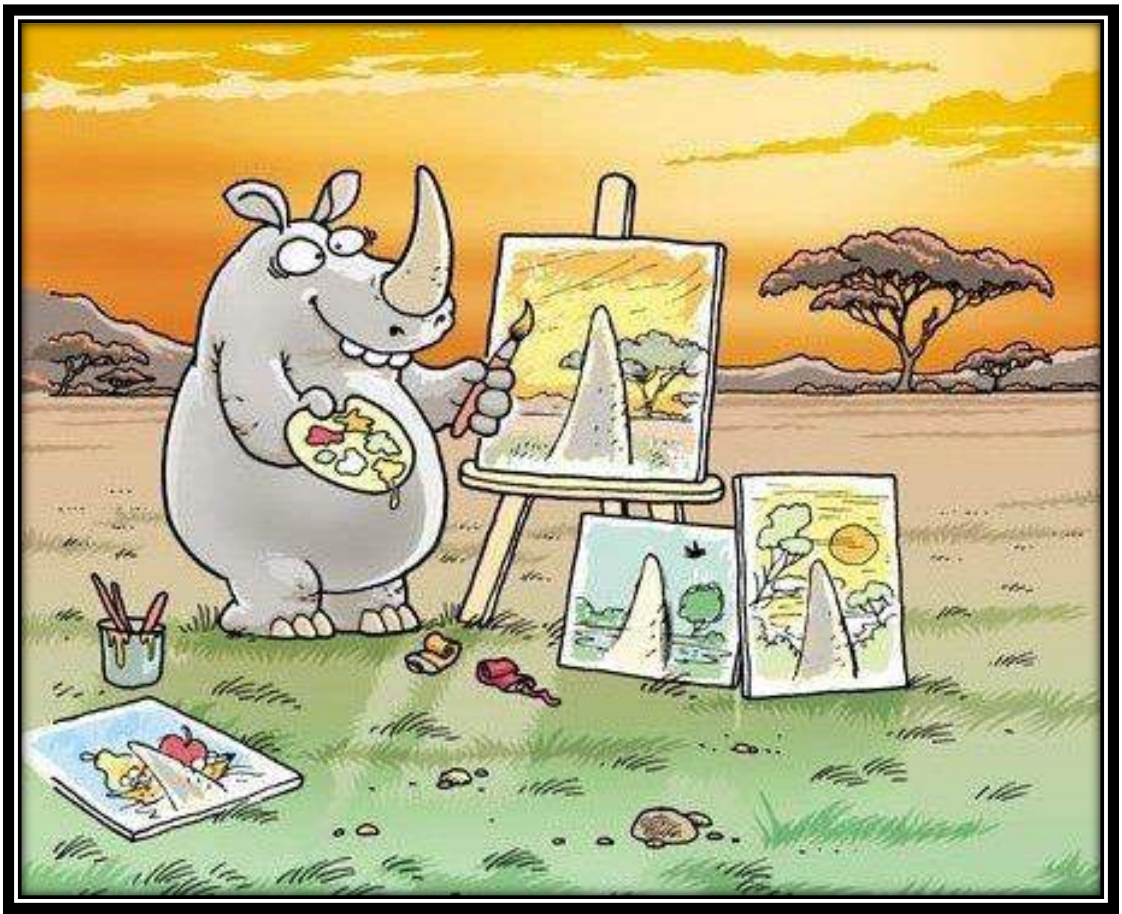
Curso 2013/2014



TRABAJO DE FIN DE MÁSTER

LIMITANDO LAS FUNCIONES A LA INTERPRETACIÓN

Máster Universitario de Profesorado de Educación Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.
Especialidad: Matemáticas

Alumna: María José González Lorenzo

Universidad de Granada

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. José Luis Lupiáñez Gómez del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada que presenta María José González Lorenzo, dentro del Máster Universitario de Formación de Profesorado de Enseñanza Secundaria Obligatoria, Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanza de Idiomas.

Fdo.: María José González Lorenzo

Mª José

Vº Bº del tutor

Fdo.: José Luis Lupiáñez Gómez

Agradecimientos

En este apartado querría agradecer a todas esas personas que han hecho posible de una u otra forma este proyecto.

En primer lugar, agradecer la colaboración, disposición y amabilidad de Marina González García, profesora del I.E.S. Ángel Ganivet, que nos ha cedido una de sus clases de la asignatura de matemáticas para poder desarrollar la investigación. Además, nos ha proporcionado datos del nivel cognitivo de la clase para determinar una pregunta de control.

Por otro lado, agradecer al tutor de este trabajo el doctor D. José Luis Lupiáñez Gómez por la labor que ha realizado en esta investigación, la preocupación incesante que ha puesto, por la dedicación continua a este proyecto, por el apoyo en los momentos de frustración y por la paciencia que ha tenido durante todo el proceso.

Y por último, agradecer a mis familiares y amigos la capacidad de entender la dedicación que ha conllevado este trabajo. Por el apoyo continuo, las muestras de ánimo y las risas en momentos de debilidad, gracias por lo que soportáis día a día sin rechistar.

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

En el siguiente trabajo se expone una investigación educativa exploratoria realizada en un Instituto de Educación Secundaria público de la provincia de Granada, con el objetivo principal de comprobar que los sistemas de representación utilizados en la Educación Secundaria son limitados. Pretendemos con ella reivindicar que los sistemas de representación enriquecen la labor del profesor, la comprensión del alumno y por tanto, los resultados académicos. Para ello, utilizaremos el tema de funciones y gráficas que admite gran cantidad de representaciones.

En primer lugar, para dar base y consistencia a esta investigación declararemos los *objetivos* sobre los que nos basamos y que determinarán el éxito o no de la misma al final de este trabajo.

Seguidamente, justificaremos desde el currículo cuáles son los contenidos relacionados con este tema de la materia de matemáticas y qué criterios se utilizan. También tendremos en cuenta lo que el estudio internacional PISA nos revela acerca de los sistemas de representación y su importancia como competencia específica de la competencia matemática. Y por último, consideraremos los principios y estándares que determina el NCTM en términos de representación, que los niveles educativos correspondientes a esta investigación deben presentar.

A continuación, fundamentaremos la creación de nuestra herramienta de trabajo, el cuestionario, a partir de las investigaciones que se han realizado anteriormente en otros países. Las cuestiones que forman el cuestionario no están elegidas al azar sino con el propósito de observar determinadas características, procedimientos y razonamientos en el alumno. Para poder llevar a cabo ese proceso de observación, lo primero que tenemos que hacer es determinar ante qué tipos de actividades nos encontramos en este tema de funciones y gráficas. Para dar respuesta a ello, presentaremos unas tablas con la clasificación que se seguirá a lo largo de la investigación, siendo uno de los pilares fundamentales de la misma.

Una vez justificado y fundamentado nuestro trabajo, nos queda presentar la herramienta que utilizaremos, el cuestionario, que está enmarcado en el apartado de Metodología. En este apartado presentaremos el diseño del cuestionario, las actividades que lo componen, el tipo de actividades que son a partir de la clasificación realizada anteriormente, las habilidades que se quieren observar a partir de ellas y la justificación de la elección de esas actividades y no otras. Además, daremos las características del alumnado al que se le pasó esta prueba, del centro al que corresponden y de la forma en la que fue aplicado, es decir, la duración y las preguntas que los alumnos se realizaban.

Y ya solo queda analizar los resultados obtenidos. Para ello, realizaremos un análisis individual de cada pregunta. Pretendemos con este análisis que se observe de forma general cómo han sido las respuestas de los alumnos, si en su mayoría han sabido contestar o no a estas cuestiones no comunes. Además, destacaremos algunos casos que o bien por generalidad o bien por ser casos particulares nos han llamado la atención. Sin embargo, lo esencial es que al final de cada pregunta consideraremos si las habilidades que queríamos observar han estado presentes y de qué forma.

Por último, a modo de resumen, extraeremos las conclusiones más relevantes de lo observado, partiendo de los objetivos que nos planteábamos en un primer momento analizaremos si la investigación ha resultado satisfactoria.

Se añaden al final de este trabajo el formato del cuestionario que se les pasó a los alumnos y un conjunto de actividades no comunes que proponemos como recurso imprescindible a partir de ahora en el aula, pues fomentan no solo la interpretación de las funciones sino también la construcción.

2. OBJETIVOS

Como toda investigación, ésta nace a partir de una serie de metas que queremos alcanzar o por lo menos estudiar. Esas metas nos permitirán al final de la investigación determinar si ha sido adecuada la forma de proceder, de razonar y de considerar el proyecto ante el que nos encontramos. Además, aportarán sentido a nuestro estudio, realidad y base para concluir si la investigación ha resultado provechosa o por lo contrario, solo plantea dudas e incertidumbre.

Como ya hemos dicho en nuestro estudio nos dedicaremos de lleno al tema de las funciones y gráficas, haciendo especial hincapié en las diferentes representaciones que admite este concepto matemático. Por ello, los objetivos están vinculados principalmente con las tareas que propondremos posteriormente en forma de un cuestionario dirigido a escolares del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria.

Los objetivos que perseguimos en este trabajo son los siguientes:

- Determinar la capacidad de respuesta de los alumnos ante cuestiones no convencionales.
- Exaltar la relevancia del uso de diferentes representaciones en el proceso aprendizaje-enseñanza.
- Utilización de un discurso coherente en la justificación de sus razonamientos.
- Resaltar la importancia de construir gráficos y establecer conjeturas de situaciones cotidianas a partir del estudio de las propiedades de dichas situaciones.

3. JUSTIFICACIÓN Y FUNDAMENTACIÓN

Nuestra investigación está centrada en estudiantes de Educación Secundaria Obligatoria, por ello, para su realización hemos consultado el currículo de matemáticas de Educación Secundaria (MEC, 2007) en busca de los contenidos mínimos, criterios de evaluación y objetivos relacionados principalmente con nuestro tema de estudio: las funciones.

Éste es uno de los cinco bloques de contenidos que forman el currículo de matemáticas (Análisis, Geometría, Álgebra, Funciones y Estadística y Probabilidad), donde se especifican cada uno de los objetivos que como profesores debemos tener presentes a la hora de enseñar y evaluar. En este documento se exponen los contenidos de cada nivel educativo correspondiente, de forma ordenada y gradual atendiendo al desarrollo cognitivo de los alumnos. Veremos a continuación cómo se distribuyen los conceptos de funciones a lo largo de la Educación Secundaria.

En primer lugar, se pide que el alumno sea capaz de "organizar los datos en tablas", "representarlos en los ejes coordenados" y determinar los puntos "mínimos y máximos" en una gráfica (p. 31792-31793). Posteriormente, que construya la "representación gráfica de un enunciado o expresión algebraica sencilla", así como la interpretación de la misma se vuelven esenciales. Y por último, lo que prima es la "formulación de conjeturas sobre el comportamiento de un fenómeno que describa una gráfica" y la "búsqueda e interpretación de las funciones en situaciones reales" (p.31797).

Este documento no es más que una guía de conceptos mínimos para el profesorado. Es decir, sirve como herramienta para determinar los conocimientos que cualquier alumno debería adquirir en cada nivel educativo, consiguiendo así una educación lo más homogénea posible.

Sin embargo, lo que determina la mejor o peor adquisición de estos conceptos es la práctica del profesorado y que se verá enriquecida a partir de los recursos empleados por éste. La utilización de medios tecnológicos, la organización adecuada de los conceptos a estudiar, la exposición clara de dichos conceptos, la ejemplificación de éstos en situaciones reales y la utilización de las diferentes representaciones de un mismo contenido matemático, serán algunos de los posibles recursos que marcarán diferencias en el desarrollo cognitivo de los alumnos.

Nuestro trabajo se basa en la importancia de las representaciones. Es bien sabido por estudios realizados con anterioridad la importancia de este recurso didáctico para la comprensión efectiva por parte del alumnado. La asignatura de matemáticas es una de las materias que cuenta con mayor número de representaciones para un mismo concepto, incluso de un lenguaje propio y característico.

Por lo general, un concepto matemático lo podemos expresar de forma matemática mediante el lenguaje algebraico o numérico, de forma gráfica con las representaciones gráficas y de forma escrita con el lenguaje ordinario, asociándolo a alguna situación real por ejemplo (contextualización).

Como se expone en el trabajo sobre competencias matemáticas de Rico y Lupiáñez (2008), “los diferentes sistemas de representación que admite una estructura matemática le otorgan diferentes significados a efectos de su enseñanza, pues ponen de manifiesto distintos elementos, características o propiedades de la estructura. De hecho, cuando trabajamos con un determinado objeto matemático lo hacemos dentro de o entre varias de las representaciones que admite” (p. 249).

Desde el propio currículo, como hemos visto con anterioridad, en este tema de funciones que estamos tratando, se pone de manifiesto la importancia de que los alumnos a partir de una serie de datos sean capaces de organizarlos en una tabla, representarlos en unos ejes coordenados, extraer información de ella y sacar conclusiones en forma de conjeturas. Con estos simples cuatro pasos podremos obtener cuatro representaciones diferentes y cada una de ellas nos permitirá observar de igual o mejor forma las propiedades de lo que estamos estudiando.

Por otro lado, el marco del proyecto PISA (OCDE, 2013) que se encarga de “estudiar la preparación de los escolares al término de la educación obligatoria […] evaluando las competencias de los mismos en lectura comprensiva, matemáticas y ciencias” (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 119), también destaca la importancia de las representaciones en el sistema educativo. Este estudio internacional sostiene que el desarrollo cognitivo de los estudiantes en matemáticas se puede expresar mediante los logros individuales en las siguientes competencias: pensar y razonar; argumentar; comunicar; modelizar; plantear y resolver problemas; representar; utilizar el lenguaje simbólico, formal y técnico, y las operaciones; y emplear soportes y herramientas tecnológicas.

Como vemos, representar es una de las competencias específicas de esta materia que resulta necesaria para el desarrollo de la competencia matemática en su conjunto. A través de esta competencia se ponen de manifiesto habilidades como (p.249):

- La codificación y decodificación,
- Interpretación y distinción entre diferentes tipos de representación de objetos matemáticos y situaciones,
- Interrelación entre las representaciones,
- Selección y relación entre las representaciones de acuerdo con la situación y el propósito.

Desde el NCTM[1] (2003) se concluye que todos los programas de enseñanza de todos los niveles educativos deberían capacitar a los alumnos para desarrollar esas habilidades en el nivel cognitivo que corresponda. De hecho se afirma que "cuando los estudiantes acceden a las diferentes representaciones matemáticas y a las ideas que representan, toman posesión de un conjunto de instrumentos que amplían de forma significativa su capacidad para pensar matemáticamente" (p.71).

Sin embargo, también destaca que las propias representaciones en la actualidad se estudian como si formaran un concepto matemático en sí mismas. Se reclama la importancia de que los alumnos traten las representaciones como elementos esenciales de los conceptos matemáticos que nos ayuden a comprenderlos y a relacionarlos. Se busca que también les sirvan en la argumentación, en la exposición de sus conocimientos, así como que las utilicen para señalar conexiones entre conceptos matemáticos y aplicaciones de éstos en la vida cotidiana.

En definitiva, en el documento expuesto por el NCTM se considera que el alumno debe ser capaz de:

- *Crear y utilizar representaciones para organizar, registrar y comunicar ideas matemáticas.*
- *Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.*
- *Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos. (p.71)*

[1] National Council of Teachers of Mathematics, www.nctm.org

A continuación, nombraremos aquellos aspectos esenciales de la representación en el tema de las funciones que dirigen nuestro estudio. Para ello hemos tenido en cuenta el nivel educativo en el que vamos a desarrollar esta investigación (3º ESO), que corresponde al nivel 6-8 del baremo utilizado por el NCTM (2003).

En primer lugar, el uso de las funciones en diferentes contextos utilizando en cada uno de ellos diferentes representaciones como son las tablas, las gráficas y las expresiones algebraicas. Además, deben examinar las relaciones que se dan entre las representaciones de las funciones lineales, reconocer las representaciones de funciones equivalentes y pasar con flexibilidad de un tipo de representación a otra. Es frecuente que los alumnos empiecen utilizando tablas de valores para representar las características de las funciones lineales, sin embargo, también deberían aprender a representarlas de forma gráfica o algebraica, por medio de la ecuación.

En definitiva, la flexibilidad que presenten para reconocer formas equivalentes de ecuaciones y expresiones lineales nos indicará, en cierto modo, el grado de adquisición de esta competencia específica.

Así desde el punto de vista del profesor, el ofrecer distintas representaciones de cualquier concepto matemático permite a los alumnos enriquecer su conocimiento y descubrir nuevas propiedades que quizás con otras representaciones no se podrían observar. En este propio Máster de Formación de Profesorado se nos ha hecho especial hincapié en la necesidad de representar de forma variada y completa las diferentes nociones matemáticas. La representación es el medio por el cual hacemos visible un procedimiento, un concepto o un razonamiento matemático y por eso es de vital importancia que dotemos a los alumnos de la mayor variedad de representaciones para que ellos, cuando lo necesiten, puedan elegir aquella con la que se sientan más cómodos. Es entonces donde entra en juego la labor del profesor, éste debe permitir que sus alumnos adquieran esa variedad de recursos, que sean capaces de diferenciar aquellos que les aportan mayor información y que de forma crítica determinen si la representación elegida u observada es del todo correcta.

Así, la creación por parte del profesor de tareas complementarias que ayuden a la adquisición de todos estos recursos es primordial, pues nadie conoce mejor que éste el nivel cognitivo de sus alumnos, así como las representaciones que les suponen mayores dificultades.

Es aquí donde entra esta investigación, pues la base de la misma es la poca utilización de problemas poco comunes y contextualizados en el trabajo diario, surgiendo así la necesidad de que el profesor forme parte más activa y cree sus propios recursos para la enseñanza.

En este tema de funciones la limitación de las actividades se observa desde el propio currículo. La mayoría de los objetivos, criterios de evaluación y contenidos están dedicados a desarrollar la parte interpretativa y no constructivista del estudiante. Están orientados a fomentar la importancia de las características locales de la gráfica desarrollando así un mecanismo repetitivo (realizar la tabla de valores, representar los valores obtenidos en los ejes, ver donde crece o decrece…). Esto ya lo habían remarcado Leinhardt y Zaslavsky (1990) en un estudio muy reconocido en Didáctica de las Matemáticas.

Lo que queremos reivindicar con este estudio es que además de este tipo de actividades interpretativas que favorecen la creación de esquemas cognitivos de poca complejidad, se introduzcan actividades en las que los alumnos pongan en práctica esos conceptos aprendidos, que vivan en primera persona que a partir de lo estudiado son capaces de afrontar nuevos problemas no planteados hasta el momento, y que además, sean capaces de traducir al lenguaje matemático (ya sea gráfico, algebraico o numérico) situaciones reales.

Para llevar a cabo un análisis más exhaustivo de las actividades que generalmente se desarrollan en estas unidades didácticas basadas en las funciones, hemos estudiado el trabajo ya citado de Leinhardt y Zaslavsky (1990).

Estos investigadores realizaron un análisis de las posibles tareas que se pueden formular en los temas de funciones y gráficas, destacando que la mayor parte se puede clasificar en tareas de *interpretación o construcción*. Lo que hemos observado en nuestro currículo y en nuestros libros de texto, es que la mayoría de las tareas empleadas en la actualidad son del primer tipo: interpretativas. De hecho, son muchos los autores que consideran que existe un énfasis desproporcionado en el currículo en la interpretación de las características locales de las gráficas. En este tipo de actividades se le da importancia al "acto por el cual un alumno le da sentido u obtiene el significado de una gráfica, una ecuación o una situación" (p.8). El tipo de interpretación que éste realice vendrá condicionado por la gráfica dada, por las características de la misma, y en función de la relevancia que se le dé o bien a las características locales o a las globales.

Estos autores, destacan que también se pueden plantear actividades desde otro punto de vista: constructivo. En primer lugar, vinculan la construcción con el acto de generar algo nuevo. Entran aquí la elaboración de gráficas a partir de una expresión algebraica, de nubes de puntos a partir de unos datos o la determinación de la escala y de las variables que representan los ejes. Sin embargo, para poder construir necesitamos interpretar en primer lugar lo que se nos pregunta o pide, y es aquí, donde presenta mayor importancia este tipo de ejercicios. Gracias a ellos podemos observar en nuestros alumnos la interpretación que ellos hacen de una tarea planteada para construir la solución. Esto no ocurre en las actividades de interpretación pues en ellas la construcción no suele estar presente.

La clasificación que realizan estos autores de las actividades no se queda aquí. Consideran que estos dos grandes tipos de actividades podemos distinguirlas según sean de *predicción, clasificación, traducción o escala*. A continuación veremos a grandes rasgos cómo describen cada una de ellas.

En primer lugar, las actividades de predicción son aquellas en las que el alumno es capaz de conjeturar a partir de una gráfica dada o parte de ella en la que existen puntos sin determinar. Las tareas de predicción conllevan a la detección de modelos tanto en una situación contextualizada como en una abstracta. Este tipo de problemas en la mayoría de las ocasiones no tienen una única respuesta correcta. Algunas predicciones pueden ser mejor que otras, pero no solemos tener la información suficiente como para determinar una única solución. Así, es fácil reconocer que la predicción está fuertemente ligada a la construcción. Aunque, no deja de ser evidente que la forma en la que los estudiantes construyen el resto del gráfico depende de la interpretación que ellos hagan de la situación inicial.

En segundo lugar destacan las actividades de clasificación, en las que las principales acciones son las de determinar si una relación en particular es una función o identificar un tipo especial de funciones entre otras funciones. Las diversas investigaciones que han utilizado este tipo de actividades se han centrado en la comprensión que el estudiante tiene de la definición de función o de las características de las funciones que ellos conocen. Este tipo de actividad está más ligada a la interpretación que a la construcción.

En tercer lugar están las actividades de traducción, en las que el principal objetivo es el de reconocer una misma función en diferentes formas de representación. Así como identificar una transformación específica tanto en la representación inicial como en las derivadas y estudiadas. Está de igual forma ligada a la interpretación y a la construcción.

Y por último, las actividades denominadas de escala, en las que se pone especial atención a los ejes de coordenadas y sus escalas y la unidad que tomemos para medir. Actividades en las que el estudiante tendrá que decidir acerca del número de unidades por intervalo, si puede tomar la misma escala en los diferentes ejes y cuál es la más idónea. La importancia de este tipo de ejercicios reside en que los alumnos sean capaces de observar que las características visuales de una gráfica pueden variar con una modificación de la escala, pero que sigue representando el mismo elemento.

Una vez explicados estos cuatro tipos de actividades a partir de lo que dichos autores han redactado en su documento, nosotros hemos querido organizar estos conceptos de forma que nos sea fácil saber ante qué tipo de actividad nos encontramos en cada momento.

Para ello, hemos realizado dos tablas en las que hemos distinguido entre las actividades de interpretación y las de construcción. En cada una de esas tablas se analizan las características principales de los cuatro tipos de actividades que hemos considerado anteriormente (predicción, clasificación, traducción y escala). Lo primero que hacemos es diferenciar las actividades que corresponden a las funciones de las que corresponden al tratamiento de datos. Y acto seguido, se añade uno o varios ejemplos de actividades propuestas que se recogen en el anexo de este trabajo.

Esta distinción que se realiza entre funciones y datos surge después de analizar varias actividades poco comunes en las que se diferencia claramente que una parte de ellas van dirigidas al estudio de las funciones y otra parte al estudio del tratamiento de datos.

La mayoría de las actividades que hemos utilizado en este trabajo y las que vamos a exponer a continuación, provienen del estudio realizado por el Shell Centre for

Mathematical Education (Alayo, 1990), el estudio de las funciones en los gráficos cartesianos de Lacasta y Pascual (1998), algunas cuestiones utilizadas en el estudio PISA (INECSE, 2003) y del propio trabajo de Leinhardt y Zaslavsky (1990).

Las actividades que se proponen en estos estudios buscan, a la par que nuestra investigación, estudiar la capacidad interpretativa de los alumnos, así como considerar el uso de la información que realizan a partir de diferentes sistemas de representación ya sean matemáticos o no.

No se trata de tareas comunes, consisten en nuevas formas de plantear los enunciados de las actividades de manera que los alumnos utilicen los conceptos ya adquiridos, los apliquen a situaciones reales y formulen conjeturas en base a ello.

	PREDICCIÓN	**CLASIFICACIÓN**	**TRADUCCIÓN**	**ESCALAS**
INTERPRETACIÓN Proceso por el cual un alumno le da sentido u obtiene el significado de una gráfica, una ecuación o una situación.	**Funciones:** Plantear hipótesis sobre continuidad, crecimiento y decrecimiento de una función, a partir de una dada o parte de ella. *Ejemplo de tarea: golpe de golf* **Datos:** Extraer nuevos datos a partir de una gráfica, de un enunciado o de una expresión algebraica dada o al menos, parte de ella. *Ejemplo de tarea: Aviones*	**Funciones:** Identificar por distintas expresiones las familias de funciones *Ejemplo de tarea: asociar las expresiones algebraicas con la gráfica.* **Datos:** Identificar y determinar variables. *Ejemplo de tarea: a partir de una gráfica y un enunciado, determinar las variables de los ejes correctamente.*	**Funciones:** Reconocer una misma función de diversas maneras, algebraicamente, gráficamente, numéricamente… *Ejemplo de tarea: ¿Qué deporte?* **Datos:** Identificar datos a partir de otras representaciones. *Ejemplo de tarea: la parada de autobús.*	**Funciones:** Diferentes escalas misma gráfica. *Ejemplo de tarea: figura 6 documento.* **Datos:** diferentes escalas misma gráfica. *Ejemplo de tarea: datos estadísticos representados en una gráfica y conclusiones erróneas.*

	PREDICCIÓN	CLASIFICACIÓN	TRADUCCIÓN	ESCALAS
CONSTRUCCIÓN Acto por el cual se genera algo nuevo: construcción de gráficas, nube de puntos a partir de unos datos o la construcción de una gráfica a partir de la función algebraica.	**Funciones:** Continuar la representación gráfica de una función. *Ejemplo de tarea: figura 4. Construir lo que queda de función.* **Datos:** Añadir datos a partir de una gráfica, de un enunciado o de una expresión algebraica dada o al menos, parte de ella. Dibujar conjuntos de puntos *Ejemplo de tarea: Aviones, estimar la posición de A y B.*	**Funciones:** Representar por medio de las características principales a las diferentes familias de funciones o modificarlas para que lo sean. *Ejemplo de tarea: construir las gráficas de diferentes pruebas deportivas y decir a qué familia pertenece.*	**Funciones:** Determinar cómo sería una función en otro lenguaje (gráfico, verbal o algebraico). *Ejemplo de tarea: caída de una piedra.* **Datos:** Construir datos nuevos a partir de otras representaciones. *Ejemplo de tarea: carreras de coches*	**Funciones:** Construir gráficas de funciones a escala correspondientes. *Ejemplo de tarea: ejercicios habituales de representación gráfica.* **Datos:** Colocar los datos gráficamente a escala correcta. *Ejemplo de tarea: ejercicios comunes de representación de datos gráficamente.*

Como vemos en las tablas anteriores se hace un resumen de todo lo que hemos visto hasta ahora, se añaden los ejercicios propuestos para desarrollar tanto la dimensión interpretativa como la constructivista del alumno.

Algunos de los ejercicios que aquí se ejemplifican serán los que a continuación seleccionemos para el cuestionario. En estos ejercicios se requiere de alguna habilidad diferente de las que podemos observar en los ejercicios habituales.

4. METODOLOGÍA

En este apartado lo que veremos es el diseño del cuestionario que ha sido utilizado en esta investigación, describiremos brevemente el contexto de los alumnos que lo cumplimentaron, así como el proceso de aplicación del mismo. Nos interesa, por tanto, presentar y contextualizar la herramienta utilizada.

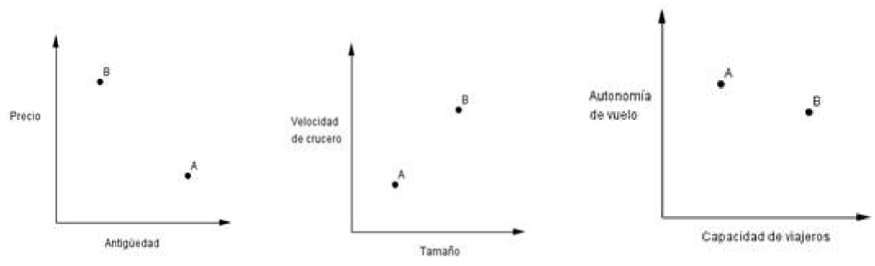
4.1.CUESTIONARIO

A continuación vamos a presentar las actividades que forman el cuestionario, herramienta principal de esta investigación. El formato original con el que se les aplicó a los alumnos esta adjuntado en el anexo de este trabajo. Lo que haremos aquí es presentar su estructura, determinar cuántas preguntas lo componen, analizarlas y estudiar qué es lo que queremos conseguir con cada una de ellas. También explicaremos al final de este apartado porque hemos seleccionado estas preguntas y no otras.

El cuestionario consta de cuatro actividades relacionadas con el tema de funciones y el tratamiento e interpretación de datos, que son las siguientes.

Actividad 1.

1. *Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).*



La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

- *¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?*
    - *El avión más viejo es más barato.*
    - *El avión más rápido es más pequeño.*
    - *El avión más grande es más viejo.*
    - *El avión más barato transporta menos pasajeros.*

En primer lugar, el primer problema de los aviones lo que nos va a permitir es determinar la capacidad de los alumnos de leer e interpretar gráficos de forma simultánea, simplemente atendiendo a la posición de los datos. Si la clasificamos en términos de nuestro marco de análisis, se trata de una actividad de *interpretación predicción.* Como vemos, en esta actividad se pretende que el alumno sea capaz de manipular los datos a partir de una gráfica esbozada sin precisión.

La importancia de esta actividad reside en la capacidad de extraer nuevas características de los objetos de partida a partir de una representación gráfica, es decir, ponemos en cuestión la capacidad de predecir, traducir e interpretar nuevos datos.

En conclusión, las habilidades que se pretenden observar en esta actividad son:

- Extraer información a partir de unos datos representados gráficamente.
- Interpretación de diferentes gráficos de forma simultánea.
- Comprensión de la importancia de las escalas en las gráficas.
- Relevancia de las variables elegidas para la representación gráfica como instrumento de información.
- Extraer nuevas propiedades de los objetos estudiados.
- Flexibilidad entre los diferentes sistemas de representación.

Estas habilidades serán las que tendremos en cuenta posteriormente en el análisis profundo de los resultados obtenidos.

Actividad 2.

2. *Dibuja gráficas para ilustrar las siguientes situaciones. Tienes que decidir tú mismo las variables y la relación entre ellas. Etiqueta tus ejes con cuidado, y explica tus gráficas con palabras debajo de cada una de ellas.*

   ¿Cómo varía …

   a. *tu altura con la edad?*
   b. *la cantidad de pasta necesaria para hacer una pizza con su diámetro?*
   c. *la velocidad de un corredor de una maratón?*
   d. *el nivel del agua en tu bañera antes, durante y después del baño?*

Esta segunda actividad es más compleja que la anterior, de respuesta múltiple. Siguiendo la clasificación que vimos en el apartado anterior, diríamos que esta actividad se corresponde con una actividad de *construcción predicción*. Por el hecho de crear algo nuevo se trata de una actividad de construcción, y porque no consta de datos proporcionados sino que a partir de la información que él posee por su propia experiencia o su imaginación, debe estimar algunos de los datos necesarios y predecir cómo será la gráfica. Por tanto, el alumno debe decidir las variables que entran en juego, interpretar situaciones cotidianas desde un punto de vista matemático y argumentar el porqué de todo lo anterior (por qué se eligen esas variables y la representación gráfica sigue la forma descrita).

Con esta actividad lo que se pretende observar en términos de habilidades es:

- la capacidad de traducir situaciones cotidianas a una representación gráfica;
- la capacidad para afrontar ejercicios sin datos numéricos, estimando el comportamiento de los mismos;
- para esbozar gráficas sin tablas de datos;
- observar los recursos de los que constan los alumnos para determinar los datos necesarios;
- la transmisión de un discurso coherente que describa de forma correcta y precisa el razonamiento matemático seguido;
- aplicar los conceptos aprendidos desde otro punto de vista, por medio de diferentes representaciones;
- descubrir la contextualización de problemas matemáticos en situaciones reales, de la vida cotidiana.

Posteriormente, en el apartado de resultados analizaremos si los alumnos han puesto de manifiesto o no estas habilidades y de qué forma.

Actividad 3.

> *3. Tres kilos de boquerones valen 18 €. Escribe y representa la función que define el coste de los boquerones en función de los kilos comprados.*

La tercera pregunta es una pregunta de control, de acuerdo con el desarrollo habitual de sus clases hemos introducido esta cuestión para determinar el nivel de concentración durante la prueba y de adquisición de los conceptos básicos de este tema. Nos aportará la información necesaria para determinar si el resto de respuestas dadas son fiables o no.

Se trata de una tarea mecánica, en la que simplemente nos limitamos a comprobar que saben representar las funciones de proporcionalidad directa sin problema. En términos de nuestro marco de análisis corresponde a una actividad de *construcción escala*. Se trata de una actividad de construcción claramente pues la persona encuestada debe dar lugar a una gráfica que represente lo que en el enunciado se expone. Se podría englobar dentro de las actividades de traducción y escala pues se debe saber pasar del lenguaje ordinario, extraer los datos y organizar la información, a la representación gráfica y eso es propio de las actividades de traducción. Pero también se deben elegir de forma correcta las etiquetas de los ejes, es decir, las magnitudes que se quieren representar, así como la escala más favorable en cada uno de ellos para conseguir una buena representación gráfica, por tanto también interviene la escala. Así, considerando cuál de las dos requiere la mayor atención por parte del alumno, hemos clasificado esta actividad en las de construcción escala.

Como hemos venido haciendo en las actividades anteriores, vamos a enumerar las habilidades a las que hace referencia esta actividad:

- representación gráfica de una función;
- traducción de un enunciado del lenguaje ordinario a la representación gráfica;
- reconocimiento de funciones proporcionales;
- elección de magnitudes que se representen en los ejes;
- elección de las unidades de escala en cada uno de los ejes;
- organización y tratamiento de datos.

En función de estas habilidades podremos posteriormente analizar qué hemos conseguido observar en relación a ellas.

Actividad 4.

4. *Intenta resolver el siguiente problema.*

Caída de una piedra

Tiempo (segundos)	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Distancia caída (metros)	*0*	*5*	*20*	*45*	*80*	*125*

- *Dibuja una gráfica aproximada para ilustrar estos datos.*
- *¿observas alguna regla en esta tabla? Descríbela con palabras y, si es posible, con fórmulas.*
- *Se lanza una piedra desde un avión. ¿cuántos metros caerá en 10 segundos?*

Las tablas de datos ocultan a menudo una simple regla matemática o función que, una vez conocida, se puede usar para predecir valores desconocidos. A partir de la "chuleta" que aparece a continuación, ¿cuál es la gráfica que se parece más al problema planteado?

Por último, se añade una cuarta pregunta, la más compleja de todas. Se trata de una pregunta de *construcción traducción*. En esta pregunta se pide construir una gráfica al final del ejercicio, pero para ello se deben poner en juego conceptos de generalización, formulación de conjeturas, transcripción al lenguaje algebraico y funciones cuadráticas. Por todo esto la hemos englobado en ese tipo de actividades.

Estos alumnos están acostumbrados a estudiar funciones cuadráticas pero a partir de su expresión algebraica. En este caso, deben obtener la expresión algebraica y se deduce a partir de los datos proporcionados, la gráfica construida y la ayuda aportada en forma de "chuleta". Esta actividad nos permitirá saber si a partir de lo estudiado son capaces de hacer frente a este tipo de cuestiones.

Luego, hablando en términos de habilidades podríamos decir que estaremos valorando con esta actividad:

- la capacidad de generalización;
- la observación de patrones y generalidades;
- la formulación de conjeturas;

- la extracción de información a partir de una tabla de datos;
- la capacidad para estimar o predecir el comportamiento en datos no proporcionados;
- la obtención de la expresión algebraica a partir del tratamiento de datos;
- determinar cómo sería la función en otro lenguaje (simbólico, gráfico o algebraico);
- construcción de gráficas a partir de tablas de datos;
- el reconocimiento a partir de la representación gráfica de la expresión algebraica correspondiente;
- la clara no correspondencia de determinadas gráficas con el problema a estudiar y por tanto, la imposibilidad de utilizar su expresión algebraica como solución.

En resumen, hemos elegido tres actividades de construcción y una única de interpretación. Esto se debe a que a partir de nuestro trabajo queremos corroborar cómo los estudiantes están más acostumbrados a realizar preguntas del tipo interpretativo y saben resolverlas de forma correcta.

Actividad 1	Interpretación predicción
Actividad 2	Construcción predicción
Actividad 3	Construcción escala
Actividad 4	Construcción traducción

Es decir, a partir de las dos primeras preguntas seremos capaces de determinar las diferencias que se producen entre los dos grandes tipos de actividades: interpretación y construcción.

Y en relación con todas las cuestiones de construcción observaremos que los alumnos presentan mayores dificultades para resolverlas, y de las tres planteadas a cuáles están más acostumbrados a enfrentarse y por qué.

4.2. CARACTERÍSTICAS DEL ALUMNADO

Esta prueba se ha realizado en el I.E.S. Ángel Ganivet de Granada, a alumnos del tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria. Se trata de un centro plurilingüe que denota cierta relevancia hacia los idiomas.

El grupo al que hemos pasado este cuestionario tiene como segundo idioma el francés y está compuesto por 25 alumnos. Destacar que el nivel de la clase es en general medio, hay tres alumnos que destacan muy positivamente, mientras que la gran mayoría forman parte de un nivel intermedio. Aun así, los resultados del grupo en las evaluaciones anteriores son muy buenos y prácticamente, podríamos decir que se trata de un grupo homogéneo.

No hay presencia de alumnos que cursen este nivel educativo por segunda vez, pero sí hay algún alumno que considera que no aprobará en junio y que ha decidido dejarlo para septiembre, preparándose durante el verano, y que por tanto en clase pierde el tiempo porque ha perdido interés en la asignatura.

4.3. APLICACIÓN DEL INSTRUMENTO

En este apartado vamos a exponer cómo se ha realizado la aplicación del cuestionario. En primer lugar, con el consentimiento de la profesora de matemáticas de este curso, se nos concede una hora de clase para realizarlo.

Comenzamos explicando en qué consiste la prueba, especificando que no será valorada para calificación, que simplemente es un estudio a nivel universitario. Se les pide que sea individual y que por si hiciera falta, añadan sus nombres. Cuentan con toda la hora para resolverlo y para cualquier duda que levanten la mano y vamos atendiéndolas de forma individual.

Destacar que lo primero que hacen al ver el cuestionario es asombrarse de la cantidad de preguntas, lo que nos hace pensar que quizás era muy extenso. A pesar de eso, muchos de los alumnos encuestados entregaron el cuestionario antes de que se cumpliera la hora. Por otra parte, de los comentarios que realizaban destacar que en la mayoría de los casos nos decían que ellos no sabían hacerlo porque no lo habían hecho nunca.

En cuanto a las preguntas que realizaban en las diferentes cuestiones, destacar que las que más dudas suscitaron fueron la segunda y la cuarta pregunta. En la segunda las preguntas estaban relacionadas con cómo medir el peso de la masa de una pizza, con que todos los humanos no somos igual de altos ni nos desarrollamos de la misma forma, por lo que las gráficas de la altura frente a la edad no podían ser únicas y dependían de la persona a la que se estuviera estudiando…

Y en la cuarta, la mayoría de ellos no seguía los pasos que les dábamos, se limitaban a intentar resolver el problema sin hallar ninguna correspondencia entre los valores de la tabla de datos dada. Las principales dudas eran cómo podían ellos deducir cuanto recorrería en 10 segundos, cómo reconocer que tipo de función es y para qué servía "la chuleta".

La mayoría de las cuestiones que se planteaban se resolvían simplemente volviendo a leer los enunciados de las preguntas, por lo menos las del último ejercicio. En el segundo ejercicio, las dudas surgen de particularizar los enunciados dados, se observa así la poca capacidad de generalización que tienen los alumnos en este nivel educativo.

Por último, añadir que varios alumnos pidieron folios para hacer más cálculos y gráficas en otras hojas, por lo que puede que el espacio tampoco fuera suficiente.

4.4. ANÁLISIS DE LA INFORMACIÓN

Este apartado es una breve introducción al siguiente bloque de Resultados. El objetivo de esta sección es explicar de qué forma hemos analizado las respuestas de nuestro cuestionario.

En primer lugar realizaremos un completo análisis de cada pregunta. Para ello, veremos desde un punto de vista más cuantitativo en qué se traducen esas respuestas, es decir, de forma estadística analizaremos si las respuestas son o no acertadas, cuántos de los alumnos encuestados han respondido, qué tipo de respuestas dan, etc…

Y en segundo lugar, analizaremos esas respuestas desde las habilidades y capacidades que habíamos aclarado anteriormente tanto en esta sección de metodología (4.1. Cuestionario) como en la clasificación que hicimos de las actividades (3. Justificación y fundamentación). Es decir, sabemos que cada una de estas preguntas nos da información de la adquisición, desarrollo y empleo de esas habilidades que hemos expuesto, por lo tanto ahora nos toca analizar lo obtenido.

De esta forma, tendremos un análisis en forma de datos que nos determina de forma global cómo ha resultado este cuestionario, y otro análisis más descriptivo y profundo que en términos de habilidades nos hace partícipes de las posibilidades que nos abren este tipo de actividades

5. RESULTADOS

A continuación, vamos a proceder a analizar detalladamente y de forma estadística y descriptiva los resultados obtenidos en este cuestionario.

5.1. ACTIVIDAD 1

En esta primera pregunta, nos encontramos ante el estudio de datos a partir de su representación gráfica. La primera de las cuestiones les pedía extraer alguna información adicional de la primera gráfica y el 94% de los que han respondido lo han hecho de forma correcta. Se trata de una primera lectura sencilla de la gráfica, simplemente interpretar los datos que hay representados en términos de antigüedad y precio. A partir de aquí, se quiere que el alumno, sabiendo cuál de los dos es más antiguo y cuál de los dos es más barato, sea capaz de responder a las siguientes cuestiones de verdadero y falso que analizaremos a continuación. De los resultados obtenidos se observa que de los errores en los que incurren los alumnos el principal es que ante la ausencia de escala no saben determinar las características de los puntos. Al ser una gráfica sin datos numéricos, lo único que se puede es estimar a grandes rasgos las propiedades de los dos aviones y esto les resulta complicado.

A pesar de eso, quienes han respondido a esta pregunta han hecho uso de un vocabulario apropiado utilizando términos como calidad, modernidad e incluso, han relacionado más gráficas, destacando y generalizando propiedades de las mismas. Luego, podemos afirmar que la gran mayoría ha sido capaz de extraer la información correcta de las gráficas, lo han argumentado de forma clara y precisa; y los que no lo han hecho se ha debido al uso incorrecto de las escalas o a un escaso dominio de las mismas.

De la segunda parte, las cuestiones de verdadero y falso, el 88% de los alumnos han contestado de forma correcta. La complejidad de esta pregunta recae en el hecho de comparar varias gráficas a la vez. Se trata de comparar características de los dos aviones que en ocasiones están representadas en la misma gráfica y en otras no.

Destacar que los errores cometidos han sido en la primera y tercera pregunta. La primera pregunta se basa en la primera gráfica única y exclusivamente, pues nos pide determinar si el "avión más viejo es más barato". Con ayuda de la pregunta inicial podemos responderla, pues nos dice que el avión B es más caro, por lo tanto, sólo tendríamos que ver si A es más viejo que B. Se trata de un caso particular de la pregunta inicial y como ya hemos concluido, este tipo de respuestas erróneas nos hacen ver que quizás el dominio de las escalas, la utilización correcta de las magnitudes de los ejes y por lo tanto la interpretación de datos de una gráfica, no están del todo consolidados. Es cierto que ha sido muy bajo el porcentaje de respuestas erróneas en esta primera pregunta, pero nos ha sorprendido que en ella hayan tenido dificultades pues se trata simplemente de interpretar la gráfica como suelen hacer repetidamente.

En la tercera pregunta la interpretación se complica pues nos piden saber si es cierto o no que "el avión más grande es más viejo". Tenemos que comparar la primera gráfica, en términos de antigüedad, y la segunda gráfica que nos indica el tamaño. El 12 % de los alumnos encuestados ha respondido de forma incorrecta a esta pregunta. En términos de habilidades esto denota que la interpretación simultánea de varios gráficos no está adquirida, al igual que la extracción de información y propiedades de los objetos a partir de gráficos es un logro no alcanzado. Además, consideramos que si los alumnos se desenvolvieran de forma natural entre las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos serían capaces de relacionar cada dato expuesto en los gráficos con un enunciado en lenguaje ordinario que les facilite la comprensión. Por ejemplo, de la primera gráfica extraer que por la posición de los datos: *A* es más viejo y más barato. Con esto ya constan de dos características de los objetos que les servirán para posteriormente relacionarlos y extraer conclusiones.

Destacar que algunas de las preguntas que realizaban mientras se llevaba a cabo esta actividad eran por ejemplo si los aviones *A* y *B* eran siempre los mismos, que de no ser así pues no tendría sentido compararlos; si podían comparar las gráficas, que es en lo que consistía el ejercicio y que significaba la autonomía de vuelo.

En conclusión, a grandes rasgos, la pregunta ha tenido muy buenos resultados pues el 88% de los encuestados como ya hemos visto han sabido resolverlo de forma satisfactoria. Este tipo de preguntas están enmarcadas en el bloque de interpretación, a partir de una gráfica dada se les pide interpretar los datos y es de los más usuales en este nivel educativo. Lo que quizás es más novedoso es la utilización de varias gráficas para extraer nuevos datos y conclusiones, pero a pesar de ello han sido capaces de realizarlo, constan con las herramientas necesarias para dominar el problema. Esto nos deja entrever que las actividades de interpretación están dominadas y les resultan más sencillas de realizar a pesar de exigir un poco más de complejidad que las habituales.

5.2. ACTIVIDAD 2

En esta pregunta comenzamos a estudiar el bloque de actividades del tipo constructivista. Para ello tratamos de que los alumnos sean capaces de esbozar la gráfica de una serie de actividades y situaciones contextualizadas que expondremos a continuación. Destacar que solo el 4% de los encuestados no contestó a ninguna de estas preguntas. Ahora, vamos a analizar cada uno de los apartados de forma individual.

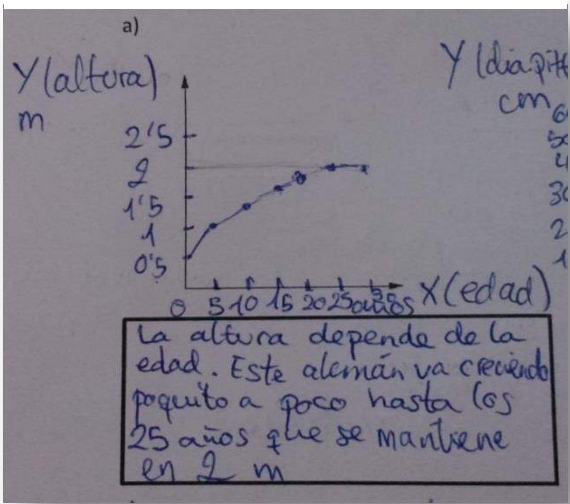
Variación de la altura con la edad

Lo primero a lo que pusimos atención era si todos los encuestados eligen las mismas magnitudes para representar en los diferentes ejes, y así es, todos los alumnos en el eje de abscisas representan la edad y en el eje de ordenadas la altura en metros.

A partir de aquí empezamos a observar las diferentes respuestas dadas. Por lo general, especifican que los mayores crecimientos se producen en los 15 primeros años, para luego permanecer prácticamente constante y descender mínimamente en los últimos años de vida.

Destacar que muchos de los encuestados parten del punto (0,0) lo que significa que cuando nacen no miden prácticamente nada. Es muy generalizada esta observación, lo cual nos indica que están muy habituados a que todas las gráficas parten del origen de coordenadas y que simplemente ni se percatan de lo que esto significa.

Figura 1



Un ejemplo de ello es la Figura 1, en la que observamos que la gráfica realizada parte del origen, experimenta el mayor crecimiento de 0 a 5 años de edad, aunque sigue creciendo de forma moderada entre los 10 y 15 años; y mucho más relativo es ese crecimiento de 15 a 25 años. Finalmente, a partir de los 25 se mantiene constante pero en dos metros. Observamos por tanto cómo el alumno es capaz de determinar que no crecemos de igual forma durante nuestra vida aunque la realidad sobre la altura sea menos creíble.

Esta es de las respuestas más comunes en los encuestados. Sin embargo, algunos de ellos sí hacen distinción en que los primeros meses de vida medimos algo aunque sea poco, y parten de 50 centímetros aproximadamente, para luego seguir con el razonamiento anterior.

Entre las respuestas sorprendentes que se han observado también están las que simplemente nos representan puntos sin unirlos, indicando que la variable es discreta (0, 1, 2, 3…años) y la función no es continua; y también la realización de gráficas partiendo de 50 centímetros de altura que se mantiene hasta los 3 años de edad.

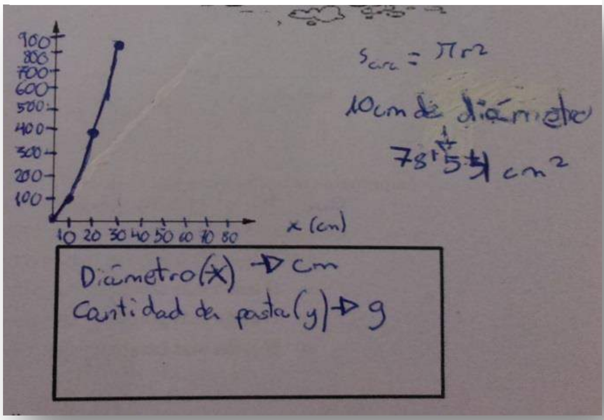
En términos de habilidades, podemos garantizar que la generalización de una situación real en este caso se ha conseguido, a pesar de que expusieran en la mayoría de sus razonamientos que los seres humanos no nos desarrollamos de igual forma y que este "estudio" depende de la persona a la que hagamos referencia. Pero sí está claro que prácticamente todos han sabido determinar ciertas etapas de crecimiento, de permanecer constante e incluso de decrecimiento. Luego, con todo esto han sido capaces de estimar ciertos patrones y generalidades en el crecimiento de los seres humanos y de construir a partir de ellos una gráfica que lo englobe.

Variación de la cantidad de pasta necesaria para hacer una pizza con respecto al diámetro de ésta

En esta pregunta las repuestas no han sido tan similares como en la anterior. Desde las primeras observaciones sobre las magnitudes utilizadas y sus representaciones en los ejes se ven claras diferencias. El 73% representa en el eje de abscisas la cantidad de pasta y en el eje de ordenadas el diámetro de la pizza resultante. Esto nos indica que la gran mayoría considera que en función de la masa de pizza que tengamos, el diámetro de la misma será mayor o menor. Por otro lado el 17% restante considera los ejes al revés, indicando que en función del diámetro de la pizza necesitaremos más o menos masa.

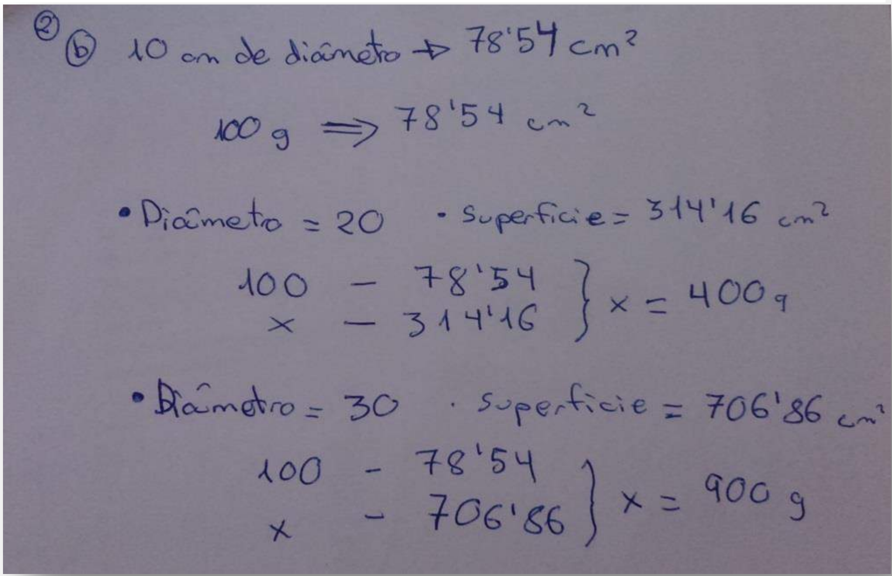
La respuesta más común es la de considerar que se trata de dos magnitudes directamente proporcionales, de forma que si aumentamos el doble de masa el diámetro de la pizza será el doble. De esta forma responden la gran mayoría, obteniendo una función lineal.

Figura 2



Sin embargo, uno de los alumnos para calcular cómo varía la masa de pizza en función del diámetro, calcula la superficie de un círculo de 10 centímetros de diámetro y le hace corresponder 100 gramos de masa. A partir de aquí, considera las superficies para círculos de 20 y 30 centímetros de diámetro y utilizando la regla de tres les hace corresponder la masa necesaria. La gráfica resultante es similar a una cuadrática como se ve en el dibujo.

Figura 3



Por último, destacar que en algunas ocasiones el diámetro lo representan con cm^2. Son varios los estudiantes que lo representan así, lo que supone que quizás los conceptos de magnitudes y medidas no están del todo comprendidos.

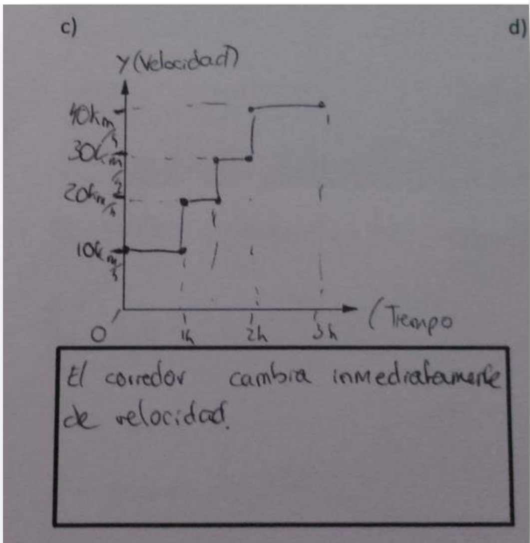
En definitiva, a grandes rasgos, se observa como cada uno de ellos busca recursos diferentes para poder modelizar aspectos de la vida real, como son capaces de considerar patrones de regularidad en las magnitudes relacionadas y como aplican los conceptos aprendidos de proporcionalidad, superficies y representación para resolver este problema en cuestión.

Variación de la velocidad de un corredor de una maratón

Esta es de las preguntas con respuestas más variadas, pues casi todos los alumnos han elegido variables diferentes para los ejes. Las magnitudes generalmente tienen que ver con la velocidad, el tiempo, la distancia recorrida o la etapa de la maratón (comienzo, mitad y final). La más utilizada, un 34% de los encuestados la eligen, es la que representa en el eje de abscisas los kilómetros recorridos y en el eje de ordenadas la velocidad que lleva el corredor.

Las gráficas se clasifican en tres tipos: a trozos, lineales y constantes. Un 45 % representa la estrategia del corredor mediante una función a trozos. Esto nos indica que los alumnos entienden que el corredor dosificará su energía a lo largo de la carrera. La mayoría de las respuestas dibujan un aumento de la velocidad en gran medida en los primeros kilómetros, para posteriormente mantenerse un poco constante para recuperar fuerzas, y por último, utilizar toda la energía en los últimos kilómetros.

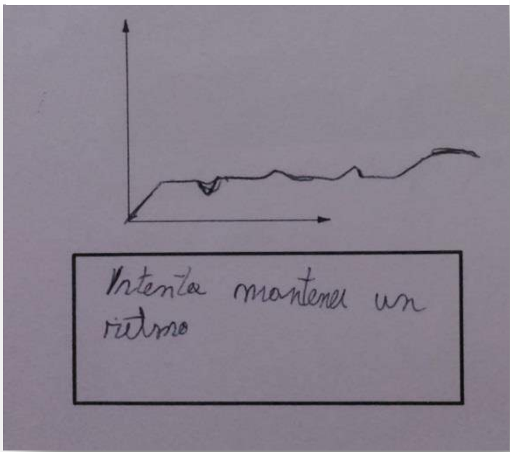
Figura 4



Sin embargo, dentro de las funciones a trozos se encuentra el siguiente ejemplo. El alumno argumenta de la siguiente forma "el corredor cambia inmediatamente de velocidad". Si observamos la gráfica el cambio es tan inmediato que desde que transcurre la primera hora, directamente se coloca en una velocidad superior, el doble de la que llevaba. Si observamos con detenimiento comprenderemos que el razonamiento no es del todo incorrecto pues se trata de que a medida que vaya pasando el tiempo el corredor aumente su velocidad de forma gradual. Sin embargo, el considerar la velocidad inicial distinta de cero y esos cambios bruscos de velocidad cada cierto tiempo, determinan una estrategia imposible de llevar a la realidad. Es aquí donde entra la necesidad de considerar si la discontinuidad que presenta esa gráfica era lo que quería representar el alumno. Deberíamos hacerle comprender lo que realmente significa su gráfica para que así se dé cuenta de lo que le falta o necesita mejorar en su representación. Vemos por tanto, cómo la interpretación del problema no es del todo errónea; sin embargo, la construcción de la gráfica no da lugar a la misma interpretación.

Por otro lado, la mitad de los encuestados que respondieron a esta pregunta lo hicieron mediante una función lineal. Algunos de ellos incluso consideraban que se trataba de una función proporcional ya que habían considerado como magnitudes los kilómetros recorridos y la distancia, por lo que si el corredor iba a 1 km/min, tardaría 10 minutos en recorrer 10 kilómetros. Este tipo de respuestas no nos aporta información sobre cómo varía la velocidad de un corredor en una maratón, sino de cómo varía la distancia recorrida en función de la velocidad a la que vaya el mismo. Esto nos hace pensar que quizás no comprendieran la pregunta de forma correcta. Lo que sí que nos demuestran es que son capaces de buscar recursos, quizás no del todo correctos, entre las magnitudes que creen que se relacionan. El problema reside en qué magnitudes deberían elegir, consideramos que esta es de las dificultades más importantes que presentan este tipo de problemas.

Figura 5



Por último, el 5% restante responde que el corredor seguirá un ritmo constante. En este caso, el corredor parte con velocidad inicial cero para llegar a su velocidad cómoda en la que se mantendrá durante toda la carrera. Ciertamente representa otro tipo de estrategia en la que el corredor dosifica su potencia durante toda la carrera para conseguir un resultado favorable. Además, en la gráfica que realiza este alumno, se observan ligeras etapas de decrecimiento, indicando momentos de recuperación del corredor.

En general, todas las respuestas tienen cierta parte creíble. Lo único que nos llama la atención es que la mayoría de ellas cuentan con datos sorprendentes como:

- Comenzar la carrera con velocidad inicial distinta de cero.
- Razonamiento muy generalizado de que empiezas muy fuerte y a partir de cierto momento, el cansancio y la duración de la carrera hacen que la velocidad disminuya sin poder hacer el sprint final.

Abordando esta actividad desde el análisis de las habilidades que hemos sido capaces de reconocer, destacar en primer lugar cómo cada uno de ellos a partir de la representación gráfica ha sido capaz de exponer la estrategia que seguiría el corredor. Quizás pensemos que es algo trivial pero no es así. Primero han demostrado ser capaces de organizar su razonamiento, descubrir la estrategia que ellos consideran que llevará a cabo y posteriormente utilizar los recursos representativos que poseen para traducir ese razonamiento a la gráfica pedida.

Además, este trabajo implica formulación de conjeturas, estimar datos, abstracción, generalización y aplicación de los conceptos matemáticos a una situación de la vida real.

Quizás, la habilidad que menos presente ha estado es la de argumentar el razonamiento seguido. La mayor parte de los encuestados se limita a la realización de la gráfica sin explicar de forma detenida en qué consiste ni porqué se ha llegado a ella.

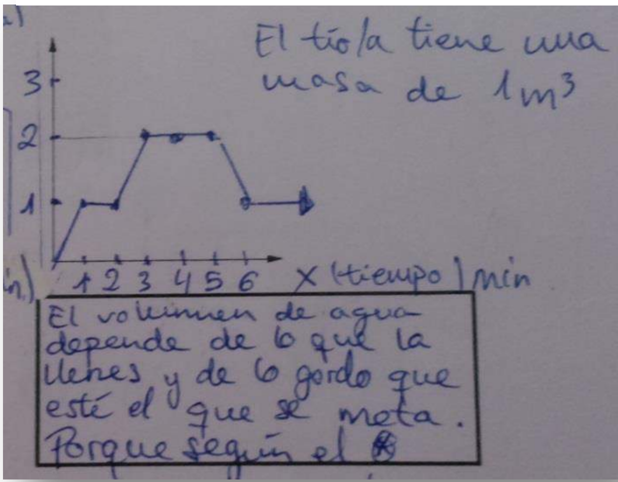
Variación del nivel de agua en tu bañera antes, durante y después del baño

En esta cuestión, las respuestas han sido más similares. El 65 % ha respondido con una función definida a trozos y el resto por medio de una función lineal. Por tanto, se observa que la mayoría de los alumnos consideran que la variación del nivel del agua se verá reflejada de alguna forma en la gráfica.

Antes de analizar estas respuestas hemos de considerar de nuevo las variables utilizadas, y es que no todos los alumnos han recurrido a las mismas. La más utilizada es en el eje de abscisas la duración del baño y en el eje de ordenadas el nivel de agua o los litros en la bañera. Otros alumnos han considerado además del tiempo que se emplea en bañarse, la altura a la que llega el agua o la capacidad de la bañera.

A partir de esto, destacar que la mayor parte de los alumnos que utilizan la función a trozos lo representan como el ejemplo que se expone a continuación. Como vemos a partir de la gráfica las magnitudes que se relacionan son el nivel de agua en el eje de ordenadas y el tiempo de duración del baño en el eje de abscisas. En los primeros minutos de duración del baño observamos como el nivel de agua de la bañera va aumentando progresivamente pues consideramos que se está llenando. En un determinado momento la persona se introduce en la bañera lo que hace que el nivel de agua aumente de forma brusca y posteriormente en lo que se baña permanece constante. Por último, cuando la persona termina de bañarse el nivel de agua de la bañera vuelve a ser el inicial.

Figura 6

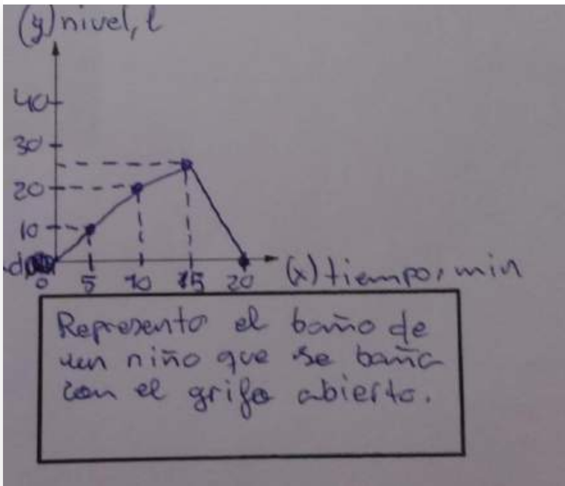


Algunos incluso consideran que desde que la persona termina de bañarse, la bañera se comienza a vaciar y se termina llegando de nuevo al estado de partida.

Con este razonamiento observamos que no sólo estamos empleando conceptos matemáticos sino también físicos, como es el caso del Principio de Arquímedes. Consideramos que en términos de habilidades los alumnos han sabido plasmar su razonamiento en las gráficas representadas. Además, han conseguido en este apartado argumentar el motivo por el que las gráficas tienen esa forma y no otra, y qué sentido tiene cada cambio de inclinación en cada una de ellas.

Un ejemplo de ello la Figura 7. Como vemos la gráfica presenta un crecimiento casi lineal hasta que empieza a decrecer. Gracias a la explicación dada por el alumno entendemos mejor su

Figura 7



miento y es que nos indica que "represento el baño de un niño que se baña con el grifo abierto". Se trata de otro tipo de procedimiento diferente a lo que han representado algunos de sus compañeros, pero hace una traducción de lo que considera él que ocurre cuando una persona se baña de esa forma.

En definitiva, a grandes rasgos podemos afirmar que esta cuestión ha reflejado de nuevo que la construcción de una gráfica sin datos ni expresión algebraica les resulta un poco más compleja. Sin embargo, aquellos que se han atrevido a resolverlo han sido capaces de obtener representaciones gráficas que no están lejos de la realidad. Además, para justificar y argumentar el razonamiento seguido han elaborado un discurso coherente, con argumentos de peso. La mayoría se han basado en el Principio de Arquímedes, en el agua que se sale de la bañera o incluso, en el agua que se evapora durante el baño. Luego, todo esto nos indica que este tipo de problemas nos hace plantearnos cuestiones que pueden ir más allá de lo matemático y observar cómo se relacionan las diferentes ciencias en una misma situación.

Después de haber analizado de forma detallada los cuatro apartados de esta actividad, podemos concluir que de las habilidades que pretendíamos observar en estos ejercicios han estado menos presentes las de argumentación y justificación del procedimiento seguido, y por consiguiente, la transmisión de un discurso coherente. Así como la capacidad de traducción de situaciones cotidianas a la representación gráfica ha sido satisfactoria pero teniendo en cuenta que las discontinuidades y los saltos de discontinuidad aún no quedan del todo claros. Además, se observa una tendencia a la linealidad en todas las cuestiones, casi siempre un gran porcentaje considera que las magnitudes relacionadas son proporcionales. Sin embargo, al menos podemos concluir que han sido capaces de modelizar un poco la realidad que les rodea.

5.3. ACTIVIDAD 3

Esta tercera cuestión simplemente se trata de una cuestión de control. En ella se pide al alumno que represente una función proporcional como está acostumbrado a realizar diariamente. A pesar de ser una pregunta que todos saben resolver, el 8% de los encuestados no la contestan.

Sin embargo, de los que contestan a esta pregunta el 100% lo hace de forma correcta. Luego nos indica que en efecto la función de proporcionalidad es un concepto que dominan.

Esta pregunta buscaba servir de referencia para las demás cuestiones, determinar la concentración de los alumnos y poner el punto de partida de nuestro cuestionario. Si los alumnos no hubieran respondido correctamente a esta pregunta nos plantearíamos que el nivel de la clase no sería el adecuado para la realización de esta investigación. No obstante, este no fue el resultado. Sabemos que la totalidad de los alumnos que respondieron lo hicieron de forma correcta.

Además, el 34% escribe o bien la tabla de proporcionalidad que da lugar a esta función o incluso la expresión algebraica de la misma. Algunos de los alumnos añaden incluso propiedades de la función como son la continuidad, el dominio y el estudio de máximos y mínimos relativos. Esto nos hace ver que en el procedimiento diario llevado a cabo en las funciones se les hace estudiar cada una de estas propiedades para que creen un hábito de reconocimiento de éstas en cada caso.

Aunque siempre incurren en algún error. El más frecuente es el de considerar mal los datos iniciales, partimos de 18 euros 3 kilogramos de boquerones, lo que significa que el kilo de boquerones está a 6 euros. Aquí algunos consideran que es el kilo de boquerones el que sale a 18 euros y es ahí donde incurren en un error. Sin embargo, a la hora de representarlo y al hallar el resto de valores, obtienen la función de proporcionalidad.

A pesar de ello, si la comparamos con las actividades anteriores está claro que la proporción de respuestas correctas es mucho mayor. La razón es muy sencilla: los alumnos están acostumbrados a enfrentarse a este tipo de cuestiones de tipo constructivo, de forma que no les supone ninguna frustración resolverlas.

5.4. ACTIVIDAD 4

Esta última pregunta es la más compleja de todas las que se proponen en este cuestionario. La finalidad de esta cuestión es obtener la función que representa la caída de una piedra. Sólo un 38% de los encuestados resuelve completamente el problema, especificando que se trata de una función cuadrática.

Y es que no se trata simplemente de señalar que tipo de función es, sino que a partir de una tabla de datos pedimos a los alumnos que observen si presenta algún tipo de regularidad. Esta pregunta sólo la contestan 8 personas de las 25 que realizan el test y de estas, sólo 4 observan la generalización. Es decir, sólo el 16% de los encuestados consigue descubrir la relación que existe entre el tiempo y los metros que desciende la piedra. Esto nos indica que la capacidad de generalización, descubrimiento de patrones y regularidades y la consiguiente formulación de conjeturas sobre la variación de la altura para los siguientes intervalos de tiempo no está conseguida. Además, no logran extraer la información necesaria de la tabla de datos aportada.

Sin embargo, a la hora de representar gráficamente la tabla de datos no hay casi ningún problema, sólo el 23% lo hace de manera incorrecta, representando una función a trozos. La mayoría de los errores incurridos son a causa del mal uso de las escalas tomadas en los diferentes ejes. Esta es una de las propiedades fundamentales de las actividades de construcción, la estimación correcta de la escala a utilizar y como observamos en casi todas las cuestiones los alumnos presentan dificultades.

No obstante, el 57% es capaz de estimar a partir de la gráfica resultante al representar los datos, ante qué tipo de función se encuentran. Para ello, como aun no dominan al completo las gráficas de las diferentes funciones, hemos añadido una serie de gráficas de las funciones que ellos conocen en las que se pueden apoyar para decidir qué tipo de función acaban de representar. Con esta ayuda, ese 57% responde que la gráfica resultante se corresponde con la gráfica de una función cuadrática. Sin embargo, algunos de los encuestados responden que se trata de una función lineal con término independiente o incluso de una proporcional.

Y de los alumnos que contestan de forma correcta al tipo de función que representan, más de la mitad llegan a especificar que se trata de la función $y=5x^2$. Para llegar aquí, aprovechando que es de la forma $y=Ax^2$, sustituyen algún valor de los de la tabla de datos inicial y consiguen el valor de A; o incluso por tanteo obtienen el mismo valor.

Luego, sólo el 32% de los encuestados ha conseguido demostrar que a partir del tratamiento de datos y la representación gráfica de los mismos es capaz de obtener la expresión algebraica de la función. Es decir, con esta actividad se ha comprobado que la flexibilidad entre los lenguajes utilizados en esta materia no es del todo satisfactoria, pues los alumnos no constan de ella. La traducción entre lenguajes y la relación entre la expresión algebraica y su representación gráfica no representa ni al 50% de los encuestados.

Además, también se les pide determinar los metros que caerá una piedra en diez segundos, es decir, estimar o predecir la variación de la altura en ese tiempo. Para ello como mínimo existen dos formas claras de calcularlo que son a partir de la expresión algebraica hallada o bien a partir de las regularidades observadas en la tabla de datos proporcionada. El 43% de los que contestan a esta pregunta lo hace de forma correcta a partir de esas dos formas. Hay alumnos que simplemente siguiendo la secuencia establecida en la tabla de datos obtienen lo que recorrería la piedra en diez segundos; y hay otros que a partir de la expresión algebraica obtenida, simplemente sustituyendo el valor de equis por diez. A pesar de ello algunos alumnos que no llegaron a dar la expresión algebraica explicaban que era imposible llegar a estimarlo sin la fórmula.

Incluso en algunas ocasiones, para contestar a esta pregunta de estimación, como saben cuánto recorrerá la piedra en 5 segundos consideran que, en diez recorrerá el doble, como si se tratara de dos magnitudes proporcionales. Quizás, este sea uno de los inconvenientes de la proporcionalidad directa que es entendida como un procedimiento que sirve cuando dos magnitudes crecen o decrecen a la vez. Si comprendieran el concepto en sí mismo entenderían que en este caso no es aplicable porque la tabla de datos expuesta no sigue ningún tipo de proporcionalidad. Sin embargo, a pesar de ello, algunos de los encuestados declaran la posibilidad de que sea una función de proporcionalidad, pero sin llegar a expresarla algebraicamente.

En definitiva, hemos observado como la actividad de construcción traducción se ha convertido en la que menos respuestas han dado los alumnos, y en la que menos de la mitad de los encuestados han sabido resolver. Las principales dificultades de esta actividad venían dadas por la generalización del problema, el descubrimiento de regularidades a partir del tratamiento de datos y la flexibilidad entre representaciones de los diferentes tipos de función y sus correspondientes expresiones algebraicas.

6. CONCLUSIONES

A modo de resumen, en este último apartado lo que haremos será revalorar dos cuestiones. En primer lugar, analizaremos esta investigación que hemos realizado, teniendo en cuenta nuestros objetivos iniciales y considerando de forma ecuánime si los hemos conseguido o no. Y en segundo lugar, haremos una valoración personal de la formación ofrecida en este máster y del propio trabajo.

Si recordamos nuestros objetivos eran inicialmente comprobar por medio de una serie de ejercicios propuestos las carencias de nuestros actuales alumnos de Educación Secundaria Obligatoria en términos de representaciones, la capacidad de éstos para responder a cuestiones no comunes con los recursos que tienen, los argumentos que son capaces de dar para fundamentar sus razonamientos y resaltar la importancia de realizar gráficos que reflejen situaciones reales y no sean derivados de ninguna tabla o expresión algebraica, sino simplemente a partir de un enunciado.

En primer lugar, hemos observado en general que la primera pregunta del tipo interpretativo cuenta con el mayor número de aciertos de las cuatro planteadas. Esta pregunta nos permite observar cómo las actividades del tipo interpretativo están más presentes en el ámbito de trabajo diario del alumno. La interpretación de gráficas es un recurso muy utilizado no sólo en matemáticas sino también en Sociales para estudiar demografía, en Ciencias para estudiar el crecimiento de una determinada especie, las reacciones de un producto químico, etc. Por tanto, el alumno está más familiarizado al acto de interpretar un gráfico dado. La única diferencia en esta actividad planteada era la presencia de tres gráficos que nos daban información de los mismos objetos y la dificultad residía en interpretarlos los tres de forma simultánea. Las respuestas han sido del todo satisfactorias corroborando así que con los conceptos estudiados y con el dominio de la interpretación de gráficas, los alumnos pueden hacer frente a este tipo de cuestiones.

Sin embargo, en las cuestiones de construcción como hemos visto, las dificultades han ido de la mano de la elección de las escalas, de las magnitudes que representa cada eje, de la flexibilidad que presente el alumno para pasar de su razonamiento lógico a la representación gráfica. En los tres ejercicios de construcción se ven claras dificultades ante la comprensión de los diferentes tipos de funciones. Las funciones definidas a trozos y lineales son las que más relevancia han tenido en este cuestionario y eso se debe a la clara tendencia a la linealidad y proporcionalidad desde los primeros cursos de la Educación Secundaria Obligatoria. Además, esto deja entrever que la mayoría de los encuestados no comprende cuál es el significado propiamente de una función definida a trozos y de una función lineal que represente proporcionalidad. En muchas ocasiones se utilizan las funciones definidas a trozos sin tener en cuenta que los saltos de discontinuidad que se manifiestan carecen de sentido.

Esto se ve apoyado en la escasa argumentación de sus respuestas. La mayor parte de las preguntas en las que se pide colaboración al alumno de forma que justifique las respuestas dadas, no obtienen respuesta o en ella no se explica claramente que es lo que ocurre. En muchas de las ocasiones, esa justificación hubiera resultado útil para darse cuenta de que las representaciones gráficas a las que daban lugar no representaban lo que ellos habían razonado.

Ejemplo de esto es la escasa atención que recibe el origen en las gráficas. Son varios los alumnos que en la actividad de la edad y la altura su gráfica parte del origen, algo que en realidad no tiene ningún sentido. De igual forma, en la estrategia seguida por un corredor en una maratón, la gran mayoría le otorgaba una velocidad inicia, que también carece de sentido. Luego, en la mayoría de los casos no hemos podido ver la utilización de un discurso coherente que justifique el resultado obtenido.

Además, se observa claramente como los alumnos no están acostumbrados a este tipo de cuestiones que exigen de la interpretación sin datos de una situación real, para posteriormente traducirlo en una gráfica que sea lo más ajustada a la realidad posible. Es decir, la estimación, predicción y la formulación de conjeturas relacionadas con la construcción de una gráfica de una situación real, es algo que muchos de los alumnos no son capaces de realizar a partir de lo que saben.

En conclusión, las actividades de construcción que hemos considerado en este cuestionario nos han permitido corroborar que es prácticamente nula la flexibilidad de los alumnos para moverse entre los diferentes sistemas de representación.

Por tanto, a modo de reflexión deberíamos plantearnos la importancia que tiene dotar al alumno del mayor número de recursos posibles, de estudiar un mismo concepto matemático desde diferentes representaciones sacando de cada una de ellas propiedades diferentes y de utilizar la argumentación y la justificación también como herramienta para mejorar su razonamiento.

Considero que ha resultado un trabajo satisfactorio, hemos observado más de lo que habíamos esperado y también si lo volviéramos a realizar cambiaríamos algunas cosas. Quizás las preguntas se harían más claras, se dejaría más espacio para que puedan contestar (sobretodo en la última pregunta) y se pondrían menos apartados para que no resultara tan tedioso (en la segunda actividad). A pesar de todo ello, el trabajo resultante ha sido claro, se ha obtenido lo que queríamos y ahora solo queda que introduzcamos estas actividades en las actuales clases con la importancia que conllevan.

Por último, a modo de valoración del máster, destacar de la parte genérica la importancia que para mí ha tenido las clases de la asignatura de psicología. Considero que ésta ha sido de las clases más provechosas para mí, pues creo que el saber un poco más que caracteriza a estos alumnos en esta etapa educativa a nivel psicológico es imprescindible. Nos encontramos ante una de las asignaturas que más frustración supone a los alumnos, ante una etapa de cambios físicos y mentales, y ante personas esperando ser educadas no solo cognitivamente sino emocionalmente. Por ello, tratar de entender su razonamiento, ofrecerles actividades dinámicas y amenas, y hacerles partícipes de su propio conocimiento son elementos fundamentales que todo profesor debe considerar.

Por otro lado, de las asignaturas específicas destacar la importancia de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas porque además de darnos una gran base para la creación de nuestras propias unidades didácticas y dotarnos de recursos para programar sesiones y tareas; nos han ayudado a saber exponer, discriminar lo relevante de lo que no lo es y a perder el miedo a hablar en público.

En general, creo que el máster nos ha proporcionado una mirada crítica a los recursos que nos ofrecen las editoriales, los medios de comunicación…, a la educación actual, a la costumbre y al sedentarismo. Este trabajo surge como reclamo de un cambio, se busca que los profesores procuren que sus alumnos estén bien formados en todos los sentidos, que sean capaces de generar más oportunidades en ellos, que los doten de mejores recursos para defenderse en el día a día. Potenciar la actitud crítica, aplicar el razonamiento matemático a situaciones reales y crear las tareas y recursos que hagan falta para mejorar el nivel de los alumnos son cuestiones propias del profesor cuya importancia reclamamos en esta investigación.

7. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

En este apartado se incluyen todos los documentos, artículos y libros consultados para la realización de este trabajo.

Alayo, F. (1990). *El lenguaje de funciones y gráficos*. Madrid: Ministerio de Educación.

INECSE (2003). *Pruebas de matemáticas y de resolución de problemas*. Madrid: Autor.

Lacasta, E. y Pascual, J. R. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos.* Madrid: Síntesis.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. & Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research, 60*(1), 1-64.

Ministerio de Educación y Ciencia (2007). Orden ECI/2220/2007, de 12 de julio, por la que se establece el currículo y se regula la ordenación de la Educación secundaria obligatoria. *BOE, 174*, 31789 – 31805.

NCTM (2003). *Principios y estándares para la educación matemática*. Granada: SAEM THALES

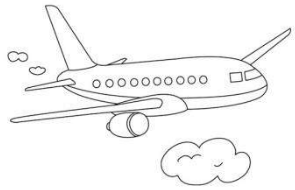
OCDE (2013). *Marcos y pruebas de evaluación de PISA 2012: Matemáticas, Lectura y Ciencias.* Recuperado el 2 de febrero de 2014 de www.oecd.org.

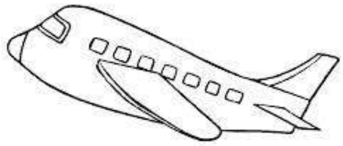
Rico, L. y Lupiánez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

8. Anexo

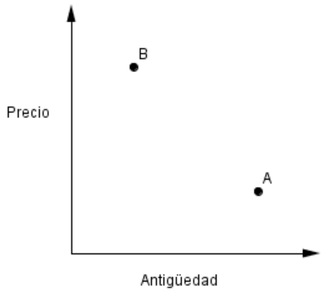
8.1. Cuestionario

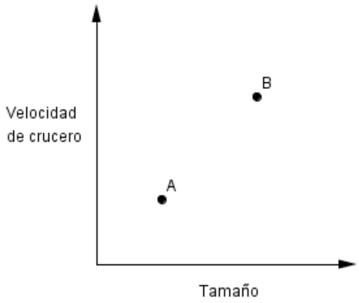
Nombre: ____

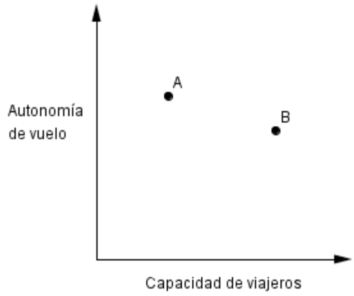




1. Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).







La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

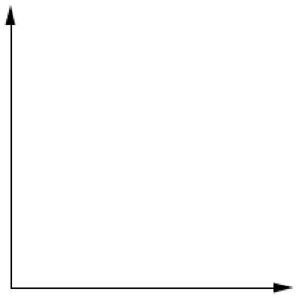
- ¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?
  - El avión más viejo es más barato.
  - El avión más rápido es más pequeño.
  - El avión más grande es más viejo.
  - El avión más barato transporta menos pasajeros.

2. Dibuja gráficas para ilustrar las siguientes situaciones. Tienes que decidir tú mismo las variables y la relación entre ellas. Etiqueta tus ejes con cuidado, y explica tus gráficas con palabras debajo de cada una de ellas.

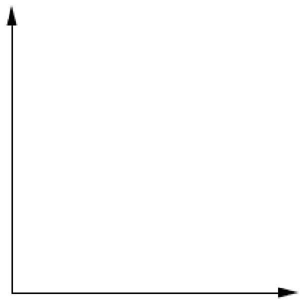
   ¿Cómo varía …

   a. tu altura con la edad?
   b. la cantidad de pasta necesaria para hacer una pizza con su diámetro?
   c. la velocidad de un corredor de una maratón?
   d. el nivel del agua en tu bañera antes, durante y después del baño?

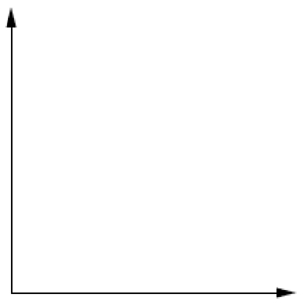
a)



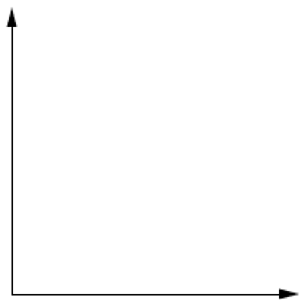
b)



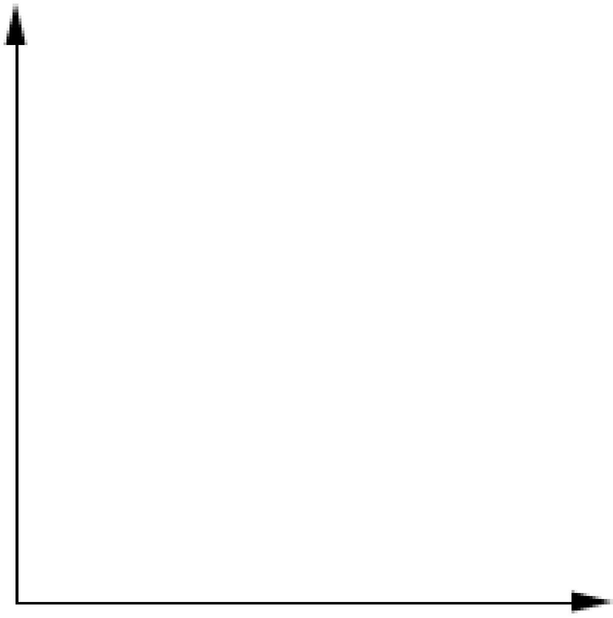
c)



d)



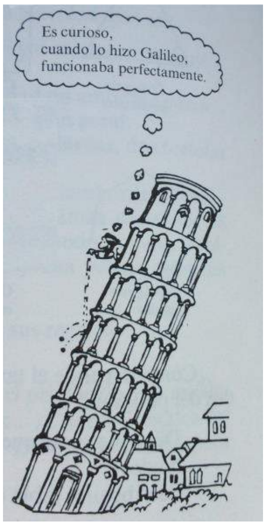
3. Tres kilos de boquerones valen 18 €. Escribe y representa la función que define el coste de los boquerones en función de los kilos comprados.



4. Intenta resolver el siguiente problema.

Caída de una piedra

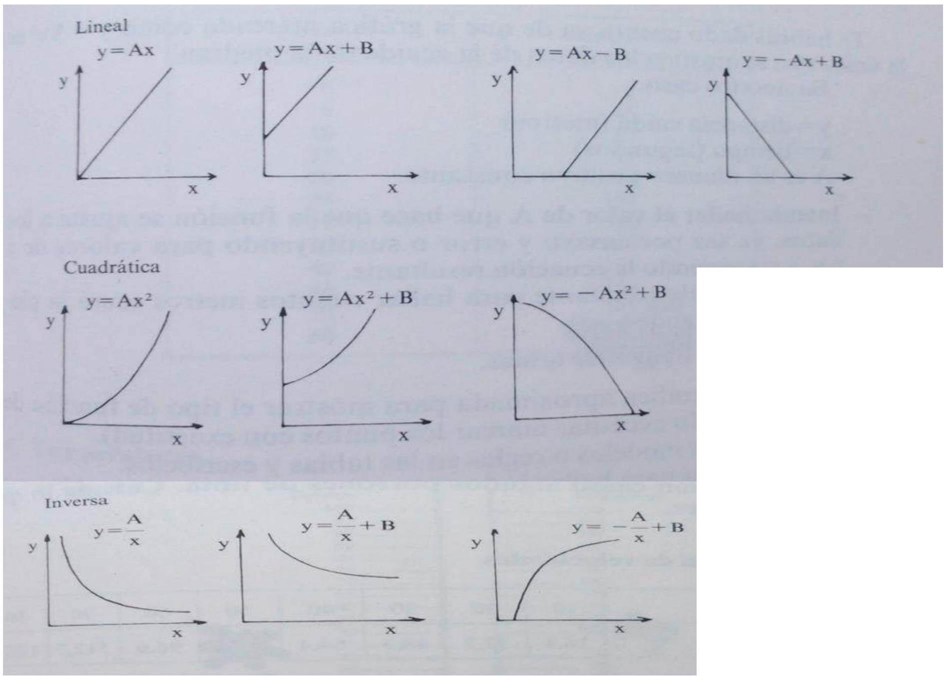
Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia caída (metros)	0	5	20	45	80	125



- Dibuja una gráfica aproximada para ilustrar estos datos.
- ¿observas alguna regla en esta tabla? Descríbela con palabras y, si es posible, con fórmulas.
- Se lanza una piedra desde un avión. ¿cuántos metros caerá en 10 segundos?

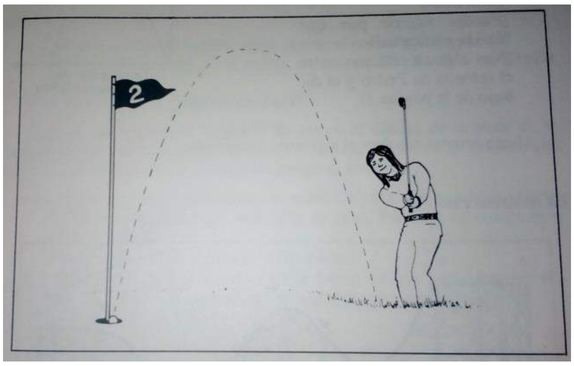
  Las tablas de datos ocultan a menudo una simple regla matemática o función que, una vez conocida, se puede usar para predecir valores desconocidos. A partir de la "chuleta" que aparece a continuación, ¿cuál es la gráfica que se parece más al problema planteado?

<u>"Chuleta"</u>

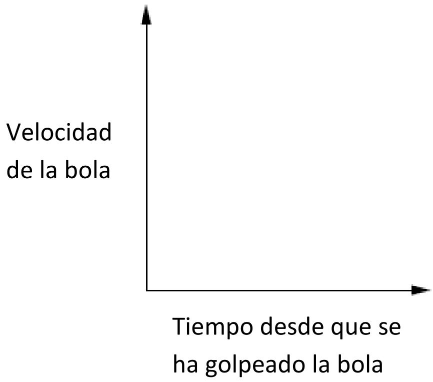


8.2. Actividades

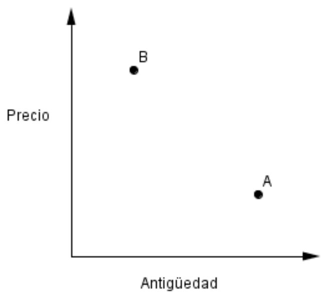
1. **Interpretación.**
   a. **Predicción.**
      - ¿Cómo cambia la velocidad de la bola cuando va por el aire en este golpe de golf?

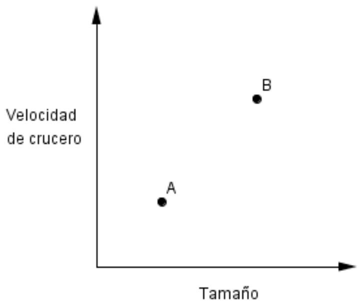


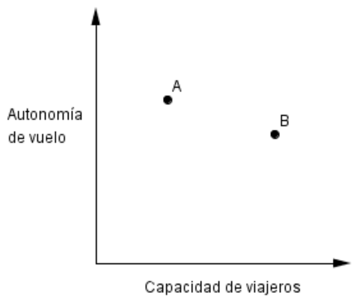
         - Discute esta situación con tu compañero y escribe una descripción clara, indicando cómo creéis que varía la velocidad de la bola.
         - Ahora haz una gráfica aproximada para ilustrar tu descripción.



      - Las siguientes gráficas describen a dos aviones ligeros, A y B (Nota: las gráficas no se han realizado con exactitud).







La primera gráfica muestra que el avión B es más caro que el A. ¿Qué más indica?

¿Son ciertas o falsas las siguientes afirmaciones?

El avión más viejo es más barato.

El avión más rápido es más pequeño.

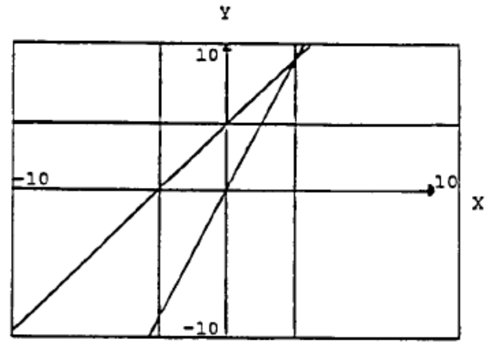
El avión más grande es más viejo.

El avión más barato transporta menos pasajeros.

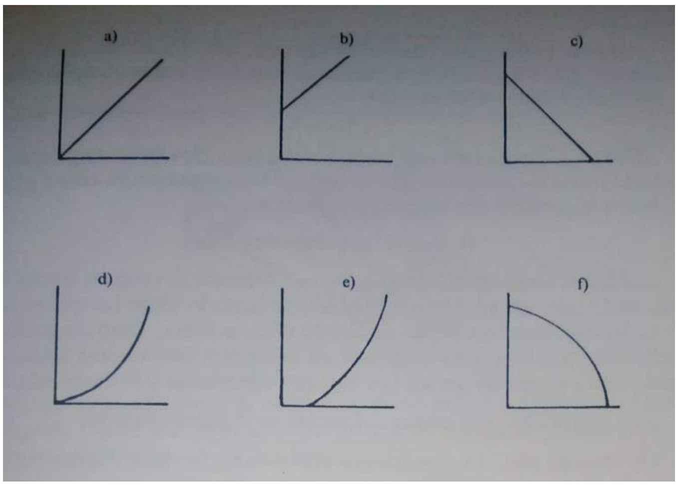
b. Clasificación

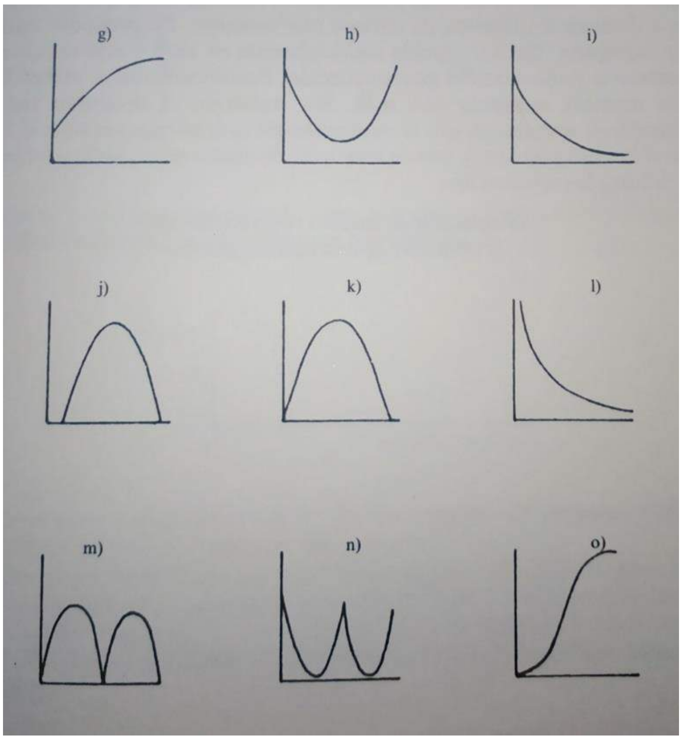
- Determina que expresión algebraica está relacionada con cada una de las siguientes funciones:

1. X=4
2. Y=4
3. Y-2X=0
4. Y=X+4
5. Y=3X
6. X=6
7. X=-4
8. Y=-2X



- Elige la gráfica que mejor se ajuste a cada una de las tres situaciones descritas a continuación. Pon nombres a los ejes y explica tu elección. Si no encuentras la gráfica que quieres, dibuja tu propia versión.
  - Los precios están subiendo ahora más despacio que en ningún otro momento de los últimos cinco años.
  - Cuanto más pequeñas son las cajas, más podemos cargar en la camioneta.
  - Cuantos más seamos en el cumpleaños, menos tendremos que pagar por el regalo.



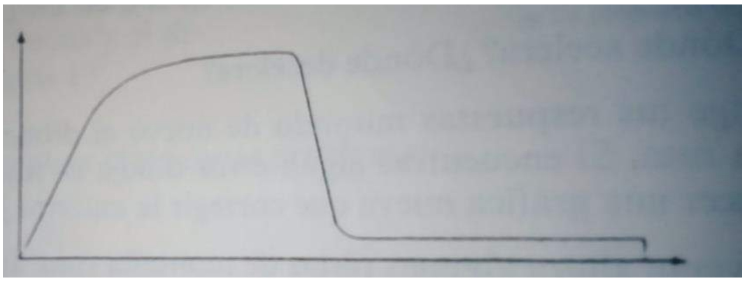


c. Traducción

- ¿Qué deporte?
    - ¿Qué deporte producirá una gráfica como esta? Elige la mejor de las siguientes respuestas y justifícalo.

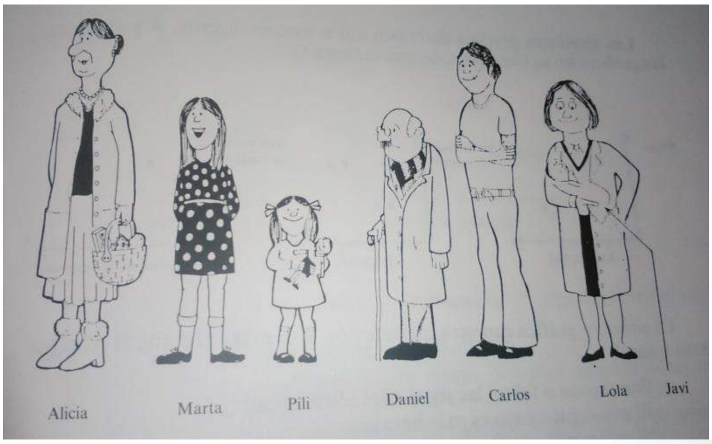
Pesca	Lanzamiento de jabalina
Salto con pértiga	Salto de altura
100 metros lisos	Salto de trampolín
Paracaidismo	Billar
Golf	Carrera de obstáculos
Tiro con arco	Esquí acuático

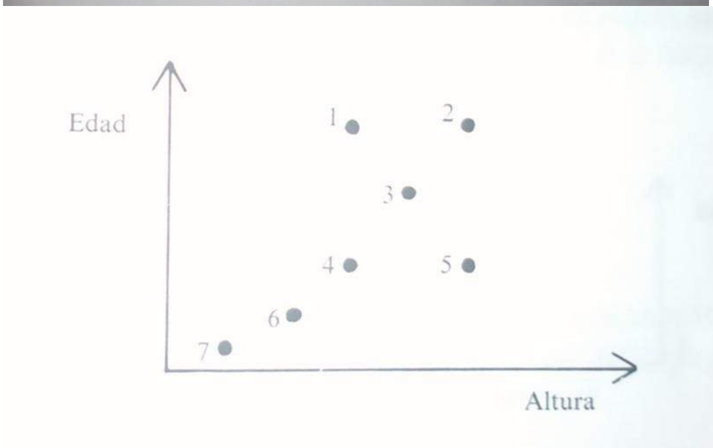
Velocidad



Tiempo

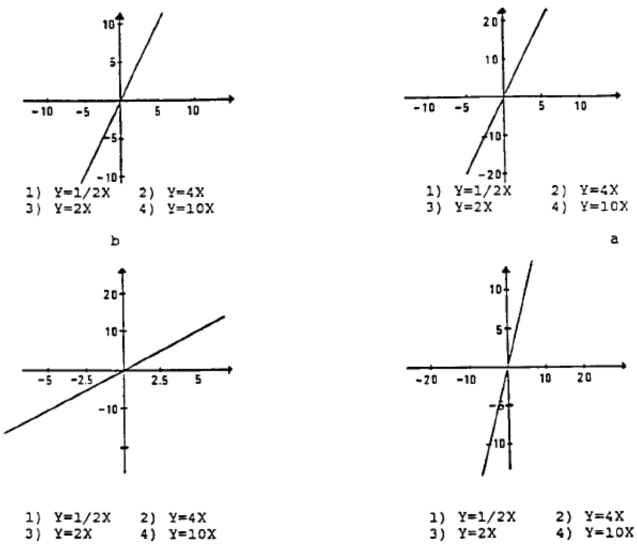
- ¿Quién está representado por cada punto del diagrama inferior?





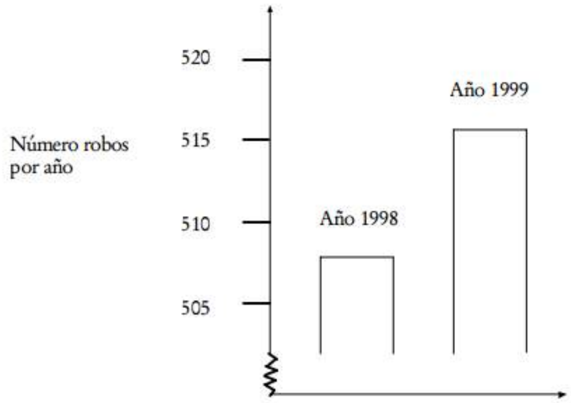
d. Escala.

- Elige en cada caso la función que describa la gráfica. ¿Observas algo particular?



- Un presentador de TV mostró este gráfico y dijo:

  "El gráfico muestra que hay un enorme aumento del número de robos comparando 1998 con 1999".

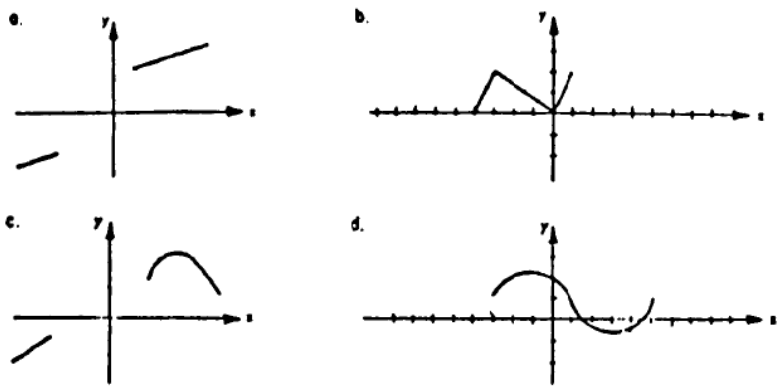


  - ¿Consideras que la afirmación del presentador es una interpretación razonable del gráfico? Da una explicación que fundamente tu respuesta.

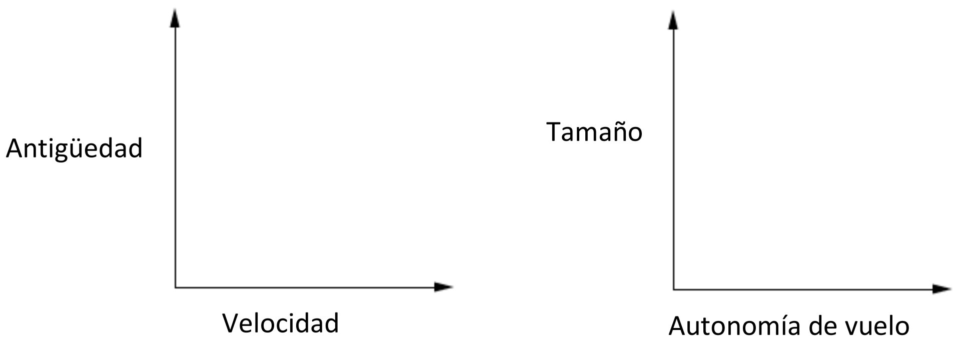
2. Construcción.

a. Predicción

- Continúa las siguientes gráficas.



- Aviones. Actividad 1 del cuestionario (actividad extra).
  - Coloca en las siguientes gráficas los puntos que representen a los aviones A y B.



b. Clasificación

- Construye la gráfica de las siguientes pruebas deportivas e indica a qué tipo de funciones se ajusta cada una de ellas.
  - Carrera de 100 m.
  - Salto de pértiga.
  - Lanzamiento de disco.
  - Carrera de 100 m vallas.

c. Traducción

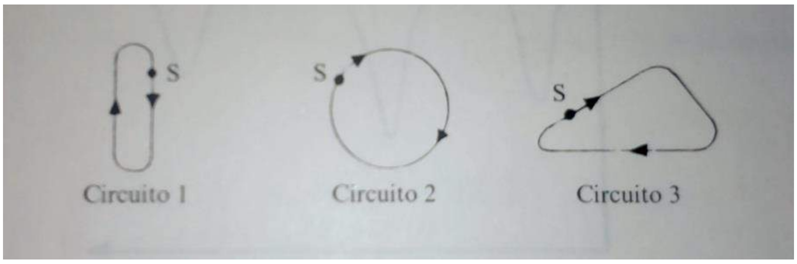
- Intenta resolver el siguiente problema.

  Caída de una piedra

Tiempo (segundos)	0	1	2	3	4	5
Distancia caída (metros)	0	5	20	45	80	125

  - Dibuja una gráfica aproximada para ilustrar estos datos.
  - ¿observas alguna regla en esta tabla? Descríbela con palabras y, si es posible, con fórmulas.
  - Se lanza una piedra desde un avión. ¿cuántos metros caerá en 10 segundos?
  - Las tablas de datos ocultan a menudo una simple regla matemática o función que, una vez conocida, se puede usar para predecir valores desconocidos. A partir de la "chuleta" que aparece a continuación, ¿cuál es la gráfica que se parece más al problema planteado?

- ¿Cómo crees que varía la velocidad de un coche cuando está dando la segunda vuelta en cada uno de los tres circuitos dibujados abajo? (S = punto de salida). Razona tu respuesta.



d. Escala

- Tres kilos de boquerones valen 18 €. Escribe y representa la función que define el coste de los boquerones en función de los kilos comprados.
- Representa los siguientes datos del número de especies de pájaros de una isla volcánica en una gráfica:

Año	1880	1890	1910	1930	1960
Número de especies	0	1	17	30	30