UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESTRATEGIAS DE LOS PROFESORES EN FORMACIÓN PARA LA INVENCIÓN DE PROBLEMAS INVERSOS Y ENRIQUECIMIENTO DE TAREAS MATEMÁTICAS DESTINADAS A ALUMNOS DE ENSEÑANZA SECUNDARIA

VÍCTOR MARTÍNEZ-LUACES

Granada

Septiembre, 2017

Curso 2016/2017

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y del doctor D. José Antonio Fernández Plaza del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y que presenta Víctor Martínez Luaces dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: Víctor Martínez Luaces

Vº Bº del tutor

Vº Bº del tutor

Fdo.: Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Fdo.: José Antonio Fernández Plaza

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi agradecimiento a todas las personas que me apoyaron en la realización de éste Máster en Didáctica de Matemática.

En particular, quiero agradecer a María Esther Luaces y Marjorie Chaves, que siempre creyeron en la importancia de realizar de este postgrado. Su apoyo para este emprendimiento ha sido realmente muy importante.

En segundo lugar quiero expresar mi agradecimiento a mis tutores, los doctores Juan Francisco Ruiz Hidalgo y José Antonio Fernández Plaza. Ellos han sabido orientarme en este trabajo, haciendo del mismo una verdadera experiencia de aprendizaje.

Quiero dedicar un párrafo muy especial para destacar el papel fundamental que ha tenido el Prof. Dr. Luis Rico Romero, no solamente en la realización del TFM, sino en todo lo relativo al Máster en Didáctica de Matemática. En efecto, fue Luis quién me animó a realizar este postgrado, también tuvo a su cargo uno de los cursos que más me han aportado durante el mismo y finalmente en el TFM, sus sugerencias, aportes e ideas, hicieron posible que este proyecto se convirtiera en realidad.

Por último, deseo agradecer a los profesores Antonio Moreno Verdejo y Luis Rico Romero, por su colaboración en la parte experimental de este trabajo.

ÍNDICE

1.- INTRODUCCIÓN

1.1.- Generalidades y planteo del problema

En la Matemática, como en otras disciplinas, se puede decir que hay básicamente dos tipos de problemas: directos e inversos. Los problemas directos, según Groestch (2001), pueden ser vistos como aquellos en los que se provee la información necesaria para llevar a cabo un proceso bien definido, estable y que lleva a una única solución.
Los problemas inversos, en cambio, son más difíciles e interesantes y esto se debe en gran parte a que, o bien tienen múltiples respuestas o bien son insolubles (Bunge, 2006). Por otra parte, suelen requerir de un razonamiento regresivo, que no siempre resulta fácil de explicar y tal vez por ello han sido casi ignorados en el ámbito educativo (Martínez-Luaces, 2011).
Como señalan algunos de los autores antes mencionados, los problemas directos dominan el currículo en los cursos tradicionales de Matemática. No obstante, si se desea modernizar los procedimientos y contenidos de los cursos, los problemas inversos requieren tener un papel preponderante ya que proveen una plataforma para explorar cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad a la vez que plantean situaciones más interesantes y cercanas a la vida real.
En relación con esto último – la conexión con la realidad – conviene comenzar estableciendo que según W. Blum, el término "modelado" se focaliza en la dirección que va da del mundo real hacia la matemática, mientras que el término "aplicaciones" se centra en la dirección opuesta, o sea, de la matemática hacia la realidad. Además de lo anterior, el término "modelado" enfatiza el proceso que tiene lugar, mientras que la palabra "aplicaciones" hace énfasis en el objeto involucrado, en particular en las áreas del mundo real que son accesibles a un determinado tratamiento matemático (Blum, 2002).
Finalmente, también es posible combinar los problemas inversos y el modelado, los que en trabajos anteriores hemos llamado *Problemas de Modelado Inverso* (Martínez-Luaces, 2011, 2012, 2016a, 2016b).
Estos problemas inversos de modelado pueden obtenerse fácilmente, a partir de la reformulación de algunos problemas de modelado tradicionales, aumentando con ello su riqueza educativa. Esto ha sido observado, por ejemplo, en una experiencia

realizada en la Universidad de Colima, México, con profesores de Matemática en formación (Martínez-Luaces, 2013a).

En este trabajo se pretende continuar en esa línea de investigación, con futuros profesores y focalizándose en el enriquecimiento de tareas destinadas a los alumnos de Enseñanza Secundaria. La idea entonces es analizar la potencialidad de los problemas inversos de modelado para el enriquecimiento de tareas, partiendo de problemas formulados de manera directa.

En función de lo anterior, se seleccionan y proponen los elementos del marco teórico elegido – que constituye el capítulo 2 de este trabajo – en el que se analizarán primeramente los problemas inversos y la modelación matemática. Por otra parte, dado que la propuesta consiste en que los profesores en formación reformulen problemas, también se analizará la invención de problemas. Por último, los resultados del trabajo de campo se estudiarán utilizando los elementos del Análisis Didáctico, particularmente en tres de sus dimensiones: el análisis de los significados, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

A continuación, en el tercer capítulo se estudiará en detalle el marco metodológico, donde se explicitará cuál ha sido la muestra y el instrumento utilizado en el estudio. También se detallarán las categorías que han sido utilizadas para identificar y analizar las producciones de los futuros profesores, junto con su descripción y cómo han sufrido transformaciones a medida que se avanzaba en el análisis de los problemas reformulados.

En el cuarto capítulo – dedicado al estudio de los resultados obtenidos en el trabajo de campo – se analizarán las reformulaciones del problema original, propuestas por los profesores en formación a partir de un problema directo previamente suministrado. También se incluirá un análisis cognitivo y un análisis de instrucción que corresponden a dichas propuestas. Para ello se estudiarán y analizarán las respuestas brindadas por los sujetos de la muestra, en sus comentarios sobre el propio problema que han reformulado.

Finalmente, en el quinto y último capítulo se propondrán conclusiones sobre la investigación realizada, se analizarán las limitaciones del trabajo y también las posibles continuaciones de esta línea de investigación.

1.2.- Antecedentes de la investigación planteada

Desde el año 1996 hasta el 2002 inclusive, se realizó una experiencia en la Cátedra de Matemática de la Facultad de Química en la Universidad de la República, en Montevideo, Uruguay, basada en el modelado matemático y las aplicaciones. Dicha experiencia comenzó en un curso concreto de Ecuaciones Diferenciales y se fue extendiendo paulatinamente a otras asignaturas (Cálculo 1 y 2, Álgebra Lineal, Estadística y Métodos Numéricos). Al comienzo se trabajó con aplicaciones de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), la transformada de Laplace y las ecuaciones en derivadas parciales, a las que paulatinamente se fueron agregando problemas de modelado orientados a las carreras químicas (Martínez-Luaces, 1997b, 2003, 2005, 2009). A medida que la experiencia se fue extendiendo a otros cursos, se fueron presentando los resultados en congresos y revistas (Martínez-Luaces, 2001, 2017a, 2017b; Martínez-Luaces y Cuitiño, 2000; Martínez-Luaces, Velázquez y Dee, 2009).

Cabe aclarar que en los primeros años (1996-1997), casi todos los problemas que se planteaban estaban formulados en forma directa y recién en los últimos años del siglo pasado y principios del actual se comenzó a trabajar en forma más sistemática con problemas inversos. De hecho, los primeros trabajos sobre problemas inversos de modelado matemático son bastante posteriores (Martínez-Luaces, 2006, 2007), a los que siguieron otros, basados en experiencias con alumnos de otras instituciones y en otros países como Argentina (Martínez-Luaces, 2013b) y México (Martínez-Luaces, 2013a).

Cabe destacar especialmente los trabajos realizados con profesores en servicio (Martínez-Luaces, 2005, 2009, 2011) y con profesores en formación (Martínez-Luaces, 2013a). En este último caso – en una experiencia realizada en la Universidad de Colima, México – se dictó un curso-taller intensivo, con una duración total de 10 horas en paralelo con las actividades de un congreso de Educación. En dicho curso se trabajó con diez problemas, formulados en forma directa y se animó a los asistentes a reformularlos en forma inversa, con la intención de enriquecerlos previo a su eventual utilización en cursos de matemática para alumnos de Enseñanza Secundaria. La

experiencia fue sumamente positiva, tanto para los asistentes – que así lo reflejaron en una encuesta de satisfacción – como para el docente y los organizadores del curso.
En función de lo anterior, se propuso como posible Trabajo de Fin de Máster (TFM), realizar una investigación similar, aprovechando la colaboración de los profesores Luis Rico y Antonio Moreno, del Máster de Profesorado de Secundaria, Especialidad de Matemáticas. A diferencia de la experiencia realizada en Colima, en esta ocasión se propuso elaborar y utilizar un instrumento más idóneo para estudiar el enriquecimiento de tareas. Con el instrumento antes mencionado se recabaron las opiniones de los propios profesores en formación a los que se propuso realizar una comparación de enunciados en cuanto a significatividad, autenticidad, elementos que componen la tarea y variables de tarea.
Lo anterior permitió un análisis mucho más profundo que el realizado en Colima – que como ya se dijo, se limitó a una simple encuesta de satisfacción – y que constituye, junto con las reformulaciones propuestas por los futuros profesores, el núcleo central de este TFM.

1.3.- Conjeturas y preguntas de investigación

Teniendo en cuenta la experiencia realizada en Colima en la que los futuros profesores fueron capaces de transformar los problemas directos, en problemas inversos de mayor riqueza, daría la impresión de que esto es algo perfectamente realizable. Sin embargo, cabe destacar que en Colima dicho trabajo fue realizado siempre en el aula, con apoyo y orientación del docente a cargo, y además los asistentes no trabajaron individualmente, sino en grupo. En principio, podría quedar la duda si el resultado también hubiera sido satisfactorio en caso de trabajar individualmente y sin la orientación del docente en el momento de plantear la reformulación de un determinado problema.
Pese a lo objeción antes planteada, la primera conjetura es que los profesores en formación pueden transformar fácilmente un problema directo de modelación (o de la aplicación de la Matemática) en uno inverso, más motivador y más conectado con los problemas del mundo real.
Al ser los problemas inversos muchas veces mal condicionados, esto puede traer ciertos inconvenientes, pero al mismo tiempo permite abordar otras cuestiones (por

ejemplo: existencia, unicidad y estabilidad) que no tienen el mismo interés al tratar con problemas directos. Una segunda conjetura entonces, es que los futuros profesores encontrarían útiles estos problemas para plantear estas cuestiones u otras, en sus cursos.

Además de comprobar o refutar dichas conjeturas, es importante conocer las opiniones de los docentes sobre la utilidad de estos problemas para su trabajo en el aula, motivación y conveniencia o no de trabajar con los mismos. Particularmente relevantes son sus opiniones en cuanto a la significatividad, la autenticidad, los elementos que componen la tarea y las variables de la misma.

En función de lo anterior cabe preguntarse por la potencialidad de los problemas inversos en el modelado matemático, desde el punto de vista de su aplicabilidad en el aula. Concretamente, se trata de averiguar si los profesores encuentran motivadores y potencialmente útiles estos problemas, para luego ser utilizados en los cursos.

También corresponde preguntarse si los profesores son capaces de transformar los enunciados de problemas directos de modelado en enunciados de problemas inversos, de modo tal que se logre un enriquecimiento de las tareas matemáticas destinadas a alumnos de Enseñanza Secundaria.

1.4.- Objetivos de la investigación

Teniendo en cuenta los antecedentes de esta investigación, las conjeturas y preguntas de la misma, se proponen los siguientes objetivos generales:

Objetivos generales

- Identificar y caracterizar las estrategias de un grupo de profesores en formación para enunciar problemas inversos destinados a alumnos de Enseñanza Secundaria, a partir de su enunciado directo.

- Estudiar, analizar y caracterizar las producciones en forma de problemas inversos, de futuros profesores y realizar el análisis didáctico de sus propuestas.

Asimismo, se proponen también los siguientes objetivos específicos para esta investigación:

Objetivos específicos

- Definir los distintos tipos de problemas propuestos y caracterizar las reformulaciones que han sido planteadas en forma inversa por parte de los futuros profesores.

- Caracterizar del punto de vista del análisis cognitivo los problemas reformulados, así como los comentarios que los propios profesores en formación hacen de sus respectivas propuestas.

- Caracterizar desde el punto de vista del análisis de instrucción las distintas propuestas realizadas, teniendo en cuenta las variables de tarea que plantean los futuros profesores.

2.- MARCO TEÓRICO

En este capítulo se analizará el marco teórico del TFM y en particular se considerarán los siguientes temas: el modelado matemático, los problemas inversos, la invención de problemas y finalmente el análisis didáctico. Cada uno de los temas mencionados constituye una sección del capítulo.

2.1.- Modelado matemático

El Modelado Matemático es una de las áreas de la Educación Matemática que más desarrollo han tenido en las últimas décadas, concretamente desde principios de los años ochenta hasta la fecha.

A modo de ejemplo cabe mencionar que ICTMA [1] (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications) organiza un congreso a nivel mundial en todos los años impares. Estos eventos han tenido lugar en Alemania, Australia, Brasil, China, Estados Unidos, Inglaterra y Sudáfrica, entre otros países de todos los continentes. Dicho grupo está afiliado a ICMI (International Commission on Mathematical Instruction) y en más de una ocasión el congreso mundial de Educación Matemática (ICME) ha sido organizado por investigadores de dicho grupo.

En cuanto al ámbito educativo propiamente dicho el modelado matemático y las aplicaciones tienen gran relevancia, ya que una amplia mayoría de los estudiantes que reciben cursos de matemáticas no desean ser matemáticos ni tampoco profesores de matemática (Varsavsky, Waldock, Harding, Bookman, Sheryn, Martinez-Luaces, 2011). Esto hace que – al menos numéricamente – nada pueda tener mayor importancia dentro de la educación matemática, que la que se realiza como asignatura de servicio, es decir, su instrucción para no-matemáticos. En este contexto, presentar a la matemática desde un enfoque aplicado y motivador para estudiantes de otras carreras, resulta algo absolutamente imprescindible. Por ese motivo, desde hace ya varios años los libros modernos de matemáticas incluyen ejemplos de modelado y/o de aplicaciones a distintas situaciones de la vida real (Abell y Braselton, 2016; Simmons, 2016).

La resolución de problemas, el modelado y las aplicaciones están relacionados, pero no son sinónimos (Martinez-Luaces, 1997a, 2004). Por ejemplo, en el Documento de

[1] www.ictma.net

Discusión preparatorio del ICMI Study 14 (Blum, 2002), se menciona que el término "modelado" se focaliza en la dirección que va da del mundo real hacia la matemática, mientras que el término "aplicaciones" se centra en la dirección opuesta, es decir, de la matemática hacia la realidad.

Por otra parte, el término "modelado" hace énfasis en el proceso que tiene lugar, mientras que la palabra "aplicaciones" enfatiza el objeto involucrado, en particular, en las áreas del mundo real que son accesibles a un determinado tratamiento matemático.

En el documento antes mencionado, el término "problema" es utilizado en un sentido amplio, incluyendo no solamente problemas prácticos, sino también los más abstractos, o que intentan describir, explicar, entender o incluso designar partes del mundo real.

Por ejemplo, se puede hacer un modelo aunque no haya un problema concreto a resolver; en ese caso simplemente se trataría de dar una descripción matemática de un cierto fenómeno. Obviamente, también es posible resolver problemas de matemática "pura", donde no hay necesariamente involucrado ningún modelo ni se realiza un proceso de modelación.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible proponer el siguiente esquema explicativo de las relaciones entre aplicaciones y modelado:

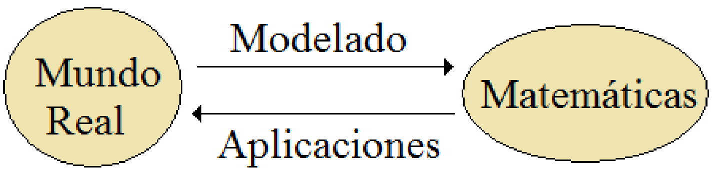


Figura 2.1. Esquema relativo al modelado y las aplicaciones.

Una discusión más amplia del tema – el modelado matemático, las aplicaciones, la resolución de problemas y su presencia en los cursos universitarios y de Enseñanza Secundaria en Latinoamérica – puede encontrarse en obras clásicas como (Blum, 2002; Polya, 1979; Schoenfeld, 1994). También se han tratado estos temas en trabajos anteriores como por ejemplo: Bressoud, Ghedamsi, Martinez-Luaces y Törner (2016), Martinez-Luaces y Noh (2015), Martinez-Luaces y Oates (2013), Martinez-Luaces y Varsavsky (2007), entre otros.

2.2.- Problemas inversos

A diferencia de lo anterior, los *problemas inversos* en la Matemática y más aún en la Educación Matemática, parecen haber sido casi completamente olvidados. Esto resulta aún más sorprendente si se observa que muchos de los problemas que debemos resolver a diario son en realidad, problemas inversos. Esta afirmación quedará más clara, en la próxima sub-sección de este capítulo.

Investigar es de alguna manera resolver problemas (Rico, 2012[2]). Sin intención de dar una clasificación rigurosa, en principio se puede hablar de problemas directos e inversos. Los problemas directos, según Groestch (1999, 2001), pueden ser vistos como aquellos en los que se provee la información necesaria para llevar a cabo un proceso bien definido y estable, que lleva a una única solución.

Los problemas inversos, en cambio, suelen ser más difíciles e interesantes y esto se debe en gran parte a que, o bien tienen múltiples soluciones o bien son insolubles y por otra parte, son de gran utilidad ya que se presentan habitualmente en la práctica profesional de muchas carreras. Por ejemplo, dada una cierta enfermedad, enumerar los síntomas es un problema directo y sencillo, que ya está resuelto y se puede ver en cualquier texto especializado. En cambio, diagnosticar la enfermedad del paciente a partir de sus síntomas no siempre es sencillo y requiere de un médico experimentado.

En las películas o libros de detectives, el personaje central debe identificar a los autores de un crimen conociendo cómo eran sus víctimas, los testimonios de los testigos y las pistas que surgen de la escena del crimen. Nuevamente, no es más, ni menos, que un problema inverso.

En la Psicología, o simplemente en nuestro trato diario con otras personas, intentamos adivinar las intenciones de los demás sobre la base de cómo es su comportamiento. Esto implica que todo el tiempo en nuestras relaciones laborales, afectivas, etc., estamos permanentemente resolviendo problemas inversos.

Finalmente, en la Filosofía, cabe citar esta frase de Bunge (2006): "El que casi todos los filósofos hayan ignorado las peculiaridades de los problemas inversos plantea este otro problema inverso: el de adivinar los motivos de este descuido descomunal por parte de los filósofos"

[2] http://www.aiem.es/index.php/aiem/index

Antes de ver algunos problemas inversos concretos en la Matemática, vamos a realizar una clasificación de los mismos.

2.2.1 Clasificación de los problemas inversos

En principio hay dos tipos diferentes de problemas inversos, según sea lo que se pretende conocer. Para caracterizarlos correctamente conviene comenzar por esquematizar el problema directo, adaptando un estudio realizado por Groestch (2001). Interpretando lo que propone este autor, un problema directo respondería a un esquema como el de la figura siguiente:

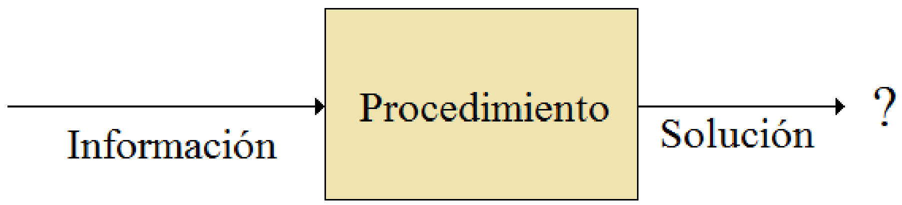


Figura 2.2. Esquema general de los problemas directos.

En el esquema de la Figura 2.2, se dispone de datos y de un cierto procedimiento y se solicita un cierto resultado, por ejemplo se proveen al alumno dos polinomios (dividendo y divisor), se ha explicado previamente el algoritmo de división de polinomios y finalmente, se solicitan como respuesta los polinomios cociente y resto.
Ahora bien, cambiando un poco el esquema resulta un primer problema inverso – el problema de causalidad – esquematizado en la Figura 2.3. En este caso la interrogante está puesta en cuáles pueden ser las causas que provoquen un determinado efecto, por ejemplo, cuál puede ser la función $F(x)$ que al derivarla de por resultado una cierta función dada $f(x)$ (evidentemente, hallar una función primitiva, es un problema inverso).

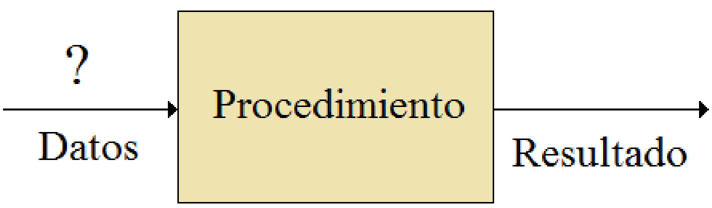


Figura 2.3. Esquema de los problemas inversos de causalidad.

De igual modo, se puede esquematizar (ver Figura 2.4) un segundo tipo de problema inverso: el problema de especificación, en el cual causa y efecto son conocidos y lo que se busca es lo que realiza – o puede realizar – el nexo entre ellos. En matemática este tipo de problema tiene lugar, por ejemplo, cuando se solicita demostrar una cierta propiedad, ya que en ese caso hipótesis y tesis son conocidas y lo que falta es el razonamiento que permite llegar a la última partiendo de la primera.

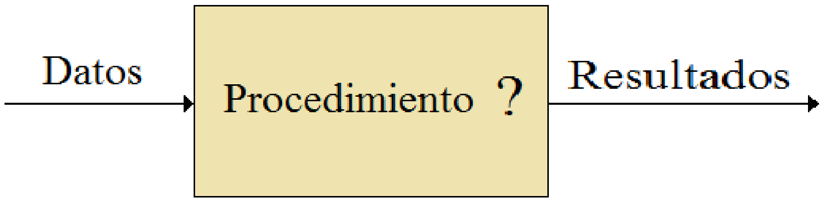


Figura 2.4. Esquema de los problemas inversos de especificación.

Ambos tipos de problemas son comunes en varias disciplinas, pero muy particularmente lo son en las carreras químicas. Este aspecto ha sido analizado en varios trabajos anteriores (Martinez-Luaces, 2001, 2007, 2011, 2017b, 2017c), en los que se han incluido ejemplos vinculados al Análisis Químico Cualitativo, la Química Inorgánica y sobre todo a la Química Orgánica. En efecto, es en esta rama, donde se utiliza ampliamente el *análisis retrosintético* que le valió a E.J. Corey el Premio Nobel de Química en el año 1990.

En el diseño de reactores – una rama fundamental de la Ingeniería Química – se han planteado problemas inversos tanto de causalidad como de especificación, que también han sido recogidos en trabajos anteriores (Martinez-Luaces, 2012, 2016b, 2017b).

2.2.2 Problemas inversos en Educación Matemática

Como señalan algunos autores (Groestch, 1999, 2001), los problemas directos dominan el currículo en los cursos tradicionales de Matemática. No obstante, si se desea modernizar los contenidos de los cursos, los problemas inversos deberían tener un papel preponderante ya que proveen una plataforma para explorar cuestiones de existencia, unicidad y estabilidad a la vez que plantean situaciones más interesantes y cercanas a la vida real. Esto además, se puede hacer a todo nivel como veremos en los siguientes ejemplos.

A nivel de escuela primaria se enseña desde muy temprano a multiplicar los números naturales, lo que evidentemente es muy sencillo y carece de dificultades. Mucho más interesante es el problema inverso, consistente en escribir un número natural como producto de otros dos. Este problema siempre tiene solución gracias al rol excepcional de la unidad como neutro del producto, sin embargo la unicidad conduce al concepto central de número primo. El planteo reiterado de este problema inverso desemboca en el Teorema Fundamental de la Aritmética.

Pasando al siguiente nivel, es decir, la Enseñanza Secundaria, sucede algo similar con el producto de polinomios (problema directo de solución muy sencilla y algorítmica) y su inverso: la factorización de expresiones polinómicas. Para este problema no hay un procedimiento definitivo, por lo que en general se suele presentar el tema en seis casos con sus respectivas variantes: extracción de un factor común, de factores comunes por grupos, el cuadrado perfecto de un binomio, el cubo perfecto de un binomio, la diferencia de cuadrados y finalmente la suma o resta de potencias de igual exponente (este último con 3 variantes, según se trate de la suma o de la resta y a su vez en este último caso, según la paridad de los exponentes). La factorización de polinomios conduce a otro teorema central de la Matemática (el Teorema Fundamental del Álgebra), pero su aplicabilidad se ve limitada, del punto de vista algebraico por las dificultades para hallar raíces complejas de polinomios de grado tres o superior y la imposibilidad (en general) a partir del quinto grado (Martinez-Luaces, 2011).

Pasando ya al nivel superior, un problema directo de Matemática Financiera consiste en calcular cuánto cobrará a su retiro un trabajador que desarrolló su actividad durante N años, realizando aportes mensuales $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (si fueran N años completos, sería $k = 12N$). Esto puede ser un poco engorroso, pero no es difícil y de hecho, en la vida real hay programas informáticos que se encargan de hacer automáticamente dicho cálculo. Mucho más interesante y complicado es el problema inverso: ¿cuántos años se debe trabajar y cuánto se debería aportar para tener derecho a un retiro razonable? La solución no es sencilla ni es única y tampoco está claro cuál puede ser la mejor opción de las varias disponibles. De hecho, esto es lo que motiva a las diversas opciones que compiten en el mundo real: seguros, jubilaciones privadas, administradoras de fondos de retiro y otras variantes.

Finalmente, un problema directo extremadamente sencillo, de Aritmética Elemental, consiste en sumar dos números primos impares. El resultado obviamente es un número par, pero, ¿qué sucede con el problema inverso? ¿Es posible descomponer un número par como suma de dos números primos? Esta pregunta dio origen a la famosa "conjetura de Goldbach" postulada en 1742, cuya solución más de 250 años después sigue siendo desconocida.

2.2.3 Problemas inversos en el modelado y las aplicaciones

Es en el modelado y en las aplicaciones a otras disciplinas donde posiblemente se pueden explotar de mejor manera los problemas inversos con una finalidad educativa. Por ese motivo estudiaremos el caso en el que el modelado matemático y los problemas inversos se combinan, de donde surgen naturalmente los problemas de *Modelado Inverso*, como llamaremos a los problemas de modelación formulados en forma inversa.

Obviamente, también pueden presentarse problemas inversos vinculados a las aplicaciones de la matemática, que por lo general son más sencillos que los problemas de modelado inverso.

Para este tipo de problemas – sean de modelado inverso o simplemente problemas inversos vinculados a alguna aplicación – no existe una metodología general de resolución, pero si existen estrategias – comunes a todos los problemas inversos – que serán analizadas en la siguiente sub-sección.

2.2.4 La resolución de los problemas inversos y/o de modelado inverso

Los problemas de modelado inverso en definitiva pueden ser considerados como un caso particular de problemas inversos, por lo que sus técnicas resolutivas pueden ser en muchos casos bastante similares.

Como dice Bunge (2006), "Los problemas inversos son de gran interés teórico porque se refiere a las investigaciones más difíciles en todos los campos..." y además "... la resolución de un problema inverso involucra síntesis o razonamiento regresivo, o sea de conclusiones a premisas o de efectos a causas".

Esto último deja a docentes e investigadores, un margen enorme para plantear problemas creativos, que permiten desarrollar las habilidades, estrategias y pensamiento crítico de los estudiantes.

Particularmente, en lo que refiere a las estrategias de resolución de estos problemas, Bunge (2006), menciona las siguientes:

- *Transformar el problema en uno diferente, pero soluble*
- *Atacar la familia de los problemas directos, ya que uno de sus miembros puede dar la clave para resolver el problema inverso considerado*
- *Suponer distintos escenarios en el pasado que pueden haber desembocado en los resultados del presente*
- *Inventar y ensayar hipótesis plausibles hasta dar con la verdadera*

La sola enumeración de estas y otras eventuales estrategias ya nos da una idea más que clara de su valor didáctico, en tanto permite proponer eventuales hipótesis, mecanismos, modelos, etc., ensayarlas y evaluar sus resultados. Por otra parte, si además agregamos el modelado matemático – como sucede en el modelado inverso – entonces resulta una plataforma invalorable para el trabajo multidisciplinario.

Nuevamente citando a Bunge (2006): "los problemas inversos son tan difíciles y han sido tan discriminados que el primer congreso internacional sobre el tema se realizó recién en 2002" y "los tratados sobre el tema se cuentan con los dedos de la mano"

Esto quiere decir, que si bien los problemas inversos (al menos en Matemática) datan de unos cinco siglos – el primero de ellos (Groestch, 1999, 2001) se le suele atribuir a Tartaglia, que en 1537 estudió un problema inverso de balística – tal parece que hasta el momento es muy poco lo que se ha avanzado. Si además consideramos su muy escasa utilización en Matemática Educativa, entonces es aún más largo el camino que queda por delante.

Teniendo en cuenta estos hechos y el innegable potencial educativo de los problemas inversos y los de modelado inverso, se puede concluir que la investigación y desarrollo de dichos problemas, constituye una tarea ineludible para los investigadores en Educación Matemática.

En este trabajo se estudiarán las reformulaciones como problemas inversos, propuestas por futuros profesores, lo que establece una conexión con la investigación en proposición de problemas. Esto último constituye un área tradicional de estudio en la literatura anglosajona (*problem posing)*, de la que se comentarán algunas generalidades en la sección siguiente.

2.3.- Invención de problemas

En este trabajo se analiza un problema relativamente sencillo, en el que solo intervienen conceptos fundamentales de Cálculo, Álgebra Lineal y Geometría. A diferencia de algunos trabajos anteriores (Martinez-Luaces, 2003, 2007, 2009, 2012, 2017b), no se han planteado problemas de temas más avanzados, como Ecuaciones Diferenciales, Transformación de Laplace, Estadística, etc. Por el contrario, la idea es considerar un problema fácil de plantear y al mismo tiempo, susceptible de ser reformulado en forma de problema inverso por futuros profesores de Enseñanza Secundaria.

Se espera que las reformulaciones planteadas por los alumnos-profesores sean de mayor riqueza que el original y favorezcan un proceso de enseñanza-aprendizaje basado más en la exploración que en la repetición de procedimientos.

Esto último vincula el trabajo a realizar con un área tradicional de investigación en Educación Matemática, como es el caso de la proposición de problemas, o *problem posing*, como se le conoce en la literatura anglosajona.

En efecto, existe en la literatura en idioma inglés una larga tradición en lo que refiere a la investigación en la proposición de problemas (problem posing) y los trabajos de Brown y Walter (1990, 1993), Kilpatrick (1987), Silver (1994, 1997) y English (1997), entre otros, representan algunos de los ejemplos más conocidos. Bajo la denominación común de “problem posing” estos autores incluyen la formulación de problemas nuevos y/o la reformulación de problemas suministrados previamente, en un cierto formato que puede estar más o menos estructurado (Silver, 1994, 1997; English, 1997; Silver y Cai, 1996).

Un caso particular digno de estudio, es el que tiene lugar cuando los estudiantes se plantean un nuevo problema durante la resolución de uno de mayor complejidad (Silver, Mamona-Down, Leung y Kenny, 1996). Esta situación ya se puede ver en los trabajos de Polya (1979), que propone como una posible estrategia el planteamiento del problema de una manera diferente, o también puede ser el establecimiento de variantes, descartando alguna o algunas de sus condiciones.

En trabajos de otros investigadores, la formulación de problemas no tiene por qué estar ligada a la resolución de un problema concreto. Por ejemplo, hay trabajos en los que se propone la invención de problemas partiendo de una determinada situación o experiencia (Silver, 1994, 1997).

Otra opción es combinar los dos enfoques anteriores y solicitar a los alumnos que luego de resolver un problema, lo modifiquen cambiando alguna condición o la pregunta final del mismo y de tal modo crear un nuevo problema (Silver, 1994).

Otros investigadores como Brown y Walter (1990, 1993), proponen una estrategia para plantear nuevos problemas que denominan "What if not?", consistente en cambiar condiciones, restricciones, etc., de un determinado problema, generando así uno nuevo.

Stoyanova (1998) identifica tres formas posibles en cuanto a la formulación e invención de problemas: situaciones libres, semi-estructuradas y situaciones estructuradas. En la primera de las mencionadas, no se plantean restricciones a la invención de problemas; en las semi-estructuradas se propone el planteamiento problemas basados en alguna y en las situaciones estructuradas, se reformulan un cierto problema dado o se cambia alguna condición del mismo.

En este trabajo – al igual que en la experiencia desarrollada en Colima (Martinez-Luaces, 2013a) se proporciona a los alumnos un problema directo y la consigna será reformularlo en forma de problema inverso, por lo tanto, corresponde a una situación estructurada, dentro de la clasificación dada por Stoyanova (1998).

2.4.- Análisis didáctico

En esta sección se intenta resumir muy brevemente la herramienta que se va a utilizar en el análisis de las producciones de los profesores en formación, el análisis didáctico. En particular, se plantea en esta sección un breve resumen de su estructura, su organización y de cómo permite abordar el diseño, puesta en práctica y evaluación de actividades de enseñanza y aprendizaje de un tema específico de matemáticas.

El conocimiento profesional del profesor, que le ayuda a establecer el significado de los conceptos, a planificarlos, implementarlos y evaluarlos, comienza y se construye mediante el contenido didáctico. Este proceso sigue un método al que Rico y colaboradores han denominado análisis didáctico (Rico, Lupiáñez y Molina, 2013; Rico y Moreno, 2016).

El análisis didáctico se estructura según cuatro tipos de análisis, con objeto de estudio distintos, según las dimensiones del currículo de matemáticas. En el caso concreto de un contenido matemático escolar, se entiende como un método para escudriñar, estructurar e interpretar, dentro de un marco curricular, los contenidos didácticos de las matemáticas escolares, con el propósito de su planificación, su implementación en el aula y su evaluación.

Comienza por el análisis de los significados de los contenidos matemáticos escolares. En segundo lugar realiza el análisis cognitivo de esos mismos contenidos, que determina las condiciones para el logro de los correspondientes aprendizajes. Seguidamente, el análisis de instrucción considera las tareas, organización y recursos necesarios para la enseñanza de estos contenidos matemáticos. Finalmente, tiene lugar el análisis evaluativo, que valora los aprendizajes logrados, la información recogida y la toma de decisiones.

En el caso concreto de este trabajo el análisis didáctico ha sido utilizado como herramienta para el diseño del trabajo de campo y para el análisis de las producciones de los profesores en formación. Sin embargo no se ha realizado la evaluación de estas producciones, por lo que en el marco teórico nos concentraremos en los tres primeros análisis mencionados: análisis de los significados, análisis cognitivo y análisis de instrucción.

En el análisis de contenido el profesor identifica, selecciona y organiza conceptos y procedimientos aptos para la instrucción. Luego, el análisis cognitivo aborda el aprendizaje del tema por parte de los alumnos, enuncia expectativas, analiza limitaciones y organiza la selección de las tareas a realizar. A continuación, en el análisis de instrucción el profesor diseña y secuencia tareas, selecciona materiales y delimita la gestión del aula. Por último en el análisis evaluativo – después de implementar la unidad didáctica – se recaba la información sobre si se han alcanzado las expectativas, la funcionalidad de las tareas, etc.

La anterior descripción da lugar a una estructura cíclica donde la información obtenida en el análisis de actuación será fundamental para una nueva puesta en práctica del análisis didáctico.

En las tres siguientes sub-secciones, se analizarán brevemente las tres primeras etapas del análisis didáctico, es decir: el análisis de contenidos, el análisis cognitivo y el análisis de instrucción.

2.4.1 El análisis de los contenidos matemáticos

El análisis de los contenidos matemáticos tiene como finalidad analizar, describir y establecer los diferentes significados de las nociones matemáticas involucradas en la unidad didáctica.

El análisis del contenido matemático se plantea en torno a tres organizadores de currículo: los sistemas de representación, los sentidos y los modos de uso y la estructura conceptual.

Los sistemas de representación consideran las diferentes maneras en las que se puede representar el contenido y sus relaciones con otros conceptos y procedimientos. Los sentidos, considera los contextos y modos de uso, incluyendo los fenómenos y las situaciones, que pueden dar sentido al contenido considerado. Finalmente, la estructura conceptual considera las relaciones de los conceptos y procedimientos implicados en el contenido estudiado, atendiendo tanto a la estructura matemática de la que forman parte, como a la que configuran tales conceptos y procedimientos.

El análisis comienza por delimitar los focos de contenido (agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones) en una revisión del tema en documentos curriculares.

El punto de partida de análisis de contenido es la revisión del tema en los documentos curriculares, con el objetivo de delimitar focos de contenido, que consisten en agrupaciones específicas de conceptos, procedimientos y relaciones, que adquieren importancia especial pues expresan, organizan y resumen agrupamientos coherentes de los contenidos. Esta información puede complementarse con otros documentos que abordan el análisis de las matemáticas escolares.

En el capítulo correspondiente al análisis metodológico, se analizarán con más detalle algunos de los temas anteriores, como por ejemplo, los sistemas de representación y el análisis fenomenológico.

2.4.2 El análisis cognitivo

El análisis cognitivo permite al profesor llevar a cabo una descripción y un análisis detallados de la problemática del aprendizaje de un tema específico de matemáticas desde un punto de vista curricular y funcional (Rico, 1997).

El análisis cognitivo se estructura en torno a lo que el profesor espera que aprendan los escolares, a lo que puede interferir en ese aprendizaje, y a lo que les permite a los escolares aprender y al profesor observar si se produce ese aprendizaje de manera efectiva. Estas tres herramientas delimitan los tres organizadores del currículo que estructuran y organizan el análisis cognitivo. Aunque cada uno de estos organizadores aporta una herramienta de análisis relacionada con el aprendizaje escolar, no son los únicos aspectos que podrían considerarse. Estos organizadores son:

- Las expectativas de aprendizaje, que delimitan y organizan lo que el profesor espera que los escolares aprendan según diferentes niveles;
- el análisis de limitaciones de aprendizaje, que se centran en los posibles errores y dificultades que pueden surgir en el proceso de aprendizaje; y
- las oportunidades de aprendizaje que el profesor brinda a sus escolares.

La síntesis que resulta de este análisis, muestra una planificación del aprendizaje que, partiendo de la información del análisis de contenido, toma en consideración esos tres organizadores y permite afrontar el diseño y selección de tareas.

2.4.3 El análisis de instrucción

El análisis de instrucción se centra en el diseño, selección y secuenciación de las tareas que conformarán la unidad didáctica que se está planificando. También recoge aspectos relativos a la gestión del aula y al empleo de materiales y recursos.

El resultado del análisis de instrucción es, por lo tanto, el diseño y la justificación del diseño y secuenciación de una unidad didáctica sobre un tema concreto de matemáticas. Hay una relación directa con el análisis cognitivo ya que la selección de unas expectativas de aprendizaje concretas marca la orientación de las tareas que habrá de poner en juego el profesor. También hay una relación recíproca pues al mismo tiempo, el análisis de una tarea específica puede ampliar o enriquecer las expectativas planteadas.

Las tareas matemáticas son elementos centrales en ambos análisis – cognitivo y de instrucción – y constituyen el eje organizador del segundo. En ocasiones, el simple hecho de resolver una tarea, nos da información sobre su idoneidad para el aprendizaje de las matemáticas, mientras que en otros casos, es necesario profundizar más las actuaciones que promueve, la diversidad de modos de solución o el nivel de complejidad. Una simple modificación del enunciado puede hacer que satisfaga o no los requerimientos o las finalidades que persigue el profesor y lo importante, es disponer de criterios para llevar a cabo y justificar tales modificaciones.

El análisis de instrucción se articula en torno a diferentes componentes que resultan fundamentales en el proceso de planificación. Algunas de ellas se pueden identificar como variables singulares de tarea; otras, como variables de conjunto de tareas organizadas.

Dichas componentes dan respuesta a diferentes facetas en el proceso de diseño de una unidad, por ejemplo:

- la adecuación de las tareas a los contenidos y las expectativas;
- el papel de la resolución de problemas;
- el empleo de materiales y recursos;
- la secuenciación de las tareas y las sesiones;
- la consideración de la atención a la diversidad desde las matemáticas;
- la organización de la gestión del aula; o
- la propuesta de evaluación de los aprendizajes.

Algunas de estas facetas las volveremos a ver en detalle en el capítulo correspondiente a la metodología del trabajo realizado.

3.- METODOLOGÍA

En este capítulo se describe el marco metodológico del estudio, que comienza por caracterizar el tipo de investigación realizada, que parte de su comparación con una experiencia anterior, que inspira parcialmente este trabajo. Se expone el diseño de la investigación, que incluye la selección de la muestra, el diseño del trabajo de campo, la descripción del instrumento utilizado para recolectar información, la selección y organización de los datos, junto con el análisis de las producciones de los futuros profesores. En lo que refiere a esto último, se fundamentan con detalle las categorías utilizadas para el análisis de las producciones junto con las transformaciones sucesivas que éstas han experimentado durante el análisis de los resultados obtenidos.

3.1.- Tipo de estudio

Esta investigación es un estudio exploratorio, ya que corresponde a un primer estudio sistemático relacionado con la invención de problemas por parte de futuros profesores de Enseñanza Secundaria. Tiene como antecedente una experiencia anterior – desarrollada en la Universidad de Colima, México (Martínez-Luaces, 2013a), en el año 2013 – si bien la misma consistió en trabajar con futuros profesores en un mini-curso de diez horas, luego del cual se les suministró a los participantes una encuesta de satisfacción. En esa oportunidad no se realizó un análisis sistemático de las producciones de los futuros profesores participantes, lo que marca una diferencia sustancial con el trabajo que se hace en este TFM, que consideramos como una primera investigación en el tema.

De acuerdo con Hernández, Fernández, y Baptista (1991), los estudios exploratorios se llevan a cabo para examinar un problema de investigación – que puede ser desconocido o que ha sido poco estudiado – con el objetivo de familiarizarse con el mismo.

Dankhe (1986) menciona que los estudios exploratorios en pocas ocasiones constituyen un fin en sí mismos y, generalmente, determinan tendencias y relaciones potenciales entre variables, estableciendo una guía de ideas para una posterior investigación más sistemática y completa.

Volviendo a lo expresado por Hernández, Fernández, y Baptista (1991) en el sentido que los estudios exploratorios que se llevan a cabo para examinar un problema de investigación desconocido o poco estudiado, esa es la situación con respecto al problema elegido. En efecto, son escasas las investigaciones que abordan al mismo tiempo los problemas inversos y el modelado matemático, como se ha mencionado anteriormente en la revisión de antecedentes en el Capítulo 2. Dos excepciones a lo antes mencionado son el trabajo de Liu, presentado en ICTMA 10, (Liu, 2003) y el artículo publicado en *Mathematics Education Research Journal* por Yoon, Dreyfus y Thomas (2010). En el primero, el autor comenta que si los alumnos sólo se enfrentan a problemas directos, no estarán bien preparados para los problemas inversos, luego de lo cual se muestra que los mismos pueden ser introducidos en cursos de modelado matemático y aplicaciones. En el segundo trabajo, los autores proponen a los alumnos un circuito de senderismo, donde se grafica el gradiente del camino versus la distancia recorrida (es decir, se les provee de la función derivada) y se les pide el gráfico de altura frente a distancia recorrida (la anti-derivada), problema inverso al que no fueron expuestos previamente. En los dos casos se trabajan problemas inversos, que tienen conexión con los problemas del mundo real, pero cabe acotar que en ambos casos se trabaja con alumnos, no con futuros profesores. Por otra parte, en dichas investigaciones se proveyó el modelo a los estudiantes, por lo que no se pidió su construcción y menos aún que inventen problemas vinculados a las situaciones analizadas.

En el caso de nuestro propio trabajo preliminar en Colima, sí se trabajó con profesores en formación (Martínez-Luaces, 2013a), pero esa experiencia no fue planteada originalmente como una investigación y no se desarrolló un instrumento para analizar las producciones de los futuros docentes. En virtud de lo anterior, se puede decir que la metodología propuesta en esta oportunidad guarda una cierta relación con lo hecho en la Universidad de Colima, pero se diferencia claramente en cuanto al diseño, recolección y tratamiento de datos.

También consideramos que esta investigación corresponde a un estudio descriptivo ya que busca describir las producciones de los futuros profesores en la reformulación de un problema de modelado presentado en forma directa, al cual deberán replantear como problema inverso.

Por último, el estudio pretende describir y caracterizar en términos cualitativos y porcentuales las producciones de los futuros profesores frente a la tarea de inventar problemas inversos de modelado, a partir de un problema directo que les fuera proporcionado previamente. Por otra parte, dado que se trata de futuros docentes, la idea es que ese propósito sea parte de un enriquecimiento de tareas destinadas a alumnos de Enseñanza Secundaria. Se trata también de analizar sus respuestas en términos de la comparación que ellos mismos realizan de ambos problemas, acerca de su significatividad, autenticidad, elementos que componen la tarea y variables de tarea que utilizan.

El análisis de las producciones de los futuros docentes, se analiza en las últimas secciones del capítulo. En primer lugar, la misma se realiza siguiendo el método de análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013). El análisis de contenido es desde un punto de vista metodológico un procedimiento riguroso, gobernado por reglas sistemáticas para el examen y verificación de contenidos de datos escritos (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563). Esta herramienta se describirá brevemente en la sub-sección 3.4.1 de este capítulo.

Por otra parte, el análisis de contenido puede ser de utilidad, pero resulta mucho más eficaz si se complementa con el análisis de las tareas, por lo que también abordaremos éste último, lo que tendrá lugar en la sub-sección 3.4.2 de este mismo capítulo.

Finalmente, teniendo en cuenta todo lo anterior, se expondrá cómo quedó la versión final del instrumento utilizado en el análisis de las producciones de los futuros profesores.

3.2.- Participantes del estudio

Considerando las características de la investigación, se requería trabajar con uno o más grupos de futuros profesores de matemáticas para Enseñanza Secundaria. Teniendo en cuenta las opciones disponibles, se optó por trabajar con los estudiantes de los Grupos A y B de la asignatura Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas en Secundaria, en el Máster en Profesorado de Enseñanza Secundaria.

En el año académico 2016-2017 en la Universidad de Granada, el Grupo A estaba constituido por 33 alumnos, el Grupo B lo formaban 41 alumnos, con asistencia regular a clase. El trabajo de campo contó con la colaboración de los profesores titulares Luis Rico, Grupo A, y Antonio Moreno, Grupo B.

3.3.- Instrumento y protocolo de aplicación

Para la parte experimental de este estudio se trabajó con los participantes en dos sesiones de trabajo: una experiencia previa con un primer problema (el problema de la piscina) y una experiencia final con un problema distinto (problema de la oveja).

3.3.1 Experiencia previa: Problema de la piscina

Los profesores en formación de los dos grupos mencionados, trabajaron en una primera clase sobre un problema de tiempo de llenado de una piscina, el cual ya había sido propuesto en Colima (Martinez-Luaces, 2013a) y también ha sido recogido en dos libros sobre problemas inversos de modelado (Martinez-Luaces, 2012, 2016b).

En la versión original del problema se describe una piscina rectangular, de 40 metros de largo por 20 metros de ancho, cuya profundidad varía linealmente desde 1 metro (en el sector destinado a los niños) hasta 3 metros (en el sector para los adultos). En el problema directo se solicita el volumen de agua en la piscina como función de su altura, por ejemplo, en su extremo más profundo. Los detalles de la formulación de este primer problema pueden apreciarse en el anexo, al final de este trabajo.

Un problema más interesante y más vinculado a las situaciones que se pueden presentar en la vida real, sería tratar de determinar la altura del agua en la piscina como función del tiempo de llenado, bajo la suposición de que la piscina se está llenando a razón de 0.8 metros cúbicos por minuto.

Este problema inverso de pre-Cálculo es mucho más interesante y aplicable, ya que permite saber cuánto tiempo se necesitaría para lograr un nivel deseado de agua en la piscina, en la parte más profunda de la misma.

El problema anterior permite varias reformulaciones posibles – no todas inversas – por ejemplo, se puede cambiar la geometría de la piscina, o agregar un grupo de personas que se bañan en la piscina, entre otras opciones.

En la primera sesión de dicho trabajo de campo (día 9 de febrero de 2017), se propuso el problema antes mencionado – en forma de problema directo – y se pidió a los futuros profesores que lo reformularan como parte de una propuesta de enriquecimiento de tareas destinadas a alumnos de Enseñanza Secundaria.

Como parte de la tarea, se les suministró una planilla para que hicieran la valoración de los enunciados de los problemas propuestos. Copia de la planilla suministrada a los futuros profesores también puede verse en el anexo.

Las características contempladas en dicha planilla y los descriptores utilizados serán objeto de análisis en este mismo capítulo, en secciones posteriores.

Cabe mencionar que en el anexo, al final de este trabajo, se puede ver la planificación diseñada por los profesores Rico y Moreno para la sesión de clase mencionada, que constituye la primera parte del trabajo de campo de esta investigación.

Las producciones de los futuros docentes de ambos grupos se sometieron a un primer análisis, como puede verse en el archivo anexo.

De todas las reformulaciones presentadas se seleccionaron tres que habían sido planteadas en forma de problemas inversos y eran particularmente interesantes, de las cuales una de ellas pertenece a uno de los profesores en formación del grupo A y las otras dos son de integrantes del grupo B (en el anexo se pueden apreciar los detalles de las reformulaciones seleccionadas).

Luego, en una segunda sesión de trabajo, mostrando estas reformulaciones, se les dio una breve explicación sobre problemas directos y problemas inversos. Finalmente, se propuso a los docentes en formación un nuevo problema directo (el problema de la oveja), que se comentará en la próxima sub-sección.

3.3.2 Experiencia final: Problema de la oveja

En una segunda clase con los profesores en formación, se propuso un nuevo problema directo (el problema de la oveja), cuya formulación se muestra en la Figura 1. A diferencia de lo sucedido con el problema de la piscina, en este caso se pidió a los participantes que reformularan el problema de manera inversa.

Cabe mencionar que este problema también fue propuesto en Colima (Martinez-Luaces, 2013a) y además fue recogido en los dos libros antes mencionados (Martinez-Luaces, 2012, 2016b).

El problema directo consiste en obtener f para uno o más valores de r y hay cuatro situaciones diferentes que pueden presentarse (ver Figura 3.1):

- Cuando $r \in [0\,, 1/2)$, la oveja no alcanza los bordes laterales del terreno.
- Si $r \in [\frac{1}{2}\,,1)$, la oveja puede alcanzar los bordes laterales del terreno, pero no el borde superior.

- En el caso que $r \in [1, \frac{\sqrt{5}}{2})$, la oveja puede alcanzar el borde superior del terreno pero no el terreno completo.
- Cuando $r \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$, la oveja puede pastar en todo el terreno.

PROBLEMA: área accesible para una oveja en un campo cuadrado.

Una oveja se encuentra pastando en un terreno cuadrado, cuyo lado es L. La oveja está atada en el punto $(L/2, 0)$, es decir, en la mitad del lado sur del terreno, mediante una cuerda de longitud R, como se esquematiza en la Figura 1:

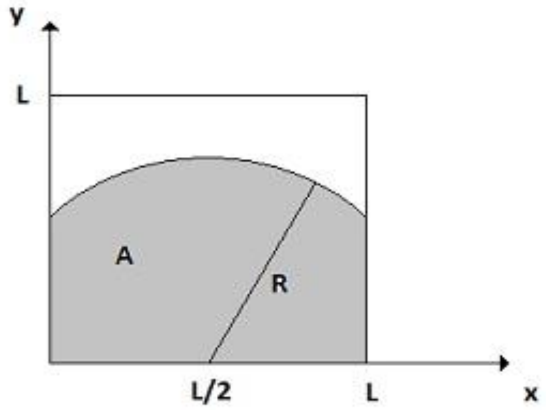


Figura 1. Parte del terreno que resulta accesible a la oveja.

En esta figura, A representa el área del sector en el cual la oveja puede pastar. Sea $r = \frac{R}{L}$ el cociente entre la longitud de la cuerda y el lado del terreno y sea $f = \frac{A}{L^2}$ la fracción del área total que es accesible a la oveja. Obsérvese que tanto f como r son razones, es decir, números adimensionales ya que numerador y denominador tienen la misma unidad.

Un posible problema directo consiste en solicitar a los estudiantes que obtengan f para uno o más valores de r, por ejemplo ¿qué fracción del área total es accesible a la oveja si la cuerda mide las tres cuartas partes de la longitud del lado del terreno?

Figura 3.1. Problema de la oveja enunciado en forma directa.

Este problema puede fácilmente convertirse en un problema inverso, para ello basta analizar lo siguiente: resulta obvio observar que para cada valor de $r \geq 0$ existe un único valor de A, pero es bastante más interesante hacer preguntas sobre la misma situación, pero planteadas en forma inversa. Concretamente, esto es lo que se pidió a los futuros profesores en primer lugar y además de plantear su reformulación, se les solicitó que analizaran comparativamente las tareas, como se había hecho anteriormente en el problema de la piscina.

El guión de esta segunda clase, que tuvo lugar el día 15 de febrero de 2017, puede verse en la Figura 3.2.

MÁSTER DE PROFESORADO DE SECUNDARIA, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. CURSO 2016-2017.
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.
ESTUDIO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: ENRIQUECIMIENTO Y COMPLEJIDAD.

Guión sesión 15 de febrero de 2017.

1. Presentación de las problemas inversos utilizando algunas de las reformulaciones (inversas) planteadas por los estudiantes y comparar con el problema original (directo) que le dio origen.(Seguir presentación del *Archivo Resumen problemas piscina inversos*)
2. Entrega de un nuevo problema original (problema de la oveja) y observar que está planteado en forma directa (hallar área accesible para la oveja en función de la longitud de la cuerda).
3. Solicitar como trabajo individual para casa para entregar mañana la reformulaciónde un problema inversode ese enunciado y entregar una plantilla para el análisis comparativo entre el problema original (directo) y la reformulación (inversa).

Horario de aplicación: 16:00h a 16:45h (Grupo A) o bien, con autorización de A. Moreno de 17:45h a 16:30h.

Material necesario:

75 ejemplares del problema de la oveja en versión directa
75 ejemplares de la plantilla para la comparación de los dos problemas

Figura 3.2. Guión de la segunda clase sobre reformulación de problemas.

3.3.3 Datos recogidos con el problema de la oveja

Cabe realizar algunas puntualizaciones sobre el total de respuestas obtenidas entre los dos grupos. En primer lugar, no todas las respuestas recibidas correspondieron a reformulaciones inversas del problema planteado, por lo que algunas de las producciones no han sido tenidas en cuenta para este estudio.

En contraposición con lo anterior, algunos de los futuros docentes propusieron más de una reformulación, de hecho, alguno de ellos propuso hasta tres reformulaciones inversas.

Finalmente, cabe mencionar que algunos de los integrantes de los grupos trabajaron en forma individual y otros lo hicieron en parejas, por lo que no hay una respuesta por cada futuro docente, ni tampoco a cada participante corresponde necesariamente una única respuesta.

Por estos motivos, las producciones han sido codificadas como respuestas (R1, R2, etc.), en lugar de codificarlas por autor. Originalmente dichas producciones habían sido codificadas como A1, A2,…, B1, B2,… según el grupo considerado (A o B), seguido de un número que representa a cada uno de los docentes en formación.

3.4.- Método de análisis

Como ya se mencionó, en este estudio se propusieron – al menos en principio – dos tareas semi-estructuradas de invención de problemas, de acuerdo a una de las clasificaciones antes mencionadas en el marco teórico (Stoyanova, 1998).

En la primera de ellas se planteó un problema directo de modelado, vinculado al llenado de una piscina y se propuso a los futuros profesores que elaboraran una reformulación destinada a enriquecer la tarea. Esa primera experiencia con los estudiantes del Máster en Profesorado de Matemáticas sirvió a tres propósitos distintos: trabajar con los futuros profesores en reformulación de problemas, realizar un análisis comparativo de las tareas antes y después de la reformulación y en proveer ejemplos de reformulaciones inversas.

En efecto, varias de las reformulaciones fueron seleccionadas para introducir a los futuros profesores los problemas inversos de modelado.

Para el diseño de este instrumento se consideró que el contexto debía ser de interés, familiar para los estudiantes y que debía motivar a plantear problemas inversos, que permitieran el enriquecimiento de las tareas a proponer para estudiantes de Enseñanza Secundaria.

Además, como ya se mencionó, las dos sesiones fueron diseñadas de modo tal que los futuros profesores no solamente trabajaran en la invención de problemas, sino que también hicieran el análisis comparativo de las tareas propuestas, antes y después de la reformulación.

El análisis de los datos se realizó siguiendo el método de análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013), complementado con el análisis de las tareas. Ambos componen las dos sub-secciones que abordaremos a continuación.

3.4.1 El análisis de contenido

El análisis de contenido es un procedimiento riguroso, gobernado por reglas sistemáticas para el examen y verificación de contenidos de datos escritos (Cohen, Manion y Morrison, 2011, p. 563). Esta herramienta se ha utilizado "en educación matemática como método para establecer y estudiar la diversidad de significados escolares de los conceptos y procedimientos de las matemáticas que aparecen en un texto" (Rico y Fernández-Cano, 2013, p. 11).

Las etapas para realizar un análisis de contenido (Rico y Fernández-Cano, 2013) aplicadas a las producciones de los futuros profesores son:

- Definir las categorías.
- Inducir el sistema de categorías sobre las unidades de análisis, incluyendo cada unidad de análisis en una categoría.
- Relacionar las categorías entre sí.
- Relacionar el proceso de análisis del contenido con el objetivo del trabajo.

En muchos trabajos en Educación Matemática, las categorías consideradas para analizar el contenido son (Rico y Fernández-Cano, 2013):

- Conceptual, que considera el momento histórico y el contexto del comunicador.
- Formal y estructural, que considera definiciones, procedimientos y estructura formal de los contenidos estudiados.

- Representacional, que comprende las expresiones simbólicas y gráficas y los sistemas de signos empleados.
- Fenomenológica, que tiene en cuenta los fenómenos que dan origen a los conceptos, los contextos en los que se utilizan, las situaciones en las que se presentan y los términos relacionados que dotan de sentido al contenido.

En nuestro caso, las tres últimas son particularmente importantes.

3.4.2 El análisis de tareas

El análisis de tareas requiere una mención especial en este trabajo, ya que el análisis de contenido puede ser de utilidad, pero resulta más eficaz cuando se completa con el análisis de las tareas. Por lo tanto, conviene hacer una elección de indicadores para el análisis de tareas para poder completar el estudio de las producciones de los profesores en formación. Para ello, son especialmente útiles las pautas que pueden encontrarse en Moreno y Ramírez (2016).

Para el análisis de las producciones de los futuros docentes, las variables seleccionadas en una primera aproximación, fueron las siguientes:

- Contenido matemático: tiene que ver con la evolución histórica de las diversas ramas de la matemática, la cual se ha dividido en una serie de materias con distinto objeto y métodos comunes. Geometría, Álgebra, Trigonometría, Cálculo y Probabilidad son algunas que están presentes en el currículo de matemáticas de Secundaria y se identifican como bloques de contenidos, que contribuyen a delimitar su alcance.
- Situación: se refiere al contexto que se propone para el problema reformulado. Para la clasificación correspondiente, se consideraron las situaciones propuestas por PISA (OCDE, 2013). Estas situaciones son personales, cuando están relacionadas con actividades diarias de los estudiantes; educativas o laborales, si se pueden encontrar en una situación educativa o en un puesto de trabajo; públicas, si aparece en un medio de comunicación o en una situación comunitaria; y científicas, si es una situación abstracta relacionada con la actividad científico-tecnológica.

- Expectativas de aprendizaje: se escogen para los escolares de un nivel educativo concreto sobre un determinado tema matemático y se intenta persistir en su logro. Esas expectativas se pueden estructurar en varios niveles de complejidad y la característica común a todas ellas es que dicho logro se acredita mediante la respuesta de los escolares a las tareas que el profesor demanda.
- Limitaciones: consiste en un estudio de errores y dificultades que pueden limitar el proceso de aprendizaje del tema que se está planificando. Esas dificultades están asociadas a las expectativas que los escolares deben lograr y se hacen visibles en forma de errores o de concepciones parciales, cuando ellos ponen en juego su conocimiento del tema para afrontar una cierta demanda cognitiva.
- Oportunidades de aprendizaje: este organizador se refiere al conjunto de circunstancias y experiencias, orientaciones, demandas y retos que acompañan y estimulan los aprendizajes escolares, bien porque los regulan, los condicionan, los incentivan o los promueven. Por lo tanto *condiciones, demandas específicas y desafíos o retos* son los componentes de este organizador que se van a considerar.
- Organización del trabajo en el aula: aquí en principio se consideraron distintas formas de organizar y gestionar las clases para conseguir interacciones y procesos de comunicación acordes con las expectativas de aprendizaje concebidas.
- Complejidad: Permite describir la dificultad de la tarea. Se consideran tres grados de dificultad (Moreno y Ramírez, 2016), en orden creciente. Reproducción, que engloba a ejercicios que exigen repetición de conocimientos descritos; conexión, que agrupa tareas que requieren relacionar distintas representaciones de una misma situación o enlazar diferentes aspectos para alcanzar la solución; y reflexión, que son tareas que implican un mayor número de elementos y exigen generalizaciones, explicaciones, razonamientos más complejos y justificación de resultados.
- Materiales y recursos: se refiere a la diversidad de materiales de tipo manipulativo y los recursos que se necesitan para la ejecución de la tarea. Por lo general, en problemas como los propuestos los recursos se reducen al lápiz

y papel, pero se puede también requerir del uso de programas de representación gráfica, calculadoras o programas de cálculo simbólico. Es menos común, pero también pueden sugerirse materiales manipulativos que permitan una representación del problema.

- Observaciones: Dejamos un espacio para cada tarea propuesta por los futuros docentes, por si fuese necesario hacer alguna observación.

A medida que se fue avanzando en el análisis de las producciones de los profesores en formación, algunas de las variables anteriores se fueron desglosando para atender a la riqueza de las respuestas, resultando en definitiva una planilla con 21 columnas, que constituyó el instrumento utilizado para el análisis de dichas producciones. Este instrumento en su versión final – al menos en lo que respecta al TFM – se detalla en la siguiente sección de este capítulo.

3.5 El instrumento de análisis de las producciones de los futuros profesores

El instrumento utilizado para en análisis de las producciones de los futuros docentes, como ya se comentó, resultó ser una planilla con un total de 21 columnas, que se describen brevemente a continuación:

- En una primera columna se ubicaron las respuestas – codificadas como R1, R2, etc. – a las que se agregó entre paréntesis un código que indicaba el grupo y número de alumno, por ejemplo A1, A2,…, B1, B2, etc. En algunos casos un mismo alumno propuso dos y hasta tres reformulaciones del problema y en ese caso se agregó una letra minúscula (por ejemplo, la respuesta R1 fue propuesta por el alumno A14a).
- Las columnas 2 y 3 – bajo el título común de “enunciado” – corresponden a tipo de enunciado (columna 2) y cambio (columna 3). En la primera de ellas se establece el tipo de enunciado (por ejemplo: función inversa, problema secuencial, etc.) y en la segunda se especifica qué tipo de cambio propone (por ejemplo: cambio en la geometría del terreno, en la posición de la estaca, etc.).
- Las columnas 4, 5, 6 y 7 – todas ellas bajo el título común de “análisis de los significados” – corresponden al contenido matemático (columna 4), sistemas

de representación (columna 5), sentido y modos de uso (columna 6) y situación (columna 7). En lo que refiere a contenido matemático son respuestas comunes: área y región, integrales, etc. Los sistemas de representación ya fueron comentados en la sub-sección 3.4.1. En lo referido a sentidos y modos de uso, lo más habitual es "espacio y forma", aunque también aparecen otras respuestas en menor proporción. Finalmente, en lo que tiene que ver con la situación, la respuesta más habitual es "educativa o laboral", pero no la única que se obtuvo. Todo lo anterior se analizará con más detalle en el capítulo de resultados.

- El análisis cognitivo abarca las siguientes cinco columnas de la planilla: contenido cognitivo (columna 8), expectativas de aprendizaje (columna 9), limitaciones (columna 10) y oportunidades de aprendizaje, que se dividió en dos columnas denominadas "reto" (columna 11) y "comentarios" (columna 12). En la columna correspondiente a contenido cognitivo se incluyen expresiones de los futuros profesores, enunciadas generalmente comenzando por un verbo, por ejemplo: "controlar conceptos" o "calcular áreas utilizando integrales", entre otras opciones. Las expectativas de aprendizaje y las limitaciones ya fueron comentadas anteriormente en la sub-sección 3.4.2 y no sufrieron mayores modificaciones. Oportunidades de aprendizaje se dividió en dos columnas ya que muchos de los futuros profesores hicieron alguna mención al reto (reto interesante, mayor reto, etc.) y en muchos casos agregaron comentarios adicionales, de alguna manera justificando su respuesta. Respuestas largas e interesantes con respecto a las oportunidades de aprendizaje justificaron dividir la columna, para extraer su riqueza y no perder información relevante.
- El análisis de instrucción, finalmente se dividió en ocho columnas (de la 13 a la 20) para tratar de no perder información aportada por los profesores en formación. La primera de ellas, fue dedicada a "lenguaje" (columna 13) y en ella los futuros docentes opinaron sobre la claridad, simplicidad, etc. del lenguaje utilizado en el enunciado del problema. En la siguiente, denominada "autenticidad" (columna 14), opinaron sobre si la situación propuesta era o no una situación real. La tercera de las columnas, "datos" (columna 15), permitió recoger comentarios con respecto a los datos proporcionados, por ejemplo, si

eran suficientes o no. En la columna “finalidad” (columna 16) los estudiantes se expresaron sobre lo que entendían que podría ser la finalidad de la tarea, por ejemplo: conectar ideas. La columna siguiente, “ubicación y agrupamiento” (columna 17), podría haberse dividido en dos, pero por lo general las respuestas eran muy escuetas (por ejemplo: “Grupo. En clase”), por lo que se mantuvieron como una sola columna. La columna 18 “temporalización” también dio lugar a respuestas por lo general breves, como “una sesión”, o “media hora”, entre otras. La columna 19 “complejidad”, ya fue analizada previamente y lo mismo ocurre con la columna 20, “materiales y recursos”.

- La última columna, igual que en las planillas anteriores, se destinó a observaciones. Por ejemplo, hubo algún caso en que se suministró la reformulación del problema, pero no el análisis comparativo correspondiente.

Este instrumento, obviamente es susceptible de nuevas mejoras y adaptaciones y probablemente sea modificado en algún trabajo posterior al TFM, pero en su versión actual permitió el análisis de las producciones de los profesores en formación, que se estudiará in extenso en el próximo capítulo.

4.- RESULTADOS

En este capítulo se analizan los resultados correspondientes a las reformulaciones del problema de la oveja, propuestas por los futuros docentes, que actualmente cursan el Máster de Profesorado de Secundaria en la Universidad de Granada.
Para el análisis antedicho, en la primera sección se plantea una clasificación en nueve grupos – en algunos casos con sus correspondientes sub-grupos – de todas las reformulaciones propuestas. Luego, en la segunda sección se analizan posibles resoluciones de dichos problemas, para lo cual se tuvieron en cuenta las indicaciones, palabras claves, etc., en las producciones de los futuros profesores, particularmente en su análisis de la tarea reformulada. Finalmente, en las dos últimas secciones del capítulo se presentan resultados en cuanto al análisis cognitivo y al análisis de instrucción, de acuerdo a los comentarios que los propios profesores en formación incluyeron en la planilla adjunta al problema.

4.1.- Las reformulaciones propuestas

Identificamos varias posibles reformulaciones inversas de este problema propuestas por los futuros profesores. Dichas reformulaciones pueden clasificarse como sigue:

Grupo 1. Las reformulaciones basadas en la función inversa

Una primera reformulación posible consiste en invertir la función involucrada en el problema directo, lo que implicaría obtener uno o más valores de r para uno o más valores de f, o alguna versión equivalente en la que pueden o no agregarse otros cambios. En función de los cambios agregados – además de la reformulación como problema inverso – se pueden encontrar cuatro variantes, de las que corresponde destacar las siguientes:

- reformulación basada en función inversa, sin otras modificaciones,
- función inversa y cambio de forma geométrica del terreno,
- función inversa, cambio de geometría y posición de la estaca,
- función inversa y terreno con obstáculos.

A continuación se muestran y analizan ejemplos de cada una de estas variantes proporcionadas por los alumnos en sus producciones.

Subgrupo 1a. Reformulaciones basadas en la función inversa, sin otras modificaciones

Un total de 15 profesores en formación han propuesto una inversión de la función original $f(r)$, en distintas formas, por ejemplo, en (R8) se pide "hallar r (relación entre la longitud de la cuerda y la longitud del terreno) tal que $f = 3/4$ (es decir que la oveja pueda acceder a un área que sea $3/4$ del área total)". Otros han optado por no pedir valores concretos, como es el caso de (R32) que plantea "obtener la longitud de la cuerda R conociendo el valor de f ". Conviene observar que en este último caso (R32), no se pide la relación r sino que se solicita la obtención de R, longitud de la cuerda. Otros hacen planteos más coloquiales, como es el caso de (R23) que pide determinar "…cuánto debe medir la cuerda para que la oveja pueda acceder al 50% del terreno…". Finalmente, se pueden encontrar versiones equivalentes, pero que no están bien formuladas desde un punto de vista dimensional, como (R15) que solicita "…el cociente entre la longitud de la cuerda y el lado del terreno, es decir r, sabiendo que A mide las nueve cuartas partes del lado del terreno…". Evidentemente al comparar una longitud con un área el resultado dependerá de las unidades de medida. En definitiva se trata de diversas variantes del problema clásico consistente en invertir la función presentada en el problema directo.

Subgrupo1b. Función inversa y cambio de geometría del terreno

Tres de los futuros docentes han propuesto invertir la función $f(r)$, pero agregando además un cambio en la geometría del terreno. Un ejemplo de esta variante se observa en la (R1) en la que el terreno adquiere una forma trapezoidal, como puede verse en la Figura 4.1.

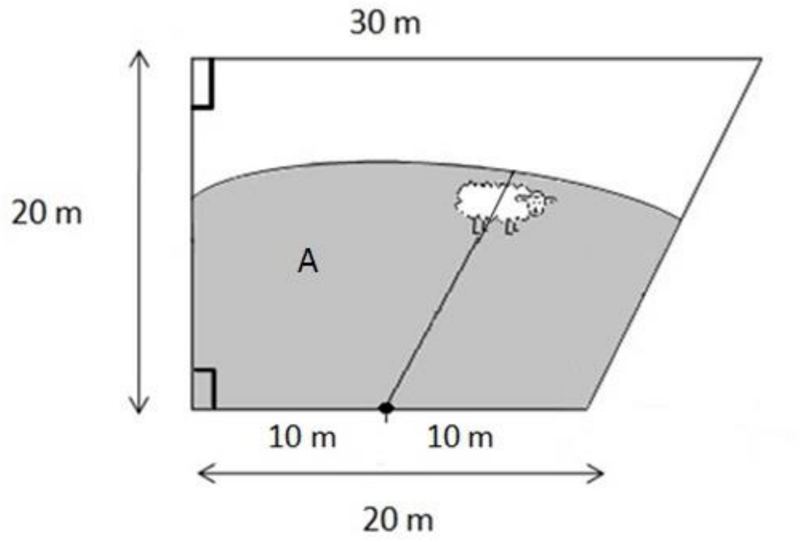


Figura 4.1. Problema con terreno trapezoidal.

Para este terreno modificado, el futuro profesor propone que: "Si el área del recinto A es $300\ m^2$, ¿cuál es la longitud de la cuerda a la que está atada la oveja?". Como se puede ver, a la inversión de la función se agrega un cambio de geometría del terreno, lo que le confiere un poco más de dificultad a la resolución del problema.

Subgrupo1c. Función inversa, cambio de geometría y posición de la estaca

Dos de los profesores en formación proponen una inversión de la función $f(r)$, cambiando la geometría del terreno y también la posición de la estaca. Por ejemplo, en (R26) se propone un terreno rectangular con la oveja atada en uno de sus vértices, como se aprecia en la Figura 4.2.

En concreto, el futuro docente plantea: "Si $f = 0.6$ ¿qué longitud tiene la cuerda?". Otro planteo con cambio de geometría y de posición de estaca aparece en (R16), que propone un terreno en forma de triángulo equilátero de lado $L/3$ y la oveja atada a un vértice. En estos problemas, el cambio de geometría agrega dificultad, pero de alguna manera se compensa por el hecho de atar la oveja a un vértice, lo que facilita la resolución.

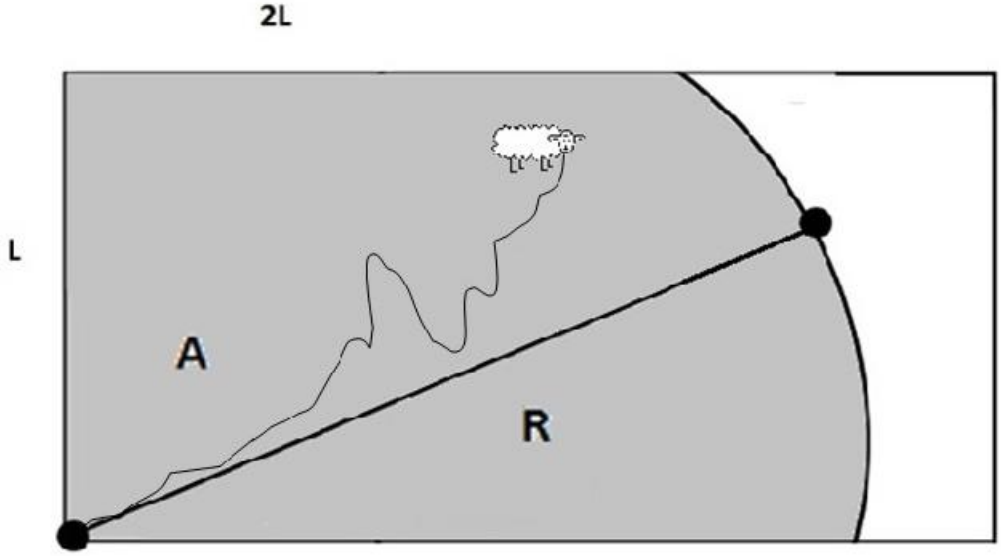


Figura 4.2. Problema con terreno rectangular y estaca en un vértice.

Subgrupo1d. Función inversa con agregado de obstáculos

Los profesores en formación han planteado tres reformulaciones inversas en las que han agregado obstáculos al posible desplazamiento de la oveja. Un ejemplo de este tipo de problemas es el que se plantea en (R7), en el que se agrega una valla como la que se ve en la Figura 4.3:

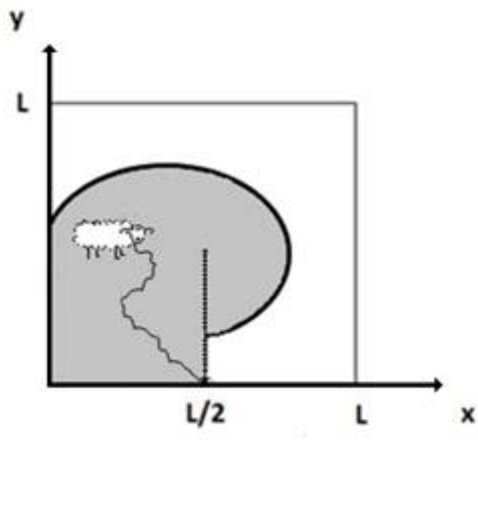


Figura 4.3. Terreno con una valla que obstaculiza a la oveja.

El problema reformulado plantea “¿Qué longitud tiene que tener la valla para que la oveja coma el 60% de lo que come en a)?”. Al respecto, cabe mencionar que la parte (a) es un problema directo en que se pide la fracción de área total para $r = 3/4$, por lo que el problema es mucho más complejo. En efecto, además de tener que resolver primero un problema directo, el obstáculo hace que la cuerda tome la forma de una poligonal formada por dos segmentos, con la consiguiente dificultad añadida.
En otras reformulaciones se agregan otros obstáculos que hacen que el área de pastura ya no sea parte de un círculo y la cuerda adopta una forma poligonal con dos o tres segmentos.

Grupo 2. El problema trivial

Algunas de las propuestas consisten en reformulaciones en las que el problema original se ha trivializado a tal punto que puede ser resuelto simplemente aplicando una fórmula o realizando manipulaciones algebraicas extremadamente simples. Se puede considerar que en esta tipología se presentan tres variantes distintas:

- problemas que se reducen a aplicar una fórmula,
- problemas que requieren hacer algún procedimiento algebraico sencillo,
- reformulación sencilla, con agregado de otras variables externas.

A continuación se analizan ejemplos de cada una de estas variantes.

Subgrupo 2a. Problemas que se reducen a aplicar una fórmula

En varias de las producciones analizadas se propone calcular la longitud mínima de la cuerda para que la oveja pueda pastar en todo el terreno, por ejemplo en (R6) se presenta la misma figura original (ver Figura 3.1) y se pide “¿Qué longitud mínima ha de tener la cuerda para que la bestia se lo coma todo? Razónalo.” Obviamente este problema se reduce a hallar la distancia entre el punto $(L/2, 0)$, que es donde está atada la oveja, y el punto (L, L), que es el punto más alejado del terreno. Esto hace que el problema original – que requería considerar diversas funciones e integrales definidas – ahora se reduce a aplicar la fórmula de distancia entre dos puntos, o eventualmente, utilizar el Teorema de Pitágoras. En cualquier caso, la resolución es inmediata.

Subgrupo 2b. Problemas que requieren algún procedimiento algebraico sencillo

En algunos casos el problema se trivializa – o al menos se facilita enormemente – ya que la resolución consiste en plantear una ecuación sencilla, de la cual se despeja la variable solicitada en la reformulación. Un ejemplo de esta variante aparece en la respuesta (R22') en la que se plantea atar la oveja en el punto Q (ver la Figura 4.4) y la pregunta es "¿qué longitud, en relación al lado del terreno, deberá tener la cuerda para que la oveja pueda acceder a $\pi/16$ veces el área del recinto?"

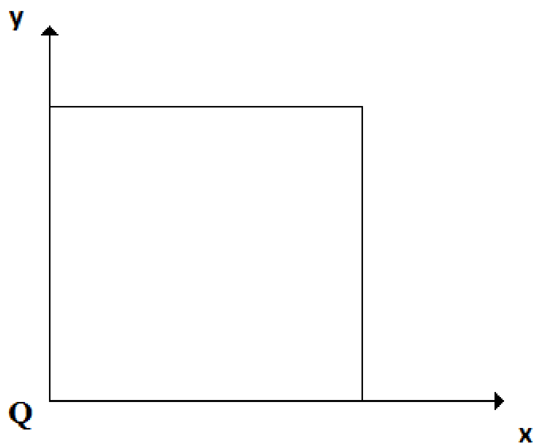


Figura 4.4. Problema de la oveja trivializado.

Para resolver el problema basta plantear que $\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{16}L^2$ de donde resulta $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{1}{2}$, por lo que todo se reduce a plantear el área de un cuarto de círculo y luego despejar la razón solicitada. Con esta reformulación, ya no es necesario plantear integrales y todo se reduce a realizar manipulaciones algebraicas muy sencillas.

Subgrupo 2c. Reformulación sencilla con agregado de otras variables

En la respuesta (R25) se agregan dos variables adicionales: el peso del metro cuadrado de pasto de $10\ cm$ de altura y el consumo diario de una oveja de $40\ kg$ de peso (dato que deberán buscar los alumnos en Internet). Se pregunta "¿cuánto ha de medir L para que el área de pasto sea suficiente a lo largo de un día según la alimentación de la oveja?"
Al no haber otra información relevante, todo parece sugerir que la oveja puede pastar en todo el terreno, por lo cual la reformulación se parece a la de la respuesta (R6) previamente analizada, pero en este caso se agregan variables adicionales (peso del pasto por metro cuadrado y consumo diario de la oveja). No deja de ser un problema trivial – como el analizado en el caso de (R6) – sólo que se requiere un poco más de elaboración para establecer la proporcionalidad entre peso y área, además de la tarea extra para los alumnos consistente en buscar un dato en Internet.

Grupo 3. Problema inverso de ubicación de estaca

En la (R24) se propone un problema que consiste en "…proporcionar como datos el área cubierta y la longitud de la cuerda, y preguntar por el punto desde el cual se fija la cuerda…". Por las condiciones de simetría del problema seguramente este problema inverso no tenga una solución única y su planteo y resolución tienen un nivel de dificultad bastante mayor a los analizados en los numerales anteriores.

Grupo 4. Problema inverso de longitud de terreno

En la (R30) se propone un terreno rectangular, de base L y altura $2L$, a lo que se agrega un cambio en la posición de la estaca, que ahora se encuentra en el punto $(L/3\ ,\ 0)$, como se puede ver en la Figura 4.5.

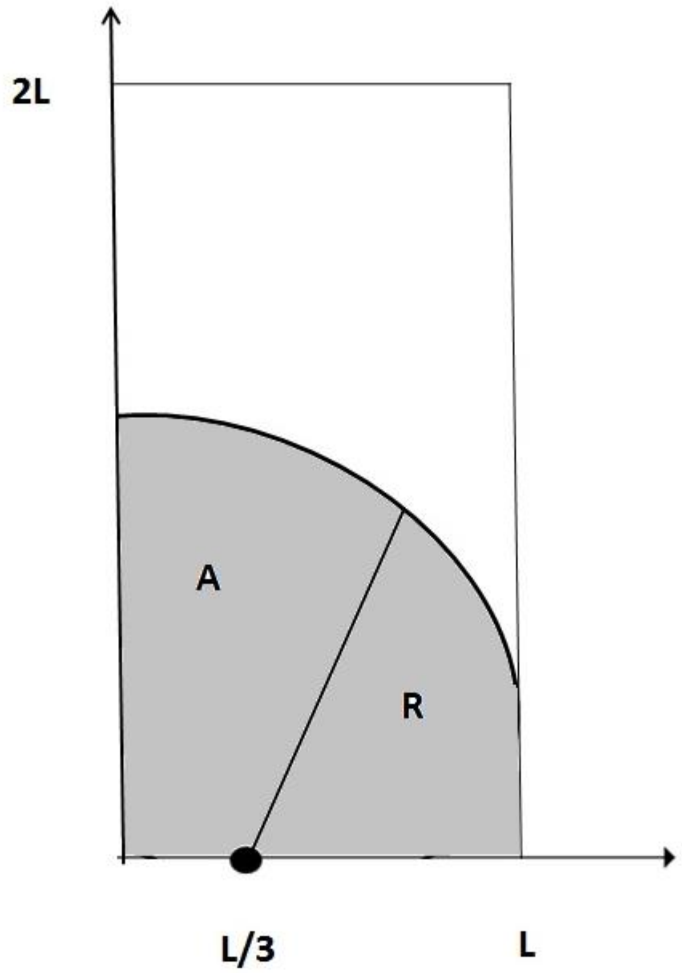


Figura 4.5. Problema con terreno rectangular y estaca en $(L/3\ ,\ 0)$.

Contrariamente a lo que parece ser en principio, no se trata de un problema de cambio de geometría y posición de estaca solamente – como los descritos en subgrupo 1.c – sino que la verdadera novedad reside en cuáles son los datos que proporciona y qué es lo que pide obtener. En efecto, el futuro docente dice que “la longitud de la cuerda es tres quintas partes del lado del terreno” y además el “área total accesible a la oveja es $400\ m^2$ “ y la pregunta es “¿cuál es el área del terreno que no resulta accesible a la oveja?”

El problema combina una primera parte formulada de manera inversa, en la que a partir del área $A = 400\ m^2$ y la relación $R = 3/5\, L$, se debería hallar el valor de L

adecuado, y luego un problema directo sencillo en el cual se resta $A = 400\ m^2$ al área del rectángulo $A_r = L \times 2L$, para obtener el área no accesible a la oveja.

En lo que respecta a la reformulación inversa, se trata de un tipo distinto de problema donde el dato relevante a obtener es la longitud de terreno.

Grupo 5. Problema de optimización

En la (R5), el futuro profesor plantea que se atan dos cabras en esquinas opuestas del terreno cuadrado, de lado L, y agrega una figura similar a la de la Figura 4.6.

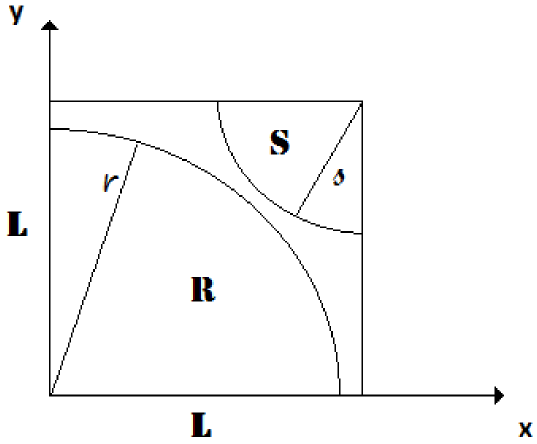


Figura 4.6. Problema de las dos cabras montesas.

En esta reformulación se plantea que se pretende “que ocupen la máxima área posible cada una, pero sin coincidir en ningún punto” y se sabe que “una de las áreas tiene que ser mayor que la otra”. Se pregunta por el tamaño de cada cuerda y cuánta área tendrá disponible cada cabra.

Se trata entonces de un problema de optimización, que depende de dos variables y que no va a tener un máximo sino un supremo que no será alcanzable para ningún par de valores de longitud de cuerda.

Grupo 6. Problema inverso secuencial

En la (R2) se plantea un problema bastante novedoso, manteniendo la geometría del terreno y la posición de la estaca, como se puede ver en la Figura 4.7.

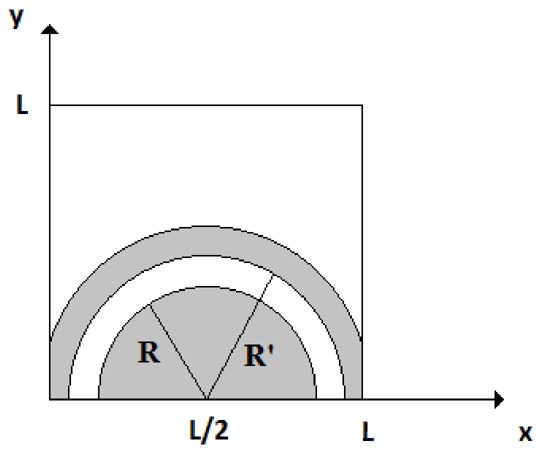


Figura 4.7. Problema inverso secuencial.

En esta reformulación se proporciona el dato correspondiente a la longitud de la cuerda $R = L/3$ y se asume que “a lo largo de un día, la oveja come toda la hierba en el área accesible” y la primera pregunta es sobre la longitud R', que deberá tener la cuerda “el día siguiente para que la oveja pueda pastar la misma cantidad de hierba”. Luego se repite la pregunta para el tercer día y para el cuarto día, para finalmente preguntar “¿Después de cuántos días la oveja no encontrará más la misma cantidad de hierba para pastar?”
Como se puede ver, se invierte el orden de las variables involucradas, se mantienen la geometría y la posición de la estaca, pero ahora el problema es de tipo secuencial.

Grupo 7. Problema incremental

En la (R38) el docente en formación no presenta ningún diagrama, por lo que aparentemente se mantienen las condiciones del problema original. Se plantea que “la oveja puede pastar una fracción $f < 1$ del terreno con una longitud de cuerda R_f “ y se pide “¿cuánto hay que alargar la cuerda para que la oveja pueda pastar un 10% más de lo que ya puede pastar?

En este caso – además de invertir la función – se trata de vincular el incremento de longitud al incremento de área, lo que le confiere un carácter distinto al que tenían otros problemas analizados anteriormente.

Grupo 8. Problema dinámico

En la (R4) se mantiene la geometría del terreno y la posición de la estaca y se agrega una segunda oveja, ambas atadas con una cuerda de longitud $R = 3/4\,L$, que están pastando en el punto P de la Figura 4.8.

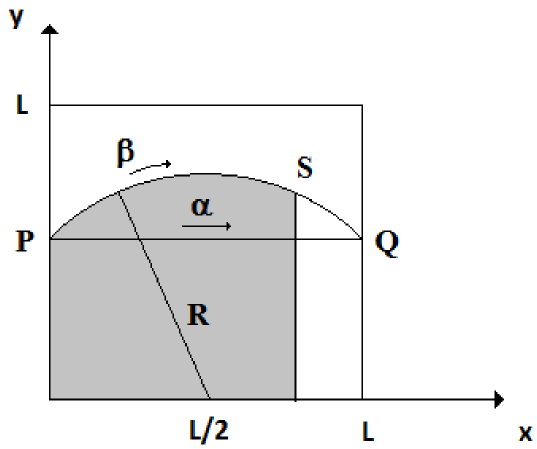


Figura 4.8. Problema dinámico con dos ovejas.

En este problema, la oveja α, corre a lo largo del segmento PQ con una cierta velocidad que se proporciona en función de L, y la oveja β, corre a lo largo del arco PSQ. Se plantean varias preguntas, siendo particularmente interesante la última – ya que se invierte la función – en la que se pide la velocidad que debe tener la oveja β para llegar al punto Q al mismo tiempo que la oveja α.

El problema puede ser considerado inverso, ya que se da el tiempo de llegada y se pide la velocidad, pero cambia totalmente el problema original que era un problema estático a diferencia del propuesto que agrega una cierta dinámica.

Grupo 9. Problema iso-superficial

En la (R3) se propone un problema iso-superficial que comienza por considerar para el primer día, una oveja atada en el punto $(L/2\,,\,0)$ con una cuerda que “mide las tres cuartas partes de la longitud del lado del terreno”. En esta reformulación se plantea que al segundo día el pastor “ata a la oveja a un palo ubicado en la esquina $(0\,,\,0)$ del terreno” y se pregunta “¿qué longitud debería tener la cuerda para que el área accesible sea equivalente a la del día anterior?” Finalmente se plantea la misma pregunta pero esta vez ubicando el palo en el centro del terreno.
Se trata de un doble problema iso-superficial donde se piden longitudes de cuerda para que las áreas de pastoreo se mantengan incambiadas.

4.2.- Posibles resoluciones de los problemas reformulados

En la sección anterior se presentaron nueve grupos de reformulaciones del problema de la oveja, algunos de los cuales tenían a su vez diversas variantes que dan lugar a varios subgrupos. En lo que sigue se intentará mostrar ejemplos de posibles resoluciones basadas en los propios comentarios de los profesores en formación, ya que no se les exigió que presentaran una resolución pero, de todos modos, en muchos casos es posible inferir cómo pensaron resolver el problema planteado.
Para el propósito antes mencionado, se seguirá el mismo orden utilizado en la clasificación de las reformulaciones, realizada en la sección 4.1.

Grupo 1. Reformulaciones basadas en la función inversa

La primera reformulación estudiada consiste en invertir la función del problema directo, lo que implica obtener uno o más valores de r para uno o más valores de f. A su vez, dentro de este primer grupo se encontraron cuatro variantes:

- reformulación basada en función inversa, sin otras modificaciones,
- función inversa y cambio de geometría del terreno,

- función inversa, cambio de geometría y posición de la estaca,
- función inversa y terreno con obstáculos.

A continuación se analizan ejemplos de cada una de estas variantes

Subgrupo1a. Reformulaciones basadas en la función inversa, sin otras modificaciones

En varias de las respuestas de los futuros profesores se ha propuesto una inversión de la función original $f(r)$. Los que propusieron este tipo de problema no dan muchas indicaciones que sugieran cómo resolverlo. Uno de los que da más explicaciones es (R34), que presenta una diagrama como el de la Figura 4.9 y además aclara que "la oveja barre un área del cuadrado de $12\,m^2$" y pregunta "¿cuál es el radio de la cuerda? Finalmente, en sus comentarios del problema propuesto, dice "Los contenidos son conocidos: área y longitud".

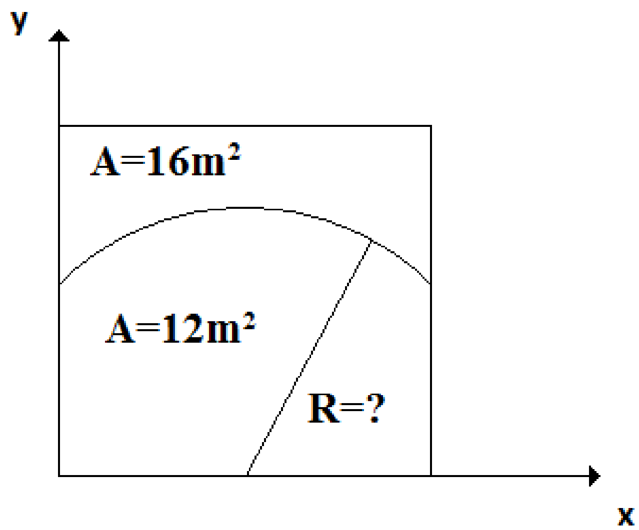


Figura 4.9. Diagrama incluido en (R34).

En función de lo que expresa verbalmente y la representación pictórica agregada, da la sensación de que la idea es observar que si el área total es de $16\,m^2$, entonces $L = 4m$ y la oveja estaría atada en el punto $(2\,,0)$ mediante una cuerda de longitud R. La ecuación de la circunferencia será entonces $(x-2)^2 + y^2 = R^2$, de donde resulta que $y=\sqrt{R^2-(x-2)^2}$ es la semi-circunferencia superior y entonces se trata de que el área accesible a la oveja sea $12m^2=\int_0^4\sqrt{R^2-(x-2)^2}\,dx$. El problema se resolvería calculando la integral – que quedaría en función de R – y luego despejar dicha variable.

Subgrupo1b. Función inversa y cambio de geometría del terreno

En algunos casos se ha propuesto invertir la función $f(r)$, cambiando la geometría del terreno. Un ejemplo de esta variante se observa en la (R1) en la que el terreno adquiere una forma trapezoidal, como puede verse en la Figura 4.10. El autor de la propuesta aclara que: "… el área del recinto A es $300\ m^2$" y en sus comentarios menciona que "la meta en ambas tareas es que controlen los conceptos de área y región".

Como se puede ver, una vez más, no hay demasiados datos que permitan saber cuál es la resolución que el profesor en formación espera de los alumnos. Lo que resulta claro a partir del diagrama es que la oveja está atada en el punto $(10\,,0)$ – en ese caso la ecuación de la circunferencia será $(x-10)^2+y^2=R^2$ – y el borde derecho del terreno es un segmento de recta que une los puntos $(20\,,0)$ y $(30\,,20)$.

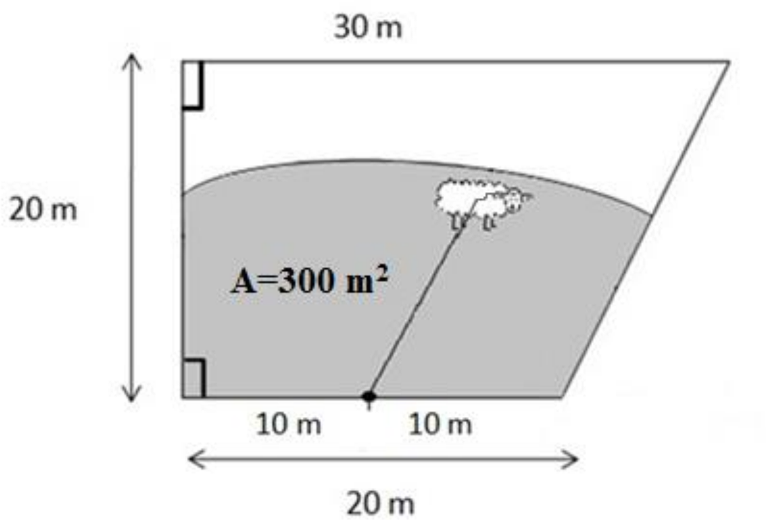


Figura 4.10. Problema con terreno trapezoidal.

En este caso hay que hallar la ecuación de la recta correspondiente al borde derecho – o sea $y = 2x - 40$ – y su intersección con la circunferencia, lo que implica resolver $\sqrt{R^2 - (x-10)^2} = 2x - 40$, para un $x \in [20,30]$, que quedará en función de R. Si llamamos x_R a dicho valor, entonces se tratará de resolver la ecuación siguiente: $300\,m^2 = \int_0^{20} \sqrt{R^2 - (x-10)^2}\,dx + \int_{20}^{x_R} \left[\sqrt{R^2 - (x-10)^2} - (2x-40) \right] dx$. Como puede verse, el cambio de geometría del terreno, agregó dificultad al problema.

Subgrupo 1c. Función inversa, cambio de geometría y posición de la estaca

Dos de los futuros profesores proponen una inversión de la función $f(r)$, cambiando la geometría del terreno y también la posición de la estaca. Por ejemplo, en (R26) se propone un terreno rectangular con la oveja atada en uno de sus vértices, como se aprecia en la Figura 4.11. En este caso se plantea la siguiente pregunta: “Si $f = 0.6$ ¿qué longitud tiene la cuerda?”.
De los comentarios del futuro docente sobre la tarea propuesta no se desprende mucha información. En lo que refiere al ítem “Elementos que componen la tarea” dice “Funciones, cálculo de áreas y coeficientes de proporcionalidad” y esa es la única mención al contenido matemático y/o la posible resolución del problema.

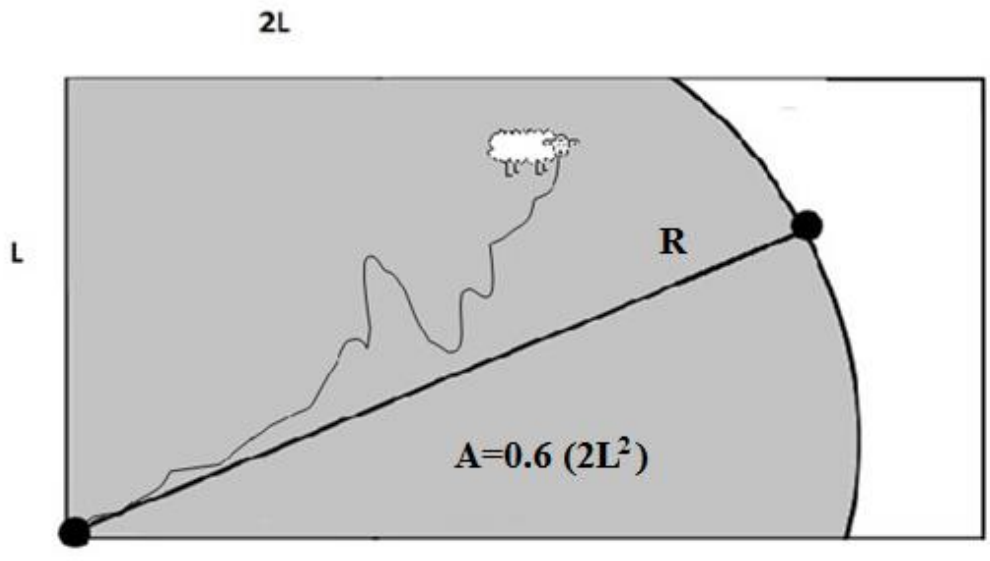


Figura 4.11. Problema con terreno rectangular y estaca en un vértice.

En este caso el área total del terreno es $2L.L = 2L^2$ y por lo tanto el área accesible a la oveja es $A = 0.6(2L^2) = 1.2L^2$. En esta propuesta la oveja está atada en el punto $(0\ ,\ 0)$ y la ecuación de la circunferencia es $x^2 + y^2 = R^2$, por lo que la semi-circunferencia derecha tiene por ecuación $x = \sqrt{R^2 - y^2}$. Teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación a resolver es $1.2L^2 = \int_0^L \sqrt{R^2 - y^2}dy$, de donde la idea es que el alumno obtenga R como función de L. El cambio de geometría agrega dificultad, pero se compensa por el hecho de atar la oveja a un vértice del rectángulo.

Subgrupo 1d. Función inversa con agregado de obstáculos

Se han planteado tres reformulaciones inversas en las que han agregado obstáculos al posible desplazamiento de la oveja. Un ejemplo de este tipo de problemas es el que se plantea en (R7), en el que se agrega una valla como en la Figura 4.12.

El problema reformulado plantea “¿Qué longitud tiene que tener la valla para que la oveja coma el 60% de lo que come en a)?”. Al respecto, cabe mencionar que la parte (a) es un problema directo en que se pide la fracción de área total para $r = 3/4$, lo que agrega complejidad al problema.

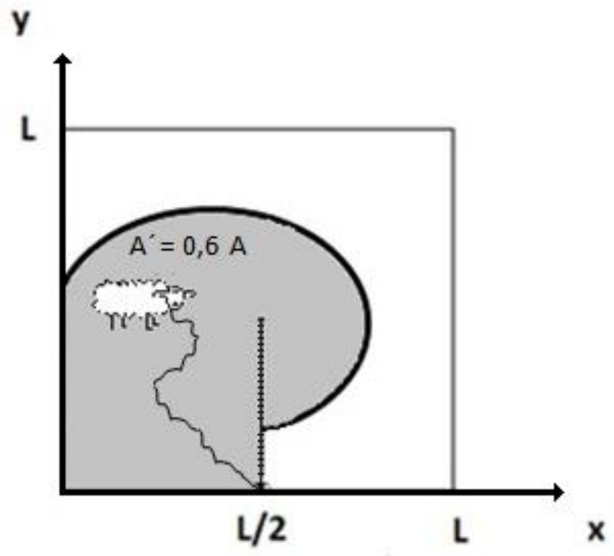


Figura 4.12. Terreno con una valla que obstaculiza a la oveja.

Para el problema directo se considera $r = 3/4$, o sea $R = 0.75\,L$ y teniendo en cuenta lo anterior, la ecuación de la circunferencia es $(x - L/2)^2 + y^2 = R^2$ y resulta un área igual a $\int_0^L \sqrt{R^2 - (x - L/2)^2}\,dx$. Al agregar el obstáculo, esto hace que la cuerda desde $x = 0$ hasta $x = L/2$ siga describiendo un arco de circunferencia con centro en $(L/2\,,\,0)$ y radio $R = 0.75\,L$ y luego describa media circunferencia con centro en $(L/2\,,\,v)$ y radio $R' = 0.75\,L - v$ siendo v la longitud de la valla. La ecuación a resolver es: $0.6\int_0^L \sqrt{R^2 - (x - L/2)^2}\,dx = \int_0^{L/2} \sqrt{R^2 - (x - L/2)^2}\,dx + \frac{1}{2}\pi(R')^2$ y si se observa que la segunda integral es la mitad de la primera y que $R' = 0.75\,L - v$, entonces se tiene: $0.1\int_0^L \sqrt{R^2 - (x - L/2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi(0.75L - v)^2$. De esta última ecuación se puede despejar v en función del radio $R = 0.75\,L$ y por lo tanto, queda v en función de L. Una vez más, la solución no está guiada por el autor de la reformulación, que solo comenta que "…el nuevo problema mejora, al incluir un apartado que exige variar la estructura de la zona…" y "se incluye un proceso de despeje de la variable pedida, lo que supone un mayor reto". Con esa información bastante escueta, sólo se puede suponer cuál puede ser la resolución prevista por el profesor en formación.

Grupo 2. El problema trivial

Algunos profesores en formación han propuesto reformulaciones en las que el problema original se ha trivializado a tal punto que puede ser resuelto simplemente aplicando una fórmula o realizando manipulaciones algebraicas extremadamente simples. Se puede considerar que en esta tipología se presentan tres variantes distintas:

- problemas que se reducen a aplicar una fórmula,
- problemas que requieren hacer algún procedimiento algebraico sencillo,
- reformulación sencilla, con agregado de otras variables externas.

A continuación se analizan ejemplos propuestos en cada una de estas variantes.
Subgrupo 2a. Problemas que se reducen a aplicar una fórmula

En varias de las producciones analizadas se propone calcular la longitud mínima de la cuerda para que la oveja pueda pastar en todo el terreno. En algunos casos, no se aprecia que hayan percibido la trivialización del problema, pero en otros casos es evidente que si. Por ejemplo en (R20) se pide la longitud mínima para que "la oveja acceda a toda la parcela" y en los comentarios dice "los contenidos son áreas y el teorema de Pitágoras". Ese último comentario sugiere que el futuro profesor sabe que el problema se reduce a calcular la hipotenusa del triángulo que une los puntos $(L/2\,,0)$, $(L\,,0)$ y el punto $(L\,,L)$, que es el punto más alejado del terreno. El resultado es obviamente $R=\sqrt{(L/2)^2+L^2}$.

Subgrupo 2b. Problemas que requieren algún procedimiento algebraico sencillo

En algunos casos el problema se trivializa – o al menos se facilita enormemente – ya que la resolución consiste en plantear una ecuación sencilla, de la cual se despeja la variable solicitada en la reformulación. Un ejemplo de esta variante aparece en la respuesta (R22') en la que se plantea atar la oveja en el punto Q (ver la Figura 4.13) y la pregunta es "¿qué longitud, en relación al lado del terreno, deberá tener la cuerda para que la oveja pueda acceder a $\pi/16$ veces el área del recinto?"
En sus comentarios sobre la tarea solo menciona que "el contenido es el cálculo de área" y que se deben "conectar ideas como cálculo de área y representación en el gráfico", lo que no da mucha información sobre la resolución prevista.

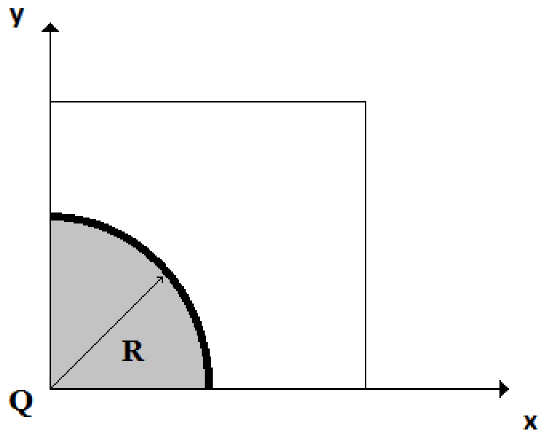


Figura 4.13. Problema de la oveja trivializado.

De todos modos, para resolver el problema basta plantear que $\frac{1}{4}\pi R^2 = \frac{\pi}{16}L^2$ de donde resulta $\frac{R^2}{L^2} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{R}{L} = \frac{1}{2}$, por lo que todo se reduce a plantear el área de un cuarto de círculo y luego despejar la razón solicitada. Con esta reformulación, ya no es necesario plantear integrales y todo se reduce a realizar manipulaciones algebraicas muy sencillas.

Subgrupo 2c. Reformulación sencilla con agregado de otras variables

En la respuesta (R25) se agregan dos variables adicionales: el peso del metro cuadrado de pasto de $10\ cm$ de altura y el consumo diario de una oveja de $40\ kg$ de peso (dato que deberán buscar los alumnos en Internet). Agrega que si no existen recursos informáticos se proporcione el dato siguiente: $1\ m^2$ de pasto, son$180\ g$. Se pregunta “¿cuánto ha de medir L para que el área de pasto sea suficiente a lo largo de un día según la alimentación de la oveja?”
Al no haber otra información relevante, todo parece sugerir que la oveja puede pastar en todo el terreno, con lo cual el área de pastura sería $A = L^2$ por lo que si L está en metros, la masa de pasto será $180L^2$ gramos. Si el consumo diario de la oveja es CD gramos, bastará plantear que $180L^2 = CD$ y despejar L .

En los comentarios sobre la tarea se menciona que algunos datos han de buscarlos en Internet, pero no hay mención a cómo se resolvería el problema.

Grupo 3. Problema inverso de ubicación de estaca

En la (R24) se propone un problema que consiste en "…proporcionar como datos el área cubierta y la longitud de la cuerda, y preguntar por el punto desde el cual se fija la cuerda…". Por las condiciones de simetría del problema seguramente este problema inverso no tenga una solución única.

En una parte del texto dice "pasaría de una oveja a un caballo al cual se le está entrenando y el punto donde se fija la cuerda es un señor", lo que podría sugerir que se trata de un círculo completo. Si ese fuera el caso, no tiene sentido dar el área y la longitud de la cuerda, ya que $A = \pi R^2$ y obviamente, uno de los dos datos sobra.

Si no se tiene en cuenta esta última suposición el problema tendría infinitas soluciones, al menos para ciertos valores del área cubierta y la longitud de la cuerda. Por ejemplo, si se pide un área $A = \frac{1}{2}\pi R^2$ con $R < \frac{1}{2}L$ habría infinitos puntos en los bordes del terreno que cumplirían lo solicitado.

Grupo 4. Problema inverso de longitud de terreno

En la (R30) se propone un terreno rectangular, de base L y altura $2L$, a lo que se agrega un cambio en la posición de la estaca, que ahora se encuentra en el punto $(L/3\ ,\ 0)$, como se puede ver en la Figura 4.14.

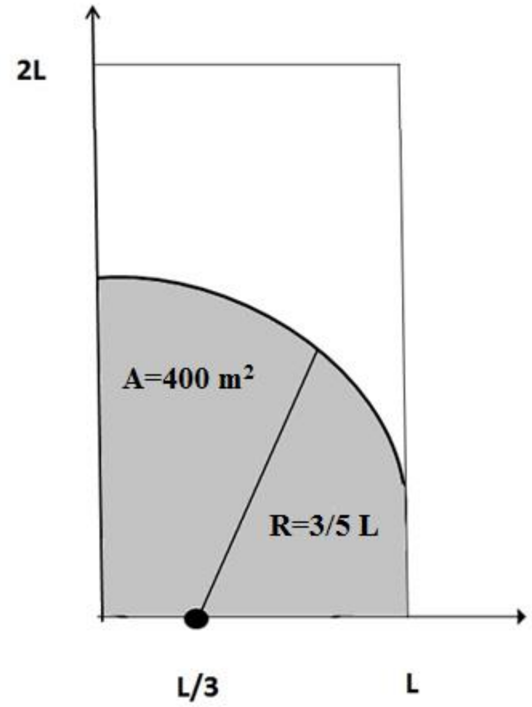


Figura 4.14. Problema con terreno rectangular y estaca en $(L/3\ ,\ 0)$.

Contrariamente a lo que parece ser en principio, no se trata de un problema de cambio de geometría y posición de estaca solamente – como los descritos en el subgrupo 1.c – sino que la verdadera novedad reside en cuáles son los datos que proporciona y qué es lo que pide obtener. En efecto, el docente en formación dice que "la longitud de la cuerda es tres quintas partes del lado del terreno" y además el "área total accesible a la oveja es $400\ m^2$ " y la pregunta es "¿cuál es el área del terreno que no resulta accesible a la oveja?"

En este caso se da una situación excepcional ya que el futuro profesor hace un esquema de cómo sería la resolución. Propone que a partir de la ecuación de la circunferencia y la relación entre R y L se obtiene L y luego el área no accesible se obtendría del área total del terreno menos A.

Ordenando un poco las ideas que propone el autor de la propuesta, el problema combina una primera parte formulada de manera inversa, en la que a partir del área $A = 400\ m^2$ y la relación $R = 3/5\,L$, se debería hallar el valor de L adecuado. Para ello conviene observar que la circunferencia es ahora $(x - L/3)^2 + y^2 = R^2$ y como $R = 3/5\,L$, resulta $(x - L/3)^2 + y^2 = (3/5\ L)^2$ y entonces resulta que

$y=\sqrt{(3/5\,L)^2-(x-L/3)^2}$, por lo que debe ser $\int_0^L \sqrt{(3/5\,L)^2-(x-L/3)^2}\,dx = 400\,m^2$.

Se resuelve la integral, se despeja L y el área no accesible a la oveja será $A' = L\times 2L - 400\,m^2$.

En lo que respecta a la reformulación inversa, se trata de un tipo distinto de problema donde el dato relevante a obtener es la longitud de terreno.

Grupo 5. Problema de optimización

En la respuesta (R5) se plantea que se atan dos cabras en esquinas opuestas del terreno cuadrado, de lado L, y agrega una figura similar a la de la Figura 4.15.

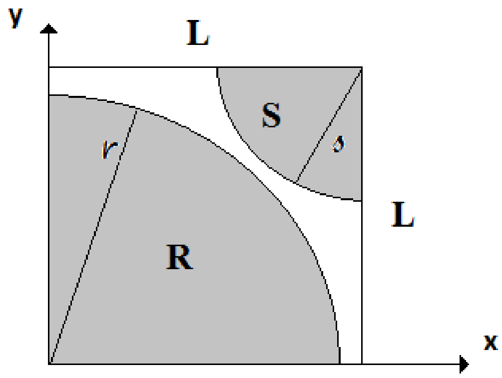


Figura 4.15. Problema de las dos cabras montesas.

En esta reformulación se plantea que se pretende "que ocupen la máxima área posible cada una, pero sin coincidir en ningún punto" y se sabe que "una de las áreas tiene que ser mayor que la otra". Se pregunta por el tamaño de cada cuerda y cuánta área tendrá disponible cada cabra.

En sus comentarios, el profesor en formación habla de que hay dos animales en lugar de uno, pero no especifica nada en lo referente a cómo resolver el problema.

De todos modos, se trata de un problema de optimización en el que las dos áreas involucradas son $A_s=\pi s^2$ y $A_r=\pi r^2$ y es obvio que no va a haber un máximo sino un supremo que no será alcanzable para ningún par de valores de longitud de cuerda. En efecto, ocuparían un área máxima sin solaparse en caso de ser tangentes, pero en ese caso habría un punto en común. Ese supremo se daría en caso que $r+s$ sea la diagonal del cuadrado de lado L, es decir $r+s=\sqrt{2}\,L$.

Para resolverlo – como problema de extremos condicionados – se puede plantear la función de Lagrange $L(r,s)=\pi\left(r^2+s^2\right)+\lambda\left(r+s-\sqrt{2}\,L\right)$ y anular las derivadas parciales en r,s, además de agregar la condición $r+s=\sqrt{2}\,L$ (que también puede verse como la anulación de la derivada respecto a λ).

Otra opción, tal vez más sencilla, es despejar una de las variables a partir de la condición, por ejemplo $s=\sqrt{2}\,L-r$ y luego trabajar con la función de una variable $A(r)=\pi\left[r^2+\left(\sqrt{2}\,L-r\right)^2\right]$ para finalmente, por derivación e igualación a cero obtener el supremo.

Grupo 6. Problema inverso secuencial

En la (R2) se plantea un problema bastante novedoso, manteniendo la geometría del terreno y la posición de la estaca, como se puede ver en la Figura 4.16.

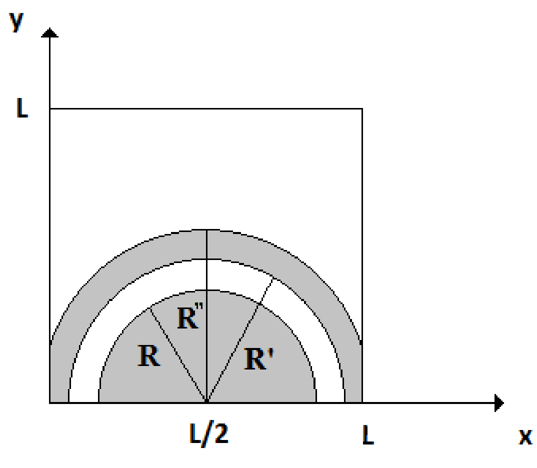


Figura 4.16. Problema inverso secuencial.

En esta reformulación se proporciona el dato correspondiente a la longitud de la cuerda $R=L/3$ y se asume que “a lo largo de un día, la oveja come toda la hierba en el área accesible” y la primera pregunta es sobre la longitud R', que deberá tener la cuerda "el día siguiente para que la oveja pueda pastar la misma cantidad de hierba". Luego se repite la pregunta para el tercer día y para el cuarto día, para finalmente preguntar "¿Después de cuántos días la oveja no encontrará más la misma cantidad de hierba para pastar?"

Como se puede ver, se invierte el orden de las variables involucradas, se mantienen la geometría y la posición de la estaca, pero ahora el problema es de tipo secuencial.

En los comentarios del autor de la reformulación dice que "se añade el contenido de la equivalencia de áreas (con el mismo centro o centros distintos)", que en el caso de (R2) se trata del mismo centro. Lo anterior, además de la figura que presenta en esta reformulación (similar a la Figura 4.16), sugiere que el procedimiento esperado es el cálculo de áreas de semi-círculos concéntricos.

Para el primer día es $R = L/3$ y el área será $A_1 = (1/2)\pi R^2 = (\pi/2)(L/3)^2$, en cambio para el segundo día tendremos $A_2 = (\pi/2)\left(R'^2 - (L/3)^2\right)$, entonces igualando las dos áreas resulta $(\pi/2)\left(R'^2 - (L/3)^2\right) = (\pi/2)(L/3)^2$. Si se trabaja conesa ecuación se obtiene que $R'^2 = 2(L/3)^2$ o sea que $R' = \sqrt{2}(L/3)$ y dado que que $\dfrac{\sqrt{2}}{3} < \dfrac{1}{2}$, el diagrama de Figura 4.16 es correcto pues este R' no permite que la oveja llegue a los bordes laterales del terreno.

El autor del problema en su diagrama presupone que para el día siguiente esta situación ya no se va a repetir, y tiene razón. En efecto, si se repite el planteo en la forma $(1/2)\pi\left(R''^2 - R'^2\right) = (1/2)\pi(L/3)^2$, se obtiene $R''^2 = R'^2 + (L/3)^2$ y como $R'^2 = 2(L/3)^2$, resulta $R''^2 = 3(L/3)^2$, o sea que $R'' = \dfrac{\sqrt{3}}{3}L > \dfrac{L}{2}$, por lo que la oveja llegaría a los bordes laterales del terreno. En tal caso, el planteo ya no puede ser de círculos concéntricos sino que requiere utilizar integrales para el cálculo.

Para ese segundo día la ecuación de la circunferencia es $(x - L/2)^2 + y^2 = R''^2$, es decir que su rama positiva es $y = \sqrt{(R'')^2 - (x - L/2)^2}$ y por lo tanto se busca que sea

$\int_0^L \sqrt{(R'')^2-(x-L/2)^2}\,dx-\frac{1}{2}\pi(R')^2=\frac{1}{2}\pi R^2$. De esta ecuación, combinada con $R=L/3$ y $R'=\sqrt{2}(L/3)$ se obtendría el valor de R'' .

Para el tercer día es aún más complicado, ya que la ecuación a resolver será: $\int_0^L \sqrt{(R''')^2-(x-L/2)^2}\,dx-\int_0^L \sqrt{(R'')^2-(x-L/2)^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi R^2$, que combinada con $R=L/3$ y el valor de R'' hallado permitirá obtener R'''. El procedimiento se repetirá para días subsiguientes hasta que n veces $A_1=(1/2)\pi R^2=(\pi/2)(L/3)^2$ supere al área de toda la parcela, que es L^2 .
Cabe mencionar que en este problema – si bien el autor del mismo no indica cómo resolverlo – tanto los comentarios como el diagrama, ayudan a presuponer cuál sería la solución esperada.

Grupo 7. Problema incremental

En la (R38) el profesor en formación no presenta ningún diagrama, por lo que asumimos que se mantienen las condiciones del problema original. Se plantea que "la oveja puede pastar una fracción $f<1$ del terreno con una longitud de cuerda R_f " y se pide "¿cuánto hay que alargar la cuerda para que la oveja pueda pastar un 10% más de lo que ya puede pastar?
En este caso – además de invertir la función – se trata de vincular el incremento de longitud al incremento de área, lo que le confiere un carácter distinto al que tenían otros problemas analizados anteriormente.
Como ya se comentó, no hay diagrama pictórico asociado a la propuesta y en sus comentarios el autor del problema menciona como contenidos "cálculo de área y longitudes/ resolución de ecuaciones", lo que no agrega demasiados datos sobre su posible resolución. En otra reformulación anterior, el mismo dice "…si la oveja puede pastar el noventa por ciento del terreno…" lo que podría sugerir que la fracción $f<1$ en la que está pensando es suficientemente grande para que alcance los bordes laterales del terreno. En caso que esa sea la situación – lo que no deja de ser una suposición – el problema se resolvería planteando en primer lugar la integral

$\int_0^L \sqrt{(R_f)^2 - (x - L/2)^2}\,dx = f\,L^2$. Luego se agregaría un 10% más, es decir que $\int_0^L \sqrt{(R_f^*)^2 - (x - L/2)^2}\,dx = 1.1\,f\,L^2$ y entonces la cuerda se debe alargar un $\Delta R = R_f^* - R_f$ en términos absolutos, o $\frac{R_f^* - R_f}{R_f}$ en términos relativos.

Grupo 8. Problema dinámico

En la (R4) se mantiene la geometría del terreno y la posición de la estaca y se agrega una segunda oveja, ambas atadas con una cuerda de longitud $R = 3/4\,L$, que están pastando en el punto P de la Figura 4.17.

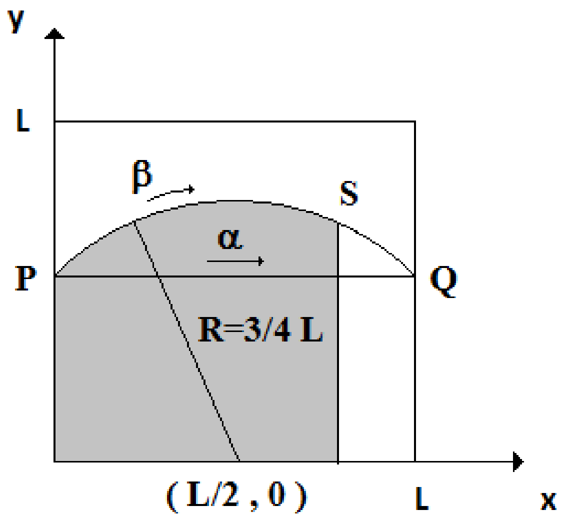


Figura 4.17. Problema dinámico con dos ovejas.

En este problema, la oveja α, corre a lo largo del segmento PQ con una cierta velocidad que se proporciona en función de L – dice literalmente $\frac{L}{60}/\mathrm{sec.}$, lo que podría significar que recorre la longitud L en 60 segundos – y la oveja β, corre a lo largo del arco PSQ. Se plantean varias preguntas, siendo particularmente interesante la última – ya que se invierte la función – en la que se pide la velocidad que debe tener la oveja β para llegar al punto Q al mismo tiempo que la oveja α.

El problema puede ser considerado inverso, ya que se da el tiempo de llegada y se pide la velocidad, pero cambia totalmente el problema original que era un problema estático a diferencia del propuesto que agrega una cierta dinámica.

En lo que refiere a comentarios que puedan guiar la resolución, dice el autor de la propuesta que "…introduce el contenido previo de velocidad (enseñando también la proporcionalidad entre longitud y velocidad manteniendo t constante)". Esto parece sugerir que la resolución esperada implica calcular la longitud del arco PSQ e igualar el tiempo t para ambas ovejas. La longitud de arco viene dada por la integral $\int_0^L \sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\,dx = l(PSQ)$, siendo $f(x)=\sqrt{(R)^2-(x-L/2)^2}=\sqrt{(3L/4)^2-(x-L/2)^2}$ de la que se tiene por derivación $f'(x)=\dfrac{-(x-L/2)}{\sqrt{(3L/4)^2-(x-L/2)^2}}$, de donde resulta que $\int_0^L \sqrt{1+\dfrac{(x-L/2)^2}{(3L/4)^2-(x-L/2)^2}}\,dx=\int_0^L \dfrac{(3L/4)}{\sqrt{(3L/4)^2-(x-L/2)^2}}\,dx = l(PSQ)$. El tiempo para la oveja α sería de 60 segundos (ya que $l(PQ)=L$ y la oveja recorre la longitud L en 60 segundos, según lo interpretado) y para la oveja β sería $\dfrac{l(PSQ)}{v}$, donde v es la velocidad pedida. Se plantea entonces $\dfrac{l(PSQ)}{v}=60$, de donde $v=\dfrac{l(PSQ)}{60}$ y por lo tanto $v=\dfrac{1}{60}\int_0^L \dfrac{(3L/4)}{\sqrt{(3L/4)^2-(x-L/2)^2}}\,dx$ es la velocidad que se pide.

Grupo 9. Problema iso-superficial

En la (R3) se propone un problema iso-superficial que comienza por considerar para el primer día, una oveja atada en el punto $(L/2\,,\,0)$ con una cuerda que "mide las tres cuartas partes de la longitud del lado del terreno". El futuro docente plantea que al segundo día el pastor "ata a la oveja a un palo ubicado en la esquina $(0\,,\,0)$ del terreno” y se pregunta “¿qué longitud debería tener la cuerda para que el área accesible sea equivalente a la del día anterior?” Finalmente plantea la misma pregunta pero esta vez ubicando el palo en el centro del terreno.

Se trata de un doble problema iso-superficial donde se piden longitudes de cuerda para que las áreas de pastoreo se mantengan invariantes.

El profesor en formación comenta que se añade “el contenido de la equivalencia de áreas (con el mismo centro o centros distintos)” y no da indicaciones explícitas sobre cómo espera que sea la resolución. Sin embargo, como la longitud inicial de la cuerda es $R = 3/4\, L$, seguramente se tendrá un área relativamente grande y por lo tanto, será necesario calcular intersecciones a través de integrales.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propone la siguiente resolución que comienza por calcular el área inicial $A_1 = \int_0^L \sqrt{(R)^2 - (x - L/2)^2}\, dx = \int_0^L \sqrt{(3L/4)^2 - (x - L/2)^2}\, dx$. Luego se plantea el área de un cuarto de círculo – que corresponde a una oveja atada en $(0\ ,\ 0)$ – o sea $A_2 = (1/4)\pi R^2$ y se igualan las áreas $A_1 = A_2$. Si esta igualdad se satisface para algún $R < L$, entonces quedaría resuelto el primer problema iso-superficial sin necesidad de calcular otras integrales. En caso contrario, i.e., si no existe $R < L$, tal que $A_1 = A_2$, entonces A_2 también se deberá calcular como una integral, correspondiente a un diagrama como el de la Figura 4.18.

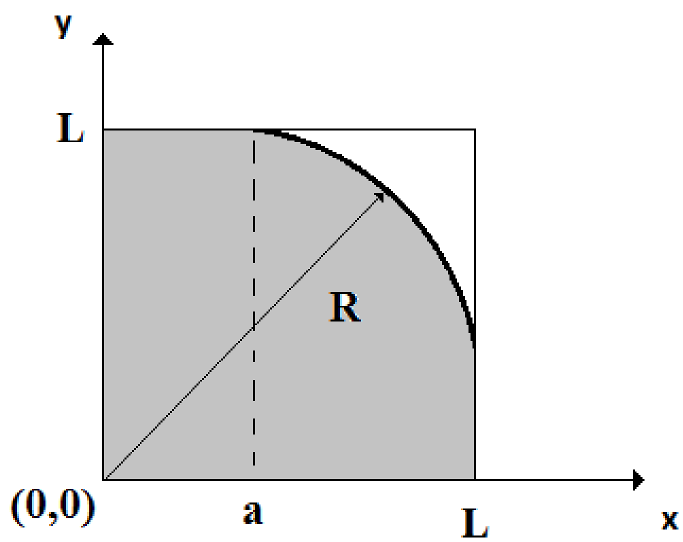


Figura 4.18. Problema de la oveja con $R > L$.

Se deberá en ese caso calcular el valor de la abscisa a que corresponde al punto de corte de la recta $y = L$ con la circunferencia $x^2 + y^2 = R^2$, o sea $a = \sqrt{R^2 - L^2}$. Luego se calcula el área como una suma que se iguala a A_1, resultando la ecuación $a.L + \int_a^L \sqrt{R^2 - x^2}\, dx = A_1$, de la cual se despeja el valor de R .

Para el segundo problema iso-superficial la situación es similar, primero se plantea el área de un círculo completo – que corresponde a una oveja atada en $(L/2\,,\, L/2)$ – o sea $A_3 = \pi R^2$ y se igualan las áreas $A_1 = A_3$. Si esta igualdad se satisface para algún $R < L/2$, entonces ese es el radio buscado, en caso contrario se tendrá un esquema como el de la Figura 4.19.

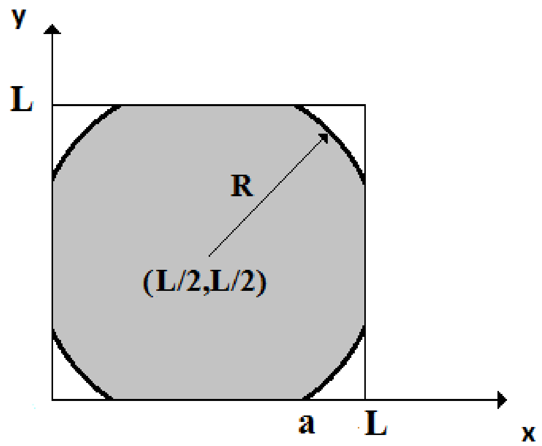


Figura 4.19. Problema de la oveja atada en $(L/2\,,\, L/2)$.

En este caso se deberá calcular el valor de la abscisa a que corresponde al punto de corte de la recta $y = 0$ con la circunferencia $(x - L/2)^2 + (y - L/2)^2 = R^2$, cuyo resultado es $a = L/2 + \sqrt{R^2 - L^2/4}$. A continuación se calcula el área por diferencia – y aprovechando la simetría – y se iguala al valor hallado A_1, resultando la ecuación

$L^2 - 4\left[\int_a^L \left(L/2 - \sqrt{R^2 - (x - L/2)^2} \right) dx \right] = A_1$, de la cual se despeja el valor de R, lo que resuelve el segundo problema iso-superficial.

4.3.- Análisis de los significados y análisis cognitivo

En esta sección se comentan los resultados observados en otras categorías utilizada para analizar las producciones de los futuros profesores, que corresponden a las columnas de la planilla particularmente relacionadas con el análisis de los significados y el análisis cognitivo.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1.- En lo que refiere a “sentidos y modos de uso”, casi un 50% de los alumnos que responden a este ítem afirman que se trata de una tarea de “espacio y forma”; en total 17 de 37 respuestas optan por esta interpretación. De los restantes, un 25% (9 de 37) se decantan por la opción “cambio y relaciones” y algo menos de otro 25% (7 de 37) responden que es una tarea de “cantidad” y los cuatro restantes, algo más del 10%, la clasifican como “incertidumbre y datos”.

2.- Para terminar con el análisis de los significados, en lo que refiere a la situación o contexto, una muy amplia mayoría se expresa en favor del ámbito “educativo o laboral”. Cuatro de los profesores en formación sitúan la tarea en el ámbito “público” y sólo uno lo califica como “personal”. Además de esto, otros mencionan el término “similar”, pero sin aclarar qué supone dicha clasificación.

3.- Para lo que refiere al análisis cognitivo y en particular en lo que corresponde a las expectativas de aprendizaje, observando las metas que declaran los futuros docentes se pueden obtener varios grupos:

- Específicos del problema, por ejemplo: ”hallar r (razón de longitudes, $r = R/L$, como en el problema directo) a partir del valor de f (razón de áreas, dada como $f = A/L^2$ en el problema directo) y la relación entre ambas magnitudes”, o también “hallar la longitud de cuerda para que no coma más de la mitad del área de pasto”.

- Específicos del tópico en el que se encuadra el problema. Algunos ejemplos son los siguientes: “aplicar teorema de Pitágoras, sustituir y trabajar con expresiones algebraicas”; “aprender a calcular secciones de áreas y a operar con razones”; “calcular longitudes dadas unas áreas”; “calcular áreas”; “manejar cálculo de áreas y relacionar parámetros desconocidos”; “relacionar longitudes y volúmenes”; “relacionar los conceptos de área y longitudes” y “relacionar variables y diferenciar entre proporcionalidad directa y relación funcional”.
- Transversales para una enseñanza basada en la resolución de problemas, como en las siguientes respuestas: “comprender la inversión de un problema y conectar otros contenidos matemáticos”; “considerar varios supuestos, reflexionar y modelizar, contrastar resultados” y “hallar las condiciones iniciales que se necesitan para obtener una condición final preestablecida”.
- Genéricos/imprecisos, como por ejemplo: “controlar conceptos de área o región” y también “funciones, cálculo de áreas y coeficientes de proporcionalidad”.

4.- En relación con el análisis de limitaciones en el aprendizaje, no hay prácticamente ningún comentario. Un solo profesor en formación menciona que “hay menos posibilidad de errores en la reformulación”. Por lo general los futuros docentes no han reflexionado sobre este tema.

5.- En lo que respecta a las oportunidades de aprendizaje, se pueden distinguir cuatro tipos de opiniones sobre el reto que se plantea a los alumnos:

- Hay un primer grupo de opiniones que podemos considerar como favorables, por ejemplo: “interesante”, “mayor reto”, o “reto más auténtico”, que constituyen una mayoría de las respuestas.
- Tres respuestas dadas por dos futuros profesores, expresan opiniones negativas al respecto, como por ejemplo: “poco interés” o “sin interés para el alumno”.

- Un caso proporciona una respuesta neutra, que se expresa en términos de "similar interés" sin mayores explicaciones, pero que supone una comparación con el problema directo que les fue proporcionado.
- Hay también tres respuestas – dadas por dos de los futuros docentes – que pueden considerarse como genéricas/imprecisas. En una de ellas el profesor en formación dice "posible reto" y en el otro caso plantea "interés del reto: 2", sin aclaración que permita saber en qué escala se otorga ese valor.

6.- Finalmente, en lo que refiere a los comentarios que hacen los profesores en formación sobre el ítem anterior, en algunos casos hacen aclaraciones sobre las razones de su respuesta, a modo de ejemplo se observaron las siguientes: "por ser inverso"; "problema inverso y nuevos contenidos"; "cambio en la estructura y en el despeje"; "considerar varios supuestos". En un par de casos se hacen comentarios imprecisos como "depende del planteo" o "debería darse más libertad a los datos.

4.4.- Análisis de instrucción

Para finalizar el análisis didáctico de las respuestas, se describen a continuación los resultados obtenidos en las 12 respuestas recibidas, que corresponden al análisis de instrucción.

- ♦ En relación al *lenguaje* todas se expresan en forma positiva, siendo las más frecuentes lenguaje claro (3 respuestas) y lenguaje simple (3 respuestas). Otros utilizan diversos adjetivos como cotidiano, correcto, etc., que dan a entender una opinión favorable.
- ♦ Sobre *autenticidad* predominan claramente las opciones favorables (14 en total) de los que una mayoría se expresan en términos comparativos (mayor autenticidad: 5 respuestas), o simplemente dicen que se trata de un problema real (7 respuestas). En otro extremo hay 3 respuestas que pueden considerarse negativas (poco probable: 2 respuestas y no significativo: 1 respuesta) y los 3 restantes se pueden considerar neutros (similar: 2 respuestas, problema posible: 1 respuesta).

- En lo que refiere a los *datos,* algunos opinan sobre la cantidad de los mismos (datos suficientes: 1 respuesta, no se dan todos: 2 respuestas) y otros se expresan sobre su calidad (5 respuestas). De estos últimos 3 son positivos (realistas: 1 y fáciles de comprender: 2), 1 es neutro (ni verídicos, ni improbables) y otro es negativo (datos no concretos). En otras 2 respuestas no se habla de calidad, ni cantidad, sino que se abordan otros aspectos: uno califica los datos como distintos a los del problema original y otro dice que hay que buscarlos en Internet.
- En lo que tiene que ver con la *finalidad*, casi todas las respuestas invocan razones didácticas. Algunas de estas respuestas refieren a los contenidos (por ejemplo: enseñar proporciones), mientras que en otras tratan cuestiones cognitivas (por ejemplo: pueden saber cuando está resuelto), o aspectos de la instrucción (por ejemplo: enriquecer la tarea).

  Otras respuestas similares plantean como finalidad conectar ideas, introducir contenidos, etc.

  Finalmente, hubo una respuesta que se limita a comparar con el problema original, y en ambos se encuentra una finalidad similar.
- En relación con la *ubicación*, 8 respuestas proponen realizar la tarea en clase y 1 sola dice que puede ser en clase o en la casa.
- En lo referido al *agrupamiento* las opiniones están bastante divididas: 11 proponen que sea una tarea individual, 7 en grupo y 3 en parejas. Además de lo anterior 4 respuestas proponen que puede ser individual o en pareja sin definirse en favor de una de las dos opciones.
- En la columna correspondiente a la *temporalización* se observan 8 respuestas que se expresan en términos comparativos: 5 proponen dedicar mayor tiempo, 1 propone menos tiempo y los otros 2 sugieren igual temporalización. Todas las otras respuestas optan por cuantificar la duración de la tarea, siendo las más comunes: 30 minutos (7 respuestas), 1 sesión completa (6 respuestas) y se presentan también otras opciones minoritarias como por ejemplo 25 minutos, 3 respuestas, 40-45 minutos, 2 respuestas, etc. Los resultados oscilan entre un mínimo de 15 minutos y un máximo correspondiente a la sesión completa.
- En lo que tiene que ver con la *complejidad* 16 profesores en formación se limitan a dar una opinión comparativa, opinando 15 de ellos que es una tarea

de mayor complejidad que la original, mientras que el restante dice que es similar. Estas respuestas no indican cuál es exactamente el nivel de complejidad de la tarea propuesta. De los que sí responden con respecto al nivel de complejidad, 15 respuestas indican que es de conexión, 10 dicen que es de reflexión y 1 solo dice que es de reproducción. Además de las respuestas anteriores uno de los docentes en formación dice que es una tarea de "dificultad media", término que no queda muy claro.

- Por último en lo que respecta a *materiales y recursos*, una vez más varios de los futuros profesores (7 respuestas) optan por comparar y decir que son similares, sin mayor explicación. De los que sí indican materiales y recursos a utilizar, 9 respuestas proponen materiales estándar, como por ejemplo lápiz y papel (4 respuestas). Unos pocos proponen materiales y recursos no tan tradicionales: 3 proponen agregara software, 1 sugiere utilizar hilo y chincheta; y hasta hay un caso que propone una recreación a escala en un terreno.

5.- CONCLUSIONES

Este capítulo presenta las conclusiones del trabajo. Comienza por presentar las respuestas a las preguntas de investigación propuestas en el primer capítulo de esta memoria y revisa el logro de los objetivos de investigación planteados.

Si bien en el planteamiento del trabajo de campo se diseñaron dos sesiones de enriquecimiento de tareas, finalmente sólo la segunda – la que identificamos como "el problema de la oveja" – ha servido para la recogida de datos, su análisis y la consecución de los resultados en este estudio. Sin embargo, hay otros factores que han podido influir para que se plantearan problemas de mayor riqueza, que atañen al diseño general de toda la investigación y no solamente al "problema de la oveja", seleccionado para estudiar el conocimiento que muestran los profesores en formación durante su reformulación.

Algunos profesores en formación han sido particularmente creativos en sus reformulaciones y en el enriquecimiento de las tareas propuestas; no obstante, la gran mayoría han optado por enunciados estándar y, en algunos casos, por la trivialización del problema propuesto. Se tratará entonces de identificar cuáles elementos destacan cuando la invención de enunciados y el enriquecimiento de tareas se realizan en forma más creativa y efectiva.

En las últimas dos secciones del capítulo, se analizarán algunas de las limitaciones del estudio y posibles perspectivas para continuar la investigación.

5.1.- Conclusiones obtenidas

En el primer capítulo del TFM se propusieron los siguientes objetivos generales:

- Identificar y caracterizar las estrategias que un grupo de profesores en formación emplea para enunciar problemas inversos destinados a alumnos de Enseñanza Secundaria, a partir de su enunciado directo.
- Estudiar, analizar y caracterizar las producciones en forma de problemas inversos, de futuros profesores y realizar el análisis didáctico de sus propuestas.

En lo que refiere a los objetivos generales propuestos, con las limitaciones propias de este tipo de estudios, el estudio se ha realizado mediante un trabajo con dos grupos de profesores en formación del Máster de Profesorado de Secundaria de la Universidad de Granada del curso 2016-2017, en dos sesiones diferentes.

En la primera sesión se planteó una propuesta sobre enriquecimiento de tareas matemáticas escolares, ejemplificada en un primer enunciado, sin indicación de que la reformulación debía ser presentada como problema inverso. Algunos de esos profesores utilizaron espontáneamente esta estrategia; de hecho, algunas de sus producciones resultaron muy creativas. Igualmente se les solicitó que analizaran las componentes y elementos que caracterizaban el nuevo enunciado y las comparasen con las correspondientes al enunciado inicial.

En una segunda sesión, tomando varios de los enunciados y análisis realizados como motivación, se les propuso reformular el enunciado inverso de otro problema distinto, así como analizarla nueva tarea propuesta tomando como base el trabajo ya realizado.

El trabajo de los estudiantes para profesor en respuesta a esa nueva propuesta permitió obtener una cantidad importante de producciones que reformulaban el problema de manera inversa, cada una acompañada con su análisis. En particular, se pudieron identificar nueve grupos distintos de problemas inversos – algunos de ellos hasta con cuatro variantes dentro de un mismo grupo – entre todas las producciones analizadas.

No se pidió a los estudiantes para profesor encuestados que resolvieran el problema propuesto; no obstante, algunas palabras clave que surgen en el análisis de tareas, ayudaron a conjeturar o identificar qué tipo de respuestas esperaban los profesores en formación respecto a sus propuestas.

De este estudio descriptivo se infieren, identifican y caracterizan una serie de estrategias para enunciar problemas inversos por parte de los dos grupos de profesores en formación con los que se trabajó.

Además de lo anterior, el Análisis Didáctico ha sido una herramienta útil para a estudiar y caracterizar las producciones de los futuros profesores, no sólo en lo que refiere al problema reformulado, sino también en lo que tiene que ver con el análisis de tareas que proponen, en relación a cada problema inverso.

Teniendo en cuenta que se trata de un primer trabajo exploratorio – así como limitaciones de tiempo y de extensión – podemos concluir que los dos objetivos generales se han cumplido en esta primera etapa.

Además de lo antedicho, se propusieron también los siguientes objetivos específicos para este trabajo:

- Identificar los distintos tipos de problemas propuestos y caracterizar las reformulaciones que han sido planteadas en forma inversa por parte de los futuros profesores.
- Caracterizar desde el punto de vista del análisis cognitivo los problemas reformulados, así como los comentarios que los propios profesores en formación hacen de sus respectivas propuestas.
- Caracterizar desde el punto de vista del análisis de instrucción las distintas propuestas realizadas, teniendo en cuenta las variables de tarea que plantean los futuros profesores.

Como se comentó anteriormente, se obtuvo una clasificación de los problemas inversos propuestos, que se adecua bien a las producciones recibidas. Cuando el trabajo se repita para una población mayor, con más entrenamiento y con sesiones de trabajo más estructuradas, cabe esperar una mayor riqueza de propuestas y, eventualmente una aplicación de los tipos observados. Así, por ejemplo, recordamos que uno de los profesores en formación propuso un problema probabilístico, (delimitando una cierta sección de terreno, poniendo varias ovejas y preguntando por la probabilidad de que se encuentren en dicha región), enunciado que no fue considerado en el estudio ya que no correspondía a un problema inverso. Podría ocurrir entonces, si el trabajo se repite, que alguno de los futuros docentes formule un problema probabilístico presentado en forma inversa, lo que daría origen a un décimo grupo de problemas inversos. Claramente, la lista no está cerrada, pero si describe los problemas que han sido propuestos en este trabajo, por lo que cabe considerar que se ha cumplido ese primer objetivo específico.

Con referencia a los otros dos objetivos específicos – directamente vinculados al análisis cognitivo y el análisis de instrucción –, cabe mencionar que se realizaron ambos análisis en las producciones de los futuros docentes y además se perfeccionó el instrumento utilizado para tal fin. En efecto, se construyó una planilla electrónica a la cual se fueron agregando, desglosando y eliminando columnas hasta llegar a una versión final de 21 columnas: una primera con el número de respuesta y de alumno, 20 columnas de análisis y una columna final de observaciones. En esas 20 columnas de la versión avanzada del instrumento se analiza la reformulación propuesta y su significado, pero la mayor parte se dedica al análisis cognitivo (5 columnas) y al análisis de instrucción (8 columnas). Al igual que ha ocurrido hasta el momento, en cuanto a que el instrumento se ha mejorado en sucesivas aproximaciones, también puede ser susceptible de nuevas modificaciones en un futuro trabajo, teniendo en cuenta que constituye una buena base para un primer análisis.

Entre los resultados más destacados, cabe mencionar los siguientes:

- Respecto a los aspectos de significado, el uso de sentidos es equilibrado; en efecto, de las 37 respuestas, 17 optan por "espacio y forma", 9 por "cambio y relaciones", 7 se decantan por "cantidad" y 4 por "incertidumbre y datos". Además, la mayoría de los profesores en formación sitúan la tarea en el ámbito educativo.
- Los aspectos cognitivos muestran mucha variedad de respuesta, como se puede apreciar en que se distinguen cuatro formas de expresar la meta de la tarea y cuatro maneras de opinar sobre las oportunidades de aprendizaje.
- De las categorías de instrucción, destaca que la mayoría opina de forma favorable sobre la autenticidad. Tanto sobre la expresión de finalidades como en el tipo de agrupamiento, no hay acuerdo y las indicaciones son variadas. Donde si hay acuerdo es en que la complejidad siempre es mayor que en la tarea original.
- Cabe mencionar que algunos de los profesores en formación conceden gran importancia a que el problema se reformule de manera inversa. Por ejemplo el alumno A14 plantea que "El interés de la reformulación es porque es el inverso del anterior…" y el alumno B14 dice respecto a la complejidad que "…aumenta al pasar de un problema directo a uno indirecto." Otros en cambio, tienen una posición más crítica, como el alumno B24 que dice "…no generaría mucho interés…puede que el alumno nunca tenga que enfrentarse a algo así."

Podemos entonces concluir que, dentro de sus limitaciones, el trabajo cumple con los objetivos específicos oportunamente propuestos.

5.2.- Limitaciones del trabajo

Como ya se comentó parcialmente, las limitaciones de este estudio están relacionadas con los siguientes aspectos: los sujetos que participaron, la cantidad de sesiones destinadas al trabajo de campo, ciertas características del instrumento utilizado y el contenido matemático puesto de manifiesto en este trabajo.

En lo que tiene que ver con el primer aspecto mencionado, hubo que limitarse a describir las producciones de dos grupos de profesores en formación, del Máster Universitario de Profesorado de Secundaria. La experiencia tiene algunos puntos de contacto con lo realizado en la Universidad de Colima (México) y también algunas diferencias. Dado que en Colima no se les solicitó – al menos por escrito – un análisis de la tarea reestructurada, no es posible hacer una comparación. Por motivos obvios, tampoco se puede generalizar los resultados obtenidos, para lo cual sería necesario repetir la investigación en otros países, con diferentes contextos educativos.

Una segunda limitación de este estudio tiene que ver con la cantidad de sesiones dedicadas en el trabajo de campo. En efecto, por cuestiones de tiempo sólo se realizaron dos sesiones, una de las cuales se dedicó a introducir el enriquecimiento de tareas y la reformulación de problemas en general; la otra fue utilizada específicamente para reformular problemas inversos. Esto hace que los futuros docentes no tuvieron muchas oportunidades para adaptarse a este tipo de tarea y poder de ese modo proponer y discutir distintas reformulaciones. Se podría conjeturar que con una mayor experiencia, quizás podrían haber surgido más variantes y también más creativas en general, lo que podría dar lugar a problemas de mayor riqueza.

En cuanto al instrumento utilizado para recoger las producciones de los futuros docentes, es evidente que hubiera sido conveniente incluir en el mismo un espacio para que el profesor en formación muestre un esquema de la resolución de su propio enunciado. Eso hubiera evitado – o al menos minimizado – la posibilidad de problemas mal propuestos, problemas que quedaron excesivamente simplificados (problemas triviales en algunos casos) y quizás también hubiera disminuido el número de problemas que fueron descartados por no ser inversos. Cabe pensar que si el futuro profesor resuelve su propio problema reformulado, es menos probable que algunos de estos inconvenientes tengan oportunidad de ocurrir. Por otra parte, en lo referente a la planilla que se les suministró para el análisis de la tarea propuesta, sólo se incluyó explícitamente lo siguiente: significatividad, autenticidad, elementos que componen la tarea y variables de tarea. Una planilla más extensa, donde aparezcan explícitamente las 20 columnas del instrumento de análisis de resultados, podría haberlos animado a que no olviden hacer sus comentarios en todos esos ítems.

Por último, los contenidos matemáticos involucrados en el problema original llevan a pensar en tres áreas concretas de la matemática: álgebra, cálculo y geometría. Perfectamente podría trabajarse otras ramas de la matemática que también integran el currículo de Enseñanza Secundaria y que no estuvieron presentes, al menos en el problema original y tampoco en la gran mayoría de las reformulaciones. Por ejemplo, la trigonometría estuvo prácticamente ausente en las producciones de los futuros profesores y eso podría corregirse si la misma aparece en el problema original.

5.3.- Posibles continuaciones de la investigación

Una vez concluido este estudio exploratorio, se puede considerar que quedan algunos aspectos que podrían ser modificados y mejorados con la intención de continuar con el tema central de esta investigación.

Una primera posibilidad consiste en ampliar la muestra, no solamente para contar con más datos y poder hacer estudios estadísticos con un tamaño muestral más adecuado, sino también para comparar con resultados en otros países, o al menos en otras universidades. Esto daría una mayor generalidad a los resultados, que la que resulta de este estudio.

Como ya se comentó, sería conveniente agregar a la tarea de reformulación de problemas como problemas inversos, la resolución de sus propias propuestas por parte de los futuros docentes. Las ventajas que esto tendría ya fueron comentadas en la sección anterior.

Sería interesante repetir la experiencia pero dedicando más sesiones previas este tipo de actividades de enriquecimiento de tareas y en particular, de reformulación de problemas inversos. Sería conveniente que las primeras sesiones – en lo posible más de una – se realizara con acompañamiento del profesor durante la actividad, a fin de guiar el trabajo del futuro docente y luego discutir las propuestas recibidas en grupo. Cabe mencionar al respecto, que en este estudio la reformulación de problemas inversos se dejó como tarea domiciliaria. Sería de esperar que luego de trabajar estas actividades en grupo – con discusión al final de las propuestas realizadas – los futuros profesores se sintieran más cómodos y más preparados para la actividad individual en forma domiciliaria. Por otra parte, se acostumbrarían a realizar análisis de tareas considerando más elementos de los que consideraron en este estudio.

Lo anterior permitiría en principio, obtener reformulaciones de mayor creatividad y mejores análisis de tareas. Al respecto cabe acotar que la invención de problemas es una actividad que implica la producción de ideas originales y seguramente muchos de los profesores en formación no están acostumbrados a realizarla. Disponer de más tiempo y participantes con mayor experiencia y confianza en sí mismos, seguramente proporcionará respuestas más creativas y análisis de tareas de mayor riqueza.

En resumen, el trabajo puede ampliarse y obtener resultados más generales, pero requeriría más poblaciones para el trabajo de campo, más sesiones previas al trabajo final y futuros docentes más habituados a este tipo de labor creativa.

REFERENCIAS

Abell, M. L., y Braselton, J. P. (2016). *Differential equations with Mathematica*. Massachusetts: Academic Press.

Blum, W. (2002). ICMI Study 14: Applications and modelling in mathematics education –Discussion document. *Educational studies in mathematics, 51(1)*, pp.149-171.

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V. y Törner, G. (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. Heidelberg: Springer.

Brown, S., Walter, M. (1990). *The Art of problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brown, S., Walter, M. (1993). *Problem posing*. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Bunge, M. (2006). *Problemas directos e inversos*. Grupobunge. Filosofia y ciencia. Recuperado el 9 de septiembre 2017, de: https://grupobunge.wordpress.com/2006/07/20/119/

Cohen, L. M., Manion, L. L. y Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. UK: Routledge.

Dankhe, G. L. (1986). Investigación y comunicación. En C. Fernández-Collado y G. L. Dankhe (Eds.), *La comunicación humana ciencia social,* pp. 385-454. México: McGraw-Hill.

English, L. (1997). The development of fifth-grade children's problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics*, *34*, pp.183-217.

Groestch, C. W. (1999). *Inverse problems: activities for undergraduates*. Washington D.C.: Mathematical Association of America.

Groetsch, C. W. (2001). Teaching-Inverse problems: The other two-thirds of the story. *Quaestiones Mathematicae, 24 (1)*, 89-94.

Hernández, R., Fernández C. y Baptista, P. (1991). *Metodología de la investigación. (2da edición)* México: McGraw-Hill.

Kilpatrick, J. (1987). Problem formulating: Where do good problems come from? En A. Shoenfeld (Ed.) *Cognitive science and mathematics education* pp. 123-148. New Jersey: Lawrance Erlbaum Associates.

Liu, F. (2003). Teaching inverse problems in undergraduate Level Mathematics, Modelling and Applied Mathematics Courses. En Ye Q., Blum, W., Houston K. y Jiang Q., (Eds.) *Mathematical Modelling in Education and Culture: ICTMA 10,* pp. 165-172. Chichester, England: Horwood Publishing.

Martinez-Luaces, V. (1997a). Algunas reflexiones sobre la resolución de problemas, *Actas de la XI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa.*

Martinez-Luaces, V. (1997b). Las Ecuaciones Diferenciales y su Estudio Cualitativo, *Educación en Física, 3 (2),* pp. 32 - 35.

Martinez-Luaces, V. (2001). Enseñanza de Matemática en Carreras Químicas en base a un enfoque aplicado y motivador. *Números, 45*, pp. 43-52.

Martinez-Luaces, V. (2003). Mass Transfer: the other half of Parabolic P.D.E. *New Zealand Journal of Mathematics*, *32 (Supplementary Issue)*, pp.125-133.

Martinez-Luaces, V. (2004). Teacher training for problem solving and modelling. Comunicación presentada en: *ICME 10.* Recuperado de: www.icme-organisers.dk/tsg03/TSG_3_Program.pdf.

Martinez-Luaces, V. (2005). Engaging Secondary School and University Teachers in Modelling: Some Experiences in South American Countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36 (2-3)*, pp. 193-194.

Martinez-Luaces, V. (2006). EDO y sistemas de EDO: una experiencia de modelado inverso. *Actas EMCI-XIII.* Argentina.

Martinez-Luaces, V. (2007). Inverse-modelling problems in Chemical Engineering courses. En A. D´Arcy-Warmington, V. Martinez Luaces, G. Oates, C. Varsavsky, *Proceedings of Delta 07*. El Calafate, Argentina: ISC-Delta.

Martinez-Luaces, V., (2009). Modelling and inverse-modelling: experiences with O.D.E. linear systems in engineering courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40 (2),* pp. 259-268.

Martinez-Luaces, V. (2011). Problemas inversos: los casi olvidados de la Matemática Educativa. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *24*, pp. 439-447.

Martinez-Luaces, V. (2012). *Problemas inversos y de modelado inverso en Matemática Educativa.* Saarbrücken, Alemania: EAE.

Martinez-Luaces, V. (2013a). Problemas inversos y de modelado inverso: posibilidades y potencialidad en Matemática Educativa. En R. Villanueva, E.

Manzo, P. Villaseñor, D. Camacho y M. Pérez. *Memoria. Congreso internacional en Ciencias de la Educación*, pp. 15-23. Colima, México: Universidad de Colima.

Martinez-Luaces, V. (2013b). Inverse modelling problems in linear algebra undergraduate courses. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44 (7)*, pp. 1056-1064.

Martinez-Luaces, V. (2016a). Inverse Modeling Problems and their Potential in Mathematics Education. En M. Vargas (Ed.) *Teaching and Learning: Principles, Approaches and Impact Assessment,* pp. 151-185. New York: Nova Publishers.

Martinez-Luaces, V. (2016b). *Problemas de modelado inverso en Educación Matemática*. Saarbrücken, Germany: EAE.

Martinez-Luaces, V. (2017a). Relevance, motivation and meaningful learning in Mathematics Education. En R. Nata (Ed.) *Progress in Education*, pp. 207-233. New York: Nova Publishers.

Martinez-Luaces, V. (2017b). Laplace Transform in Chemistry degrees Mathematics courses En K. Patterson (Ed.) *Focus on Mathematics Educations Research*, pp. 89- 115. New York: Nova Publishers.

Martinez-Luaces, V. (2017c) A Curriculum Design Decision as the Starting Point for a Multidisciplinary Research Group. En: L. Wood, Y. Breyer (Eds.) *Success in Higher Education,* pp. 333 - 342. Singapur: Springer.

Martinez-Luaces, V. y Cuitiño, E. (2000). Estadística para Químicos: ¿Qué enseñar? *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *13,* pp. 198-204.

Martinez-Luaces, V. y Noh, S. (2015). Report of the Topic Study Group 13 about Teaching and Learning of Calculus. En: *Intellectual and attitudinal challenges, Proceedings of ICME 2012,* (pp. 447-452). Seul, Corea: Springer.

Martinez-Luaces, V. y Oates, G. (2013). Calculus from around the world. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44 (5),* pp. 621- 623.

Martinez-Luaces, V. y Varsavsky, C. (2007). Vision and change for a new century. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 38 (7),* pp. 859-860.

Martinez-Luaces, V., Velázquez, B. y Dee, V. (2009). A course on experimental design for different university specialities: experiences and changes over a decade. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40 (5)*, pp. 641-657.

Moreno, A. y Ramírez, R. (2016). Variables y funciones de las tareas matemáticas. En L. Rico y A. Moreno (Eds.). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*, pp. 243-257. Madrid: Pirámide.

OCDE (2013). PISA 2015 draft mathematics framework. Recuperado el 10 de septiembre de 2017, de: http://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/Draft%20PISA%202015%20Mathematics%20Framework%20.pdf.

Polya, G. (1979). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, pp. 15-38. Barcelona: Horsori.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática (AIEM)*, *1*, pp. 39-63.

Rico, L., y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y la metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiañez y M. Molina (Eds.) *Análisis didáctico en educación matemática. Metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*, pp.1-22. Granada: Comares.

Rico, L., Lupiañez, J. L., y Molina, M. (Eds.) (2013). *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular*. Granada: Editorial Comares.

Rico, L., Moreno Verdejo, A. (Coords.) (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria*. Madrid: Ed. Pirámide

Schoenfeld A. H. (1994). *Ideas y tendencias en la resolución de problemas*. Buenos Aires, Argentina: Olimpíada Matemática Argentina.

Silver, E. A. (1994). On Mathematical Problem Posing. *For the Learning of Mathematics*, *14(1)*, pp. 19-28. Ç

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM-Zentrallblatt fur Didaktik der Mathematik, 29(3)*, pp. 75-80.

Silver, E., Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27(5)*, pp. 521-539.

Silver, E., Mamona-Downs, J., Leung, S., Kenney, P. (1996). Posing mathematical problem: An exploratory study. *Journal for research in mathematics education*, *27(3)*, pp. 293-309.

Simmons, G. F. (2016). *Differential equations with applications and historical notes*. Florida: CRC Press.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. En A. McIntosh y N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective*, pp. 164-185. Edit Cowan University: MASTEC.

Varsavsky, V., Waldock, J., Harding, A., Bookman, J., Sheryn, L. y Martinez-Luaces, V. (2011). Undergraduate mathematics around the world. En J. Hannah y M. Thomas (Eds.) *Proceedings of Volcanic Delta 2011*, pp. 399-410**.**

Yoon, C., Dreyfus, T., & Thomas, M. O. (2010). How high is the tramping track? Mathematising and applying in a calculus model-eliciting activity. *Mathematics Education Research Journal*, *22(2)*, 141-157.

Anexo: Problema de la piscina.

En la primera sesión de trabajo se planteó el problema siguiente:

MÁSTER DE PROFESORADO DE SECUNDARIA, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. CURSO 2016-2017
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.
ESTUDIO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: ENRIQUECIMIENTO Y COMPLEJIDAD.

PROBLEMA 1

Volumen de agua en una piscina: Problema original y reformulaciones.

En la primera versión de este problema, se plantea que una piscina tiene 3 m de profundidad en el extremo destinado a los adultos y 1 m de profundidad en el lado opuesto, para los niños. Se denomina h a la altura del espejo de agua en el extremo más profundo y se proporcionan las dimensiones de la piscina que son: 40 m de largo por 20 m de ancho, como se observa en la Figura 1:

Figura1. Diagrama de la piscina

Problema 1 directo, consiste en obtener el volumen de agua, V, como función de la altura, h.

El diagrama 2es útil para la resolución de ese problema:

La línea recta que pasa por los puntos $(0,-3)$ y $(40,-1)$ representa el fondo de la piscina y la línea horizontal punteada representa el espejo de agua y corresponde a la función $y = 3 - h$.

Figura 1a. Problema de la piscina

El punto de intersección de ambas líneas rectas se puede calcular fácilmente y utilizando conocimientos de geometría elemental resulta muy simple hallar el área del triángulo pintado de gris en la figura 2. A partir de dicha área, es fácil obtener el volumen de agua en la piscina, esquematizada en la figura 1.

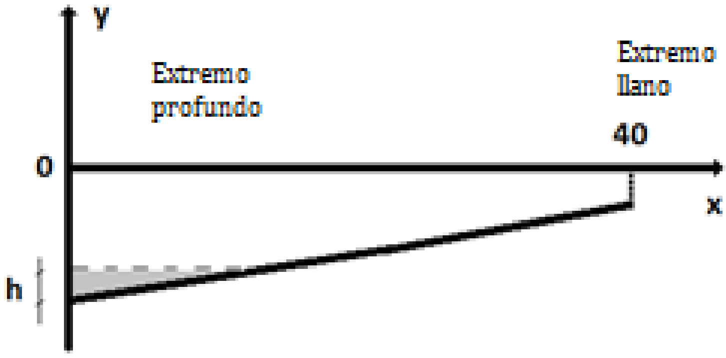


Figura 2. Diagrama para el problema de la piscina

Valora las características de esta tarea de acuerdo con los descriptores y variables que muestra la plantilla adjunta.
Incluye comentarios que aclaren tu opción para mejorar el problema.

Figura 1b. Problema de la piscina.

Los profesores en formación trabajaron sobre este problema que ya había sido propuesto en Colima (Martinez-Luaces, 2013) y que también está recogido en dos libros sobre problemas inversos de modelado (Martinez-Luaces, 2012, 2016).

En esa primera sesión de clase (día 9 de febrero de 2017) se propuso dicho problema planteado en forma de problema directa y se pidió a los futuros profesores que lo reformularan como parte de una propuesta de enriquecimiento de tareas destinadas a alumnos de Enseñanza Secundaria.

No se solicitó en ningún momento que la reformulación debía ser en forma inversa.

Como parte de la tarea, se les suministró una planilla para que hicieran la valoración de los enunciados de los problemas propuestos. Copia de la planilla suministrada a los futuros profesores puede verse en la Figura 2.

Las características contempladas en dicha planilla y los descriptores que allí se consideran fueron luego utilizados en secciones posteriores del trabajo.

MÁSTER DE PROFESORADO DE SECUNDARIA, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS. DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. CURSO 2016-2017. ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.
ESTUDIO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: ENRIQUECIMIENTO Y COMPLEJIDAD.

Análisis del enunciado de un problema. Plantilla para la valoración de enunciados.
Identifica cada descriptor, en cada característica y valóralo de 1 a 3 cuando sea razonable

Característica analizada	**Descriptores**	**Valoración del problema**	**Comentarios**
Significatividad	Contenidos matemáticos		
	Contenidos previos		
	Interés del reto		
	Finalización tarea: reconocimiento/ justificación		
Autenticidad	Situación		
	Pregunta		
	Lenguaje		
	Datos		

Característica analizada	**Descriptores**	**Valoración problema**	**Comentarios**
Elementos que componen la tarea	Meta		
	Formulación		
	Materiales y recursos		
	Agrupamiento		
	Situación/ Contexto		
	Temporalización		
Variables de tarea	Contenido matemático		
	Situación		
	Complejidad		

Nombre y apellidos:

Figura 2. Planilla para la valoración de los enunciados propuestos

Finalmente, cabe mencionar que en la figura 3 se puede ver la planificación diseñada por los profesores Rico y Moreno para la sesión de clase mencionada, que constituye la primera parte del trabajo de campo de esta investigación.

MÁSTER DE PROFESORADO DE SECUNDARIA, ESPECIALIDAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA.
APRENDIZAJE Y ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA. CURSO 2016-2017.
ANÁLISIS DE INSTRUCCIÓN.
ESTUDIO DE TAREAS MATEMÁTICAS ESCOLARES: ENRIQUECIMIENTO Y COMPLEJIDAD.

Guión sesión 9 de febrero de 2017.

1. Entrega del enunciado del problema (Documento 1). Presentación y explicación de la actividad que se va a realizar, 15 minutos. Este documento NO se recoge
2. Entrega de la plantilla de valoración sobre las características del problema (Documento 2). 30 minutos. Este documento SI se recoge con datos de identificación para su devolución.
3. Entrega de la tarea de reformulación (Documento 3) como tarea para casa, junto con una nueva plantilla de valoración. El lunes se recogen la(s) propuesta(s)

Horario de aplicación: 16:00h a 16:45h, con autorización de A. Moreno

Material necesario:
75 ejemplares del documento 1 y del documento 3
150 ejemplares del documento 2

Figura 3. Guión para la primera clase sobre enriquecimiento de tareas.

Las producciones de los futuros docentes se sometieron a un primer análisis, como puede verse en la Figura 4, que corresponde a un primer estudio de las producciones del grupo A y de igual modo, en la Figura 5 se puede ver un resumen sobre las producciones del grupo B.

De todas las reformulaciones presentadas se seleccionaron tres que habían sido planteadas en forma de problemas inversos y eran particularmente interesantes. Estas reformulaciones se pueden ver en la Figura 6 (dividida en 6a, 6b y 6c), al final de este anexo. Una de estas reformulaciones seleccionadas pertenece a uno de los profesores en formación del grupo A y las otras dos son de integrantes del grupo B.

Grupo A:
Hay una gran variedad de problemas.
En la mayoría de los casos incluyen cambios más o menos importantes en la geometría de la piscina, o agregan elementos como una isla, escalones, etc.
Otros optan por agregar elementos externos como un depósito o un bordillo para la piscina.
Algunos plantean problemas de costos, involucran áreas, o ponen varios estanques.

Los enunciados son muy creativos, pero hay un menor número de enunciados inversos que en el otro grupo, que sin embargo se mantuvieron dentro de contextos más "tradicionales".
De todos los problemas, destaca el que cambia bastante la geometría (particularmente el fondo de la piscina cambia varias veces de pendiente), pero lo interesante es que pregunta a qué razón debería llenarse para que dicho proceso de llenado se termine en 3 horas. Es decir, da el tiempo en que se espera terminar la operación y pide cuál sería el caudal adecuado. Este trabajo es el codificado como A15.

Figura 4. Algunos comentarios sobre las producciones del grupo A.

Luego, en una segunda sesión de trabajo, mostrando estas reformulaciones, se les dio una breve explicación sobre problemas directos y problemas inversos. Finalmente, se propuso a los docentes en formación un nuevo problema directo (el problema de la oveja), al que se pidió que reformularan de manera inversa.

Grupo B
En las reformulaciones de los estudiantes del Grupo B hay varias muy interesantes.
Muchos alumnos optaron por cambiar la forma de la piscina, otros agregaron otras variables como el costo de llenado por metro cubico de agua, o el costo de remover el terreno para construir la piscina, o la cantidad de material para el revestimiento lateral de la misma, entre otros elementos.
Hubo también conexiones interesantes con la Física (volumen desplazado por bañistas) y con la Química (cantidad de cloro a agregar al agua) y por supuesto cuestiones de índole económica (costos fundamentalmente).
Hubo varios problemas inversos. Algunas de las más interesantes son propuestas en (archivo B1, página 11/40), (archivo B2, hoia 11/42) (archivo B4, página 27/40), (archivo B5, página 11/36) y (archivo B5, página 19/36), entre otros.

La propuesta de (archivo B1, página 11/40), agrega a la piscina grande un sector para niños semi-circular de profundidad constante, da la razón de llenado (1.4 metros cúbicos por minuto) y plantea que si el llenado de la piscina terminó a las 18 horas, ¿en qué momento comenzó dicho proceso? y ¿a qué altura estaba el agua a las 10.00 am?
Otro interesante es el propuesto en (archivo B4, página 27/40), que agrega un grupo de bañistas de 1.7 metros de altura y que cada uno desplaza un volumen que representa el 0.05% del agua de la piscina llena. La pregunta es en ¿cuánto tiempo los cubriría el agua?
No son los únicos, ni mucho menos, pero estos son interesantes, realistas, etc. entre los utilizados para ejemplificar problemas inversos.

Figura 5. Algunos comentarios sobre las producciones del grupo B.

Cabe acotar que al igual que el problema de la piscina, el problema de la oveja ya había sido propuesto en Colima (Martinez-Luaces, 2013) y también fue recogido en los dos libros antes mencionados (Martinez-Luaces, 2012, 2016).
Como ya se comentó, finalizamos este anexo, presentando las reformulaciones inversas del problema de la piscina que fueron seleccionadas para introducir el tema en la segunda sesión sobre enriquecimiento de tareas. Dichas reformulaciones se pueden ver en Figuras 6a, 6b y 6c.

El fondo de una piscina de dimensiones 40 m de largo por 20 m de ancho está formado por dos rampas y dos zonas llanas, como representado en la figura 1. (cada una de 10 m de largo).

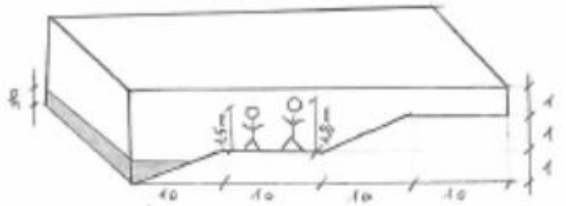


Figura 1. Diagrama de la piscina

La profundidad de la piscina es de 3 m en el extremo destinado a los adultos y de 1 m en el lado opuesto, para los niños.
Se denomina h a la altura del espejo de agua en el extremo más profundo.

I) Calcula el volumen de agua en la piscina como función de la altura h.

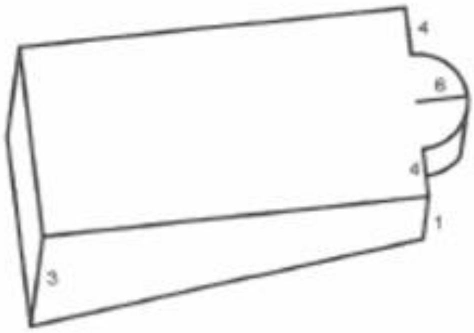
II) ¿A qué razón (expresada en m^3/min) se debe llenar la piscina para que sea completamente llena de agua en un tiempo de 3 h?

III) Considerando la razón de llenado obtenida en el apartado II, cuanto tiempo es necesario para que el agua cubra completamente a dos personas de alturas respectivamente 1.5 m y 1.8 m posicionados en la zona de la piscina con fondo llano y profundidad de 2 m?

Figura 6a. Problema inverso formulado por un profesor en formación.

REFORMULACIÓN DEL PROBLEMA 1: En la urbanización Eclipse ha habido una avería en la piscina y tras arreglarla, se procedió a su llenado. La piscina es de la forma:

Boz
Ref



Nota: tomamos $\pi = 3'1415$.
Sabemos que el área de la superficie total de la piscina es $1056'547m^2$.
La profundidad de la piscina grande en la parte más honda es de 3 metros, y en la parte menos honda es de 1 metro.

Además, la semicircunferencia de radio 6 metrosque se observa en el dibujo es una piscina menos profunda para niños pequeños que está comunicada con la de adultos, ésta tiene de profundidad medio metro menos que la parte menos honda de la piscina grande y equidista 4 metros de los laterales de la piscina grande, como se aprecia en el dibujo.La profundidad de la semicircunferencia es constante.

a) ¿Cuál es la longitud de la rampa?
b) Sabiendo que la piscina se llena a razón de $1'4\ m^3$por minuto, y el llenado se completó a las 18:00, ¿a qué hora empezó a llenarse la piscina?¿A qué altura estaba el agua a las 10:00 de la mañana?

Argumentación:

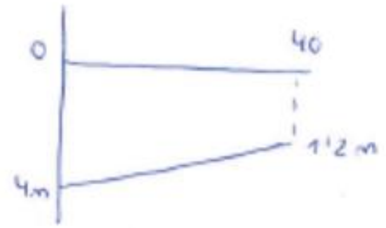
En este problema se ha modificado la piscina, añadiéndose medio cilindro, y proporcionando datos que permitan hacer los nuevos cálculos.
Los datos se presentan de distinta forma, dando medidas a partir de las cuáles se tienen que obtener otras (a partir de áreas, obtener longitudes) y así se varía y no se presentan los datos siempre de la misma manera.
Por otro lado, se realizan preguntas cuya respuesta no es el cálculo final de un volumen, sino que necesitan razonar tras haber obtenido dicho volumen.

Figura 6b. Problema inverso formulado por un profesor en formación.

B28
Ref

REFORMULACIÓN

Una piscina tiene 4m de profundidad en el extremo destinado a los adultos y 1'2 m de profundidad en el lado opuesto, para los niños. Se denomina h a la altura del agua en la piscina S. La piscina se está llenando a razón de 0'9 metros cúbicos por minuto y hay un grupo de bañistas de 15 personas, que miden 1'7 m de altura, en el centro de la piscina, ¿en cuánto tiempo los cubriría el agua si la piscina mide 50 m de largo por 20m de ancho y por cada bañista el volumen del agua sube un 0'05%?



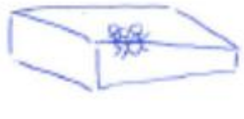


Figura 6c. Problema inverso formulado por un profesor en formación.