Curso 2010-2011

Formalización del concepto de semejanza. Introducción a sus aplicaciones en problemas prácticos.

María Dolores Millán Villegas

Universidad de Granada

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

El siguiente Trabajo Fin de Máster ha sido desarrollado dentro del Máster Universitario de Formación del Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas, especialidad de Matemáticas, en la Universidad de Granada. La realización del mismo ha estado supervisada por D. Pablo Flores Martínez, profesor del Departamento de Didáctica de las Matemáticas de esta Universidad.

Este trabajo consiste en el desarrollo de un diseño curricular fundamentado, que se centra en una unidad didáctica para el tema de la semejanza de figuras, tema importante en el currículo para la Educación Secundaria Obligatoria. El diseño curricular base definía una unidad didáctica como "Una unidad de trabajo relativa a un proceso de enseñanza-aprendizaje, articulado y completo, precisándose en ella los contenidos, los objetivos, las actividades de enseñanza-aprendizaje y las actividades para la evaluación y especificando que en estos elementos deben tenerse en cuenta los diferentes niveles de la clase y desarrollar en función de ellos, las necesarias adaptaciones curriculares".

En él, vamos a recorrer los aspectos básicos a tener en cuenta a la hora de realizar una unidad didáctica y los aplicaremos para desarrollar una planificación docente. Esta, estará enfocada al estudio de la semejanza de figuras y de su aplicación práctica para el curso de tercero de la Educación Secundaria Obligatoria.

Para el desarrollo de una unidad, tenemos que ser conscientes de a qué alumnos va dirigida y bajo qué condiciones se va a trabajar. Puesto que en las prácticas he trabajado este tema en una clase de 3º de ESO, me voy a apoyar en sus características, tanto físicas como materiales, para el desarrollo de este trabajo. Imaginemos que trabajamos en un instituto céntrico de ciudad, caracterizado por su dinamismo y la participación en proyectos educativos como el bilingüismo y las TIC. La clase tendrá un ratio de unos 25 alumnos, los que tendrán un nivel cognitivo homogéneo y dentro de la media, con interés manifiesto por aprender.

Como ayuda al lector, vamos a dar unas breves pinceladas sobre los puntos básicos de este trabajo y qué estudiaremos en cada uno de ellos. La unidad didáctica que presentamos está estructurada en dos bloques globales.

En el primero, hacemos los análisis previos necesarios para desarrollar posteriormente la planificación y que deberían servir al profesor para concretar la enseñanza y el aprendizaje del tema en cuestión. Es decir, hacemos la revisión curricular, revisamos la historia del tema, presentamos la estructura conceptual que vamos a desarrollar, luego describimos los sistemas de representación que aparecerán en el tema y proponemos un análisis fenomenológico que nos servirá para situar algunas actividades. Por último analizamos las expectativas de aprendizaje que vamos a considerar y las limitaciones que pueden aparecer en el aprendizaje del tema.

En el segundo bloque desarrollamos la planificación didáctica que proponemos. Primero aparece la secuenciación de las tareas, los recursos que vamos a utilizar en ella y luego, el desarrollo de las sesiones.

Por último proponemos la evaluación, con los criterios de evaluación que consideramos, las técnicas y los instrumentos que vamos a considerar, unas conclusiones a modo de aporte para la formación y la bibliografía consultada.

DESARROLLO

CONTEXTO CURRICULAR

En el momento de llevar a cabo la planificación de una unidad didáctica, tenemos que considerar lo que a nivel educativo viene legislado en las correspondientes leyes, tanto en Reales Decretos como en los Decretos correspondientes para cada comunidad autónoma.

En la **Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio**, se establece el currículo y se regula la ordenación docente en la Educación Secundaria Obligatoria a nivel nacional. En ella, podemos encontrar el desarrollo de cada una de las componentes del currículo[1] en la materia de Matemáticas. A nivel general de etapa, se establecen unos contenidos comunes junto con pautas pedagógicas que ayuden a lograr el aprendizaje y se fijan los objetivos de esta asignatura. A nivel específico de cada curso, aborda los contenidos, que vienen desarrollados por bloques, y los criterios de evaluación.

El tema de la semejanza se sitúa en el Bloque de Geometría, y va a ser tratado de forma específica en los cursos de 2º, 3º y 4º de ESO. Veamos cuales son los contenidos de semejanza en estos cursos, para tenerlo en cuenta a la hora de abordar los análisis didácticos y la posterior planificación:

2º ESO	3º ESO	4º ESO
La proporcionalidad de segmentos y el teorema de Tales. Figuras con la misma forma y distinto tamaño. La semejanza. Identificación de relaciones de semejanza. Ampliación y reducción de figuras. Obtención, cuando sea posible, del factor de escala utilizado. Razón entre las superficies de figuras semejantes. Interpretación y obtención de valores en planos, mapas y maquetas. Utilización de los teoremas de Tales y Pitágoras para obtener medidas y comprobar relaciones entre figuras.	Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras a la resolución de problemas geométricos y del medio físico. Curiosidad e interés por investigar sobre formas, configuraciones y relaciones geométricas.	OPCIÓN A Aplicación de la semejanza de triángulos y el teorema de Pitágoras pasa la obtención indirecta de medidas. Utilización de los conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc. OPCIÓN B Utilización de los conocimientos geométricos en la resolución de problemas del mundo físico: cálculo de longitudes, áreas, volúmenes, etc. Razón entre longitudes, áreas y volúmenes de cuerpos semejantes.

[1] *"Se entiende por currículo de la Educación Secundaria Obligatoria el conjunto de objetivos, competencias básicas, contenidos, métodos pedagógicos y criterios de evaluación de esta etapa educativa."*. Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio.

Esta unidad se va a centrar en el curso de 3º de ESO, en el que como vemos, se enfatiza la aplicación de la semejanza en la resolución de problemas. Es en el curso de 2º de ESO donde se abordan los conceptos de proporción y de semejanza y el estudio sobre figuras, los cuales vamos a recordar y formalizar en 3º. Además, puesto que en 4º también se busca la resolución de problemas y la aplicación práctica de la semejanza, pretenderemos poner los cimientos para el estudio de problemas. Como vemos, el estudio de la semejanza en 3º será el nexo de unión entre 2º y 4º, formalizando matemáticamente los aspectos vistos y dando paso al estudio de la aplicación práctica para resolver problemas.

La **orden de 10 de agosto de 2007**, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía (BOJA 30-8-2007), apuesta por *abordar la enseñanza y aprendizaje de los contenidos de forma cíclica, gradual y con atención a todos los bloques*. Establece seis núcleos temáticos, de interés en este caso, el 5 "Las formas y figuras y sus propiedades". En él, promueve la enseñanza a través de la experimentación, y establecer relaciones entre la geometría, el arte y la naturaleza, entre otras ideas. En relación con la semejanza, ejemplifica que "el descubrimiento en distintas manifestaciones de nuestro entorno del rectángulo áureo o del rectángulo cordobés, contribuirá a apreciar las proporciones correspondientes (...)".

Para de alguna manera apoyar la enseñanza de la semejanza en la ESO, es interesante mirar también qué se dice a nivel curricular en un documento de gran impacto en educación matemática; ***Principles and Standards for School Mathematics (NCTM, 2003)***, del *National Council of Teachers of Mathematics (NCTM),* traducido por la *Sociedad Andaluza de Matemáticas de Educación Matemática Thales*. En este documento podemos encontrar que entre las expectativas que se deberían desarrollar en la Etapa 6-8 (correspondiente a la ESO en España) para el núcleo temático de geometría. Veamos de manera resumida las expectativas relacionadas con la semejanza de figuras:

Análisis de características y propiedades de figuras geométricas y desarrollar razonamientos matemáticos sobre relaciones geométricas	- Comprender las relaciones entre los ángulos, las longitudes de los lados, los perímetros, las áreas y los volúmenes de objetos semejantes. - Crear y criticar argumentos inductivos y deductivos concernientes a conceptos y relaciones geométricas como la semejanza.
Aplicar transformaciones para analizar situaciones matemáticas	- Describir los tamaños, las posiciones y las orientaciones de figuras geométricas sometidas a transformaciones como escalas. - Examinar la semejanza usando transformaciones.
Utilizar la visualización, el razonamiento matemático y la modelización para resolver problemas	- Reconocer y aplicar ideas y relaciones geométricas en campos ajenos a la clase de matemáticas, como el arte, las ciencias y a vida diaria.

Como vemos, queda fundamentada la enseñanza de la semejanza en la ESO con estos tres documentos consultados, no sólo porque marquen los contenidos y las expectativas a desarrollar, sino porque con ella se contribuye a desarrollar el razonamiento de los alumnos, puede servir de herramienta para la solución de problemas y fomenta la visión matemática que nos ayuda a entender el entorno que nos rodea.

DESARROLLO HISTÓRICO DEL TEMA

En muchas ocasiones, no se le da la importancia que merece a la Historia de las Matemáticas y es, en realidad, una fuente de conocimiento, inspiración y guía en la labor docente que puede llevar a cabo una persona. Es en el devenir de su desarrollo, donde la Matemática acumula un gran conjunto de hechos que ponen al descubierto que los conceptos, propiedades, demostraciones y teorías matemáticas tienen su punto de partida en la práctica ligada a los problemas del mundo real. Además la historia muestra los errores y dificultades que los hombres han tenido para llegar al punto actual en el que se encuentra esta ciencia, y cómo se lograron superar. Estos dos aspectos son cruciales para la práctica docente, pues con ellos se puede enriquecer la enseñanza a través de la visión práctica de las Matemáticas y prevenir al docente, por decirlo así, sobre los puntos en los que los alumnos podrán tener conflictos. Dicho esto, veamos lo interesante que fue el desarrollo de la semejanza.

Para las siguientes notas históricas, las fuentes bibliográficas que hemos consultado han sido los libros de Boyer (1999), Esteban y otros (1998) y Giménez y otros (2009), que aparecen en la bibliografía.

Para analizar los orígenes de la semejanza tenemos que remontarnos al periodo 1900-1600 a.C, periodo de esplendor del **Imperio Babilónico**. Esta civilización alcanzó grandes logros en álgebra pero también en geometría. Los avances más notables en geometría, que precedían el trabajo de los griegos, se produjeron en dos áreas en las que podían conjugar sus conocimientos algebraicos: trabajos sobre el teorema de Pitágoras y sobre los triángulos semejantes. Conocían propiedades de los triángulos semejantes (aunque no conozcamos cómo las formulaban), que las aplicaban para resolver numerosos problemas relacionados con estos conocimientos. Se han encontrado numerosas tablillas de arcilla, como la que aparece en la imagen, con contenido matemático y con problemas geométricos acompañados de solución.

Tablilla con motivos geométricos

Otra civilización que dio grandes avances en geometría fue la **egipcia**, aunque su conocimiento de esta rama era práctico. Sus dominios han llegado hasta nuestros días en papiros encontrados en algunas excavaciones. Uno de los más conocidos es el Papiro Rhind, imagen de la derecha, en él aparecen una serie de problemas resueltos. El problema número 56 contiene "lo que podríamos llamar unos rudimentos de trigonometría y de una teoría de triángulos semejantes."(Boyer, 1999, 40).

Papiro Rhind

En relación con **Mesopotamia**, parece que conocían un cierto concepto de semejanza, idea que se obtiene al analizar las numerosas tablillas encontradas (sobre todo durante la dinastía de Hammurabi, 1800-1600 a.C) y los muchos problemas sobre medida de triángulos que en ellas aparecen. En el museo de Bagdad hay una tablilla con un problema que utiliza en su resolución la relación entre las áreas de figuras semejantes y los cuadrados de los lados correspondientes.

Hasta este momento parece que el conocimiento de la semejanza, con todo lo que ello involucra, se limita a meras formulaciones prácticas y herramientas para solucionar los problemas prácticos que se les planteaban. Ahora nos adentramos en el mundo de la **Grecia clásica**, a partir del siglo VII a. C con la aparición de las escuelas jónicas. Los estudiosos de esta época, inician las bases de la matemática "formal" con la propuesta de teorías, las primeras demostraciones de teoremas y la estructura lógica que caracteriza a esta ciencia.

De entre los grandes científicos de esta época encontramos a *Tales de Mileto*, uno de los siete sabios de Grecia. Entre sus aportaciones más importantes a la proporcionalidad geométrica está el

Teorema de la Proporcionalidad de segmentos, teorema bajo el cual se auspició la creación de la ciencia griega de las proporciones. Existen también diferentes relatos sobre cómo calculaba distancias inaccesibles, para por ejemplo medir la altura de las pirámides en sus visitas a Egipto, que reflejan su acercamiento a las ideas de semejanza de triángulos.

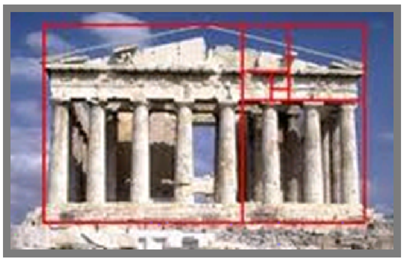
La *escuela de los pitagóricos* hizo también numerosas aportaciones a la geometría en general, y a la proporcionalidad en particular. Algunas fuentes mantienen que la demostración que dieron del llamado Teorema de Pitágoras se sustentaba en la semejanza de triángulos[2]. También estudiaron a través de la proporción las notas musicales, dándoles una "interpretación" espacial. Los Pitagóricos experimentan con el monocordio para, según se cree, llegar a establecer la correspondencia ente los intervalos musicales y las razones matemáticas de una cuerda, viendo que determinados intervalos se producían al considerar razones simples a:b, donde "b" representaba la cuerda entera y "a" una parte de ella. Reflexionan además sobre la relación entre la composición de razones matemáticas y la composición de intervalos musicales. Con ello se muestra cómo los griegos trabajan con conceptos matemáticos teóricos.

Pitágoras representado estudiando las relaciones entre la longitud de las cuerdas y los sonidos. Se trata de un grabado del libro *"Theorica Musicae".*

En este periodo surgen *tres problemas clásicos* conocidos como "los tres grandes problemas de la geometría griega". El primero consiste en calcular mediante regla y compás el lado de un cubo cuyo volumen es el doble que el de otro dado. Sobre el origen del problema hay disparidad, pero lo cierto es que el estudio del mismo llegó hasta el s. XIX (cuando se demuestra que esta construcción no es posible). Lo importante es que estos estudios promovieron el desarrollo de las matemáticas.

Uno de los matemáticos más importantes de estos siglos fue *Eudoxo de Cnido*, quien desarrolló la Teoría de las Proporciones, uno de los logros más importantes de esta época. Está recogida en los libros de *Euclides,* quien recopiló en ellos el saber matemático conocido hasta la época. En los libros V de su obra, "*Los elementos*", se estudia la proporcionalidad entre segmentos y en el VI se aborda el estudio de la semejanza entre figuras planas. Aparecen tres definiciones de figuras semejantes y en qué consiste la división de un segmento en media y extrema razón. A la razón entre el todo y el trozo mayor es lo que llamamos hoy día la razón aurea.

La **razón aurea** es una las cuestiones que ha fascinado a matemáticos de todos los tiempos, debido a sus propiedades estéticas, a la relación que hay entre la misma y la naturaleza, y el uso que se la he dado en el arte y en la arquitectura.


Rectángulos áureos que aparecen en el Partenón

A pesar de que aparezca en *Los elementos* no se piensa que éste sea el punto de partida en su estudio. Se especula entre *Teodoro de Cyrene, Pitágoras, Platón o Hipsicles*, pero lo cierto es que de alguna manera, todos ellos contribuyeron en el estudio del mismo. El primero que comienza a plantearse el asociar un número a esta razón es *Herón,* y le sigue *Ptolomeo*, ambos calculan relaciones aproximadas pero no dan con el valor exacto del número de oro.

Con el desarrollo del álgebra en la cultura árabe están cada vez más cerca de obtener el valor del número áureo. Dos matemáticos árabes, Al-Khwarizmi y Abu Kamil, resuelven varios problemas en

[2] http://es.wikipedia.org/wiki/Teorema_de_Pit%C3%A1goras, visitado 3 de mayo de 2011

sus respectivos libros que tratan la división de una línea de longitud 10 de diferentes formas relacionadas con la proporción áurea, pero no existe referencia explícita a la misma. Es años más tarde, cuando Fibonacci indica claramente la conexión entre los dos problemas de Abu Kamil y la proporción áurea.

En 1597, *Michael Maestlin* aporta la primera expresión decimal del número de oro. Encuentra el valor de 'aproximadamente 0,6180340' para la longitud del segmento más largo de una línea de longitud 1 dividida en la proporción áurea. *Kepler* descubre que la relación entre términos consecutivos de la sucesión de Fibonacci tiende a la proporción áurea, y lo dice explícitamente en una carta que escribió en 1609.

En general, han sido muchos los matemáticos que han estudiado y escrito sobre la proporción áurea y, al igual que su estudio, su nomenclatura también ha ido cambiando con el tiempo hasta conocerla hoy día con el nombre de divina proporción.

El uso de una *escala* aparece en la carta náutica más antigua que se conoce, la "Carta Pisana" cuya imagen podemos ver a la derecha. Cuenta con una escala bidireccional subdividida en varios segmentos que corresponden a 200, 50, 10, y 5 millas. En los mapas a partir del s. XIII, la escala aparece con el término de "tronco de leguas" y se representaba en forma gráfica con la intención de expresar en leguas las distancias entre los distintos puertos.

Carta Pisana

Podemos pensar que en este momento el concepto de semejanza alcanzado es el que actualmente tratamos, y en cierto sentido no se aleja mucho de lo que en la educación básica se enseña, sobre todo en los primeros niveles.

Si nos situamos en el plano y entendemos que la semejanza es una propiedad que se presenta en algunas figuras *(misma forma aunque distinto tamaño)* esta idea ha sido estudiada en estos periodos. El estudio de la semejanza como transformación *(una correspondencia biunívoca tal que si A′ y B′ son las imágenes de dos puntos cuales quiera Ay B se verifica que* $\frac{A'B'}{AB} = k$*, donde k es un valor fijo llamado razón de semejanza)* se alcanza históricamente con el desarrollo de las geometrías no euclídeas y la geometría proyectiva, que son las encargadas de avivar el estudio de las transformaciones de los espacios considerados y aquellas propiedades que permanecen invariantes por ellas.

El estudio de las transformaciones en general, tuvo su desarrollo en los siglos XVIII y XIX sobre todo con el estudio de la geometría proyectiva, que encontró su punto de arranque en el estudio de la perspectiva por parte de los artistas renacentistas. Fue el matemático August Ferdinand Möbius (1790-1868) quién llegó a distinguir entre los distintos tipos de transformaciones de un plano (congruencias, semejanzas, afinidades y colineaciones).

Por último concluir que el estudio de la semejanza continúa en nuestros días gracias al interesante campo de investigación de la geometría fractal, en el que aparecen conceptos como "autosemejanza".

ESTRUCTURA CONCEPTUAL

En este punto, el estudio se centra en *abordar la cuestión de los significados de un concepto en las matemáticas escolares desde la perspectiva de su relación con otros conceptos*. Este análisis se hizo de forma general para el estudio de la semejanza de figuras durante todo el ciclo educativo de ESO (lo podemos encontrar en el anexo). A partir de él, hemos seleccionado aquellos conceptos y procedimientos en los que nos centraremos en nuestra unidad.

Para llevar a cabo el análisis de la estructura conceptual del tema que vamos a estudiar, tendremos en cuenta dos grandes campos, el **conceptual** y el **procedimental**.

→ En nuestro estudio, dentro del **campo conceptual** daremos principal importancia a los siguientes **términos**:
  - Razón.
  - Proporción.
  - Triángulos en posición de Tales.

→ De entre los **conceptos** nos vamos a centrar en:
  - Movimiento rígido[3].
  - Homotecia.
  - Semejanza de figuras.
  - Razón de semejanza.
  - Criterios de semejanza de triángulos.
  - Razón de perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.

→ Por último, en las estructuras conceptuales que vamos a cubrir encontramos:
  - Teorema de Tales.

→ Dentro del campo procedimental desarrollaremos las siguientes **destrezas**:
  - Reconocer la composición un movimiento rígido y una homotecia.
  - Determinar si dos razones forman una proporción.
  - Calcular el cuarto término en una proporción.

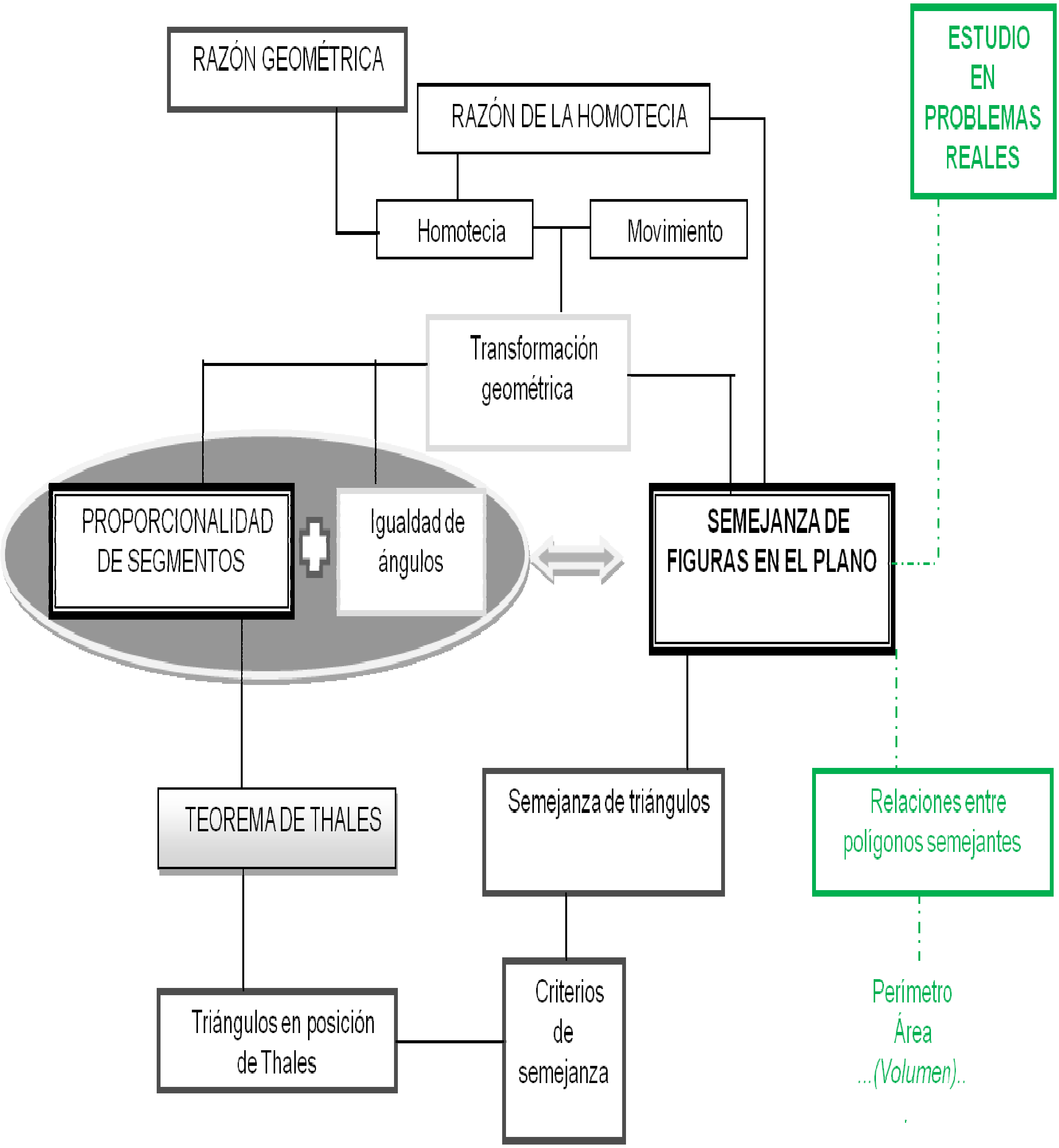
→ Los diferentes tipos de **razonamientos** que trataremos en nuestra planificación serán:
  - Deductivo:
    - Identificar figuras semejantes a partir de las definiciones de semejanza dadas.
    - Obtener la medida de ángulos y lados en figuras semejantes utilizando esta relación.
  - Inductivo:
    - Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos en relación de semejanza.
    - Establecer las condiciones para que dos figuras sean semejantes.
    - Rebajar las condiciones para la semejanza en el caso de los triángulos. Criterio de igualdad de ángulos.
  - Figurativo:
    - Uso de tablas y representaciones gráficas para establecer ciertas relaciones
  - Argumentar de forma crítica utilizando la relación entre las áreas y volúmenes de figuras semejantes, situaciones que contradecirían la física natural de la vida.

→ Por último las **estrategias** sobre las que trabajaremos serán:

[3] No vamos a estudiar los movimientos rígidos en nuestro tema, pero nos servirán para estudiar la semejanza como transformación en el plano.

- Aplicación del teorema de Thales en la semejanza de triángulos y en la resolución de problemas.

A partir de este análisis, podemos desarrollar el mapa conceptual que nos cubrirá el estudio de nuestro tema:



SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

Cuando analizamos un concepto matemático, a veces no somos conscientes de que para referirnos a él conjugamos distintas formas de representación. Esto, que a nosotros nos parece obvio por el grado de abstracción que tenemos, a los alumnos les puede confundir si no enfatizamos de forma consecuente sobre las distintas formas de representar la noción. Es por ello, que es necesario realizar un estudio sobre los sistemas de representación que admiten los conceptos de nuestro tema, y conocer qué representación se hace más adecuada para enfatizar las propiedades que queramos trabajar.

Vamos a trabajar con cinco modalidades de representación, que son el simbólico, verbal, tabular, representaciones gráficas y numéricas y por último el que tenemos al trabajar con distintos software matemáticos. Veamos ejemplos con cada uno de ellos y las formas de tratar un mismo contenido con los distintos sistemas:

- SIMBÓLICO

El uso de la representación simbólica se pone de manifiesto cuando, por ejemplo, se expresa de manera abstracta la razón de dos cantidades o la proporción entre dos razones, también en el uso de los símbolos que representan la semejanza o la escala al identificar figuras semejantes. Se denota un mayor dominio matemático cuando el alumno es capaz de utilizar el simbolismo algebraico para traducir un problema geométrico y formularlo como un problema algebraico. Veamos unos ejemplos:

- a/b
- a/b = c/d
- ˜
- La representación de la función de proporcionalidad: y = m·x

- VERBAL

El uso de la representación verbal se pone de manifiesto cuando se transmite de forma oral aquellos conceptos y procedimientos en el trabajo de la unidad. Por ejemplo:

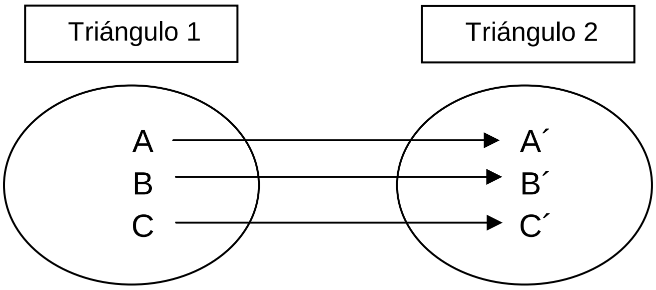
- “Figuras semejantes”.
- “a sobre b”.
- “a es a b como c es a d”.
- “Uno cien”

- TABULAR

La representación mediante tablas nos puede ayudar a manifestar, de forma más o menos clara, la existencia de algún tipo de relación. Por ejemplo, si queremos hacer que los alumnos caigan en la cuenta de que la razón entre los perímetros de dos triángulos semejantes es la misma que la razón de semejanza entre los triángulos y es el cuadrado para las áreas, podemos pedirles que rellenen la tabla con los triángulos semejantes.

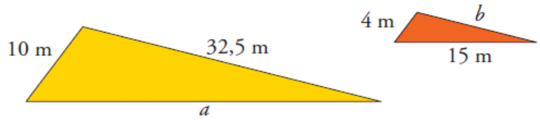
	Perímetro	Área
Triángulo 1		
Triángulo 2		

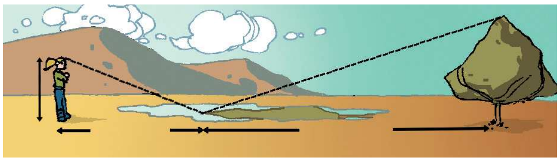
La representación conjuntista-funcional en diagramas de Venn, nos permite establecer una relación biunívoca entre los valores de una de las magnitudes y su correspondiente imagen con los valores de la segunda magnitud, como sigue a continuación:



- REPRESENTACIONES GRÁFICAS Y NUMÉRICAS

La representación gráfica tiene gran importancia sobre todo en los temas de geometría. Este tema centra su atención en las figuras semejantes, y será por tanto necesario trabajar con representaciones gráficas de las mismas. La representación gráfica de los enunciados de los problemas ayudará a los alumnos a buscar la solución.



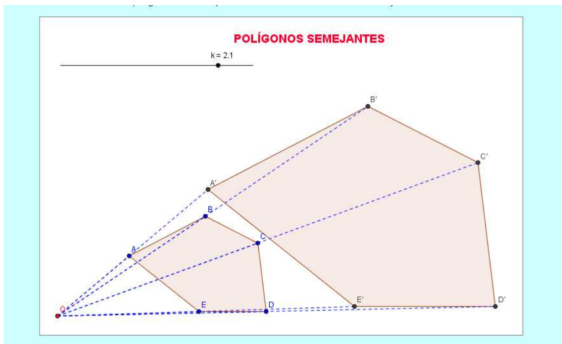


- REPRESENTACIONES TECNOLÓGICAS

El trabajo con applets y con software en matemáticas, hace que las representaciones que estos proporcionan, complementen en algunas ocasiones el uso combinado de distintos modelos de representación, además de en otros, otorgar un dinamismo que ayuda a comprender los procesos geométricos. Por ejemplo, en la página siguiente podemos encontrar un applet en el que se pone de manifiesto esta combinación.

http://www.aguilardelafrontera.com/jommv/semejanza/poligonos%20y%20figuras%20semejantes.html

Es un ejemplo de polígonos semejantes, pero en él podemos variar la razón de semejanza desde -2 hasta 3 con un simple deslizador, de forma que los alumnos pueden comprender de un vistazo qué ocurre al cambiar la razón, cómo afecta que sea negativa. Además, nos permite mover el centro de la homotecia, con lo que además los alumnos pueden ver como varia la construcción moviendo el punto fuera de la figura, dentro de ella o dejándolo entre las dos.



Vamos a ver un **concepto trabajado con los diferentes sistemas de representación**:

SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Sobre el concepto

→ Simbólico

Para expresar de forma simbólica esta noción escribimos:

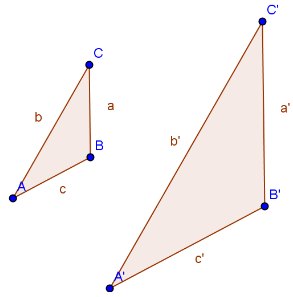
$$\text{Si } \overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{A'B'C'} \rightarrow \begin{cases} \text{i.} & A = A',\ B = B' \text{ y } C = C' \text{ y} \\ \text{ii.} & \dfrac{a}{a'} = \dfrac{b}{b'} = \dfrac{c}{c'} = \textit{Razón de semejanza} \end{cases}$$

→ Verbal

Para esta expresión simbólica decimos "Si el triángulo ABC es semejante al triángulo A´B´C´, entonces tenemos que sus ángulos son respectivamente iguales y sus lados homólogos son proporcionales".

→ Gráfico

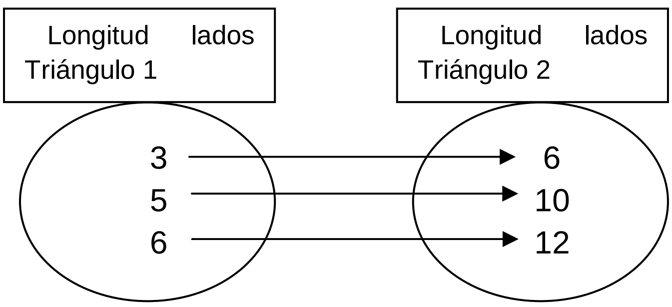
Podemos trabajar esta noción gráficamente mirando que las figuras tengan "la misma forma", teniendo claro que significa matemáticamente esta frase. La ventaja que tiene esta representación es que de un modo visual rápido nos da una idea de la noción de semejanza.



Sobre procedimientos

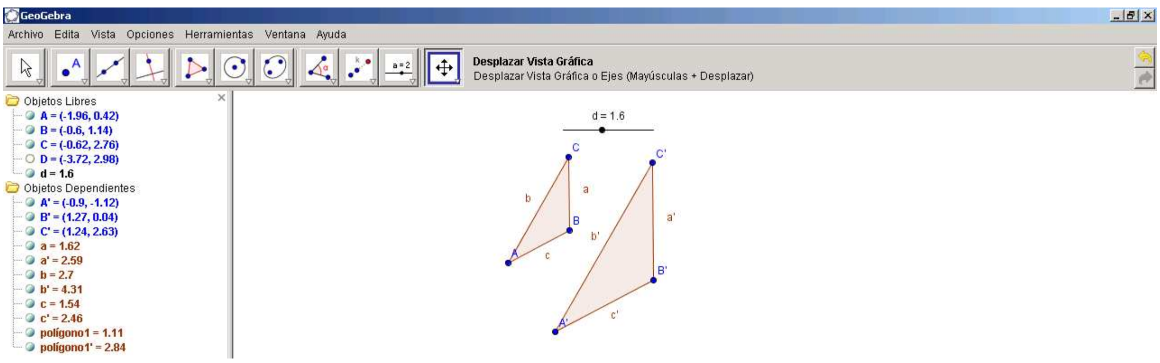
→ Conjuntista-funcional

Podemos trabajar con diagramas de Venn la proporcionalidad que se establece entre los lados homólogos de los triángulos para, por ejemplo, vincular la relación que hay entre ambas magnitudes. Con esta representación podremos centrar la atención en el cálculo de la razón de semejanza, por ejemplo.



→ TECNOLÓGICA

Utilizando el programa de geometría dinámica GeoGebra, podemos ver de forma dinámica creando un deslizador, cómo influyen los diferentes valores de la razón de semejanza en el tamaño de las figuras y qué ocurre para valores negativos. Combina diferentes sistemas de representación.

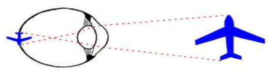
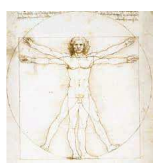


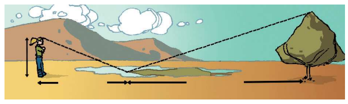
ANÁLISIS FENOMENOLÓGICO DEL TEMA

En el estudio *PISA 2003. Preguntas liberadas. Matemáticas y Solución de problemas.*, llevadas a cabo por la OCDE, la estrategia que asumieron los expertos en Educación Matemática fue definir los contenidos que se iban a evaluar sirviéndose de la aproximación fenomenológica. El análisis fenomenológico del tema, nos puede ayudar a establecer las situaciones y contextos en los que se usa los conceptos o contenidos matemáticos de nuestro tema en cuestión, desde una perspectiva funcional. Este análisis permite ligar el uso competente de las nociones matemáticas en fenómenos de la realidad, y aproximar de esta manera, el aprendizaje de los alumnos a un uso eficiente según sus distintas necesidades.

Vamos a concretar en este apartado aquellos problemas a los que da respuesta el tema de la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras. Veremos también qué relaciones hay entre estos fenómenos y las subestructuras conceptuales del tema de forma que nos permitan clasificarlos, y por último, veremos cuáles son las situaciones más frecuentes que aparecen.

Los contextos que podemos distinguir en este tema, respondiendo a la pregunta ¿a qué problemas da respuesta al tema de la proporcionalidad geométrica y la semejanza? y los fenómenos que encontramos para cada uno de estos contextos, aparecen en la tabla siguiente:

<table>
<tr><th>CAMPOS DE ESTUDIO</th><th>CONTEXTOS</th><th>FENÓMENOS</th></tr>
<tr><td rowspan="5">VISIÓN ESTÁTICA DE LA SEMEJANZA. ESTUDIO DE FIGURAS SEMEJANTES. REGULARIDADES.</td><td rowspan="2">¿Cómo ve una lente?</td><td>Visión del ojo. </td></tr>
<tr><td>Visión a través de la lente de una cámara fotográfica.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Identificación de patrones numéricos</td><td>En el universo
Dinámica de agujeros negros y galaxias
</td></tr>
<tr><td>En la naturaleza
Fractales
Caracolas
Cristales en minerales</td></tr>
<tr><td>Cánones de belleza
Partenón Griego
Hombre de Vitrubio </td></tr>
</table>

CAMPOS DE ESTUDIO	CONTEXTOS	FENÓMENOS
ESTUDIO DINÁMICO DE LA SEMEJANZA. CONSTRUCCIÓN DE FIGURAS SEMEJANTES. MOVIMIENTO.	**¿Cómo se reproducen imágenes?**	Proyección de imágenes con retroproyectores.
		Adaptación a los distintos formatos en reprografía.
	¿Cómo se representa la realidad?	Representación en mapas, planos y maquetas.
ESTUDIO PRÁCTICO DE LA SEMEJANZA. APLICACIÓN DE LA SEMEJANZA PARA RESOLVER PROBLEMAS.	**¿Cómo calcular longitudes inaccesibles?**	**Profundidad** Medida de la profundidad de un pozo. 
		Alturas Medición de la altura mediante la longitud de la sombra. Medición de la altura a través de la visual de un bastón perpendicular al suelo. Medición de la altura usando algún instrumento (espejo,  escuadra o cartabón).
		Distancias Método griego para calcular la distancia de un barco a un puerto Medición del radio de la Tierra. Medición de la sombra de la tierra.

Esta agrupación nos ha permitido seleccionar tres campos de estudio de la semejanza, que se complementan entre sí en la visión global que tenemos del tema. Esto nos va a permitir proponer tareas en nuestra unidad para cada uno de estos campos, basadas en el estudio de fenómenos. La intención será estudiar problemas reales en los que la aplicación de la semejanza nos ayuda a solucionarlos.

- *Visión estática*: Tarea 1.1 en la que se investigan las regularidades de los formatos Din A.
- *Visión dinámica*: Tarea 2.2 en la que se estudia la proyección de imágenes.
- *Visión práctica*:
  - Tarea 4.1 en la que se realiza una práctica para medir la altura de un edificio mediante la visual de un bastón perpendicular al suelo.
  - Tarea 4.2 que consiste en una práctica para medir la altura de un edificio usando un espejo.

Por último, clasifiquemos estos fenómenos en base a los conceptos a los que hace referencia y veamos las situaciones en las que aparecen. Las situaciones que vamos a considerar son las que se consideraron en el estudio PISA 2003 publicadas por el *INECSE*, que son cuatro: laboral, científica, personal y pública.

CONTENIDOS	FENÓMENOS	SITUACIONES
Teorema de Thales	Medida de la profundidad de un pozo	Laboral
	Medición del radio de la Tierra	Científica
	Medición de la sombra de la Tierra	Científica
	Medición de la altura a través de la visual de un bastón perpendicular al suelo.	Laboral
Semejanza de Triángulos	Medición de la altura mediante la longitud de la sombra	Laboral
	Medición de la altura usando algún instrumento (espejo, escuadra o cartabón).	Laboral
	Método griego para calcular la distancia de un barco a un puerto	Laboral
Homotecia	La visión del ojo	Científica
	La visión a través de la lente de una cámara fotográfica	Científica, laboral
	Proyección de imágenes con los proyectores	Científica, laboral
Escala	Adaptación a los distintos formatos en reprografía	Personal o laboral
	Representación de mapas, planos y maquetas	Personal, laboral, científica, pública
Proporciones notables	Dinámica de los agujeros negros y galaxias	Científica
	Cristales en minerales	Científica, laboral
	Fractales	Científica
	Espirales de un girasol	Científica
	Proporciones morfológicas de una abeja	Científica
	Caracolas	Científica
	Partenón Griego	Pública
	Hombre de Vitrubio	Pública

EXPECTATIVAS DE APRENDIZAJE

El análisis de contenido anterior nos ha permitido analizar a nivel curricular y a nivel de conocimiento matemático, los aspectos del estudio de la semejanza enfocados a la planificación que vamos a desarrollar. Esto nos va a servir para identificar las capacidades que esperamos que los alumnos desarrollen en al estudio del tema de la semejanza de figuras en el curso de 3º de ESO.

Como ya dijimos en un principio, el estudio de la semejanza en el 3º curso va a servir como nexo de enlace del estudio de la semejanza en el curso anterior y en los posteriores. Tendremos dos focos de estudio: **"Semejanza de figuras"** y **"Aplicación práctica de la semejanza"** que contemplarán la semejanza de figuras y su aplicación práctica a problemas. Vamos a enunciar una lista de objetivos específicos de aprendizaje que pretendemos que desarrollen nuestros alumnos al llevar a la práctica la propuesta de enseñanza que más tarde desarrollaremos:

FOCO 1: "Semejanza de figuras"

1. **Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia.**
2. **Identificar triángulos semejantes utilizando el criterio de igualdad de ángulos.**
3. **Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un lado o un ángulo a partir de otros conocidos.**

FOCO 2: "Aplicación práctica de la semejanza"

4. **Calcular perímetros, áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella.**
5. **Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas.**

El objetivo 5 es muy amplio y contempla otras capacidades, como podrían ser a su vez los objetivos 2 y 3, pero hemos querido distinguirlos porque tanto el segundo objetivo como el tercero se aplicaran a tareas que no podríamos clasificar como "problemas".

Podemos realizar un análisis para ver cómo cada uno de los objetivos va a contribuir al desarrollo de unas determinadas competencias PISA, basándonos en la planificación que vamos a realizar:

Las competencias matemáticas PISA que encontramos en el documento *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de problemas,* son:

PR= Pensar y Razonar
AJ= Argumentar y Justificar
C= Comunicar
M= Modelizar

RP= Resolver Problemas
R= Representar
LS= Lenguaje Simbólico
HT=Herramientas tecnológicas.

	SEMEJANZA DE FIGURAS	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
1	Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia.	☻	☻	☻	☻		☻		☻
2	Identificar triángulos semejantes utilizando el criterio de igualdad de ángulos.	☻	☻						☻
3	Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un lado o un ángulo a partir de otros conocidos.	☻		☻		☻			

	APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA SEMEJANZA	PR	AJ	C	M	RP	R	LS	HT
4	Calcular perímetros, áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella.	☻	☻	☻		☻	☻		☻
5	Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas.	☻	☻	☻	☻	☻			

Como observamos, hay tres competencias a las que vamos a contribuir en mayor medida, que son "Pensar y razonar", "Argumentar y justificar" y "Comunicar". También vamos a contribuir, aunque en menor medida, a las competencias de "Resolver problemas", "Representar", y a la "Herramientas tecnológicas". La justificación de esta contribución se realiza en cada tarea de la planificación. También contemplamos la modelización en la unidad, pero esta competencia, según la entendemos, es más compleja y necesita de tareas específicas. Aunque lo cierto, es que el tema de la semejanza de figuras constituye un amplio campo de estudio para la modelización. La competencia de "Lenguaje simbólico" se queda sin cubrir en este tema, en el que se emplea un lenguaje aritmético, con símbolos numéricos, preferentemente.

LIMITACIONES DE APRENDIZAJE

Llevar a cabo un estudio sobre las limitaciones y los errores que pueden aparecer en el aprendizaje de un tema, es una tarea crucial que nos permite, de alguna manera, enfocar nuestra propuesta de enseñanza a evitarlos o, en otro caso, a superarlos.

Los errores que podemos encontrar asociados al estudio de la semejanza según los objetivos que tenemos son:

	ERRORES	OBJETIVOS
E1	Dificultades propias del lenguaje (doble, mitad,…).	1, 4
E2	Utilizar estrategias aditivas en problemas donde se necesita un razonamiento multiplicativo.	4
E3	Obtener la medida de los lados de un triángulo y que la suma de dos de ellos sea menor que la medida del otro lado.	3
E4	Pensar que la razón entre las áreas y los volúmenes de dos figuras semejantes es la misma que la razón de semejanza que hay entre ellas.	4
E5	Identificar erróneamente polígonos semejantes (comprobar sólo algunos lados; mirar sólo las medidas de un ángulo,...).	2, 5
E6	Establecer de manera errónea la proporción que determina el teorema de Thales o la semejanza de figuras.	3, 5
E7	No seleccionar correctamente los datos para resolver un problema o utilizar datos innecesarios.	3, 4, 5
E8	Falta de visión espacial para establecer los movimientos que intervienen en la semejanza.	1
E9	Aplicar el teorema de Thales cuando no se cumplen las hipótesis (por ejemplo, las rectas no son paralelas)	5
E10	Dificultad al representar gráficamente una situación a partir del enunciado del problema.	5

Siguiendo la clasificación que hace Rico (1995)[4], podemos clasificar estos errores según los siguientes tipos:

Errores debidos a *dificultades del lenguaje*: E1,
Errores debidos a *dificultades para obtener información espacial*: E8, E10
Errores debidos *a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos*: E3, E5, E7
Errores debidos *a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento*: E2, E6, E9
Errores debidos a *la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes*: E4

[4] Rico, L. (1995). *Errores en el aprendizaje de las Matemáticas*. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. Educación Matemática. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico.

PLANIFICACIÓN DE LA ENSEÑANZA

SECUENCIACIÓN Y ORGANIZACIÓN DE LAS TAREAS

Los análisis anteriores que hemos llevado a cabo, nos sirven ahora para tener criterios que nos permitan:

→ Decidir qué actuación poner en práctica y como secuenciar las sesiones.
→ Seleccionar objetivos de aprendizaje.
→ Seleccionar y organizar tareas que serán el material sobre el que trabajaremos la instrucción.
→ Determinar qué criterios de evaluación se adaptan para evaluar el proceso de enseñanza-aprendizaje que hemos puesto en juego.

Previo al desarrollo de las sesiones, el análisis de instrucción nos ha servido para seleccionar de la batería de tareas que hemos encontrado, aquellas que cumplían las características buscadas en cada sesión. En el desarrollo de las mismas, analizaremos las tareas estableciendo las condiciones de trabajo, los recursos y materiales empleados, la relación con los objetivos específicos, la forma en que contribuyen a las competencias y el nivel de complejidad que presentan, y por último si contribuyen a la detección y/o superación de alguna dificultad.

A continuación indicamos cuántas sesiones contempla el estudio del tema y a proponer una secuenciación de actuación:

Vamos a desarrollar este tema en 7 sesiones de clase, en las que se estudiarán los contenidos teóricos del tema y se realizarán tareas que pretenden contribuir a los objetivos específicos contemplados en la unidad.

Las sesiones a realizar se llevarán a cabo en el siguiente orden:

1. Evaluación inicial. Razón y proporción.
2. Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes y la semejanza como transformación en el plano.
3. Razón de perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes.
4. Cálculo de distancias inaccesibles.
5. Criterio de igualdad de ángulos para la semejanza de triángulos.
6. Aplicación de la semejanza en la resolución de problemas.
7. Evaluación.

En cuanto al **tipo de tareas** que vamos a realizar en la unidad, tenemos que aclarar que en cada sesión habrá tareas enfocadas a introducir los contenidos conceptuales, para contextualizar el aprendizaje, y tareas enfocadas a contribuir al desarrollo de los objetivos que nos hemos marcado en la unidad. Hemos intentado que los conceptos del tema sean introducidos a partir de tareas que den sentido al estudio de los mismos. Habrá tareas de iniciación y motivación, de desarrollo de conocimientos, de ejercitación y de síntesis.

Al comienzo de la unidad daremos una sesión de revisión de conocimientos y formalización de los conceptos bases del tema, pues los alumnos no es la primera vez que se enfrentan al estudio de la semejanza y ya deberían ser capaces de reconocer segmentos proporcionales, distinguir y construir figuras semejante así como obtener la razón de semejanza.

Al comienzo de cada sesión, dedicaremos 10 minutos a trabajar la corrección de las actividades que dejamos para casa la sesión anterior, con el fin de que sirva a los alumnos para recordar lo estudiado anteriormente, pongan a prueba el aprendizaje que van adquiriendo, y también para que le sirva al profesor de enlace entre las sesiones y como instrumento de evaluación.

RECURSOS MATERIALES Y DIDÁCTICOS

Los recursos que vamos a emplear en el desarrollo de nuestra unidad son:

- Geogebra.
- Cubos encajables.
- Trama isométrica.
- Papel cuadriculado.
- Regla graduada, cinta métrica.
- Transportador.
- Distintos formatos Din A
- Flexo.
- Espejo
- Bastón

DESARROLLO DE LA SECUENCIA DE TAREAS EN LA UNIDAD DIDÁCTICA

Ahora vamos a pasar a describir la planificación y las tareas que vamos a abordar, pero antes veamos el esquema de trabajo de cada sesión.

El orden de las sesiones no es arbitrario, sino que los contenidos y procedimientos trabajados en una sesión nos serán necesarios para las siguientes.

SESIONES	CONTENIDOS ABORDADOS
1. Evaluación inicial. Razón y proporción	- Conocimientos previos. - Identificación de relaciones. Razones y proporciones.
2. Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes y la semejanza como transformación en el plano	- Visualización de figuras semejantes. - Identificar lados homólogos proporcionales y atender a la igualdad de ángulos. - La posición de las figuras facilita o entorpece la visualización. - Homotecia y semejanza. - La semejanza es una transformación en el plano.
3. Razón de perímetros, áreas y volúmenes de figuras semejantes	- Generalizar la relación entre los perímetros de figuras semejantes a partir de ejemplos. - Establecer la relación entre área y volumen de figuras semejantes. - Aplicación a problemas. - Argumentación crítica usando este contenido frente a supuestas situaciones que contradecirían la física natural del mundo.
4. Cálculo de distancias inaccesibles.	- La semejanza de triángulos como herramienta para resolver problemas de distancias inaccesibles. - Triángulos homotéticos con centro de homotecia en un vértice.
5. Criterio de igualdad de ángulos para la semejanza de triángulos.	- Podemos rebajar las condiciones para la semejanza en el caso de los triángulos. - Criterio de igualdad de ángulos para triángulos semejantes. - Aplicación del criterio de semejanza visto.
6. Aplicación de la semejanza en la resolución de problemas.	- Dada la representación gráfica del problema, justificar la semejanza de los triángulos. - Obtener la medida de longitudes aplicando la proporción que establece la semejanza. - Representar gráficamente el enunciado del problema y realizar lo anterior.

SESIÓN 1. Evaluación inicial. Razón y proporción.

1. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN

→ **Contenidos básicos**: Razón, proporción

→ **Contextos y situaciones:** Situaciones educativas o laborales, públicas y situaciones científicas

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal y gráfico

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

Esta sesión es de repaso de conocimientos y formalización de conceptos. En el tema no hemos contemplado ningún objetivo específico para ello, pero podríamos resaltar que se intenta que los alumnos comprendan los conceptos de razón y proporción. Las competencias a las que se contribuyen en esta sesión son: “Pensar y razonar”, “Argumentar”, “Comunicar” y “Modelizar”.

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:**

En esta sesión vamos a trabajar una ficha de evaluación inicial para ver los conocimientos previos que tienen los alumnos sobre el tema de la proporcionalidad y de la semejanza de figuras. Posteriormente, pasaremos a formalizar los conceptos de razón y proporción. En este punto, el profesor debe tener en cuenta que el concepto formal de razón no es el que llega a la mente de la mayor parte de los alumnos. Para comprender la noción de razón el alumno debe trabajarla como relación parte-todo primero, y más tarde como relación entre dos cantidades. En el estudio de este tema, debemos trasmitir la idea de que estas relaciones se convierten en una herramienta de trabajo para la observación de las formas, pues nos permiten identificar en objetos diferentes estructuras semejantes.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

Como hemos dicho, esta sesión va a servir para conocer los conocimientos y las dificultades que tienen los alumnos y apoyarnos en ellos para buscar un aprendizaje significativo.

En 2º curso de ESO han estudiado la proporcionalidad de segmentos, la semejanza de figuras y la aplicación a problemas. Este es el primer encuentro que tienen con la semejanza en la educación secundaria, y es por ello que se desarrolla un conocimiento intuitivo de la materia. Ahora, nos basaremos en él para dar unos toques de rigor matemático a los conceptos de razón y proporción y nos servirá también de introducción para la segunda sesión en la que trabajaremos la semejanza de figuras.

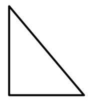
3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

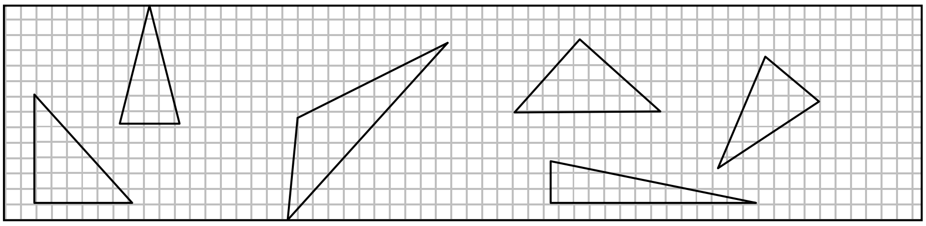
TAREA 1.1 (25 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor explicará en qué consiste esta tarea y repartirá una ficha a cada alumno. Esta tarea consta de 5 apartados, el profesor dejará 15 minutos para que completen los 3 primeros y los 10 minutos restantes para los dos últimos apartados que se trabajarán a través de una lluvia de ideas. Las cuestiones serán del tipo:

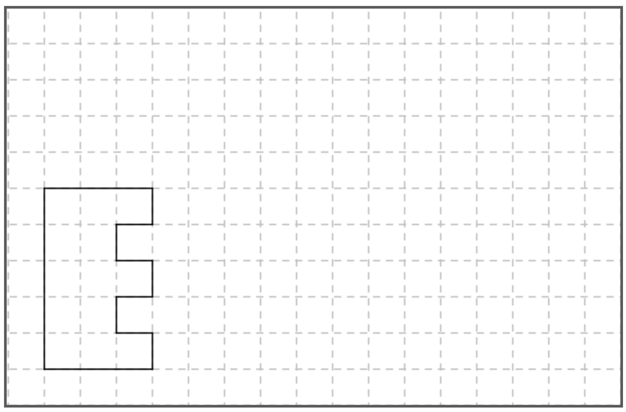
TAREA 1.1

I. Rodea los triángulos que aparecen en la cuadrícula que no sean semejantes con 



II. Dibuja un triángulo cualquiera. ¿Serías capaz de obtener otro semejante a él trazando un único segmento?

III. Amplia la figura de forma que lo que en ella mide 2 cuadritos en la ampliada mida 3 y de manera que se conserve la forma de la figura.



IV. Quiero comprar un mapa de la provincia de Granada. ¿Dónde apreciaré mejor los detalles, en un mapa a escala 1:100 o en uno a escala 1:1000?

V. Escribe que significa para ti que dos figuras sean semejantes y pon tres ejemplos donde se utilice la semejanza de figuras en la vida real.

→ **Material o recurso necesario:** Ficha de la actividad, clásicos escolares.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán de forma individual sobre las tres primeras actividades y, mientras las realizan, es conveniente que el profesor revise cómo las hacen y esté atento a las dudas que les puedan surgir, bien porque se las pregunten a él directamente, o porque se pregunten entre ellos. Esta última opción es más interesante pues permite además conocer cómo defienden sus ideas y cómo desarrollan sus argumentos.

Una vez completadas éstas, se trabajarán las dos últimas con todo el grupo clase a través de una lluvia de ideas. Con la intervención de todos los alumnos el profesor irá escribiendo en la pizarra todas las aportaciones o ideas que vayan surgiendo y cuando no salgan nuevas, pedirá a los alumnos que seleccionen aquellas que deberían descartar porque no se adapten a lo que estamos buscando. Luego, pediremos a los alumnos que justifiquen aquellas ideas que sí hemos aceptado, respondiendo por ejemplo a preguntas del tipo ¿Porqué elegimos este razonamiento?, ¿Se adapta a la petición planteada?, ¿Qué nos aporta esta idea?, ¿somos capaces de relacionarla con conocimientos que ya dominamos?

Al acabar la actividad el profesor las recogerá y las revisará en casa, tomando notas en su cuaderno de los errores y de las dificultades que ha observado así como de aquellos aspectos que estén claros. Les devolverá la ficha corregida en la siguiente clase y podrá aprovechar para hacer comentarios e indicar los razonamientos que han supuesto un éxito y aquellos que no, investigando con los alumnos porqué unos sí son válidos y otros no.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: La idea que tenemos al proponer este tipo de actividad inicial es conocer el grado en que los alumnos tienen asimilado el estudio de cursos anteriores sobre la proporcionalidad y la semejanza de figuras y cómo se desenvuelven ante cuestiones planteadas sobre estos conocimientos.

El hecho de trabajar dos agrupaciones distintas, individual y en grupo, es para ayudar al profesor a tener más oportunidades de observación en distintos contextos. La exposición de ideas nos puede servir para ver el conocimiento que cada alumno pone en marcha para resolver actividades donde necesita ser comprendido por sus compañeros. Además de ver el grado de razonamiento que utilizan para elaborar sus respuestas; si el lenguaje es propio del tema o si se defienden utilizando palabras coloquiales (como “parecido/a para referirse a semejantes”); si identifican ejemplos de su entorno, como las maquetas, o si para ello necesitan dibujar dos figuras semejantes.

TAREA 1.2 + explicación (35 Minutos)

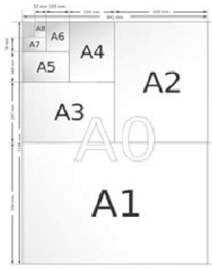
→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

En esta actividad vamos a estudiar diferentes formatos DIN A. Para ello, el profesor repartirá el material a cada grupo, que consistirá en una hoja de cada formato Din A3, Din A4 y Din A5.

El profesor comentará a la vez que reparte el material, que el formato Din A son los más utilizados por las imprentas para sus distintas producciones, las fotocopiadoras, en las oficinas y papelerías. A la vez se interrogará ¿porqué estos tamaños y no otros? El enunciado de la actividad puede ser:

TAREA 1.2 a

a) Examina las regularidades que presenta este material y que han dado lugar al protagonismo con el que cuentan en nuestra sociedad.
Examina los formatos, busca regularidades, estudia si son semejantes, etc



Se deja a los alumnos que manipulen el material, tomen medidas e intenten buscar relaciones entre ellas. Les podemos guiar con preguntas del tipo:

- ¿Qué relaciones guardan las longitudes de los lados de un formato?
- ¿Qué valor te permite obtener los lados de un formato conocido los lados de otro?
- Investiga qué ocurre al doblar los formatos por la mitad del lado mayor

Una vez que el profesor vea que los grupos van encontrado propiedades, saldrán a la pizarra para exponer los argumentos al resto de la clase. Preguntaremos si existen propiedades que no hayan sido expuestas y que otros grupos hayan encontrado para que las expongan. Una vez tengamos todas las propiedades, pedimos que valoren si dichas aportaciones responden a las cuestiones que nos habíamos planteado y cribamos aquellas que no nos interesen.

Al final de la actividad deberíamos llegar a tener las siguientes propiedades matemáticas:

- La relación entre las longitudes de los lados de un formato.
- La relación que hay entre las longitudes de los lados de los distintos formatos.
- Que cualquier tamaño tiene la propiedad de que al duplicar el lado menor se obtiene un rectángulo cuyos lados guardan la proporción inicial.
- Que todos los formatos son semejantes, por ello, ver qué ocurre al unir las diagonales como vemos en la figura de la derecha.
- La relación entre las áreas de los distintos formatos.

Luego puede comentar que en las máquinas fotocopiadoras, la ampliación y reducción de documentos, es fácil y económica (no se desperdicia papel), gracias a la serie A, pues el documento siempre puede reproducirse obteniendo otro semejante de menor o mayor tamaño.

Tras esto puede plantear una cuestión para cerrar la actividad y que se dejaría para tarea en casa, que podría ser:

TAREA 1.2.b

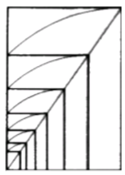
Estudia otros rectángulos y analiza si cumplen que al dividir el lado mayor por la mitad, el que se obtiene sigue siendo semejante y sus lados guardan la misma relación que el original.

Una vez realizada la actividad, el profesor enfatizará que el estudio de estas relaciones nos ha permitido explicar las ventajas del formato Din. Se ayudará de los distintos sistemas de representación que han ido apareciendo (gráfico, diagramas de Venn, representación de la función de proporcionalidad) para complementar las aportaciones. Introducirá la terminología del tema, las notaciones y dará la formalización de los conceptos de razón y proporción apoyándose en los datos de la tarea. Explicará que la noción de razón surge al comparar dos números o magnitudes a través de su cociente y que las proporciones resultan de comparar los valores de dos listas de números o cantidades variables para ver si guardan siempre la misma razón entre sí.

→ **Material o recurso necesario:** Formatos Din A, regla graduada.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: El trabajo sobre la actividad se hará de forma grupal (3-4 personas). Esta forma de agrupación tiene las ventajas de que el estudio que los alumnos llevan a cabo es más formativo y reflexivo, y da la posibilidad de mayor comunicación, ya que permite la transmisión de los conocimientos individualmente adquiridos.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: La idea es utilizar esta actividad para trabajar la proporcionalidad entre magnitudes geométricas y que los alumnos se den cuenta que el estudio de las razones tiene cabida más allá de las propias matemática. Que, por ejemplo, nos puede servir para identificar patrones numéricos en nuestro entorno. Se favorecerá el empleo del papel doblado para comparar longitudes, para ver que las diagonales de los rectángulos forman el mismo ángulo son los lados (figura de la derecha) y si lo consideramos oportuno, incluso construir la homotecia que aparece.



Con esta actividad pretenderemos motivar al alumnado en el estudio del tema y ver cómo nos han ayudado estos conocimientos en el estudio del problema.

Esta actividad pone en juego la contribución a las competencias de “Pensar y razonar” (nivel de conexión), “Argumentación” a nivel de reflexión, “Comunicar” a nivel de conexión y “Modelización” a nivel de conexión.

SESIÓN 2. Semejanza. Propiedades de las figuras semejantes y la semejanza como transformación en el plano.

1. **CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN**

→ **Contenidos básicos**: Semejanza, homotecia, movimiento

→ **Contextos y situaciones:** Situaciones personales, pública y situaciones científicas

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal, gráfico y tabular.

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

- Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia. (C, M, A, R, PR)

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:**

El desarrollo de estas sesiones va a ir enfocado a caracterizar matemáticamente qué significa que dos figuras sean semejantes, ver y dar ejemplos de semejanza en la vida real, y trabajar sobre dos actividades.

El foco de nuestra actuación será:

i. Que los alumnos se den cuenta que en matemáticas “parecido” es distinto de “semejante”.
ii. Consensuar que “semejante” significa que “tienen la misma forma”.
iii. Enunciar la definición de figuras semejantes como figuras que tienen ángulos iguales y lados proporcionales.
iv. Mostrar que si dos figuras son semejantes se puede transformar una en la otra mediante una composición de una homotecia y un movimiento rígido.

En un principio, nos basaremos en la visualización como punto de partida sobre el que apoyar la enseñanza, para intentar que el contenido geométrico sea significativo. Posteriormente, trasmitiremos la idea de que la posición de dos figuras puede ayudar, o dificultar, a darse cuenta a simple vista de la semejanza de dos figuras, pero que es posible desarrollar criterios más precisos de semejanza que la pura inspección visual. Es en este punto donde trabajaremos la definición de figuras semejantes según las propiedades que presentan y diremos qué se entiende cuando hablamos de la razón de semejanza.

Por último intentaremos que los alumnos sean capaces de identificar la semejanza como la composición de una homotecia y un movimiento rígido (conceptos que supondremos ya estudiados).

Trabajaremos mejor la noción de homotecia mediante una tarea. Posteriormente pondremos ejemplos de transformaciones entre figuras semejantes.

La propuesta de tareas que hacemos a continuación es ambiciosa, por lo que, según los alumnos, necesitaremos una o dos clases de 60 minutos.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

En la sesión anterior hemos formalizado los conceptos de razón y proporción con la intención de que los alumnos en esta segunda sesión puedan apoyar en ellos su comprensión de lo que implica que dos figuras sean semejantes. Además, en la primera sesión ya abordamos el concepto de semejanza y ahora lo que haremos será recordarlo. La siguiente sesión de trabajo se enfoca en la semejanza de triángulos, por ello en esta sesión crearemos las bases del conocimiento matemático que aplicaremos.

3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

TAREA 2.1 + Explicación (30 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor repartirá una ficha a los alumnos con las imágenes de la tarea. Dejará que trabajen sobre ella y posteriormente haremos una lluvia de ideas para la puesta en común. La tarea puede ser:

TAREA 2.1

A partir de la figura original, se han realizado una serie de modificaciones en ella y se han obtenido las tres figuras siguientes:

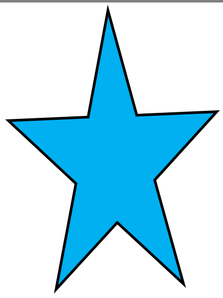
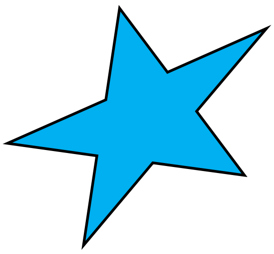
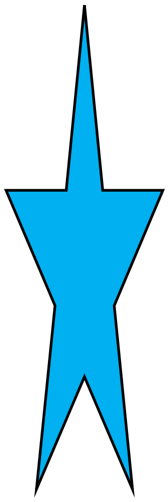


Figura original

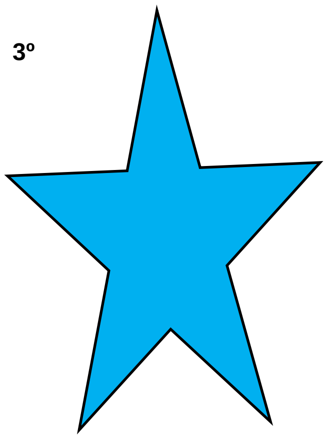
1º



2º



3º



Examínalas y busca todo lo que puedas para determinar qué relación guardan con la figura original.

Se deja a los alumnos que trabajen en la actividad, tomen medidas e intenten buscar las relaciones entre las figuras. Si los alumnos no saben cómo continuar la tarea, el profesor puede preguntar:

- ¿Qué valor permite obtener la medida de los lados de una estrella a partir de la medida de los lados de la estrella original? Una tabla en la que aparezcan los valores de los lados puede ayudarte.
- ¿Por qué no tiene la segunda estrella la misma forma que la figura original?

Una vez que los alumnos van concluyendo, se pondrá en marcha la lluvia de ideas (con las mismas pautas que la llevada a cabo en la 1º sesión) y dando respuesta a las cuestiones planteadas.

Puesto que ya en la 1º sesión hablamos de figuras semejantes, es de esperar que ellos ya utilicen el término, con lo que el profesor formalizará la definición.

Tras esto, podemos preguntar si la posición de las figuras les había hecho intuir cuáles eran semejantes y cuáles no.

En la lluvia de ideas el profesor puede ayudarse de tablas para poner las medidas de los lados y los ángulos y apreciaciones sobre las posiciones de las figuras. Debe señalar la importancia de buscar los lados homólogos, e ir introduciendo notación para denotar los vértices.

Para concluir la actividad, puede plantear una cuestión de tarea para casa:

Tarea opcional

Busca ejemplos en nuestro entorno en el que aparezcan figuras semejantes.

→ **Material o recurso necesario:** Ficha de la actividad, regla graduada y trasportador.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor ayuda cuando lo soliciten. Luego se hará la puesta en común a partir de la lluvia de ideas.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pone en juego distintos tipos de representación, los alumnos deben en primer lugar reconocer a través de las representaciones gráficas figuras semejantes, la proporcionalidad entre sus segmentos se verá reflejada ayudándose de la tabla y por último tienen que hacer un esfuerzo por utilizar el lenguaje simbólico en la expresión verbal para argumentar las ideas que aportan.

Esta tarea contribuye a las competencias de “Pensar y razonar” al nivel de conexión, “Comunicar” al de reproducción y “Representar” a nivel de reproducción.

TAREA 2.2 + Explicación (50 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor planteará el fenómeno que vamos a estudiar: “el funcionamiento de un proyector”. Para ello dispondrá la clase en grupos de cinco alumnos y les repartirá el material necesario: un flexo, una regla graduada y un rectángulo de cartulina (por ejemplo un almanaque). Explicará que un proyector funciona ampliando imágenes a través de un mecanismo interior similar al que se obtiene si colocamos la imagen entre la lámpara para proyectarla en la mesa.

Tenemos que considerar las dificultades que esta práctica puede plantear, como son la necesidad de situar la figura paralelamente a la pantalla de proyección, o la dificultad al medir de forma precisa las distancias entre el foco de luz y las imágenes.

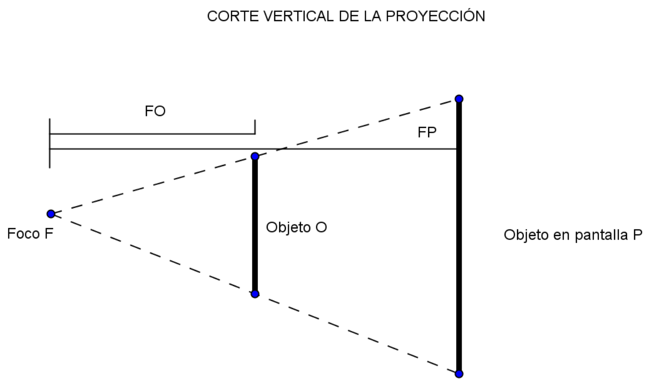
El enunciado de la actividad puede ser:

TAREA 2.2

Analiza el mecanismo del proyector. Justifica matemáticamente cómo harías para conseguir que la imagen tuviera el doble del tamaño de la figura (te puede ayudar medir un lado de la figura y, con la regla apoyada en la mesa, mover la figura hasta que el lado de la sombra proyectada mida el doble). Representa gráficamente la situación.

Se deja a los alumnos que trabajen la actividad. Seguramente irán haciendo prácticas y medidas, situando la imagen a distintas distancias entre el foco y la mesa, comprobando qué ocurre con la imagen.

Es muy interesante que los alumnos conjeturen y representen la situación de forma gráfica. Esta representación tiene la dificultad de que el problema sobre el que trabajan es tridimensional y deberán pasarlo a dos dimensiones. Para ello le daremos indicaciones para representar a través de cortes por planos verticales y dibujando los segmentos, que serán proporcionales. Es decir, la representación plana de la homotecia espacial:



Durante el desarrollo de la actividad podemos plantear cuestiones del siguiente estilo que orienten las actuaciones de los alumnos:

- ¿Existe alguna relación entre la figura original y la proyectada?
- Busca los segmentos que sean proporcionales en el problema. (Pista: "juega" con las distancias y la semejanza de las figuras).

Una vez que el profesor vea que los grupos van representando y tienen teorías para justificar lo que se les pide, saldrán a la pizarra para exponer sus investigaciones al resto de la clase. Preguntaremos si existen ideas que no hayan sido expuestas para que lo sean. Pedimos que valoren si dichas aportaciones responden a las cuestiones que nos habíamos planteado y cribamos aquellas que no nos interesen. El profesor debe dirigir las ideas y centrar la atención en la transformación geométrica que se ve involucrada en la proyección, que conocemos como homotecia.

Al final de la actividad deberíamos llegar a tener las siguientes conclusiones:

- La transformación geométrica que vincula el objeto con la proyección conserva las proporciones si la figura y su proyectada son paralelas.

- La homotecia es una transformación que permite obtener figuras semejantes a partir de una figura original.
- Las distancias entre el foco de luz y ambas imágenes mantienen una proporción con las medidas de la imagen real y la proyectada.
- Para conseguir una figura al doble, debemos hacer que la distancia entre el foco y la imagen original sea la mitad que la distancia entre el foco y la pantalla de proyección.
- En la representación gráfica de una homotecia, al unir puntos homólogos de las figuras, las rectas se intersecan en un punto (que se llama centro de la homotecia).

Por último, el profesor explicará que esa transformación se denomina homotecia y que el cociente entre las distancias es la razón de la homotecia y es el mismo valor que la razón de semejanza entre las figuras.

→ **Material o recurso necesario:** Flexo, rectángulo de cartulina, regla graduada.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán en grupos de 5-6 alumnos.

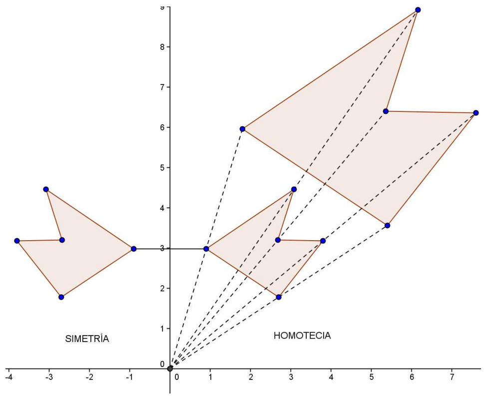
→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo *"Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia"*. Además de afianzar la noción de homotecia, contribuir a la visión geométrica de los alumnos y completar la noción de semejanza.
Puede servirnos para detectar los errores E10 y superar el error E1. Las competencias a las que vamos a contribuir con esta actividad y sus niveles de complejidad son:
"Argumentar" al nivel de reflexión, "Pensar y razonar" con nivel de conexión, "Comunicar" con nivel de conexión y "Modelizar" a nivel de reflexión.

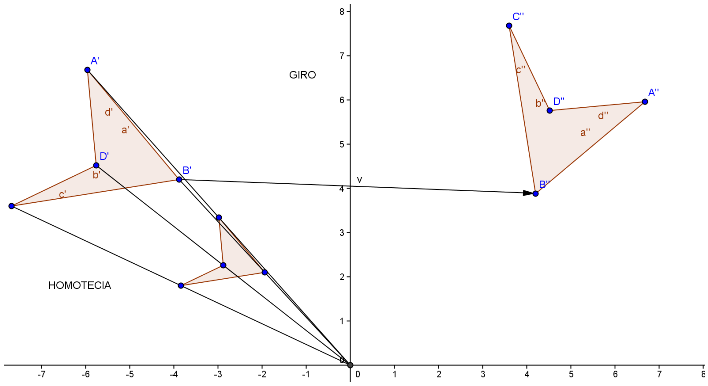
TAREA 2.3 (30 minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

Una vez recordada y trabajada la noción de homotecia, estudiaremos la semejanza como composición de una homotecia y un movimiento. El profesor se ayudará de una presentación en PowerPoint para representar, si es posible de forma dinámica, una figura y su transformada, señalando de forma explícita la transformación que hay entre ellas. Estudiará los diferentes movimientos por homotecia y ejemplos de homotecia por movimientos.

Como por ejemplo:

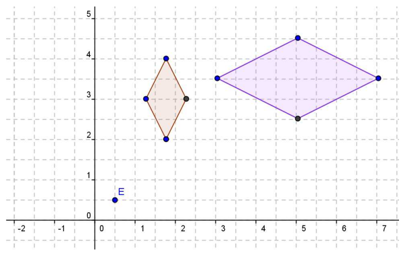




El profesor propondrá una actividad del siguiente estilo:

TAREA 2.3

Identifica la transformación que lleva el rombo menor en el mayor.



→ **Material o recurso necesario:** Ficha con la imagen, cuadrícula, presentación.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo *"Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia"*. Esta actividad contribuye a la competencia de "Argumentar" (reproducción), pues deben crear justificaciones matemáticas y a la competencia de "Representar", con nivel de reproducción, pues debe interpretar las distintas representaciones (simbólicas y gráficas) con las que se está trabajando.

SESIÓN 3. Razón de perímetros, áreas y volúmenes.

1. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN

→ **Contenidos básicos**: Razón de perímetros, áreas y volúmenes.

→ **Contextos y situaciones:** Situaciones educativas y situaciones públicas.

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal, tabular, gráfico y manipulativo.

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

- Calcular áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella. (A, PR, C, RP, R)

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:**

El uso de materiales manipulables permite un aprendizaje significativo de conceptos matemáticos. En esta sesión nos será de utilidad los cubos encajables para introducir qué sucede con la razón entre las áreas y los volúmenes de figuras semejantes. Además, en esta sesión vamos a intentar desarrollar la visión crítica en los alumnos utilizando las herramientas matemáticas que pone a disposición la semejanza de figuras.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

Esta sesión es la tercera y completa el estudio de la semejanza con el estudio de las razones en las magnitudes de longitud y superficie en figuras semejantes.

3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

TAREA 3.1 (10 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

Los alumnos trabajarán la actividad para deducir qué relación hay entre los perímetros de las figuras semejantes. El enunciado de la actividad lo podemos dictar y la realización de la tarea está pensada para realizarla con Geogebra:

TAREA 3.1

Construye un deslizador en Geogebra con valores desde 1 hasta 4. A continuación dibuja un polígono y otro semejante a él, de forma que la razón de semejanza tome los valores del deslizador.

Estudia qué relación hay entre los perímetros de dichos polígonos variando el deslizador.

Se deja a los alumnos que trabajen la actividad. Una vez que tengan los valores numéricos que relacionan los perímetros de los polígonos, se les pedirá que busquen, si no lo han hecho, la relación de dichos valores con la razón de semejanza de las figuras para generalizar este resultado.

Para buscar esta relación el profesor puede ayudarse de distintos sistemas de representación, como tablas o diagramas de Venn en los que aparezcan las medidas de los lados y los perímetros.

Al acabar la actividad los alumnos deben llegar a la siguiente conclusión: si la razón de semejanza es r, la razón entre los perímetros es r.

→ **Material o recurso necesario:** Geogebra.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten. Al finalizar la actividad un alumno expondrá sus conclusiones que serán complementadas por las aportaciones de otros si fuese necesario.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende ayudar a que los alumnos entiendan qué relación hay entre los perímetros de figuras semejantes. Trabajan sobre ejemplos para llegar a enunciar el caso general. Con esta actividad se contribuye a las competencias de "Argumentar" a nivel de conexión, "Comunicar" a nivel de reproducción, pues los alumnos deben expresar asuntos que implican relaciones.

TAREA 3.2 + Explicación (40 Minutos)[5]

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor entregará a los alumnos el material con el que van a trabajar esta primera tarea. Consiste en unos cubos que se encajan para construir figuras. Los alumnos trabajarán sobre esta actividad durante la primera parte de la sesión y serán ellos los encargados de descubrir las relaciones entre las áreas y volúmenes de las figuras semejantes. La actividad a realizar puede ser del siguiente tipo:

TAREA 3.1

Con el material que se te ha dado, construye una figura con forma de "L" utilizando 3 cubitos. Investiga cómo construir un cuerpo semejante, doble al anterior.

---

[5] Idea de la actividad tomada de http://divulgamat.ehu.es/weborriak/recursosinternet/Laboratorio/Archivos/policubos_1_alumno.pdf

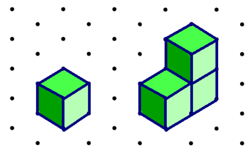
Se deja a los alumnos que trabajen. Comenzarán a probar empíricamente hasta obtener lo que buscan y, es probable que tiendan a ampliar el cuerpo en sólo dos dimensiones y no en tres. Para ayudar a superar esta dificultad, es conveniente que el profesor pida a los alumnos que dibujen todas las caras de la figura en papel cuadriculado y les recuerde que las caras de la nueva figura deben ser semejantes con las correspondientes a la figura original.

Una vez que van consiguiendo la construcción, el profesor planteará el cálculo de las áreas y volúmenes de ambos cuerpos, contando los cubitos y tomando la arista de un cubo como unidad de longitud.

Para guiar a los alumnos podemos pedir:

- Rellena una tabla con los valores de las áreas y los volúmenes de los dos cuerpos.
- ¿Qué relación existe entre estas cantidades?

Una herramienta de ayuda para que el profesor guie la clase en la pizarra puede ser dibujar las figuras en una trama isométrica de puntos (permite conseguir las figuras en perspectiva), ya que esto puede propiciar la visión espacial de los alumnos. Es conveniente ayudarse también diagramas de Venn pues pueden ayudar a encontrar las relaciones de proporcionalidad que buscamos, de gráficos o incluso pedir a los alumnos que intenten representar estas relaciones mediante diversas formas.



Trama isométrica para representar las figuras

Al ir acabando la actividad se hará una lluvia de ideas en la que los alumnos dirán las conjeturas que tienen sobre la relación entre las áreas y los volúmenes de los dos cuerpos. Por último se generalizará este resultado.

Los alumnos deben llegar a la siguiente conclusión: si la razón de semejanza es r, la razón entre las áreas es r^2 y la razón entre los volúmenes es r^3.

→ **Material o recurso necesario:** Cubos encajables, trama isométrica y papel cuadriculado.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán por parejas esta actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende ayudar a que los alumnos entiendan qué relación hay entre las áreas y los volúmenes de figuras semejantes trabajando sobre una situación o problema. Con esta actividad se contribuye a las competencias de "Argumentar" a nivel de reflexión, "Comunicar" a nivel de conexión, pues los alumnos deben expresar asuntos que implican relaciones y entender afirmaciones de terceros, y "Representar" a nivel de reproducción, ya que relacionan diferentes formas de representación.

TAREA 3.3 PARA CASA

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor debería proponer una tarea que sintetice los objetivos tratados en la sesión y que sirva para afianzar los conocimientos que se buscan. La actividad puede ser del siguiente tipo:

TAREA 3.2

En la película de King Kong el protagonista es un gorila de un tamaño 20 veces mayor a un gorila real. Busca en internet el peso de un gorila adulto y el peso que soporta la sección de sus huesos. Justifica si es posible que exista un gorila como el de la película.

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán esta actividad en casa y se la entregarán realizada al profesor en la próxima sesión.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo de "*Calcular áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella*". El profesor puede recogerla al día siguiente y servirle para evaluar el aprendizaje que van desarrollando los alumnos y detectar errores o dificultades. Contribuye a las competencias de "Resolver problemas" (reproducción) y a la competencia de "Argumentar" (reproducción), pues deben crear una cadena de argumentos matemáticos en el problema y utilizar la propiedad transitiva de la semejanza.

SESIÓN 4. Cálculo de distancias inaccesibles.

1. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN

→ **Contenidos básicos**: Triángulos semejantes, triángulos homotéticos, Teorema de Tales.

→ **Contextos y situaciones:** Situación laboral.

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal y gráfico.

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

- Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos.(PR, RP, C)
- Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas. (PR, RP, M, C)

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:** La principal intención es darle sentido práctico al uso de la semejanza de triángulos, y qué mejor forma de hacerlo que resolviendo un problema real para encontrar los contenidos matemáticos que ayudan a resolverlo.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

Esta es la cuarta sesión de trabajo y nos sirve para trabajar los triángulos en posición de Tales y su aplicación para resolver problemas.

3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

TAREA 4.1 + Explicación (55 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:** Vamos a realizar una actividad y que se trabajarán en grupos de 4 personas. Para ello saldremos al patio del colegio con el objetivo de medir la altura del edificio.

La actividad tiene dos partes, la primera se les propondrá la sesión anterior para que puedan reunirse y trabajarla en casa antes de realizar la segunda parte en clase.

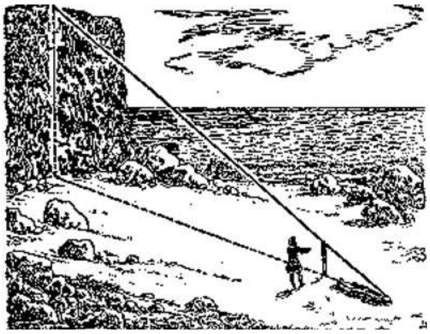
TAREA 4.1 a (EN CASA)

Lee el texto ***"El método de Julio Verne"*** (disponible en el anexo 2) y analiza el método utilizado para calcular una altura inaccesible. Este método te será útil para realizar la segunda parte de la actividad.

TAREA 4.1 b (EN CLASE)

Analiza cómo medir la altura del edificio ayudándote del material que se te ha dado.

Ya en el patio, los grupos tendrán que, apoyándose en el texto que han analizado, considerar las medidas a tomar para resolver el problema planteado. La situación de trabajo es similar a la que aparece en la siguiente figura:



Una vez que han resuelto el problema, harán exposiciones en clase explicando la resolución, o bien entregarán un informe. El profesor concluirá la sesión especificando las propiedades que presentan dos triángulos que son semejantes. Para ello se apoyará en que los triángulos que han utilizado para resolver la actividad son homotéticos (entendemos por ello dos triángulos que comparten un vértice, el centro de la homotecia, y cuyo lado opuesto es paralelo). El profesor hará hincapié en que dos triángulos homotéticos son semejantes y además, si dos triángulos son semejantes entonces se pueden poner esta posición.

El término "triángulos en posición de Tales" aparece en los textos de matemáticas escolares, por lo que si el profesor cree que ayuda, podemos introducir este nuevo término para referirnos a los triángulos así dispuestos. Recordaremos previamente y si es necesario, el Teorema de Tales que han visto en 2º.

→ **Material o recurso necesario:** Texto de la actividad, bastón, cinta métrica, plomada, papel y lápiz.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten. Una vez finalizada, los grupos harán exposición en clase explicando el método que han utilizado, los datos recogidos en la práctica y los resultados.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Con realizar esta tarea hemos pretendido estudiar los aspectos que hacen relevante el estudio de la semejanza de triángulos para enfrentarse al problema del cálculo de distancias inaccesibles. Esta actividad pretende contribuir al desarrollo de los objetivos *"Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos."* y *"Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas"*. La contribución a las competencias se ve reflejada en la competencia de "Comunicar" (conexión) pues los alumnos deben dar enunciados y entender los de otras personas, a la competencia de "Pensar y razonar" (reflexión), "Resolver problemas" (conexión) y Modelizar a nivel de reproducción.

T4.2. TRABAJO EN GRUPO VOLUNTARIO

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:** Esta actividad se propondrá como actividad voluntaria grupal para entregar al final de la unidad.

TAREA 4.2 MEDICIÓN DE ALTURAS CON ESPEJO[6]

Material: Espejo pequeño, cinta métrica, papel y lápiz

→ **Descripción**: Se trata de medir la altura del edificio del colegio con los elementos señalados. Para ello colocamos el espejo en el suelo, entre el edificio y el observador, de forma que éste, en posición erguida, pueda ver la parte más alta del edificio reflejada en el espejo. A continuación, se miden la altura del observador, la distancia de la base del edificio al espejo y la distancia del espejo al pie del observador.

→ **Informe:** Tras realizar la práctica el grupo elaborará un informe para entregar, en el que se incluirán los siguientes apartados:

→ - Esquema gráfico que represente la situación.

→ - Explicación del método.

→ - Datos reales recogidos.

→ - Cálculos realizados y resultados obtenidos.

→ - Opinión del grupo sobre la actividad realizada y utilidad del método. Dificultades que han tenido y cómo las han solventado.

SESIÓN 5. Criterio de igualdad de ángulos para la semejanza de triángulos.

1. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN

→ **Contenidos básicos**: Triángulos semejantes, criterio de semejanza de triángulos.

→ **Contextos y situaciones:** Situaciones personales y situaciones científicas

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal, gráfico y TIC.

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

- Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos.(PR, C)
- Identificar triángulos semejantes utilizando el criterio de igualdad de ángulos. (PR, A)
- Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas. (PR, A)

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:**

Esta es la segunda sesión en la que vamos a trabajar la semejanza de triángulos. La intención es dar el criterio de igualdad de ángulos para la semejanza de triángulos y aplicarlo posteriormente en problemas en la sesión siguiente.

Vamos a realizar una tarea con el programa Geogebra. Este programa nos va a permitir un estudio dinámico que complementa el aprendizaje de los alumnos. El docente debe ser capaz en esta sesión de guiar el proceso de aprendizaje del estudiante, ya que a medida que el estudiante interacciona con

[6] Idea tomada de http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/medir_alturas/Medicion_de_alturas.htm

el programa tiene la oportunidad de observar como estos razonan alrededor de las situaciones propuestas. Como no tenemos que corregir ejercicios de la sesión anterior, tendremos 60 minutos para realizar las tareas.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

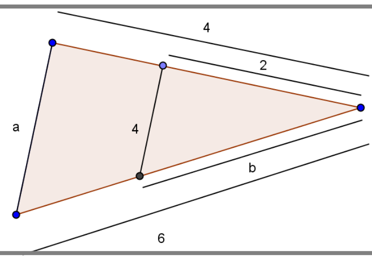
En la sesión complementamos el estudio de la semejanza de triángulos, dando uno de los criterios para la semejanza de triángulos.

3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

TAREA 5.1 (20 Minutos)

Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: Vamos a realizar una actividad para que pongan en práctica los contenidos vistos en la sesión anterior y recuerden lo que se he trabajado:

- ¿Cómo son los triángulos de la figura? ¿Por qué?
- Halla las medidas de a y b.
- Da el enunciado de un problema que se modele con la situación gráfica dada y con el cálculo de a ó b.



→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten. Una vez finalizada, saldrá un alumno a la pizarra a resolverla.

El último apartado puede dar mucho juego, pues podemos pedir que se intercambien los enunciados entre ellos y que analicen si cumple las condiciones impuestas. Así ellos mismos ponen a prueba su capacidad de análisis y de crítica. Luego podemos leer algunos de los enunciados en clase.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo *"Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos."*. La contribución a las competencias se ve reflejada en la competencia de "Comunicar" (conexión) pues los alumnos deben entender enunciados de otras personas, y a la competencia de "Pensar y razonar" (conexión).

TAREA 5.2 + Explicación (20 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor retomará la noción de semejanza insistiendo en que para que dos figuras sean semejantes han darse las dos condiciones (igualdad de ángulos y proporcionalidad de lados). Tras esto comentará que en el caso particular de los triángulos podemos reducir las condiciones a comprobar, y que estas aseguran las dos condiciones para la semejanza.

La actividad será:

Dibuja tres triángulos distintos con la condición de que dos de sus ángulos sean iguales. Determina qué relación guardan entre sí.

Si los alumnos sólo se fijan en que tienen ángulos iguales, podemos preguntarles por la relación que guardan sus lados. Al final de la actividad los alumnos deben concluir que los triángulos dibujados son semejantes. El profesor concluirá la actividad generalizando esta idea: para que dos triángulos sean semejantes basta comprobar que tienen dos ángulos iguales.
Podrá aprovechar también para resaltar la utilidad de la semejanza de triángulos para probar si dos polígonos cualesquiera son semejantes a partir de la descomposición en triángulos.

→ **Material o recurso necesario:** Transportador de ángulos, regla graduada (también se puede hacer con Geogebra).

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten. Al finalizar se pondrán en común los resultados mediante una lluvia de ideas.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: El objetivo de esta actividad es que los alumnos obtengan y justifiquen que para identificar triángulos semejantes basta saber si tienen dos ángulos iguales. Con la actividad contribuimos a la competencia de "Pensar y razonar" (conexión) ya que están desarrollando la capacidad de utilizar los conceptos matemáticos vistos previamente.

TAREA 5. 3 (20 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor explicará en qué consiste la actividad y dejará que los alumnos trabajen en ella. La actividad a realizar puede ser del siguiente tipo:

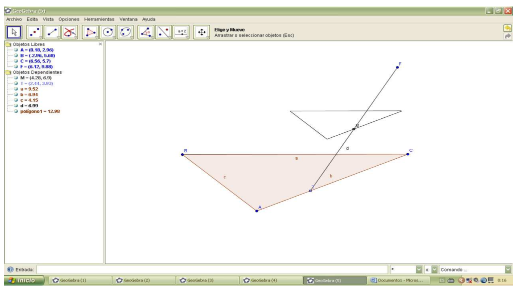
Realiza la siguiente construcción con el programa GeoGebra siguiendo los siguientes pasos:

- Traza un triángulo cualquiera con vértices A, B y C.
- Marca un punto, T, en uno de los segmentos que forman el triángulo y un punto F fuera de él.
- Traza el segmento TF y marca su punto medio M.
- Identifica el lugar geométrico de M mientras T se mueve por el triángulo ABC.

a) Identifica qué figura obtienes.

b) ¿Es el la figura obtenida semejante al triángulo ABC? ¿Cómo justificarías tu respuesta? (Ten en cuenta que puedes mover los objetos libres, como los vértices del triángulo o el punto F, para facilitar tu razonamiento).

Si realizamos la actividad obtenemos en pantalla:



→ **Material o recurso necesario:** Ordenador con el programa Geogebra.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo de *"Identificar triángulos semejantes utilizando el criterio de igualdad de ángulos."* (si para justificar el alumno mueve los objetos libres y compara que hay dos ángulos iguales, o incluso midiendo directamente dos ángulos de cada triángulo). También podría contribuir al objetivo de *"Identificar relaciones de semejanza como composición de un movimiento rígido y una homotecia*" si los alumnos son capaces de ver en la construcción la homotecia que subyace. Las competencias a la que contribuye el ejercicio es a "Pensar y razonar" (conexión) pues los alumnos deben entender los conceptos matemáticos como triángulos en posición de Tales o el criterio de semejanza de triángulos para utilizarlos en la actividad. Además, también deben "Argumentar" y hacer uso de reflexiones como ¿Qué puede ocurrir y por qué? (conexión).

TAREA PARA CASA

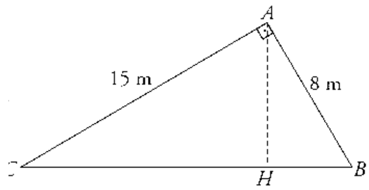
→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor debería proponer una tarea que sintetice los objetivos tratados en la sesión y que sirva para afianzar los conocimientos que se buscan. La actividad puede ser del siguiente tipo:

El triángulo ABC es un triángulo rectángulo, y AH es la altura sobre la hipotenusa.

a) Demuestra que los triángulos ABH y AHC son semejantes.

b) Calcula las longitudes BH y HC.



→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán esta actividad en casa y se la entregarán realizada al profesor en la próxima sesión.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo de los tres objetivos propuestos en la sesión. El recogerla hecha al día siguiente nos puede servir para evaluar el aprendizaje que van desarrollando los alumnos y detectar errores o dificultades. Contribuye a las competencias de "Resolver problemas" (conexión) y a la competencia de "Argumentar" (reproducción), pues deben crear una cadena de argumentos matemáticos en el problema y utilizar la propiedad transitiva de la semejanza.

SESIÓN 6. Aplicación de la semejanza en la resolución de problemas.

1. CONTENIDOS Y OBJETIVOS DE LA SESIÓN

→ **Contenidos básicos**: Triángulos semejantes, criterio de semejanza de triángulos.

→ **Contextos y situaciones:** Situaciones educativas o laborales.

→ **Sistemas de representación utilizados:** Simbólico, verbal y gráfico.

→ **Objetivos didácticos y relación con las competencias matemáticas:**

- Identificar triángulos semejantes utilizando el criterio de igualdad de ángulos. (A)
- Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos.(PR)
- Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas. (PR, A, RP)

→ **Intenciones y expectativas que orientan la planificación de la sesión:**

En esta sesión los alumnos deberán poner en práctica todos los conocimientos de la semejanza de triángulos para abordar distintos problemas.

2. ENMARQUE DE LA SESIÓN EN RELACIÓN CON LAS ANTERIORES Y POSTERIORES

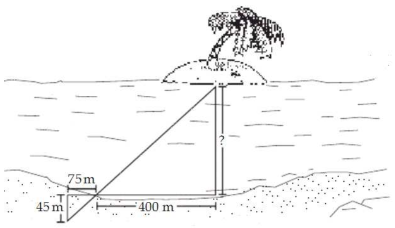
Esta sesión es la penúltima de la unidad y se va a enfocar a la resolución de problemas.

3. SECUENCIACIÓN DE TAREAS

TAREA 6.1 + Explicación (20 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor recordará los conceptos de la sesión anterior y dará una copia del enunciado a los alumnos. La actividad a realizar puede ser del siguiente tipo:



Un deportista quiere llegar a la isla a nado, pero antes le gustaría conocer la distancia que hay entre la isla y la orilla. Justifica cómo obtener dicha distancia y calcúlala.

→ **Material o recurso necesario:** Copia de la actividad.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad y el profesor les ayudará cuando se lo pidan. Al acabarla se resolverá en la pizarra.

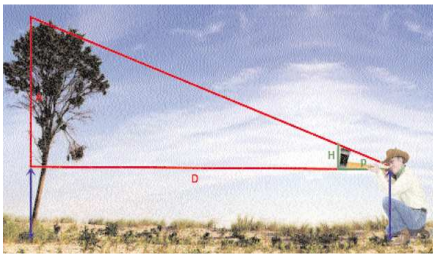
→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Con esta actividad pretendemos contribuir a los tres objetivos que tenemos marcados para esta sesión. Se colaborará con ella al desarrollo de las competencias: “Resolver problemas” (reproducción), “Pensar y razonar” (reproducción) y a la competencia de “Argumentar” (reproducción).

TAREA 6.2 (15 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor dará una ficha con la actividad y dejará que los alumnos trabajen sobre ella.

El Teorema de Tales es uno de los primeros resultados matemáticos que se demostraron, y cuya utilidad llega hasta nuestros días. En la figura, tenemos un leñador que debe talar un árbol y, por su seguridad, es imprescindible conocer la altura del mismo. Como podrás observar, el hacha no sólo le sirve para cortar, sino que le va a servir para dicho cálculo. Con ella, apunta a la copa del pino y con unas simples medidas tiene el problema resuelto. Imagina que eres el leñador:



- ¿Qué medidas, que te sean de utilidad, tomarías para resolver el problema?
- Da medidas verosímiles de la situación y calcula a partir de ellas la medida del árbol.

→ **Material o recurso necesario:** Ficha de la actividad.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente la actividad y al finalizarla se realizará una puesta en común, donde se pedirá a los alumnos que resuelvan la primera parte de la actividad de forma oral y se tendrá en cuenta que el lenguaje que utilizan sea adecuado al tema.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: En esta actividad el alumno tendrá que identificar triángulos semejantes y además deberá aportar datos que sean verosímiles para el problema y discriminar aquellos que no necesitará. Pretende contribuir al objetivo de *"Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas"*. En cuanto a las competencias a las que se contribuye con la tarea son "Resolver problemas" (reproducción) y "Argumentar" (reproducción).

TAREA 6.3 (15 Minutos)

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor: El profesor dictará el enunciado del problema y dejará tiempo para que lo hagan.**

Queremos calcular la altura del árbol más alto del parque. A 22 m de él, hay otro árbol de 17,2 m. Si me coloco a 12 m de éste, podemos conseguir ver de manera alineada la copa de los dos árboles. ¡Ah, por cierto mido 160 cm y peso 55 kg!

I. Representar esta situación en un esquema.
II. Calcula la altura del árbol.

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno especifico.

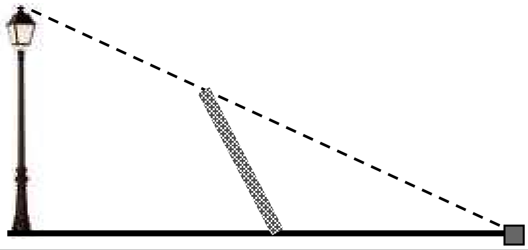
→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente la actividad y al acabarla saldrá un alumno a la pizarra.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Para esta tarea el alumno tendrá que trasladar el enunciado verbal a una situación gráfica para poder resolver el problema, lo que supone un paso más en su aprendizaje y deberá seleccionar correctamente los datos pues se le dan datos innecesarios (E9). Pretende contribuir al objetivo de *"Utilizar la semejanza de triángulos para resolver problemas"*. En cuanto a las competencias a las que se contribuye con la tarea son "Resolver problemas" (conexión) y "Representar" (conexión).

TAREA 6.4 PARA CASA

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:** Dejará la siguiente tarea para trabajar en casa:

Claudio quiere medir la altura de la farola, para ello ha colocado un bastón, que mide 162 cm, como observas en el dibujo. Decide si así podrías calcular la medida de la farola. En caso afirmativo, calcúlala sabiendo que entre la farola y el palo hay 1metro y entre el palo y la marca cuadrada hay 1,5 metros:



→ **Material o recurso necesario:** Ninguno especifico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán esta actividad en casa y se la entregarán realizada al profesor en la próxima sesión.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende detectar si los alumnos aplican el Teorema de Tales (en este caso las particular posición de triángulos que de él se deriva) cuando no se cumplen las hipótesis. El recogerla hecha al día siguiente nos puede servir para evaluar el aprendizaje. Contribuye a las competencias de “Resolver problemas” (reproducción), “Pensar y razonar” (conexión) y a la competencia de “Argumentar” (conexión).

EVALUACIÓN

La última de las sesiones de clase la vamos a dedicar a realizar una prueba escrita que, entre otras técnicas más, nos servirá para evaluar el aprendizaje de los alumnos.

En la enseñanza, llevar a cabo un proceso de evaluación es parte fundamental del proceso de enseñanza-aprendizaje, ya que nos permite conocer en qué medida los objetivos que nos habíamos propuesto han sido adquiridos por los alumnos. También nos es útil para comprobar si durante el desarrollo de la unidad se han superado los errores y las dificultades que encontramos al comienzo o, si por el contrario, aún persisten.

Ahora vamos a pasar a describir el sistema de evaluación que emplearemos en nuestra planificación. Primero enunciaremos los criterios de evaluación que vamos a tener en cuenta, a continuación detallamos las técnicas de evaluación que vamos a considerar así como la ponderación que daremos para obtener una calificación y, por último, veremos un modelo de prueba escrita, una propuesta de trabajo en grupo y un ejemplo de un instrumento de evaluación que podemos emplear como es la escala de valoración.

→ Criterios de evaluación.

En los criterios de evaluación que aparecen en la Orden ECI/2220/2007 no encontramos ningún criterio para el tema de la semejanza para el curso de 3º de ESO. A partir de los objetivos específicos que propusimos y de los conocimientos que se buscan desarrollar, los criterios que vamos a considerar son:

1. *A partir de las definiciones de semejanza de figuras tratadas (proporcionalidad y ángulos y como transformación), es capaz de discernir si dos figuras son o no semejantes.*
2. *Utiliza argumentos basados en la relación que existe entre los perímetros, áreas y volúmenes de dos figuras semejantes.*
3. *Reconoce triángulos semejantes mediante la igualdad de dos de sus ángulos y lo aplica para obtener la medida de lados y ángulos.*
4. *Utiliza la semejanza de triángulos como herramienta que le permite calcular longitudes en problemas bajo diferentes contextos.*

→ Técnicas de evaluación.

Para llevar a cabo el proceso de evaluación de esta propuesta, vamos a considerar varias técnicas:

✱ **Tareas escritas**. Durante el desarrollo de las sesiones hemos dejado para casa algunas tareas con el propósito de recogerlas y revisarlas. Estas tareas pretendían fines de diagnóstico para conocer cómo se iba desarrollando el proceso de enseñanza y aprendizaje.

✱ **Cuadernos de clase**. La revisión de los cuadernos nos permite conocer cómo los alumnos trasladan el conocimiento que se pone a su disposición en cada sesión. Para valorarlos, podemos tener en cuenta el orden, la limpieza, la realización de las tareas, las anotaciones aclarativas (si las utilizan), etc.

✱ **Trabajo en grupo**. Según importantes psicólogos como Piaget y Vygotsky, el trabajo en grupo supone una de las grandes oportunidades para el desarrollo de un aprendizaje significativo. El estudio de la semejanza da pie a trabajos de investigación o de aplicación de los conocimientos vistos en clase. Tendremos en cuenta para la evaluación la contribución en las actividades en grupo y la entrega del trabajo voluntario.

✸ **Observación de las puestas en común y las lluvias de ideas.** Según la propuesta que hemos hecho en casi todas las sesiones hay una actividad encaminada a que los alumnos discutan sobre conceptos matemáticos de aplicación en la vida real. Estas puestas en común, nos permiten conocer las argumentaciones que utilizan los alumnos, la complejidad de sus razonamientos, la utilización del lenguaje específico el tema y en definitiva, una gran variedad de información que nos será de utilidad en la evaluación.

✸ **Prueba escrita**. Esta prueba se llevará a cabo en la última sesión de clase y en ella los alumnos tendrán que poner en marcha el aprendizaje que han adquirido en la unidad. Las actividades que planteamos en ella tendrán muchas similitudes a las planteadas en clase.

→ **Ponderación de la evaluación.**

El valor que vamos a otorgar para cada técnica de las que utilizaremos será:

- ✸ Tareas escritas y cuadernos de clase: Hasta 1 punto de 10.
- ✸ Observación de las aportaciones: hasta 3 puntos de 10.
- ✸ Prueba escrita: Hasta 6 puntos de 10.
- ✸ Trabajo en grupo: Podrá sumar a la nota final hasta 1 punto.

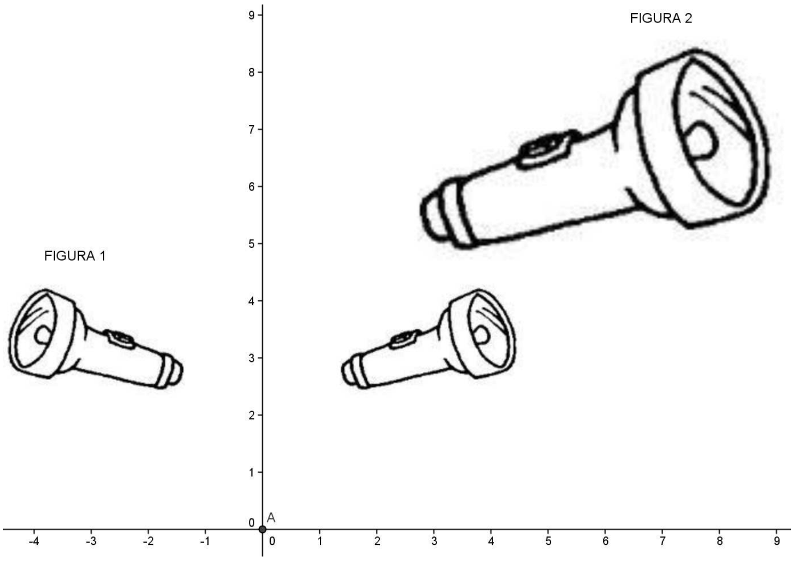
→ **Modelo de prueba escrita.**

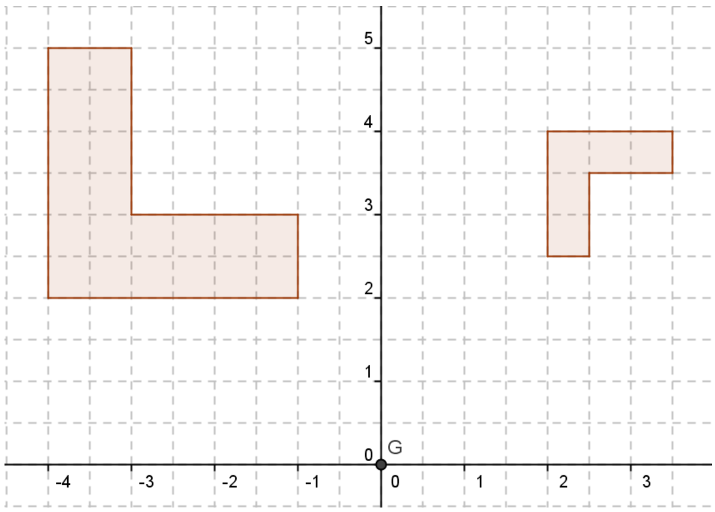
La prueba escrita constará de cinco tareas que cubren los objetivos y los contenidos que hemos tratado en el tema. La dificultad de las tareas propuestas es similar a las realizadas en clase. Y con ellas podremos detectar los errores E2, E4, E6, E8 y E10 se han superado.

La prueba será flexible y pediremos a los alumnos que de los ejercicios propuestos realicen 3. Estas tres actividades se valorarán sobre 6 puntos en total.

EXAMEN Nombre:____________________________

1. Observa las figura y justifica si son o no semejantes.

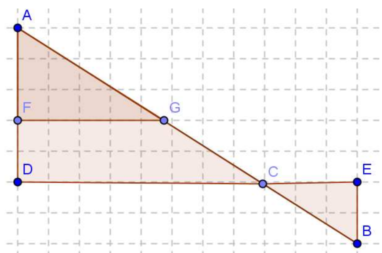




2. Observa los polígonos y justifica si son semejantes:

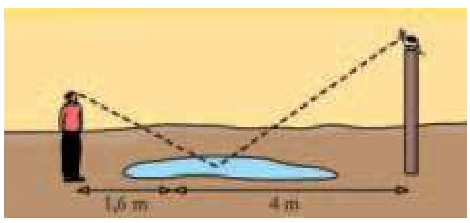
3. **3.** Mira lo que le ocurrió a Carlos. Hace dos días compró un trozo cuadrado de tela para hacer un mantel y le costó 1€. Al llegar a casa comprobó que en realidad necesitaba 3 veces la longitud de tela que había comprado con lo qué volvió a la tienda. Al pagar, Carlos preparó 3€ pero su sorpresa fue que el tendero le dijo que el precio a pagar eran 9€. Carlos le dijo que se estaba equivocando y el tendero le replicó que debía tener en cuenta la superficie de tela. ¿Explica quién llevaba razón de los dos y porqué?

4. Justifica si los triángulos AFG y CEB son semejantes y calcula los valores de los ángulos y de los lados que faltan encada uno de ellos. Para ello ten en cuenta la siguiente información:



- Los segmento FG y DE son paralelos.
- Los segmentos AD y EB son paralelos.
- Los tres triángulos son rectángulos.
- El ángulo que se forma en el vértice C mide 35º.
- EB = 1cm, AF =1,5 cm, CE = 1,5 cm, AG = 2,7 cm.

5. . El gato de Leticia se ha subido a un poste. Leticia puede ver a su gato reflejado en un charco. Toma las medidas que se indican en el dibujo y mide la altura de sus ojos: 144 cm. ¿A qué altura se encuentra el gato?



6. ¿Cuál es la profundidad de un pozo, si su anchura es 1,5 m y alejándote 0,5 m del borde, desde una altura de 1,7 m, ves que la visual une el borde del pozo con la línea del fondo?

Los criterios que nos han llevado a seleccionar estos ejercicios para el examen son cubrir todos los contenidos y objetivos dados en el tema, seleccionando ejercicios de distinto nivel de dificultad.

→ **Modelo de instrumento de evaluación. Escala de valoración.**

A la hora de valorar los debates es conveniente tener unas pautas que nos sirvan de guía. Podemos utilizar una escala de valoración como la siguiente, que podremos adaptar de forma específica a cada una de las tareas que debatamos.

	Nada	Poco	Suficiente	Bastante	Mucho
Participación en los debates					
Claridad de las ideas presentadas					
Adecuación a los contenidos que se tratan					
Argumentación de las aportaciones					
Importancia de las ideas presentadas					
Precisión del uso del lenguaje del tema					

Para valorar el trabajo voluntario también podemos tener una guía. Podemos utilizar una escala de valoración como la siguiente:

	Nada	Poco	Suficiente	Bastante	Mucho
Muestra interés en la práctica					
El informe que presentan es claro y reúne las pautas pedidas					
Los resultados que presentan se ajustan a la realidad					
Argumentación de las opiniones aportadas					
Solucionan las dificultades que han encontrado					

ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Es común encontrarnos en una clase con heterogeneidad de niveles de aprendizaje en los alumnos y por ello, tenemos que prever tareas que se adapten a estas situaciones. Normalmente tendremos alumnos que aprenden a un ritmo más lento que el resto de la clase, bien por necesitar afianzar mejor los conceptos o bien porque necesitan ejercitarse más en los procedimientos, y alumnos cuyas capacidades hacen que comprendan las matemáticas sin apenas esfuerzo. Para estos últimos alumnos, podemos pensar en actividades que complementen su formación matemática formal con la finalidad de introducirlos en el mundo matemático superior.

La atención a la diversidad en nuestro tema la contemplaremos con una batería de actividades que puedan servirle a los alumnos para trabajar según su necesidad. Veamos un ejemplo de tarea de refuerzo para, por ejemplo, contribuir a nuestro objetivo 4 "Calcular perímetros, áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella". Y un ejemplo de tarea que sintetiza contenidos del tema. Las tareas no van a ser de tipo procedimental sobre el objetivo, sino que la tarea de refuerzo potenciará la comprensión de los conceptos que intervienen en el objetivo, y la tarea de ampliación profundizará en los conceptos que se ponen en juego.

TAREA DE REFUERZO R1

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor entregará una ficha con las indicaciones que deben cumplir los alumnos para la actividad. La actividad a realizar puede ser del siguiente tipo:

TAREA R1

Realiza la actividad con el programa *GeoGebra* siguiendo los siguientes pasos:

1º.Dibuja un polígono ayudándote de la herramienta del programa.

2º.Crea un deslizador "d".

3º.Con la ayuda de las herramientas precisas, construye un polígono semejante al anterior cuya razón de semejanza sea "d".

Estudia los perímetros y las áreas de ambos polígonos y establece la relación que existe con la razón de semejanza.

Para realizar la actividad los alumnos pueden crear una tabla en la que aparezca el valor de la razón de semejanza, el valor de algunos lados, los perímetros y las áreas

→ **Material o recurso necesario:** Ordenador con el programa Geogebra.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten (si decidimos hacer la tarea en clase) y si no, la realizarán en casa.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad no pretende contribuir de forma directa a ninguno de los objetivos, sino que la idea es que ayude a que los alumnos entiendan qué relación hay entre los perímetros, las áreas y los volúmenes de figuras semejantes. Con esta actividad se contribuye a las competencias de "Argumentar" y "Representar" pues los alumnos deben relacionar diferentes formas de representación.

TAREA DE AMPLIACIÓN A1

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**
El profesor dará las indicaciones para la actividad. La actividad a realizar puede ser del siguiente tipo:

TAREA A1

Argumenta que al dividir la longitud de una circunferencia por su diámetro, se obtiene siempre el mismo número.

Para esta actividad el alumno debe partir de que dos circunferencias son siempre semejantes, deducir de ello que los perímetros tienen la misma razón de semejanza que sus diámetros: $\frac{d}{d'} = \frac{C}{C'}$ y que como en una proporción podemos intercambiar los medios, deducimos que $\frac{C'}{d'} = \frac{C}{d}$

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente sobre la actividad mientras el profesor les ayuda cuando lo soliciten (si decidimos hacer la tarea en clase) y si no, la realizarán en casa.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad sintetiza y pone en juego parte del aprendizaje adquirido en la unidad. Con esta actividad se contribuye a las competencias de “Argumentar” a nivel de reflexión, “Pensar y razonar” a nivel de conexión y “Resolver problemas” a nivel de conexión.

CONCLUSIONES FINALES

Comencemos estas conclusiones por la reflexión que puedo hacer sobre el Trabajo Fin de Máster. El conocimiento principal que me ha aportado ha sido comprender que para llevar a cabo la preparación de una unidad didáctica necesitas realizar un estudio exhaustivo del tema y no olvidar que la planificación que propongas debe ser algo realizable en la práctica. Estas cuestiones que parecen obvias, no son fáciles de conseguir. También, me ha sido fundamental realizar este trabajo para ser consciente de la necesidad de promover un aprendizaje conceptual centrado en dar respuesta a problemas o situaciones que son relevantes en nuestra vida.

El estudio del tema involucra realizar los análisis didácticos del mismo y esto es algo que necesita preparación. Debe tenerse claro qué se busca con cada uno de ellos y cómo se relacionan entre sí para contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de forma efectiva. También, necesitas estar preparado en el conocimiento del tema en cuestión, con un conocimiento matemático más preciso del tema que estudias. Es claro que no puedes limitarte a conocer sólo aquellos conocimientos que explicarás a los alumnos, sino que el dominio del tema debe ser lo más eficiente posible. Por último, debes saber plasmar las aportaciones que has sacado de ellos para crear con criterios, una planificación que se adapte a la enseñanza que buscas. Todo esto ha sido necesario ponerlo en práctica para realizar el presente trabajo.

Este aprendizaje es el que puede aportarte la parte teórica específica del máster. A mí este periodo teórico me ha servido para afianzar este aprendizaje, pues ya tenía conocimientos previos por las asignaturas de didáctica cursadas años antes durante mi formación.

La segunda cuestión que he comentado es la necesidad de no olvidar que este trabajo pretende ser algo realizable. Uno de los principales problemas que he encontrado es adaptar la planificación de tareas a un tiempo muy concreto. Aunque depende mucho de los alumnos con los que se trabaje, lo cierto es que una idea para adaptar el tiempo a la propuesta me la ha dado la parte práctica del máster.

Sin duda, es en este periodo de prácticas donde mi aprendizaje se ha visto muy favorecido. Entre los aspectos más importantes alcanzados está el poder completar la formación teórica del máster y comprender la necesidad de que más que ser un formador en matemáticas, hay que ser un didacta, un educador y un psicólogo, pues se trabaja bajo una dimensión social enorme. Además es en la práctica dónde te das cuenta si es a esta profesión a la que quieres dedicar tu vida.

Por último, aunque no menos importante, creo que las nociones de psicología que una de las asignaturas de máster me aportó me han sido de mucha utilidad. Gracias a ellas entendí más del proceso de aprendizaje de los alumnos y que cada alumno es diferente a otro, por ello, el trato dado se debe adaptar a cada uno.

Como conclusión pienso que gracias al máster he tenido la oportunidad de conocer el campo profesional educativo desde dentro, ya que me ha permitido profundizar en lo que es el aprendizaje y la enseñanza desde la realidad. Además, creo que te das cuenta de la labor tan importante que es la profesión del profesor para los alumnos y para la sociedad en general.

BIBLIOGRAFÍA

CONTEXTO CURRICULAR

- Boyer, C. (1999). *Historia de la matemática*. Madrid. Alianza Editorial.
- Esteban, M., Ibañes, M., Ortega, T. (1998). *Trigonometría*. Madrid. Editorial Síntesis.
- Giménez, J. Abdounur, O.J. Badillo, E. Balbás, S. Corbalán, F. Dos Santos, J.M. Edo, M. García Cruz, J.A. Masip, A. Spinadel, V.W. (2009). *La proporción: arte y matemáticas*. Barcelona. Editorial GRAÓ, d´IRIF, SL.
- Vizmanos, J.R., Anzola, M. (s.f). *Matemáticas Opción A. Secundaria 4º ESO*. Madrid. Editorial SM.
- Colera, J., García, R., Gaztero, I., Oliveira, M.J. (s.f). *Matemáticas 3. Educación secundaria Andalucía*. Editorial Anaya.
- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J.; Rico, L. y Gómez, P. *Educación Matemática*. Grupo Editorial Iberoamérica. Méjico
- BOJA (2007). Orden de 10-8-2007, por la que se desarrolla el currículo correspondiente a la Educación Secundaria Obligatoria en Andalucía. (BOJA 30-8-2007)
- MEC (2007). Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria.
- Engler,A., Gregorini, M., Müller, D., Vrancken, S. y Hecklein, M.(s.f). *Los errores en el aprendizaje de la matemática*. Disponible en: http://www.soarem.org.ar/Documentos/23%20Engler.pdf
- OCDE (2005). PISA 2003: *Preguntas liberadas. Matemáticas y Solución de problemas. Instituto Nacional de Evaluación y calidad del sistema educativo* (INECSE), Madrid.
- NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. SAEM Thales. Sevilla.

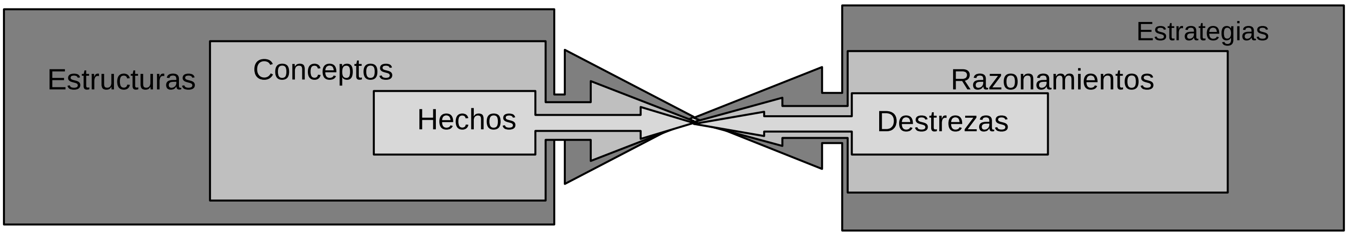
Páginas web consultadas:

- http://es.wikipedia.org/wiki/Carta_Pisana
- http://fabian.balearweb.net/post/72445
- http://marsairplane.larc.nasa.gov/index.html
- http://recursostic.educacion.es/descartes/web/materiales_didacticos/medir_alturas/Medicion_de_alturas.htm
- http://es.scribd.com/doc/401207/Libro-para-el-Maestro-Matematicas-Secundaria
- www.lolitabrain.com
- http://divulgamat.ehu.es/weborriak/recursosinternet/Laboratorio/Archivos/policubos_1_alumno.pdf
- http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/
- http://es.wikipedia.org/wiki/Formato_de_papel
- http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm
- http://www.sectormatematica.cl/educmedia.htm

ANEXOS

ANEXO 1: ANÁLISIS DE CONTENIDO GENERAL

Para llevar a cabo el análisis de la estructura conceptual del tema que estamos tratando, tendremos en cuenta dos grandes campos, el **conceptual** y el **procedimental**. Cada uno de ellos se desglosa a la vez en tres niveles que interactúan entre sí de forma paralela (Las destrezas proceden sobre los hechos; los razonamientos sobre los conceptos y las estrategias sobre las estructuras).



Vamos a describir los elementos del conocimiento de la estructura conceptual para el tema de la semejanza de figuras sobre todo el ciclo de la Educación Secundaria:

- **HECHOS**: Dentro de ellos encontramos los términos, las notaciones, los convenios y los resultados.

- **Términos:**
  - Magnitud,
  - Medida, cantidad
  - Proporcionalidad numérica.
  - Cociente.
  - Vértice, ángulo, lado, segmento.
  - Lados y ángulos homólogos.
  - Polígono.
  - Perímetro, área, volumen.
  - Recta, paralelismo.

- **Notación:**
  - Unidades (u), Sistema métrico decimal de numeración.
  - a/b ó a:b
  - a/b = c/d ó a:b = c:d
  - A, B, C,... Â,...a, b ,c, …, AB…
  - ABC, ABCD,...
  - P, A, V.
  - 1:100
  - ABC ~ DEF
  - k
  - r, s, ||

- **Convenios:**
  - Los lados se denotan por: a, b, c…
  - Los vértices se denotan por: A, B, C,…
  - Los ángulo se denotan por: Â, Ê…
  - Los segmentos se denotan por: AB, AC…
  - Los polígonos se denotan ABC, ABCD…
  - En una razón el numerador se llama antecedente y el denominador consecuente.
  - En una proporción hay cuatro términos a:b = c:d, a y d se llaman extremos y los otros medios.
  - El perímetro se denota por P, el área por A y el volumen por V.
  - a/b se lee como a es a b.
  - El símbolo ~ denota la semejanza de figuras.
  - La razón de semejanza recibe el nombre de escala en planos, mapas y maquetas.
  - 1:100 se lee uno cien.

- Para una escala 1:100 la razón de semejanza es 1/100.

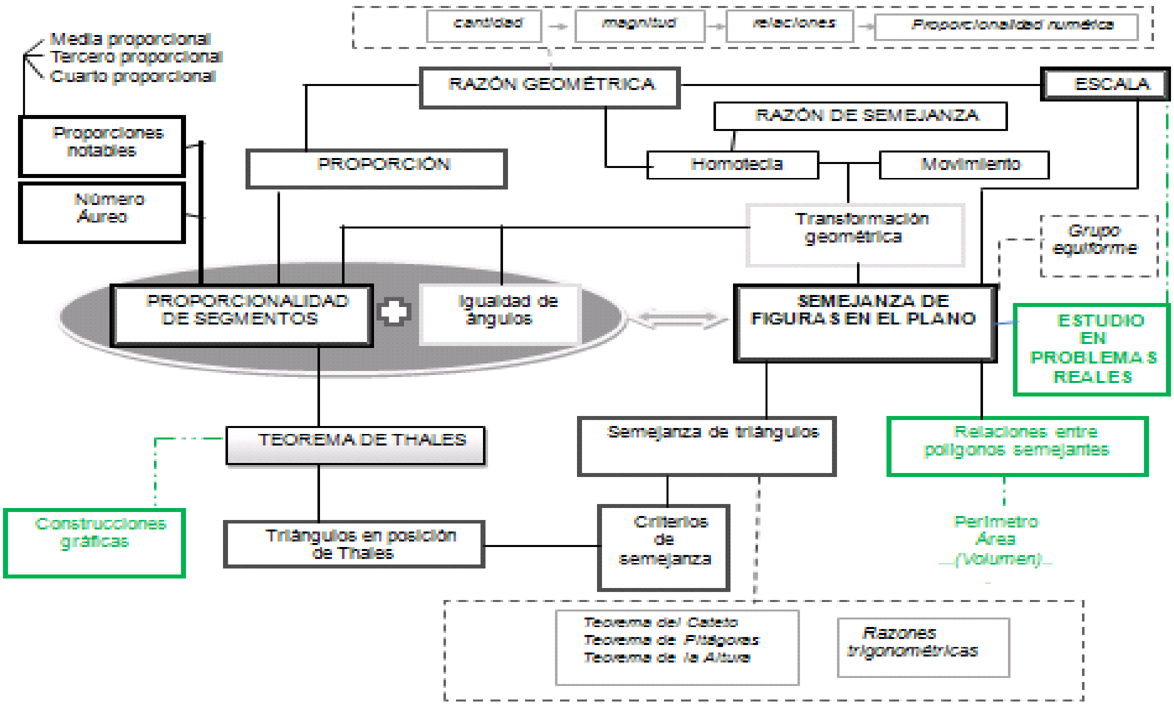
- **Resultados:**
  - Los ángulos de un polígono convexo de n lados suman 180(n-2) º.
  - El ángulo con el que corta una recta a dos paralelas es el mismo.
  - Si la razón de semejanza entre figuras, k, es mayor que 1, la figura se amplia. Si es menor que 1, se reduce.
  - Los segmentos homólogos de figuras semejantes son proporcionales.
  - Los ángulos homólogos son iguales.
  - Las semejanzas llevan puntos alineados en puntos alineados.
  - Las semejanzas llevan segmentos en segmentos.
  - Las semejanzas conservan los ángulos.
  - La razón de la semejanza producto es igual al producto de las razones de las semejanzas.

- **DESTREZAS:**
  - Obtener relaciones de igualdad y desigualdad de segmentos.
  - Medidas de longitudes, amplitudes y superficies.
  - Operar con medidas de segmentos.
  - Operar con medidas de ángulos.
  - Construir ángulos.
  - Identificar lados proporcionales en polígonos.
  - Construcción de segmentos proporcionales.
  - Dividir un polígono en triángulos.
  - Reconocer dos magnitudes proporcionales.
  - Reconocer series de números proporcionales.
  - Pasar de una proporcionalidad de magnitudes a una proporcionalidad numérica.
- **CONCEPTOS:**
  - Razón, semejanza, escala (gráfica y numérica).
  - Cuarto, tercero y media proporcionalidad.
  - Figuras y polígonos semejantes.
  - Triángulos en posición de Thales.
  - Criterios de semejanza entre triángulos.
  - Homotecia.
- **RAZONAMIENTOS:**
  - Deductivo:
    - Identificar polígonos semejantes.
    - Aplicar los criterios de semejanza.
    - Cálculo de la media, tercero y cuarto proporcional.
    - Comprobar que en un triángulo rectángulo, la altura trazada sobre la hipotenusa es media proporcional entre las dos partes en que divide a ésta
  - Inductivo:
    - Establecer la relación entre las razones de perímetro, área y volumen de polígonos en relación de semejanza.
    - Establecer la relación entre las alturas de polígonos semejantes (triángulo, paralelogramo, trapecio).

- Figurativo:
  - Representación a escala de un objeto de la realidad.
  - Dibujar un polígono semejante a otro dada la razón.
- Cálculo de la razón de semejanza entre figuras.
- Obtener la escala.
- Cálculo de distancias, áreas y volúmenes en mapas, planos y maquetas interpretando el concepto de escala

- **ESTRUCTURA CONCEPTUAL**
  - Teorema de Thales.
  - Teorema del cateto.
  - Teorema de la altura.
  - Teorema de Pitágoras.
  - Las semejanzas son un grupo equiforme.
  - Las magnitudes escalares constituyen un semigrupo conmutativo con elemento neutro totalmente ordenado.
- **ESTRATEGIAS:**
  - Construcción de polígonos semejantes.
  - Cálculo de distancias y alturas inaccesibles usando el teorema de Thales.
  - Obtención de medidas de ángulos y lados utilizando la semejanza en polígonos.
  - Desarrollar la capacidad de construcción gráfica que se deriva del teorema de Thales.
    - Cálculo gráfico de medio, tercero y cuarto proporcional.
    - Representación en la recta real de números racionales.
    - Dividir un segmento en partes iguales y en partes proporcionales.

A partir de este desglose y de lo que estudiado en la historia, vamos a ver el **mapa conceptual** para el tema de semejanza:



ANEXO 2: El método de Julio Verne

(Geometría recreativa. Yakov Perelman. http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/)

El siguiente método también es sencillo. Julio Verne describió en su novela "*La isla misteriosa*" la forma de medir los objetos de gran altura:

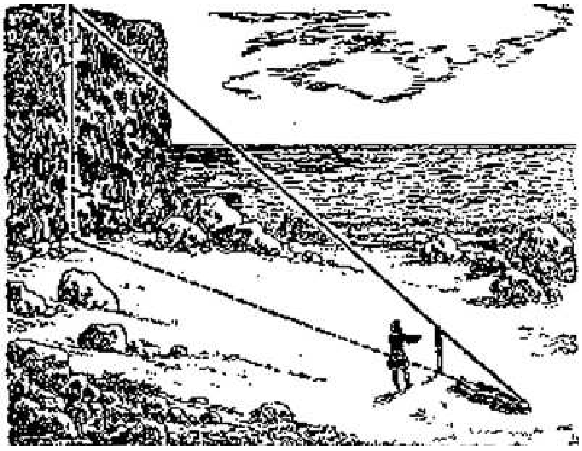
– Hoy vamos a medir la altura del acantilado de Vista Lejana, –dijo el ingeniero.

– ¿Necesitamos algunos instrumentos? –preguntó Gebert.

– No hace falta. Lo haremos de otra manera, más fácil y más segura.

El joven, caminó desde el acantilado hasta la orilla. Cogió un jalón de 12 pies de longitud, el ingeniero comprobó la medida con su estatura, la cual conocía bien. Gebert entregó una plomada al ingeniero; ésta no era más que una piedra atada al extremo de una cuerda.

Situándose a 500 pies del acantilado vertical, el ingeniero clavó el jalón verticalmente en la arena, con la ayuda de la plomada, enterrándola a dos pies de profundidad. Luego se alejó del jalón, hasta que tumbándose en el suelo pudo ver el extremo saliente del jalón y la cresta del acantilado en línea recta (Figura al margen). Marcó este punto con una estaca.



– ¿Tienes algunas nociones de geometría?– preguntó a Gebert.

– Sí.

– ¿Recuerdas las propiedades de los triángulos semejantes?

– Sus lados correspondientes son proporcionales.

– Exacto. Ahora voy a construir dos triángulos rectángulos semejantes. Un cateto del triángulo pequeño será el jalón, el otro cateto, será la distancia desde la estaca hasta el pie del jalón; la hipotenusa, es mi línea de vista. En el triángulo mayor los catetos son el acantilado, cuya altura queremos medir, y la distancia desde la estaca hasta el pie del acantilado; la hipotenusa es mi línea de vista, que se une con la hipotenusa del triángulo menor.

– ¡He entendido! – exclamó el joven. El trayecto de la estaca hasta el jalón es al trayecto desde la estaca hasta el pie del acantilado, como la altura del jalón es a la altura del acantilado.

– Exactamente. Sigamos, si medimos las dos primeras distancias, y sabemos la altura del jalón, podemos calcular el cuarto miembro de la proporción que es la altura del acantilado. Se midieron ambas distancias horizontales: la pequeña midió 15 pies, la grande midió 500 pies.

Finalmente el ingeniero anotó:

$$\frac{15}{500} = \frac{10}{x}$$

$$15\,x = 5.000$$

$$x = 333{,}3 \text{ pies}$$

Entonces, la altura del acantilado es de 333 pies.

ANEXO 3: BANCO DE ACTIVIDADES

Las siguientes tareas pueden servir como tareas de refuerzo, o como tareas a las que el profesor puede acudir si durante el desarrollo de la unidad ve que los alumnos necesitan reforzar o ampliar los conocimientos adquiridos:

TAREA I

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

Tras haber explicado los conceptos de la sesión 1 el profesor puede proponer esta tarea si lo considera necesario.

---

1) Determina si cada par de las razones siguientes forman o no una proporción:

   a) $\frac{2}{5}$ y $\frac{10}{25}$ b) $\frac{21}{7}$ y $\frac{3}{5}$ c) $\frac{3}{4}$ y $\frac{24}{32}$ d) $\frac{8}{28}$ y $\frac{2}{7}$

2) Calcula el valor de x en cada una de las siguientes proporciones:

   a) $\frac{x}{24}=\frac{5}{2}$ b) $\frac{0{,}11}{0{,}55}=\frac{6{,}2}{x}$ c) $2{,}6:7{,}8=3:x$ d) $\frac{\frac{1}{6}}{\frac{5}{12}}=\frac{\frac{1}{3}}{x}$

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán de forma individual y el profesor les ayudará cuando lo soliciten. Es conveniente que observe como llevan a cabo la realización de la actividad. La corrección de la actividad se dejará para la siguiente sesión.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad está enfocada a los procedimientos, para que los alumnos adquieran este dominio de cálculo y utilizarlo en los problemas de las siguientes sesiones.

TAREA II

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

Tras el estudio de las propiedades que tienen dos figuras semejantes, el profesor podrá realizar una actividad del siguiente estilo para que el alumno aplique el proceso de dadas dos figuras saber qué comprobar para la semejanza y el proceso inverso.

A Sofía le encantan las galletas y las matemáticas, y ha querido reflejar ambas pasiones cocinando para su familia unas galletas con forma de triángulo. Para ello ha utilizando un molde cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm. Su hermana ha decidido contribuir a la merienda con una tarta, pero Sofía le pide que la forma de esta sea semejante a sus galletas. En el molde que tienen triangular para tartas, su lado menor mide 15 cm.

a) Halla cuanto deberían medir los otros dos lados del molde para que sea semejante con la forma triangular de las galletas.

b) Si las dos formas fueran semejantes y el triángulo de las galletas es rectángulo. ¿Podemos asegurar que el de la tarta también lo es?

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno específico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán de forma individual sobre la actividad y el profesor intervendrá para aclararles las posibles dudas.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al desarrollo del objetivo *"Dadas dos figuras semejantes, obtener la medida de un segmento o un ángulo a partir de otros conocidos".* La actividad contribuye a la competencia de "Resolver problemas"

TAREA III

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

Esta actividad se puede realizar para afianzar los conocimientos de la 4º sesión.

Si una persona de 1.75 m de estatura tiene un peso normal de aproximadamente 75 kg; entonces un gigante del doble de estatura, es decir, de 3.50 m, pero de las mismas proporciones, ¿cuánto pesará? Argumenta si esto sería o no posible.

→ **Material o recurso necesario:** Ninguno especifico.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán individualmente la actividad .

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al objetivo de "*Calcular áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella*". Las competencias a las que se contribuye con la actividad son "Resolver problemas", "Pensar y razonar" pues deben comprender bien el concepto matemáticos de razón para luego razonar sobre él. Por último también se contribuye a "Argumentar" pues deben seguir cadenas de argumentos.

TAREA IV[7]

→ **Descripción de la actuación del alumno y/o de la intervención del profesor:**

El profesor dará una copia del texto y lo leerán en voz alta en clase. La actividad va a consistir en hacer un comentario y una exposición en grupos en torno a la idea central del texto que les haya tocado trabajar y las conclusiones que se derivan de dichas ideas.

Los posibles textos están en el anexo 4.

→ **Material o recurso necesario:** Copia del texto.

→ **Descripción sobre la gestión del aula**: Los alumnos trabajarán en grupos de 4 redactando una lista conclusiones que han obtenido del texto. Se hará una exposición por grupos y al acabar el profesor complementará las aportaciones que se han dado.

→ **Comentarios sobre las intenciones del profesor al realizar la actividad**: Esta actividad pretende contribuir al objetivo de "*Calcular áreas y volúmenes de una figura utilizando otra semejante a ella*". Además en torno a ella el profesor hará que la mente de los alumnos adopte una actitud crítica frente a algunas películas de cine en las que aparecen bichos gigantes que tienen la

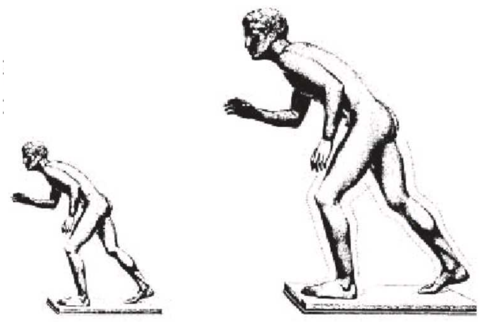
[7] Texto obtenido de de http://es.scribd.com/doc/401207/Libro-para-el-Maestro-Matematicas-Secundaria

misma movilidad que sus semejantes reales. En la exposición se dará constancia de las limitaciones de la escala en los seres vivos y en nuestro entorno, por ejemplo en las montañas[8]. Las competencias a las que se contribuye con la actividad son "Pensar y razonar" pues deben comprender bien el concepto matemáticos de razón para luego razonar sobre él (conexión), "Argumentar" (conexión) pues deben disponer del sentido de la heurística y seguir y valorar las cadenas de argumentos propuestas por sus compañeros y "Comunicar" (reflexión) pues deben expresarse y entender los enunciados de otras personas.

[8] "*Imaginemos la cima del Everest, como un cono de 8.800 metros de altura, uniforme y de granito, roca muy común en las montañas. La base la imaginamos del mismo diámetro. Bajo estos supuestos la masa del monte sería de unas 700.000.000.000.000 toneladas. Esta masa ejerce sobre la hipotética base del monte, una presión de 9 millones de kilogramos por cada metro cuadrado. Y no se derrumba porque el granito tiene una resistencia mayor. Si continuáramos calculando veríamos que una montaña que midiera el doble estaría en el límite de la resistencia del granito y se derrumbaría bajo su propio peso*." GALILEO, KING KONG Y EL ACERO. www.lolitabrain.com

ANEXO 4: TEXTOS DE INTERÉS PARA TRABAJAR EN EL TEMA

EL TAMAÑO DE LAS COSAS

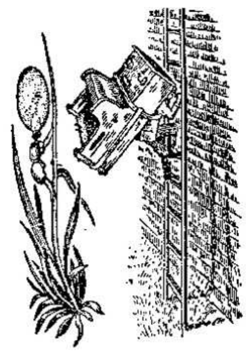


El tamaño de las cosas no es arbitrario y muchas veces está determinado por su forma. Si se duplican las dimensiones lineales de un objeto, su volumen se multiplica por ocho. La figura grande, que es dos veces más alta que la pequeña, tiene ocho veces su volumen y, por lo tanto, su peso. Pero el área transversal de sus piernas sólo es cuatro veces más grande. Las líneas punteadas de la figura grande muestran el grosor que deberían tener sus piernas para soportar un cuerpo dos veces más alto que el de la figura pequeña. Piernas tan gruesas serían agobiantes y ciertamente reducirían la movilidad humana, con la consecuente pérdida de eficiencia. Los grandes animales prehistóricos pudieron haber muerto a causa de la ineficiencia debida a su peso excesivo (Adaptado de Rowland, Kurt,The development of shape, Gran Bretaña, Ginn, 1975).

UN GIGANTE DE SEIS PATAS

(Geometría recreativa. Yakov Perelman. http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/)

¡Las hormigas son unas criaturas sorprendentes! Suben vivamente por un tallo con una carga demasiado pesada para su pequeño tamaño (Figura derecha), ellas plantean un problema a un observador: ¿De dónde obtiene tanta fuerza ese insecto, para subir sin demasiado esfuerzo, con un peso 10 veces superior al de ella?



Es que una persona no es capaz de subir por la escalera, con una carga tan pesada, por ejemplo, con un piano, pero la proporción de la carga sobre el peso de cuerpo es igual a la de una hormiga. Resulta, que una hormiga es más fuerte que un hombre.

¿Es cierto esto?

Sin geometría aquí no comprendemos.

Escuchemos primero a un especialista (profesor A. F. Brandt) sobre la fuerza de los músculos y después contestamos a la pregunta sobre la proporción de las fuerzas de un insecto y de una persona:

«Un músculo vivo parece a un hilo elástico, pero se contrae al excitar los nervios. En los experimentos sobre fisiología, se aplica una corriente eléctrica al nervio correspondiente o al mismo músculo. «Los experimentos se realizan sobre los músculos separados de una rana recién muerta. Los músculos de los animales de sangre fría conservan sus funciones vitales durante largo tiempo fuera del organismo, a temperatura ambiente. La forma de realizar la prueba es muy simple, se corta el músculo de la pata trasera del animal, este contiene la pantorrilla y el fémur, desde el cual comienza el tendón. Este músculo resulta más conveniente para efectuar las pruebas debido a su tamaño, forma y facilidad de disección.

«A través del tendón se pasa un gancho, bajo el cual se cuelga una pesa. Si tocamos el músculo con un hilo metálico, conectado a una pila galvánica, instantáneamente se contrae, se encoge y levanta el peso. Colocando gradualmente más pesas pequeñas suplementarias, se puede determinar la máxima capacidad de levantamiento del músculo.

«Atamos ahora dos, tres, cuatro músculos iguales en serie y empezamos a excitarlos. Vemos, que no conseguimos de esta forma no logramos levantar un peso mayor, pero el peso se va a levantar más arriba. Si anudamos dos, tres, cuatro músculos, al excitarlos van a levantar un peso mayor.

«Cuando se entrelazan los músculos se obtiene un resultado similar. Concluimos entonces, que la fuerza de levantamiento de los músculos depende únicamente del grosor, es decir, del corte transversal; pero de ninguna manera depende de la longitud o del peso general de éstos.

Luego de apartarnos del tema, regresamos a las semejanzas geométricas, pero esta vez en animales de diferente tamaño.

«Si imaginamos dos animales; cuyas medidas del primero son el doble de las del otro; el volumen y el peso del cuerpo, y también todos los órganos serán mayores 8 veces. Todas las medidas de superficie, además de los cortes transversales de los músculos, solo serán mayores 4 veces. Al duplicar su tamaño durante la etapa de crecimiento el volumen de su cuerpo aumentará 8 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 4 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 2 veces más débil. Aplicando el mismo razonamiento se concluye que al triplicar su tamaño, el volumen de su cuerpo aumentará 27 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 9 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 3 veces más débil. Y de igual manera, al cuadruplicar su tamaño, el volumen de su cuerpo aumentará 64 veces al tiempo que sus músculos apenas tendrán un área 16 veces mayor, lo que quiere decir que el animal se hace 4 veces más débil. Y así se puede seguir razonando.

Con esta ley que muestra la proporción inversa entre el aumento del volumen y el peso de un animal, y la reducción de su fuerza muscular, se explica por qué un insecto, tal como una hormiga, una abeja, etc. puede subir cargas 30 ó 40 veces mayores que su propio peso, mientras que una persona normal solo es capaz de subir solamente 9/10, y el caballo, apenas 7/10 de su peso.»

Después de estas explicaciones pasamos a contemplar las hazañas de las hormigas "gigantes" desde otro punto de vista: tal como las describe jocosamente el fabulista Y. A. Krylov:

Una hormiga tiene una fuerza excelente,
De la cual no se conoce la antigüedad;
Y además (dice una antigua fuente)
Podría levantar dos grandes granos de cebada

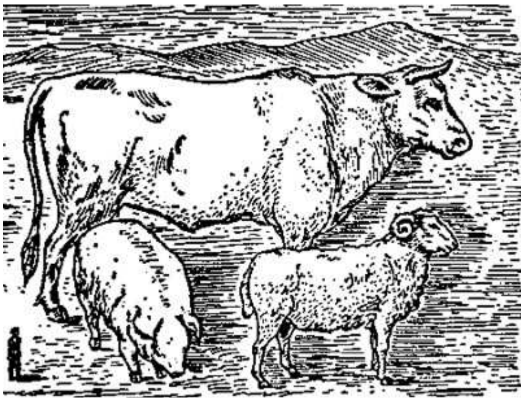
LAS IMÁGENES DIDÁCTICAS

(Geometría recreativa. Yakov Perelman. http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/)

No puedes sorprender a un lector que con experiencia en referencia a las comparaciones entre volúmenes y tamaños de cuerpos geométricamente semejantes, con preguntas de este tipo. Fácilmente puede encontrar el error de algunas imágenes didácticas, que a veces aparecen en las revistas ilustrativas

¿Cuánta carne se comerá una persona durante la vida? (Encuentra el error de la imagen)

Aquí tenemos un ejemplo de una imagen con errores. Si una persona come al día, en promedio,



400 gr de carne, se calcula que durante 60 años de vida habrá consumido cerca de 9 toneladas. Como el peso de un toro es de ≈ 1/2 tonelada, entonces el hombre podrá decir, que durante toda su vida, ha comido 18 toros. La figura anterior, reproducida de una revista inglesa, representa ese toro gigantesco al lado de un hombre. ¿La figura es correcta? ¿Cuál escala sería la más adecuada?

Solución

La figura no es correcta. El toro, presentado aquí, es 18 veces más alto de lo normal, y por ende, ese número de veces es más grande y más largo. Por lo tanto, el volumen será 18 x 18 x 18 = 5.832 veces mayor que su volumen normal. Una persona podría comer un toro así de grande, durante dos mil años.

Tiene que presentarse el toro más alto, más largo y más ancho que un toro normal en $\sqrt[3]{18}$ es decir, 2,6 veces; no tan dramático como lo muestra la figura.

GEOMETRÍA DE GULLIVER

(Geometría recreativa. Yakov Perelman. http://www.librosmaravillosos.com/geometriarecreativa/)

El autor de los «Viajes de Gulliver», evitó con sumo cuidado, el peligro de enmarañarse entre las proporciones geométricas. Los lectores, sin duda, se acordarán, que en el mundo de los liliputienses nuestro pie (*30,5 cm*), era equivalente a una pulgada (*2,54 cm*). Y en el mundo de gigantes, ocurría lo contrario, una pulgada nuestra, era equivalente a un pie. De otra manera, para el liliputiense toda la gente, todas las cosas, todas las criaturas de naturaleza eran *12* veces más pequeñas de lo normal, para los gigantes, eran *12* veces más grandes. A simple vista estas proporciones eran simples, sin embargo, en algunos casos dificultaron las respuestas a preguntas como estas:

1. ¿En cuántas veces superaba la cantidad de comida de Gulliver a la de un liliputiense?
2. ¿En cuántas veces sobrepasaba la cantidad de tejido requerido para elaborar un traje para Gulliver a la cantidad que se necesitaba para elaborar el traje de un liliputiense?
3. ¿Cuánto pesa una manzana del mundo de los gigantes?

El autor de «Los viajes» resolvió problemas como estos, en la mayoría de casos. Calculó de forma correcta que la estatura de un liliputiense era *12* veces menor que la de Gulliver, entonces el volumen de su cuerpo era *12 x 12 x 12* veces menor, es decir, *1.728* veces; Por lo tanto, para que Gulliver quedara satisfecho con la comida, necesitaba una cantidad 1.728 veces mayor que la que requería un liliputiense. Leamos la descripción de la comida de Gulliver:

"Trescientos cocineros preparaban mi comida. Alrededor de mi casa se montaron unas cabañas, donde vivían los cocineros con sus familias. Cuando se acercaba la hora de comer, cogía las 20 personas del servicio y las colocaba sobre la mesa, y otras cien personas servían desde el suelo: Unos servían la comida, otros traían latas de vino y otras bebidas, colgadas en pértigas sobre sus hombros. Todos los que estaban arriba, servían la mesa usando cuerdas y bloques…"

El autor (Swift) efectuó un cálculo exacto de la cantidad necesaria de tejido para elaborar el traje de Gulliver. La superficie de su cuerpo es mayor que la de un liliputiense 12 x 12 = 144 veces: En este mismo número, necesitaba Gulliver más cantidad de tejido, de sastres, etc. Swift tuvo en cuenta todos esos detalles, que al relatar la historia de Gulliver, señala que para él «habían agregado 300 sastres liliputienses (figura izquierda) que debían elaborar un par de trajes con base en un modelo regional». (La prisa del trabajo requería doble cantidad de sastres.)

En casi todas las páginas se hacen necesarios los cálculos. Y Swift los efectuó correctamente de principio a fin. Si Pushkin, en su libro «Evgeniy Onegin», asegura que «el tiempo se calcula con el calendario», entonces en «Los viajes de Gulliver» de Swift, todas las medidas se ajustan a las normas geométricas. Esporádicamente, en algunos pasajes, no encaja la escala. Donde describe el mundo de los gigantes, se encuentran algunos errores

"Un día, - cuenta Gulliver - se fue con nosotros pasear por el jardín un liliputiense del palacio. Cuando paseaba quise tomar un descanso y me senté bajo un árbol. Mi acompañante trepó al árbol, cogió una rama y la sacudió sobre mi cabeza. Empezó a caer una lluvia de manzanas del tamaño de una lata grande; una me golpeó en la espalda y me derribó…"

Gulliver se puso en pié fácilmente, después de recibir este golpe. Sin embargo, un sencillo cálculo nos muestra que el golpe de una manzana tenía que ser verdaderamente exterminador: Una de esas manzana pesa 1.728 veces más que la nuestra, esto quiere decir, que cayó un cuerpo de 80 kg desde una altura 12 veces mayor que la nuestra. La energía del golpe tenía que superar 20.000 veces la energía de la caída de una manzana normal y podría comparase, al menos, con la energía de un proyectil…

Swift cometió un pequeño error referente a la fuerza muscular de los gigantes. Desde el primer capítulo sabemos que la capacidad de los animales grandes no es proporcional a su tamaño. Si empleamos este razonamiento en torno a los gigantes de Swift, resulta que la fuerza muscular de Gulliver era 144 veces mayor, mientras que el peso de su cuerpo era 1.728 veces mayor. De ser así, Gulliver podía levantar, incluso, el peso de su propio cuerpo, además de la carga misma; pero los gigantes ni siquiera eran capaces de levantar el peso de su cuerpo. Todo el tiempo permanecían quietos en el mismo sitio, sin poder realizar ningún movimiento significativo. Su poder era enorme, de acuerdo con el escrito, pero los cálculos indican que el resultado no es correcto