Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Pensamiento Numérico y Algebraico

El Teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria

Trabajo Fin de Máster

María Dolores Torres González

Granada, 2017

Universidad de Granada

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Pensamiento Numérico y Algebraico

El Teorema de Pitágoras en la formación inicial del profesor de Educación Secundaria

Trabajo Fin de Máster realizado por María Dolores Torres González bajo la supervisión de D. José Luis Lupiáñez Gómez dentro del Máster Universitario de Didáctica de las Matemáticas. 2016/2017

Fdo. María Dolores Torres González

Fdo. José Luis Lupiáñez Gómez

Este trabajo se realizó en el seno del grupo de investigación Didáctica de la Matemática. *Pensamiento numérico de la Universidad de Granada*, perteneciente al Plan Andaluz de Investigación, Desarrollo e Innovación de la Junta de Andalucía (FQM193).

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecerle especialmente a José Luis Lupiáñez, director de este trabajo, el ánimo que me transmitió para que me lanzara a vivir esta experiencia, ofreciéndome una nueva perspectiva desde la que mirar. Sin tu estímulo, me hubiera perdido una interesante antesala de la que espero sea el inicio de un camino con éxito. Gracias por tu paciente guía en la realización de este estudio.

Gracias a mi compañera y amiga María Fernanda por involucrarse en mi reflexión sobre el tema como si fuera la suya, aportándome siempre ayuda. Tu manera cabal de entender las cosas me ha resultado muy útil en este trabajo.

Agradezco a todos los profesores que han contribuido con cada curso del máster a forjar ideas con las que partir. A los compañeros de máster que he conocido, por tender la mano con generosidad. Y por supuesto, a los futuros profesores de matemáticas por entregarnos los datos de este estudio, sin su colaboración no hubiera sido posible.

RESUMEN

En esta investigación se lleva a cabo un estudio exploratorio en el que pretendemos caracterizar el conocimiento didáctico que revelan los profesores en formación inicial en torno a un tema específico de las matemáticas escolares, el Teorema de Pitágoras. Se hará identificando aspectos claves de este conocimiento en función de la observación sobre el análisis que realizan los aspirantes a profesores de matemáticas sobre la resolución de tareas del tópico por alumnos de 2º de ESO.

ABSTRACT

In this research an exploratory study is carried out in which is pretend to characterize the didactic knowledge revealed by teachers in initial formation around a specific topic of school mathematics, the Pythagorean Theorem. It will be done identifying key aspects of this knowledge according to the observation about the analysis that the aspirants to mathematics teachers on the resolution of topic's tasks by students of 2nd of ESO.

ÍNDICE DE CONTENIDO

CAPÍTULO 1. CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN................1

1.1. RELEVANCIA Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN 4

1.2. ÁREA PROBLEMÁTICA..7

1.2.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN 8

CAPÍTULO 2. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA 9

2.1. ANTECEDENTES 9

2.1.1. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE TEMAS ESPECÍFICOS......13

2.2. MARCO TEÓRICO...14

2.2.1. EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO 15

2.2.2. EL MODELO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO.......................................16

2.2.3. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS ...19

2.2.4. ANÁLISIS COGNITIVO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS 22

CAPÍTULO 3. DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN 28

3.1. INSTRUMENTO A EMPLEAR 29

3.1.1. FUNDAMENTO DEL CUESTIONARIO 29

3.2. TIPO DE ANÁLISIS 35

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS 37

4.1. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 1...37

4.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 2..43

4.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 3...56

CAPÍTULO 5. BALANCE E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS...........67

CAPÍTULO 6. CONSIDERACIONES FINALES...71

6.1. LIMITACIONES Y FORTALEZAS DE LA INVESTIGACIÓN 71

6.2. APORTE DE LA INVESTIGACIÓN 72

6.3. LÍNEAS ABIERTAS 73

CAPÍTULO 7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 74

CAPÍTULO 8. ANEXO 81

8.1. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS 81

8.2. ANÁLISIS COGNITIVO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS 91

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Verificación o prueba 9

Figura 2. Ciclo del análisis didáctico que estudiamos en nuestra investigación 19

Figura 3. Contextualización conceptual del teorema 20

Figura 4. Procesos básicos de la matemática escolar en el marco de PISA 27

Figura 5. Ítem 1 31

Figura 6. Ítem 2 33

Figura 7. Ítem 3 34

Figura 8. Tarea propuesta en situación personal 38

Figura 9. Tarea propuesta en situación social 38

Figura 10. Tarea propuesta en situación científica 39

Figura 11. Tarea propuesta que no pertenece a la realidad 39

Figura 12. Tarea propuesta que involucra la relación métrica entre áreas 40

Figura 13. Tarea propuesta en contexto de cálculo de áreas 41

Figura 14. Tarea propuesta en la que se evoca el triángulo rectángulo 43

Figura 15. Tarea propuesta en la que se pretende el uso de GeoGebra 43

Figura 16. Figura A y B del ítem 2 63

Figura 17. Profesión de arpedonapta 89

Figura 18. Mapa conceptual: Teorema de Pitágoras y Semejanzas 91

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Situaciones según PISA (2012) 37

Tabla 2. Relaciones métricas en las diferentes tareas 39

Tabla 3. Contextos en las tareas..40

Tabla 4. Características de las tareas propuestas 42

Tabla 5. Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Alicia 44

Tabla 6. Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Beatriz ..46

Tabla 7. Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Carlos ...47

Tabla 8. Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Daniel ...49

Tabla 9. Niveles de conocimiento didáctico ante la respuesta de Alicia 52

Tabla 10. Niveles de conocimiento didáctico ante la respuesta de Beatriz 53

Tabla 11. Niveles de conocimiento didáctico ante la respuesta de Carlos 54

Tabla 12. Niveles de conocimiento didáctico ante la respuesta de Daniel 55

Tabla 13. Tipo de razonamiento descrito ante la respuesta de Elena 56

Tabla 14. Tipo de razonamiento descrito ante la respuesta de Federico 59

Tabla 15. Niveles de cononcimiento didáctico ante la respuesta de Elena..................64

Tabla 16. Niveles de cononcimiento didáctico ante la respuesta de Federico.............66

Tabla 17. Algunas representaciones sobre el Teorema de Pitágoras 84

Tabla 18. Algunas representaciones de la demostración del Teorema de Pitágoras ...85

Tabla 19. Tipos de demostraciones del Teorema de Pitágoras 88

Tabla 20. Relación entre los objetivos y las competencias PISA 93

Tabla 21. Relación entre los errores y las dificultades asociadas 94

Tabla 22. Vínculo entre los objetivos y errores observados 97

CAPÍTULO 1

CONTEXTUALIZACIÓN DE LA INVESTIGACIÓN

En el primer simposio internacional de Educación Matemática que tuvo lugar en los Andes, en 1993, Luis Rico dejaba un mensaje que, a mi juicio, es básico para emprender el camino de la investigación en Educación Matemática: "(…), la educación matemática propone un campo de trabajo con problemas reales que resolver; no es un invento: enseñar y aprender matemáticas son actividades que tienen sus dificultades y resultan problemáticas;(…)" (Rico, 1998, p. 20).

Con el convencimiento de que las cosas pueden ser de otra manera y que los problemas se pueden resolver, se indaga en el estudio de los mismos. Con las herramientas más adecuadas y templanza, la investigación en Didáctica de la Matemática avanza tratando de producir conocimiento con el que afrontar el campo de problemas que aparece en la actividad social que envuelve a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Las matemáticas son un recurso fundamental, básico en la sociedad, son un lenguaje con el que poder comunicar y un instrumento del pensamiento con el que aprender y comprender el mundo real. Es la única materia estudiada en todas las escuelas del mundo y que cuenta con casi tres milenios de antigüedad. Por eso, la forma de impartirlas requiere de una formación específica, de un desarrollo profesional y de un compromiso con una actividad reglada; requieren de profesionales para ser impartidas, los profesores de matemáticas.

El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas, en España, comienza con una formación inicial pensada para que se permita garantizar no sólo la preparación científica sino también una formación didáctica. Desde el curso 2009/2010 se viene impartiendo un Máster oficial y específico que habilita para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato.

Para darle forma a la contextualización de nuestra investigación comenzamos por contemplar el papel del profesor de matemáticas en la formación inicial revisando algunas de las capacidades que los futuros profesores han de desarrollar durante el máster y que se establecen en la ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, dada por el Ministerio de Educación (2007). Los estudiantes para profesores deben de conocer los contenidos curriculares de la materia así como el conjunto de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, transformando la información en conocimiento para aplicarla (p. 53751).

Los futuros profesores han de adquirir en el máster estrategias y desarrollar habilidades que ayuden al aprendizaje de los alumnos. En su futura profesión requieren de un conocimiento sobre las características de la situación actual y la interrelación de la actividad social, en la que se sumergen, con la realidad social de la época, pues ésta evoluciona y cambia, así como conocer el valor formativo y cultural de la materia que impartirán, transmitiendo una visión dinámica de la misma. Los profesores en formación inicial deberán conocer los contextos y las situaciones en que se usan o aplican los diversos contenidos curriculares, así como también transformar los currículos en actividades de trabajo. También deberán identificar los problemas relativos a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas para poder plantear alternativas y soluciones (p. 53753).

Como se observa, la caracterización y definición que se encuentra sobre algunos aspectos cruciales en la formación profesional como el conocimiento didáctico carecen de especificidad. Podemos encontrarlos en mayor grado de concreción en el módulo específico del Máster en la especialidad de matemáticas donde se imparte la asignatura "Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas".

Tras cursar esta materia, en la Universidad de Granada, los futuros profesores han de ser capaces de planificar y analizar la estructura y prioridades de los temas de matemáticas de secundaria en términos de la organización cognitiva de sus contenidos, de los sistemas de representación que utilizan y del análisis de contextos y situaciones en que se emplean.

Han de enunciar, seleccionar y valorar expectativas de aprendizaje en matemáticas, vincular objetivos y competencias matemáticas, deberán diseñar, seleccionar y secuenciar tareas escolares asociadas con objetivos de aprendizaje y con competencias matemáticas, atendiendo a su riqueza y complejidad. Los futuros profesores deberán detectar limitaciones en el aprendizaje de los contenidos específicos de las matemáticas de secundaria y establecer tareas para diagnosticar errores y dificultades del aprendizaje. En definitiva deben lograr diseñar unidades didácticas de matemáticas para la Educación Secundaria.

Esta asignatura muestra la necesidad de poseer un marco funcional que se use como herramienta en el que todos sus elementos se disponen para generar conocimiento práctico, conocimiento didáctico del contenido, útil para la labor del profesor de matemáticas. El instrumento a partir del cual se construyen las unidades didácticas se basa en el estudio sobre los organizadores del currículo de Rico (1997) y sobre el análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013). El conocimiento didáctico que adquieren nuestros profesores en formación está pues relacionado con la comprensión de este análisis didáctico y su aplicación a diferentes temas matemáticos específicos (Rico y Moreno, 2016).

El conjunto de conocimientos didácticos que nos atañen y que abordamos en este estudio se relacionan con un tema específico de la Geometría, en concreto con el Teorema de Pitágoras. En el sistema educativo actual los contenidos de Geometría son presentados a los estudiantes como el producto acabado de la actividad matemática, que deja en segundo plano los procesos de construcción y de razonamiento en este conocimiento. La enseñanza tradicional de la geometría se enfatiza hacia el estudio memorístico de áreas, volúmenes, definiciones geométricas, teoremas y propiedades, apoyadas en construcciones mecanicistas y descontextualizadas (Gamboa y Ballestero, 2009).

Algunos docentes priorizan la enseñanza de las matemáticas en otras áreas y van desplazando los contenidos de geometría hacia el final del curso, hecho que los lleva, en ciertos casos, a excluir algunos temas o atenderlos de manera superficial (Abrate, Delgado y Pochulu, 2006). Esta situación no encaja con las tendencias actuales, que sugieren oportunidades de aprendizaje donde los educandos participen activamente en el desarrollo de su conocimiento y se apropien de él (Hernández y Villalba, 2001). Las consecuencias de la enseñanza de la geometría bajo el enfoque tradicional se traducen en la concepción de ésta como una disciplina difícil y poco útil para la mayoría de los estudiantes. El libro de texto que se usa en clase presenta, a menudo, actividades geométricas basadas en la resolución de problemas “tipo”. Éste libro, junto a la pizarra del aula, suelen ser los recursos más utilizados para la enseñanza de la geometría.

¿Qué conocimientos didácticos necesita un profesor para que la influencia de su práctica en los aprendizajes de los alumnos sea lo más provechosa posible? Esta cuestión plantea una intervención ambiciosa y casi utópica debido a la multitud de aspectos, circunstancias de diversa índole, que influyen tanto en la transmisión de la materia como en la visión que poseen nuestros escolares de las matemáticas, por lo que comenzamos por caracterizar el conocimiento didáctico mostrado por futuros profesores en formación inicial sobre el Teorema de Pitágoras cuando analizan y describen las interpretaciones de estudiantes de Educación Secundaria. Esta iniciativa puede ser una aproximación en nuestra intención de contribuir de manera activa a la mejora de la enseñanza desde la formación inicial de profesores.

1.1. RELEVANCIA Y PERTINENCIA DE LA INVESTIGACIÓN

La evaluación de la formación matemática de nuestros alumnos españoles arroja una trayectoria de datos que nos deja fuera de aportar un buen ejemplo internacional. En el último informe de PISA (2015), España consigue una puntuación media en matemáticas de 486, 4 puntos menos que el promedio de la OCDE (490) y 7 puntos por debajo del total de la UE (493). En el listado ordenado de los 72 países que han intervenido en esta edición, miembros de la OCDE, España ocupa el puesto 32.

El foco de la evaluación PISA se encuentra en cómo los alumnos pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no sólo en conocer cuales contenidos del currículo han aprendido. Evalúa lo que los alumnos saben y son capaces de hacer.

Apenas el 8% de alumnos españoles alcanza los niveles altos (5 y 6) de rendimiento en matemáticas frente al 10% de la OCDE. Este resultado indica una proporción baja de alumnos excelentes. En el extremo opuesto descubrimos que uno de cada cuatro alumnos españoles no posee un dominio básico de la competencia matemática.

Extremadura, Murcia, Andalucía y Canarias tienen resultados significativos por debajo del promedio de España y la OCDE (INEE, 2016).

Los resultados de las evaluaciones aplicadas por el INEE, y de las pruebas internacionales PISA, muestran que, si bien hay avances en la calidad de los aprendizajes en Matemáticas en comparación con los resultados de PISA (2012), la distancia que separa los resultados obtenidos con los esperados es muy grande. Aunque este resultado en cuanto a la proporción de estudiantes que no alcanzan el nivel básico en matemáticas es muy similar al del promedio de los países de la OCDE no podemos relajarnos y debemos de seguir esforzándonos en la mejora de estos resultados para asegurar una educación matemática de calidad que promueva el éxito de los ciudadanos en la sociedad.

De forma más pormenorizada nos fijamos en los resultados de nuestros alumnos en la sub-área de contenido matemático "espacio y forma", bloque más cercano a Geometría, donde encontramos una puntuación significativamente inferior, (490), a todas las sub-áreas de contenido restantes; cantidad (495), incertidumbre y datos (493) y cambio y relaciones (493). A los alumnos de 15 años les resultan más complejas las tareas relacionadas con el contenido de espacio y forma siendo la proporción de alumnos en los niveles altos de la escala claramente inferior al de la OCDE (INEE, 2013). Observamos que deben mejorarse las competencias de los alumnos intensificando el proceso de enseñanza y aprendizaje para aumentar el rendimiento de los alumnos en éste área.

Con la situación que nace a la luz de los datos mencionados cabe una reflexión en cuanto al sistema educativo en donde se incluye, sin duda, la formación inicial del profesor de matemáticas como una de las partes fundamentales cuando hablamos de la calidad de la enseñanza obligatoria. Nos interesamos por el conocimiento didáctico que expresan los futuros profesores en torno al Teorema de Pitágoras desde esa primera formación didáctica. Aunque este tema de las matemáticas escolares es más afín al bloque de Geometría, su estudio puede contribuir a desarrollar habilidades para visualizar, pensar críticamente, intuir, resolver problemas, conjeturar, razonar deductivamente y argumentar de manera lógica en procesos de prueba o demostración, desde los primeros cursos de la educación secundaria obligatoria (Jones, 2002).

Asimismo, el NCTM (2000) señala que la geometría constituye un terreno fértil para el desarrollo de las habilidades para generar razonamiento y justificación. Es decir, el conocimiento geométrico provee de recursos lógicos al estudiante que le permite hacer justificaciones, pruebas o validaciones con mayor rigor matemático, que pueden ser aprovechadas cuando desee realizar este mismo tipo de conjeturas en otras áreas de las matemáticas (Ballestero y Gamboa, 2009. p. 116).

Esta disciplina es la ciencia del espacio, vista como una herramienta para describir y medir figuras, como base para construir y estudiar modelos del mundo físico y otros fenómenos del mundo real. La Geometría proporciona un método para las representaciones visuales de conceptos y procesos de otras áreas en matemáticas y en otras ciencias (Hernández y Villalba, 2001), formando parte sustancial del entendimiento. Es un instrumento que le permite al ser humano resolver problemas de diversos tipos y comprender un mundo que le ofrece una amplia gama de variadas formas geométricas.

En el estudio comparativo internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en educación primaria y en secundaria obligatoria (TEDS-M), coordinado por el INEE, se pretende clasificar el conocimiento matemático de los futuros profesores en cuatro dominios de contenido; números, geometría, álgebra y análisis de datos y en tres dominios cognitivos; conocer, aplicar y razonar. Por otra parte, el conocimiento pedagógico de contenido en matemáticas se organiza en torno al conocimiento curricular en matemáticas, el conocimiento para la planificación de la enseñanza y el aprendizaje y la puesta en práctica de esa planificación (Rico, Gómez y Cañadas, 2009).

Los resultados de España en cuanto a los conocimientos sobre didáctica de la matemática en maestros, (492 puntos), están más cercanos a la media que los correspondientes a conocimientos matemáticos (481), pero aún por debajo de los países de nuestro entorno. España se sitúa en el límite inferior de la franja de países con resultados medios, que incluye a EE.UU., Suiza, Noruega y Alemania entre los países próximos a nuestro entorno socioeconómico y cultural. España no ha participado en el proyecto TEDS a nivel de secundaria por lo que no se ha podido profundizar en este aspecto y es un esfuerzo necesario. Este dato refuerza el aporte que pueda brindar esta investigación.

La necesidad de seguir ahondando en la caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza en la educación secundaria obligatoria, en sus diferentes dominios de las matemáticas escolares, se hace patente a través de los datos y argumentos expuestos. Como se ha indicado la relevancia de examinar este conocimiento se produce a nivel internacional.

1.2. ÁREA PROBLEMÁTICA

La investigación que desarrollamos se enmarca en el área problemática que cubre la dimensión del conocimiento del profesor de matemáticas, en concreto, el conocimiento didáctico del contenido exhibido por el futuro profesor cuando se involucra al Teorema de Pitágoras. Atendemos al papel del profesor desde su formación inicial, centrándonos en el conocimiento que domina y en las destrezas que posee, observando las diferentes relaciones que establece y la forma en la que muestra ese conocimiento en relación a la enseñanza de un tópico en concreto, el Teorema de Pitágoras. Nos preocupamos entonces por comprender los hallazgos encontrados sobre ese conocimiento cuando forma parte principal la geometría desde la primera formación del profesor de matemáticas.

Se pretende explorar como usan ese conocimiento los futuros profesores para explicar, justificar las estrategias, los razonamientos y procedimientos que utilizan los alumnos al tratar con tareas que tienen que ver con el Teorema de Pitágoras. El conocimiento didáctico que se adquiere y se manifiesta en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria es un tema que interesa tanto a los profesores de matemáticas en ejercicio, a los formadores de profesores como a los investigadores en Didáctica de la Matemática.

1.2.1. OBJETIVOS DE LA INVESTIGACIÓN

Planteamos los objetivos de la investigación. Partimos de un objetivo general que lograremos a partir de otros específicos.

OBJETIVO GENERAL

O. Explorar y describir, caracterizando el conocimiento didáctico que manifiestan los profesores en formación cuando se les somete al análisis de tareas desarrolladas por alumnos en torno al Teorema de Pitágoras.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

O.1. Identificar las oportunidades de aprendizaje que plantean los futuros profesores atendiendo a las situaciones, los contextos y las características que aparecen en las tareas que proponen sobre el Teorema de Pitágoras.

O.2. Identificar en sus explicaciones la interpretación del Teorema de Pitágoras que toman los alumnos en la resolución de tareas sobre el tópico.

O.3. Identificar cómo interpretan los procesos de razonamiento de los alumnos en torno a la demostración del Teorema.

O.4. Diseñar un instrumento que nos permita obtener la información requerida con la que finalmente emitir unos resultados.

CAPÍTULO 2

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

2.1. ANTECEDENTES

La revisión exhaustiva de la producción del grupo *Psychology of Mathematics Education*, (PME), refleja que, cada vez más, los estudios sobre la educación de la geometría están encaminados a indagar sobre el impacto que la tecnología, especialmente las formas de software de geometría dinámica, tiene en la enseñanza y el pensamiento geométrico de los alumnos. En síntesis aparecen secciones que tiene que ver con el razonamiento espacial, la visualización y medición geométrica, las demostraciones y razonamientos geométricos, conocimiento de los estudiantes, desarrollo y conocimiento geométrico de los profesores, la enseñanza de la geometría y el diseño y uso de tareas geométricas. Los estudios sobre el conocimiento geométrico de los profesores no atienden a aspectos didácticos de la geometría sino que tienden a evaluar el conocimiento matemático-geométrico que posee el profesor de matemáticas en torno a diferentes aspectos de la geometría. Ball y Bass (2003) aportan datos sobre el desarrollo del conocimiento geométrico de los estudiantes para profesores pero no sobre su conocimiento didáctico.

Huang (2005) investigó cómo los profesores en Hong Kong y Shanghai enseñaban el teorema. Los resultados mostraron que los maestros de Hong Kong orientaban la justificación del Teorema a la verificación visual, mientras que los maestros de Shanghai a la prueba matemática algebraica. La tarea usada para la demostración del teorema se presenta en la figura 1.

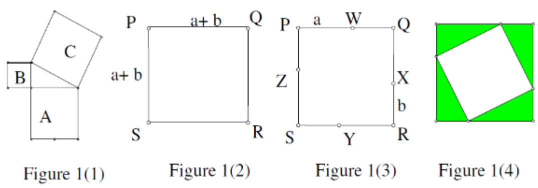


Figura 1. Verificación o prueba (Huang, 2005)

Cuando los maestros de Hong Kong enseñaban el Teorema de Pitágoras, hacían hincapié en la prueba geométrica como una buena manera de explorar y dominar el método matemático y desarrollar la capacidad de pensar. En el plan de estudios en Shanghai, el énfasis se pone en la presentación abstracta y lógica, propia del pensamiento deductivo. Aquellos estudiantes que tuvieron la oportunidad de apreciar el teorema de forma visual mediante manipulaciones y transformaciones y probarlo de ciertas formas presentaron una mayor comprensión del teorema.

Encontramos propuestas didácticas para mejorar el rendimiento de los estudiantes en el estudio de la geométrica. Zaslavsky, Harel y Manaster (2006) investigaron sobre la utilización de diferentes ejemplos para explorar y determinar el conocimiento pedagógico que empleaba el profesor en la práctica sobre el Teorema de Pitágoras y como influía en el aprendizaje de los alumnos. Otros autores Lipowsky, Rakoczy, Pauli, Drollinger-Vetter, Klieme y Reusser (2009), estudiaron la calidad de la enseñanza de la geometría y su impacto a corto plazo sobre la comprensión de los estudiantes sobre el Teorema de Pitágoras.

En cualquier caso, aunque el estudio sobre el conocimiento didáctico de los futuros profesores sobre el Teorema de Pitágoras no es abundante, la realidad es que este resultado sigue estando de actualidad y acapara el interés de investigaciones más recientes como la de Zazkis y Zazkis, (2016), que trata el estudio de las concepciones de futuros profesores sobre la prueba con el Teorema de Pitágoras. Lo que sí sigue generando avances y literatura son diferentes propuestas de demostraciones de este teorema (Brown, 2003; Heo, 2015) y, para algunas de ellas, también se desarrollan experiencias de aula para fomentar un aprendizaje significativo en los escolares (Burk, 1996; Roscoe, 2014).

Las teorías del conocimiento matemático del profesor comenzaron con el trabajo de Shulman y sus colegas en los años 1980, incluyendo una concepción tripartita del conocimiento de los contenidos que los profesores deben adquirir. Shulman (1986, p.9), se basa en que los profesores no sólo deben poseer el conocimiento de la materia, sino también un conocimiento pedagógico del contenido, así como un conocimiento curricular para sustentar el éxito profesional de un profesor. Hill, Rowan y Ball (2005), destacan que “la eficacia en la enseñanza radica no sólo en el conocimiento que un profesor ha acumulado, sino también en cómo usa ese conocimiento en el aula” (pp. 375-376).

Desde que Shulman abriera el camino de la distinción entre el conocimiento del contenido matemático y el didáctico, se han supeditado muchas investigaciones relacionadas con las ideas del autor. Gómez (2007) señala las aportación de Ball y Bass (2000) donde se reconoce la importancia de conjugar el conocimiento matemático y el conocimiento pedagógico del profesor en la que la pregunta seguía siendo ¿Cuál es el conocimiento matemático que se necesita para enseñar? (p. 88).

Por ello, la formación inicial de profesores ha sido foco de investigación en los últimos años. Como alude Lupiáñez (2009), se han realizado importantes avances centrados en el conocimiento que un profesor adquiere y desarrolla en los programas formativos que se imparten. El autor destaca los trabajos de Cooney (1994), Simon (2000), Jaworski (2002) y Kilpatrick (2003), donde aparecen cuestiones del tipo; ¿Qué tipos de conocimientos necesitan los profesores para ser eficientes? (Cooney 1994), ¿Cómo se desarrolla el conocimiento pedagógico? ¿De qué manera los futuros profesores enlazan sus conocimientos didácticos para planificar eficazmente la enseñanza en el aula? (Jaworski, 2002).

Avanzando un poco en el tiempo, encontramos ideas en relación con el conocimiento matemático necesario para la enseñanza donde Stacey (2008) señala que dicho conocimiento involucra cuatro componentes que deben ser parte de las finalidades de los programas de formación de profesores: (a) conocer matemáticas de un modo que tenga cualidades especiales para la enseñanza; (b) tener experiencias matemáticas en la resolución de problemas y modelizar el mundo real; (c) tener conocimiento acerca de las matemáticas, incluyendo su historia y los desarrollos actuales y (d) saber cómo enseñar matemáticas (p. 87). Leikin (2008) evidencia la necesidad de entremezclar e integrar las distintas componentes del conocimiento del profesor en su formación (p. 66).

En uno de los estudios específicos realizados por el TEDS-M, abordan la pregunta de investigación “¿Cuál es el nivel y la profundidad del conocimiento matemático y su didáctica que adquieren los futuros profesores de Educación Primaria y Educación Secundaria Obligatoria al final de su programa de formación?” (Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck y Rowley, 2008, p. 13). Indagan sobre qué conocimientos tienen y qué saben hacer los profesores en formación de diversos países, además del impacto que los programas tienen en la formación del profesorado. Rojas y Flores (2014) mencionan que esta problemática se retoma en el libro publicado *International perspectives on teacher knowledge, beliefs and opportunities to learn. TEDS-M results* (Blömeke, Hsieh, Kaiser y Schmidt, 2014), en el cual todos los estudios presentados se centran en la importancia de profundizar en el conocimiento matemático para la enseñanza.

La investigación sobre el conocimiento matemático para la enseñanza del profesor se ha centrado en caracterizar y refinar los tres tipos de conocimiento; contenido, didáctico y curricular. Se han hecho varios intentos para avanzar en la caracterización del conocimiento del profesor de matemáticas. Ente los modelos teóricos que han surgido de tal intención, todos ellos basados en la práctica del profesor en el aula, se puede destacar el modelo MKT; que desarrollado en la Universidad de Michigan y liderado por Deborah Ball, contextualiza el conocimiento matemático para la enseñanza como el conocimiento matemático que los profesores usan en el aula para producir aprendizaje y crecimiento en los alumnos. En ese marco se distinguen los dominios de conocimiento del contenido matemático (MK) y conocimiento didáctico del contenido (PCK).

EL modelo de Tim Rowland y sus colaboradores (Rowland, 2008), Knowledge Quartet (KQ), presentan un marco teórico que surge inductivamente, a partir del análisis de clases impartidas por estudiantes para profesores donde se estudia el conocimiento de los contenidos matemáticos de los profesores en formación de Educación Primaria y las formas en que este conocimiento se manifiesta, tanto en los procesos de planificación como en la enseñanza. El modelo está compuesto por cuatro dimensiones: fundamento, transformación, conexión y contingencia.

Otros modelos recientes son el MTSK (Mathematical Teacher Specialised Knowledge), de la Universidad de Huelva, dirigido por Juan Carrillo y desarrollado a partir del modelo MKT (Carrillo, 2014). El EOS (Enfoque Ontosemiótico) del grupo de investigación de la Universidad de Granada, coordinado por Juan Díaz Godino que estudia el conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas (Godino, Batanero y Font, 2007) y el modelo del Análisis Didáctico del grupo de Luis Rico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013) desarrollado a partir de las nociones de currículo y de organizadores del currículo (Rico, 1997). Este último modelo es el que asumimos en el marco de nuestra investigación.

El conocimiento didáctico del contenido integra varias componentes que se han desglosado y se han nombrado de diferente forma en distintos modelos teóricos sobre el conocimiento del profesor de matemáticas. Lo importante a señalar es que al comparar los modelos encontramos elementos comunes, como la división entre conocimiento matemático y conocimiento didáctico del contenido; todos ellos siguiendo las ideas de Shulman (1986).

2.1.1. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO SOBRE TEMAS ESPECÍFICOS

A pesar de que las investigaciones sobre el conocimiento que debe tener un profesor de matemáticas para que su enseñanza sea efectiva ha sido motivo de estudio en los últimos años, las investigaciones que emergen, de esta búsqueda bibliográfica, orientadas al diseño de instrumentos que permitan explorar aspectos sobre el conocimiento didáctico de los profesores de secundaria en formación inicial, sobre temas específicos, no son numerosas.

Podemos nombrar la de Pino- Fan, Godino y Font (2010), cuya motivación del estudio fue dar respuesta a la pregunta: ¿Qué debería conocer un profesor en formación inicial para que su enseñanza de las derivadas tenga la mayor idoneidad didáctica posible? El objetivo de la misma estaba encaminado a avanzar en la reconstrucción del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada utilizando herramientas teóricas del enfoque ontosemiótico.

Se encuentra mayor afluencia de estudios con esta característica en el sector de profesores en ejercicio o en maestros de educación primaria en formación inicial. Tal es el caso del estudio de Gutiérrez, Rico y Gómez (2014), su objetivo fue describir y caracterizar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros maestros de primaria sobre números y operaciones, en el estudio TEDS-M en relación con el resto de países participantes.

La particularidad de nuestra investigación en cuanto al interés por explorar el conocimiento didáctico que manifiestan los futuros profesores en formación inicial sobre el Teorema de Pitágoras carece de antecedentes a los que podamos recurrir para reproducir metodología o comparar circunstancias y finalmente resultados del estudio.

La revisión de la literatura que hemos realizado revela un interés por indagar sobre las características que ha de tener el conocimiento necesario para enseñar matemáticas. En la actualidad, la investigación sigue avanzando de cara a profundizar y dar respuesta a las cuestiones que tienen que ver con cuál es el concomimiento didáctico necesario para una enseñanza eficaz que ha de alcanzar el profesor de matemáticas. Los estudios en la dirección de dar respuesta a esa cuestión ayudaran al desarrollo profesional del profesor de matemáticas mediante la mejora de la formación inicial que lo involucra.

2.2. MARCO TEÓRICO

Dentro de las investigaciones que se llevan a cabo sobre la formación de profesores, nos centramos en indagar en el conocimiento didáctico del contenido que muestran los futuros profesores de matemáticas en el caso particular del Teorema de Pitágoras. Pretendemos observar las capacidades y habilidades didácticas que muestran los futuros profesores en formación inicial ante los razonamientos y estrategias que usan alumnos de secundaria al resolver tareas sobre este tema de las matemáticas escolares.

En toda investigación es fundamental definir con precisión los términos con los que se trabajan para que la información sea transmitida con la mayor claridad y coherencia posible. Como se pone de manifiesto en los antecedentes recogidos en la revisión bibliográfica, el conocimiento didáctico del contenido es un importante componente del conocimiento base de la enseñanza. Así la investigación en formación de profesores, desde la educación matemática, insiste en definir los límites del concepto y los propósitos y fines de su estudio para que desde la formación inicial comience el desarrollo profesional de los futuros profesores.

Esto nos lleva a desarrollar dos ejes fundamentales en este capítulo: el conocimiento didáctico del futuro profesor de matemáticas y el análisis didáctico como método de investigación desarrollado para el Teorema de Pitágoras.

2.2.1. EL CONOCIMIENTO DIDÁCTICO DEL CONTENIDO MATEMÁTICO

Durante la experiencia del máster en Didáctica de las Matemáticas se ha observado un esfuerzo por definir y delimitar el significado del conocimiento del contenido matemático y del conocimiento didáctico del profesor de matemáticas. La noción de conocimiento didáctico del contenido dio lugar a profundizar en nuevas líneas de indagación en el área del conocimiento del profesor, al distinguir un conocimiento exclusivo de la enseñanza que es específico al contenido temático de la misma (Gómez, 2007).

En consonancia con la noción de currículo, Gómez (2002) y Lupiáñez (2009), están de acuerdo en un significado operativo de la noción de *conocimiento didáctico* como el "conocimiento que el profesor pone en juego y construye cuando realiza el análisis didáctico" (Gómez, 2002, p. 285). Aquí, esta definición cobra un matiz un poco diferente pues nos interesamos por investigar el conocimiento didáctico del profesorado en formación en función de cómo transforma su conocimiento matemático en representaciones didácticas y lo interpreta y utiliza para comprender los razonamientos y estrategias que emplean los alumnos ante su aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

El profesor debe tener un conocimiento profesional que se distingue del conocimiento académico de los formadores matemáticos (en su naturaleza teórica, declarativa o formal), y también del común de las personas (Ponte, 2012). Este conocimiento está orientado para una actividad práctica, para la enseñanza de las matemáticas a un grupo de alumnos, sobre la base de los conocimientos teóricos sobre las matemáticas, la educación en general y la enseñanza de las matemáticas (p. 3).

El conocimiento didáctico que pretendemos caracterizar, en el tipo de investigación que desplegamos, lo percibimos como un conocimiento integrado tal y como lo definen Rico, Lupiáñez y Molina (2013) en el modelo de Análisis Didáctico. Este conocimiento didáctico alberga diferentes facetas organizadas a nivel curricular y concretadas en el análisis de contenido, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción y en el análisis de evaluación.

Para que el estudio sea abarcable al nivel en el que se desarrolla, hemos tratado únicamente los aspectos del conocimiento didáctico recogidos en el análisis de contenido y en el cognitivo (Lupiáñez, 2013). Así, exponemos que este conocimiento se relaciona con el contenido matemático específico que se ha de obtener y poseer para la enseñanza, involucrando el conocimiento sobre los objetos matemáticos escolares que se tratan, su significado, se relaciona con la cognición de los estudiantes incluyendo el conocimiento de cómo ellos razonan, piensan y aprenden un contenido matemático y también sobre las condiciones y orientación del aprendizaje matemático escolar. Este componente involucra, además, el conocimiento de cómo los estudiantes adquieren los contenidos matemáticos, las dificultades y los éxitos que enfrentan en los procesos de aprendizaje.

El conocimiento didáctico para la enseñanza se manifiesta mediante la profundidad del análisis, por parte del profesor en formación, de las estrategias utilizadas y los razonamientos involucrados en la resolución de una tarea matemática por parte de los educandos, pudiendo incluir esa experiencia en el diseño de métodos alternativos para futuras explicaciones argumentativas. Se manifiesta en el uso de diferentes representaciones contenidas en los enunciados de las tareas, en el bagaje ofrecido de situaciones donde se aplica el tópico a enseñar, en el modo de interpretar los conceptos y procedimientos de resolución que plantean los alumnos. Para ello, el profesor debe reunir una sólida base de conocimientos específicos para la enseñanza.

2.2.2. EL MODELO DEL ANÁLISIS DIDÁCTICO

Nos es útil sentar la investigación sobre el modelo teórico del análisis didáctico que se fundamenta en los trabajos desarrollados por el grupo «FQM193. Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico» del Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada (Gómez, 2007; Lupiáñez, 2009; Rico, 1997; Rico, Lupiáñez y Molina, 2013), que lleva a definir, concretar y precisar variadas categorías e indicadores de conocimiento para aproximarnos a una comprensión profunda del conocimiento didáctico del profesor en la formación inicial.

Añadimos que esta herramienta de análisis es propia de nuestro contexto de investigación, por la precisión que presenta al manejar una trama de conocimientos que requiere el profesor para enseñar matemáticas sobre un tema o tópico determinado y específico. El modelo del análisis didáctico nos permite avanzar en el sentido de investigación que se ha definido.

El término "análisis didáctico" se utiliza en diferentes contextos con propósitos variados. Como indicábamos, en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria se usa como un recurso, un procedimiento para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas. Se transmite como una herramienta con la que el futuro profesor puede organizar, estructurar y desarrollar las unidades didácticas de cada tema específico de su programación docente. Además éste análisis evalúa, durante la puesta en marcha de esa unidad específica, si la organización y la planificación de cómo iba a ser el aprendizaje son las adecuadas o por el contario hay que modificarlas.

No obstante, el análisis didáctico es un análisis sistemático de las matemáticas escolares y es de utilidad más allá de la esfera de la formación inicial de profesores. En esta investigación rescatamos la orientación del análisis didáctico como método de investigación, sustento teórico del estudio. Hay que diferenciar este uso del tratamiento basado en el diseño de unidades didácticas para los profesores en formación. Si bien, con las dos modalidades se genera conocimiento didáctico sobre un tema matemático específico, el enfoque que manejamos como marco teórico nos permite interpretar resultados y nos ayuda a producir el instrumento usado para obtenerlos. Nos guía en la identificación del conocimiento didáctico del contenido matemático sobre el Teorema de Pitágoras.

En cualquier caso, en el análisis didáctico interviene un estudio riguroso, cuidadoso y concienzudo que se concreta en el análisis conceptual, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción y se valora con el análisis de actuación. Este análisis didáctico detalla minuciosamente el significado de los contenidos matemáticos, las condiciones y la orientación del aprendizaje matemático, la planificación e implementación de la enseñanza de las matemáticas y los aprendizajes logrados. Estos objetos de estudio se organizan desde el currículo mediante la estructura conceptual, las distintas representaciones con los que transmitir los conceptos, sus modos y sentidos de uso, las expectativas de aprendizaje, las posibles limitaciones, errores y dificultades que puedan tener los alumnos en su aprendizaje, las distintas tareas, materiales y recursos que ayuden a salvar dificultades, solventar errores y facilitar la comprensión de los conceptos.

El estudio en función de los organizadores curriculares que establece el análisis didáctico sobre un tema concreto de las matemáticas escolares permite profundizar en el conocimiento didáctico que poseen los futuros profesores cuando se ven envueltos en una práctica concreta como en la de esta investigación. Este estudio es un ejemplo de cómo parte del análisis didáctico del contenido matemático escolar del Teorema de Pitágoras puede emplearse para identificar características del conocimiento didáctico declarado por los profesores en formación.

Como refiere Gómez (2007), el primer análisis que llevaremos a cabo, el análisis de contenido, nos permite como investigadores fundamentar conceptualmente el contenido matemático objeto de la investigación. Con el análisis cognitivo, y basándonos en la información que surge del análisis de contenido, podemos organizar de manera sistemática las capacidades que corresponden a ese contenido. Nos centramos en la parte señalada, dada en la figura 2, del ciclo correspondiente al análisis didáctico.

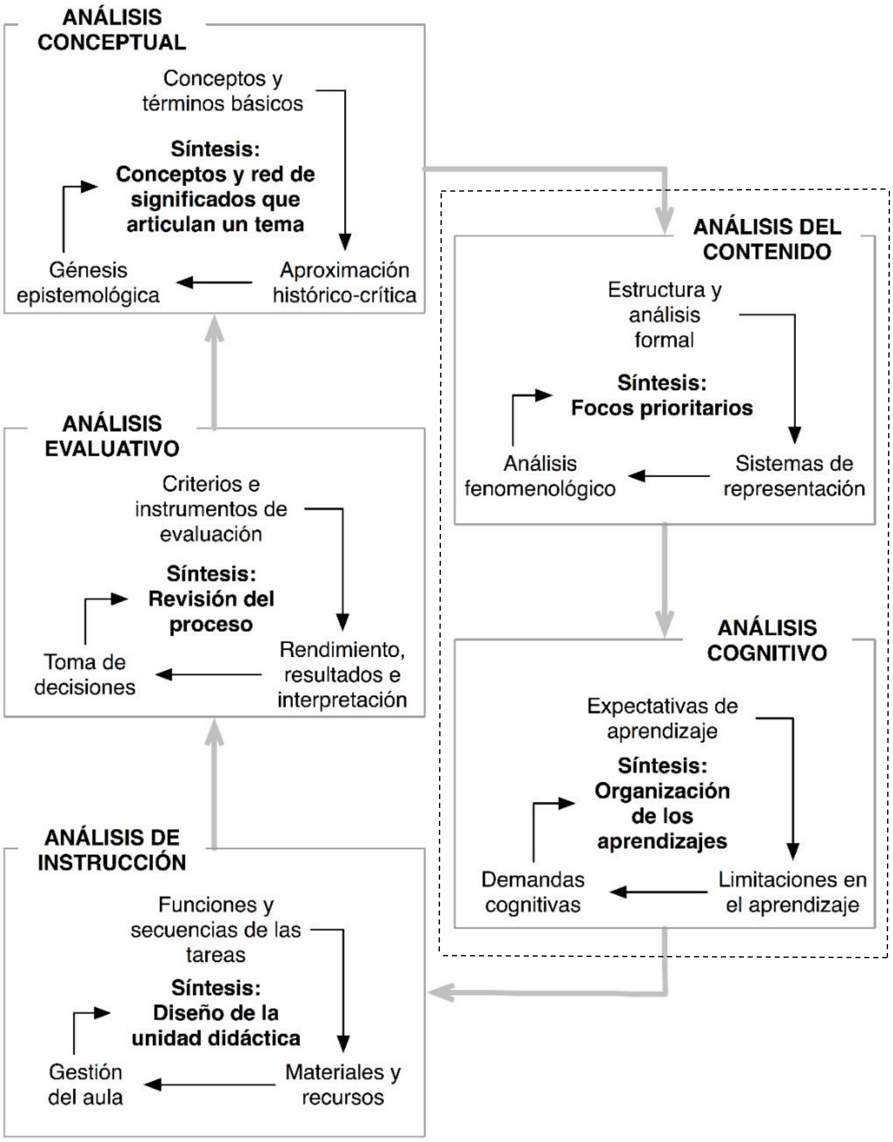


Figura 2. Parte del ciclo del análisis didáctico que estudiamos en nuestra investigación (Lupiáñez, 2013, p. 84)

2.2.3. ANÁLISIS DEL CONTENIDO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Con el análisis de contenido nos situamos en la dimensión conceptual de las matemáticas escolares donde comienza el estudio sobre la organización de los significados que intervienen en un nivel educativo y en un tema específico de matemáticas. Mediante este análisis se clasificará el contenido matemático que interviene en el tratamiento del Teorema de Pitágoras y se categorizará atendiendo a tres organizadores; estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos o modos de uso. Además se considera la historia de las matemáticas como un organizador más, que aportará información no sólo a este análisis sino también al resto de reflexiones de la parte del análisis didáctico. En el anexo 1 recogemos toda esta información para el tema del Teorema de Pitágoras. En este punto presentamos los sentidos y modos de uso como material necesario que nos permite fundamentar el cuestionario y la interpretación de los datos en esta investigación.

En un primer foco de acción en nuesta investigación encontamos que el Teorema de Pitágoras es uno de los temas matemáticos que obedece a una terna que contextualiza conceptuamente su tratamiento matemático en didáctica:

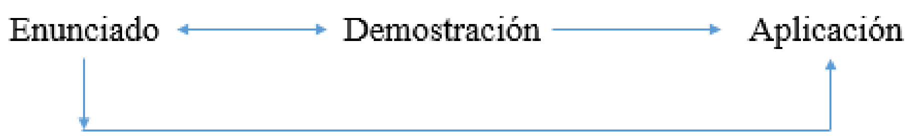


Figura 3. Contextualización conceptual del teorema

El tópico ofrece una relación entre su enunciado, como la interpretación del mismo en dos vertientes; relación métrica entre lados o entre áreas, su demostración geométrica y algebraica y las múltiples aplicaciones reales que lo acogen. El sentido de las flechas recoge la argumentación lógica, deductiva de la demostración, y también el uso del resultado en una variedad de situaciones. Este tema de la educación secundaria obligatoria se presta a una organización conceptual determinada, como lo es la de un teorema.

SENTIDOS Y MODOS DE USO

En este apartado se recogen las funciones que tiene el conocimiento de los conceptos y procedimientos expuestos en el anexo 1. Se hablará así de los contextos y cuestiones a los que da respuesta este conocimiento y las situaciones en las que se aplica.

A) CONTEXTOS

El teorema de Pitágoras se usa para calcular distancias y así conocer medidas. Mediante los conceptos y procedimientos que se han identificado para el estudio del Teorema de Pitágoras, ver anexo 1, se pueden dar respuesta a las siguientes cuestiones:

- Calcular un lado de un triángulo de un rectángulo conociendo los otro dos.
- Calcular un segmento de una figura plana a partir de otros que, con él, formen un triángulo rectángulo. Cálculo de medidas desconocidas e inaccesibles
- Calcular áreas. Cálculo de figuras semejantes y equivalentes

Estos contextos de aplicación se encuentran en gran variedad de situaciones matemáticas y de la vida real.

B) SITUACIONES

El Teorema de Pitágoras es de gran utilidad en multitud de aplicaciones en diferentes situaciones de la vida. Este resultado tiene implicaciones en diferentes ámbitos en la actualidad. Las categorías seleccionadas para su utilización corresponden a situaciones personales, profesionales, sociales y científicas. Reflejan una amplia variedad en la que los individuos pueden encontrarse con oportunidades matemáticas. Las situaciones en las que se aplica el Teorema de Pitágoras son diversas. Las situaciones en las que aparecen se clasifican según PISA (INEE, 2013) y pueden involucrar los siguientes ejemplos:

- Situaciones personales: deportes; altura de la canasta, dimensiones de una mesa de ping-pong, canchas o pistas. Estas situaciones se presentan en actividades de entretenimiento o juego que son del propio individuo y que se mantienen con su grupo de iguales o su familia.
- Situaciones profesionales. Estas situaciones quedan un poco más alejadas de la vida del alumno. Pertenecen al campo laboral y obteniéndose ejemplos como en la construcción (tejados, rampas); náutica: posición de la embarcación. (Triangulación).
- Situaciones sociales: entorno; distancia entre lugares, balística: trayectorias de proyectiles. Las situaciones sociales involucran a la comunidad de forma general.
- Situaciones Científicas: se usa el Teorema de Pitágoras para la definición de las funciones trigonométricas seno, coseno y tangente de un ángulo. Esto tiene multitud de aplicaciones en el ámbito de la física. Por ejemplo: determinación de la trayectoria de un misil o de un bala, movimiento parabólico, es un uso de la

trigonometría en función de la utilidad del teorema de Pitágoras. Se pretende exactitud para dar en el blanco. Otro uso se refleja en los diagramas de cuerpo libre que tan usado es en física para determinar las fuerzas sobre un sólido rígido. Muy usado es en el cálculo de la norma de un vector. Otro ejemplo viene dado en la Geofísica: localizar el epicentro de un terremoto, se triangula y se calcula la posición mediante el teorema. Su uso para la localización es esencial en ámbitos como la Astrofísica o la Cosmología cuando se conocen dos puntos de referencia. Además de su uso en Topografía, Cartografía y Geodesia.

El conocimiento sobre la multitud de situaciones en las que aparece el Teorema de Pitágoras forma parte del conocimiento didáctico que ha de poseer o adquirir un profesor de matemáticas para que la enseñanza del tópico sea lo más rica posible consiguiendo un aprendizaje eficaz. Usaremos la información que nace de esta parte del marco teórico de manera deductiva en el análisis de los resultados de este estudio.

El estudio en profundidad de este resultado que lleva el nombre de Teorema de Pitágoras permitirá a los profesores de matemáticas crear contextos adecuados para poder enseñar mediante problemas matemáticos que tengan un contexto significativo para los estudiantes.

2.2.4. ANÁLISIS COGNITIVO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

En esta dimensión cognitiva nos interesamos por el aprendizaje del estudiante organizando la información emergente de este estudio en expectativas, limitaciones y oportunidades de aprendizaje. Puede verse la parte que completa al análisis cognitivo en el anexo 1. Aquí presentamos las expectativas y oportunidades de aprendizaje que no son útiles en el diseño del cuestionario y en la interpretación de nuestros resultados.

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

En primer lugar se revisan las intenciones y fines curriculares. El currículo actual pretende formar ciudadanos competentes para la vida social, personal y profesional. Para tal fin aparece un modelo de currículo basado en competencias clave que son transversales a todas las materias educativas. Se define la competencia como la capacidad de responder a demandas complejas y llevar a cabo tareas diversas de forma adecuada. Supone un conjunto de habilidades o destrezas prácticas, conocimientos, motivación, valores éticos y actitudes que se movilizan conjuntamente para lograr una acción eficaz (OCDE, 2005, p. 8). Este es el carácter funcional del currículum actual: las competencias se desarrollan a largo plazo y para su consecución se establecen unos objetivos a lograr a corto plazo que aseguren el desarrollo de esas competencias.

En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato aparecen como expectativas los objetivos y capacidades en diferentes niveles de concreción (Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, 2007). Desde esta perspectiva se pretende desarrollar especialmente lo que se entiende por competencia matemática: habilidad para desarrollar y aplicar el razonamiento matemático con el fin de resolver problemas diversos en situaciones cotidianas; en concreto, engloba los siguientes aspectos y facetas: argumentar, modelar y razonar de forma matemática, plantear y resolver problemas, representar entidades matemáticas, utilizar los símbolos matemáticos, comunicarse con las Matemáticas y sobre las Matemáticas, y utilizar herramientas tecnológicas.

Esta perspectiva nos posiciona de manera clara ante la forma de apreciar el conocimiento didáctico que posee un futuro profesor en base a o que se pretende con su enseñanza.

La competencia matemática se desgrana según las competencias propuestas por el marco teórico del proyecto PISA (2012). Su uso permite profundizar de una manera más efectiva en la enseñanza de las matemáticas ya que desglosa la competencia matemática en siete indicadores claramente focalizados en diferentes facetas clave de la matemática escolar y permite dirigir mejor la enseñanza para lograr la finalidad del currículo. A continuación se caracterizan cada una de ellas, especificando más adelante cómo con el Teorema de Pitágoras se puede contribuir a su desarrollo:

C1. Razonar y argumentar: es una competencia que a priori puede desarrollarse con cualquier acción matemática pues se refiere a la involucración del pensamiento lógico para explorar y vincular los elementos de un problema para hacer inferencias a partir de ellos.

C2. Matematizar: esta competencia se trata cuando se transforma un problema definido en el mundo real de una forma matemática. Hay situaciones de la vida cotidiana que se trasforman matemáticamente mediante el *Teorema de Pitágoras*.

C3. Elaborar estrategias para resolver problemas: el plan o la estrategia utilizada para resolver un problema ha de ser efectiva, se necesita de habilidad para reconocer y formular.

C4. Representar. Las demostraciones geométricas son formas de demostrar el *Teorema de Pitágoras* que involucran el dominio de una representación que es gráfico-geométrica.

C5. Usar lenguaje formal, técnico y simbólico y las operaciones: implica comprender, interpretar, manipular y usar expresiones simbólicas dentro de un contexto matemático (incluyendo expresiones y operaciones aritméticas). A la hora de resolver ecuaciones usando el *Teorema de Pitágoras* se estará contribuyendo al desarrollo de esta competencia.

C6. Comunicar: tras la comprensión de un problema puede que sea necesario presentar la solución, comunicar lo resuelto mediante una explicación o una justificación. El desarrollo de esta competencia aparece cuando explicas algo, cuando comunicas se muesta un grado extra de profundidad en la comprensión. Interpretación y veracidad de resultados será algo que se pueda trabajar desde el tema del *Teorema de Pitágoras*.

C7. Usar herramientas matemáticas: implica conocer y poder usar diversas herramientas que ayuden en la actividad matemática. Durante el estudio del *Teorema de Pitágoras* se usará la calculadora y distintos recursos como por ejemplo *GeoGebra*[1].

El currículo marca unas intenciones generales mediante competencias que se consiguen a largo plazo. Estas intenciones son ambiciosas y necesitan definirse más a partir de objetivos que se lograrán a corto plazo y mediante las oportunidades de aprendizaje. La

[1] https://www.geogebra.org/?lang=es

competencia matemática que se desarrolla con esas oportunidades de aprendizaje contribuye a que los individuos sean conscientes del papel que desempeñan las matemáticas en el mundo y les ayuda a emitir los juicios y las decisiones bien fundadas que se exigen a los ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos (OCDE, 2005).

OPORTUNIDADES DE APRENDIZAJE

Las oportunidades de aprendizaje son el principal vehículo para alcanzar las expectativas planteadas desde el currículo. Se brindan mediante las tareas matemáticas que el profesor propone a sus escolares. Las tareas matemáticas escolares, vistas como demandas cognitivas, tienen especial importancia en la enseñanza de cualquier tópico matemático. La actividad sobre el diseño y selección de tareas forma parte del análisis cognitivo que realiza el profesor y que atiende a los siguientes criterios: los contenidos matemáticos que ponen en juego, las expectativas de aprendizaje a cuyo logro pueden contribuir, y para detectar y diagnosticar errores.

Mediante las oportunidades de aprendizaje que el profesor ofrece, las tareas, como expresa Lupiáñez (2009), retan al alumno para que movilice sus conocimientos, en contextos concretos de aplicación, y realice mediante esas herramientas determinadas actividades que muestren las capacidades alcanzadas y, a su vez, contribuyan a su fortalecimiento y desarrollo (p. 112).

Las oportunidades de aprendizaje son entendidas, desde nuestro enfoque teórico, como las tareas que se les proponen a los escolares. Los aspectos a tener en cuenta en su diseño y elección forman parte clave del conocimiento didáctico del contenido que ha de poseer y mostrar un profesor. La capacidad de proporcionar tareas útiles a los estudiantes para lograr el aprendizaje matemático es parte fundamental del desempeño de la labor profesional del profesor donde se pone en juego el conocimiento didáctico del que dispone.

En la formación inicial, esta reflexión impulsa y favorece el desarrollo de la competencia de planificación de los futuros profesores. La tarea consiste en una propuesta con contenidos y objetivos de aprendizaje, son propuestas intencionales del profesor al alumno que enfocan, dirigen y en definitiva orientan los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas permiten trabajar los contenidos en contextos reales promoviendo el desarrollo de las competencias básicas (Flores y Lupiáñez, 2016). Una tarea debe estar vinculada a determinadas expectativas sobre el aprendizaje del alumno y sintetiza el análisis conceptual y cognitivo.

Las intenciones con la que se proponen las tareas pueden ser diferentes. Pueden basarse en pretender que el alumno simplemente reproduzca un conocimiento o pretender que el alumno extrapole lo que ha aprendido a situaciones distintas y nuevas. Lo importante de esta intencionalidad sería que se sustentase en la comprensión de los conceptos y en la capacidad para aplicarlos. Por otra parte, la intención que lleva al diseño de una tarea depende del momento en que se encuentre el aprendizaje del alumno. Precisamente la definición de competencia matemática que propone PISA (INEE, 2013) hace referencia a la capacidad del individuo para formular, emplear e interpretar las matemáticas. La capacidad de formular tiene que ver con reconocer e identificar oportunidades para utilizar las matemáticas y, posteriormente, proporcionar la estructura matemática a un problema presentado de forma contextualizada (INEE, 2013). Este proceso incluye, entre otras, la identificación de los aspectos matemáticos de un problema situado en un contexto del mundo real y la identificación de las variables significativas (p. 20).

El término emplear hace referencia a la capacidad del individuo para aplicar conceptos, datos, procedimientos y razonamientos matemáticos en la resolución de problemas formulados matemáticamente con el fin de llegar a conclusiones matemáticas. En concreto, este proceso incluye actividades tales como por ejemplo el diseño e implementación de estrategias para encontrar soluciones matemáticas (p. 20)

Finalmente la capacidad del individuo basada en la interpretación tiene que ver con la reflexión sobre soluciones, resultados o conclusiones matemáticas y valorarlas en el contexto de los problemas de la vida real. Este proceso incluye actividades tales como la reinterpretación de un resultado matemático en el contexto del mundo real y la valoración de la razonabilidad de una solución matemática en el contexto de un problema del mundo real (INEE, 2013, p. 21).

Estar al tanto de las capacidades que se pretende desarrollar en los alumnos es clave para el desarrollo adecuado de un diseño e implementación de tareas. En la figura 4 se muestra el proceso que involucra a estas capacidades.

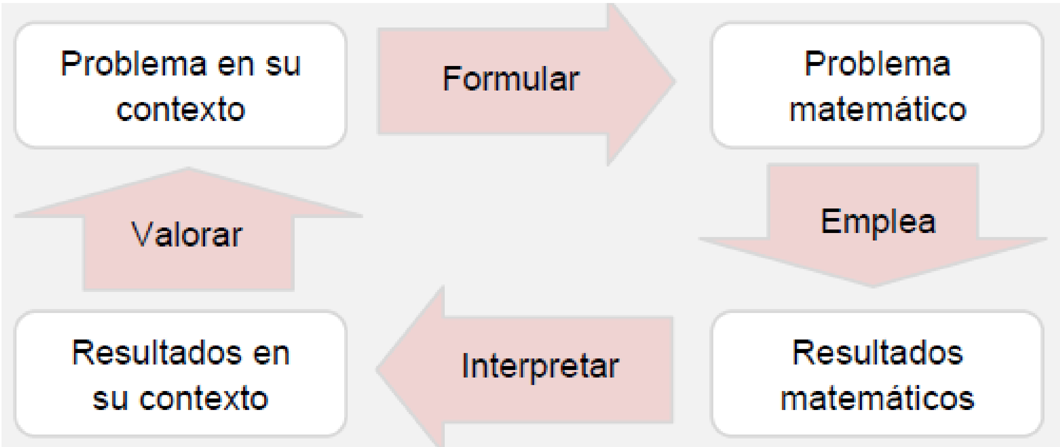


Figura 4. Procesos básicos de la matemática escolar en el marco de PISA (INEE, 2013, p. 16)

En este capítulo hemos especificado lo que entenderemos por conocimiento didáctico en este estudio. Nuestro marco teórico sustentado en el análisis didáctico nos ha permitido detallar las características del tema matemático que nos ocupa para poder diseñar el instrumento que usamos en la investigación. Nos ha permitido estudiar los diferentes sentidos y modos de usos en función de los contextos a los que responde el resultado y las situaciones de aplicación del Teorema de Pitágoras. Además, hemos podido ubicarnos en cuanto a las intenciones curriculares que repercuten en las oportunidades de aprendizaje ofrecidas a los estudiantes. Con toda esta definición que forma el capítulo 2 podremos interpretar los datos que se extraigan en la investigación que realizamos.

CAPÍTULO 3

DISEÑO DE LA INVESTIGACIÓN

El objetivo de este estudio es explorar el conocimiento didáctico manifestado por los futuros profesores de secundaria de matemáticas mediante un cuestionario que promueve la puesta en juego de este conocimiento en torno a un tema específico de las matemáticas escolares, el Teorema de Pitágoras. Johnson y Christensen (2008) definen cinco propósitos básicos que puede perseguir una investigación. Uno de ellos caracteriza una finalidad exploratoria, mediante la cual los investigadores pretenden generar ideas o respuestas acerca de un fenómeno determinado al inicio de una indagación, bien porque se trate de una línea poco estudiada, o bien porque se ignoran esos antecedentes en la búsqueda de nuevas soluciones al fenómeno. Otro propósito posible para estos autores es una finalidad descriptiva, en la que los investigadores persiguen desgranar y documentar las características y componentes de un fenómeno concreto así como las relaciones entre ellos. Asumiendo esta caracterización, definimos nuestra investigación como exploratoria y descriptiva.

Los sujetos que han intervenido en la experiencia ha sido un grupo de 27 estudiantes para profesor matriculados en el Máster en Educación del Profesorado en la especialidad de Matemáticas, de la Universidad de Granada, en el curso 2016/2017. Esta muestra fue por disponibilidad, ya que los sujetos fueron los que en el momento de realización del estudio estaban asistiendo a las sesiones de trabajo del Máster. Se contó con 30 minutos para la resolución del cuestionario. Durante este tiempo no se presentaron dudas y comentarios relevantes. Con respecto a la situación de los sujetos, se encontraban aún sin vivir la experiencia del Prácticum ofrecido en el Máster, pero a punto de finalizar las clases teóricas.

La forma en la que procedimos a la aplicación comenzó por la presentación del cuestionario a los futuros profesores. De forma resumida explicamos en qué consistía y que su finalidad era el desarrollo de este Trabajo Fin de Máster. Agradecimos la colaboración que prestaban y repartimos los cuestionarios.

3.1. INSTRUMENTO A EMPLEAR

Para la recogida de los datos se ha diseñado un cuestionario semántico de preguntas abiertas. Este cuestionario lo forman tres ítems sobre el Teorema de Pitágoras. La peculiaridad de la elaboración del mismo reside en el origen de las preguntas elegidas para nuestro estudio.

3.1.1. FUNDAMENTO DEL CUESTIONARIO

Durante las prácticas del Máster en Educación del Profesorado en la especialidad de Matemáticas, en el curso 2015-2016, me asignaron impartir el tema del Teorema de Pitágoras a un curso de 2º ESO. Los contenidos desarrollados durante 10 sesiones tuvieron que ver con la relación entre áreas de cuadrados y la demostración del Teorema. Igualmente, se tuvieron en cuenta los distintos contextos de aplicación del Teorema de Pitágoras en cuanto al cálculo de un lado de un triángulo rectángulo conociendo los otros dos; cálculo de un segmento de una figura plana a partir de otros que, con él, formen un triángulo rectángulo; identificación de triángulos rectángulos a partir de las medidas de sus lados y el cálculo de áreas de figuras planas. Atendiendo a lo establecido en el currículo para la educación secundaria obligatoria (Ministerio de Educación, cultura y deporte, 2015).

Durante la instrucción enfaticé el sentido geométrico del teorema con algunas tareas específicas que daban cuenta de esto. El interés, en esta dirección, parte como explica Gómez (2011), de que a nivel curricular se da mayor importancia al componente numérico variacional, dejando la enseñanza de la geometría a un lado; los estudiantes no identifican propiedades ni relaciones entre las figuras geométricas, lo cual dificulta inferir, proponer y abstraer información de las mismas.

El conocimiento que se extrajo del estudio puede ayudar a dirigir el desarrollo de las nociones y conceptos geométricos asociados para tratar de mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje del Teorema de Pitágoras.

En el contexto del Trabajo Fin de Máster (Torres, 2016), nos propusimos acentuar la parte geométrica olvidada del Teorema de Pitágoras debido al convencimiento de que la Geometría desarrolla el razonamiento lógico, la percepción espacial y la visualización además de actuar de trampolín de comunicación de conceptos y procedimientos para otras materias. Este posicionamiento, que ahora ha sido refrendado en la revisión de literatura que se ha sintetizado en el capítulo 2, nos llevó a diseñar un instrumento para extraer información sobre las distintas relaciones que establecen los alumnos, las conjeturas que plantean y la forma de comprobarlas en torno a la demostración y la generalización del Teorema de Pitágoras. De esta manera y como se menciona en NCTM (2003), para destacar la componente geométrica se usaron en el cuestionario representaciones gráficas porque ayudan a describir, clarificar o ampliar una idea matemática. Al usar varias representaciones de un mismo concepto los alumnos pueden encontrar diferentes razonamientos y compararlos actuando así como las herramientas de la demostración y la justificación de una idea (p. 366). Se realizó con la conciencia de que para lograr un pensamiento crítico y un razonamiento lógico no se depende de situaciones problema totalmente nuevas y difíciles, sino de situaciones sencillas pero con un enfoque que le impliquen un razonamiento progresivo y más elaborado.

Al finalizar la instrucción se les aplicó a los alumnos el instrumento con el que se pretendía:

O1. Analizar el modo en el que los alumnos interpretan geométricamente el Teorema de Pitágoras, identificando los elementos y relaciones que conocen previamente.

O2. Analizar los procesos de deducción que aplican para estudiar tanto la demostración como la generalización del Teorema, estudiando las relaciones que establecen entre los diferentes conceptos que intervienen.

O3. Observar su habilidad para emplear el Teorema de Pitágoras para resolver problemas, analizando las conjeturas que formulan y sus posteriores comprobaciones.

Algunas de las cuestiones que se formularon en el cuestionario destinado a los alumnos de 2º de ESO son reutilizadas en este estudio como ítems de un nuevo cuestionario, aplicadas ahora a futuros profesores y empleadas para indagar en el uso de su conocimiento didáctico ante las producciones de estos alumnos sobre tareas del Teorema de Pitágoras.

El cuestionario alberga 3 ítems que están íntimamente relacionados con la terna que presentábamos al inicio del análisis de contenido matemático del Teorema de Pitágoras; enunciado, demostración y aplicación. El primer ítem corresponde a la aplicación del resultado teniendo como propósito la propuesta de tareas, por parte de los aspirantes a profesores, con las que alcanzar un objetivo. El segundo ítem se vincula con la interpretación del enunciado y se sustenta en una tarea resuelta de diferente forma por cuatro alumnos. El último ítem se relaciona con la demostración del teorema y también se basa en la resolución de una tarea en este caso por dos alumnos. Las tareas que aparecen en el ítem 1 y 2 están fundamentadas en preguntas sobre representaciones geométricas del Teorema de Pitágoras.

A) ÍTEM 1

En la figura 5 se muestra el ítem 1 que inicia el cuestionario aplicado a los profesores en formación inicial.

1. Explica brevemente qué tarea de aprendizaje le propondrías a escolares de 2º ESO y cómo la emplearías, para promover el logro del siguiente objetivo, que ha sido extraído del libro del profesor:

   "Utilizar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas cotidianos"

Figura 5. Ítem 1

En la dimensión cognitiva, se elige el objetivo basado en la resolución de problemas cotidianos del tópico como parte fundamental de la intención de funcionalidad que transmite el currículo. Entendemos los casos cotidianos como aquellos casos reales que enriquecen el aprendizaje y contribuyen a la creación de ciudadanos más preparados para la sociedad. Esta orientación marca la necesidad de responder a un para qué de lo que se estudia en la escuela. Por eso, en este punto, pretendemos observar cómo enfocan los futuros profesores las tareas que dan la oportunidad de aprender cómo utilizar los contenidos que involucran al Teorema de Pitágoras en diferentes contextos y situaciones como un aspecto esencial en la educación matemática.

De manera deductiva, como refleja el análisis de contenido previo sobre el tema, se espera que los estudiantes para profesores empleen tareas que se puedan clasificar dentro de las situaciones que plantea PISA (OCDE, 2012) y dentro de los contextos que se muestran en el análisis. Atenderemos además a la complejidad de las tareas en función de las capacidades que se permitan alcanzar; emplear, formular o interpretar.

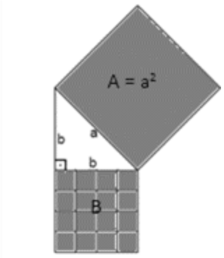
B) ÍTEM 2

Las interpretaciones del Teorema de Pitágoras han sido discutidas en el marco teórico previo. Las relaciones que sostiene el Teorema de Pitágoras en cuanto a longitudes de lados y áreas de cuadrados sobre los loados de un triángulo rectángulo completan el significado del teorema. De este modo, pretendemos observar las características del conocimiento didáctico que ponen en juego nuestros futuros profesores para identificar las interpretaciones del teorema en las respuestas de los alumnos mediante la resolución de la tarea. Puede verse el ítem 2 en la figura 6.

El caso peculiar al que está dirigido este ítem, el caso en el que comprometemos a un triángulo isósceles, a la vez que rectángulo, arrojó una variedad de respuestas distintas por los alumnos. Muchas veces se pasan por alto el uso de características sustanciales de las figuras que pueden intervenir en diferentes tareas y que dan lugar a un aprendizaje más sólido y enriquecedor.

La manera habitual en la que se introduce el Teorema de Pitágoras en la escuela obedece a una relación simbólica, una fórmula, que a veces carece de sentido para nuestros estudiantes. Es importante que los futuros profesores reparen en este hecho y nos arrojen información sobre su conocimiento didáctico ante el significado y la interpretación que hacen los alumnos de este resultado.

2. A continuación verás el enunciado de una tarea que se propuso a un grupo de estudiantes de 2º de ESO y la respuesta que dieron cuatro de ellos. Explica el modo en el que estos alumnos interpretan el Teorema de Pitágoras.



María dice que ha encontrado que el área del cuadrado A es dos veces la del cuadrado B. ¿Tiene razón? Explica la respuesta.

Alicia

No tiene razón porque $B=4^2$ y si fuese el doble sería $A=8^2$ y eso es $A=8^2=64$.

Beatriz

si porque si aplicamos el teorema de pitagoras nos sale igual

$x^2=4^2+4^2$

$x=\sqrt{32}$

Carlos

Si tiene razón. Debido a que la hipotenusa es es igual a un cateto al cuadrado mas el otro cateto al cuadrado.

$a^2=b^2+c^2$

Pero como no tenemos c se coje B y se multiplica por dos debido a que la hipotenusa tiene que ser más grande que los catetos

Daniel

Explica la respuesta.

$x^2=4^2+4^2$

$x^2=16+16$

$x=\sqrt{32}$

No tiene razón porque el área da aproximadament 7'20

Figura 6. Ítem 2

C) ÍTEM 3

Se ha mostrado que hay infinidad de demostraciones geométricas sobre el teorema, la elección de la demostración que forma el ítem 3 se debió a la facilidad de ejecución que se encuentra en su deducción. En el anexo 1 se recoge, dentro de los sistemas de representación, distintas demostraciones del teorema. Puede verse la tarea que ocupa el ítem 3 en la figura 6.

3. En esa misma clase, la profesora usó la figura C para explicar el significado geométrico del Teorema. Después, planteó la siguiente tarea para demostrarlo Describe el razonamiento que sigue cada alumno.

Luis dice que con la figura A y la figura B puede demostrar el Teorema de Pitágoras. La figura C la vimos en clase. Fíjate en la figuras A y B y en las medidas de sus lados ¿Tiene Luis razón? ¿Por qué?

Figura A

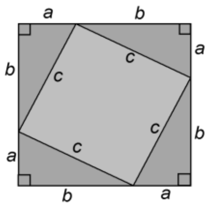


Figura B

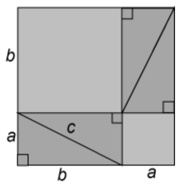
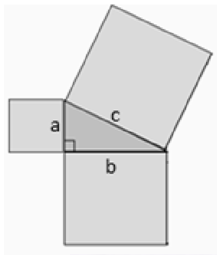
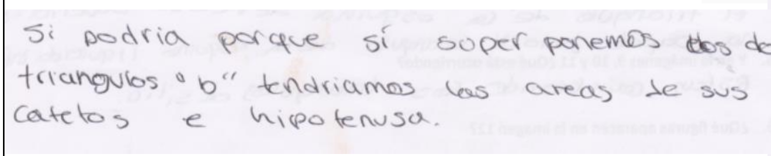
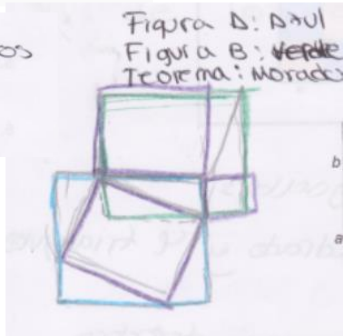


Figura C



Elena





Federico

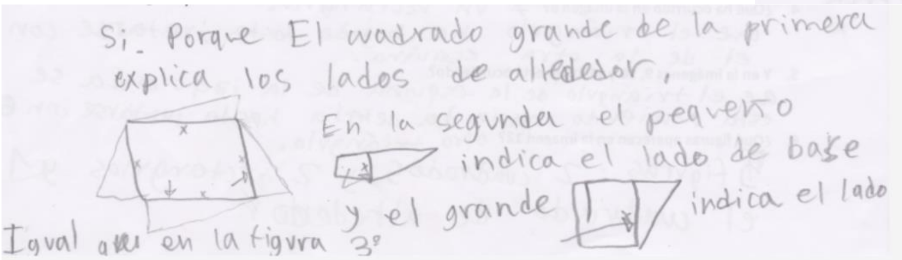


Figura 7. Ítem 3

Pretendíamos que aflorasen todas las relaciones que los alumnos pudieran observar. Con una demostración de mayor capacidad deductiva quizás hubiera sido más difícil la variedad de respuestas conseguidas. Además esta demostración geométrica-visual tal y como se ha enfocado en la tarea, forzaba, de alguna manera, a que se movilizaran las figuras que intervienen dando lugar a diferentes argumentos por parte de los alumnos. Esta demostración se ha atribuido como la original de Pitágoras.

Analizar las tareas que resuelven los alumnos y fijarse en los razonamientos que hacen, las argumentaciones que utilizan, los conceptos que relacionan y los procedimientos que aplican, las estrategias que emplean, las destrezas y habilidades que poseen en la resolución de problemas son, sin duda, aspectos que competen al profesor de matemáticas. Su interés recae directamente en la mejora del aprendizaje de los alumnos.

A través del análisis de la resolución de los problemas un profesor obtiene información del modo en que sus alumnos entienden los conceptos que intervienen en un tema concreto y puede observar limitaciones en la comprensión del tema. Este ítem pretende motivar el uso del conocimiento didáctico del futuro profesor en el sentido mencionado.

3.2. TIPO DE ANÁLISIS

El tipo de investigación en la que trabajamos tiene un carácter exploratorio y descriptivo. Se detallarán las características del conocimiento didáctico del contenido del teorema de Pitágoras que los estudiantes para profesores de matemáticas presentan atendiendo a las relaciones y argumentos que exponen.

El diseño de la investigación se basa en un análisis de contenido cualitativo. El análisis de contenido llevado a cabo es un proceso sistemático, en el que se disgrega y reduce la información, permitiéndonos extraer resultados que interpretar mediante el marco teórico escogido (Krippendorf, 2013). La estrategia usada para el análisis de los datos se basa en elaborar categorías tras la comparación y contraste de la información en las respuestas obtenidas de los ítems. Mediante un proceso de análisis deductivo e inductivo, se interpretarán y explicarán los hallazgos que se originan al aplicar el cuestionario.

El análisis de contenido cualitativo es definido como un marco de aproximación empírica, como un método de análisis controlado del proceso de comunicación entre el texto y el contexto, estableciendo un conjunto de reglas de análisis, paso a paso, que les separe de ciertas precipitaciones cuantificadoras (Hernández, Fernández y Baptista, 2010). La técnica del análisis de contenido se basa en estudiar el contenido semántico que se ha rescatado a partir de la aplicación del instrumento que empleamos, nuestro cuestionario. Cohen, Manion y Morrison (2011) subrayan que el análisis de contenido define un conjunto de procedimientos estrictos y sistemáticos para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. Donde se utiliza la categorización como rasgo esencial para reducir cantidades de datos (p. 563). Las categorías finales que se muestran son el producto de una continua revisión y un constante refinamiento basado en las unidades de análisis que nos aporta la información a interpretar.

El análisis de contenido en nuestro estudio particular sobre el conocimiento didáctico que muestran los estudiantes para profesores sobre el Teorema de Pitágoras, nos ayudará a identificar y descubrir patrones en el material a analizar del que disponemos. Lo usaremos de manera cualitativa a priori y cuantitativa a posteriori con el fin de exponer de forma sintética y visible los resultados obtenidos.

Una vez definido el contexto de aplicación, las circunstancias particulares en las que se desarrolla la investigación, para que los resultados sean fieles a la realidad donde nos movemos, y los objetivos a lograr en nuestro estudio pasamos a analizar paso a paso el material obtenido de la aplicación del cuestionario, dividiendo y desgranando el material en unidades que sean susceptibles de interpretar. Al inicio del proceso se han construido categorías centrales y más generales que nos arrojan claridad sobre lo que debemos localizar. Éstas se desglosan a su vez en subcategorías que permiten refinar diferencias entre respuestas. El procedimiento de análisis que desempeñamos tiene en cuenta una orientación deductiva (aplicación de categorías), en algunos casos, derivada de la teoría y en otros es de manera inductiva, (desarrollo de categorías) como emerge la información. Concretamos así que la codificación llevada a cabo en este análisis de contenido cualitativo es mixta.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DE LOS DATOS

En el análisis de datos que presentamos aparece la información obtenida de los ítems distribuida en diferentes categorías y subcategorías que resumimos y sintetizamos mediante tablas. El capítulo se estructura de forma global en tres partes; análisis de los datos del ítem 1, 2 y 3. En el análisis de datos del ítem 2 y 3 hemos intruducido una caracterización sobre los niveles de cononcimineto didáctico evidenciado. Esta investigación es un estudio local y concreto para un grupo determinado de alumnos siendo los resultados obtenidos específicos para el grupo con el que se trabaja.

4.1. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 1

En este punto, exploramos el conocimiento didáctico que exponen nuestros futuros profesores en torno al Teorema de Pitágoras en el diseño o la elección de diferentes tareas para lograr un objetivo. Presentamos las categorías del análisis de contenido en este ítem.

A) SITUACIONES EN LAS QUE APLICAN EL TEOREMA DE PITÁGORAS

En esta primera parte del análisis de contenido del ítem 1 atendemos a las situaciones PISA (OCDE, 2012) donde los profesores en formación aplican el Teorema de Pitágoras. Se resume la información obtenida en la tabla 1.

Tabla 1
Situaciones según PISA (2012) en función de su frecuencia de aparición

Situaciones PISA (2012)	Frecuencia (N = 26)
Situación personal	2
Situación profesional	14
Situación social	1
Situación científica	8
No se identifica	1

En el ítem 1 aparece una respuesta en blanco así que se cuenta con 26 respuestas útiles para el análisis. Los sujetos han considerado en su mayoría situaciones profesionales en las tareas que proponen a estudiantes de 2º de ESO. Se centran en gran parte en trabajos relacionados con la construcción; construcción de escaleras y parcelas rectangulares, la arquitectura; área de un piso. Aparecen otras que tienen que ver con trabajos más particulares como la situación que involucra el cálculo de desniveles. Este tipo de ejemplos forman el grueso de la primera clasificación (14 de 26).

En cuanto a las situaciones clasificadas como personales encontramos 2 que reparan en el propio individuo y en su grupo de iguales implicando actividades de juego. Una de ellas se presenta en la figura 8.

Imaginar que los alumnos van a pasar el día al campo y el profesor les propone construir una tirolina desde un resalto del terreno hasta una zona llana, y el profesor les pide que calculen cuántos metros de cuerda necesitarán si el resalto con el llano forman un ángulo de 90º, el resalto y el soporte de la tirolina mide 15m y el llano 20m.

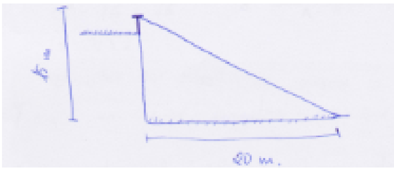


Figura 8. Tarea propuesta en situación personal

Localizamos como situación social una tarea en la que se pregunta: "*¿Qué camino tomar para llegar lo más pronto posible?",* y hallamos 8 tareas que obedecen a situaciones científicas que tiene que ver con la propia matemática. Se muestran ejemplos de ellas en las figuras 9 y 10.

Un día cualquiera estás dispuesto a salir de tu casa para ir al colegio. Imagina que tienes dos posibles caminos para llegar (dibujo) ¿Qué camino deberías tomar para llegar lo más pronto posible? Datos necesarios para la resolución del problema:
Longitud del camino B= 10m
Longitud del camino A= a_1+a_2 sabiendo que a_1= 4m.

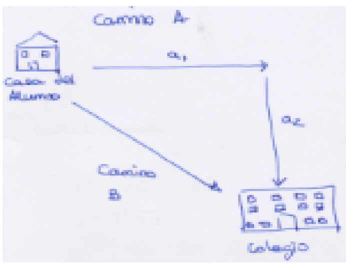


Figura 9. Tarea propuesta en situación social

Encontrar la fórmula del Teorema de Pitágoras a partir de la siguiente figura.

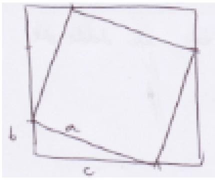


Figura 10. Tarea propuesta en situación científica

Encontramos una tarea en la que no se identifica situación por carecer de una contextualización con el detalle necesario para su clasificación. Hay tareas que se destacan por un planteamiento inadecuado que no corresponden a la realidad. Por ejemplo, en la figura 11, la altura del árbol se mide en Km.

El Teorema de Pitágoras se puede usar para resolver el siguiente problema: "un árbol proyecta una sombra. Calcula la altura del árbol." "La distancia de A a B es 3 Km y de B a C es de 4 Km. ¿Cuál es la distancia de A a C?"

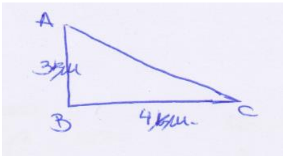


Figura 11. Tarea propuesta que no pertenece a la realidad

B) RELACIÓN PITAGÓRICA CONSIDERADA EN EL DISEÑO DE LAS TAREAS

Ahora atendemos a las dos relaciones métricas que sujeta el Teorema de Pitágoras. Se resume la información en la tabla 2.

Tabla 2
Relaciones métricas en las diferentes tareas en función de la frecuencia de aparición

Relación pitagórica	Frecuencia (N = 26)
Relación entre lados	25
Relación entre áreas	0
Relación entre lados y entre áreas	1

En cuanto a la relación pitagórica que ocupan los futuros profesores en el diseño de sus tareas se encuentra que todos, los 26 sujetos que contestan, proponen tareas que implican la relación métrica entre los lados de un triángulo rectángulo. Tan sólo aparece una tarea que compromete, además, la relación métrica entre áreas de cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo. Como ejemplo, se presenta en la figura 12:

Un jardinero quiere sembrar petunias en un jardín formado por tres terrenos cuadrados, tal y como muestra la figura 1. El jardinero ha de poner 10 petunias por metro cuadrado ¿Cuántas petunias tiene que comprar el jardinero? Además hay que pintar los bordes de los cuadrados de rojo y sabe que la pintura se gasta muy rápido: un bote por cada dos metros de bordillo ¿Cuántos botes de pintura tiene que comprar para pintar todos los bordillos?

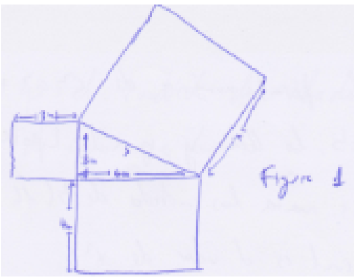


Figura 12. Tarea propuesta que involucra la relación métrica entre áreas

No se encuentra ninguna tarea que involucre la relación pitagórica entre áreas de forma aislada.

C) CONTEXTO DE LOS PROBLEMAS COTIDIANOS PROPUESTOS

Ahora atendemos a los contextos de las tareas cotidianas propuestas sobre el Teorema de Pitágoras. Los contextos de aplicación del Teorema de Pitágoras siempre dan respuesta a cuestiones que tienen que ver con el cálculo de distancias para conocer medidas. En este caso se ha categorizado los contextos atendiendo al cálculo de distancias inaccesibles y al cálculo de distancias desconocidas y accesibles. Igualmente se ha precisado cual es lado desconocido que se ha de determinar en las diferentes tareas (Tabla 3).

Tabla 3
Contextos en las tareas en función de su frecuencia de aparición

Categoría	Subcategoría	Frecuencia (N = 26)
	Cálculo de la hipotenusa	11
Cálculo de Distancias inaccesibles	Cálculo de un cateto	5

Tabla 3

Contextos en las tareas en función de su frecuencia de aparición

Categoría	Subcategoría	Frecuencia (N = 26)
	Cálculo de cateto o hipotenusa (no se especifica)	3
Cálculo de distancias desconocidas pero accesibles	Cálculo de la hipotenusa	1
	Cálculo de un cateto	1
	Cálculo de áreas	3
	Cálculo de cateto o hipotenusa (no se especifica)	1
No se especifica contexto determinado		1

Encontramos que la mayoría de los contextos presentes en las tareas propuestas obedecen al cálculo de distancias inaccesibles. En concreto, este cálculo acaba refiriéndose a la obtención de la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Los contextos sobre el cálculo de distancias desconocidas pero accesibles forman un total de 6 casos. Entre ellos, se ha diferenciado además un matiz asociado al contexto referido al caso del cálculo de áreas como finalidad de la tarea propuesta. Claro es que en el proceso, el cálculo de catetos y de hipotenusa es obviamente inevitable. En esta clasificación encontramos 3 tareas (Figura 13).

El Teorema de Pitágoras puede ser utilizado para medir el área de un piso dados algunos datos dimensionales: una posible tarea puede ser la siguiente: mide el área de los cuartos de este piso sabiendo que los lados 1,2,3…miden….

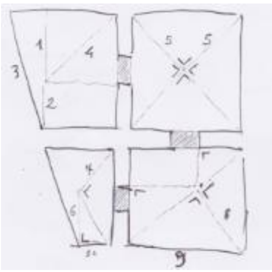


Figura 13. Tarea propuesta en contexto de cálculo de áreas

D) CARACTERÍSTICAS DE LAS TAREAS COTIDIANAS

En este apartado se ha recogido una última clasificación orientada a desgranar la características que ofrecen las tareas diseñadas por los estudiantes a profesores de matemáticas. Nos fijamos en las representaciones de los triángulos rectángulos que acompañan al enunciado de la tarea además de los recursos más usados en el diseño de la misma. Nos preocupamos también por la complejidad cognitiva que presentan en cuanto a la capacidad que permiten desarrollar en términos de formular, emplear e interpretar (Tabla 4).

Tabla 4
Características de las tareas propuestas en función de la frecuencia en la que aparecen

Categoría	Subcategoría	Frecuencia (N = 26)
Tipo de representación que acompaña al enunciado de la tarea	Representan un triángulo explícitamente como parte del enunciado de la tarea propuesta	15
	No representan el triángulo de forma explícita, lo evocan	3
	No hay ninguna representación de triángulo rectángulo que acompañe al enunciado de la tarea	8
Recursos más usados en las situaciones	Tareas que involucran la sombra de un objeto	8
	Tareas que involucran el objeto escalera	5
	Tareas que pretenden involucrar como recurso Geogebra	2
Complejidad que presenta la tarea	Tareas de emplear	10
	Tareas de formular	1
	Tareas de formular y emplear	14
	Tareas de interpretación	0
	No se especifica, sin detalle de planteamiento	1

Son 15 los futuros profesores que optan por acompañar el enunciado de la tarea con una representación gráfica de un triángulo rectángulo. De ellos, 14 lo representan usando un formato estándar del triángulo. En 3 tareas han dejado de mostrarlo de forma explícita y sólo lo evocan (ver ejemplo en la Figura 14). Sin embargo, 8 de los 26 sujetos optan por no acompañar el enunciado con una representación gráfica.

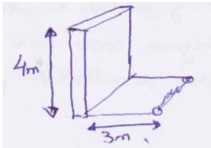
> *Una tarea interesante sería adecuar la altura de una escalera regulable dada para salvar un muro recto de 4 metros de altura, sabiendo que tenemos unas fijadoras a tres metros de la pared.*
>
> 
>

Figura 14. Tarea propuesta en la que se evoca el triángulo rectángulo

En cuanto a los recursos más utilizados que nos han dejado estos profesores en formación observamos que 8 involucran la sombra de un objeto para desarrollar su plan de tarea sobre el Teorema de Pitágoras. Hay 5 que incluyen el objeto escalera y 2 que han reclamado el uso del software dinámico, GeoGebra, para realizar tareas. Estas carecen de detalle en su planteamiento. Se ejemplifican mediante la siguiente figura 15:

> *Se pueden hacer muchas cosas, pero quizás yo organizaría una sesión de trabajo con Geogebra para que ellos mismos puedan experimentar y comprobar la utilidad del teorema, y cómo éste se cumple con las áreas de cualquier figura. Aprovecharía para enunciar problemas reales susceptibles de ser resueltos aplicando el Teorema de Pitágoras.*

Figura 15. Tarea propuesta en la que se pretende el uso de GeoGebra

Atendiendo a la complejidad de la tarea según las diferentes capacidades que se pretenden desarrollar, hallamos que la inmensa mayoría involucran la aplicación del teorema como un procedimiento para resolver el problema. Algunas de ellas, 14, implican, además, la formulación del problema desde su contexto. Localizamos una en la que sólo pretende involucrar la capacidad de formular. Las tareas que tendrían que ver con la reflexión sobre soluciones no se revelan en ningún caso.

4.2. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 2

El Teorema de Pitágoras sostiene dos relaciones métricas; una en la que interviene la longitud de los lados de un triángulo rectángulo y otra en la que involucra las áreas de las figuras construidas sobre los lados del triángulo. En este ítem se les pedía a los futuros profesores que explicaran el modo en el que los alumnos interpretan el Teorema de Pitágoras. En el análisis de los datos encontramos que la mayoría de los sujetos no contestan en función del tipo de interpretación que aparecen en las respuestas de los alumnos. Por esto, las categorías parten en un primer nivel de concisión atendiendo a si responden o no en función de la interpretación observada sobre el uso del teorema.

El análisis de este ítem consta de cuatro partes correspondientes a la información que nos dan los futuros profesores sobre las respuestas de los alumnos: Alicia, Beatriz, Carlos y Daniel.

A) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE ALICIA

Son 4 estudiantes para profesores los que identifican y/o explican la interpretación del Teorema de Pitágoras que toma la alumna en su respuesta. El resto de sujetos no exponen la interpretación que lleva a cabo Alicia y se centran en identificar errores u otros aspectos diferentes (Tabla 5).

Tabla 5
Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Alicia

Categoría	Subcategorías	Frecuencia (N = 27)
Identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican que no interpreta geométricamente el teorema	2
	Identifican que no hay ninguna interpretación del teorema	2
No identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican errores con las operaciones de potencias	8
	Identifican el uso del doble del lado en lugar del doble del área	9
	Identifican el uso de un valor de “a” determinado para demostrar que María no lleva razón	2
Otras	Identifica una explicación por demostración al absurdo	1
	No tiene claro el teorema de Pitágoras	1
	Utiliza la demostración del teorema	1

Categoría	Subcategorías	Frecuencia (N = 27)
	No parte de la expresión inicial del teorema	1

De los 4 profesores en formación inicial que identifican la interpretación que toma la alumna en su respuesta, 2 explican que no lo interpreta correctamente de forma geométrica: “*no es capaz de interpretar el Teorema de Pitágoras como suma de áreas de cuadrados”*

Por otro lado, 2 de ellos identifican que no existe interpretación del Teorema en la producción de Alicia: *“Como no está usando el Teorema de Pitágoras no está haciendo ningún uso.”*

De los 23 que no identifican la interpretación de Alicia, 8 se centran en señalar errores que tienen que ver con las operaciones con potencias. Otros 8 prestan atención a que Alicia toma como doble el lado en lugar del área. En 2 casos reconocen que Alicia usa un valor de “a” determinado para demostrar que María no lleva razón: *“Alicia utiliza un ejemplo para intentar explicar que no lleva razón María, pero confunde el enunciado y hace:* $A^2 = (2B)^2$*.”*

Englobamos en la subcategoría “Otras” respuestas muy diferentes entre sí. Albergando respuestas que expresan que existe la utilización del teorema por parte de la alumna o que no parte de la expresión inicial del teorema. Otra respuesta expresa que Alicia no tiene claro el teorema. Un futuro profesor interpreta la respuesta de la alumna como una explicación dada por demostración al absurdo.

B) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE BEATRIZ

Análogamente al caso anterior se analiza la información obtenida para la respuesta de Beatriz. En este caso se obtuvieron por parte de los profesores en formación 3 respuestas en blanco. Se sintetiza la información obtenida en la tabla 6.

Tabla 6
Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Beatriz

Categoría	Subcategoría	Frecuencia (N = 24)
Identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifica relación entre medidas de los lados del triángulo	7
	Identifican interpretación geométrica del teorema	2
No identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican la aplicación del teorema como se enseña teóricamente	2
	Identifican que se aplica el teorema de memoria sin comprenderse	7
	Identifican que utiliza el teorema para encontrar la relación entre el área del cuadrado A y B apoyándose en que los lados son iguales	2
	Identifican que aplica correctamente el Teorema de Pitágoras	1
Otras		3

En este caso son 9 los estudiantes para profesores de matemáticas los que identifican alguna interpretación del teorema en la respuesta de Beatriz. Se diferencian entre los que la identifican como relación ente medidas de los lados del triángulo, 7 de ellos y 2 los que identifican una interpretación geométrica del teorema. Como ejemplos que obedecen a esta categoría se incluyen los siguientes:

- *"No interpreta el Teorema de Pitágoras como igualdades de áreas sino como una relación de medidas entre los lados del triángulo rectángulo"*
- *"La interpretación que tiene es que el área del cuadrado que forma uno de los lados mayores del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que forman los otros dos lados"*
- *"Correcto. El área grande es la suma de las otras dos y como son iguales será el doble de una"*

Por otro lado, son 9 los futuros profesores que analizan la respuesta de Beatriz desde el punto de vista de la aplicación del teorema. Mencionan que se hace de forma mecánica y sin darle significado a lo que escribe. Algunos, 2, caracterizan este hecho explicando que aplica el teorema como se enseña teóricamente, sin expresar aspectos que tenga que ver con la comprensión del significado del teorema: *"Beatriz ha aplicado el teorema tal y como se da teóricamente"*

Los que identifican que utiliza el teorema para encontrar la relación entre el área del cuadrado A y B apoyándose en que los lados son iguales, son 2 de los 24 profesores. Lo expresan de la siguiente forma: "*La alumna conoce el Teorema de Pitágoras y lo aplica en particular a un triángulo que tiene los dos catetos de la misma longitud."*

C) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE CARLOS

Ahora analizamos las respuestas de los profesores en formación sobre la interpretación de Carlos sobre el Teorema de Pitágoras. Se ha contado con 25 respuestas útiles ya que 2 sujetos dejaron en blanco esta cuestión (Tabla 7).

Tabla 7
Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Carlos

Categoría	Subcategoría	Frecuencia (N = 25)
Identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican que no existe interpretación ni de longitudes ni de áreas	1
	Identifica relación entre medidas de los lados del triángulo	4
No identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican que el alumno no reconoce que está ante un triángulo isósceles	2
	Identifican que se aplica el teorema de memoria sin comprenderse	7
	Identifican que tiene claro el concepto del teorema pero no lo aplica razonadamente	2
	Identifican que se multiplica el cateto por dos debido a la falta de incógnita	3
	Identifican que llega a que el área de uno es el doble del área del otro pero no lo indica	1

	Identifica lenguaje matemático poco desarrollado	1
Otras	Carecen de sentido	4

De forma global, observamos que 7 de los 25 futuros profesores señalan que la aplicación del teorema que lleva a cabo Carlos es de memoria y sin comprenderse "*Muy parecido al anterior, ya que sabe perfectamente la fórmula pero no sabe identificar el otro cateto como otro igual. Se dedica a enunciar de memoria sus conocimientos sin establecer una relación del significado del Teorema*".

De los 25, 4 han identificado que Carlos interpreta el teorema como una relación entre lados: "*En este caso conoce la fórmula para aplicar el T de Pitágoras pero tiene un fallo muy común, ya que lo utiliza solo para calcular una longitud en lugar de darse cuenta que también puede utilizarse como igualdad de áreas, en este caso no reconoce que su "C" sea igual a B*".

En concreto, 3 futuros profesores han identificado que Carlos ha multiplicado por dos el cateto por falta de incógnitas: "*El razonamiento está mal, ya que ha considerado que c=b solo por el hecho de que faltan incógnitas para aplicar el teorema de Pitágoras tal y como él lo conoce.* $c^2 = a^2 + b^2$".

2 de los sujetos mantienen que Carlos tiene claro el concepto del teorema aunque no lo aplique correctamente. El mismo número de profesores en formación opinan que el alumno no reconoce que está tratando con un triángulo rectángulo e isósceles. Tan sólo un sujeto ha respondido que no hay ninguna interpretación del teorema en esta ocasión.

D) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE DANIEL

En este caso se cuentan con 3 respuestas en blanco resultando en un total de 24. Las categorías y subcategorías construidas para esta parte del ítem se muestra en la tabla 8.

Tabla 8
Identificación de la interpretación del Teorema en la respuesta de Daniel

Categorías	Subcategorías	Frecuencia (N = 24)
Identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican que no interpretan relación geométrica entre áreas del teorema	3
	Identifican que interpreta el teorema como una relación de áreas	1
No identifican la interpretación del escolar sobre el Teorema de Pitágoras	Identifican la aplicación del teorema de memoria, sin comprenderse	3
	Identifican un error en la confusión del área con la longitud de la hipotenusa	7
	Identifican que no es capaz de justificar y expresar matemáticamente sus cálculos	6
	Identifican que hace un cálculo del área aproximado	3
Otras		1

Tan sólo 4 de los 24 futuros profesores han identificado la interpretación del teorema dada por el escolar en función de las subcategorías referidas a la primera parte de la tabla 8.

Entre ellas hay diferencias en el conocimiento didáctico que se evidencia, encontrando en un nivel más bajo de conocimiento la siguiente*: "Interpreta el teorema de Pitágoras como una relación de áreas y no de longitudes"*

El grueso de las respuestas se recoge en la categoría en la que no identifican la interpretación del escolar sobre el teorema. En este punto aparecen aspectos que tienen que ver con el uso mecánico de la fórmula del mismo, error en la confusión del área con la longitud de la hipotenusa o dificultades en la expresión matemática.

Existe una subcategoría formada por respuestas que pretenden dar una explicación a la última parte de la producción de Daniel sobre la tarea, identificando que hace un cálculo de área aproximado. Lo argumenta de esta forma: "*Espera que el resultado de la raíz le de 8 para poder decir que es el doble de 4."*

De forma global, después de presentar los resultados de este ítem observamos que para algunos profesores en formación la aplicación del teorema de forma correcta consiste en usar o escribir la fórmula del mismo.

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO OBSERVADOS EN EL ÍTEM 2

En la interpretación de los resultados obtenidos con el análisis de datos del ítem 2, caracterizamos el conocimiento didáctico puesto en juego por los profesores en formación ante las respuestas de Alicia, Beatriz, Carlos y Daniel en niveles de conocimiento didáctico evidenciado.

Estos niveles no pretenden ser exhaustivos; somos conscientes de la dificultad de la caracterización del conocimiento didáctico y de que la cantidad de información que se baraja ante las preguntas abiertas que forman el cuestionario aplicado, es obtenida únicamente por esa vía. Por lo que no pretendemos transmitir una evaluación del conocimiento didáctico de los profesores ya que los niveles que se definen son propios de cada una de las respuestas desarrolladas por los alumnos.

Nuestra opción es, por tanto, organizar las ideas extraídas de las respuestas permitiendo refinar la interpretación que damos a la luz de las categorías elaboradas. Los niveles que se indican son referidos a una tarea, siendo diferentes en otra. En ningún caso muestra el nivel de conocimiento didáctico de un futuro profesor pues su estudio sería mucho más elaborado del que extendemos aquí.

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE ALICIA

Alicia no interpreta geométricamente el teorema de Pitágoras como se espera que lo haga en la intención de la tarea. . En su resolución caben dos interpretaciones. Alicia manifiesta un error que bien se debe al uso del doble del lado en lugar del área o bien es debido a una dificultad al operar con potencias. Bajo éstas observaciones deducidas del análisis de la respuesta, caracterizamos los diferentes niveles de conocimiento didáctico encontrados.

Nivel 0

– No identifican correctamente la interpretación que hace la alumna sobre el teorema de Pitágoras en esta tarea concreta.

Caracterizamos este nivel como aquel en el que no se identifican en las respuestas de los futuros profesores la interpretación dada por la alumna sobre el teorema. Encontramos las respuestas que corresponden a las subcategorías de la tabla 5: identifican el uso de un valor de “a” determinado para demostrar que María no lleva razón, identifica una explicación por demostración al absurdo, no tiene claro el teorema de Pitágoras, utiliza la demostración del teorema y no parte de la expresión inicial del teorema. Son 6 las respuestas de los profesores en formación que se clasifican en este nivel. Ejemplos son las siguientes:

- *En este caso Alicia toma un valor de a determinado para demostrar que María no tiene razón.*
- *Utiliza la demostración del T. de Pitágoras*

Nivel 1

– Identifican únicamente errores relacionados con las operaciones con potencias.

– Identifican únicamente el uso del doble del lado en lugar del doble del área.

Este nivel está formado por las respuestas que en ningún caso hablan de las dos posibilidades en la producción de Alicia y no hacen ninguna valoración en torno al uso del teorema. Se presentan como ejemplos:

- *La interpretación de Alicia es incorrecta ya que ha considerado el doble del lado en lugar del doble del área.*
- *La alumna ha calculado el área del cuadrado B contando los cuadritos. Se ha equivocado porque ha considerado el doble de B = $8^2 = 2^6$. En realidad sería $2 \cdot B = 2 \cdot 4^2 = 2^5$*

Nivel 2

– Identifican errores con las operaciones de potencias y además identifican el uso del doble del lado en lugar del doble del área valorando la intervención de la alumna.

El nivel 2 incluye las respuestas en las que los sujetos identifican correctamente la interpretación de la alumna valorando la actuación de la misma.

Como ejemplo presentamos la siguiente respuesta*: "La interpretación es aritmética y el fallo es que no es capaz de interpretar el teorema de Pitágoras como suma de áreas de cuadrados y confunde la operación de multiplicar por dos bajo potencia."*

Sintetizamos la información en la tabla 9 donde exponemos los niveles evidenciados de conocimiento didáctico en función de su frecuencia de aparición para el caso de Alicia.

Tabla 9
Niveles de conocimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Alicia

Niveles	Frecuencia (N = 27)
0	6
1	15
2	6

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE BEATRIZ

El nivel de conocimiento didáctico que se evidencia puede ser clasificado en torno a tres estados del mismo. Definimos los niveles de conocimiento didáctico que nos ayudan a interpretan los resultados.

Nivel 0

– No identifican correctamente la interpretación que hace Beatriz sobre el teorema de Pitágoras en esta tarea concreta.

Se evidencia el nivel 0 en la siguiente respuesta*: "La interpretación que tiene es que el área del cuadrado que forma uno de los lados mayores del triángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados que forman los otros lados"*

Nivel 1

– Identifican que se aplica el teorema pero no valoran esa aplicación.

Por ejemplo: "*esta alumna ha aplicado la definición literal del Teorema de Pitágoras"* o *"Beatriz ha aplicado el teorema tal y como se da teóricamente."*

Nivel 2

– Identifican correctamente la interpretación que toma la alumna sobre el teorema, valorando correctamente la aplicación del mismo.

Ejemplo que evidencia este nivel es: "*Beatriz ha aplicado el Teorema de Pitágoras, pero no demuestra lo pedido en el enunciado, ya que lo que hace es calcular la longitud del lado del cuadrado A.*"

De la misma forma recogemos la información extraída al caracterizar los niveles en la tabla 10.

Tabla 10
Niveles de conocimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Beatriz

Niveles	Frecuencia (N = 24)
0	7
1	8
2	9

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE CARLOS

Carlos expresa con su producción que se sabe la fórmula del Teorema de memoria ya que la presenta en la primera parte de su resolución y no la aplica en ningún momento. El alumno no reconoce el triángulo como uno isósceles, así que multiplica por dos, dato que extrae del enunciado, al necesitar una incógnita que no determina sobre la representación mostrada en la misma tarea. Sin embargo, Carlos reconoce que la longitud de la hipotenusa ha de ser mayor que la longitud de los catetos. Exponemos las características de los niveles de conocimiento didáctico evidenciados en esta parte del ítem 2.

Nivel 0

– No identifican la interpretación de Carlos sobre el teorema en esta tarea en concreto.

Se observa la evidencia de este nivel de conocimiento didáctico en la respuesta: "*Carlos ha relacionado el área de B con los cuadrados que lo forman y esto no se verifica para*

C, por lo que no puede comparar ambas áreas. 10. Tiene claro el concepto del T. de Pitágoras pero no lo aplica razonadamente."

Nivel 1

– Identifican únicamente que se sabe la fórmula de memoria.
– Identifican únicamente que no reconoce el triángulo como isósceles.
– Identifican únicamente que reconoce que la hipotenusa ha de ser mayor que los catetos.

En este nivel, los sujetos reconocen de manera singular algún conocimiento o habilidad de Carlos, como muestra el siguiente ejemplo:

- *Carlos sabe la fórmula pero no sabe aplicarla. Se equivoca al obtener "a" debido a que no tiene claro el significado de cada término.*
  El alumno, como le falta una incógnita, multiplica uno de los catetos por dos porque no distingue la notación.

Nivel 2

– Identifica la interpretación del alumno atendiendo a varios los aspectos que se manifiestan en la resolución de Carlos y que han sido planteados en el nivel 1.

Ejemplo que refleja el nivel definido es el siguiente: "*se equivoca porque no se da cuenta de que los catetos son iguales en este caso y se cree que se multiplica por dos un cateto porque la hipotenusa tiene que ser más grande. No considera la equivalencia de áreas, sólo la relación entre las longitudes de los catetos."*

Se presenta de forma resumida los niveles revelados con la respuesta de Carlos en la tabla 11.

Tabla 11
Niveles de conocimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Carlos

Niveles	Frecuencia (N = 25)
0	8
1	15
2	2

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE DANIEL

Nivel 0

- No identifican correctamente la interpretación que hace Daniel sobre el teorema de Pitágoras en esta tarea concreta.

Un ejemplo viene dado por: "*Interpreta el teorema de Pitágoras como una relación de áreas y no de longitudes.*"

Nivel 1

- Identifican o bien un error debido al confusión del área con la longitud de la hipotenusa, o mala expresión matemática o aplicación del teorema de memoria sin ofrecer una valoración de tales aspectos

Se ejemplifica mediante la respuesta siguiente: "*Desarrolla toda la demostración correctamente pero falla al dar la solución, no es capaz de justificar sus cálculos ni razonamientos con lo que comprende el Teorema, pero ha fallado en la respuesta.*"

Nivel 2

- Identifican correctamente la interpretación que toma Daniel sobre el teorema valorando correctamente la aplicación del mismo.

Se revela este nivel de conocimiento didáctico en la siguiente respuesta: *"Aplica la fórmula del Teorema, sin entenderlo como relación ente áreas. Aunque parece que aplica la fórmula correctamente (aunque sin entender muy bien por qué lo hace así, al parecer) no sabe interpretar el resultado."*

Sintetizamos la información sobre el conocimiento didáctico en niveles ante esta respuesta en la tabla 12.

Tabla 12
Niveles de conocimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Daniel

Niveles	Frecuencia (N =24)
0	5
1	16
2	3

Las producciones de Beatriz y Daniel son prácticamente iguales. Los niveles de conocimiento didáctico detectado advierten de que las respuestas de los futuros profesores ante la resolución de Daniel son más elaboradas. Se observa, de la tabla 10 y la tabla 12 que el nivel 1 está más concurrido en esta última, aunque ha bajado la cantidad de respuestas que quedaban localizadas en un nivel 2.

Exceptuando el caso de Beatriz, se evidencia una mayor parte de respuestas situadas en un nivel medio de conocimiento didáctico. Este nivel 1 en el que se mantienen los sujetos se ha caracterizado, salvando las diferencias entre repuestas de alumnos, por haber identificado un solo conocimiento o habilidad en las resoluciones de los mismos. Apenas han descrito con rigor la interpretación que cada uno de los alumnos evidencia del Teorema.

4.3. ANÁLISIS DE LOS DATOS DEL ÍTEM 3

El análisis de contenido desarrollado en este ítem consta de dos partes. En la primera tiene lugar el análisis de los datos ante la respuesta de Elena. Se presentan las categorías atendiendo, a priori y de forma global, a si los profesores en formación interpretan el razonamiento de los alumnos como correcto, incorrecto, insuficiente o si simplemente lo describen. En la segunda parte se analizan los datos extaídos ante la respuesta de Federico procediendo de forma análoga.

A) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE ELENA

En esta ocasión contamos con 26 respuestas, teniendo 1 en blanco. Se sintetiza la información en la tabla 13.

Tabla 13
Tipo de razonamiento descrito ante la respuesta de Elena

Categorías	Subcategorías	Frecuencia (N =26)
Razonamiento correcto	Superposición	1
	Comparación	3
Razonamiento erróneo	Confunde el término de área con el de longitud	3

Categorías	Subcategorías	Frecuencia (N =26)
Razonamiento insuficiente	Superposición	3
	Geométrico	1
	Reducción al caso conocido C	4
Razonamiento basado en superposición		3
Razonamiento basado en superposición para llegar al caso conocido C		4
Razonamineto basado en la reducción al caso conocido C		1
Razonamiento basado en redistibución de figuras		2
Razonamiento que no aporta nada		1

Cuatro de los 26 estudiantes para profesores consideran correcto el razonamiento de Elena. Tres de ellos lo explican como un razonamiento basado en compración de áreas. Entre estas tres respuestas se observa diferencias en el detalle de la explicación que dan los futuros profesores. En un nivel más bajo de conconimieno didáctico podemos exponer la siguiente respuesta: "*El razonamiento que ha seguido es comparar las áreas de las figuras y es correcto.*"

Por otro lado, y manifestando un conocimiento didáctico distinto, podemos presentar la siguiente respuesta que no expresa el razonamiento seguido por la alumna: "*Elena ha comprendido que los triángulos que aparecen en las figuras A y B son el mismo, exactamente iguales, y ha comprendido también que el primer cuadrado (figura A) es el área de la hipotenusa, y las otras dos cuadrados (figura B) son las áreas de los catetos.*"

Se observa que las expresiones usadas "área de la hipotenusa" y "áreas de los catetos" no son acertadas y son las que usa Elena en su respuesta. Estos términos han sido el foco de atención de 3 futuros profesores para manifestar un razonamiento erróneo. 1 de los 4 sujetos localizados en esta categoría explica que el razonamiento de Elena se basa en superposición y lo hace escribiendo: *" Al superponer los dos triángulos como la figura A y B tienen la misma área reparte los triángulos de B en los de A quedándole que el cuadrado de lado c tiene la misma área que la suma de los otros dos, demostrando el Teorema de Pitágoras."*

Por otro lado, 8 de los 26 sujetos coinciden en interpretar un razonamiento insuficiente de Elena empleando el término "intenta": 3 de ellos mencionan un razonamiento basado en superposición, uno lo identifica como un razonamiento geométrico y 4 lo identifican como un razonamiento en que "se intenta llegar al caso conocido" mostrado por la figura C que aparece en el ítem.

Uno de los futuros profesores identifica el razonamiento como gráfico e insuficiente: "*Elena intenta dar una explicación gráfica para verificar que con las dos figuras A y B se puede demostrar el T. de Pitágoras."*En cuanto a los que identifican un razonamiento insuficiente basado en una reducción al caso conocido (figura C), encontramos también diferentes grados de conocimiento didáctico puesto en juego que descibiremos más adelante. Un ejemplo de respuesta es el siguiente: "*No ha demostado el Teorema de pitágoras simplemente lo ha adaptado para ver que se cumple el método que ya sabía."*

Otra de las categorías que forma la información disponible corresponde a una interpretación del razonamiento de la alumna como no correcto. Los 3 futuros profesores que componen esta categoría coinciden en argumentar que el razonamiento es erróneo porque Elena confunde el término de área con el de longitud. En este caso, los sujetos fijan su atención en la representación verbal de la alumna y dejan sin valorar la representación geométrica que aparece en su razonamiento: "*Elena confunde términos, en este caso nombra "área de catetos", concepto que no existe."*

En las respuestas que dan lugar a las categorías que siguen, los sujetos se limitan a explicar que es lo que hace la alumna sin proporcionar sentido negativo, positivo o insuficiente a lo que realiza. La categoría más concurrida pertenece a los que definen el razonamiento de Elena como uno basado en superposición para llegar al caso conocido C. Por ejemplo: *"Superpone las figuras A y B hasta que le sale la figura C, aunque* *invertida."* Se determina una categoría en la que el razonamiento se expresa únicamente atendiendo a la superposición de las figuras, y otra únicamente atendiendo al proceso de reducción hasta un problema anterior. Las siguientes respuestas las ejemplifican: " *Elena usa un razonamiento geométrico, sobre poniendo las figuras que forman cada demostración."* y *"Ha hecho una traslación y ha reducido a un problema anterior."* Son 2 los futuros profesores que interpretan el razonamiento de Elena como el basado en redistribución de figuras. Se ejemplica de esta forma: "*Elena tiene en cuenta que el área de las figuras A y B es la misma, lo que ha hecho ha sido redistribuir los triángulos y cuadrados".* Finalmente, uno de los 26 sujetos escribe que el razonamiento de Elena no aporta nada.

Como se ha transmitido con la organización de la información, se han observado la aparición de términos asociados a acciones como superponer, redistribuir y comparar que son básicos en la demostración geométrica del teorema del Teorema de Pitágoras.

B) ANÁLISIS DE DATOS ANTE LA RESPUESTA DE FEDERICO

Con la intervención de Federico se obtienen 25 respuestas útiles, 2 en blanco. Las resumimos en las siguientes categorías de información dadas en la tabla 14.

Tabla 14
Tipo de razonamiento descrito ante la respuesta de Federico

Categorías	Subcategorías	Frecuencia (N = 25)
Razonamiento suficiente		8
Razonamiento insuficiente	No sabe expresarse y argumentar bien	5
	Basado en reducción al caso conocido	4
	Atendiendo a la comparación entre las tres figuras	4

Razonamiento basado en reducción al caso conocido C	Relación en primer lugar entre A y B para después relacionar con C	3
	Relación de A con C y de B con C	2
	Primero a partir de C, caso conocido	1
Razonamiento incomprensible		5
Razonamiento que no aporta nada		1

Es sólo un estudiante para profesor el que interpreta el razonamiento de Federico como suficiente. No describe el razonamiento seguido por el alumno, se limita a exponer: "*Es menos correcto, pero sirve, es correcta la argumentación".*

Son 12 los futuros profesores los que coinciden en que Federico lleva a cabo un razonamiento insuficiente. Los argumentos que brindan atienden a aspectos de expresión, razonamiento basado en la reducción al caso conocido y a comparación entre figuras. Ejemplo de respuestas son las siguientes: "*No sabe expresar correctamente lo que está demostrando"* o *"Acierta en la respuesta pero no sabe argumentar los resultados"*

En cuanto a la subcategoría formada por razonamiento insuficiente basado en la reducción al caso conocnido C encontramos respuestas que evidencian un mayor grado de conocimiento didáctico: "*Intenta identificar partes de la figura A y B con la figura C. Se centra lado a lado y no se hace todo a la vez como el anterior. "* o *"Lo que hace es relacionar los cuadrados de las figuras A y B con los de la figura C que ha sido demostrada en clase. Ambos alumnos relacionan las figuras A y B con la vista en clase que ya ha sido usada para demostar el Teorema de Pitágoras y de esta forma piensan que estas figuras demuestran el Teorema de Pitágoras."*

Hay una respuesta de un futuro profesor que es encajada en las dos subcategorías por mencionar detalles de ambas: "*Ha intentado extrapolar las figuras A y B a C pero su forma de expresar no ha sido correcta. Ve que hay lados equivalentes pero no sabe explicarlo. "*

Fijándonos en lo que responden atendiendo a la categoría de "Comparación entre las tres figuras" tenemos: "*Identifica formas en las diversas figuras, observa que la longitud de lados, pero no da explicación del teorema.*"

En la categoría "Razonamiento basado en reducción al caso conocido C" se localizan 6 respuestas de las 25, aunque existen matices entre ellas. Entre las diferentes subcategorías que se detallan encontamos respuestas como las siguientes: "*Relaciona los cuadrados de las primeras dos figuras con las de la tercera (equivalentes porque los lados son iguales)"* y *"Lo que hace es identifcar el cuadrado grande de A con el de la figura C y los respectivos triángulos de B con los de C y como se ha estudiado en clase la figura C, el alumno asegura que así está demostado el teorema de Pitágoras"*

Con la resolución de Federico encontramos que hay 5 futuros profesores que encuentran su razonamiento como incomprensible: "*Federico conoce la respuesta pero su argumentación es incomprensible"* y "*No lo entiendo lo que pone, además cambia las figuras."* Finalmente, también aparece una respuesta de un sujeto que sostiene que el razonamiento, de Federico, no aporta nada.

Comparando las respuestas dadas por los profesores en formación inicial ante las preguntas sobre las producciones de Elena y Federico, podemos caracterizar una parte del conocimiento didáctico que emana de los estudiantes para profesores sobre la descripción del razonamiento que siguen cada uno de estos alumnos. Obviamente, ante las resoluciones distintas de una misma tarea, se exhiben respuestas diferentes por parte de los futuros profesores. Será la comparación entre éstas lo que nos arroje una mayor determinación y exactitud en la interpretación que hagamos posteriormente sobre los resultados del conocimiento didáctico manifestado.

En ambos análisis se obtiene la categoría que especifica que el razonamiento seguido está basado en reducción al caso conocido C. Un total de 15 estudiantes para profesor de matemáticas, una mayoría, coinciden en expresar que la estrategia seguida para la resolución de la tarea en los razonamientos llevados a cabo tanto por Elena como por Federico estan basados en un procedimiento que involucra la relación de las figuras A y B para obtener C. Sin embargo, la resolución de Federico ha ocasionado un menor número de categorías basadas en expresar el razonamiento seguido, incluyéndose la categoría de razonamiento incomprensible.

CARACTERIZACIÓN DE LOS NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO OBSERVADOS EN EL ÍTEM 3

De igual forma que el ítem 2 definimos las características de los niveles en los que clasificamos las intervenciones de los sujetos de esta experiencia, los futuros profesores de matemáticas.

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE ELENA

En esta ocasión encontramos que son tres los niveles evidenciados, nivel 0, 1 y 2.

Nivel 0

- No identifican el razonamiento efectuado por la alumna.
- Expresan que el razonamiento es correcto para responder a la tarea.
- Sólo valoran un tipo de representación dada por el alumno.

En este nivel localizamos las respuestas de los futuros profesores que no identifican de forma adecuada el planteamiento que lleva a cabo Elena. Se incluyen además los que han mostrado que el razonamiento de Elena es correcto para demostrar el teorema tal y como pide la tarea y los que sólo se han centrado en valorar la representación verbal dada por la alumna en su producción. Ejemplos de estas respuestas son: *"Al superponer los dos triángulos como la figura A y B tienen la misma área reparte los triángulos de B en los de A quedándole que el cuadrado de lado c tiene la misma área que la suma de los otros dos, demostrando el Teorema de Pitágoras" o " Elena confunde términos, en este caso nombra "área de catetos", concepto que no existe."*

En este nivel introducimos el siguiente tipo de respuesta: "*No es capaz de ver que el área del cuadrado es la suma del área de los cuatro triángulos más el resto, y como los cuadrados de la figura A y B son iguales, es fácil ver que* $c^2 = a^2 + b^2$. *La figura de la chica NO aporta nada, y su razonamiento tampoco."* Aunque la afirmación de que Elena no ha visualizado que la suma de los cuadrados más pequeños da el cuadrado más grande en la primera demostración puede ser correcta, denota un escaso conocimiento didáctico al afirmar: "*La figura de la chica NO aporta nada, y su razonamiento tampoco"*. La ubicamos en un nivel 0, puesto que el razonamiento de la alumna le aporta información sobre cómo comprende la demostación del teorema, aportándole posibles estrategias a seguir y diferentes formas de representar el contenido matemático en la enseñanza del tópico, para intentar que sea más comprensible.

Nivel 1

- Identifican el razonamiento efectuado por la alumna
- No valoran su adecuación con el propósito de la tarea

Este nivel engloba aquellas respuestas de los estudiantes para profesores donde identifican de forma adecuada el razonamiento del alumno sin decidirse a ahondar en su correcto o incorrecto proceso en cuanto a la finalidad de la tarea sobre la demostración del teorema pedida que recordamos en la figura 16:

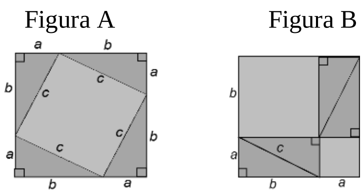


Figura 16. Figura A y B del ítem 2

Se exponen alguna de las evidencias que dan lugar al nivel caracterizado: *Elena lo que realiza es una superposición de lo mostrado en las figuras A y B para llegar a lo demostrado en C.*

A este tipo de respuestas que encajan en nuestro nivel 1 les faltaría argumentos sobre como ese proceso termina por probar o no la demostración del teorema.

Nivel 2

- Identifican el razonamiento efectuado por la alumna
- Valoran su adecuación con el propósito de la tarea

En este nivel de conocimiento didáctico se encuentran las respuestas de los futuros profesores que evidencian la identificación del razonamiento que realiza Elena de forma correcta y además valoran su pertinencia para contestar a lo pedido en la tarea. De nuevo se localizan en la categoría global "Razonamiento insuficiente". Entre otras recogemos las siguientes respuestas: "*Lo que ha hecho es a partir de las figuras A y B llegar a la figura C y ha realizado esa demostración por lo que no responde a la pregunta." O "Cree que superponiendo las figuras se puede demostrar el Teorema pero deberá calcular la equivalencia de áreas de cada figura."*

La Tabla 15 resume la organización de las respuestas de los sujetos por niveles ante la producción de Elena.

Tabla 15
Niveles de cononcimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Elena

Niveles	Frecuencia (N = 25)
0	10
1	9
2	7

Obteniendo de forma sintética una visión global del conocimiento didáctico de los futuros profesores ante la producción de Elena en la tarea.

NIVELES DE CONOCIMIENTO DIDÁCTICO ANTE LA RESPUESTA DE FEDERICO

Como hemos aclarado, en este caso los niveles de conocimiento didáctico cobran algunos matices pues la resolución de la tarea por parte de Federico entraña otro tipo de dificultad de comprensión por parte de los profesores remitiéndonos a las evidencias que caracterizan las diferentes categorías.

Nivel 0

– No identifican el razonamiento efectuado por los alumnos.
– Expresan que el razonamiento es correcto para responder a la tarea.

En este nivel localizamos las respuestas de los futuros profesores que no identifican el planteamiento que lleva a cabo Federico. Se incluyen, además, los que han mostrado que el razonamiento de Federico es correcto para demostrar el teorema tal y como pide la tarea y los que sólo se han centrado en valorar la forma de las representaciones dadas por el alumno y no su fondo.

Están incluidas en este nivel las respuestas que forman las categorías "Razonamiento suficiente", "Razonamiento incomprensible", "Razonamiento que no aporta nada" y la primera subcategoría dada por "Razonamiento insuficiente": "No sabe expresarse y argumentar bien". Queda reflejado con estas respuestas: "*Es menos correcto pero sirve es correcta la argumentación.", "Debería haber secuenciado su explicación. Explicar cada uno de los pasos ordenadamente y justificando cada uno de ellos.", "No lo entiendo lo que pone, además cambia las figuras"* o *"Necesita clases de apoyo de dibujo. A parte de esto, Federico no razona NADA. Traduce información visual a verbal. Cero."*

Nivel 1

- Identifican el razonamiento efectuado por la alumna
- No valoran su pertinencia en función de lo pedido en la tarea

Este nivel engloba aquellas respuestas de los estudiantes para profesores que describen el razonamiento identificándolo de forma correcta sin decidirse a valorar su correcto o incorrecto proceso en cuanto a la finalidad de la tarea sobre la demostración del teorema pedida. A este tipo de respuestas que encajan en nuestro nivel 1, les faltaría argumentos sobre como ese proceso termina por probar o no la demostración del teorema.

En este nivel de conocimiento didáctico consideramos las respuestas en las que se evidencian que los futuros profesores han identificado el razonamiento de la alumna de forma correcta pero no valoran como de adecuado es en cuanto a lo pedido en la tarea. En concreto este nivel 1 lo encontramos en las respuestas que conforman la categoría de "Razonamiento basado en reducción al caso conocido C", como por ejemplo: *"Lo que hace es identifcar el cuadrado grande de A con el de la figura C y los respectivos* *triángulos de B con los de C y como se ha estudiado en clase la figura C, el alumno asegura que así está demostado el teorema de Pitágoras."*

Nivel 2

- Identifican el razonamiento efectuado por el alumno
- Valoran su pertinencia en función de lo pedido en la tarea

En este nivel de conocimiento didáctico se encuentran las respuestas de los futuros profesores que evidencian la identificación del razonamiento que realiza Federico de forma correcta y, además, valoran su pertinencia para contestar a lo pedido en la tarea. Se incluyen en la subcategoría "Atendiendo a la comparación entre las tres figuras "dada sobre la global "Razonamiento insuficiente". Ejemplos son: "*Deduce que los cuadrados de lados a y b en las 3 figuras son iguales, pero no explica por qué la suma de los cuadrados* $c^2 = a^2 + b^2$*"* o *"Identifica formas en las diversas figuras, observa que la longitud de lados, pero no da explicación del teorema."*

Se resume la información dada a través de la caracterización de niveles en la tabla 16.

Tabla 16
Niveles de cononcimiento didáctico evidenciados ante la respuesta de Federico

Niveles	Frecuencia (N = 25)
0	11
1	11
2	3

En esta ocasión, fijándonos en los niveles de conocimiento didáctico revelado por los sujetos recogidos en las tablas 15 y 16, evidenciamos que la mayoría de respuestas se sitúan en un nivel 0, en el caso de la producción de Elena, no identificando el razonamiento efectuado por la alumna o valorando sólo un tipo de representación dada. En la producción de Federico la mayoría de las respuestas se distribuyen en los niveles 0 y 1 en la misma cantidad.

Como se ha aclarado, esta caracterización en función de niveles de conocimiento didáctico no pretende ser exhaustiva y se obtiene en función de cada tarea. Nos ayuda en una primera aproximación en la caracterización del mismo.

CAPÍTULO 5

BALANCE E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS

Es clara la dificultad de definir y caracterizar el nivel de conocimiento didáctico manifestado por un grupo de profesores en formación. La atención por los detalles en las respuestas de los sujetos de la experiencia nos ha ofrecido un panorama global del estado del conocimiento didáctico que poseen los sujetos en los tres ítems del cuestionario aplicado. Con el análisis de datos se ha evidenciado una variación considerable del conocimiento didáctico puesto en juego por los profesores de unas respuestas a otras. En este capítulo sintetizamos, a modo de balance, los hallazgos más relevantes que hemos obtenido.

Los alumnos, autores de las resoluciones de las tareas que conforman los ítems del cuestionario, fueron alumnos a los que pude instruir en el tema del Teorema de Pitágoras. Durante el tiempo de instrucción se le dedicó una atención especial a la componente geométrica de este resultado y en las tareas que se les propuso a los educandos durante esa intervención docente, predomina un uso procedimental y justificado del resultado que nos ocupa. Tras aplicar el cuestionario a estos alumnos de 2º ESO, constatamos una dificultad en la comprensión de la acepción geométrica que completa el significado del teorema. Este aspecto es relevante para nuestra investigación, pues conocemos los conocimientos previos de los que partían los educandos y sus limitaciones en el tema que nos ocupa. Aprovechando esta visión, la interpretación de los resultados en función del conocimiento didáctico que muestran los profesores en formación puede ser tratada en nuestro estudio con mayor precisión.

Del ítem 1 podemos identificar que las tareas que proponen los futuros profesores son tareas habituales en los libros de texto. Los contextos identificados obedecen en su mayoría al cálculo de distancias inaccesibles frecuentemente utilizados en la enseñanza teorema, usando recursos basados en la sombra de un objeto o en el uso de una escalera. Encontramos que la complejidad cognitiva de la resolución de las tareas, encaja en la acción de emplear y aplicar, el proceso más técnico de la matemática.

La relación entre áreas de cuadrados no ocupa parte del conocimiento didáctico que han mostrado los futuros profesores en esta ocasión, impidiendo la transmisión completa del significado a los estudiantes y dando lugar a una escasez de oportunidades de aprendizaje. El bagaje de conocimiento didáctico que se pone en juego en este planteamiento no ofrece gran variedad de situaciones de aplicación, siendo escaso en cuanto a la utilización de la relación pitagórica dada por las áreas de los cuadrados sobre los lados del triángulo rectángulo, hallándose sólo en un caso de los analizados. Esta apuesta sobre exponer únicamente la relación métrica dada por los lados del triángulo rectángulo, evita y condiciona el aprendizaje del teorema que sostiene dos relaciones métricas.

En cuanto al uso de representaciones gráficas que acompaña al enunciado de la tarea, cabe mencionar que la mayoría presentan un triángulo rectángulo en posición estándar. Esta forma convencional y estática está evitando un repertorio variado de imágenes que asociar con un triángulo rectángulo y puede conllevar dificultades para identificar situaciones en las que es posible o no aplicar el teorema.

Actualmente el uso de la tecnología y sistemas que ayudan a la visualización de relaciones geométricas brindan oportunidades de aprendizaje a tener en cuenta. En este sentido el conocimiento didáctico manifestado es insuficiente ya que tan sólo dos profesores en formación inicial se animan a mencionar el uso de GeoGebra sin explicar la dinámica a seguir.

De forma global, los planteamientos de las tareas no ofrecen una contextualización de la situación. Es inexistente en muchas de las tareas optando por un enunciado que se caracteriza por una mera exposición de datos y una pregunta concreta que no dota de la suficiente realidad a las situaciones exhibidas. Nos ha resultado difícil clasificar las situaciones porque carecen de una contextualización real.

En general todas las situaciones presentadas por los futuros profesores son accesibles a alumnos de 12 o 13 años. Algunas se escapan del nivel educativo de 2º ESO, presentando la necesidad del uso de relaciones trigonométricas que no se enseñan hasta 3º o 4º de ESO. Entre las tareas expuestas hay algunas que presentan unos planteamientos deficientes que no poseen resolución.

La mayoría de las respuestas dadas por los sujetos de esta experiencia en el ítem 2 han resultado situarse de forma general en un nivel 1 de conocimiento didáctico. Muchas de ellas han demostrado atender sólo a aspectos parciales de las producciones de los alumnos. Este hecho significa que el análisis que han realizado nuestros futuros profesores sobre la interpretación del Teorema de Pitágoras por los alumnos es escaso. Incluso hemos constatado que algunos de ellos tienen la concepción de que el Teorema de Pitágoras se reduce a aplicar una fórmula. Por ejemplo es relevante la respuesta sobre la producción de Daniel de este profesor en formación: "*desarrolla toda la demostración correctamente pero falla al justificar sus cálculos, con lo que comprende el teorema pero falla en la respuesta."* o en el caso de la producción de Beatriz donde aparecen frases como: "*Beatriz ha aplicado el teorema correctamente"* o *"la alumna conoce el teorema".* También se puede mencionar la respuesta ante la resolución de Carlos: *"Tiene claro el concepto del T. de Pitágoras pero no lo aplica razonadamente".* Conocer el teorema no es aplicar una fórmula. Estos alumnos no han comprendido que el Teorema de Pitágoras soporta dos relaciones métricas.

Al comparar las respuestas dadas por los futuros profesores en formación inicial en ambas preguntas del ítem 3, encontramos la categoría basada en un razonamiento centrado en reducir el problema al caso conocido en clase dado por la figura C. Claramente, Elena usa un razonamiento basado en un proceso de reducción a un caso conocido, pues ella recibió una instrucción específica sobre la demostración del teorema en función de la representación dada por la figura C. Es natural que al representar las tres figuras intentara relacionar A y B, a priori desconocidas para ella, con la figura C que se mostró en clase. El procedimiento usado obedece a principios de comparación y superposición de partes congruentes, si bien, la deducción de Elena no ha servido para demostrar el teorema con las figuras A y B; la habilidad contemplada y su destreza para afrontar la tarea a nivel de 2º de ESO es destacable.

El hecho de que haya habido profesores en formación que sólo atendiesen a una de las representaciones que usó Elena, la verbal, denota un bajo conocimiento didáctico ya que considerar y contemplar las diferentes representaciones expresadas por la alumna es lo que permite asentar el grado de comprensión que tiene sobre el tema tratado, proporcionado ideas sobre medidas a tomar para su enseñanza.

Hemos evidenciado que esta primera parte del ítem 3 las respuestas de los futuros profesores se enmarcan en un nivel 0, muy seguido de un nivel 1 y en menos medida en el nivel 2 que aporta la diferencia en cuanto a la valoración de la interpretación del alumno en función del propósito de la tarea. Esta caracterización del conocimiento didáctico difiere un poco en Federico donde hallamos que el nivel 2 de conocimiento didáctico evidenciado en las respuestas ante su resolución es poco concurrido, igualándose en los niveles 0 y 1 que aportan información sobre un grado menor de conocimiento didáctico revelado.

Hemos profundizado en el cómo los profesores en formación inicial utilizan su conocimiento didáctico para afrontar una determinada actividad sobre el Teorema de Pitágoras. Tras el balance de resultados podemos exponer que es esencial la profundidad del análisis que hacen los aspirantes a profesores sobre la resolución de tareas de los alumnos dando cuenta de aspectos esenciales de su aprendizaje. Las estrategias, los razonamientos, los argumentos y las representaciones que ponen en juego los alumnos contribuyen a generar conocimiento didáctico valioso, útil en su función de asistir a una enseñanza que sea eficiente y activa. Se ha constatado que el conocimiento didáctico incluye tener claras las metas educativas para valorar con determinación las oportunidades de aprendizaje ofrecidas como motor del mismo. Incluye además identificar el grado de dificultad que presentan para los alumnos ciertas acciones vinculadas a tareas, analizando las estrategias y razonamientos que emplean los educandos. Este conocimiento es pues especializado de lo que se va a enseñar.

CAPÍTULO 6

CONSIDERACIONES FINALES

El bagaje de conocimiento didáctico que posee un profesor es difícil de caracterizar ya que existen multitud de aspectos relacionados con el mismo que dificultan, a la vez que enriquecen, su propio estudio.

En este punto podemos decir que la investigación desarrollada es consistente en cuanto al cumplimiento de los objetivos que establecimos. Hemos identificado las oportunidades de aprendizaje que han planteado los futuros profesores atendiendo a aspectos cruciales de las mismas para la enseñanza del tópico. Además se han identificado las interpretaciones que los futuros profesores exponen sobre el teorema en las producciones de los alumnos. Así mismo, hemos identificado cómo interpretan los procesos de razonamiento de los alumnos en torno a la demostración del Teorema de Pitágoras. Todo ello nos ha servido para describir y caracterizar el conocimiento didáctico que han manifestado el grupo de sujetos en formación inicial aspirantes a profesores de matemáticas mediante la elaboración de un cuestionario formado por tres ítems.

6.1. LIMITACIONES Y FORTALEZAS DE LA INVESTIGACIÓN

Tanto las debilidades o limitaciones de la investigación como las fortalezas que rescatamos de la misma tienen que ver indudable e inevitablemente con el cuestionario diseñado y recaen directamente sobre el análisis de datos desarrollado y por tanto en el diseño de la investigación. La intención con la que se elaboran los ítems es determinante en los resultados que se obtienen. Si bien el cuestionario semántico planteado nos permite indagar en el conocimiento didáctico que los futuros profesores poseen, identificando rasgos del mismo en unas circunstancias definidas, la gran riqueza y diversidad de información obtenida a partir de los ítems hace que el categorizar las respuestas abiertas no sea tarea fácil.

Encontramos que una limitación en nuestra investigación tiene que ver con el suministro de la información. Para precisar la caracterización del conocimiento didáctico se podrían haber empleado entrevistas con cada uno de los sujetos. De esa forma podríamos haber clarificado muchas de las respuestas que se han presentado en cada ítem.

Desde luego es una fortaleza el poder caracterizar preguntas abiertas como también lo es la posibilidad de cuantificación que nos dan las mismas como medio de simplificación de resultados y facilidad de interpretación. Gracias a la estrategia de análisis empleada se han precipitado la caracterización de niveles de conocimiento didáctico ente los futuros profesores lo que ha sido una fortaleza en esta investigación. Esto es mérito atribuible al análisis de contenido, modo sistemático que nos da la posibilidad de poder reproducir el estudio. Aunque los resultados de esta investigación no son generalizables, lo es su método.

La debilidad por excelencia de las investigaciones cualitativas es la subjetividad que se pueda involucrar en el análisis. En este caso ha sido atajada mediante una visión centrada en el conocimiento del texto, como dato, y contexto donde se ha producido la investigación.

6.2. APORTE DE LA INVESTIGACIÓN

La peculiaridad de nuestra investigación ofrece un pequeño aporte sobre el estudio del conocimiento didáctico ante el Teorema de Pitágoras en la formación inicial. Esta investigación consigue ser una contribución a la caracterización del conocimiento didáctico del profesor en formación inicial sobre el tópico. Desde la investigación en Educación Matemática consideramos este estudio en torno a un tema matemático específico como un paso para llegar a concretar y precisar modos con los que acercar de manera eficiente su enseñanza. El estudio en particular y en profundidad de los diferentes temas de la matemática escolar permite localizar franjas de acción, problemas reales que intervienen en el aprendizaje de un tópico. Este conocimiento es útil para continuar investigando sobre la mejora de su transmisión.

6.3. LÍNEAS ABIERTAS

El esfuerzo que hemos depositado en el proceso de exploración desplegado a lo largo de la investigación ha posicionado el conocimiento didáctico de los futuros profesores sobre el Teorema de Pitágoras en un nivel que no es precisamente excelente.

Los resultados extraídos arrojan la reflexión sobre la necesidad de seguir profundizando en la transmisión de la parte geométrica del Teorema de Pitágoras y en cómo transmitir ese conocimiento didáctico. Habrá que investigar con el foco de interés puesto en el desarrollo de estrategias que se implementen desde la formación inicial. Nuestros futuros profesores necesitan desarrollar habilidades de análisis y reflexión en la labor que desempeñaran. Una buena forma puede ser la que hemos aportado basada en el análisis de la resolución de tareas reales de alumnos. Ésta implicación didáctica requiere que desde los primeros niveles de formación de los profesores se les haga conscientes de la importancia que tiene que los alumnos se sumerjan en procesos de demostración, formulen conjeturas, hipótesis, y generalicen.

Comprendemos que son una multitud de aspectos, circunstancias de diversa índole las que influyen tanto en la transmisión de la materia como en la visión que poseen nuestros escolares de las matemáticas. El cómo mejorar la preparación inicial del profesor de matemáticas es una línea abierta que surge necesariamente de los resultados de nuestra investigación. Nos planteamos entonces cuestiones como: ¿Qué necesitan conocer los futuros profesores de matemáticas? ¿De qué manera la formación inicial puede contribuir a su adquisición y desarrollo?

CAPÍTULO 7

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Abrate, R.; Delgado, G. y Pochulu, M. (2006). Caracterización de las actividades de Geometría que proponen los textos de Matemática. *Revista Iberoamericana de Educación* (Online). *39*(1), 1-9. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1290Abrate.pdf

Ball, D. L. y Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. En J. Boaler (Ed.), *Multiple perspectives on mathematics teaching and learning* (pp. 83-104). Westport: Ablex

Ball, D. L. y Bass, H. (2003). Toward a practice-based theory of mathematical knowledge for teaching. En B. Davis y E. Simmt (Eds.), *Procceedings of the 2002 Annual Meeting of the Canadian Mathematics Education Study Group* (pp. 3-14). Edmonton, AB: CMESG/GCEDM.

Burk, F. (1996). Behold: The Pythagorean Theorem. *The College Mathematics Journal, 27*(5), 409.

Brown, P. (2003). The Legacy of Pythagoras' Theorem. *Parabola*, *39*(1), 1-5.

Carrillo, J. et al. (2014). Un modelo de conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK). Huelva, servicio de publicaciones de la Universidad de Huelva.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). Research methods in education. Londres, Reino Unido: Routledge.

Cooney, T. J. (1994). Research and teacher education: In search of common ground. *Journal for Research in Mathematics Education*, *25*(6), 608-636.

Flores, P. y Lupiáñez, J. L. (2016). Expectativas de aprendizaje. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid, España: Pirámide

Gamboa, R. y Ballestero, E. (2009). Algunas reflexiones sobre la didáctica de la geometría. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática, 4*(5), 113-136.

Godino, J., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39*(1-2), 127-135.

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en matemáticas. *Revista EMA*, *7*(3), 251-293.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* Granada, España: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.

Gómez, M. (2011). *Pensamiento geométrico y métrico en las Pruebas Nacionales* (Tesis de maestría). Universidad Nacional de Colombia.

Gutiérrez, A., Rico, L., y Gómez, P. (2014). Metodología para una comparación internacional del conocimiento didáctico evaluado en TEDS-M. En J. L. González et al. (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de las Matemáticas y Educación Matemática* (pp. 93-99). Málaga: Departamento de Didáctica de las Matemáticas, de las Ciencias Sociales y de las Ciencias Experimentales y SEIEM.

Heo, G. (2015). A New Proof of the Pythagorean Theorem. *The American Mathematical Monthly*, *122*(5), 451.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación.* (Quinta edición). México: Mc Graw–Hill.

Hernández, V. y Villalba, M. (2001). *Perspectivas en la enseñanza de la geometría para el siglo XXI*. Documento de discusión para estudio ICMI. PMME-UNISON. Traducción del documento original.

Hill, H. C., Rowan, B. y Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal*, *42*(2), 371-406.

Huang, R. (2005). Verification or proof: Justification of Pythagoras' theorem in Chinese mathematics classrooms. *Proceedings of PME*, *29*(3), 161–168.

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2013). *Informe PISA 2012. Programa para la Evaluación Internacional de los Alumnos*. Madrid, España. Recuperado de www.mecd.gob.es/inee

Instituto Nacional de Evaluación Educativa (2016). PISA 2015. Informe español. *Boletín de Educación*, *51*, 3-4.

Jaworski, B. (2002). Layers of Learning in Initial Teacher Education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *5*(2), 89-92.

Johnson, B. y Christensen, L. (2008). *Educational Research*. Thousand Oaks, CA: Sage Publications.

Jones, K. (2002). Issues in the Teaching and Learning of Geometry. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: perspectives on practice* (pp. 121-139). London: Routledge Falmer,

Kilpatrick, J. (2003). Promoting the proficiency of U.S. mathematics teachers through centers of learning and teaching. En R. Strässer, G. Brandell y B. Grevholm (Eds.), Educating for the future. Proceedings of an international symposium on mathematics teacher education (pp. 143-157). Göteborg: Royal Swedish Academy of Sciencies.

Krippendorff, K. (2013). Content Analysis: An Introduction to Its Methodology. Thousand Oaks, CA: SAGE Publications.

Leikin, R. (2008). Teams of prospective teachers. En K. Krainer y T. Wood (Eds.), *Participants in mathematics teacher education* (pp. 63-88). Rotterdam: Sense Publishers.

Lipowsky, F., K. Rakoczy, C. Pauli, B. Drollinger-Vetter, E. Klieme y K. Reusser (2009), “Quality of Geometry Instruction and its shortterm Impact on Students’ Understanding of the Pythagorean Theorem”, *Learning and Instruction,* Vol. 19, pp. 527-537.

Loomis, E. (1968). *The Pythagorean Proposition*. *Its Demostrations Analyzed and Classified.* National Council of Teachers of Mathematics (Classics in Mathematics Education). Washington.

Lupiáñez, J. L. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Granada, España.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina. (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Granada, España: Comares.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria.* Madrid, España: Pirámide.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte (2007). ORDEN ECI/3858/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de las profesiones de Profesor de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas. *BOE, 312*, 53751-53753.

Ministerio de Educación, Cultura y Deporte. (2015). Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato. *BOE, 3*, 176-412.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

OCDE (2005). Definición y selección de competencias. *Proyecto DeSeCo*. Recuperado de https://binomicos.wordpress.com/introduccion/deseco/

Pino-Fan, L., Godino, J. y Font, V. (2010). Conocimiento didáctico-matemático sobre la enseñanza y aprendizaje de la derivada. *Trabajo presentado en la XIII Escuela de Invierno en Matemática Educativa, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey* (pp. 206-213). Monterrey, Nuevo León, México.

Ponte, J. P. (2012). Estudando o conhecimento e o desenvolvimento profissional do professor de matemática. En N. Planas (Ed.), *Teoría, critica y práctica de la educación matemática* (pp. 83-98). Barcelona: Graó.

Rico, L. (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En L. Rico (Ed.), *La Educación Matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Barcelona, España: ICE-Horsori.

Rico, L. (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, P. Gómez y L. Rico (Eds.). (1998). *Educación Matemática* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia.

Rico, L., Gómez, P., Cañadas, M. C. (2009). Estudio TEDS-M: estudio internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas. En M.J. González, M.T. González & J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 425- 434). Santander: SEIEM.

Rico, L., Lupiáñez, J. L. y Molina, M. (Eds.). (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática. Metodología de Investigación, Innovación Curricular y Formación de Profesores*. Granada, España: Comares.

Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L., y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, *58*, 7-23.

Rico, L. y Moreno, A. (Eds.). (2016). *Elementos de Didáctica de la Matemática para el Profesor de Secundaria.* Madrid, España: Pirámide.

Rojas, N. y Flores, P. (2011). El análisis didáctico como una herramienta para identificar los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza de las fracciones. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática* (pp. 17-28). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Roscoe, M. (2014). Reasoning and Sense Making with Pythagoras. *Mathematics teacher*, *108*(3), 177-182.

Rowland, T. (2008). Researching teachers´mathematics disciplinary Knowledge. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.). *International handbook of mathematics teacher education: Knowledge and beliefs in mathematics teaching and teaching developmente*, *1*, 273-298. Rotterdam, the Netherlands: Sense Publishers.

Simon, M. A. (2000). Research on mathematics teacher development: The teacher development experiment. En R. Lesh y A. E. Kelly (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 335-359). Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Socas, M. (1998). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Luis Rico (Ed.), *Educación Matemática en Secundaria*. Barcelona, España: Horsori.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4–14.

Stacey, K. (2008). Mathematics for secondary teaching. En P. Sullivan y T. Wood (Eds.) *Knowledge and Beliefs in Mathematics Teaching and Teaching Development* (pp. 87-113). Rotterdam: Sense Publishers.

Torres, M. D. (2016). Descubriendo el Teorema de Pitágoras (Trabajo Fin de Máster). Universidad de Granada, Granada, España.

Urbaneja, P. M. G. (2008). El teorema llamado de Pitágoras: una historia geométrica de 4.000 años. *Sigma: revista de matemáticas= matematika aldizkaria*, (32), 103-130.

Zaslavsky, O., Harel, G., y Manaster, A. (2006). A teacher's treatment of examples as reflection of her knowledge-base. *Proceedings of PME 30, 5,* 457–464.

Zazkis, D. y Zazkis, R. (2016). Prospective teachers' conceptions of proof comprehension: revisiting a proof of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education, 14*(4), 777-803.

CAPÍTULO 8

ANEXO

En este anexo se recoge la parte de información que considera el análisis de contenido y cognitivo sobre el Teorema de Pitágoras que nos permite centrar las particularidades del tema escolar que tratamos y nos acerca a su especificidad marcando los límites en los que nos movemos.

8.1. ANÁLISIS DEL CONTENIDO MATEMÁTICO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Para explorar el contenido matemático sobre el "Teorema de Pitágoras" se parte desde un primer nivel de concreción dado por el currículo. En el Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y del Bachillerato, aparece organizado por bloques. Este tema se refleja en el Bloque 3 dedicado a Geometría. El Teorema de Pitágoras aparece como tal en varios cursos como en 2º y 4º de ESO. En este estudio atendemos al nivel educativo de 2º ESO (escolares de entre 12 y 13 años). El contenido decretado para el tema de Teorema de Pitágoras aparece de la siguiente forma:

- Elementos básicos de la geometría del plano. Relaciones y propiedades de figuras en el plano: Paralelismo y perpendicularidad.
- Ángulos y sus relaciones.
- Figuras planas elementales: triángulo, cuadrado, figuras poligonales.
- Clasificación de triángulos y cuadriláteros. Propiedades y relaciones.
- Medida y cálculo de ángulos de figuras planas.
- Cálculo de áreas y perímetros de figuras planas. Cálculo de áreas por descomposición en figuras simples.
- Triángulos rectángulos. El teorema de Pitágoras. Justificación geométrica y aplicaciones.

En un segundo nivel de concreción se repara en el contenido seleccionado para abordar el tema. Se identifican y organizan los distintos conceptos y procedimientos de la estructura matemática que comprende el Teorema de Pitágoras.

A) ESTRUCTURA CONCEPTUAL

Se comienza por identificar los conceptos centrales en el enunciado del teorema, es decir, los conceptos sobre los cuales se construye el significado de éste. Posteriormente se listan los procedimientos que junto a los conceptos caracterizan el tema y se especifican las relaciones entre ellos mediante un mapa conceptual.

CONCEPTOS PERTINENTES PARA EL TEMA

Se listan los conceptos que interviene en la enseñanza del Teorema de Pitágoras: ángulo, perpendicularidad, ángulo recto, triángulo; isósceles, equilátero, escaleno, acutángulo y obtusángulo, altura, triángulo rectángulo: cateto e hipotenusa, terna pitagórica, área, cuadrado, polígono, unidad de longitud y unidad de área.

Las relaciones entre conceptos que aparecen pueden ser: relación métrica entre los lados de un triángulo, relación entre las áreas de los cuadrados situados sobre los catetos y el cuadrado situado sobre la hipotenusa y la relación entre las áreas de figuras semejantes construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo.

B) PROCEDIMIENTOS INVOLUCRADOS EN EL TEMA

Los procedimientos implican unas destrezas o técnicas, razonamientos y estrategias, en las que se hace necesario el uso de operaciones y propiedades, que capacitan para establecer las relaciones con los conceptos.

DESTREZAS

Cálculo de ternas pitagóricas por tanteo, cálculo de elementos desconocidos de un triángulo rectángulo y cálculo de áreas de las principales figuras geométricas planas. Las destrezas nombradas podrán desarrollarse con el uso de potencias, radicales (raíces cuadradas); números irracionales. Además aparecerán operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) donde se empleará la regla de los signos. De igual forma se han de tener en cuenta diferentes propiedades de los elementos que intervienen tales como: longitud, área, cualquier figura poligonal puede descomponerse en triángulos y resultados como: suma de las medidas de ángulos internos de un triángulo, un triángulo rectángulo será isósceles si dos ángulos son de 45º.

RAZONAMIENTOS

Comprobar que el teorema de Pitágoras es válido sólo para los triángulos rectángulos; comprobar el recíproco del Teorema, generalizar el Teorema de Pitágoras a otras figuras diferentes del triángulo rectángulo; comprobar el teorema de Pitágoras mediante las áreas de los cuadrados que se pueden construir sobre los lados de un triángulo rectángulo o mediante áreas de figuras semejantes.

ESTRATEGIAS

Resolver triángulos rectángulos conocidos algunos datos; lados y/o ángulos; trazar rectas perpendiculares empleando el teorema de Pitágoras; calcular longitudes y áreas usando el teorema de Pitágoras.

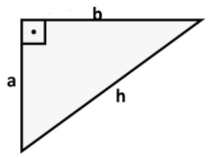
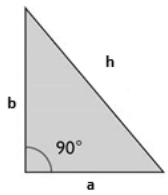
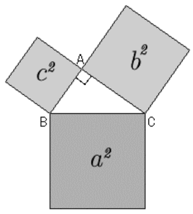
C) SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

El análisis conceptual pone de manifiesto dos interpretaciones del Teorema de Pitágoras. Es posible enunciarlo en términos de áreas o de cuadrados de medidas de longitud. Si el teorema se interpreta en términos de áreas se puede enunciar: el área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual que la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos de dicho triángulo. Si se piensa en términos de longitudes de los lados del triángulo, se puede enunciar: el cuadrado de la medida de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual que la suma de los cuadrados de las medidas de las longitudes de los catetos de dicho triángulo.

Las distintas representaciones en las que se puede expresar un concepto harán que se defina de una manera más precisa la idea que se tiene de ese concepto en cuestión, es decir, ayudan a definir su significado. Como indica Lupiáñez (2016), es importante que se traduzcan las nociones matemáticas involucradas de un tipo de representación a otro para poder asegurar la comprensión de dichas nociones o conceptos. De manera que se aporte un conocimiento más profundo del significado del concepto. Se presentan en la tabla 17 algunas de ellas.

Tabla 17

Algunas representaciones sobre el Teorema de Pitágoras

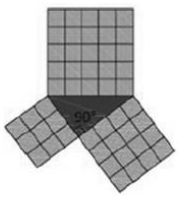
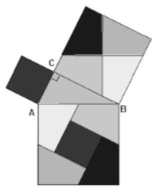
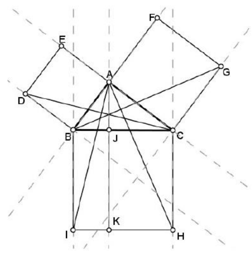
Verbal	Geométrica	Simbólica	Numérica
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.		$h^2 = a^2 + b^2$	(3,4,5)
En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.		$h^2 = a^2 + b^2$	(3,4,5)
El área del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, es igual a la suma de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos.		$A = B + C$	

Por otro lado, se encuentran las representaciones de la demostración del Teorema de Pitágoras que permiten dinamizar el aprendizaje de los conceptos que involucran al teorema, incluyendo la posibilidad de modificar, manipular y transformar las representaciones geométricas dadas cambiando la perspectiva estática inicial a otra, de forma intuitiva y activa ayudando a crear conjeturas sobre lo que se pretende enseñar.

Hay diferentes maneras de representar la demostración del Teorema de Pitágoras. En la tabla 18 se encuentran algunas de ellas.

Tabla 18

Algunas representaciones de la demostración del Teorema de Pitágoras

Geométrica	Manipulativa	Ejecutable
	Papel y lápiz	GeoGebra, Cabri
	Puzzle 2D (Tangram)	GeoGebra, Cabri
	Regla y compás	GeoGebra, Cabri

"Este teorema con la multitud de demostraciones del mismo ilustra de forma sorprendente el hecho de que hay muchas formas de alcanzar la misma verdad"

E.S. Loomis. (NCTM, 1968. p. 3).

TIPOS DE DEMOSTRACIONES GEOMÉTRICAS DEL TEOREMA

Entre las tres representaciones geométricas de la demostración del Teorema de Pitágoras que hemos presentado existen diferencias. Loomis (1968) recopiló 370 pruebas o demostraciones del Teorema de Pitágoras en una obra de mérito debido al valor científico y didáctico que se le atribuye y con la que concluye: *"[...] y el final no* *ha llegado todavía"*. De ellas, 255 pertenecen a demostraciones geométricas que el autor clasifica en 10 tipos. Por nuestra parte, hemos analizado las características de estas demostraciones atendiendo a los distintos principios que las sujetan para crear una síntesis de las mismas que resulta atractiva para el análisis de contenido de este tema por su carácter didáctico.

Hemos conseguido clasificar las demostraciones en tres grupos. Estas categorías no pretenden ser exhaustivas pues necesitaríamos estudiar muchos más tipos de demostraciones que nos permitieran perfilar la clasificación que tenemos. De hecho se han recogido sólo un total de 9 demostraciones habituales o más conocidas, singulares, que pueden ser fácilmente reconocidas por los estudiantes al revisar cualquier libro o la red. El orden en el que las agrupamos y nombramos está ligado a la dificultad de la ejecución de su demostración, de menor a mayor grado de abstracción.

- GRUPO 1. DEMOSTRACIÓN A PARTIR DE LA DIVISIÓN EN UNIDADES DE MEDIDA.

En este grupo aparecen aquellas en las que al dividir los tres cuadrados en unidades iguales, partes congruentes, se obtiene que la suma de las unidades en las que ha sido dividido el cuadrado construido sobre la hipotenusa es igual a la suma de las unidades en las que han sido divididos los cuadrados construidos sobre los catetos.

Son las más elementales e intuitivas. La relación que expresa el teorema es especialmente fácil de abordar cuando tenemos un triángulo rectángulo e isósceles como presenta Loomis (1968, p.102). En la tabla 3 se muestran dos representaciones de la demostración bajo este principio.

- GRUPO 2. DEMOSTRACIÓN A PARTIR DE DESCOMPOSICIÓN Y COMPOSICIÓN DE PARTES

Aquí se recogen las demostraciones que presentan la descomposición en partes congruentes o equivalentes de los cuadrados situados sobre los catetos para terminar por componer a modo de puzzle el cuadrado sobre la hipotenusa a partir de las partes diseccionadas en los cuadrados de los catetos. En este grupo se tiene en cuenta el planteamiento inverso, es decir, si el proceso parte de las partes en que se descompone el cuadrado situado sobre la hipotenusa. Un rasgo distintivo de este grupo es, precisamente, la composición de puzles pitagóricos, obteniéndose de esta forma infinidad de representaciones para su demostración. Ocupan el tipo de demostraciones sin palabras.

Ejemplo de este tipo de procedimiento aparece en la demostración de Perigal y de Bhaskara que a partir de un triángulo rectángulo se ha hecho una partición en cinco partes del cuadrado de lado la hipotenusa, cuatro de estas partes son triángulos rectángulos iguales al de partida y la otra es un cuadrado de lado b-c. Esas mismas cinco piezas recubren los dos cuadrados de lados los catetos. Las demostraciones de Zhoui Bi y Pitágoras también se localizan en esta categoría pero presentan un matiz, pues la posición del triángulo rectángulo no se presenta de la misma manera, posición convencional, a como aparece en las dos anteriores.

Las demostraciones de Zhoui Bi y Pitágoras muestras una disposición que no es visualmente tan evidente a pesar de que puedan tener una apariencia similar remite a una descomposición distinta que incluye en la de Zhoui Bi el pequeño cuadrado central. Tanto la una como la otra obedecen a una acción distinta, un grado de abstracción mayor, aunque su finalidad sigue siendo la de los puzles pitagóricos en las que se necesita componer y descomponer partes.

Aunque no la incluimos en la tabla 19 por carecer de originalidad con respecto a las presentadas, hay una demostración, la de Gardfiel, que es derivada de la de Pitágoras dividiendo la primera figura de la demostración en un trapecio y que también suele aparecer en la búsqueda de información sobre las diferentes demostraciones del teorema. Todas las demás se muestran en la tabla 19.

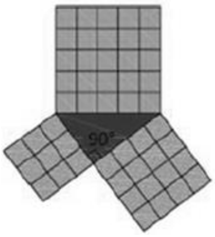
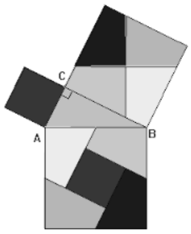
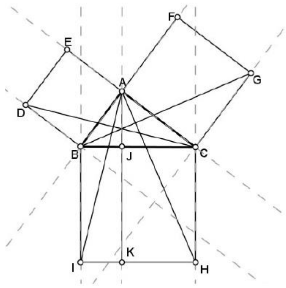
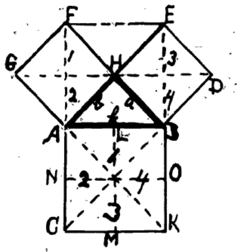
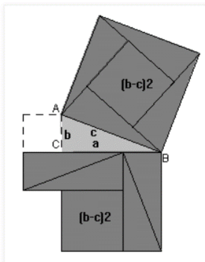
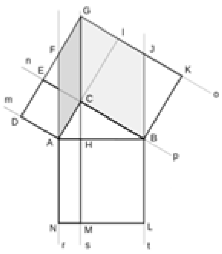
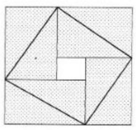
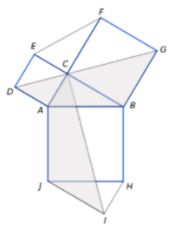
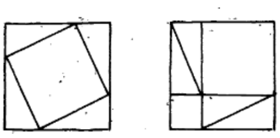
- GRUPO 3. DEMOSTRACIÓN A PARTIR DE TRANSFORMACIONES

Este tipo de demostraciones son las que requieren de una deducción en un grado de abstracción mayor. Las relaciones de equivalencia y correspondencia entre figuras hacen de este tipo de demostraciones unas que no se deducen en absoluto del enunciado del Teorema sino que consiste en una continua llamada a resultados ya conocidos.

Se llaman de transformación porque en los procesos implicados en la deducción de la misma hay cambios de forma en figuras que finalmente representan la misma área. Como ejemplo de este tipo de demostraciones encontramos la de Euclides, Da Vinci y Pappus. La demostración de Leonardo da Vinci propone la aparición de más figuras que las de partida para efectuar la demostración. Requiere del uso de dos triángulos iguales al primero observándose un matiz con respecto a las demás que forman esta clasificación. Se representan en la tabla 19.

Tabla 19

Tipos de demostraciones del Teorema de Pitágoras

Grupo 1	Grupo 2	Grupo 3
	Perigal 	Euclides 
	Bhaskara 	Pappus 
	Zhou Bi 	Leonardo Da Vinci 
	Pitágoras 	

Al contario que con las demostraciones algebraicas, las geométricas son ilimitadas como puede intuirse de la clasificación que hemos mostrado.

FENÓMENOS

Atendiendo a los fenómenos y problemas a los que el Teorema de Pitágoras da respuesta se puede comenzar por revisar el origen histórico de ellos, desde donde nacen los conceptos debidos siempre a una necesidad. Este teorema constituye un hito en la Historia de las Matemáticas y en la matemática escolar; sin embargo, el escaso conocimiento de los profesores sobre el discurso histórico relacionado con el teorema no permite que se incorporen elementos históricos que ayudan en el proceso de aprendizaje.

Se exponen algunos ejemplos de los fenómenos que dieron origen al resultado que presenta el teorema en Egipto. Los famosos papiros de Rhind y de Moscú, a pesar de su alto valor matemático, no mencionan el Teorema de Pitágoras ni las ternas pitagóricas. No obstante, los egipcios conocían y utilizaban el hecho de que el triángulo de lados 3, 4 y 5 (o proporcionales a estos números), llamado "Triángulo egipcio o de Isis", de carácter sagrado, es rectángulo, para trazar una línea perpendicular a otra. Era una práctica habitual para recuperar las fronteras de las lindes de las tierras tras los periódicos corrimientos de tierras producidos por las crecidas del río Nilo (Urbaneja, 2008).

Otro ejemplo que se presenta en Urbaneja (2008) corresponde a la aplicación de este resultado en la agricultura. Apareció la profesión de *arpedonapta* (tendedor de cuerda), tal y como refleja la fotografía interior, los cuales, utilizaban las medidas del *triángulo sagrado* para usarlo a modo de escuadra con el objetivo de trazar líneas perpendiculares.

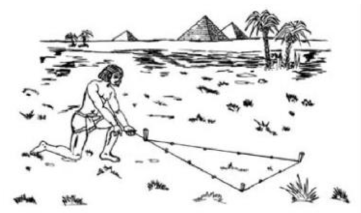


Figura 17. Profesión de arpedonapta

De forma global la historia sobre la relación entre los lados de un triángulo rectángulo se puede dividir en tres etapas de desarrollo matemático. En la inicial, puramente aritmética y empírica en la se obtienen resultados numéricos concretos para los lados del triángulo. Una siguiente etapa, aritmético geométrica en la que se obtienen leyes generales de formación de los lados. Finalmente se termina investigando las demostraciones de los resultados generales de las etapas precedentes. Las dos primeras etapas corresponden a civilizaciones orientales mientras que a la tercera etapa sólo contribuyeron los griegos, particularmente Pitágoras y Euclides. En el "*Libro I de los Elementos de Euclides*", aparece el Teorema inverso, recíproco, del Teorema de Pitágoras.

Se pone de manifiesto la gran cantidad de demostraciones posteriores a la inicial del Teorema de Pitágoras, siendo éste el Teorema con mayor número de demostraciones a lo largo del avance matemático. Estas demostraciones ordenadas cronológicamente vienen dadas por: Pappus (aprox. 300 d.C.), Bhaskara (aprox. 1150), Leonardo Da Vinci (aprox. 1500), Anaricio-Göpel (1824) ó Perigal (1830).

A) MAPA CONCEPTUAL

En el mapa conceptual se establecen las relaciones entre conocimiento conceptual y procedimental. Es una herramienta que permite indagar en el contenido matemático y posibilita una visión global y estructurada del contenido matemático que ayudará a la toma de decisiones en los futuros análisis cognitivo e instruccional. La finalidad es definir las prioridades de aprendizaje que tienen que ver con los objetivos que después se mencionan. Se representan los focos o conceptos principales, en mayúscula, con sus diferentes conexiones jerarquizando de esa manera las nociones dentro de cada concepto (Rico, Marín, Lupiáñez y Gómez, 2008):

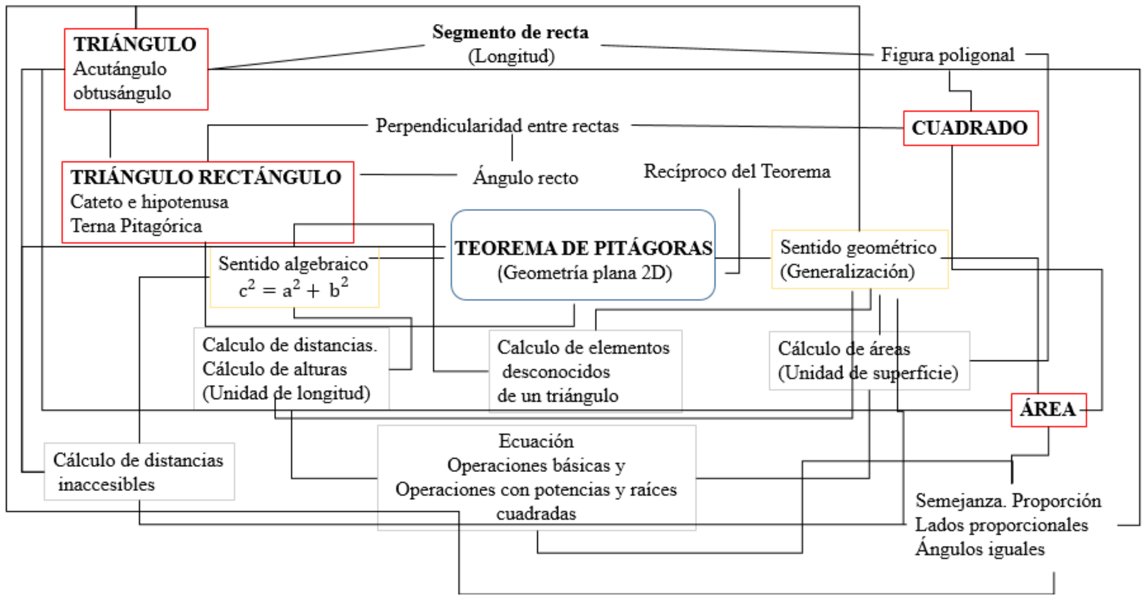


Figura 18. Mapa conceptual: Teorema de Pitágoras y Semejanzas

Para llevar a cabo un procedimiento ubicado en este tema es necesario conocer lo que representa una ecuación., saber despejar cada uno de los miembros de una ecuación, y conocer lo que representa la simbología de igualdad y desigualdad en una ecuación. Además conocer las unidades de medida en el cálculo de longitudes y áreas así como saber interpretar resultados, por ejemplo, la imposibilidad de que un resultado que identifique una longitud aparezca como una medida negativa.

Finalmente se ha podido detallar la información que emerge de un tema específico de la matemática escolar mediante el estudio llevado a cabo con los organizadores del análisis de contenido, promoviendo además un sentido cíclico que permite modificar o añadir aspectos cada vez que cambiamos de nivel y que seguirá manteniendo este sentido en los posteriores análisis.

8.2. ANÁLISIS COGNITIVO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

En esta parte presentamos el resto de la información que conforma la dimensión cognitiva sobre el Teorema. Anteriormente se expresaron las expectativas y oportunidades de aprendizaje, en este punto seguimos por marcar unos objetivos específicos que buscan lograr las expectativas planteadas además de estudiar las limitaciones del aprendizaje en función de las dificultades y errores que se pueden manifestar en el aprendizaje del tópico.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Partiendo de los focos principales presentados en el anterior análisis se presentan los objetivos específicos para el tema del Teorema de Pitágoras y Semejanzas. Los objetivos específicos que se esperan lograr es que los alumnos sean capaces de:

O1. Identificar y representar los elementos característicos de un triángulo rectángulo.

O2. Descubrir la demostración geométrica del Teorema de Pitágoras mediante recursos tecnológicos.

O3. Relacionar el sentido geométrico y aritmético del Teorema de Pitágoras.

O4. Aplicar el teorema de Pitágoras tanto en su sentido geométrico como aritmético.

O5. Obtener áreas calculando, previamente, algún segmento mediante el Teorema de Pitágoras.

O6. Estudiar el concepto de semejanza y de razón de semejanza, aplicarlo para la construcción de figuras semejantes y para el cálculo indirecto de longitudes.

O7. Resolver problemas geométricos utilizando los conceptos y procedimientos propios de la semejanza.

O8. Aplicar el Teorema de Pitágoras para resolver problemas de situaciones reales.

O9. Interpretar los resultados obtenidos justificando su veracidad.

La consecución de los objetivos se hará mediante la selección, organización, planificación y puesta en marcha de una secuencia de tareas así como la aplicación de ciertos recursos que utilizar en cada sesión en concreto. Aunque no nos detendremos en este estudio mediante un análisis de instrucción, es importante señalar que con todo ello se podrá manifestar el desarrollo paulatino de las competencias y el logro de los objetivos. En la tabla 20 se presentan la relación entre los objetivos establecidos y las competencias que se pretenden desarrollar.

Tabla 20

Relación entre los Objetivos pretendidos con la Tarea y las Competencias Pisa

	Competencias Pisa (2012)						
Objetivos específicos	RA	M	RP	R	LS	C	HM
O1	X			X			
O2	X			X			X
O3			X		X		
O4			X				
O5			X				
O6	X		X				
O7			X		X		
O8		X					
O9	X					X	

Nota. RA: razonar y argumentar, M: matematizar, RP: elaborar estrategias para resolver problemas, R: representar, LS: Lenguaje simbólico, C: comunicar, HM: usar herramientas matemáticas.

A) LIMITACIONES PARA EL APRENDIZAJE: DIFICULTADES Y ERRORES

Las dificultades para el aprendizaje matemático escolar son aquellos factores que obstaculizan la comunicación entre el profesor y el alumno, la propia interacción del profesor con el conocimiento matemático, o repercuten en la relación del estudiante con el conocimiento matemático. Las dificultades pueden dar lugar a conocimientos deficientes del escolar que se repiten de forma regular, generando modos sistemáticos de razonamientos inadecuados o incoherentes; respuestas falsas o inexactas, observables, que se denominan errores de aprendizaje (Rico y Moreno, 2016).

Los errores que puedan observarse van asociados a una dificultad de distinto origen. Socas (1997) sostiene que las dificultades de aprendizaje en matemáticas pueden clasificarse en: *dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos, dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático, dificultades que surgen con motivo de procesos de enseñanza y las dificultades asociadas al desarrollo cognitivo.*

Desde un punto de vista personal es inevitable pensar en dificultades y errores sin pensar en resolución de tareas. La búsqueda, detección y organización de los errores y dificultades relacionados forma parte de la planificación de unidades didácticas, así como la identificación de medidas para superar tales deficiencias. Los errores ayudan a que el profesor diagnostique conocimientos deficientes, los reconozca y ayude al escolar a mejorar la comprensión de dicho contenido. En la tabla 21 se presentan las dificultades asociadas a una serie de errores basadas en mis creencias personales al respecto y en una corta experiencia con estudiantes de este nivel educativo.

Tabla 21
Relación entre los errores que pueden observarse y las dificultades asociadas

Origen de la dificultad	Dificultades	Errores
Surge con motivo de procesos de enseñanza	**D.1.** Dificultad para reconocer o identificar los elementos propios de un triángulo rectángulo cuando la orientación estándar de éste cambia	**E.1.1**. No caracterizar un triángulo rectángulo como tal.
Asociada a los procesos de pensamiento matemático	**D.2.** Dificultad en la comprensión del carácter geométrico del teorema. El paso de magnitud longitudinal a una de superficie	**E.2.1**. Tratar el área como una longitud y elevarla al cuadrado para obtenerla. **E.2.2.** Escribir incorrectamente las unidades las unidades correspondientes o no escribirlas.

Origen de la dificultad	Dificultades	Errores
Asociada a la complejidad de los objetos matemáticos	**D.3.** Dificultad para interpretar razonadamente el enunciado de un problema a resolver.	**E.3.1.** Desarrollar mecánicamente el ejercicio sin analizar previamente la posición geométrica de los elementos que interviene en el problema. **E.3.2.** Dar una respuesta distinta o adicional a la que se pide en un problema geométrico **E.3.3.**Realizar un planteamiento en discordancia con el enunciado de un problema geométrico dado.
Asociada a la complejidad de los objetos matemáticos	**D.4.**Dificultades en la notación	**E.4.1.**Utilizar inadecuadamente las notaciones de los elementos geométricos
Asociada a la complejidad de los objetos matemáticos	**D.5.** Dificultad para despejar en una ecuación. (Dificultad por la carencia de conocimientos previos)	**E.5.1.** Cálculo erróneo de un lado desconocido de un triángulo rectángulo. **E.5.2.** Interpretación fallida de un resultado obtenido. **E.5.3.** Ejecutar incorrectamente operaciones aritméticas
Asociada al desarrollo cognitivo o a los procesos de enseñanza.	**D.6** Dificultad en la compresión del concepto de semejanza.	**E.6.1.**No existe visualización de las proporciones.

Origen de la dificultad	Dificultades	Errores
Surge con motivo de procesos de enseñanza	**D.7.** Dificultad para trabajar con las nuevas tecnologías	**E.7.1.** Insertar incorrectamente las órdenes en Geogebra
Asociada a los procesos de enseñanza	**D. 8.**Dificultad en la representación gráfica	**E.8.1**.Dibujar una representación gráfica que no se corresponde con el enunciado **E.8.2**.Tomar un mal dato de una representación gráfica o ignorarlo en la solución o demostración de un problema. **E.8.3**.Trazar defectuosamente sus elementos
Asociada a los procesos de pensamiento matemático	**D.9.** Dificultad para reconocer el método idóneo para enfrentarse al problema	**E.9.1**. Usar una estrategia inadecuada para resolver un problema geométrico
Asociada a los procesos de pensamiento matemático	**D.10.** Dificultad en la matematización o modelización de un problema dado	**E.10.**Transformar defectuosamente una situación problemática real en un problema geométrico
Asociada al desarrollo cognitivo, Asociada a los procesos de enseñanza y asociada a la complejidad de los objetos matemáticos	**D.11.** Dificultad para relacionar conocimientos y propiedades geométricas básicas	**E.11.1.** No atender a la propiedad de la suma de los ángulos de un triángulo. **E.11.2.** No atender a que un triángulo rectángulo puede ser isósceles **E.11.3.** Interpretar y usar inadecuadamente una definición geométrica

A modo de resumen se muestra la tabla 22 la relación entre objetivos y errores que puedan observarse.

Tabla 22
Vínculo entre los objetivos pretendidos y errores que pueden observarse

Objetivos específicos	Errores
O1	E.1.1, E.4.1, E.5.1, E.8.1, E.9.1.
O2	E.2.1, E.6.1, E.7.1
O3	E.2.1, E.2.2, E.4.1, E.5.1, E.5.3, E.9.1
O4	E.1.1, E.2.1, E.2.2, E.4.1, E.5.1, E.9.1
O5	E.4.1, E.2.2, E.5.3, E.8.1, E, 8.2.
O6	E.3.3, E.5.1, E.6.1, E.8.1, E.8.3, E.9.1
O7	E.3.1, E.3.2, E.3.3, E.6.1, E.11.1, E.11.2, E.11.3
O8	E.8.1, E.8.2, E.8.3, E.9.1, E.10.
O9	E.4.1, E.5.2, E.3.2, E.11.1, E.11.2, E.11.3

Hemos completado así el análisis del contenido matemático y el análisis cognitivo del tema escolar el Teorema de Pitágoras. Esta descripción detallada que permite el análisis didáctico nos proporciona una posición firme y consistente desde la que situarnos frente al estudio de un tema específico.