Universidad de Granada

TRABAJO FIN DE MÁSTER

UNIDAD DIDÁCTICA: DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

MÁSTER UNIVERSITARIO DE FORMACIÓN DEL PROFESORADO DE ENSEÑANZA SECUNDARIA OBLIGATORIA, BACHILLERATO, FORMACIÓN PROFESIONAL Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS.
ESPECIALIDAD: MATEMÁTICAS

TRABAJO REALIZADO POR CRISTINA MARTÍN GONZÁLEZ
TRABAJO DIRIGIDO POR D. PABLO FLORES MARTÍNEZ
TRABAJO CODIRIGIDO POR Dña. CATALINA MARÍA BARRIGA SARABIA

CURSO 2011/2012

INDICE

INTRODUCCIÓN……………………………………………………………………………………………………….Pag. 2
FUNDAMENTACIÓN INSTITUCIONAL…………………………………………………………………………Pag. 4
CURRÍCULO MATEMÁTICO…………………………………………………………………………………………Pag. 7
ANÁLISIS DE CONTENIDO………………………………………………………………………………………….Pag. 8
DESARROLLO HISTÓRICO………………………………………………………………………………Pag. 8
ESTRUCTURA CONCEPTUAL…………………………………………………………………………Pag. 11
SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN……………………………………………………………………Pag. 12
FENOMENOLOGÍA……………………………………………………………………………………………Pag. 15
MAPA CONCEPTUAL………………………………………………………………………………………..Pag. 17
ANÁLISIS COGNITIVO………………………………………………………………………………………………..Pag. 18
FOCOS………..Pag. 18
OBJETIVOS Y COMPETENCIAS PISA…………………………………………………………………Pag. 18
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN…………………………………………………………………………………………Pag. 21
UNIDAD DIDÁCTICA:*DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES. MÚLTIPLOS Y DIVISORES*. Pag.22
ESQUEMA DE LAS SESIONES…………………………………………………………………………..Pag. 23
DESARROLLO DE LAS SESIONES………………………………………………………………………..Pag. 24
ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD……………………………………………………………………………Pag. 39
CURIOSIDADES MATEMÁTICAS DE DIVISIBILIDAD……………………………………………..Pag. 42
EVALUACIÓN…………………………………………………………………………………………………...Pag. 46
CONCLUSIONES……………………………………………………………………………………………………….Pag. 47
BIBLIOGRAFÍA……..Pag. 49
ANEXO I: COMPETENCIAS BÁSICAS…………………………………………………………………………Pag. 50
ANEXO II: DESARROLLO HISTÓRICO…………………………………………………………………………..Pag. 51
ANEXO III: DESARROLLO DE LA TABLA DE HECHOS…………………………………………………….Pag. 59
ANEXO IV: COMPETENCIAS PISA Y SUS DESCRIPTORES…………………………………………….Pag. 60
ANEXO V: MODELO DE PRUEBA FINAL DEL TEMA……………………………………………………..Pag. 62

INTRODUCCIÓN

Este documento que a continuación se presenta, es el trabajo final del *Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas: Especialidad Matemáticas.*

En dicho máster se nos da la oportunidad de entender la función docente en todas las perspectivas, desde el entendimiento de la psicología de los alumnos; pasando por la comprensión de la sociedad actual, las leyes y órdenes que impulsan los cambios educativos; hasta la formalización escrita de los conceptos y temas matemáticos a tratar. Por tanto, éste trabajo, es una recopilación sintetizada de una parte de la formación recibida en él, ya que, entre varias opciones a desarrollar, me he decantado en la elaboración de una unidad didáctica: *Divisibilidad de Números Naturales. Múltiplos y Divisores* para primer curso de ESO.

Para el desarrollo de ésta, he tenido en consideración lo estudiado en el máster, prestando especial atención a lo visto en la asignatura de *Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, que me ha permitido entender y estructurar mi trabajo para la elaboración del mismo.

Para ello, hay que tener en cuenta también que desde tiempos inmemoriales las matemáticas han sido una herramienta para dar respuesta a problemas relacionados con aquello que ha rodeado al hombre en cada momento de la historia. Las matemáticas son un instrumento de conocimiento y análisis de la realidad, y por lo tanto, esencial en el desarrollo de cada individuo desde su edad más temprana hasta la adulta, para conseguir que éstos se adapten a los continuos cambios que se producen en la sociedad.

En la etapa de la Enseñanza Secundaria Obligatoria (ESO), la pretensión de la matemática es que todo el alumnado pueda alcanzar los objetivos propuestos y esté preparado para incorporarse a la vida adulta, atendiendo siempre, a la diversidad. Para conseguir los objetivos es necesario que los aprendizajes sean significativos ya que *"… nuestros procesos mentales cambian de forma radical, aunque lenta, desde el nacimiento hasta la madurez, porque constantemente nos esforzamos por darle un sentido al mundo (Piaget, citado en Psicología Educativa)"*. Los aprendizajes deben tener conexión con otros conocimientos de las distintas materias y deben ser cercanos al alumno para que éste interactúe con su entorno y pueda relacionarlo con su vida cotidiana y el mundo laboral. Por eso, "*En el desarrollo cultural de un niño cada función aparece dos veces: primero en el nivel social y luego en el nivel individual: primero entre las personas (nivel interpsicológico) y después dentro del niño (nivel intrapsicológico). Esto se aplica igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones superiores se originan como relaciones reales entre individuos humanos. (Vygotsky, citado en Psicología Educativa)".* Consecuentemente, para el aprendizaje de la Divisibilidad es importante que los alumnos adquieran éste concepto tan abstracto para ellos mediante la construcción de significados e interactuación entre iguales y entre alumno-profesor.

El TFM se divide en dos partes, una dedicada a la fundamentación institucional y a los análisis previos a la unidad didáctica (análisis de contenido, cognitivo y de instrucción); y la otra, se centra en el desarrollo de la unidad didáctica.

El objetivo de este trabajo es la segunda parte mencionada anteriormente, la cual implica la especificidad de las sesiones a trabajar; un apartado de atención a la diversidad que se divide en actividades de refuerzo y actividades de ampliación; y otro apartado correspondiente a la evaluación y los instrumentos que se utilizan para ese fin.

El desarrollo de las sesiones propuestas tiene en consideración la alternancia de explicaciones y realización de tareas, con el fin de no perder la atención de los alumnos ya que es un tema que se imparte a principio de curso y va dirigido a alumnos de 1ºESO (los cuales son nuevos en el instituto).

FUNDAMENTACIÓN INSTITUCIONAL

Esta unidad didáctica va dirigida a los alumnos de primer curso del primer ciclo de la ESO. El desarrollo del conocimiento del tema de Divisibilidad Numérica comienza en la etapa de Educación Primaria, ampliándose posteriormente en la Educación Secundaria.

Según la orden ECI/2220/2007 del 21 de julio por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria, encontramos en su anexo II, las materias de Educación Secundaria en matemáticas. Concretamente, el tema de Divisibilidad, se encuentra dentro del bloque Números. Dicha orden dice:

"El desarrollo del sentido numérico iniciado en Educación Primaria continúa en Educación Secundaria con la ampliación de los conjuntos de números que se utilizan y la consolidación de los ya estudiados al establecer relaciones entre distintas formas de representación numérica, como es el caso de fracciones, decimales y porcentajes. Lo importante en estos cursos no son sólo las destrezas de cálculo ni los algoritmos de lápiz y papel, sino una comprensión de las operaciones que permita el uso razonable de las mismas, en paralelo con el desarrollo de la capacidad de estimación y cálculo mental que facilite ejercer un control sobre los resultados y posibles errores."

Los contenidos comunes en el primer curso de ESO son:

- Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre cantidades y medidas o sobre elementos o relaciones espaciales.
- Utilización de estrategias y técnicas simples en la resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error, la resolución de un problema más simple y la comprobación de la solución obtenida.
- Expresión verbal del procedimiento que se ha seguido en la resolución de problemas.
- Perseverancia y flexibilidad en la búsqueda de soluciones a los problemas.
- Confianza en las propias capacidades para afrontar problemas, comprender las relaciones matemáticas y tomar decisiones a partir de ellas.
- Utilización de herramientas tecnológicas y recursos manipulativos para facilitar los cálculos de tipo numérico, algebraico o estadístico, las representaciones funcionales y la comprensión de propiedades geométricas.
- Valoración del trabajo bien hecho e interés por la presentación ordenada y clara del proceso seguido y de los resultados obtenidos en la resolución de problemas.
- Reconocimiento del trabajo en equipo mostrando interés y respeto por estrategias diferentes a las propias.

Los contenidos que aparecen en el bloque Números relacionados con ésta unidad didáctica son:

- Potencias de base y exponente natural. Producto y cociente de potencias de la misma base.

- Divisibilidad de números naturales. Múltiplos y divisores de un número. Uso de los criterios de divisibilidad.
- Números primos. Números compuestos. Descomposición de números en factores primos.
- Múltiplos y divisores comunes a varios números. Máximo común divisor (m.c.d.) y mínimo común múltiplo (m.c.m.): procedimientos de cálculo.
- Aplicaciones de la divisibilidad y uso del m.c.d. y del m.c.m en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.
- Elaboración y utilización de estrategias personales para el cálculo mental, para el cálculo aproximado y con calculadoras.

Los criterios de evaluación que encontramos en la orden ECI/2220/2007 relacionados con esta unidad didáctica son:

1.Utilizar números naturales y enteros, así como fraccionarios y decimales sencillos, sus operaciones y propiedades para recoger, transformar e intercambiar información.

Se trata de evaluar la capacidad para:

- Identificar y adquirir destrezas en el empleo de los números y las operaciones siendo consciente de su significado y propiedades.
- Aplicar la divisibilidad en la resolución de problemas asociados a situaciones cotidianas.
- Transmitir informaciones utilizando los números de manera adecuada.
- Desarrollar, en casos sencillos, la competencia en el uso de operaciones combinadas como síntesis de la secuencia de operaciones aritméticas.

2.Resolver problemas para los que se precise la utilización de las cuatro operaciones con números enteros, decimales y fraccionarios, utilizando la forma de cálculo apropiada y valorando la adecuación del resultado al contexto.

Se trata de valorar la capacidad para:

- Asignar a las distintas operaciones nuevos significados.
- Elegir la forma de cálculo: mental, escrita o con calculadora, más apropiada a cada situación.
- Interpretar los resultados obtenidos en los cálculos y comprobar si se adopta la actitud que lleva a no tomar el resultado por bueno sin contrastarlo con la situación de partida.

9.Utilizar estrategias y técnicas simples de resolución de problemas tales como el análisis del enunciado, el ensayo y error o la resolución de un problema más sencillo, y comprobar la solución obtenida y expresar, utilizando el lenguaje matemático adecuado a su nivel, el procedimiento que se ha seguido en la resolución.

Se pretende apreciar la capacidad de:

- Resolver problemas para los que son se dispone de un procedimiento estándar que permita obtener la solución.
- Comprender el enunciado a partir del análisis de cada una de las partes del texto, identificar los aspectos más relevantes y aplicar estrategias simples de resolución, siendo capaz de modificarlas a lo largo del proceso.
- Perseverar en la búsqueda de soluciones, así como en el hábito y la destreza necesaria para comprobar su validez, con confianza en la propia capacidad para lograrlo.
- Transmitir con un lenguaje adecuado, las ideas y procesos personales desarrollados, de modo que se hagan entender y entiendan a sus compañeros.
- Realizar con actitud positiva esta actividad de intercambio, valorando el proceso de discusión con los otros como una posibilidad de mejora.

10.Identificar elementos matemáticos presentes en la realidad y aplicar los conocimientos adquiridos para interpretar y tomar decisiones acerca de situaciones reales que exigen herramientas matemáticas en su tratamiento y, en su caso, para su resolución.

Se pretende valorar la competencia para:

- Reconocer elementos matemáticos de la realidad cotidiana.
- Formular verbalmente conjeturas propias y tomar decisiones teniendo en cuenta la información disponible.
- Apreciar la simplicidad del lenguaje matemático para describir e interpretar el mundo físico.

La necesidad de formar a los alumnos a lo largo de su vida, sobretodo en su etapa estudiantil, para que éstos puedan ser ciudadanos activos y participativos en la sociedad que les rodea, hace que sea necesaria la educación en *Competencias Básicas* que desarrollen un aprendizaje permanente. En consecuencia, la formación en competencias contribuye al desarrollo de la mente que aprende, al desarrollo de capacidades y al desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje.

Competencia Matemática. Consiste en la habilidad para utilizar y relacionar los números, sus operaciones básicas, los símbolos y las formas de expresión y razonamiento matemático, tanto para producir e interpretar distintos tipos de información, como para ampliar el conocimiento sobre aspectos cuantitativos y espaciales de la realidad, y para resolver problemas relacionados con la vida cotidiana y con el mundo laboral.

La *Competencia Matemática*, esencial en la formación del individuo, contribuye a la adquisición del resto de competencias básicas (ver ANEXO I).

CURRÍCULO MATEMÁTICO

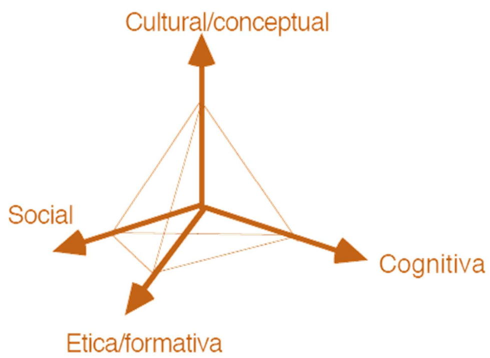
Una Unidad Didáctica es una forma de planificar el proceso de enseñanza-aprendizaje alrededor de un elemento de contenido que se convierte en eje integrador del proceso, aportándole consistencia y significatividad. Esta forma de organizar conocimientos y experiencias debe considerar la diversidad de elementos que contextualizan el proceso (nivel de desarrollo del alumno, medio sociocultural y familiar, Proyecto Curricular, recursos disponibles) para regular la práctica de los contenidos, seleccionar los objetivos básicos que pretende conseguir, las pautas metodológicas con las que trabajará, las experiencias de enseñanza-aprendizaje necesarios para perfeccionar dicho proceso (Escamilla, 1993,39).

Tras la definición anterior, se puede decir que el Análisis Didáctico es una conceptualización de las actividades que el profesor debe realizar para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas.

Dicho análisis permite configurar el *Currículo en Matemáticas*, que se define como el plan de formación en dicha ciencia para los individuos que tiene lugar en el sistema educativo y cuya puesta en práctica corresponde a profesores y especialistas. La educación, en particular la educación matemática, se fundamenta en una serie de valores teniendo en cuenta las prácticas sociales de su entorno, basándose en criterio ético y condicionado por el contexto político determinado de cada época (Rico, L. 1997).

En el currículo de matemáticas podemos destacar cuatro dimensiones para organizar los diferentes niveles de reflexión curricular.

- Dimensión cultural/conceptual.
- Dimensión cognitiva.
- Dimensión ética/formativa.
- Dimensión social.



Para relacionar las cuatro dimensiones se deben considerar varios niveles de concreción curricular, atendiendo a distintos criterios y con responsabilidad. El carácter sistemático e interdependiente de cada dimensión del currículo debe tenerse en cuenta en la elaboración de la unidad didáctica, por ello, cada dimensión está relacionada con uno de los análisis que componen el análisis didáctico.

Dimensión cultural/conceptual	⟷	Análisis de contenido
Dimensión cognitiva	⟷	Análisis cognitivo
Dimensión ética/ formativa	⟷	Análisis de instrucción
Dimensión social	⟷	Análisis fenomenológico (dentro del A.contenido)

ANÁLISIS DE CONTENIDO

En el estudio del análisis didáctico, el primero es el análisis de contenido. Aquí se especifica el contenido matemático que se va a tratar en la unidad didáctica y por ello se deben tener en cuenta los contenidos mínimos de la Educación Primaria (ya que la Teoría de la Divisibilidad comienza en la escuela) y la dificultad de los mismos en cada etapa de la ESO. En consecuencia, la planificación de una unidad didáctica debe fundamentarse en la exploración y estructuración de los diversos significados matemáticos objeto de la planificación.

Empecemos pues con la definición de Divisibilidad ya que es el centro de la unidad didáctica que voy a tratar. El estudio de la Teoría de la Divisibilidad se originó debido a la necesidad de tener que repartir cantidades de cosas entre personas, dándole a cada una el mismo número de unidades, cuestiones que a veces no tenían solución debido a la no divisibilidad del número tratado.

"Un número a es divisible por b, cuando con el número de unidades que indique el número a se puedan hacer tantos números como indique el número b, teniendo todos estos grupos el mismo número de unidades."

"Un número a distinto de 0 es divisor de otro número natural b si existe un número natural c tal que b=axc; se escribirá a|b que se lee << a divide a b>> o <<a es divisor de b>>. Es decir, a|b si existe un c ∈ N, tal que b=axc. También diremos que b es múltiplo de a o que b es divisible por a." (Sierra, González, Sánchez y Sierra, 1989).

*"Cuando al dividir un número **a** entre otro **b** la división es exacta se dice que **a** es divisible por **b**, o bien, que **a** es múltiplo de **b**."*(Gallego y Quiñonero, 2003).

"Dos números están emparentados por la relación de divisibilidad cuando uno cabe en el otro una cantidad exacta de veces; es decir, cuando su cociente es exacto".

DESARROLLO HISTORICO

A continuación se presenta un breve resumen de la historia de la divisibilidad en la que se destaca lo más característico de su evolución hasta nuestros días. En el ANEXO II, se encuentra la versión extendida del desarrollo histórico de la divisibilidad.

Precursores en la matemática antigua

Los conceptos relacionados con la divisibilidad se conocen desde la prehistoria con el descubrimiento del hueso de Ishango que representa el ciclo de un calendario lunar de seis meses. Posteriormente, tanto en el antiguo Egipto como en Mesopotamia, se emplearon los conceptos de divisibilidad para resolver problemas de medida "cuantos caben en".

La matemática griega, a través de la obra de Euclides (300 a.C.) *"Elementos"*, en particular, con los volúmenes VII, VIII y IX (de los trece que elaboró), en los que por medio de proposiciones formuladas en términos de medida establece:

- Un procedimiento llamado "antenaresis" (Algoritmo de Euclides) para calcular el máximo común divisor de dos o más números.
- Propiedades de la divisibilidad.
- Propiedades de los números primos entre sí a partir de las proposiciones.

En el libro IX además se incluye la proposición que establece que el conjunto de los números primos es infinito *"Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos"*, junto con proposiciones próximas al Teorema Fundamental de la Aritmética pero sin concebirlo como tal ya que no concebían la matemática independiente de la construcción.

Utilización de la divisibilidad como herramienta matemática

En el siglo XVI, debido a las necesidades tecnológicas, científicas y mercantiles, se mejoraron los métodos operativos. Stevin (1548-1620) hizo aportaciones a la física, matemática, música, semiología y contabilidad, al que se le debe la extensión de la Teoría de la Divisibilidad ya que en su obra publicada en 1634 "*Œuvres mathématiques...*" extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

Pierre de Fermat (1601-1665) tras el estudio de la obra de Diofanto de Alejandría (siglo III d.C.), se inspiró e hizo grandes aportaciones al estudio de la Teoría de Números (y a otras ramas de la matemática). De entre sus resultados más conocidos hay que destacar el "*Pequeño teorema de Fermat: Para todo número primo p y para todo número natural a no divisible por p tenemos que p divide a* $a^{p-1}-1$*"*. Y el "*Último teorema de Fermat: No es posible encontrar cuatro números naturales x, y, z, n para n>2, tales que* $x^n+y^n=z^n$*"*.

Éste último lo escribió en el margen del libro al estudiar el problema de Diofanto de descomponer un cuadrado en suma de dos cuadrados. Éste teorema fue demostrado para el caso general por Andrew Wiles en 1993.

Euler (1707-1783) unió la naturaleza de la distribución de los números primos con sus ideas del análisis matemático. Demostró la divergencia de la suma de los inversos de los números primos y, al hacerlo, descubrió la conexión entre la función zeta de Riemann y los números primos, lo que se conoce como el producto de Euler para la función zeta de Riemann.

Euler también demostró las identidades de Newton, el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Fermat sobre la suma de dos cuadrados. También definió la función ϕ de Euler que, para todo número entero positivo *n*, cuantifica el número de enteros positivos menores o iguales a *n* y coprimos con *n*. Más tarde, utilizando las propiedades de esta función, generalizó el pequeño teorema de Fermat a lo que se conoce como el teorema de Euler:

"Si a y n son enteros primos relativos, entonces n divide al entero $a^{\varphi(n)}-1$*"*

Contribuyó de manera significativa al entendimiento de los números perfectos, tema que fascinó a los matemáticos desde los tiempos de Euclides, y avanzó en la investigación de lo que más tarde se concretaría en el teorema de los números primos. En el año 1772, Euler demostró que $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ es un número primo de Mersenne (2^n-1 es primo con *n* primo). Esta cifra permaneció como el número primo más grande conocido hasta el año 1867.

Consideración de la divisibilidad como objeto matemático

Gauss (1777-1855) con su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, da una nueva orientación a la Teoría de Números, dejando de ser ésta una acumulación de resultados aislados pasando a ser una rama de las matemáticas. En dicha obra se encuentra por primera vez el concepto de número congruente y desarrolla las propiedades de la teoría de congruencias. Gauss aplica congruencias a problemas históricos como el de dado un número A determinar la cantidad de números primos con A y menores que él, para obtener posteriormente la demostración del teorema fundamental de las congruencias polinómicas $Ax^{m} + Bx^{m-1} + ... + Mx + N \equiv 0 \pmod p$ cuyo módulo p es primo que no divide a A, no puede resolverse de más de m maneras diferentes o no puede tener más de m raíces no congruentes con relación a p. También trata los residuos cuadráticos y de potencias superiores, así como demuestra el Pequeño teorema de Fermat, el de Wilson y la Ley de reciprocidad cuadrática.

Para la construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados, aunque en apariencia tenga más que ver con la geometría o con el análisis que con la aritmética de números enteros, Gauss enuncia un resultado que permite obtener los polígonos construibles con regla y compás.

"Para poder seccionar geométricamente el círculo en N partes iguales]... se requiere que N no contenga ningún factor primo impar que no sea de la forma $2^m +1$, ni tampoco ningún factor primo de la forma $2^m +1$ más de una vez."

El trabajo de Gauss también incluía el *Teorema Fundamental de la Aritmética* para el dominio de integridad de los números enteros. Gauss también introdujo la noción de grupo abeliano y demostró que en los grupos abelianos finitos existe un elemento del grupo cuyo orden es mínimo común múltiplo de los órdenes de todos los elementos.

Desarrollo actual

Uno de los corolarios del teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos, lo enunció Dirichlet (1805-1859). Con Kummer (1810-1893), Dedekind (1831-1916)y Kronecker (1823-1891) se generaliza la Teoría de Números y en particular la Teoría de la Divisibilidad mediante la creación de la estructura de ideal, una de las estructuras fundamentales del álgebra moderna.

El álgebra conmutativa moderna empezó a formalizarse hacia 1910 y en esta década aparece la noción general de anillo. La Teoría de Números ocupa a partir del siglo XX una posición prominente respecto de la Aritmética, del Álgebra y de la Geometría. La Teoría de Números abarca desde este siglo un importante lugar en el ámbito de las matemáticas, y podemos destacar el estudio de la estructura multiplicativa y de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Hilbert (1862-19343) señala que tanto los algebristas como los matemáticos dedicados a la Teoría de Números lo que hacen es manejar la misma estructura subyacente de cuerpo. Desde la perspectiva de esta estructura se vislumbra con más claridad el desarrollo a lo largo de la historia de los conceptos relacionados con la divisibilidad.

En resumen se puede concluir que el origen de lo que hoy llamamos Teoría de Números tuvo lugar con los pitagóricos, que influyeron en muchos filósofos pero sobre todo en

Euclides. Precisamente, en los libros VII, VIII y IX de los Elementos de Geometría de Euclides aparecen ya conceptos de divisibilidad, y sorprendentemente, llega hasta nuestros días el algoritmo que lleva su nombre para calcular el máximo común divisor. Por tanto, lo esencial de la unidad didáctica que se desarrollará está basado en la matemática clásica.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Para poder desarrollar la unidad didáctica se debe hacer un análisis profundo sobre los componentes que se van a desarrollar y distinguir entre las ideas y procedimientos que deben pertenecer a la formación de los alumnos.

La estructura conceptual permite hacer dicha distinción y organizar los componentes a tratar, relacionándolos entre sí siempre que sea posible. En la estructura conceptual podemos hacer una distinción entre el campo conceptual y el campo procedimental como dos grandes bloques cuyas componentes están relacionadas, es decir, dentro del campo conceptual encontramos: hechos, conceptos y estructura; que a su vez están relacionados (en el orden mencionado) con los que componen el campo procedimental: destrezas, razonamientos y estrategias.

Hechos

En este apartado se desarrollan términos, notación, convenios y resultados, propios de este tema. Como el estudio de la Divisibilidad comienza en la etapa de Educación Primaria, se debe partir de unos conocimientos previos mínimos, además estos conocimientos también son desarrollados previamente en los temas anteriores a éste. Véase ANEXO III.

Términos	Notación	Convenios	Resultados
- Producto, factor, división, dividendo, divisor, cociente, resto, división exacta e inexacta, fracción, divisible - Mide, es medido, cabe, coincidir… - Números primos - Múltiplo - Divisor	$p_1^{c1}\ p_2^{c2}\ p_3^{c3} \ldots\ldots\ p_n^{cn}$ $a\|b$, $a \cdot b$ m.c.m., m.c.d.	- 1 no es primo. - Colocación de los números en la descomposición factorial. - Abreviaturas. - En la descomposición factorial paramos al llegar al 1.	- Criterios de divisibilidad (2, 3 y 5) - Los múltiplos de un número son infinitos y los divisores son finitos. - Si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c entonces a es múltiplo de c. (propiedad transitiva). - Si a y b son múltiplos de c entonces una combinación lineal de a y b también es múltiplo de c. - División de números a partir de su descomposición factorial. - Teorema fundamental de la aritmética.

Destrezas:

- Identificar si un número es primo o compuesto.
- Identificar si dos números son primos entre sí, si son divisibles, si tienen divisores comunes…
- Cálculo de múltiplos y divisores de un número.
- Criterios de divisibilidad.
- Descomposición factorial de un número.
- Cálculo y uso del m.c.d. y el m. c. m.
- Representación de múltiplos y divisores.
- Relacionar múltiplos y divisores.
- Resolución de problemas.

Conceptos:

- Divisibilidad.
- Múltiplo, divisor.
- Número primo y compuesto.
- Criterios de divisibilidad.
- Factorización de un número.
- m.c.d. y m. c. m.

Razonamientos:

- Deductivo: propiedades y cálculo de los factores de un número.
- Inductivo: regularidades numéricas en la obtención de múltiplos de un número, mcd y mcm...
- Recta numérica: Visualización de las regularidades numéricas en la obtención de múltiplos y sucesiones.
- Figurativo: Representaciones de medidas, ejemplos gráficos, etc.
- Argumentos para justificar propiedades numéricas en relación con la divisibilidad.

Estructura:

(N, +, x, ≤) Conjunto totalmente ordenado.

Estrategias:

- Cálculo mental de múltiplos y divisores.
- Reconocimiento de números primos pequeños y compuestos.
- Resolución de problemas.
- Estimación de resultados de una división.

SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Los sistemas de representación son imprescindibles para poder trabajar con los conceptos matemáticos abstractos, lo que conlleva, a que trabajar con distintos sistemas de representación y relacionarlos, permite en los alumnos una mejor comprensión de las nociones matemáticos propias de cada tema. Los sistemas de representación benefician a los pupilos en el aprendizaje de las matemáticas ya que éstos asimilan mejor los conceptos matemáticos y sus relaciones, repercutiendo positivamente en la realización/ejecución de tareas en las que ve la utilidad del concepto tratado y su relación con la vida real.

Un sistema de representación está compuesto por un conjunto de símbolos que se manipulan de acuerdo con reglas que permiten identificar o crear caracteres, operar en ellos y determinar relaciones entre ellos. Un mismo objeto matemático puede representarse en diferentes sistemas de representación, y para la comprensión del mismo, es necesario manejar las distintas formas de representarlo y relacionarlos entre sí.

Las representaciones externas, las actividades que realiza el sujeto, permiten organizar la experiencia matemática que tiene lugar cuando se realiza una tarea. Las representaciones internas permiten tener un modelo de la forma en la que el sujeto se organiza internamente la información.

Según la teoría de Duval (1998): *"Para que un sistema semiótico sea un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas ligadas a la semiósis:*

1) *La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado.*
2) *El tratamiento de una representación que es la transformación de la representación dentro del mismo registro donde esta ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.*
3) *La conversión de una representación que es la transformación de la representación en otra representación de otro registro en la que se conserva la totalidad o parte del significado de la representación inicial."*

Por lo mencionado anteriormente y debido al carácter abstracto de algunos conceptos matemáticos de esta unidad didáctica, el uso de los sistemas de representación y la relación de los mismos ayuda a la comprensión de los conceptos y a la adquisición de las destrezas de este tema.

Los sistemas de representación del tema de *Divisibilidad de Números Naturales* son:

Simbólico:

- Números naturales: 1,2,3…
- Sistema decimal de numeración
- Relaciones aritméticas: $25 = 5^2$
- Factorización en números primos
- m.c.d., m.c.m.

Verbal:

- Definiciones, teoremas…
- Criterios de divisibilidad
- ¿Cuántas veces caben en?

Materiales manipulativos:

- Regletas Cuisenaire
- Laberinto doble salida
- Cartas, ¿quién tiene?
- Dominó divisibilidad
- Calculadora
- Software

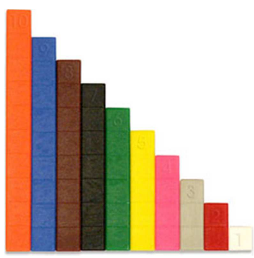
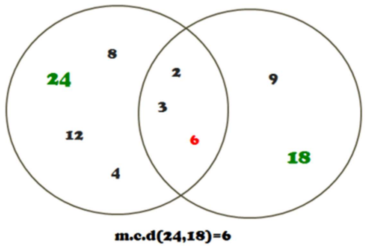
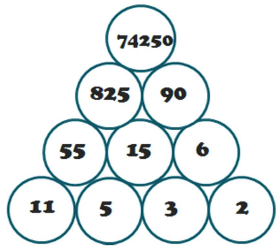


Gráfico:

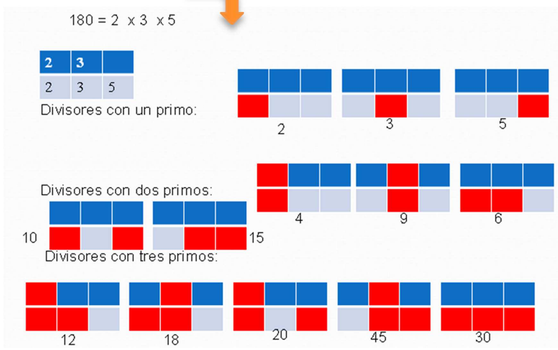
- Diagramas de Venn



- Recta numérica
- Criba de Eratóstenes
- La representación figurada de los números naturales.
- Representación descendente de los divisores de un número en forma triangular



- Organigrama



FENOMENOLOGÍA

El análisis fenomenológico de una unidad didáctica consiste en describir cuáles son los fenómenos en los que interviene el concepto en cuestión, es decir, el uso real de la parte de la matemática que se está estudiando. Dicha descripción debe de considerar todos los fenómenos desde su origen, para qué surgió la Divisibilidad, hasta los fenómenos actuales, su utilidad hoy en día.

El análisis fenomenológico de esta unidad didáctica se realiza atendiendo a:

- La identificación de contextos
- La identificación de subestructuras.

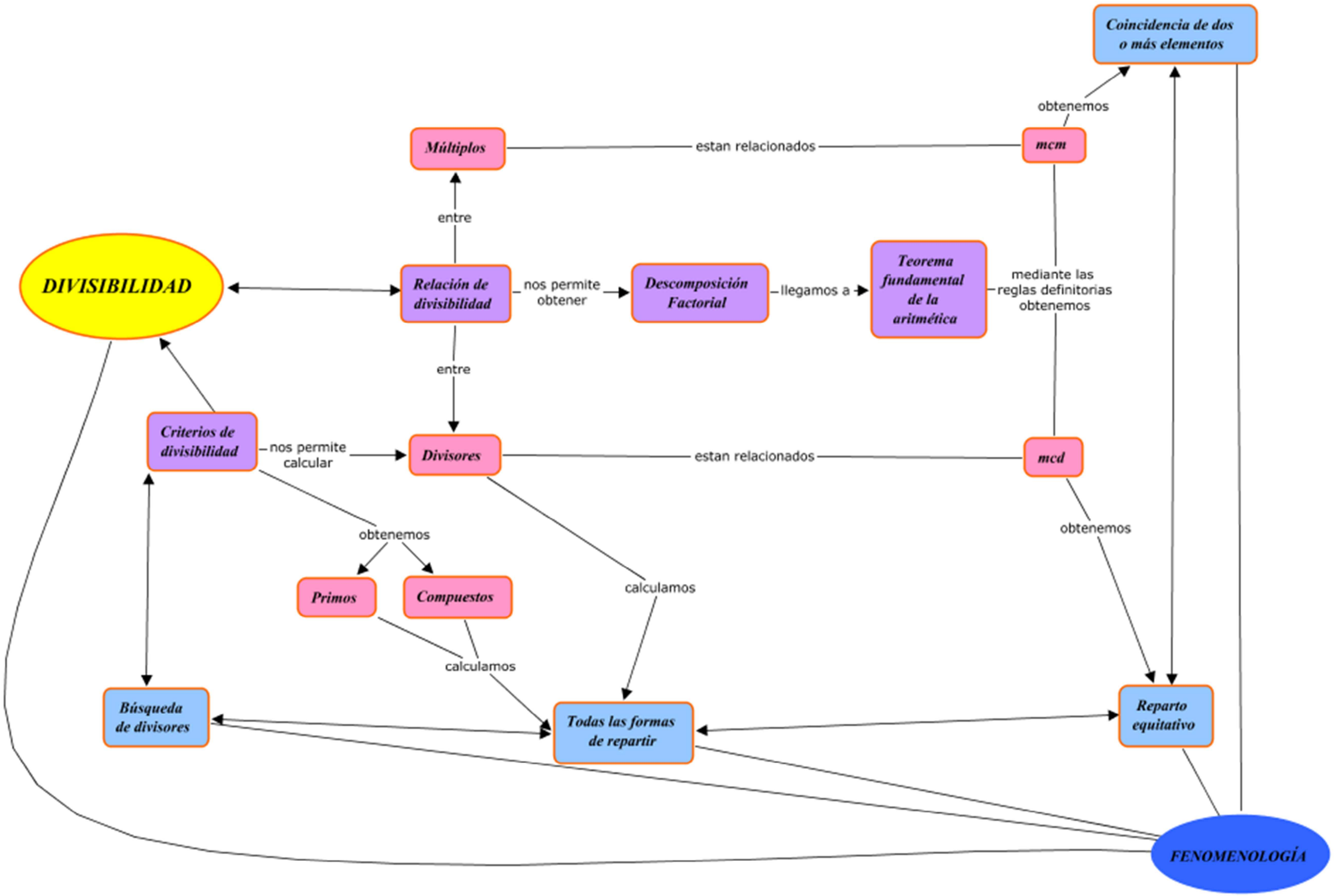
Un contexto matemático es un marco en el cual conceptos y estructuras atienden unas funciones, responden a unas necesidades como instrumentos de conocimiento. Los contextos de una determinada estructura se conocen porque muestran posibles respuestas a la pregunta ¿para qué se utilizan estas nociones? El contexto refiere el modo en que se usan los conceptos, en una o varias situaciones. (Rico et ál.2008).

La identificación de subestructuras es otra manera de aproximarnos al análisis fenomenológico del tema, que consiste en, identificar estructuras matemáticas de la estructura conceptual y ver cuales organizan fenómenos.

La fenomenología de los conceptos, estructuras e ideas matemáticas significa su descripción mediante sus relaciones con los fenómenos para los que fueron creados y a los que se ha extendido en el proceso de aprendizaje de la humanidad; en tanto que se implica en el *proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, se trata de Fenomenología Didáctica, un camino para mostrar al profesor los lugares por donde el aprendiz debe caminar en el proceso de aprendizaje humano. No en su historia sino en el proceso de aprendizaje que aún continúa, lo cual significa que se debe prescindir de las vías muertas y reforzar y aprovechar las raíces vivas. (Freudenthal citado en "La educación matemática en la enseñanza secundaria")*

<table>
<tr><th>FENÓMENO</th><th>PROBLEMA AL QUE RESPONDE</th><th>CONTEXTO</th><th>SUBESTRUCTURA</th></tr>
<tr><td>Expresar el número de objetos o elementos utilizados para ser introducido en otro de forma óptima</td><td>¿Cuántos caben dentro de y cómo deben ser?</td><td rowspan="2">Todas las posibles formas de repartir</td><td rowspan="2">Divisores</td></tr>
<tr><td>Expresar las distintas formas de repartir de una cantidad</td><td>¿De cuántas maneras se puede repartir una cantidad dada?</td></tr>
<tr><td>Repartir dos o más cantidades diferentes de manera equitativa</td><td>Reparto equitativo</td><td>Reparto equitativo</td><td>mcd</td></tr>
<tr><td>Resolver problemas cíclicos</td><td>¿Cuándo coinciden?</td><td>Coincidencia de dos o más elementos</td><td>mcm</td></tr>
<tr><td>Identificar los divisores de un número por medio de su estructura</td><td>Búsqueda de sus divisores</td><td>Búsqueda de sus divisores</td><td>Criterios de divisibilidad</td></tr>
</table>

MAPA CONCEPTUAL



ANÁLISIS COGNITIVO

Con el análisis cognitivo se pretende describir y analizar qué pueden aprender los alumnos. Para ello, se concretan las expectativas que se tienen para el tema de *Divisibilidad de Números Naturales. Múltiplos y Divisores*. Estas expectativas están divididas en focos, que a su vez están subdivididas en objetivos que se relacionaran con las competencias PISA (véase ANEXO IV). Después se analizarán los errores y dificultades que se les puede presentar a los alumnos al estudiar éste tema.

Focos

Tras el Análisis de Contenido identifico tres focos en éste tema:

- Divisibilidad (Múltiplos y Divisores)
- Números primos y compuestos
- Teorema fundamental de la aritmética

Objetivos y competencias PISA

Basándome en la fundamentación institucional que se hizo al principio de éste documento y teniendo en cuenta los objetivos que contempla la orden ECI/2220/2007 para el tema de Divisibilidad, he propuesto una serie de objetivos a desarrollar en la unidad.

Los objetivos que se proponen pretenden cubrir los propuestos por la legislación para que se alcancen unos mínimos y ampliarlos para favorecer la enseñanza-aprendizaje de los alumnos. Dichas expectativas se clasifican por los focos anteriormente citados.

Seguidamente se presenta una tabla en la cual se desarrollan los objetivos propios de cada foco y las competencias PISA con las que se relacionan. Las competencias PISA permiten formular los métodos de enseñanza considerando aquellos aprendizajes imprescindibles desde una perspectiva integradora. Las competencias se desarrollan en toda la etapa escolar ya que pretende que los individuos sean competentes. Algunas competencias pueden verse en los enunciados de los objetivos pero otras pueden verse involucradas en las tareas que se realizan para alcanzar dichos objetivos.

		PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Divisibilidad. Múltiplos y divisores	**1.**Relacionar y justificar la relación de divisibilidad entre dos números	X	X	X					
	2.Reconocer y diferenciar múltiplos y divisores	X	X						
	3.Relacionar y diferenciar las distintas formas de repartir a partes iguales con los divisores	X	X	X					
	4.Calcular el mcd y mcm (gráficamente o mediante una lista) y aplicarlo para la resolución de problemas cíclicos y de reparto.	X	X		X	X	X	X	
Números primos y compuestos	**5.**Identificar y justificar números primos y compuestos.	X	X	X	X				
	6.Usar la tabla 100 para encontrar y mostrar los números primos así como las regularidades numéricas de la tabla.	X	X	X	X		X		
	7.Resolver problemas de optimización.	X		X	X	X			X
Teorema fundamental de la aritmética	**8.**Aplicar los criterios de divisibilidad.		X	X					
	9.Realizar la descomposición factorial como producto de números primos.	X	X		X				
	10. Obtener todos los divisores a partir de su descomposición factorial.	X	X	X	X		X		X
	11. Calcular mcd y mcm a partir de la descomposición factorial y aplicarlo a la resolución de problemas.	X	X		X	X	X	X	X

A continuación se muestra una tabla recuento de las competencias involucradas en los objetivos.

	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
Recuento por competencias	10	10	7	7	3	4	2	3

Observando la tabla, se ve que las competencias que más se repiten son las de pensar y razonar y argumentar y justificar, esto se debe a que están relacionadas con plantear y dar respuesta a cuestiones propias de la matemática que han sido argumentadas y justificadas.

Las competencias que menos se repiten son la de uso de lenguaje simbólico y la de uso de herramientas tecnológicas. Esto se debe a que en el tema de Divisibilidad (y más aún al nivel de 1ºESO) el uso de la calculadora no es necesario aunque se puede utilizar y los soportes informáticos que existen no son de gran utilidad salvo unos pocos.

Errores y dificultades

El análisis de los errores y dificultades que pueden presentar los alumnos en el estudio de un tema determinado, permite que los docentes puedan prevenirlos tomando ciertos criterios de actuación previos a la impartición del mismo para facilitar el aprendizaje de los pupilos. Esto puede deberse a varios motivos como: la complejidad de los conceptos, conocimientos previos no adquiridos, la manera de transmitir del docente o impartir la clase, la incomprensión de los conceptos…

Para la superación de los errores y dificultades de una unidad, es importante que el docente haga hincapié en aquellos que por su experiencia sepa que presentan mayor nivel de complejidad, por ello debe valerse de diversas tareas y métodos que faciliten el aprendizaje de los alumnos.

En la unidad de *Divisibilidad de Números Naturales. Múltiplos y Divisores* se presentan tareas que permiten identificar si los alumnos incurren en algunos errores ya estudiados; y otras que ayudan a solventar los errores y dificultades.

Dentro del tema de la divisibilidad, las dificultades a destacar son:

- No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.
- Confundir los conceptos de múltiplo y divisor.
- No comprender la infinitud de los múltiplos y la finitud de los divisores.
- No identificar números primos y compuestos
- No relacionar mínimo con mínimo común múltiplo.
- No relacionar máximo con máximo común divisor.
- No expresar correctamente la descomposición factorial.

Del análisis de las dificultades que presentan los alumnos, podemos detectar los errores que éstos cometen en el desarrollo de esta unidad. Por ello, para comprender mejor esta parte del análisis, presento una tabla donde se muestran los errores y dificultades propios de esta unidad y los objetivos con los que éstos se relacionan.

Objetivos con los que se relacionan los errores	Errores	Dificultades	Objetivos con los que se relacionan las dificultades
11	Al calcular el mcd o mcm de los factores comunes, no sólo tomar aquellos que tengan menor o mayor exponente respectivamente.	Confundir los conceptos de múltiplo y divisor	2
2 5 6	No reconocer un número compuesto cuando no tiene por divisores alguno cuyos criterios son conocidos (17x13).	No saber argumentar la relación de divisibilidad entre dos números.	1 2
4 7	No distinguir si un problema se resuelve con mcd o mcm	No comprender la infinitud de los múltiplos y la finitud de los divisores	3
5 3	No aplicar correctamente los criterios de divisibilidad	No relacionar mínimo con mcm y máximo con mcd	3
2 10	No hacer todas las combinaciones posibles a partir de la descomposición factorial para obtener todos los divisores.	No saber representar un problema cíclico y ver dónde coincide.	4
5 8 9	No realizar correctamente la descomposición factorial	No expresar correctamente la descomposición factorial como producto de números primos.	8 9

ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN

El Análisis de Instrucción se caracteriza por ser la parte del Análisis Didáctico en la que el profesor diseña, analiza y selecciona las tareas que constituirán las actividades de enseñanza y aprendizaje objeto de la instrucción.

El Análisis de Instrucción se apoya en los Análisis anteriores de Contenido y Cognitivo. Con dicho análisis se hace un barrido de todas las tareas del tema y luego se hace una selección de aquellas que sean las adecuadas para alcanzar los objetivos propuestos y ayuden a detectar y solventar los posibles errores y dificultades que presenten los alumnos, teniendo en cuenta la complejidad de los mismos. Por eso, es necesario estudiar las tareas, las condiciones en que se realizan y la secuenciación en el tiempo de las mismas.

Tras hacer los análisis, se está en condiciones de elaborar la unidad didáctica determinando el número de sesiones, qué se hace en cada una de ellas, qué tareas se plantean y con qué fin.

A continuación figura la Propuesta de Unidad Didáctica, basada en la realización del Análisis de Instrucción, del que sólo reflejo aquí su resultado final. Para mostrar la coherencia entre los análisis anteriores y el análisis de instrucción, se hará una justificación de la presencia de las tareas de enseñanza propuestas en la unidad didáctica.

UNIDAD DIDÁCTICA: DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES. MÚLTIPLOS Y DIVISORES

En esta unidad didáctica se continúa con el estudio de la Divisibilidad ya empezada en la Educación Primaria. La unidad se desarrollará en seis sesiones.

Ya que esta unidad va dirigida a alumnos de 1ºESO y es uno de los primeros temas del curso, me he decantado por diseñar un trabajo donde predomine la interactuación grupal. De esta manera todos los componentes del grupo tendrán la oportunidad de conocerse mejor, para poder construir un clima de confianza y respeto mutuo en el que cualquiera de ellos sea capaz de aportar sus opiniones, discutir, valorar y contrastar las opiniones de los demás y llegar a un consenso. Además, la realización de tareas que resulten atractivas y motivadoras para el alumno debe ser constante, para no perder su atención.

Las actividades y cuestiones que se van a trabajar en las sesiones persiguen que el alumno sea capaz de:

- hallar soluciones a través del empleo de técnicas distintas;
- expresar, tanto de forma verbal como escrita, los razonamientos matemáticos empleados justificando y argumentando los mismos;
- llegar a conclusiones por medio del diálogo con sus iguales.

También se persigue que el alumno aprenda de forma autónoma, construyendo los nuevos aprendizajes sobre los conocimientos que ya posee, y valiéndose de experiencias cercanas y motivadoras, de manera que los nuevos aprendizajes sean significativos y, por tanto, permanentes.

A continuación se presentan las sesiones desarrolladas. Al inicio de cada una de ellas enumero los objetivos que me propongo desarrollar. Seguidamente propongo las tareas que se van a realizar con la duración estimada de las mismas. Al final de cada sesión, se propondrán actividades que permitan atender a la diversidad, así como abordar algunas curiosidades matemáticas relacionadas con la divisibilidad. Por último, se exponen las competencias básicas que se pretenden desarrollar con las tareas propuestas.

ESQUEMA DE LAS SESIONES

Se presenta un esquema de las sesiones, pero en el desarrollo de las mismas, al principio de cada una de ellas se redactan todos los objetivos a alcanzar.

RELACIÓN DE DIVISIBILIDAD. MÚLTIPLOS Y DIVISORES	1º SESIÓN	- Interpretar y expresar la relación de divisibilidad entre dos números. - Identificar y diferenciar múltiplos y divisores de un número dado. - Calcular múltiplos.
	2º SESIÓN	- Identificar y diferenciar un divisor de un cierto número dado. - Relacionar y diferenciar los conceptos de múltiplo y divisor.
CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD POR 2, 3 Y 5. NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS	3º SESIÓN	- Deducir de la tabla 100 los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5. - Aplicar correctamente los criterios de divisibilidad. - Identificar y diferenciar números primos y compuestos. - Obtener regularidades de la tabla 100.
UNIFICACIÓN DE CONCEPTOS	4º SESIÓN	- Revisar y unificar definiciones y conceptos de divisibilidad. - Entender y utilizar correctamente el lenguaje matemático relacionado con la divisibilidad. - Manipular diversos conceptos al mismo tiempo.
DESCOMPOSICIÓN FACTORIAL. OBTENCIÓN DE TODOS LOS DIVISORES DE UN NÚMERO.	5º SESIÓN	- Descomponer un número como producto de sus factores primos y expresarlo como producto potencial. - Representar gráficamente la descomposición factorial por medio de cuadrículas. - Aplicar la descomposición factorial para la resolución de problemas.
MÁXIMO COMÚN DIVISOR. MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO.	6º SESIÓN	- Comprender y asimilar las nociones de máximo común divisor y mínimo común múltiplo. - Descubrir las reglas del cálculo del máximo común divisor y mínimo común múltiplo por medio de la descomposición gráfica y aplicarlo para la resolución de problemas.

DESARROLLO DE LAS SESIONES

1ºSESIÓN

En esta primera sesión se pretende hacer una introducción al tema recordando la relación de divisibilidad entre dos números. Se hace un recordatorio porque son cuestiones que se han desarrollado ya en el curso anterior pero que presentan dificultades a los alumnos.

Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Organizar e investigar mediante la experimentación.
- Expresar de forma oral los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.
- Resolver problemas de regularidades numéricas.
- Inventar problemas de regularidades numéricas.
- Expresar lo realizado y resultados con expresiones familiares, al principio, y cada vez más formales.
- Interpretar la relación de divisibilidad entre dos números.
- Expresar si dos números cumplen la relación de divisibilidad.
- Identificar y diferenciar múltiplos de un número dado.
- Calcular múltiplos de un número dado.
- Formalizar por escrito definiciones, propiedades…

Se comienza la clase con una curiosidad para captar la atención de los alumnos e introducirlos en el tema mediante el uso de regularidades numéricas.

Se les pide a los alumnos que realicen una cuadrícula en la que a cada letra del abecedario se le asocia un número, la tabla es como la que sigue. Se les propone lo siguiente:

A-1	B-2	C-3	D-4	E-5
F-6	G-7	H-8	I-9	J-10
K-11	L-12	M-13	N-14	Ñ-15
O-16	P-17	Q-18	R-19	S-20
T-21	U-22	V-23	W-24	X-25
Y-26	Z-27			

a) Pensad un número cualquiera entre 1 y 9.
b) Multiplicadlo por 9.
c) Sumad los dígitos del resultado.
d) A ese resultado restadle 4.
e) Buscad en la tabla la letra que le corresponde al número que habéis obtenido.
f) Pensad en un animal que empiece con esa letra.

El resultado es: Elefante, erizo… empieza por E.

Nota: Viejo truco de la tabla del 9.
Imagina que quieres hacer 9x3. Abre tus dos manos mostrando los 10 dedos. Esconde el tercero (de izquierda a derecha). A la izquierda del dedo escondido quedan 2 dedos y a la derecha 7, así formas el número 27. ¿Funciona para 9x5? Esconde el quinto dedo. A la izquierda quedan 4 y a la derecha los otros 5. Total: 45. Prueba con todos.

Se hacen grupos de 3 o 4 personas para que averigüen el porqué de la solución. La nota permite a los alumnos comprobar de forma fácil que la suma de las cifras de los 9 primeros múltiplos de 9 es 9, y así propiciar la búsqueda de la solución. Luego se exponen sus conclusiones al resto de la clase. Tras ésta primera aproximación se les dice que elaboren un ejercicio como éste para planteárselo a los compañeros de los otros grupos; busquen la solución de los otros grupos; y luego se pone una puesta en común.

Duración: 20 minutos.

A continuación se propone una actividad en la que se pretende que los niños lleguen a deducir la relación de divisibilidad entre dos números mediante el uso de las regletas de Cuisenaire (un material manipulativo) con la finalidad de que a través de la manipulación comprendan y asimilen mejor el concepto. Esta actividad se realizará en pequeños grupos (se aprovecha los grupos ya formados en la actividad anterior) para que los alumnos interactúen entre ellos y sean capaces de sacar conclusiones en consenso.
Duración: 10 minutos.

Usando las regletas de Cuisenaire responde las siguientes preguntas:

a) *Usando regletas de medida 4, ¿puedes construir una regleta de medida 8? ¿y de medida 10? Razona tu respuesta.*
b) *De todas las regletas de las que dispones, ¿cuáles se pueden construir usando regletas de medida 4?*
c) *¿Qué relación hay entre esos números respecto al 4?*
d) *Si se tuviera una regleta de medida 16, ¿se podría utilizar regletas de medida 4 para su construcción? Razona tu respuesta.*
e) *¿Y si en lugar de una regleta de medida 16 se tuviera una de 17? ¿Y una de 20? Justifica tu respuesta.*
f) *¿Las mismas conclusiones se pueden obtener usando regletas que no sean de medida 4? Razona tu respuesta.*

Se pone una puesta en común de las observaciones deducidas tras la actividad y si es necesario, se define lo que es una relación de divisibilidad entre dos números y se aclaran posibles dudas. Se fija también el concepto de "divisor" y su diferencia con "ser divisible", aunque en la siguiente sesión se abordará con mayor amplitud el concepto de divisor. A esto se le acompaña de cuestiones con números grandes con el fin de extender la relación de divisibilidad a cantidades mayores. Las preguntas son del tipo:

a) ¿15 está contenido exactamente 4 veces en 60?
b) ¿75 está contenido exactamente 3 veces en 225?
c) ¿54 es divisible entre 8?
d) ¿65 contiene a 13 un número exacto de veces?

Y de las siguientes tareas:

1. *Reflexiona, contesta y justifica tu respuesta:*
   a) *¿Se pueden guardar 300 litros de aceite en bidones de 15 litros sin que sobre nada?*
   b) *Si sacas del horno 100 magdalenas, y las empaquetas por docenas, ¿queda alguna suelta?*
   c) *¿Se puede cortar un listón de 1,80 m en un número exacto de trozos de 20 cm?*
   d) *¿Hacen 100 minutos un número exacto de cuartos de hora?*

2. *Di si los números de cada pareja están emparentados por la relación de divisibilidad:*
   a)224 y 16 b)613 y 13 c)513 y 19 d)688 y 44 e)420 y 35 f)2070 y 46
   ¿Quién es divisor de quién? Justifica tus resultados.

Duración: 10 minutos.

A continuación se procede al recordatorio de la noción de múltiplo. Para ello se plantea a los alumnos una situación ambientada en la realidad.

Un granjero que cría gallinas distribuye los huevos que obtiene en cartones donde caben 6 huevos. Se meten en una furgoneta de reparto y el granjero va anotando el número de huevos que se colocan en la furgoneta mientras que su hijo va subiendo los cartones de uno en uno para no romper los huevos.

a) *Escribe la serie de números que van apareciendo en la hoja de anotaciones del granjero.*
b) *¿Existe alguna relación entre los números anotados? Justifica tu respuesta.*
c) *Si en la furgoneta cupieran todas las cajas que quisiéramos, ¿cuántas habría? ¿y si seguimos metiendo?*

Con ésta actividad se persigue que los alumnos redescubran el significado de múltiplo y su caracterización mediante una puesta en común para que ellos sean capaces de encontrar la mejor definición.

Duración: 10 minutos.

Tras lo anterior y aclarando las posibles dudas se sigue con las actividades siguientes para que consoliden lo anterior.

1. *¿Cuáles son:*
   a) *Los múltiplos de 6 hasta 6x13?*
   b) *Los múltiplos de 3 comprendidos entre 40 y 50?*
   c) *Los múltiplos de 2, 5 y 7 menores de 50?*

2. *Completa el siguiente cuadro:*

NÚMERO	*¿ES MÚLTIPLO DE 6?*	*EXPLICACIÓN*
42	*SI*	*42=6x7*
28		
36		
69		
234		
37512		
1125		

3. *Una gasolinera dispone de un depósito con una capacidad para almacenar el gasoil de 210 litros con el que se puede llenar exactamente un cierto número de garrafones de 14 litros. Si la capacidad del depósito fuese 5 veces mayor, ¿se podría también llenar un número exacto de garrafones? Razona tu respuesta. ¿Cuántos garrafones se llenarían en cada caso?*

4. *Tras las actividades realizadas, enuncia las propiedades de los múltiplos.*

Duración: 10 minutos.

La actividad 4 está dirigida sobre todo a alumnos con mayor rendimiento para atender a la diversidad, ya que es una cuestión más complicada en la que los propios alumnos deben expresar sus conclusiones.

2ºSESIÓN

Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Organizar e investigar mediante la experimentación.
- Expresar de forma oral los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.
- Expresar lo realizado y resultados con expresiones familiares, al principio, y cada vez más simbólicas empleando si es necesario representaciones gráficas o esquemáticas.
- Identificar y relacionar un divisor de un cierto número.
- Calcular todos los divisores de un número dado.
- Relacionar y diferenciar los conceptos de múltiplo y divisor.
- Buscar estrategias que faciliten la resolución de planteamientos de forma óptima.
- Formalizar por escrito definiciones, propiedades…

Se procede de la misma manera que con la noción de múltiplo pero ahora para la de divisor, la situación introductoria es la siguiente:

En una bodega hay 6 toneles con una capacidad de 18 litros cada uno. El dueño de la bodega quiere vender cada tonel con una medida de litro o litros enteros para que no sobre nada de cada una. Y además, quiere vender todos los toneles con medidas diferentes. ¿Cuántos litros tendrán cada tonel? (Dibujo orientativo con aclaraciones abajo).

"El bodeguero quiere vender cada uno de los toneles con distinta cantidad de litros."

Se pretende que lleguen a encontrar la relación de que cada uno de los números que deben obtener es divisor del de partida mediante la exactitud de la división. Seguidamente se les pide a los alumnos que expresen de forma escrita sus deducciones para luego hacer una puesta común con los compañeros y llegar a la definición correcta.
Duración: 10 minutos.

Después se procede de la misma forma que para los múltiplos realizando actividades de consolidación.
Duración: 10 minutos.

1. *Razona y justifica las siguientes cuestiones.*
    a) *Explica por qué 3 es divisor de 81*
    b) *Explica por qué 5 no es divisor de 54.*
    c) *Explica por qué 12 es múltiplo de 84.*

2. *Si un número es divisible por 20, ¿será también divisible por 2 y por 5? Razona y justifica tu respuesta.*

3. *Y si un número es divisible por 3 y por 7, ¿lo será también por 21? Razona y justifica tu respuesta.*

4. *Raquel ha envasado 64 mantecados en cajas iguales. ¿Cuántas cajas ha llenado? ¿Cuántos mantecados hay en cada caja? Escribe todas las soluciones posibles.*

Igual que con los múltiplos, se le pide a los alumnos que expresen por escrito las propiedades de los divisores. Ésta tarea tiene una mayor complejidad que se les pide sobre todo a alumnos aventajados para atender a la diversidad.

5. *Completa el siguiente cuadro:*

¿ES DIVISOR?	*10*	*13*	*15*	*18*	*24*	*30*
2	*SI*	*NO*	*NO*	*SI*	*SI*	*NO*
3						
4						
5						
6						
8						

BINGO DE DIVISIBILIDAD

Después de enfatizar los conceptos de múltiplo y divisor se procede a una actividad-juego que se puede realizar con todos los alumnos de la clase o formando pequeños grupos. Se precisa de un dado común y de la siguiente cuadrícula:

	20	9	36		Puntos	
24				=		
10				=		+
18				=		
	=	=	=		↓	
Puntos				→		TOTAL
		+				

Las normas del juego son las siguientes:

- El profesor lanza el dado y dice el número obtenido.
- Cada jugador coloca el número en uno de los 9 lugares posibles.
- Se repite el proceso hasta que se han llenado las 9 casillas.
- Cuando se escribe un número en una casilla, no se puede cambiar.
- Se da un punto por cada número que es divisor de los de la fila y la columna de encabezamiento correspondiente.

- Gana el que consiga obtener mayor puntuación.

Una vez que los alumnos se han familiarizado con el juego se realizan las siguientes actividades:

1. *Si al lanzar el dado salen los números: 6, 4, 3, 5, 5, 1, 3, 2 y 2, investiga qué lugar debe ocupar cada número para conseguir la mayor puntuación.*
2. *Busca otra distribución de los números del apartado 1 para conseguir la máxima puntuación.*
3. *Busca otra distribución de los números del apartado 1 para conseguir la mínima puntuación.*
4. *¿Con que números se puede obtener la mayor puntuación?*
5. *¿Y la menor?*
6. *Investiga las puntuaciones posibles.*

Duración: 35 minutos.

3ºSESIÓN

Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Organizar e investigar mediante la experimentación.
- Deducir de la tabla 100 los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.
- Expresar lo realizado con expresiones familiares al principio y cada vez más simbólicas
- Expresar de forma oral los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.
- Formalizar por escrito definiciones, propiedades…
- Comprender y asimilar los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.
- Aplicar correctamente los criterios de divisibilidad.
- Identificar y diferenciar números primos y compuestos.
- Obtener regularidades de la tabla 100.

En esta sesión se darán los criterios de divisibilidad de la forma más constructiva posible para que los alumnos sean capaces de deducir mediante la observación y la ejecución los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.

Comenzamos obteniendo las regularidades de la tabla-100 para deducir los criterios de divisibilidad. Se les pide a los alumnos que elaboren una cuadrícula de 10 por 10 y la numeren. Se procede de la siguiente manera:

1. *Colorea de rojo los múltiplos de 2.*

    a) *¿Qué regularidades observas en la tabla?*
    b) *¿Qué tienen en común éstos números coloreados?*

c) *Si cogemos un número coloreado de la tabla y lo dividimos entre 2, ¿qué se obtiene de resto?*
d) *Y si coges otro número que no esté coloreado de la tabla y efectúas la división entre 2, ¿qué obtienes ahora?*
e) *¿Qué es lo que puedes deducir? Razona tu respuesta.*

Una vez coloreado los múltiplos de 2 y haberlo razonado, se hace una puesta en común para asegurarnos de que los razonamientos son correctos y si es preciso, aclarar dudas. De esta manera se pretende que el alumno sea capaz de intuir, y a la misma vez asimilar, el criterio de divisibilidad por 2.

2. *Colorea de verde los múltiplos de 3.*

   a) *¿Qué regularidades observas en la tabla?*
   b) *¿Qué tienen en común los números coloreados de verde?*
   c) *¿Qué números obtenéis al efectuar la suma de las cifras de los números coloreados de verde?*
   d) *¿Qué relación tienen los números obtenidos con el 3?*
   e) *Entonces, ¿qué conclusiones puedes obtener?*

De igual forma que para el criterio de divisibilidad por 2, se hace una puesta en común para llegar al criterio de divisibilidad por 3.

3. *Colorea de azul los múltiplos de 5.*

   a) *¿Qué regularidades observas en la tabla?*
   b) *¿Qué observas de los números coloreados de azul?*
   c) *¿En qué cifras terminan dichos números?*
   d) *Entonces, ¿qué conclusiones puedes obtener?*

De nuevo se hace una puesta en común entre todos los miembros de la clase para llegar al criterio de divisibilidad por 5.

Tras desarrollar los tres puntos, se les pide a los alumnos que definan los criterios de divisibilidad por 2, 3 y 5.

Tras la deducción de los criterios se procede a la ejecución de actividades que consoliden los aprendizajes.

1. *De los siguientes números 231, 426, 520, 1080, 2745 y 4500.k*
   a) *¿Cuáles son múltiplos de 2?*
   b) *¿Cuáles son múltiplos de 3?*
   c) *¿Cuáles son múltiplos de 5?*
   d) *¿Cuáles son múltiplos de 10?*

2. *Sustituye cada letra por una cifra, para que el número resultante sea divisible entre 3.*
   A51 2B8 31C 52D 1E8

3. *Busca, en cada caso, todos los valores posibles de a para que el número sea:*
   a) *Múltiplo de 2.*
   b) *Múltiplo de 3.*
   c) *Múltiplo de 5.*
   d) *Múltiplo*
   e) *de 2 y de 3 a la vez.*

Duración: 30 minutos.

Se procede ahora a la introducción de la noción de número primo y compuesto. Para ello se empleará un material manipulativo, cubos (matemáticos) de colores. Con éste material se busca que los alumnos a través de la manipulación entiendan y asimilen los conceptos de número primo y número compuesto. Se procede de la siguiente manera:

1. *Construye un paralelepípedo con 4 cubos. ¿De cuántas formas lo puedes construir?*
2. *Construye otro con 7 cubos. ¿De cuántas formas lo puedes construir?*
3. *Construye otro paralelepípedo con 10 cubos, otro con 15 y otro con 13.Anota tus observaciones.*
4. *Utiliza los cubos que quieras y construye paralelepípedos; anota todas las posibilidades de construcción con el mismo número de cubos; y escribe tus observaciones.*
5. *¿Qué conclusiones obtienes tras la construcción de los paralelepípedos?*
6. *¿Cuáles son aquellos que sólo se pueden formar con base un número distinto de uno y altura uno?*

De esta manera se pretende que por medio de la manipulación de los materiales, los alumnos observen que los paralelepípedos con un número primo de cubos sólo se pueden construir con base ese número primo y altura uno, mientras que aquellos que son construidos con un número compuesto de cubos, tienen más de una posibilidad.
Duración: 15 minutos.

Ahora están en condiciones de completar la tabla 100 para que obtengan todos los números primos menores de 100. Se les pide que en orden de menor a mayor, busquen el número primo y coloreen del color que quieran sus múltiplos. A éste proceso se le conoce como criba de Eratóstenes que permite obtener los números primos menores de 100.

a) *Hay parejas de números primos que se escriben con las mismas cifras pero en orden inverso, como 13 y 31. ¿Qué otras parejas encuentras?*
b) *¿Habrá más números primos? Razona y justifica tu respuesta.*
c) *Un número capicúa de tres cifras es de la forma aba. ¿Cuál es el número primo capicúa más pequeño formado por tres cifras?*
d) *Descompón los siguientes números como producto de dos factores en los que uno de ellos al menos sea un número primo.*
   a)16 b)18 c) 40 d)60 e)222 f) 500 g)1060
   Nota: Te ayudarán los criterios de divisibilidad.

Duración: 15 minutos.

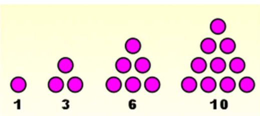
4ºSESIÓN

Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Revisar y unificar definiciones y conceptos de divisibilidad.
- Entender y utilizar correctamente el lenguaje matemático relacionado con la divisibilidad.
- Manipular diversos conceptos al mismo tiempo.
- Organizar e investigar mediante experimentación y formulación de conjeturas.
- Expresar de forma oral y escrita los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.

Esta sesión se va a dedicar a la realización de una actividad en la que se pretende unificar los conceptos estudiados de divisibilidad, además también es útil para que los alumnos se expresen con rigor. Se realizará en pequeños grupos para generar discusiones entre iguales.

Para realizar dicha actividad se precisa de la siguiente tabla, la cual se explica antes de comenzar:

A = Es par	**B** = Es impar	**C** = Es primo
D = Es un cuadrado	**E** = Es un cubo	**F** = Tiene una cifra
G = Tiene dos cifras	**H** = Es divisible por tres	**I** = La cifra de las unidades es 3
J = Es el producto de dos números primos diferentes.	**K** = Es divisible por 6	**L** = Es divisible por 5
M = Es múltiplo de 11	**N** = La suma de su cifras es 10	**O** = Cuando se divide por 4, se obtiene un residuo 1
P = Es un número triangular 	**Q** = Tiene un divisor (diferente de 1 y de él mismo) que es un cuadrado	**R** = Es menor que 20
S = Es mayor que 20	**T** = Es múltiplo de 7	**U** = La cifra de las unidades es mayor que 5
V = La suma de sus cifras es 9	**W** = Es divisor de 60	**X** = Es la suma de dos números primos.
Y = La cifra de las unidades es menor que 5	**Z** = El producto de sus cifras es par	

Comienza la actividad:

1. A) Las tres afirmaciones D, G y O encajan con el número 25. ¿Qué otras afirmaciones de la lista encajan también con el número 25?
   B) Escoge otro número entre 1 y 50. Ahora busca todas las afirmaciones que encajen con el número. Discute tu respuesta con tus compañeros de grupo.

2. A) ¿Qué números inferiores o iguales a 30 encajan con la afirmación J?
   B) ¿Qué afirmaciones son ciertas para el número 15?
   C) ¿Qué números menores o iguales a 30 encajan simultáneamente con las afirmaciones G y Q?

D) ¿Qué números menores o iguales a 30 encajan simultáneamente con las afirmaciones B, C y S?

E) ¿Qué afirmaciones son ciertas para exactamente tres números enteros entre 1 y 30?

3. A) He pensado un número que encaja simultáneamente con la afirmación A y la afirmación C. ¿De qué número se trata?

   B) He pensado un número menor que 1000 que encaja simultáneamente con las tres afirmaciones B, D y L. ¿Qué posibilidades hay para este número?

   C) Practicad el siguiente juego, equipo contra equipo (2 equipos):

   - Cada equipo escoge un número menor o igual a 30, sin decírselo al otro equipo.
   - Cada grupo escribe una lista de todas las posibilidades que verifican el número que ha escogido (sólo hay que escribir las letras que correspondan a las afirmaciones).
   - Los dos equipos intercambian sus listas y gana quien descubre primero el número de su adversario.
   - Una vez se domina el juego se prueba con un número entero menor o igual que 50 y después con un número menor o igual a 100.

   D) ¡¡QUIÉN ES QUIÉN!! (2 equipos)

     - Cada grupo piensa en una letra.
     - Por turnos se van haciendo preguntas relacionadas con la divisibilidad sobre el número que acompaña a la letra pensada.
     - Se descartan posibilidades hasta llegar a la letra en cuestión.
     - Gana el equipo que descubra primero la letra.

4. ¿Podéis encontrar dos números menores o iguales que 30 que encajen exactamente con las mismas afirmaciones?

5. Buscad el número entero, entre 1 y 50, que encaje con el mayor número posible de afirmaciones de la tabla a la vez. ¿Por qué creéis que éste número es especial?

6. A) ¿Qué números inferiores a 30 no verifican la afirmación X?

   B) ¿Qué números inferiores a 50 verifican las afirmaciones N y Z simultáneamente?

7. Cualquier número que verifica las afirmaciones A y H a la vez también verifica la afirmación K. Imagina un número que verifica las afirmaciones B y D simultáneamente. ¿Qué otra afirmación también deberá verificarse? Razonad la respuesta.

8. A) Escribid ahora una lista de todas las afirmaciones que verifica el número 1. ¿Cuál es el mínimo número de afirmaciones necesarias para definir de manera única el número 1? ¿Cuáles son esas afirmaciones?

9. B) ¿Cuántas afirmaciones de la A a la Z son necesarias para definir el número 2 de manera única?

10. C) Repetid la misma cuestión que habéis resuelto en el apartado anterior para cada uno de los número del 3 al 12.

Duración: 1hora.

5ºSESIÓN

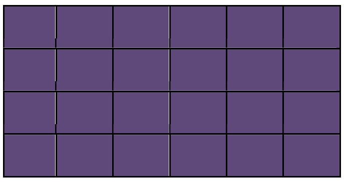
Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Organizar e investigar mediante la experimentación.
- Expresar de forma oral los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.
- Descomponer un número como producto de sus factores primos.
- Adquirir destreza en la descomposición factorial.
- Expresar un número como producto potencial de sus factores primos.
- Representar gráficamente la descomposición factorial por medio de cuadrículas.
- Calcular todos los divisores de un número a partir de la descomposición gráfica por medio de cuadrículas.
- Aplicar los algoritmos de la descomposición factorial gráfica y el cálculo de todos los divisores de un número para la resolución de problemas.

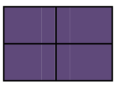
En esta sesión se abordará la descomposición de un número en sus factores primos y el cálculo de todos los divisores de un número.

Se comenzará con la descomposición factorial y para ello, se vuelve a utilizar el material manipulativo de los cubos matemáticos de colores. El proceso a seguir lo voy a explicar por medio de un ejemplo.

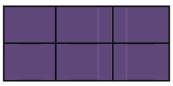
Sea el número 24 el que queremos descomponer. Cogemos 24 cubos y construimos un paralelepípedo, por ejemplo de la siguiente manera 4x6.



Como ni 6 ni 4 son números primos, seguimos descomponiendo éstos factores hasta obtener la descomposición como producto de números primos, es decir, 2x2 y 2x3:



2x2



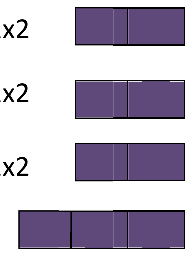
2x3

1x2

1x2

1x2

1x3



Como vimos en la sesión anterior, un número es primo cuando sólo se puede construir un paralelepípedo con base el número (primo) y altura uno. Luego seguimos la descomposición hasta obtenerlo como se muestra a la derecha.

Con lo que hemos pasado de 24 = 4x6 = (2x2)x(2x3) = 2x2x2x3.

Acabamos de obtener la descomposición como producto de factores primos de un número, en éste caso de 24. Seguidamente se expresa sobre una cuadrícula en la libreta de forma que en la parte inferior se escriben los números primos y encima de cada número, se colocan tantos como haya, es decir, de la siguiente manera:

2		
2		
2	3	

$24 = 2^3x3$

Al expresarlo sobre la cuadrícula, es mucho más comprensible su expresión en forma potencial (esto debe ser ya conocido porque se estudia en temas anteriores), lo que facilitará su manejo en la resolución de problemas. Para reforzar la descomposición factorial se manda a los alumnos que lo efectúen sobre los números: 18, 25, 28, 30, 33 y 45.
Duración: 30 minutos.

Pasamos ahora al estudio de todos los divisores de un número, para lo que se usará la descomposición de un número como producto de sus factores primos. Se les propone a los alumnos un problema con la intención de que por medio de la investigación y manipulación lleguen a la obtención de todos los divisores de un número, exigiéndoles que utilicen lo explicado anteriormente para llegar a sus conclusiones. El problema es el siguiente:

Carlota tiene 24 cuadraditos de colores y quiere formar rectángulos. ¿Cuántos obtendrás? ¿Cuántos cuadritos habrá en cada rectángulo? ¿Qué medidas tienen sus lados?

Lo que se persigue es que el alumno sea capaz de llegar a obtener el algoritmo que le muestre todos los divisores de un número apoyándose en la descomposición factorial representada sobre cuadrículas.

Una vez se tiene dicha descomposición gráfica se actúa de la siguiente manera. Se van cogiendo todas las figuras diferentes que se pueden formar tomando las cuadrículas indicadas y se calcula el producto de los números que aparecen en las mismas. Por ejemplo, lo hacemos de 24.

De una cuadrícula:

2					3	

Sólo podemos coger el 2 y el 3, los demás casos con una cuadrícula se repetirían.

De dos cuadrículas:

2						
2				2	3	

Hacemos todas las combinaciones posibles con dos cuadrículas sin repetición.

De tres cuadrículas:

				2		
2				2		
2	3			2		

Repetimos el proceso con tres cuadrículas.

De cuatro cuadrículas:

2		
2		
2	3	

Repetimos el proceso con cuatro cuadrículas que sólo tenemos una única posibilidad, con todas las cuadrículas.

A éstos divisores siempre hay que añadirle el 1 ya que éste es divisor de todos los números. Por tanto los Div(24)={1,2,3,4,6,8,12,24}

Tras la resolución del problema se hace una puesta en común para saber si los alumnos han obtenido el algoritmo y si sus razonamientos han sido los adecuados.
Duración: 10 minutos.

Con la intención de practicar con este método y que los alumnos se familiaricen con él, se les pide que calculen todos los divisores de los números a los que le calcularon la descomposición factorial en la primera parte de la sesión. A continuación se realizan problemas de la vida real en los que se tengan que utilizar éstos métodos para su resolución.

1. *Ginés quiere distribuir el agua de una garrafa de 12 litros en envases que contengan el mismo número de litros.*
    a) *¿Qué capacidad tendrán los recipientes?*
    b) *¿Cuántos necesitará en cada caso?*

2. *¿De cuántas maneras podemos encerrar 26 ovejas en establos, de forma que cada establo tenga el mismo número de ovejas?*

Duración: 15 minutos.

6ºSESIÓN

Los objetivos de esta sesión es que los alumnos sean capaces de:

- Organizar e investigar mediante la experimentación.
- Expresar de forma oral los razonamientos que se producen en la investigación.
- Adquirir precisión y rigor en la comunicación matemática.
- Comprender y asimilar las nociones de máximo, común y divisor.
- Comprender y asimilar la noción de máximo común divisor.
- Aplicar la descomposición factorial gráfica de un número para calcular el mcd
- Deducir la regla del cálculo del mcd.
- Comprender y asimilar las nociones de mínimo, común y múltiplo.
- Comprender y asimilar la noción de mínimo común múltiplo.
- Aplicar la descomposición factorial gráfica de un número para calcular el mcm.
- Deducir la regla del cálculo del mcm.
- Aplicar las reglas de cálculo de mcd y/o mcm para la resolución de problemas.

En esta sesión se pretende que los alumnos asimilen el significado de máximo común divisor y mínimo común múltiplo previamente al cálculo de los mismos. Para ello se les motiva con la siguiente situación que pretende llevar a los alumnos hacia el concepto de máximo común divisor. Las nociones involucradas son: divisor, común y máximo.

Se tienen dos garrafas de agua, una de 18 litros y otra de 24 litros, y se quiere envasar el agua en bidones de igual capacidad. ¿Qué capacidad máxima tendrá el bidón?

Se vuelve a trabajar con el material manipulativo para atender a la diversidad, a aquellos alumnos que presentan mayor dificultad en las matemáticas. Una vez tengan realizada la descomposición factorial y haber hallado todos los divisores de ambos números, los alumnos deben ser capaces de llegar al máximo común divisor. Esta tarea se realizará por parejas con el fin de que los alumnos interactúen entre ellos para resolver el problema. Volvemos a hacer una puesta en común orientando a los alumnos hacia el significado correcto.

Tras la investigación del resultado se procede al cálculo del mcd por el método empleado para el mismo. Una vez se hayan enfatizado las nociones anteriores para que entiendan el significado de mcd, se procede al cálculo de éste como sigue:

2		
2		
2	3	

$24 = 2^3x3$

	3	
2	3	

$18=2x3^2$

Primeramente se descomponen los números 18 y 24, y se calculan todos los divisores de ambos números, que son:

Div(24)={1,2,3,4,6,8,12,24} y Div(18)={1,2,3,6,9,18}.

Llegado a este punto se seleccionan aquellos divisores comunes a ambos, que son: 1,2,3 y 6. Como su palabra indica, el máximo común divisor de ambos números es: mcd(18,24)=6.

Después se les pedirá a los alumnos que calculen el mcd de algunas parejas de números con el fin de que se familiaricen con el concepto y terminen por comprender su significado. Posteriormente se les pide que investiguen a partir de la descomposición factorial gráfica de dos números la regla para obtener el mcd de dichos números.
Duración: 15 minutos.

Posteriormente se realizan problemas donde se vea involucrado lo anterior para que los alumnos asimilen la noción de mcd y lo apliquen para la resolución de los mismos.

1. *Un carpintero tiene dos listones de 80 cm y 120 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?*

2. *Rosa ha sacado de la hucha un montón de monedas todas iguales, y ha comprado un bolígrafo por 70 céntimos. Después, ha vuelto a la tienda y ha comprado un rotulador por 80 céntimos. ¿Cuánto puede valer cada moneda? Busca todas las soluciones posibles.*

Duración: 10 minutos.

Se procede de igual forma para la explicación del concepto de mínimo común múltiplo introduciendo una situación motivadora. Las nociones involucradas son mínimo, común y múltiplo.

Doña Carmen toma una píldora para el reuma cada 4 días y una cápsula para el corazón cada 6 días. ¿Cada cuánto tiempo coinciden ambas tomas en el mismo día?

La resolución de este problema se realizará en parejas para que entre ambos busquen y argumenten la solución. Pasado un tiempo se comenta con el grupo los razonamientos empleados. Como en las ocasiones anteriores, se orientará a los alumnos hacia la respuesta correcta corrigiendo los errores.

Para que entiendan el significado de mcm, se procede primeramente al cálculo de éste de la forma clásica, es decir, como sigue:

Mult(4)={4,8,12,16,20,24,28…}
Mult(6)={6,12,18,24,30…}
Se escriben los comunes que son: 12,24… y obtenemos que el mcm(4,6)=12.

Con la intención de darle significatividad a la noción de mcm y que los alumnos lo asimilen mejor, se les pide que descompongan como producto de factores primos los números 12, 24 y 36, para que busquen similitudes e inferir propiedades. Cuando las propiedades queden claras (los alumnos las argumentan y el profesor fija las que son verdaderas), se les pide que planteen como ha de ser la descomposición factorial de un número para que sea múltiplo de otro. Finalmente, qué debe ocurrir para que un número sea múltiplo de varios números, para terminar llegando a los factores que, como mínimo, debe tener para ser múltiplo de ellos. Se les pide que redacten la regla para obtener el mcm.

Duración: 15 minutos.

A continuación se les dan parejas de números para que calculen el mcm y terminen asimilando tanto el significado del mismo como el procedimiento para su obtención. Posteriormente se procede a la resolución de problemas de la vida real donde se vea involucrado lo anterior.

1. *Una fábrica envía mercancías a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir? Para la resolución del problema sigue este esquema:*
    - *Dibuja una línea en tu cuaderno que representa el tiempo.*
    - *Señala los días de envíos a Valencia de color verde.*
    - *Señala los días de envíos a Sevilla de color azul.*
    - *¿Qué días coinciden?*
    - *¿Cuál es el más próximo?*

2. *Tenemos un depósito lleno de agua de forma que su contenido puede repartirse en un número exacto de garrafas tanto de 18 como de 24 litros. ¿Cuál es la mínima capacidad de ese depósito?*

3. *El ejército de Matelandia se compone de 1547 compañías, todas ellas del mismo tamaño. También pueden agruparse en 34697 escuadrones iguales. ¿Cuál es el mínimo número de hombres que pueden componer el ejército de Matelandia?*

4. *Dos carretillas elevadoras transportan las cajas de refrescos desde la cadena de producción hasta los almacenes. Una de ellas, A, recorre el trayecto cada 8 minutos, y la otra B, lo hace cada 12 minutos. Hemos visto que han coincidido cuando el reloj marcaba las 10 horas y 8 minutos.*
    a) *¿Cada cuánto tiempo volverán a coincidir?*
    b) *¿A qué hora volverán a coincidir?*
    c) *Por cada 6 viajes de la carretilla A, ¿Cuántos realizará la carretilla B?*

Duración: 15 minutos.

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Según la ORDEN ECI/2220/2007 del 12 de julio por la que se estable el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria:

Artículo 8. Principios metodológicos

1. *En esta etapa se pondrá especial énfasis en la atención a la diversidad del alumnado, en la atención individualizada orientada a lograr el máximo desarrollo de cada alumno, y en la respuesta a las dificultades de aprendizaje ya identificadas o en aquellas que surjan a lo largo de la etapa.*

Con esa finalidad he elaborado una serie de tareas para atender a aquellos alumnos que presenten dificultades en el aprendizaje y también para atender a aquellos otros alumnos más aventajados para que profundicen en el tema con tareas de ampliación.

Las tareas de refuerzo se caracterizan por tener un nivel bajo-intermedio con la pretensión de que se alcancen los conocimientos mínimos del tema, siendo básicamente tareas de aplicabilidad. Sin embargo, las tareas de ampliación presentan una dificultad mayor en la que se involucran razonamientos que requieren una mayor comprensión de las nociones tratadas en el tema.

TAREAS DE REFUERZO

Después de un largo día visitando una embotelladora, nos merecemos un refresco. Pero, antes, vamos a pensar un poco en lo que hemos visto, en el proceso de embotellado y de empaquetado y en algunos problemas derivados de estas actividades.

1. La planta produce 1200 botellas de refresco cada hora. Luego, las empaquetan en cajas de distintos tamaños. ¿Cuántas cajas de cada tipo necesitan para empaquetar 1200 botellas? Completa la tabla.

BOTELLAS	CAJAS DE 4 UNIDADES	CAJAS DE 6 UNIDADES	CAJAS DE 10 UNIDADES	CAJAS DE 12 UNIDADES
1200				

2. A) Un operario había preparado, para un pedido, 32 cajas de 6 refrescos cada una. El cliente los quiere ahora empaquetados de 12 en 12. ¿Cuántas cajas hay que hacer?
   B) Si el cliente volviese a cambiar de opinión y quisiera ahora cajas con 10 refrescos, ¿podría hacerse con la misma cantidad inicial de refrescos?

3. Quieren saber si se puede o no, distribuir el siguiente número de botellas en cajas formadas por un número determinado de botellas. Completa la tabla con SI o NO.

		Número de botellas								
		12	20	35	51	75	81	110	185	210
Número de botellas por caja	2									
	3									
	5									
	10									

4. En una mesa han dispuesto 8 refrescos de piña y 12 de limón. Quieren empaquetarlos en cajas iguales, lo más grandes que sea posible.
   a) ¿Cuántos refrescos pondrán en cada caja?
   b) ¿Cuántas cajas se utilizarán para cada sabor?

5. Dos carretillas elevadoras transportan las cajas de refrescos desde la cadena de producción hasta los almacenes. Una de ellas, A, recorre el trayecto cada 3 días, y la otra B, lo hace cada 5 días. ¿Cada cuánto tiempo volverán a coincidir?

TAREAS DE AMPLIACIÓN

1. ¿Cuál es el menor número que se puede dividir exactamente por todos los dígitos, del 1 al 9, ambos inclusive?

2. El número 825 no es divisible por 2. ¿Podrías cambiar estas cifras de lugar para obtener todos los números que sí lo sean?

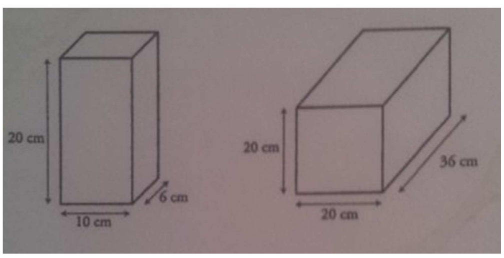
En las afueras de la ciudad han abierto una nueva planta lechera, en la que se llenan los tetrabriks, se empaquetan y se distribuyen a las tiendas. La hermana de uno de los profesores de matemáticas trabaja allí y le plantea algunos problemas que tienen para que los alumnos intenten resolverlos.

1. Una de las máquinas envasadoras llena 240 envases de 1 litro de leche cada hora. La sección de almacenaje, por cuestión de costes, necesita empaquetarlos en cajas que contengan un número de envases par y menor que 20. Escribe, en la tabla, todas las formas de hacerlo y el número de cajas necesarias, en cada caso, para almacenar los envases producidos en una hora.

ENVASES DE 1 LITRO	2	4						
CAJAS	120	60						

2. Acaban de traer otra máquina envasadora, pero los técnicos no saben exactamente cuántos tetrabriks llena a la hora. Solo les han dicho que llena entre 250 y 300, y que la cantidad exacta puede empaquetarse en cajas de 5 envases, y también en cajas de 7 envases y de 20 envases. Ayuda a los técnicos y calcula el número exacto de envases que llena la nueva máquina en una hora.

3. Parece que al final han decidido envasar la leche en tetrabriks de 1 litro, cuyas dimensiones son 10x20x6 cm, y se agrupan en cajas de 36 cm de largo, 20 cm de ancho y 20 cm de alto.

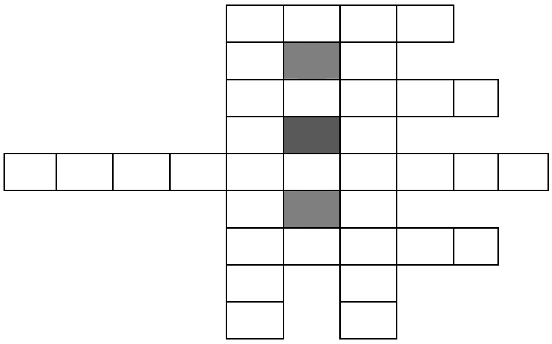


a) Los mozos del almacén quieren saber cuántos envases caben en una caja. Recuerda que los envases se colocan siempre en la misma posición.

b) El departamento de logística de la empresa quiere saber si merece la pena que las cajas sean cúbicas. Te piden que colabores en el estudio. ¿Cuántos envases de 1 litro son necesarios para transformar un cubo con la menor arista posible?

4. Para un pedido especial, la empresa necesita empaquetar 96 tetrabriks de leche entera y 126 tetrabriks de leche desnatada en cajas de cartón lo más grandes que sea posible, pero sin mezclar los dos tipos de leche. ¿Cuántos tetrabriks deben ponerse en cada caja? ¿Cuántas cajas son necesarias para cada tipo de leche?

PASATIEMPOS PARA TODOS LOS ALUMNOS



Horizontal:

1. Divisor de 60
2. Múltiplo de 2
3. Número primo menor que 50
4. Número primo cuyas cifras suman 10
5. Cuarta parte de un divisor de 60

Verticales:

1. Número compuesto mayor que tres y menor que cincuenta
2. Número cuya descomposición en factores primos contiene a los números primos menor que tres y mayor que tres.

Cigarras y números primos

Existe un tipo de cigarras, las cigarras periódicas, que tienen el ciclo vital más largo de todos los insectos. En especial, una de ellas, la *Magicicada septendecim* vive 17 años bajo tierra alimentándose de las raíces de los árboles, luego emerge a la superficie, pone los huevos y muere.

¿Por qué el ciclo vital de la cigarra es de esa forma? ¿Y por qué es un número primo de años?

Se cree que ese ciclo es un número primo para favorecer la supervivencia de la especie. Según algunas teorías, esta cigarra tiene un parásito con un cierto ciclo vital que la cigarra intenta evitar. Es decir, trata de no coincidir con él.

Imaginemos que el parásito vive 2 años, entonces la cigarra no puede vivir un número de años que sea divisible por 2, porque el parásito y la cigarra coincidirían regularmente y eso la perjudicaría. Lo mismo ocurriría si el parásito tuviera un ciclo vital de 3 años.

Así, para evitar encontrarse con su parásito, la cigarra alargó su ciclo vital, y, además, lo hizo un número primo para que las coincidencias fueran mínimas.

Como la cigarra vive 17 años, si el parásito vive 2 años, solo se encontrarían cada 34 años. Si el parásito viviera 3, se encontrarían cada 51 años.

El parásito, para contrarrestar esto, debería alargar también su ciclo vital, porque si no estaría muchos años sin poder parasitar a nadie. Ahora bien, debería estar 16 años sin alimento, lo cual es muy difícil.

El largo ciclo vital de las cigarras, y el que este sea un número primo, las protege de forma muy conveniente.

1 La criptografía y el criptoanálisis

La criptografía es la ciencia que estudia la protección de la información con distintos métodos para impedir el acceso a la misma de personas no autorizadas.

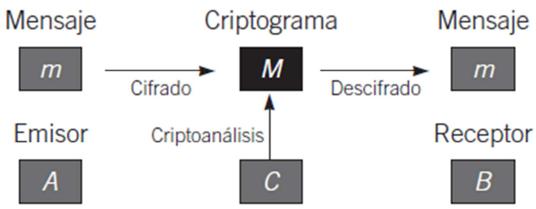
El criptoanálisis intenta averiguar los métodos anteriores para conseguir la información original.

La criptografía es tan antigua como la escritura. Se dice que las primeras civilizaciones que usaron la criptografía fueron la egipcia, la mesopotámica, la hindú y la china.

Hoy en día la criptografía es una disciplina de gran importancia: las comunicaciones de los gobiernos, entre las sedes de una empresa, en transacciones económicas, en el comercio por Internet, en las llamadas por teléfono móvil, necesitan estar protegidas para salvaguardar los intereses y la intimidad de las personas.

Los métodos criptográficos y de criptoanálisis actuales usan fórmulas muy complejas que aprovechan la enorme potencia de cálculo de los ordenadores.

El proceso suele ser el que ves en el gráfico. Un emisor *A* quiere mandar un mensaje *m* al receptor *B*. Para que un intruso *C* no pueda leerlo, *A* lo somete a un proceso de cifrado, consiguiendo un criptograma *M*, que es el que envía a *B*. Este, al recibirlo, lo somete a un proceso de descifrado, obteniendo el mensaje original, *m*. El criptoanálisis le serviría a *C*, si tiene éxito, para obtener el mensaje *m* a partir del criptograma *M*.



Vamos a estudiar a continuación uno de los métodos más famosos en la historia: el cifrado de César, creado por el gobernante romano Julio César.

2 El cifrado de César

El cifrado de César consiste en desplazar cada letra del alfabeto tres lugares. El texto que ciframos lo pondremos en minúscula y el criptograma obtenido en mayúsculas.

Observa la relación entre las letras:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	Ñ	O	P

ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Por ejemplo, «enemigo» al cifrarlo queda HPHOLJR, y al descifrar ORUD obtenemos «mora». Compruébalo.

RESUELVE LAS SIGUIENTES ACTIVIDADES.

a) *Utilizando el cifrado de César, encripta estas frases.*
El examen es fácil. A las cinco en la plaza.

b) *Descifra el mensaje.*
HÑ HADOHP HV HÑ ÑXPHV

Una generalización sencilla de este método consiste en desplazar el alfabeto otro número distinto de 3 letras.

Así, si lo desplazamos 4 letras, entonces «enemigo» se traduce como IQIPMKS.

c) *Cifra las siguientes frases utilizando el cifrado de César generalizado según los desplazamientos* k *marcados para cada una de ellas.*

- k = *1. La bolsa subirá.*
- k = *2. Llegamos mañana.*

3 El cifrado de César mejorado

Una mejora del cifrado de César consiste en relacionar cada letra con otra, sin que haya un mismo desplazamiento para todas, eligiendo una combinación al azar. Este método se denomina sustitución monoalfabética.

Por ejemplo, si elegimos la relación:

a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n
B	W	E	R	T	Y	U	I	O	P	C	S	D	F

ñ	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
G	H	J	K	L	Z	X	A	V	Q	N	M	Ñ

la palabra «enemigo» sería TFTDOUH.

Este sistema es bastante seguro porque se pueden emplear unas 10^{28} relaciones distintas, tantas como reordenaciones del alfabeto se te ocurran, por lo que si alguien quisiera descifrar el texto, aunque conociera la técnica, no sabría qué reordenación se ha elegido.

REALIZA ESTAS ACTIVIDADES.

a) *Utilizando la relación estudiada, cifra estas frases.*
Vienen a las siete. Vende todo.

b) *Elige una reordenación del alfabeto y cifra las frases anteriores.*

A pesar de que este método parece muy seguro, basándonos en la frecuencia con que se repiten las letras en un idioma, y con la actual potencia de cálculo de los ordenadores, es posible descifrar los mensajes.

Date cuenta de que hasta ahora hemos visto métodos de cifrado y descifrado en los que tanto emisor como receptor conocen la forma de enviar y recibir mensajes, es decir, los métodos de cifrado y descifrado son comunes.

En la criptografía actual, sin embargo, no ocurre así: si queremos mandar un mensaje a alguien, sabremos cómo cifrarlo pero solamente el receptor sabrá cómo descifrarlo.

4 La utilidad de los números primos en criptografía

Los sistemas actuales de criptografía utilizan métodos numéricos muy complejos, con operaciones en las que se manejan números primos con gran cantidad de cifras.

Muchos matemáticos y científicos trabajan en métodos de cifrado y descifrado, y utilizan los números primos, ya que son la base ideal para un proceso de cifrado fácil y descifrado enormemente difícil.

Vamos a ver, a continuación, un método sencillo de cifrado en el que utilizaremos los números primos. Se requiere que tanto emisor como receptor conozcan cómo cifrar y descifrar mensajes.

A cada letra del alfabeto le haremos corresponder un número de dos cifras. La letra A la sustituiremos por 10, la B por 11 y así sucesivamente.

a/10	b/11	c/12	d/13	e/14	f/15	g/16
h/17	i/18	j/19	k/20	l/21	m/22	n/23
ñ/24	o/25	p/26	q/27	r/28	s/29	t/30
u/31	v/32	w/33	x/34	y/35	z/36	

El emisor aplica este método de cifrado: si el número correspondiente a la letra es primo, se deja como está, y si es compuesto, se le suma un número fijo, 30 en este caso.

a/40	b/11	c/42	d/13	e/44	f/45	g/46
h/17	i/48	j/19	k/50	l/51	m/52	n/23
ñ/54	o/55	p/56	q/57	r/58	s/29	t/60
u/31	v/62	w/63	x/64	y/65	z/66	

De este modo, la palabra «mates» sería 5240604429.

Para descifrar el mensaje hacemos grupos de dos cifras en los números y miramos la equivalencia en la tabla. Así, 17555140 29405840 descifrado es la frase «hola sara».

RESUELVE LAS ACTIVIDADES.

a) *Con el método anterior cifra estas frases.*
Ven mañana. Tengo frío.

b) *Descifra el texto.*
604844234429 573144 4429603113484058

c) *Inventa otro método para encriptar textos en el que utilices los números primos.*

El apartado de curiosidades matemáticas se puede desarrollar simultáneamente con las sesiones o bien al finalizar éstas, ya que no afectan al desarrollo de las mismas.

De la unidad didáctica desarrollada se puede observar que está elaborada de forma que atienda a la mayoría de las competencias básicas para contribuir en el alumno al desarrollo de la mente que aprende, al desarrollo de capacidades y al desarrollo de actitudes positivas hacia el aprendizaje. Las competencias básicas se mencionaron anteriormente en el ANEXO I.

La *Competencia Matemática* está presente en toda ella ya que es un tema de ésta ciencia, y dicha competencia contribuye al desarrollo de las demás.

- Con puestas en común con todos los miembros de la clase y actividades en las que los alumnos tengan que expresar sus razonamientos o deducciones, se contribuye a la adquisición de la *Competencia en Comunicación Lingüística*.

- Al utilizar materiales manipulativos en los que el alumno desarrolla la visión espacial para posteriormente transferir formas, se contribuye al desarrollo de la *Competencia en el Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico*.

- Con las actividades de criptografía en los que el cifrado y descifrado de mensajes es complejo, se adquiere a la adquisición de la *Competencia de Tratamiento de la Información.*

- Al realizar las tareas en pequeños grupos, hacer las puesta en común con los miembros del grupo y juegos de divisibilidad, se está contribuyendo al desarrollo de la *Competencia Social y Ciudadana*, ya que les permite analizar y comprender distintos puntos de vista interactuándo con sus compañeros.

- La *Competencia para Aprender a Aprender* está presente en casi todas las sesiones ya que las tareas propuestas tienen como objetivo que los alumnos descubran por sí solos la solución mediante métodos no necesariamente rigurosos.

- Al mismo tiempo, las tareas están propuestas para que los alumnos encuentren por sí solos la respuesta correcta a los problemas donde deben de planificarse, asumir retos y tomar decisiones. Esto contribuye al desarrollo de la *Competencia en Autonomía e Iniciativa Personal*.

Otra actividad que se puede desarrollar simultáneamente es el de la lectura del capítulo tres del libro *El diablo de los números* y así favorecer al desarrollo de la Competencia Lectora realizando tareas relacionadas con los conceptos que aparezcan en él. Esta actividad se puede usar tanto de refuerzo como de ampliación ya que se pueden repasar los conceptos de número primo y compuesto, y proponer actividades de investigació como los retos que el diablo le plantea al protagonista.

Si las características del aula donde se trabaje esta propuesta de unidad didactica permiten la impartición del tema con una presentación de diapositivas proyectadas a través de la pizarra digital, se desarrollaría también la *Competencia digital.* De esta manera, se podría distribuir entre los alumnos dicha presentación para que las soluciones pudieran enviarse al profesor por correo electrónico, elaborando así un cuaderno digital.

EVALUACIÓN

La evaluación permite analizar el proceso de enseñanza-aprendizaje que se ha puesto en marcha con los alumnos. Permite obtener información sobre la comprensión del tema, la eficacia de la enseñanza y las medidas a corregir para el próximo curso.

Los instrumentos de evaluación para esta unidad didáctica serán:

- Participación en clase. Se anotará diariamente el comportamiento del alumno, la disposición hacia el aprendizaje de las matemáticas y la cooperación en el aprendizaje de los compañeros.
- Revisión del cuaderno de clase. Se anotará si realiza y se corrigen las tareas de clase y si se traen hechas las tareas que no sean finalizadas en la hora de clase.
- Prueba final del tema. Al finalizar el tema se realizará una prueba final donde se involucren los contenidos desarrollados en el tema.

La ponderación de los instrumentos será:

- Participación: 20%
- Cuaderno de clase: 20%
- Prueba del tema: 60%

El modelo de prueba final del tema (ANEXO V) se ha basado con la intención de cubrir todos los contenidos y objetivos fijados. La realización de una prueba final permite al docente comprobar si se han corregido los errores y dificultades que se analizaron previamente. La prueba también propone tareas de todos los niveles de complejidad para atender a la diversidad del alumnado.

CONCLUSIONES

La elaboración de una unidad didáctica es un proceso largo y laborioso. Para una correcta elaboración de la misma son necesarios los análisis previos de contenido, cognitivo e instrucción, que permiten que la propuesta de unidad didáctica tenga coherencia.

Con el análisis de contenido se obtiene una visión histórica del tema y el proceso de evolución que han sufrido las nociones hasta nuestros días, muestra la relación que existe entre los distintos conceptos y sus representaciones, así como dónde se utilizan y para qué.

Con el análisis cognitivo se marcan las expectativas del profesor y los objetivos que éste pretende que alcancen los alumnos, teniendo en cuenta la normativa vigente del momento en que se elabora. También permite prevenir errores y dificultades con un análisis de los mismos.

Ambos análisis permiten decidir el enfoque del tema, adecuándolo al nivel del curso de los alumnos a los que va dirigida la unidad y seleccionando las tareas adecuadas previo análisis de las mismas.

Por otra parte, para poder desarrollar dichos análisis, han sido necesarios los distintos puntos de vista que nos han aportado las asignaturas del máster, de la Educación en general, y la Educación Matemática en particular. Primeramente explicaré las aportaciones más destacadas de cada una de las asignaturas que me han ayudado a la hora de elaborar éste trabajo.

En *Sociedad, Familia y Educación* vimos la evolución de la sociedad hasta nuestros días y como los acontecimientos políticos, y sobre todo, la incorporación de la mujer al mundo laboral influyó en el cambio de modelo de familia que se tenía hasta entonces.

En *Procesos y Contextos Educativos* conocimos las distintas instituciones que forman la Educación y el funcionamiento de cada una de ellas, así como las adaptaciones que éstas deben de hacer atendiendo al contexto social de cada centro. También se vio como el contexto político de cada época influye en la educación con la creación y derogación de leyes según la ideología del gobierno de cada momento.

Aprendizaje y Desarrollo de la Personalidad me ha permitido conocer la psicología de un niño desde su nacimiento hasta su adolescencia con las aportaciones de la filosofía de Piaget y Vygotsky. Esto me ha servido para elaborar mi unidad atendiendo a métodos que ayudan a que los aprendizajes que desarrollen los alumnos sean significativos.

Con *Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas* aprendimos a elaborar una unidad didáctica realizando los análisis de contenido, cognitivo e instrucción, los cuales han sido vitales para la elaboración de éste documento ya que se basa sobre éstos análisis.

De *Complementos de Formación en Matemáticas* vimos desde un punto de vista más matemático que didáctico, aquellos temas, ejercicios, trabajos… que pueden servirnos para desarrollar la capacidad matemática de aquellos niños con cualidades hacia esta ciencia, como por ejemplo los problemas que se proponen en el programa ESTALMAT. También conocimos la fundamentación histórica de cada tema que hemos desarrollado los alumnos de éste máster.

Y por último, en *Innovación Educativa* estudiamos que se puede enseñar y aprender de forma lúdica sin abandonar la formalización que caracteriza a la Matemática, y como la manipulación de materiales o el uso de herramientas tecnológicas contribuye de forma positiva a ésta materia, ya que el uso de diferentes recursos ayuda a la comprensión de los conceptos tratados.

Una vez barrido todas las asignaturas del máster, paso a redactar las aportaciones del período de prácticas que me han servido para la elaboración de la unidad didáctica.

Las prácticas me han permitido observar que hay conceptos que requieren más tiempo de asimilación, por tanto, en el momento de la puesta en práctica de la unidad, quizás sea necesario alguna sesión más de las que se previnieron en un principio. Otro de los aspectos observados es que a los alumnos les cuesta mantener la atención en clase, por eso, he intentado que en la elaboración de las sesiones haya un ritmo de trabajo basado en intercalar la realización de tareas con diálogos dirigidos por el docente.

Para ver la efectividad de la unidad elaborada, me hubiese gustado haberla puesto en práctica y comprobar la calidad de mi trabajo. En tal caso, se hubiera probado si la propuesta de ritmo de trabajo es viable, y en caso de no serlo, modificarlo para su mejora.

Toda mejora la aporta la experiencia docente, que para llegar a alcanzar se necesita de una preparación científica, didáctica y psicológica. Considero que la formación que proporciona el máster es necesaria pero que tendría más efectividad si fuesen compaginadas teoría y prácticas simultáneamente, ya que se le vería una mayor justificación a los aprendizajes de las asignaturas.

La formación es necesaria porque se atraviesa por momentos de incertidumbre, de indecisión y sensación de incapacidad ante las nuevas responsabilidades que hay que superar, cosa que sólo es posible enfrentándose a ello.

Por otro lado, la formación del profesorado debe ser continua, ya que todo docente debe estar actualizado en todo momento para adaptar la enseñanza a los cambios sociales, culturales y políticos de cada época.

Por último, la formación del profesorado permite al futuro docente estar preparado para elaborar de forma crítica, reflexiva y eficaz, la enseñanza que haga significativa los aprendizajes que desarrollen los alumnos.

La elaboración de este proyecto ha sido un balance sobre lo realizado y aprendido en el Máster.

BIBLIOGRAFÍA

- MEC (2007) ORDEN ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación Secundaria Obligatoria.
- Rico, L. (1997), *Bases teóricas del Currículo de Matemáticas en Educación Secundaria*. Editorial Síntesis. Madrid.
- Rico, L. (1997b), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria.* Editorial Horsoi. Barcelona.
- Puig, L. (1997) *Análisis fenomenológico en L.Rico (Coord). La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria*. Editorial Horsoi. Barcelona.
- Sociedad Andaluza de Educación Matemáticas THALES (2009). *Matemáticas para estimular el talento*. Editorial S.A.E.M. THALES. Sevilla.
- Sierra, M., González, M., García, A. y González, M. (1989) *Matemáticas: Cultura y Aprendizaje. Divisibilidad.* Editorial Síntesis. Madrid.
- Gallego, J.L. y Quiñonero J.A. (2003) *Un paseo por el mundo de las Matemáticas*. Edita Grafisol S.L. Lorca
- Bracho, R. (1999) *Actividades recreativas para la clase de matemáticas*. Editado Junta de Andalucía. Córdoba.
- Almodóvar J.A. y Gil J.(2000) *Órbita 2000. Guía y recursos. Matemáticas 1ºESO.* Editorial Santillana.
- Colera, J. y Gaztelu, I (2010) *1 Educación Secundaria. Matemáticas*. Editorial Anaya. Madrid
- Paenza, A (2010) *Matemática… ¿estás ahí? La vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias*. Editorial Siglo Veintiuno. Argentina.
- Magnus, H (1997) *El diablo de los números*. Editorial Siruela. Madrid
- Woolfolk, A (2010) *Psicología Educativa*. Editorial Pearson Educación. México.

ANEXO I: COMPETENCIAS BÁSICAS

La *Competencia Matemática*, esencial en la formación del individuo, contribuye a la adquisición de las competencias básicas. Seguidamente se exponen las competencias básicas y la contribución de la Matemática a éstas.

En la *Competencia en Comunicación Lingüística*, la matemática utiliza continuamente la expresión oral y escrita para enunciar y formular ideas, así como en la resolución de problemas para expresar los procesos y razonamientos empleados que ayudan a establecer el pensamiento. El propio lenguaje matemático está constituido por un léxico propio de carácter sintético, simbólico y abstracto.

La *Competencia en el Conocimiento e Interacción con el Mundo Físico* se adquiere con el desarrollo de la visión espacial y la capacidad para transferir formas y representaciones entre el plano y el espacio.

La matemática aporta al *Tratamiento de la Información y Competencia Digital* la capacidad de ser apto para interpretar distintos tipos de datos gráficos y estadísticos que utilizan los medios de comunicación. Con la incorporación de distintos recursos didácticos digitales a la enseñanza de la matemática también se contribuye a la competencia digital.

La matemática contribuye a la adquisición de la *Competencia Social y Ciudadana* ya que ésta aporta a los individuos saberes y destrezas que le permiten analizar y comprender su alrededor interactuando con las personas para tener distintos puntos de vista y ser crítico.

En la *Competencia Cultural y Artística*, básicamente por la geometría, la matemática ayuda a comprender y describir nuestro alrededor y apreciar la belleza de las estructuras creadas.

La *Competencia para Aprender a Aprender* se adquiere con las técnicas heurísticas que se emplean en la resolución de problemas y ejercicios, donde se pone de manifiesto los razonamientos que se emplean para llegar a ciertas conclusiones y consolida la adquisición de destrezas.

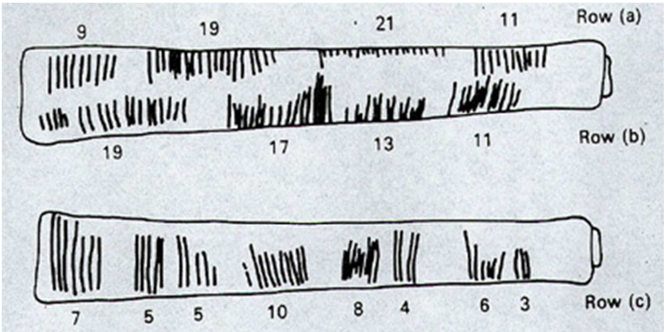
La *Competencia en Autonomía e Iniciativa Personal* se encuentra en la resolución de problemas donde se pone en énfasis la planificación de estrategias, asumir retos y contribuye a los procesos de toma de decisiones.

ANEXO II: DESARROLLO HISTÓRICO

Prehistoria

En las altas montañas del centro de África Ecuatorial, en las fronteras de Uganda y Zaire se encuentra un afluente del Nilo, el lago Edward (un pequeño lago de unos 30 kilómetros por 60 kilómetros) donde se halló (1960) un hueso con unas muescas que parece aislar cuatro números primos: 11, 13, 17 y 19. Es uno de los objetos matemáticos más antiguos y probablemente, el hueso de Ishango sea la tabla de números primos más antigua. Tras la examinación se llegó a la conclusión de que representa un calendario lunar de seis meses.

Las marcas en las filas (a) y (b) cada uno, suman 60. Fila (b) contiene los números primos entre 10 y 20. Fila (a) es muy compatible con un sistema de numeración basado en 10, ya que las muescas se agrupan como 20 + 1, 20 - 1, 10 + 1, y 10 - 1. Finalmente, la fila (c) parece ilustrar el método de duplicación utilizado más recientemente en la multiplicación egipcia.

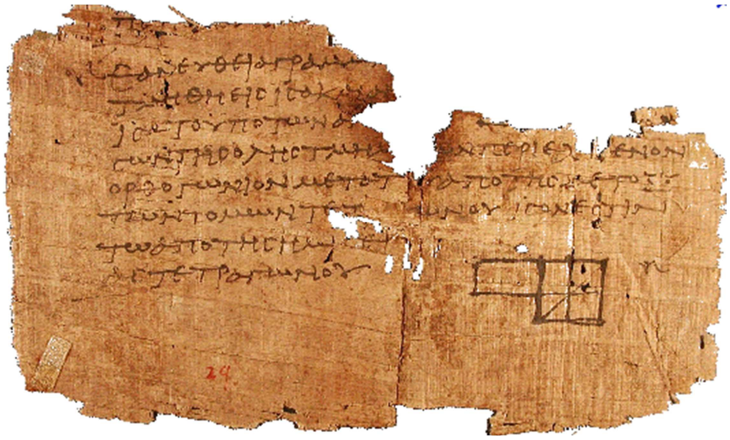


Antiguo Egipto

En el Antiguo Egipto (2000 a.C.) se utilizaron conceptos de divisibilidad como medida ya que debían pagar impuestos en función del área de los terrenos que regaba el Nilo. Fijada la unidad de medida intentan ver cuántas de esas unidades tiene cada terreno, de esta manera se aproximan al valor de pi (3,1605) dando origen al problema de inconmensurabilidad. Tanto en el papiro de Rhind como en el de Moscú se deja evidencia de los conocimientos matemáticos en lo relativo a la divisibilidad que poseían los egipcios ya que éstos responden a problemas de medida "cuantos caben en."

En las matemáticas egipcias, el cálculo de fracciones requería conocimientos sobre las operaciones, la división de naturales y la factorización. Los egipcios sólo operaban con fracciones unitarias por lo que las fracciones de numerador distinto de uno se escribían como suma de inversos de naturales. En cierta mantera, los egipcios intuían o conocían los números primos.

Mesopotamia



Fragmento de los *Elementos de Euclides*, escrito en papiro, hallado en el yacimiento de Oxirrinco, Egipto.

Esta civilización consigue grandes avances matemáticos. En el campo de la divisibilidad desarrollan y resuelven algunas ecuaciones diofánticas íntimamente unidas con conceptos geométricos constituyendo los problemas de medida su principal foco. Crearon un sistema decimal y otro sexagesimal, lo que se ha justificado pensando que el 60 era divisible por 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20 y 30. Idearon tablas de multiplicar que utilizaban para hallar el área de terrenos. Sabían hallar volúmenes y el área del círculo, dándole una aproximación 3 al número pi. Para dividir multiplicaban el dividendo por el inverso del divisor y disponían para ello de tablas de inversos. La matemática en esta era tuvo en cuenta el valor posicional, no sólo de los números enteros sino también de las fracciones. Fue superior a la matemática egipcia y, como ésta, era de tipo práctico.

Grecia

Los pitagóricos estudiaron las relaciones de los números distinguiendo entre la teoría abstracta de los números y la práctica con ellos, es lo que hoy llamamos Teoría de Números. En la matemática de la Grecia clásica destacan las obras de Euclides, Arquímedes, Apolonio, Ptolomeo y Diofanto. La matemática griega poseía limitaciones que impedían modelar el pensamiento científico como nosotros lo entendemos hoy en día y se sabe que, el conocimiento de los múltiplos, de los divisores y de la descomposición factorial de los números naturales ha sido motivo de estudio desde el origen de la matemática.

Euclides de Alejandría (300 a.C.) con su obra “Elementos”, conjunto de trece volúmenes que recoge de forma axiomática el conocimiento matemático de su tiempo, en particular los libros VII, VIII y IX, reúnen lo relativo a la Aritmética y ofrece una descripción de la Teoría de Números, es decir, de las propiedades de los números enteros y de las razones entre estos. Euclides en el libro VII, mediante 22 definiciones, establece los conceptos de:

- Número: *Un número es una pluralidad compuesta de unidades. Una unidad es aquello en virtud de la cual cada una de las cosas que hay, se llama una.* El número para Euclides es una magnitud.
- Parte (divisor): *Un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor*.
- Partes (no divisor) : *Cuando no lo mide.*
- Múltiplo: *Y el mayor es múltiplo del menor cuando es medido por el menor*.
- Clasifica los números en pares (*parmentes*) e impares (*imparmentes*).
- Número primo: *El medido por la sola unidad*.
- Números primos entre sí: *Los medidos por la sola unidad como medida común*.
- Número compuesto: *Es el medido por algún número*.
- Números compuestos entre sí: *Son los medidos por algún número como medida común.*

- Un número multiplica a otro: *Un número multiplica a un número cuando el multiplicado se añade a sí mismo tantas veces como unidades hay en el otro y resulta un número.*

Todas estas definiciones fueron formuladas en términos de magnitudes ya que los griegos no concibieron los números tal y como los conocemos actualmente. Generalmente, entendieron el producto de dos longitudes como un área o un volumen, si uno de los factores era una longitud y el otro un área.

Con las proposiciones de los libros VII, VIII y IX se constituyeron objetivos teóricos como:

- Establecen un procedimiento llamado "antenaresis" (Algoritmo de Euclides) para calcular el máximo común divisor de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones:
    - *Dados dos o más desigualdades y restando sucesivamente el menor al mayor, si el que queda no mide nunca al anterior hasta que quede una unidad, los números iniciales serán primos entre sí.*
    - *Dados dos números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*
    - *Dados tres números no primos entre sí, hallar su medida común máxima.*
- Propiedades de la divisibilidad.
    - *Todo número es parte de todo número, el menor del mayor.*
    - *Si un número es parte de un número, y otro es la misma parte de otro, la suma será también la misma parte de la suma que el uno del otro.*
- Desarrollar la teoría de las proporciones para números mediante proposiciones.
- Definir y establecer propiedades de los números primos entre sí a partir de las proposiciones.
- Clasificar los números en compuestos y primos.
- Establecer un procedimiento para calcular el mínimo común múltiplo de dos o más números desarrollado a través de las proposiciones:
    - *Dados tantos números como se quiera, hallar los menores de aquellos que guardan la misma razón que ellos.*
    - *Dados dos números, hallar el menor número al que miden.*
    - *Si dos números miden a algún número, el número menor medido por ellos también medirá al mismo número.*
    - *Dados tres números, hallar el número menor al que miden.*

En el libro IX de Euclides se encuentran las proposiciones donde se establecen propiedades de los productos entre sólidos, cubos y cuadrados a partir de los números pares e impares. Además incluye la proposición que establece que el conjunto de los números primos es infinito *"Hay más números primos que cualquier cantidad propuesta de números primos*", junto con proposiciones próximas al Teorema Fundamental de la Aritmética como:

- *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales, por cuantos números primos se ha medido el último, por los mismos será medido también el siguiente a la unidad.*

- *Si tantos números como se quiera a partir de una unidad son continuamente proporcionales y el siguiente a la unidad es un número primo, el mayor no será medido por ningún otro fuera de los que se encuentran entre los números proporcionales.*
- *Si un número es el menor medido por números primos, no será medido por ningún otro número primo fuera de los que le medían desde un principio.*

Son muy cercanos al Teorema fundamental de la Aritmética pero no se cree que pudiera ser concebido por los griegos como tal ya que no llegaron a concebir el producto de números reales y nunca llegaron a darse cuenta de que en matemáticas se puede concebir una existencia independientemente de la construcción.

Siglo XVI

Debido a las necesidades tecnológicas, científicas y mercantiles, se mejoraron los métodos operativos. Stevin (1548-1620) hizo aportaciones a la física, matemática, música, semiología y contabilidad, al que se le debe la extensión de la Teoría de la Divisibilidad ya que en su obra publicada en 1634 "*Œuvres mathématiques...*" extiende el algoritmo de Euclides al cálculo del máximo común divisor de dos polinomios.

Siglo XVII

Diofanto de Alejandría en el siglo III d.C. escribió trece libros, de los cuales siete se han perdido, dedicados a la resolución de ecuaciones algebraicas, intentando dar métodos para encontrar sus soluciones enteras o racionales. La traducción de éste trabajo al latín con el nombre de Aritmética en 1621 inspiró a Pierre de Fermat (1601-1665) quién hizo importantes aportaciones al estudio de la Teoría de Números (y a otras ramas de la matemática). Entre los resultados más conocidos tenemos el *"Pequeño teorema de Fermat"* que dice que:

"Para todo número primo p y para todo número natural a no divisible por p tenemos que p divide a $a^{p-1} - 1$*".*

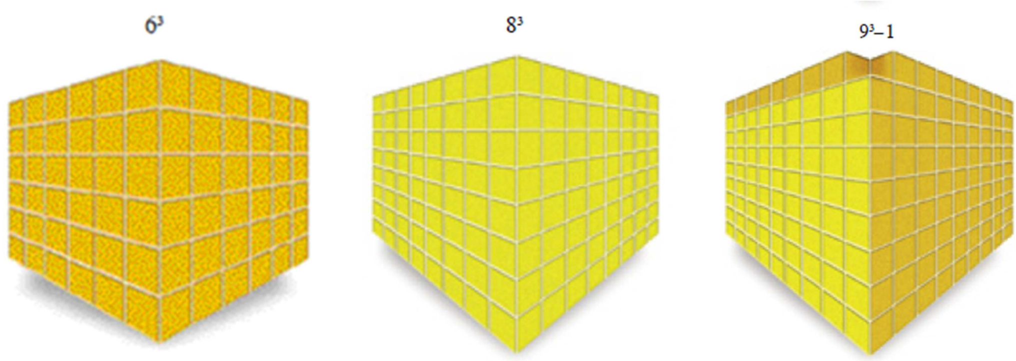
El resultado más famoso de Fermat es el conocido "*Último teorema de Fermat*". Su fama se debe a cómo lo formuló ya que lo hizo en el margen de un libro de Diofanto antes de su muerte y a su demostración debido a los años de su estudio. Dicho teorema dice así:

"No es posible encontrar cuatro números naturales x, y, z, n para n>2, tales que $x^n+y^n=z^n$*".*

La celeridad de esta proposición reside en que hasta 2003 no se probó el caso general por Andrew Wiles. Fermat la enuncia al comentar el problema de Diofanto de descomponer un cuadrado en suma de dos cuadrados, escribiendo en el margen del libro que:

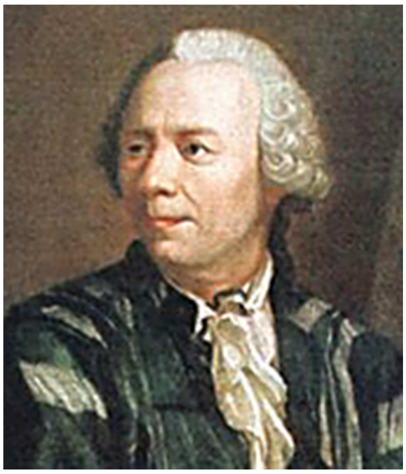
"Por otro lado, es imposible descomponer un cubo en suma de dos cubos o un bicuadrado en suma de dos potencias de igual exponente, con excepción del cuadrado. He encontrado una demostración maravillosa, pero el margen del libro es demasiado estrecho para contenerla"

La pregunta que Fermat se planteó fue la de encontrar soluciones enteras (distintas de cero) para la ecuación $x^3 + y^3 = z^3$. Al intentar resolver esta cuestión, encontró solamente dos cubos cuya suma es otro cubo menos uno u otro cubo más uno. Es decir, tal que la ecuación que se cumple es $x^3 + y^3 = z^3 - 1$ o $x^3 + y^3 = z^3 + 1$. Por ejemplo: $6^3 + 8^3 = 9^3 - 1$



El propio Fermat, haciendo uso de un método descubierto por él mismo, llamado el método de descenso infinito, demostró que no existen ternas de números enteros distintos de cero que satisfagan la ecuación.

Leonhard Euler (1707-1783)



El interés de Euler en la teoría de números procede de la influencia de Christian Goldbach durante su estancia en la Academia de San Petersburgo. Gran parte de los primeros trabajos de Euler en teoría de números se basan en los trabajos de Pierre de Fermat. Euler desarrolló algunas de las ideas de este matemático francés pero descartó también algunas de sus conjeturas.

Euler unió la naturaleza de la distribución de los números primos con sus ideas del análisis matemático. Demostró la divergencia de la suma de los inversos de los números primos y, al hacerlo, descubrió la conexión entre la función zeta de Riemann y los números primos, lo que se conoce como el producto de Euler para la función zeta de Riemann.

Euler también demostró las identidades de Newton, el pequeño teorema de Fermat y el teorema de Fermat sobre la suma de dos cuadrados. También definió la función ϕ de Euler que, para todo número entero positivo *n*, cuantifica el número de enteros positivos menores o iguales a *n* y coprimos con *n*. Más tarde, utilizando las propiedades de esta función, generalizó el pequeño teorema de Fermat a lo que se conoce como el teorema de Euler:

"Si a y n son enteros primos relativos, entonces n divide al entero $a^{\varphi(n)} - 1$*"*

Contribuyó de manera significativa al entendimiento de los números perfectos, tema que fascinó a los matemáticos desde los tiempos de Euclides, y avanzó en la investigación de lo que más tarde se concretaría en el teorema de los números primos. En el año 1772, Euler demostró que $2^{31} - 1 = 2.147.483.647$ es un número primo de Mersenne (2^n-1 es primo con *n* primo). Esta cifra permaneció como el número primo más grande conocido hasta el año 1867.

Karl Friedrich Gauss (1777-1855)

Gauss inicia sus investigaciones sobre Teoría de Números durante su estancia en el Collegium Carolinum (1795) pero su obra *Disquisitiones Arithmeticae* la realiza durante su estancia en la Universidad de Göttingen (1795-1798) pero no se publica por dificultades económicas hasta 1801. En este tiempo (1796) y dejando constancia en su obra *Disquisitiones Arithmeticae*, tuvo lugar uno de sus resultados más importantes: la descomposición de todo número entero en tres triangulares y la construcción del heptágono regular.

Con las *Disquisitiones Arithmeticae*, Gauss da una nueva orientación a la Teoría de Números, dejando de ser ésta una acumulación de resultados aislados pasando a ser una rama de las matemáticas. En dicha obra Gauss trata sobre aspectos propios de los números enteros que se ocupa la Aritmética Superior. Las *Disquisitiones* están organizadas en siete secciones:

1. Números congruentes en general
2. Congruencias de primer grado
3. Residuos de potencias
4. Congruencias de segundo grado
5. Formas y ecuaciones indeterminadas de segundo grado
6. Aplicaciones de las nociones anteriores
7. Ecuaciones de las secciones de un círculo.

En la obra de Gauss “Disquisiciones arithmeticae” se encuentra por primera vez el concepto de número congruente y desarrolla las propiedades de la teoría de congruencias. Gauss introduce una notación para referirse a las congruencias: “ a º b (mód m)”. La ventaja de esta notación es que recuerda la forma en que escribimos las ecuaciones algebraicas, trata la divisibilidad aritmética con una breve notación y permite "sumar, restar, multiplicar… congruencias", con tal de que el módulo sea el mismo en todas, para obtener otras congruencias. Y permite estudiar ecuaciones con congruencias: $ax + b \equiv c \pmod{m}$. Gauss aplica estos métodos a problemas históricos como el de dado un número A determinar la cantidad de números primos con A y menores que él, para obtener posteriormente la demostración del teorema fundamental de las congruencias polinómicas:

$$Ax^{m} + Bx^{m-1} + ... + Mx + N \equiv 0 \pmod{p}$$

Cuyo módulo p es primo que no divide a A, no puede resolverse de más de m maneras diferentes o no puede tener más de m raíces no congruentes con relación a p. También trata los residuos cuadráticos y de potencias superiores, así como demuestra los teoremas de Fermat (Pequeño teorema de Fermat) , el de Wilson:

“El producto de todos los números menores que un número primo dado, aumentado en una unidad es siempre divisible por dicho número”

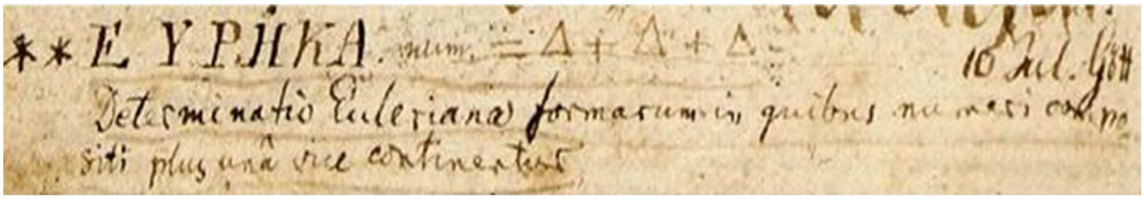
Y la “Ley de reciprocidad cuadrática”:

“Si p es primo de la forma 4n + 1, +p será un residuo o un no-residuo de todo primo que tomado positivamente sea un residuo o un no residuo de p. Si p es de la forma 4n + 3, -p tiene la misma propiedad”.

Gauss contaba con esta demostración desde 1796 a los 19 años, mientras que Euler y Legendre lo habían intentado sin éxito.

Un número entero M puede representarse mediante la expresión $ax^2 + 2bxy + cy^2 = M$, donde a, b, c, x e y son números enteros. A la expresión $F = ax^2 + 2bxy + cy^2$ Euler la denominó *forma cuadrática,* y Euler la utilizó para determinar todos los enteros M que se representan por dicha forma. El inverso, y más interesante, consiste en dados M y a, b y c, encontrar los valores de x e y que representan a M. Euler ya había utilizado las formas cuadráticas para abordar problemas de números enteros, es decir, para demostrar teoremas de Teoría de Números.

En 1796 como consecuencia del estudio de las formas ternarias Gauss resolvió un problema de Fermat,"*Todo número entero positivo se puede escribir como suma de tres números triangulares*", Gauss escribió en su diario *eureka*.



La construcción con regla y compás del polígono regular de 17 lados, aunque en apariencia no tenga más que ver con la geometría o con el análisis que con la aritmética de números enteros, Gauss enuncia un resultado que permite obtener los polígonos construibles con regla y compás.

"Para poder seccionar geométricamente el círculo en N partes iguales]... se requiere que N no contenga ningún factor primo impar que no sea de la forma 2^m +1, ni tampoco ningún factor primo de la forma 2^m +1 más de una vez. De esta forma, se encuentran los 38 valores de N menores que 300:

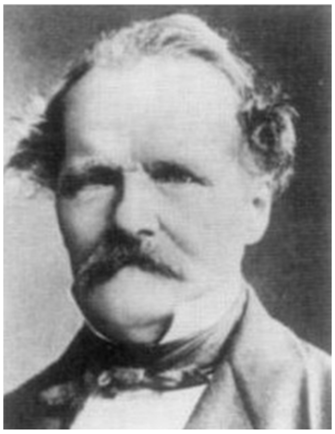
2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 16, 17, 20, 24, 30, 32, 34, 40, 48, 51, 60, 64, 68, 80, 85, 96, 102, 120, 128, 136, 160, 170, 192, 204, 240, 255, 256, 257, 272"

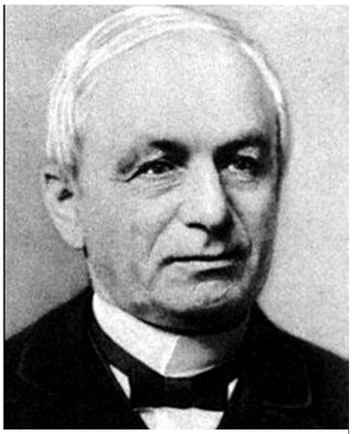
El trabajo de Gauss también incluía el *Teorema Fundamental de la Aritmética* para el dominio de integridad de los números enteros, que indica que *"todo número puede expresarse como un producto finito de números primos, en el que algunos factores pueden repetirse, y tal que su representación es única"*. Gauss también introdujo la noción de grupo abeliano y demostró que en los grupos abelianos finitos existe un elemento del grupo cuyo orden es mínimo común múltiplo de los órdenes de todos los elementos.

Siglos posteriores

Uno de los corolarios del teorema de Euclides sobre la existencia de infinitos números primos, lo enunció Dirichlet (1805-1859). Con Kummer (1810-1893), Dedekind (1831-1916)y Kronecker (1823-1891) (retratos abajo en el orden mencionados) se generaliza la Teoría de Números y en particular la Teoría de la Divisibilidad mediante la creación de la estructura de ideal, una de las estructuras fundamentales del álgebra moderna.

Johann Peter Gustav Dirichlet



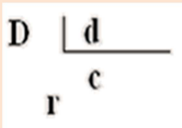
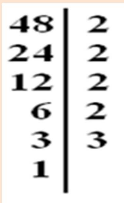


Ernst Eduard Kummer Julius Wilhelm Richard Dedekind Leopold Kronecker

El álgebra conmutativa moderna empezó a formalizarse hacia 1910 y en esta década aparece la noción general de anillo. La Teoría de Números ocupa a partir del siglo XX una posición prominente respecto de la Aritmética, del Álgebra y de la Geometría. La Teoría de Números abarca desde este siglo un importante lugar en el ámbito de las matemáticas, y podemos destacar el estudio de la estructura multiplicativa y de la divisibilidad en el conjunto de los números naturales.

Hilbert (1862-19343) señala que tanto los algebristas como los matemáticos dedicados a la Teoría de Números lo que hacen es manejar la misma estructura subyacente de cuerpo. Desde la perspectiva de esta estructura se vislumbra con más claridad el desarrollo a lo largo de la historia de los conceptos relacionados con la divisibilidad.

ANEXO III: Desarrollo de la tabla de hechos

Términos		Notación	Convenios	Resultados
Conocimientos previos	- Unidad, doble, triple… - Medio, tercio, cuarto… - Potencia, base, exponente, cuadrado… - Raíz cuadrada, cuadrado perfecto…	+, x, :, /, ≤, ∞,√ 1/2, 1/3… 1, 2a, 3a… $p_1^{c1}\ p_2^{c2}\ p_3^{c3} \ldots\ldots\ p_n^{cn}$ a|b, a·b m.c.m., m.c.d.  	- 1 no es primo. - 0 no es natural. - Colocación de los números en la descomposición factorial. - Abreviaturas. - En la descomposición factorial paramos al llegar al 1. - Empezar en la descomposición factorial por el menor primo posible que sea divisor del número y continuar de menor a mayor…	- Criterios de divisibilidad (2, 3 y 5). - Si b|c entonces m.c.d.(b,c) = b y m.c.m.(b,c) = c. - Los múltiplos de un número son infinitos y los divisores son finitos. - Si a es múltiplo de b y b es múltiplo de c entonces a es múltiplo de c. (propiedad transitiva). - Si a es divisor de b y b es divisor de c entonces a es divisor de c. (propiedad transitiva). - Si a y b son múltiplos de c entonces una combinación lineal de a y b también es múltiplo de c. - Si m es múltiplo de a y n no es múltiplo de a, entonces m+n no es múltiplo de a. - Si b|a y a|b entonces a=b m.c.m(a,b)= a·b/M.C.D(a,b) - División de números a partir de su descomposición factorial. - Teorema fundamental de la aritmética.
Conocimientos propios del tema	- Producto, factor, división, dividendo, divisor, cociente, resto, división exacta e inexacta, fracción, divisible - Mide, es medido, cabe, coincidir… - Números primos - Múltiplo - Divisor			

ANEXO IV: Competencias PISA y sus descriptores

Pensar y Razonar (PR)

Esta competencia tiene que ver con:

- Plantear cuestiones propias de las matemáticas.
- Conocer los tipos de respuestas que ofrecen las matemáticas a estas cuestiones.
- Distinguir entre diferentes tipos de enunciados.
- Entender y utilizar los conceptos matemáticos en su extensión y sus límites.

Argumentar y Justificar (AJ)

Esta competencia se caracteriza por:

- Conocer lo que son las pruebas y demostraciones matemáticas y cómo se diferencian de otros tipos de razonamiento matemático.
- Seguir y valorar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos.
- Disponer de sentido para la heurística.
- Crear y expresar argumentos matemáticos.

Comunicar (C)

Como competencia la comunicación tiene que ver con que los escolares:

- Expresen de manera oral o escrita acerca de las matemáticas, y
- Comprendan e interpreten los enunciados orales o escritos de otras personas.

Modelizar (M)

Esta competencia tiene que ver con que los escolares:

- Estructuren y analicen la situación o problemática inicial.
- Expresen esa situación en términos matemáticos.
- Construyan o usen modelos matemáticos para resolver ese problema matemático.
- Interpreten los resultados obtenidos en términos de la situación o problema inicial.
- Analicen y critiquen ese modelo y sus resultados.

Plantear y Resolver Problemas (RP)

Esta competencia tiene que ver con que los escolares:

- Planteen, formulen y definan diferentes tipos de problemas matemáticos.
- Resuelvan distintos tipos de problemas mediante una diversidad de vías.

Representar (R)

Esta competencia tiene que ver con:

- Decodificar y codificar.
- Interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones, así como las interrelaciones entre las distintas representaciones.

- Escoger y relacionar diferentes formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

Utilizar Lenguaje Simbólico, Formal y Técnico, y Operaciones (LS)

Esta competencia tiene que ver con que los escolares sean capaces de:

- Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y formal y su relación con el lenguaje natural.
- Traducir desde el lenguaje natural al simbólico y formal.
- Manejar enunciados y expresiones con símbolos y fórmulas.
- Utilizar variables, resolver ecuaciones y comprender los cálculos.

Emplear Soportes y Herramientas Tecnológicas (HT)

Se centra en:

- Tener conocimientos sobre diferentes soportes y herramientas.
- Ser capaz de utilizar herramientas de las tecnologías de la información que pueden ayudar en la actividad matemática.
- Conocer las limitaciones de las herramientas y de las tecnologías dela información.

ANEXO V: Modelo de prueba final del tema

EXAMEN DEL TEMA: DIVISIBILIDAD DE NÚMEROS NATURALES. MÚLTIPLOS Y DIVISORES.

NOMBRE:____GRUPO:_________

1. Indica si los siguientes números son primos o compuestos, y razona tu respuesta.

   20 5 29 33 2 17

2. Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) 42 es múltiplo de 6
   b) 35 es divisible por 5
   c) 3 es múltiplo de 15
   d) 7 es divisor de 28

3. Efectúa los siguientes apartados:

   a) Encuentra el mayor y menor número de tres cifras que sea a la vez divisible por 2 y 5.
   b) Si un número es producto de dos números primos, ¿cuántos divisores tendrá?

   c) ¿De cuántas formas distintas se puede dividir una clase de 28 alumnos, en equipos con el mismo número de miembros, sin que sobre ninguno?

4. Halla el valor de a para que los números 2a5 y 25ª sean:

   a) Múltiplos de 3
   b) Múltiplos de 2
   c) Múltiplos de 5

5. Una empresa dispone de 132 zumos de naranja, 176 zumos de melocotón y 220 zumos de manzana. Se desean envasar en cajas del mismo tamaño, pero de forma que no se mezclen los sabores. ¿Cuál es el mayor número de envases que se pueden poner en cada caja? ¿Cuántas cajas tendremos en total?

6. Dos autobuses salen de una misma ciudad en direcciones distintas. El primero tarda en regresar 8 días y el segundo 10 días. Cada autobús realiza sus viajes sin descanso. ¿Cuántos días tardan los autobuses en coincidir nuevamente en la estación?

7. Un granjero, tras recoger en una cesta su cosecha de huevos, piensa:

   - Si los envaso por docenas, me sobran 5.
   - Si tuviera uno más, podría envasarlos exactamente en cajas de 10.
   - Casi he cogido 100.

   ¿Cuántos huevos tiene?