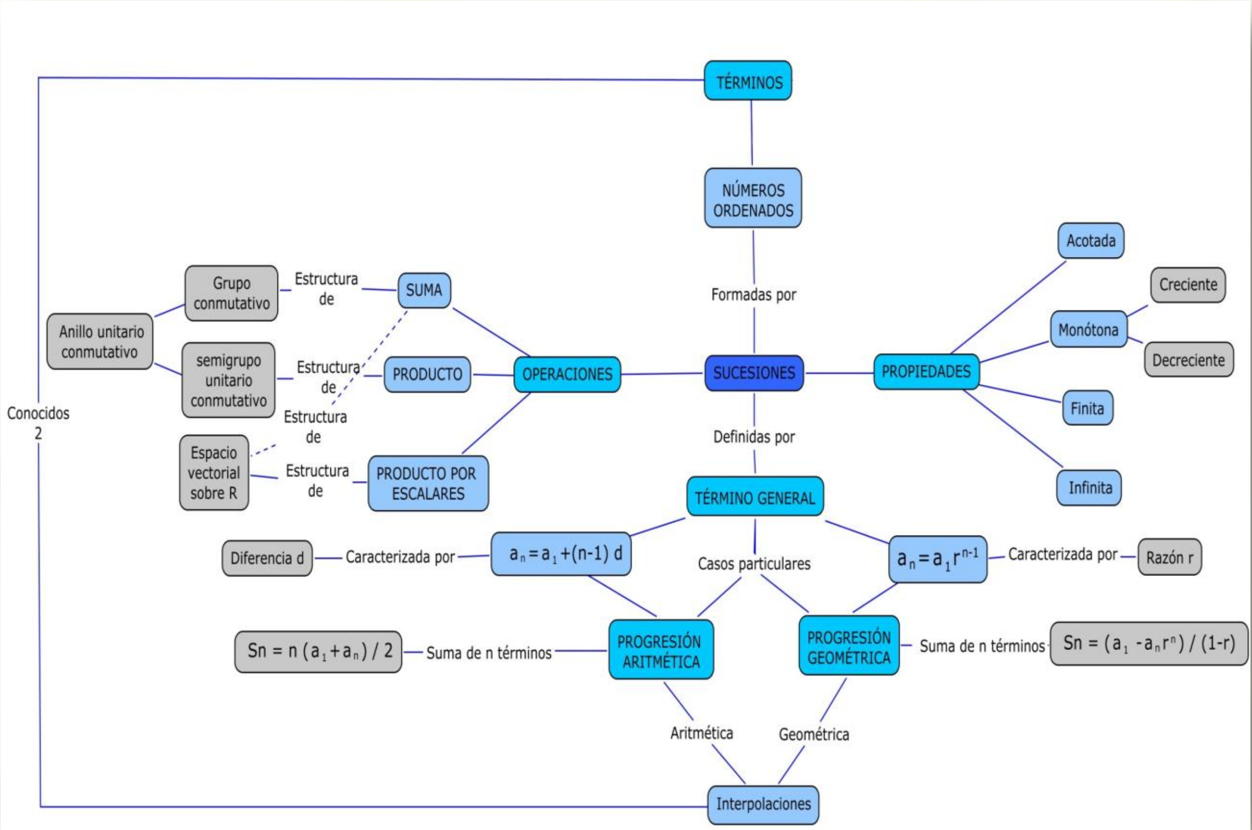
Razonamientos

- **Inductivo**
  - Detectar regularidades numéricas y saber expresarlas en forma de sucesión.
  - Obtener la razón áurea a partir del límite de la razón de términos consecutivos en la sucesión de Fibonacci.
- **Figurativo**
  - Identificar patrones de sucesiones en estructuras gráficas, y posteriormente saber identificar su término general.
- **Deductivo**
  - Identificar cada una de las propiedades que nos permiten clasificar las sucesiones
  - Reconocer la presencia de progresiones aritméticas y geométricas en situaciones que se presentan en la vida cotidiana

Estrategias

- Construcción de un conjunto de números de forma ordenado siguiendo las pautas que nos marca un patrón
- Reconocimiento de patrones comunes en un conjunto ordenado de números
- Representación gráfica de una sucesión

Veamos pues en el siguiente mapa conceptual como quedan organizados la gran mayoría de los conceptos tratados durante el análisis de contenido así como sus respectivas relaciones.



Sistemas de representación

A lo largo del apartado anterior hemos visto una serie de contenidos matemáticos que son susceptibles de ser representados gráficamente. A lo largo de este apartado veremos cómo se pueden clasificar los diferentes métodos existentes que nos permiten representar gráficamente los citados contenidos.

Antes de continuar con la descripción de los sistemas de representación resulta adecuado dar una definición que nos ayude a entender a qué nos referimos al hablar de “sistemas de representación”. “Castro y Castro (1997)” define representaciones, en matemáticas, como aquellas notaciones simbólicas, o gráficas ó bien manifestaciones, verbales con las que se expresan los conceptos y procedimientos, así como sus características y propiedades más relevantes.

Para representar las sucesiones, al igual que en otros campos de las matemáticas, utilizaremos el sistema verbal, la utilización de materiales manipulativos TIC´s, el simbólico ó algebraico y el gráfico.

El sistema de representación verbal

Ante todo merece la pena destacar que este sistema de representación alude directamente al lenguaje verbal. Así pues, algunos de los ejemplos referentes a nuestro tema son:

- "Sucesión de números pares"
- "Sucesión de números impares"
- "Sucesión oscilante"
- "Progresión geométrica"
- "Progresión aritmética"
- "Sucesión de cuadrados"
- "Múltiplos de un número t "
- "Sucesión de Fibonacci"
- "Sucesión de Farey"
- "Sucesión constante"

El sistema de representación simbólico ó algebraico

En un primer lugar destacaremos en esta forma de representación la forma de aludir a los términos propios del tema con el lenguaje puramente algebraico. Algunas representaciones son pues:

- $(a_n) \rightarrow$ Representa simbólicamente al concepto de una sucesión
- $a_n \rightarrow$ Representa a un término cualquiera de la sucesión, es decir, al término n-ésimo
- $a_n = f(n) \rightarrow$ Representa simbólicamente al término general de la sucesión
- $a_n < a_{n+1}$ ó $(a_n) \uparrow \rightarrow$ Representa simbólicamente a una sucesión creciente
- $a_n > a_{n+1}$ ó $(a_n) \downarrow \rightarrow$ Representa simbólicamente a una sucesión decreciente
- $(a_n + b_n) \rightarrow$ Representa simbólicamente la operación suma de sucesiones
- $S_n \rightarrow$ Representa simbólicamente la suma de los n-primeros términos de una sucesión

Dentro de este tipo de representación debemos destacar por la gran importancia que cobra en el tema, la representación numérica. De esta forma, podemos representar una sucesión mediante los números que la componen;

- $(1,3,5,7,\ldots)$

Además, dado el carácter de las sucesiones y la relación existente entre término e índice, también se puede representar una sucesión de forma tabular:

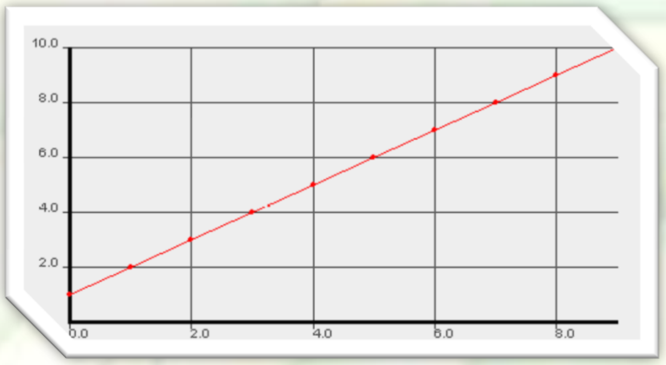
- *Representación de una sucesión en forma tabular*

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	4	6	8	10

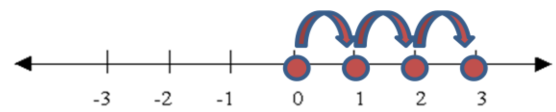
El sistema de representación gráfico

En el sistema de representación se pretende destacar tres posibilidades para representar una sucesión en cuestión:

- *Representación de una sucesión en el plano*



- *Representación de una sucesión en la recta real*



- *Representación de una regularidad de forma gráfica*

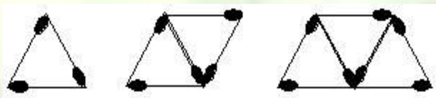


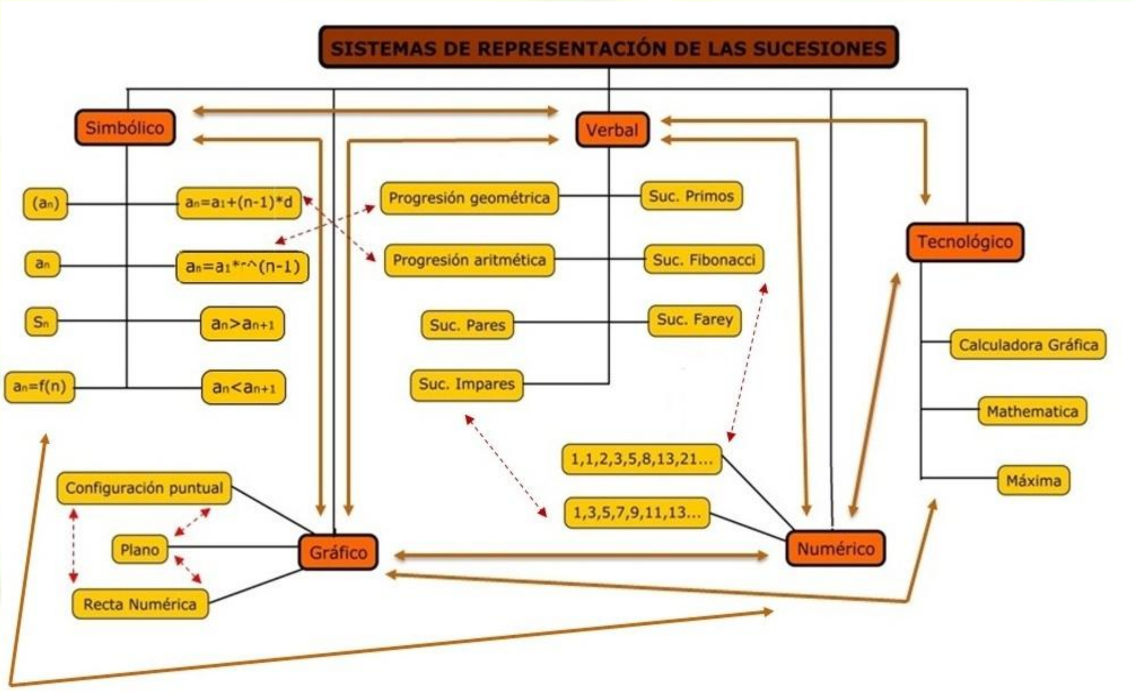
fig.1 fig.2 fig.3

El sistema de representación mediante materiales manipulativos TIC´s

Como materiales manipulativos se pueden destacar los siguientes:

Calculadora	Geogebra	Mathematica	Algunos recursos online (página web descartes)
			

Finalmente estudiamos los sistemas de representación mediante el siguiente mapa conceptual:



Relación entre los sistemas de representación

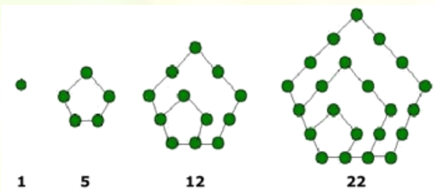
Finalmente se pretende resaltar la importancia de la relación existente entre los sistemas de representación. Asimismo, se suele identificar la comprensión con el "relacionar entre sí las formas de representar o aludir a los conceptos". Aquí radica fundamentalmente la importancia de que los alumnos asocien las distintas formas de representar un concepto determinado.

Una vez destacada la importancia de esta relación, se podrá contemplar un ejemplo que resuma lo anteriormente expuesto:

- **Verbal**: Sucesión de números pentagonales
- **Simbólico**: (an) = (n(3n-1)/2)
- **Tabular**

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
2	4	6	8	10

- **Numérico**: (1,5,12,22,...)
- **Gráfico**



Análisis fenomenológico

Por último pero no menos importante, vamos a estudiar el análisis fenomenológico del tema. El análisis fenomenológico del tema pone de manifiesto el carácter aplicado de las matemáticas, es decir, pretende realzar la visión de que las matemáticas explican el mundo y que han surgido para resolver unos problemas que no tenían solución. El fin último de este análisis es "conectar" el significado de conceptos y procedimientos con el mundo que nos rodea, con contextos reales que abarcan estos conceptos y procedimientos y con los fenómenos reales, que a la hora de tratarlos ponen estos conceptos en juego. Para conseguir desarrollar las competencias del alumnado, es necesario examinar cuáles son los campos en los que adquieren sentido los conceptos matemáticos del tema. Esto nos permitirá buscar situaciones en las que los conceptos adquieren sentido y significado, simplificando en cierta medida el proceso de aprendizaje.

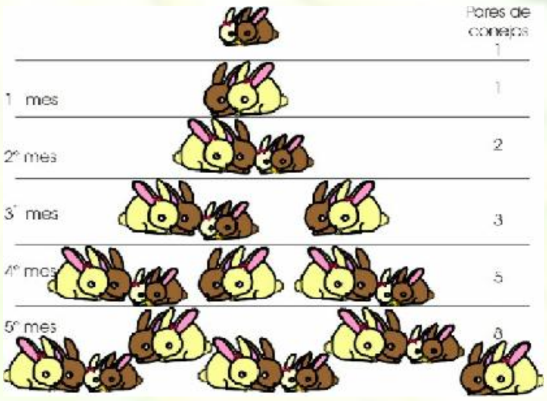
De esta forma pasamos a presentar algunos fenómenos que se pueden encontrar tanto en la naturaleza como en la sociedad. Teniendo presente el objetivo de contextualizar nuestro tema, distinguiremos entre:

Regularidades matemáticas en fenómenos

De forma que empezaremos explicando fenómenos relativos a sucesiones. Los fenómenos que a continuación se van a exponer siguen una disposición en secuencia numéricas. Como principal fenómeno en este campo vamos a destacar "La sucesión de Fibonacci" por la multitud de fenómenos a los que da respuesta.

<u>La sucesión de Fibonacci</u>

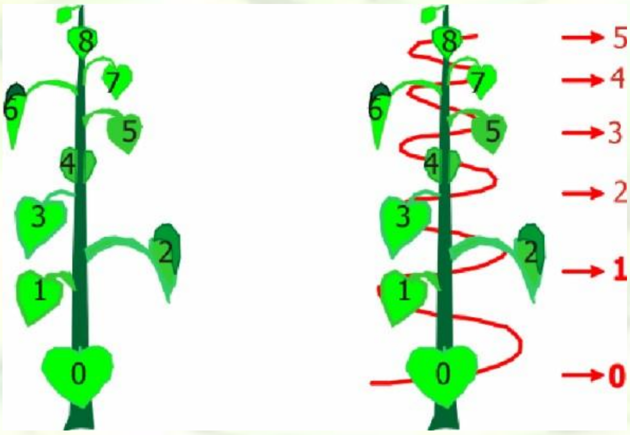
La sucesión de Fibonacci cobra su mayor importancia a la hora de explicar fenómenos naturales, si bien son sus aplicaciones más directas, no podemos olvidar la relevancia que supone la misma en el arte y otros campos. Es sabido que esta sucesión consiste en sumar los dos términos inmediatamente anteriores, siempre comenzando por la unidad. Veamos algunos fenómenos relacionados con la famosa sucesión:



La sucesión de Fibonacci está estrechamente emparentada con la naturaleza. Algunos aseguran que Leonardo encontró estos números cuando estudiaba el crecimiento de las poblaciones de conejos, y es muy posible que así sea. Imaginemos que una pareja de conejos tarda un mes en alcanzar la edad fértil, y a partir de ese momento cada vez engendra otra pareja de conejos, que a su vez (tras llegar a la edad de la fertilidad) engendrarán cada mes una pareja de conejos. *¿Cuántos conejos habrá al cabo de un determinado número de meses?* **Cada mes habrá un numero de conejos que coincide con cada uno de los términos de la sucesión de Fibonacci**.

Las ramas y las hojas de las plantas son más o menos eficientes para atrapar el máximo de luz solar posible de acuerdo a la forma en que se distribuyen alrededor del tallo. Hay plantas en que las hojas se encuentren una justo en la vertical de la otra. En general, las hojas nacen siguiendo una espiral alrededor del tallo. Fijemos nuestra atención en una hoja de la base del tallo y asignémosle el número cero. Luego, contemos cuántas hojas hay en el tallo hasta encontrarnos directamente sobre la hoja "cero". Veremos que en la mayoría de las plantas este número pertenece la sucesión de Fibonacci. Además, si contamos cuántas vueltas dimos antes de obtener la superposición de las hojas, nuevamente se obtiene un número de la sucesión de Fibonacci.

El número de espirales que pueden verse en numerosas variedades de flores y frutos también se ajusta a parejas consecutivas de términos de esta sucesión. El ejemplo más frecuentemente citado es la de la flor del girasol, cuya gran mayoría posee 55 espirales en un sentido y 89 en el otro, o bien 89 y 144 respectivamente.



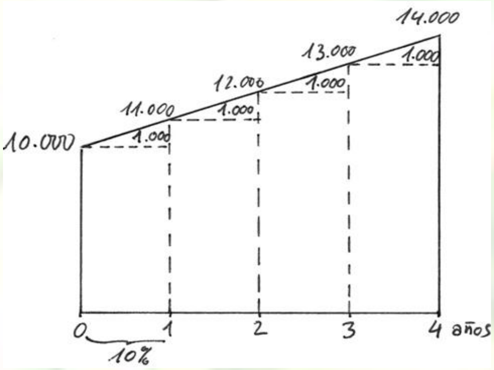
Fractales

Existe cierta evidencia empírica de que la medición de una línea geográfica real depende de la "regla de medir" o escala mínima usada para medirla, debido a que los detalles cada vez más finos de esa línea aparecen al usar una regla de medir más pequeña. Distinguimos curvas autosimilares que tienen dimensiones fraccionales entre 1 y 2. Tales curvas son ejemplos de curvas fractales.

Fenómenos relacionados con secuencias numéricas con reglas de construcción regulares

En este campo vamos a destacar fenómenos y casos que se describen mediante secuencias numéricas que tienen reglas de construcción regulares. Destacaremos como casos más importantes aquellos fenómenos relativos a las progresiones aritméticas y geométricas. De hecho gran parte de la unidad didáctica descansa sobre estos contenidos, por lo que es muy interesante para el docente tener un buen estudio fenomenológico que dé sentido a estos conceptos.

Progresiones aritméticas



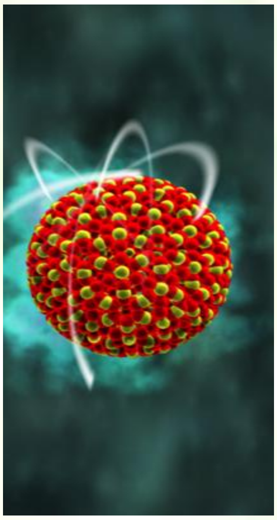
La principal observación fenomenológica de las progresiones aritméticas concierne a la rentabilidad obtenida de una cantidad invertida a plazo fijo. Si supones pues que hemos invertido una depósito de 10.000 euros a plazo fijo, con un interés del 10% (un interés ficticio), obtendremos una ganancia de 1.000 por año, por lo que nuestro dinero irá creciendo en progresión aritmética de diferencia 10.

Progresiones geométricas

Una progresión geométrica es una sucesión de números en la que cada número es igual al anterior multiplicado por una constante.

Año	Interés 4%	Interés 6%	Interés 8%	Interés 10%
1	100	100	100	100
5	116,99	126,25	136,05	146,41
10	142,33	168,95	199,90	235,79
20	210,68	302,56	431,57	611,59
30	311,87	541,84	931,73	1.568,31
40	461,64	970,35	2.011,53	4.114,48
50	683,33	1.737,75	4.342,74	10.671,90

En el mundo de la inversión es importante conocer la progresión geométrica y su velocidad de crecimiento. El denominado "interés compuesto" es una progresión geométrica. Comparemos varias inversiones con diferentes intereses compuestos, o progresiones geométricas:



Las sustancias radiactivas se desintegran con el paso del tiempo. La cantidad de una cierta sustancia que va quedando a lo largo del tiempo viene dada por:

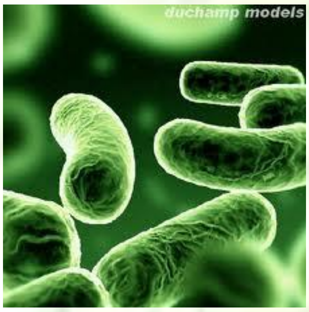
$$M = M_0 \cdot a$$

M_0 es la masa inicial,

$0 < a < 1$ es una constante que depende de la sustancia y de la unidad de tiempo que tomemos.

La rapidez de desintegración de las sustancias radiactivas se mide por el "periodo de desintegración" que es el tiempo en que tarda en reducirse a la mitad.

Se define el rumor como una noticia vaga u oficiosa. El rumor existe desde que el hombre está en la tierra. El rumor, llamado frecuentemente y de manera despectiva chisme, es parte intrínseca de nuestra existencia. Alguien dice, cuenta algo, y rápidamente, cual veloz rayo, lo transmitimos, como dogma de fe, a todos los que encontramos en nuestro camino. De ahí que los rumores se propaguen tan rápidamente. Lo hacen en progresión geométrica.



El mecanismo de reproducción habitual en bacterias es la bipartición. Mediante este mecanismo se obtienen dos células hijas que a su vez volverán a reproducirse y cada una de ellas obtendrá sus correspondientes células hijas, y así sucesivamente. Este proceso se puede modelizar mediante una progresión aritmética

Desarrollo histórico de las sucesiones

El desarrollo histórico de las sucesiones numéricas se enmarca, en cierta medida, dentro del “Algebra”. Esta disciplina se concibe como la rama de las matemáticas que trata la simbolización de relaciones numéricas generales y de estructuras matemáticas así como de la operación sobre esas estructuras. Los temas típicos incluyen:

- Propiedades de los números reales y complejos
- El planteamiento y resolución de ecuaciones de primer y segundo grado en una incógnita.
- La simplificación de expresiones polinómicas y racionales.
- La representación simbólica de funciones lineales, cuadráticas, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, junto con sus gráficas
- Sucesiones y series

Se pueden tomar las progresiones como ejemplo más sencillo del concepto de sucesión. Desde los albores de la historia de las matemáticas se han estudiado sus propiedades, y éstas han sido aplicadas, sobre todo, a la aritmética comercial.

El estudio de las progresiones aritméticas es paralelo al de las geométricas por cuanto las propiedades de estas últimas emanan de las primeras sin más que convertir las sumas en productos, diferencias en cocientes, y el producto por un número natural en una potencia de exponente natural.

El origen de las progresiones, al igual que el de tantas otras ramas de las matemáticas, es incierto. No obstante, se conservan algunos documentos que atestiguan la presencia de progresiones varios siglos antes de nuestra era, por lo que no se debe atribuir su paternidad a ningún matemático concreto.

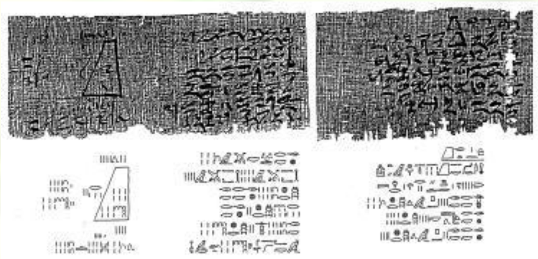
Babilonia

Es conocido el problema de calcular en cuánto tiempo se doblaría una cantidad de dinero a un determinado interés compuesto, propuesto por los babilonios (2000 a.C. - 600 a.C.), lo cual hace pensar que conocían de alguna manera la fórmula del interés compuesto y, por tanto, las progresiones geométricas.

El Antiguo Egipto

En el antiguo Egipto ya se estudiaban las relaciones aritméticas en relación con sus problemas cotidianos. En cuanto al trato de las sucesiones sus conocimientos se recogen en el "papiro Amhes". Donde aparece tablas de descomposición de $\frac{2}{n}$ en suma de fracciones unitarias (con n impar pues para n par equivale a una unitaria al simplificarse), y otra en la que se escriben las descomposiciones de las fracciones de la forma $\frac{n}{10}$. Tablas que le servirían al escriba en los cálculos con fracciones que habría que efectuar para resolver los problemas del papiro.

Otros de los textos importantes que recogen los conocimientos importantes de esta civilización es "El papiro Rhind". En él se recogen conocimientos generales sobre series geométricas y aritméticas.



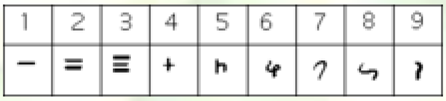
También en Egipto utilizaban una serie de reglas que se acercan a la noción de sucesión para poder acotar la raíz cuadrada de un número cualquiera a.

$$b_1^2 = \frac{a^2}{a_1^2}$$

La antigua india (900 a.C – 200 d.C)

Pingala (aproximadamente de los siglos III al I a. C.) en su tratado de prosodia usa un dispositivo correspondiente a un sistema binario de numeración. Su discusión sobre la combinatoria de métricas musicales corresponde al teorema binomial. La obra de Pingala también contiene ideas básicas sobre los números de Fibonacci, llamados mātrāmeru. La escritura brahmí se desarrolló al menos desde la dinastía Mauria, en el siglo IV a. C.. Los numerales brahmí datan del siglo III a. C.

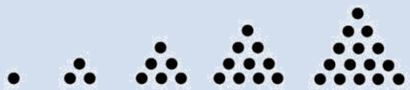
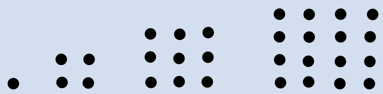
Entre el 400 a. C. y el 200 a. C., los matemáticos yainas comenzaron el estudio de las matemáticas para el exclusivo propósito de las matemáticas. Ellos fueron los primeros en desarrollar los números transfinitos, la teoría de conjuntos, los logaritmos, leyes fundamentales de los índices, ecuaciones cúbicas y cuárticas, sucesiones y progresiones, permutaciones y combinaciones, cuadrados y extracción de la raíz cuadrada y potencias finitas e infinitas. El Manuscrito “Bakhshali”, escrito entre el 200 a. C. y el 200 d. C., incluía soluciones de ecuaciones lineales con más de cinco incógnitas, la solución de la ecuación cuadrática, progresiones aritméticas y geométricas, series compuestas, ecuaciones cuadráticas indeterminadas, ecuaciones simultáneas y el uso del cero y los números negativos.



Numerales brahmí

La antigua Grecia (hasta el 300 d.C)

En esta época ya se comienzan a usar los números figurales, debido a lo pobre que resultaba ser el sistema de numeración de la época. Así, mediante un enfoque geométrico, representaban mejor las cantidades. Así la escuela pitagórica descubre ciertas regularidades como:

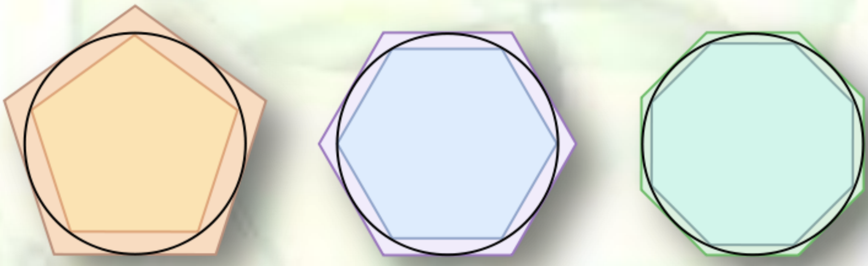
Nombre	Números triangulares	Números cuadrangulares
Expresión gráfica		
Regla de recurrencia	$\frac{n(n+1)}{2}$	$(n+1)^2$

Además de otras aportaciones de la cultura Griega a las matemáticas, cabe destacar en nuestro tema que se comienza a hablar en este tiempo de sucesiones de números pares e impares. Aunque se asociaba lo “par” con lo ilimitado y lo “impar” con limitado.

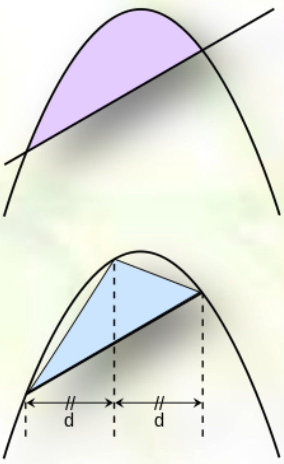
Arquímedes (287 a.C – 212 a.C)

Este matemático griego trabajo durante su vida con algunas sucesiones y series de gran importancia. Las relativamente pocas copias de trabajos escritos de Arquímedes que sobrevivieron a través de la Edad Media fueron una importante fuente de ideas durante el "Renacimiento". Entre otros trabajos e ideas que propuso Arquímedes podemos destacar:

- El valor de **Π** mediante la aproximación de una sucesión de polígonos circunscritos en la circunferencia



- La cuadratura de la parábola mediante la serie:



$$\sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 1 + 4^{-1} + 4^{-2} + 4^{-3} + \cdots = \frac{4}{3}$$

La antigua China

Ya en la antigua China se puede apreciar el concepto de sucesión, más conocido como regularidad, en su sistema de numeración. Este sistema se conoce como "numeración con varillas". Y se representa

Números positivos

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Vertical		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Horizontal		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

Números negativos

	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9
Vertical		𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
Horizontal		𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

La edad media

Esta etapa se caracteriza claramente por el freno que supone al avance de las ciencias. Si bien, cabe destacar las traducciones que se realizan en la escuela de Toledo de algunas traducciones árabes como, especialmente de "al-Kawarizmi".

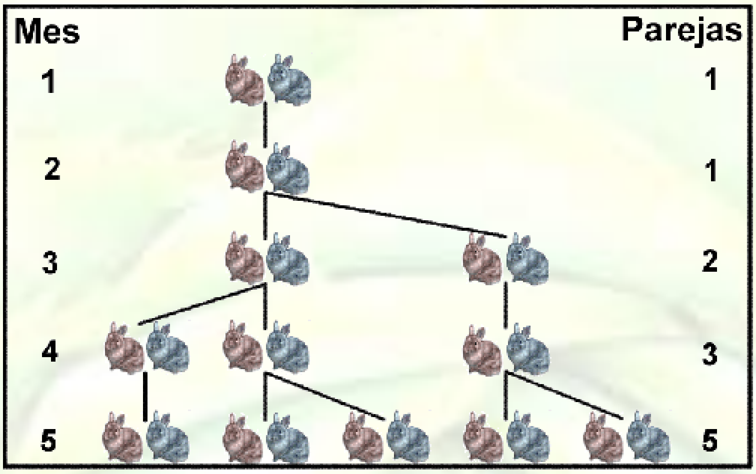
Bhaskara II(1114 - 1185)

Este autor es un importante matemático de la India en el siglo XII. Produjo grandes innovaciones en materias como el Cálculo, Astronomía, sistemas de numeración y resolución de ecuaciones.

En el libro IX de Los Elementos de Euclides aparece escrita una fórmula, semejante a la actual, de la suma de n términos consecutivos de una progresión geométrica. Bhaskara plantea en su más conocida obra, "En Lilavati", diversos problemas sobre progresiones aritméticas y geométricas.

Leonardo de Pisa (Fibonacci) (1170-1250)

Más conocido como Fibonacci, es un matemático brillante que viajo por Siria, Egipto, Grecia y Sicilia, contactando así con los principales centros de traducción de la época. Su principal aportación a las matemáticas fue el estudio y cálculo de una progresión relativa a una pareja de conejos, que como se puede comprobar actualmente tiene múltiples aplicaciones en los fenómenos (especialmente naturales). Esta sucesión es conocida como sucesión de Fibonacci. De hecho el fondo de este trabajo es una sucesión de Fibonacci.



Sucesión de Fibonacci (población de conejos)

En 1220 Leonardo escribe su obra "Geometría Práctica" y además publica una obra menos conocida sobre teoría de números donde se estudian propiedades de los números y algunas series. De hecho hoy en día las sucesiones recurrentes llevan su nombre.

Las matemáticas en el renacimiento

En el renacimiento se abordan y resuelven problemas relacionados con el algebra y por relación con las sucesiones de gran envergadura, podemos destacar:

Nicolás de Cusa(1401-1464)

Sigue una vertiente claramente filosófica, relacionada con las matemáticas. Sus escritos se fundamentan claramente a la crítica sobre la noción de infinito

> *"para alcanzar el maximun y el minimun hay que trascender la serie indefinida de lo grande y lo pequeño; y entonces se descubre que el maximun y el minimun coinciden en la idea de infinito...".*

De sus ideas se inspiraron: Leonardo da Vinci, Giordano Bruno, Copérnico, Kepler. Georg von Peurbach (1423-1461)

De los manuales más importantes de la época destaca "Triparty en la science des nombres" de Nicolás Chuquet. Este autor es uno de los primeros preocupados por la notación. En la línea de Chuquet se encuentra la obra de Luca di Borgo San Sepolcro (Luca Pacioli), con su monumental "enciclopedia: Summa de Aritmética, Geometría, proportioni et proportionalità". Obra de más de 600 páginas dónde se tiene de todo de las Matemáticas de la época.

En la escuela alemana cabe destacar por sus avances en la materia a Christoph Rudolff, gran divulgador y revolucionario en la notación del álgebra, a él le debemos la notación actual de la raíz cuadrada. Y Michael Stifel, al cual se le debe el estudio tan serio que hizo de las series y de las progresiones Aritméticas y Geométricas, sus puntos de contacto. También se le debe a Stifel el término "exponente", tanto positivos como negativos, enteros y racionales

Edad contemporánea

Isaac Newton(1642-1727)

Isaac Newton es uno de los científicos más importantes de la historia. Newton no se conforma solo con intentar describir la realidad matemática que le rodea, sino que abarca disciplinas tan dispares como la física ó la óptica. En todo sentido, Newton resulta un “todoterreno” de las ciencias.

La principal, y más conocida, aportación que Newton brinda al tema estudiado es el “Binomio de Newton”. Mediante el Teorema del binomio Newton es capaz de desarrollar cualquier potencia de sumandos como una serie finita de términos. De esta forma se puede representar:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} x^{n-k} y^k$$

Gottfried Leibniz(1646 - 1716)

La fórmula de Leibniz para el cálculo de π, nombrada así en honor a Gottfried Leibniz, dice que:

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\Pi}{4}$$

La expresión de la izquierda es una serie infinita denominada serie de Leibniz, que converge a π / 4. También se la denomina serie de Gregory-Leibniz para reconocer el trabajo de James Gregory, contemporáneo de Leibniz. Usando sumatorio, la serie se puede expresar como

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\Pi}{4}$$

La fórmula fue descubierta por primera vez en el siglo XV por Madhava of Sangamagrama, un matemático indio y fundador de la escuela de astronomía y matemáticas de Kerala, unos 300 años antes que Leibniz. En reconocimiento a su trabajo, también se conoce esta fórmula como la serie de Madhava-Leibniz.

Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

Destacamos a Lagrange por su aportación al desarrollo de las matemáticas en su época. En concreto es destacable su demostración del Teorema de Wilson que dice que:

si "n" es un número primo, entonces $(n - 1)! + 1$ siempre es un múltiplo de n , (1771).

Leonhard Euler (1707-1783)

Euler es sin duda uno de los matemáticos más relevantes de la historia (de hecho se le considera el maestro de los matemáticos). Contribuyó a todas las ramas de las matemáticas activamente. Trabajo con sucesiones y series, como por ejemplo:

Trabajos relativos al número "e":

Limite de una sucesión	$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$
Serie Aritmética	$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$
Desarrollo de una función mediante series	$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

Algunos de los mayores éxitos de Euler fueron la resolución de problemas del mundo real a través del análisis matemático, en lo que se conoce como matemática aplicada, y en la descripción de numerosas aplicaciones de los números de Bernoulli, las series de Fourier, los diagramas de Venn, el número de Euler, las constantes e y π. Euler ya empleaba las series de Fourier antes de que el mismo Fourier las descubriera.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857)

Cauchy fue pionero en el análisis matemático y la teoría de grupos de permutaciones, contribuyendo de manera medular a su desarrollo. También investigó la convergencia y la divergencia de las series infinitas, ecuaciones diferenciales, determinantes, probabilidad y física matemática.

Además caracterizo el concepto de límite mediante las sucesiones.

Joseph Fourier(1768-1830)

Introduce la representación de una función como una serie de senos y cosenos, ahora conocidas como las series de Fourier.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos \frac{2n\Pi}{T} t + b_n sin \frac{2n\Pi}{T} t\right]$$

Carl Friedrich Gauss(1777-1855)

Ya desde temprana edad Gauss destaca por sus habilidades matemáticas, incluso a los 7 años consiguió resolver el problema de la suma de los 100 primeros números en una clase en el colegió estableciendo una relación simétrica en esta progresión aritmética.

En uno de sus libros " Disquisitiones Arithmeticae" consigue dar una estructura sistematizada a la teoría de números.

Además de los logros citados, Gauss destaca en análisis matemático, Geometría Diferencial, Estadística, Geodesia, Magnetismo y Óptica. Por su cantidad de obras y relevancia en las susodichas materias en las que trabaja, se puede considerar a Gauss como uno de los grandes científicos (es difícil enmarcarlo en una sola área) de todos los tiempos.

Stolz(1842 - 1905)

Con Stolz nos encontramos ante uno de los grandes matemáticos austriacos y de la época. Es conocido por sus trabajos en materia de análisis matemático e infinitesimal. Sobre el tema de sucesiones consiguió estudiar la convergencia de una sucesión a partir de otra sucesión monótona creciente y divergente. Se puede apreciar en el siguiente cuadro como Stolz resuelve el problema:

Criterio de Stolz de la raíz

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones tales que,

- $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$
- b_n es monótona creciente y divergente $(b_n > 0, \forall n)$
- $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[b_{n+1} - b_n]{\frac{a_{n+1}}{a_n}} = \lambda, \lambda \in \mathbb{R}$

Entonces,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[b_n]{a_n} = \lambda$$

ANEXO III. Oportunidades de aprendizaje

Llegados a este punto conocemos pues cuales son las expectativas de aprendizaje y las dificultades de los escolares que se tienen respecto al tema de sucesiones. Nuestro objetivo será pues alcanzar en la medida de lo posible aquellos objetivos que se han propuesto y subsanar los errores y dificultades que nuestros alumnos presenten en relación al tema.

La estrategia que el docente seguirá para alcanzar el objetivo que se propuesto consistirá fundamentalmente en la realización de tareas que servirá como "puente" tanto para alcanzar los objetivos como para salvar los obstáculos que suponen las limitaciones del aprendizaje.

A continuación veremos dos tareas que, a modo de ejemplo, servirán para alcanzar algunas expectativas seguidas de otras dos tareas que ayudarán a los escolares a superar los errores y dificultades presupuestos.

- **Tareas para superar algunas expectativas**

TAREA 1

Estudia si las siguientes sucesiones son progresiones aritméticas ó geométricas. En caso afirmativo halla su término general. Representa los 5 primeros términos en la recta.

5. $\mathbf{8,\ 5,\ 2,\ -1,\ -4}$

6. $\mathbf{\frac{1}{4}\ ,1\ ,4\ ,16\ ,64}$

7. $\mathbf{2,\ \frac{4}{3},\ \frac{8}{9},\ \frac{16}{27},\ \frac{32}{81}}$

8. $\mathbf{4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64}$

Como vemos en la tarea expuesta, se pueden identificar con claridad a qué objetivos contribuye a alcanzar.

En primer lugar resulta obvio que contribuye a alcanzar el objetivo número 1, *Identificar regularidades en una secuencia de números,* ya que en primer lugar el alumnado debe reconocer el patrón que sigue la sucesión en concreto.

Si bien es importante el reconocimiento del patrón, también se exige en la tarea que el escolar exprese la sucesión en función de su término general, lo que alude directamente al objetivo número 2, *Obtener el término general de una sucesión conocidos varios términos de la misma.*

Por último en el enunciado del ejercicio se propone al alumno que represente las sucesiones en cada caso en la recta real. De esta forma se contribuirá a la adquisición del objetivo número 5, *Representar sucesiones gráficamente*.

Además esta tarea contribuirá al desarrollo de las competencias matemáticas PISA de “Pensar y razonar” (PR), “Modelizar” (M), “Lenguaje simbólico” (LS), “Representar” (R) y “Uso de herramientas tecnológicas” (HT).

- **Tarea para superar errores y dificultades**

TAREA 2: “La sucesión del frutero”

Un frutero ha construido una pirámide con naranjas, todas iguales, cuya base tiene 10 naranjas de lado. En cada capa coloca las naranjas aprovechando los huecos que dejan las naranjas de la capa anterior.

- ***Escribir la sucesión de naranjas que hay en cada capa.***
- ***¿Cuántas naranjas tiene la pirámide?***
- ***Generaliza al caso de lado* n *naranjas.***
- ***Explica tu razonamiento.***

Esta tarea es una tarea es muy interesante desde el punto de vista del análisis cognitivo, ya que el alumno deberá esforzarse por explicar, desde el punto de vista de las matemáticas, una situación de la vida cotidiana, que fácilmente se les puede presentar. La tarea puede ser utilizada para superar algunos errores y dificultades que hemos presentado, de hecho se considera que puede ayudar a reducir los siguientes errores:

- *Obtienen la ley general analizando los primeros términos sin analizar los términos superiores.*
- *No son capaces de detectar regularidades.*
- *En una representación gráfica saben obtener el siguiente término de la representación pero no el término general de la sucesión.*
- *No saben contextualizar el problema.*