TRABAJO FIN DE MÁSTER UNIVERSITARIO EN PROFESORADO DE E.S.O, BACHILLERATO, F.P. Y ENSEÑANZA DE IDIOMAS

Especialidad Matemáticas

Unidad Didáctica: Introducción al concepto de límite y continuidad

LUIS ANTONIO
TORRES SALINAS

Tutor:
Pablo Flores
Martínez

ÍNDICE

1. INTRODUCCIÓN

Para este Trabajo Fin de Máster he realizado una Unidad didáctica titulada "Aproximación al concepto límite. Continuidad", para el primer curso de Bachillerato Científico-Tecnológico. Personalmente, entiendo una Unidad didáctica como la unidad básica de programación, una unidad de trabajo de duración variable, que organiza un conjunto de actividades de enseñanza y aprendizaje y que responde, en su máximo nivel de concreción, a todos los elementos del currículo: qué, cómo y cuándo enseñar y evaluar. Por ello la Unidad didáctica supone una unidad de trabajo articulado y completo en la que se deben precisar los objetivos y contenidos, las actividades de enseñanza y aprendizaje y evaluación, los recursos materiales y la organización del espacio y el tiempo, así como todas aquellas decisiones encaminadas a ofrecer una más adecuada atención a la diversidad del alumnado.

La Unidad didáctica debe poseer un carácter organizativo del trabajo que se va a desarrollar en el aula, pero a la vez tiene que ser flexible y moldeable a las características propias del alumnado, puesto que la planificación se realiza previamente a la interactuación con los alumnos y alumnas, sin conocer las condiciones de éstos.

Además, tiene que servir de elemento comunicador entre docentes, en el sentido de que si un profesor/a se detiene a observar una Unidad didáctica diseñada por un colega, es capaz de entender qué objetivos se pretenden conseguir en esa Unidad, cómo va a actuar para llevar a al alumnado hacia la adquisición de esos objetivos, las actividades y tareas que va a utilizar para ello,… de manera que con estos datos esté incluso capacitado para impartir cualquiera de las sesiones que aparezcan planificadas en dicha Unidad didáctica.

El trabajo está estructurado de la siguiente manera:

I. CONCEPTO DE INFINITO: INFINITO ACTUAL E INFINITO POTENCIAL

La idea de infinito es fundamental en esta Unidad didáctica, por lo que creo oportuna una reflexión previa sobre el mismo. En concreto hago la diferenciación entre las dos nociones matemáticas de infinito: infinito actual e infinito potencial. Además, es conveniente realizar un repaso a través de la historia para ser conscientes de los cambios que experimentaron los conceptos que actualmente aceptamos y vemos como normales.

II. HISTORIA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Con la misma intención que en el apartado anterior planteo la evolución de la idea de límite desde los Pitagóricos hasta entrado el siglo XIX.

III. CURRÍCULO

Cuando nos enfrentamos al diseño de una Unidad didáctica es necesario que esté de acuerdo con la legislación vigente, por lo cual hay que considerar lo que el currículo determina para la materia y el cuso correspondiente. Además he creído oportuno añadir los currículos del curso anterior y posterior para una mejor planificación.

IV. ANÁLISIS DE CONTENIDO

Un estudio exhaustivo de los contenidos que abarca la Unidad didáctica es necesaria para, de entre todos ellos, discernir cuáles son los verdaderamente interesantes y necesarios. A la vez hay que estudiar los fenómenos en los que intervienen estos contenidos y los sistemas de representación que intervienen.

V. ANÁLISIS COGNITIVO

Igualmente, conviene efectuar una relación de las expectativas del aprendizaje que deseamos que nuestros alumnos y alumnas adquieran al finalizar la unidad didáctica, siendo conscientes de los errores y dificultades que pueden encontrar en ella.

VI. METODOLOGÍA

Esta es la parte en la que se estructuran y se muestra cómo va a ser el desarrollo de las sesiones que engloba la Unidad, el tipo de actividades que voy a plantear, los materiales que voy a utilizar, etc.

VII. EVALUACIÓN

En este apartado se especifican los criterios y herramientas que voy a seguir para evaluar si mi alumnado ha alcanzado los objetivos previstos en el análisis cognitivo.

VIII. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Como no todos los alumnos y alumnas aprenden de la misma manera es necesario promover una serie de medidas para atender a cada uno de los ritmos de aprendizaje que se encuentran en aula.

IX. EDUCACIÓN EN VALORES

Con el fin del desarrollo integral del alumnado se trabajarán los diferentes aspectos de la educación en valores desde la materia de Matemáticas.

2. CONCEPTO DE INFINITO: INIFINITO ACTUAL E INFINITO POTENCIAL

2.1. EL CONCEPTO DE INFINITO EN LA ENSEÑANZA

El aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos plantea el problema de que el estudiante no tiene, en general, una experiencia previa que le permita construir el concepto a partir de esta. Este es el caso del concepto de infinito.

Generalmente, la forma de enseñarlo consiste en utilizar metáforas didácticas basadas en conjuntos *"muy grandes"* para fijar la idea de infinitud. Esto, permite crear la noción de infinito usada en el lenguaje cotidiano, sin embargo podría generar una mala formación del concepto matemático. La ambigüedad del lenguaje coloquial hace que el concepto del infinito sea un concepto demasiado intuitivo que se parece muy poco a la idea matemática de infinito.

Por otro lado, el concepto de infinito como unidad (infinito actual) se ha utilizado a través de la historia para explicar interrogantes de tipo teológico.

La concepción de infinito como unidad (infinito actual) no se ha trabajado mucho en la enseñanza de la matemática, aún cuando, la naturaleza infinita de los conjuntos numéricos $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ estudiados en primaria y secundaria necesita un conocimiento de esta teoría por parte del profesor. La construcción de la idea del infinito como proceso inalcanzable (el infinito potencial) no es suficiente para explicar por qué $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son equipotentes y en cambio $\mathbb{R}$ tiene una cardinalidad mayor. Este hecho justifica la necesidad de aclarar en algún momento la idea del infinito como unidad (infinito actual).

La imprecisión con que se trata el concepto de infinito plantea algunas interrogantes, por ejemplo:

La aclaración de este concepto, ¿está contemplada en los planes y programas de formación de profesores de primera y segunda enseñanza? ¿Tienen los profesores la suficiente claridad del término infinito, sus aspectos históricos y sus implicaciones teóricas para dar una explicación adecuada de la idea de infinitud considerando que la concepción popular de infinito es muy diferente del concepto formal matemático? ¿En qué momento se debe aclarar al estudiante el concepto matemático del infinito? ¿Será necesaria esta aclaración? ¿Tiene la imprecisión del concepto de infinito alguna consecuencia en el aprendizaje de los temas relacionados con el infinito (límites, sucesiones, series, área bajo una curva, etc.)?

La mayoría de los libros de análisis asumen el hecho de que los estudiantes tienen ya una noción del concepto del infinito y por lo general lo comienzan a utilizar al definir límites al infinito y límites infinitos pero sin hacer una introducción adecuada del concepto. Es conveniente, antes de iniciar este estudio, que el profesor haga una reflexión del infinito antes de comenzar a utilizarlo tanto en los aspectos históricos como en lo referente a las paradojas y contradicciones involucradas.

Es claro que no se puede pretender mostrarle al estudiante la formalidad matemática a nivel de enseñanza primaria y secundaria. Sin embargo, el profesor debe considerar dentro de su planeamiento didáctico la posibilidad de ampliar la concepción usual del infinito en función de las inquietudes y dudas que puedan plantear los estudiantes.

Además, es necesario dejar claro al estudiante que la manera de pensar en procesos que involucran al infinito es diferente a la manera en que se conciben los fenómenos finitos. Esto permite justificar por ejemplo (a un nivel intuitivo) por qué una suma infinita de números positivos en algunos casos es infinita y en otros es un número finita. Lo recomendable en este caso es indicar al estudiante que la forma (intuición o lógica) en que percibimos los procesos finitos no se puede aplicar en general cuando se encuentra involucrado un proceso infinito.

2.2. HISTORIA DE LA IDEA DE INFINITO

Para Platón y Pitágoras el infinito era *apeiron*, el caos, el infinito carecía de medida. La palabra *apeiron* tal como la emplea Anaximandro, significa *sin fin* o *sin límite*, suele traducirse como *lo infinito, lo indefinido, lo ilimitado.*

La idea del infinito también fue rechazada por Aristóteles y los escolásticos, basados en las mismas contradicciones que el concepto de infinito generaba. Uno de los típicos argumentos empleado en contra del infinito era el conocido como la «*aniquilación* de los números». Según este argumento los números finitos serían absorbidos por los números infinitos, es decir, para todo número finito a, $a + \infty = \infty$ y de esta forma los números infinitos *aniquilaban* a los números finitos.

Aristóteles trató de enfrentar el problema del infinito a través de dos representaciones, dos concepciones complementarias y cuya interacción dialéctica ha influido el propio desarrollo de la matemática. En el tercer libro de su obra *Física*, Aristóteles distingue dos tipos de infinito: el infinito como un proceso de crecimiento sin final o de subdivisión sin final y el infinito como una totalidad completa. El primero es el infinito *potencial* y el segundo el infinito *actual.*

La noción de infinito potencial se centra en la operación reiterativa e ilimitada, es decir, por muy grande que sea un número natural siempre podemos concebir uno mayor, y uno mayor que este último y así sucesivamente, donde esta última expresión y *así sucesivamente* encierra la misma idea de reiteración ilimitada, al infinito. Este tipo de infinito potencial es el que sirve de base a la noción de límite del cálculo infinitesimal. Por su parte, la noción de infinito como totalidad fue ampliamente desarrollada en la geometría al dividir un segmento de recta en un número infinito de puntos y el infinito actual de los infinitesimales sirvió de soporte para la posterior formalización del cálculo infinitesimal.

Durante la Edad Media, la mayor parte de la matemática relacionada con lo infinitamente grande y lo infinitamente pequeño tomó la forma de un conjunto de especulaciones en torno a las ideas de Platón y Aristóteles sobre la relación entre punto y recta, la naturaleza de lo inconmensurable, las paradojas de Zenón, la existencia de lo indivisible y la potencialidad y actualidad de lo infinito. Aunque en esta época, el debate sobre la naturaleza del infinito tomó connotaciones teológicas más que matemáticas, al considerarse el infinito como propiedad exclusiva de la majestad divina de Dios. Así, San Agustín creía que sólo Dios y sus pensamientos eran infinitos y, Santo Tomás de Aquino, por su parte, demostraba en el *Summa Theologiae* que, aunque Dios era ilimitado él no podía crear cosas absolutamente ilimitadas.

Esta controversia sobre el infinito se prolongó durante el Renacimiento y en 1600 llevó a la hoguera a Giordano Bruno, quien predicó un universo constituido por infinitos mundos.

En ese mismo año de 1600, Galileo Galilei rechazó la idea del infinito como paradójica, ya que atentaba contra la razón. Galileo llegó a esta conclusión después de observar que los puntos de dos segmentos de recta de diferente longitud podían hacerse corresponder biunívocamente, es decir, el infinito permitía que la *parte* fuera del mismo tamaño que el *todo*. Otro ejemplo muy utilizado por Galileo, y popular por esa época, fue el del conjunto de los números perfectos: el conjunto de los *números perfectos* es una parte del conjunto de los números naturales, sin embargo cada número natural es la raíz cuadrada de un único número natural. Galileo consideraba un segmento de recta formado por un número infinito de puntos y aceptó el continuo de la recta como un infinito actual.

La revolución científica del siglo XVII representó el cambio de un mundo cerrado a un universo infinito. A partir de este siglo se comienza a usar la curva *lemniscata* (∞) como símbolo del infinito y aparece en las populares cartas del Tarot a manera de sombrero sobre la cabeza del Mago o Juglar, en la carta del mismo nombre. El matemático John Wallis, en su obra *Arithmetica Infinitorum,* fue el primero en usar la *lemniscata* para representar el infinito.

Kant, en el siglo XIX, coincidía con Aristóteles al señalar que el límite absoluto es imposible en la experiencia, es decir, nunca podemos llegar al infinito (actual). Y el gran matemático Karl Friedrich Gauss, en 1831, enfatizaba su protesta contra el uso del infinito como algo consumado: "*Protesto contra el uso de una cantidad infinita como una entidad actual; ésta nunca se puede permitir en matemática. El infinito es sólo una forma de hablar, cuando en realidad deberíamos hablar de límites a los cuales ciertas razones pueden aproximarse tanto como se desee, mientras otras son permitidas crecer ilimitadamente*".

Gauss no fue el único matemático de su época en rechazar el infinito actual. También Cauchy rechazó la idea de una colección infinita, por razones parecidas a las de Galileo, es decir, la existencia de una biyección entre la totalidad infinita y una de sus partes, lo cual echaba por tierra el axioma euclidiano de que el todo es mayor que la parte.

El teólogo y matemático checo Bernhard Bolzano fue el primero en tratar de fundamentar la noción de infinito actual, en su obra póstuma *Paradojas del infinito* (1851), defendió la existencia de un infinito actual y enfatizó que el concepto de equivalencia entre dos conjuntos era aplicable tanto a conjuntos finitos como infinitos.

Bolzano aceptó como algo normal que los conjuntos infinitos fueran equivalentes a una parte de ellos mismos. Esta definición del infinito fue utilizada posteriormente por Cantor y Dedekind.

A pesar de que la obra de Bolzano *Paradojas del infinito* era más bien de corte filosófico que matemático, ya que carecía de conceptos cruciales como conjunto y número cardinal, se podría decir que Bolzano fue el primer matemático en dar las bases para la construcción de una teoría de conjuntos.

3. HISTORIA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Hacia el siglo VII a.C., la escuela pitagórica descubre los números y magnitudes inconmensurables suponiendo la necesidad de resolver problemas relacionados con los conceptos de paso al límite. Eudoxo (s. V a.C.) introduce el método de la exhaución y el concepto de “tan pequeño como se quiera”. Igualmente, Demócrito aplica la filosofía atomista a las matemáticas, surgiendo de manera natural el concepto de infinito. Sin embargo, puede que los trabajos de Demócrito sean las famosas paradojas de Zenón que surgen de la búsqueda de magnitudes continuas en un conjunto infinito de partículas infinitamente pequeñas, poniendo de manifiesto que el concepto atomista de infinito requería de las ideas de paso al límite desarrolladas por Eudoxo.

El análisis infinitesimal surge tras la asimilación teórica de los conceptos del cálculo diferencial e integral y la teoría de series, y constituye la respuesta matemática a los problemas de física, astronomía,... planteados en el siglo XVII por Galileo, Kepler,... El campo de aplicación del análisis infinitesimal fue ampliándose durante todo el s. XVII a nuevas funciones emergentes lo que hace urgente el estudio y clasificación de los mismos, así como definir las operaciones que las rigen, es decir, crear la teoría de funciones. La teoría de funciones se desarrolla a partir de los trabajos de Euler (estudia las funciones circulares, exponencial, logarítmica,... y las clasifica) y Lagrange (con el estudio, por ejemplo, de las hiperbólicas) realizados en el siglo XVIII.

Sin embargo, las piedras angulares de la teoría de funciones se originaron en siglo XVII a partir de los trabajos de Newton y Leibnitz sobre el cálculo diferencial. Puede que la parte más importante sea el concepto de límite (introducido por Newton) aunque su capacidad operativa actual no fue desarrollada hasta el siglo XVIII.

D'Alembert dio la primera definición formal al límite a partir del concepto de Newton, pero negó la existencia de infinito. Ya en el siglo XIX, Cauchy confiere al concepto de límite la entidad de concepto puramente algebraico y define los infinitésimos como la cantidad variable dependiente con límite nulo. A partir de estos dos conceptos, Cauchy vuelve a fundamentar todo el análisis matemático.

La continuidad de una función se trata como la existencia de la correspondencia de un incremento infinitesimal de la función a un incremento infinitesimal del argumento. Las bases matemáticas del análisis infinitesimal actual están en los métodos y resultados de la teoría de conjuntos y de la teoría de funciones reales con variable real, impulsada por Bolzano (s. XIX). Weierstrass (s. XIX) aritmetizó el análisis a partir de los trabajos de Bolzano, Cauchy y Abel, resaltando el concepto aritmético de función y alejándose del concepto físico que se les había atribuido hasta entonces.

4. CURRÍCULO

A la hora de diseñar una Unidad didáctica es esencial consultar el marco legislativo vigente y trabajar a partir de las directrices que marca la ley. Por ello, he tenido en cuenta, además de del currículo referente a la materia que nos atañe, Matemáticas I de 1º de Bachillerato, los currículos de los cursos anterior y posterior, para una mejor ubicación y justificación de esta Unidad didáctica. En concreto he extraído del REAL DECRETO 1631/2006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria y del REAL DECRETO 1467/2007, de 2 de noviembre, por el que se establece la estructura del bachillerato y se fijan sus enseñanzas mínimas, los apartados concernientes al bloque de análisis de cada una de las asignaturas, que se muestran a continuación:

4.1. 4º ESO (OPCIÓN B)

- Interpretación de un fenómeno descrito mediante un enunciado, tabla, gráfica o expresión analítica. Análisis de resultados.
- La tasa de variación media como medida de la variación de una función en un intervalo. Análisis de distintas formas de crecimiento en tablas, gráficas y enunciados verbales.
- Funciones definidas a trozos. Búsqueda e interpretación de situaciones reales.
- Reconocimiento de otros modelos funcionales: función cuadrática, de proporcionalidad inversa, exponencial y logarítmica. Aplicaciones a contextos y situaciones reales.
- Uso de las tecnologías de la información en la representación, simulación y análisis gráfico.

Como se puede observar, en ningún momento se hace referencia a contenidos relacionados con límites. Sin embargo, no es extraño encontrar algunos libros de texto en los que se tratan nociones muy intuitivas ligadas a límites, como es el caso de la tendencia de funciones. Algo parecido ocurre con la continuidad, que en estos cursos la entienden como poder dibujar la gráfica de la función sin levantar el lápiz del papel.

4.2. 1º BACHILLERATO

- Funciones reales de variable real: clasificación y características básicas de las funciones polinómicas, racionales sencillas, valor absoluto, parte entera, trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.
- Dominio, recorrido y extremos de una función.
- Operaciones y composición de funciones.
- Aproximación al concepto de límite de una función, tendencia y continuidad.
- Aproximación al concepto de derivada. Extremos relativos en un intervalo.
- Interpretación y análisis de funciones sencillas, expresadas de manera analítica o gráfica, que describan situaciones reales.

En 1º de Bachillerato sí aparece explícitamente un apartado que versa sobre límites y continuidad. En este caso lo trata como una aproximación a estos dos conceptos para, supuestamente, en el segundo curso del Bachillerato tratar de una forma rigurosa ambos conceptos y realizar el cálculo de límites y la determinación de la continuidad de una función. Lo que ocurre, al igual que en 4º de ESO, es que los libros de texto tratan directamente la definición formal de límite y continuidad y el cálculo de éstos. Incluso se llegan a tratar algunos tipos de indeterminaciones y su resolución.

Otro aspecto a considerar es la necesidad de una buena preparación con vistas a las Pruebas de Acceso a la Universidad que se han de realizar el curso siguiente. Posiblemente sea por esto que, aunque no lo refleja el currículo, las editoriales consideran oportuno una mayor profundización en estos contenidos.

4.3. 2º BAHILLERATO

- Concepto de límite de una función. Cálculo de límites.

- Continuidad de una función. Tipos de discontinuidad.

- Interpretación geométrica y física del concepto de derivada de una función en un punto.

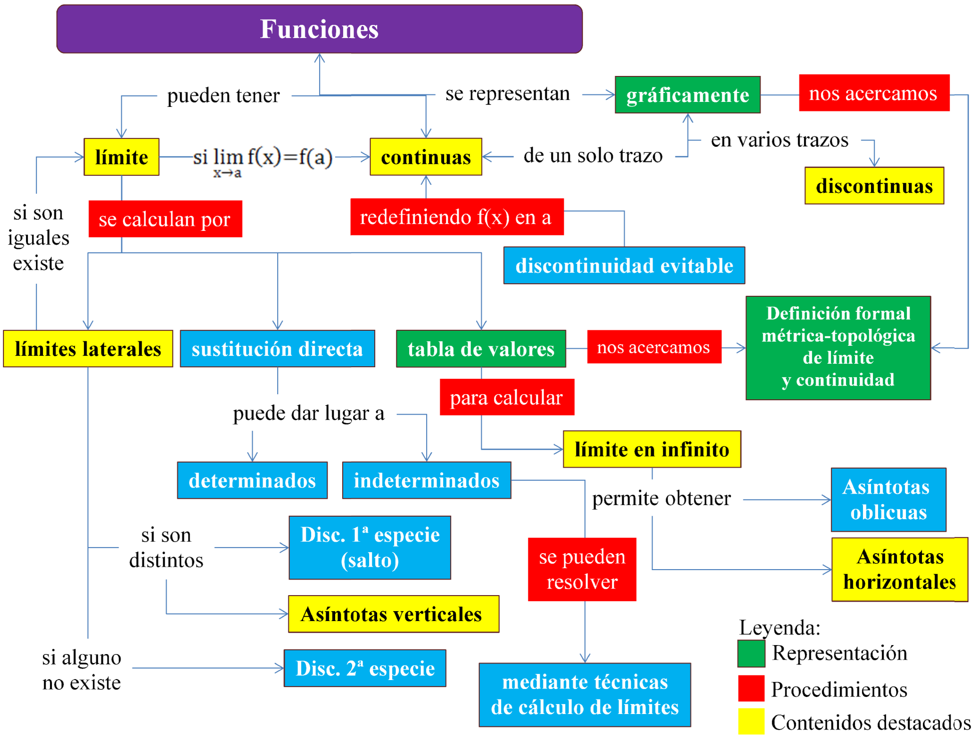
- Función derivada. Cálculo de derivadas. Derivada de la suma, el producto y el cociente de funciones y de la función compuesta. Aplicación de la derivada al estudio de las propiedades locales de una función. Problemas de optimización.

- Introducción al concepto de integral definida a partir del cálculo de áreas encerradas bajo una curva. Técnicas elementales para el cálculo de primitivas. Aplicación al cálculo de áreas de regiones planas.

Es en este curso cuando los legisladores consideran adecuado impartir el cálculo de límites y la determinación de la continuidad de una función, de acuerdo con que en el curso anterior sólo se trataba de introducir los conceptos. Pero por lo anteriormente dicho, estos contenidos suelen ser repasados y ampliados, con una clara orientación a las necesidades exigidas en la Prueba de Acceso a la Universidad.

5. ANÁLISIS DE CONTENIDO

5.1. MAPA CONCEPTUAL



5.1.1. Hechos

Términos	*Notaciones*	*Convenios*
• Sucesión • Límite • Tendencia • Infinito • Convergencia • Divergencia • Asíntota • Continuidad • Discontinuidad	• Sucesiones: $\{(a_n)\}$ • Límite de sucesiones: $\lim_{n\to\infty}\{(a_n)\}$ • Límite de una función en un punto: $\lim_{x\to a} f(x)$ • Límite de una función en más o menos infinito: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ • Límite lateral por la derecha: $\lim_{x\to a^+} f(x)$ • Límite lateral por la izquierda: $\lim_{x\to a^-} f(x)$	• lim significa límite. • → significa tiende a. • $\lim_{x\to a} f(x)$ significa límite de f(x) cuando x tiende al valor a. • $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$ significa límite de f(x) cuando x tiende a $\pm\infty$. • $\lim_{x\to a^+} f(x)$ significa límite de f(x) cuando x tiende al valor a aproximándonos por la derecha. • $\lim_{x\to a^-} f(x)$ significa límite de f(x) cuando x tiende al valor a aproximándonos por la izquierda. • Donde la función no esté definida no se considera la continuidad.

Resultados	
El límite de una función, si existe, es único	
Si $\lim_{x \to x_0} f(x)$ y $\lim_{x \to x_0} g(x)$ existen, se verifica:	Si f y g son continuas en un punto x_0, se verifica:
• $\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x)$. • $\lim_{x \to x_0}\left(k \cdot f(x)\right) = k \cdot \lim_{x \to x_0} f(x)$. • $\lim_{x \to x_0}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x)$. • $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to x_0} f(x)}{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \to x_0} g(x) \neq 0$. • $\lim_{x \to x_0}(f(x)^{g(x)}) = (\lim_{x \to x_0} f(x))^{\lim_{x \to x_0} g(x)}$, si $\lim_{x \to x_0} f(x) > 0$. • $\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$, si g es continua.	• $f + g$ es continua en x_0. • Si k es una constante, $k \cdot f$ es continua en x_0. • $f \cdot g$ es continua en x_0. • $\frac{f}{g}$ es continua en x_0, siempre que $g(x_0) \neq 0$. • La función compuesta, $g \circ f$, es continua en x_0 siempre que g sea continua en x_0. • f^g es continua en x_0 simpre que $f(x_0) > 0$.

5.1.2.Destrezas

- Cálculo de límites de una sucesión tanto finito como infinito por medio de una tabla de valores.
- Cálculo de límite de una función en un punto por sustitución directa. Representación gráfica.
- Operaciones con límites de funciones.
- Cálculo de límites laterales en un punto.
- Reconocimiento de la continuidad de una función polinómica a partir de los límites laterales y de la discontinuidad de salto.
- Representación gráfica.
  Operaciones con funciones continuas.

5.1.3.Conceptos

- Sucesión convergente.
- Sucesión divergente.
- Sucesión oscilante.
- Sucesión de Fibonacci.
- Límite de una sucesión.
- Límite finito de una función en un punto.
- Límite finito de una función en el infinito.
- Límite infinito de una función en un punto.
- Límite infinito de una función en el infinito.
- Límites laterales.
- Asíntota horizontal.
- Asíntota oblicua.
- Indeterminaciones.
- Continuidad en un punto.
- Función continua.
- Discontinuidad en un punto.
- Discontinuidad de salto.
- Discontinuidad evitable.

5.1.4. Razonamientos	• Deductivo: propiedades de la operaciones con límites y funciones continuas. • Inductivo: regularidades en el cálculo de límites. • Analógico: establecer relaciones para resolución de límites. • Figurativo: Uso de tablas y representaciones gráficas.
5.1.5. Estructuras	• Espacio vectorial de las funciones continuas reales $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. • Espacio vectorial de las funciones continuas en un intervalo $\mathcal{C}([a,b])$.
5.1.6. Estrategias	• Cálculo del límite de una función en $+\infty$ y $-\infty$. Esbozo de asíntotas horizontales. • Cálculo de límite infinito en un punto. Reconocimiento desigualdades esenciales. Esbozo de asíntotas verticales. • Reconocimiento de funciones que tengan asíntotas oblicuas y esbozo de las mismas. • Resolución de problemas.
5.1.7. Contenidos descartados	• Sucesión de Cauchy. • Monotonía de una sucesión. • Sucesiones acotadas. • Sucesiones aritméticas. • Sucesiones geométricas. • Continuidad lateral. • Teorema de los ceros de Bolzano. • Teorema del valor intermedio.

5.2. FENOMENOLOGÍA

5.2.1. Estudio de tendencias

- Cálculo de límites de sucesiones.
- Cálculo de límites de funciones en el infinito: divergencia y asíntotas horizontales.
- Obtención del número e como límite de $(1 + 1/n)^n$ cuando n tiende a infinito.

- La temperatura de enfriamiento de un cuerpo es una función del tiempo t que al crecer dicho tiempo disminuye el valor de la temperatura decreciendo y lo que le falta por llegar a la temperatura ambiente asintóticamente tiende a 0. Por ejemplo, estimar la velocidad con que se enfría un pollo al sacarlo de un horno.
- En biología se tiene que medir y calcular el límite de una población cualquiera a lo largo de un determinado tiempo que responde a un comportamiento asintótico.
- A la hora de realizar una medición de una magnitud física, si el valor de la magnitud f(t) tiende con el paso del tiempo al número b, esto es una idealización de una asíntota, entonces cualquiera que sea la sensibilidad ε del instrumento de medición que se tome llegará aquel instante de tiempo K a partir del cual $t > K$ el instrumento dado ya no sea capaz de mostrar la diferencia entre f(t) y b.
- Límite de la sucesión de Fibonacci: número áureo en la naturaleza.
- Definición frecuentista de probabilidad (lanzamiento de una moneda).
- Tendencia de las limitaciones humanas a lo largo de la historia (por ejemplo prueba deportivas).

5.2.2. Estudio local de una función

- Determinación de la continuidad de una función en un punto.
- El concepto de derivada viene determinado por un límite, en concreto se trata de una indeterminación.
- Descartar que una función es derivable en el dominio de continuidad mediante los límites laterales de la función derivada.
- Cálculo de la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto.
- La velocidad instantánea y la aceleración instantánea de un móvil vienen determinadas por una derivada.
- Los fenómenos de la mecánica clásica son de naturaleza continua.
- El mecanismo de cobro de un taxi o de un aparcamiento describen procesos discontinuos.
- Mecánica relativista y mecánica cuántica se rigen por funciones que presentan singularidades como elemento de discontinuidad.

5.3. Estudio de fenómenos relativos a situaciones continuas mediante estudios de situaciones discretas

- Paradojas: Aquiles y la tortuga, paradoja de la flecha o la paradoja de la diagonal escalonada.
- Interpolación de funciones, cuanto mayor sea el número de nodos ($n \to \infty$), equivalentemente el intervalo entre nodos sea menor ($h \to 0$), mejor será la aproximación de la función.
- Método de exhaución de Eudoxo para calcular límites.
- Cálculo de integrales como suma de rectángulos cuya base es cada vez más próxima a cero.

5.3. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

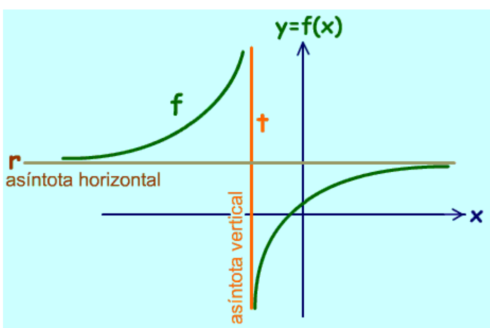
- Simbólico:

Para expresar el límite de la función se escribe $\lim_{x \to a} f(x) = L$ o bien $f(x) \to L$. Análogamente para los límites de una sucesión $\{a_n\}$, $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ o $\{a_n\} \to L$.

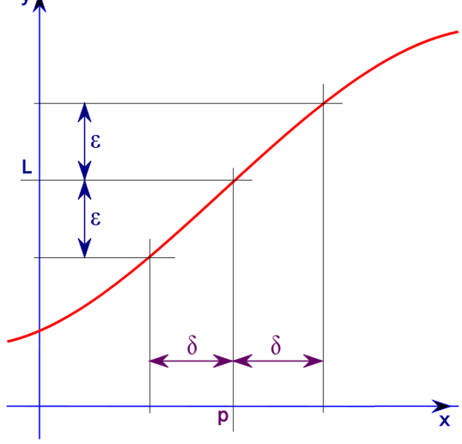
- Verbal:

$\lim_{x \to a} f(x) = L$ se lee "el límite cuando $f(x)$ tiende hacia a es igual a L". Del mismo modo $\lim_{n \to \infty} a_n = L$ se lee "el límite de $\{a_n\}$ es igual a L".

- Sistema de representación gráfico:



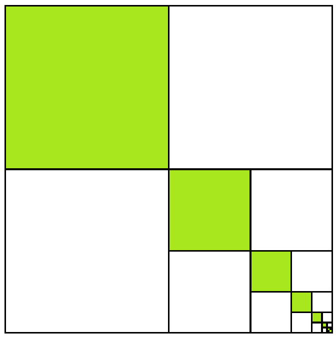
Plano cartesiano



- Sistema de representación numérico

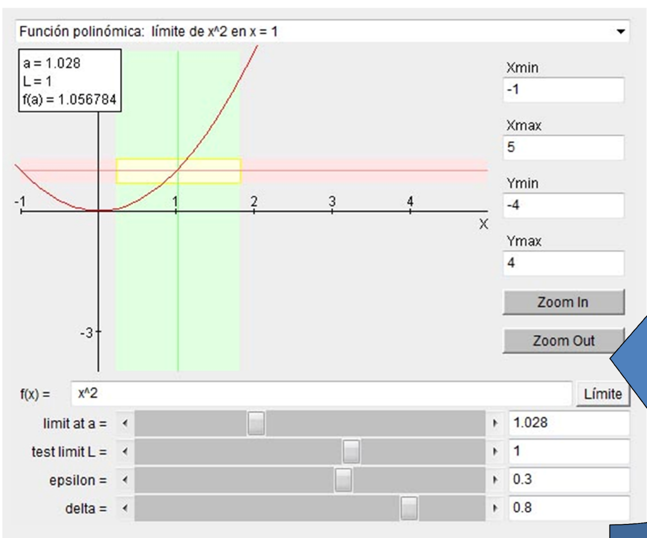
$\lvert x - 2 \rvert$	$\lvert f(x) - 3 \rvert$
$\lvert 1.9-2 \rvert = 0.1$	$\lvert 2.61-3 \rvert = 0.39$
$\lvert 1.99-2 \rvert = 0.01$	$\lvert 2.9601-3 \rvert = 0.0399$
$\lvert 1.999-2 \rvert = 0.001$	$\lvert 2.996001-3 \rvert = 0.003999$
$\lvert 1.9999-2 \rvert = 0.0001$	$\lvert 2.99960001-3 \rvert = 0.00039999$
$\lvert 2.0001-2 \rvert = 0.0001$	$\lvert 3.00040001-3 \rvert = 0.00040001$
$\lvert 2.001-2 \rvert = 0.001$	$\lvert 3.004001-3 \rvert = 0.004001$
$\lvert 2.01-2 \rvert = 0.01$	$\lvert 3.0401-3 \rvert = 0.0401$
$\lvert 2.1-2 \rvert = 0.1$	$\lvert 3.41-3 \rvert = 0.41$

- Sistema de representación figurativo



¿Cuál es la fracción de área pintada de verde?

- Sistema de representación tecnológico



http://www.aulademate.com/contentid-26.html

6. ANÁLISIS COGNITIVO

6.1. PRIORIDADES DE APRENDIZAJE

6.1.1. Introducción al concepto de límite de una función:

- Intuir y expresar el límite de una función en un punto dada una tabla de valores o una gráfica.
- Distinguir los dos tipos de límites laterales en un punto e intuirlos dada una tabla de valores o una gráfica.
- Comprender la idea de límite en el infinito intuyendo el mismo dada una tabla de valores o una gráfica.
- Comprobar la definición de límite en un punto y en infinito a partir de la aproximación intuitiva.
- Explicar fenómenos en los que intervenga el concepto de límite.
- Explicar que el límite no depende del valor en el punto ni de la sucesión con la que nos aproximamos.

6.1.2. Cálculo e interpretación gráfica de los límites:

- Hallar el límite de una función en un punto a partir de sus límites laterales o por sustitución directa.
- Determinar el límite de una función en el infinito.
- Identificar y resolver indeterminaciones sencillas.
- Argumentar la existencia o no de límite de una función en un punto o en infinito.
- Relacionar y expresar gráficamente límites y asíntotas.
- Encontrar las ecuaciones de las asíntotas de una función.

- Justificar la existencia o no de funciones que tengan un cierto límite a partir de ciertas propiedades y formular contraejemplos.

6.1.3. Relación del concepto de límite con el de continuidad:

- Conocer y expresar de manera intuitiva el concepto de función continua en un punto.
- Reconocer la discontinuidad en un punto después de argumentar que tiene sentido el estudio de la continuidad en un punto.
- Identificar los tipos de discontinuidades gráficamente.
- Justificar la continuidad de una función en un punto mediante los límites laterales.
- Relacionar tipos de discontinuidades con los límites laterales en un punto.
- Determinar el dominio de continuidad de una función.
- Reconocer la continuidad de las funciones elementales.
- Esbozar la gráfica de una función conociendo sus asíntotas.
- Justificar la existencia o no de funciones continuas que además verifiquen otras propiedades y formular contraejemplos ante cuestiones diversas.
- Estudiar de manera analítica y gráfica la continuidad de funciones que modelizan diversos fenómenos. Ej. El movimiento de un móvil, la evolución de la población, …

6.2. DIFICULTADES

- Dificultades para comprender que el límite es lo que ocurre cerca del punto y no en el punto.
- Dificultades para reconocer e interpretar límites laterales.

- Errores de tipo algebraico en el manejo de las funciones cuyo límite se quiere determinar.
- Dificultades para comprender que el cálculo del límite no es siempre por sustitución.
- Problemas con el uso de diferentes representaciones de las funciones.
- Significado de la expresión “tender a”.
- Conflicto con la creencia de que las funciones discontinuas en general no tienen límite.
- Dificultad para comprender la idea de límite en el infinito.
- Errores inducidos de tipo numérico en la realización de operaciones y manejo de funciones.
- Creencia de que la aparición de una indeterminación implica la no existencia de límite.
- Dificultades para relacionar expresiones de límites con su traducción gráfica o el proceso contrario (Por ejemplo, $\infty - \infty = 0, \frac{1}{0} = 0, \frac{0}{\infty}$ indeterminado).
- Dificultad para distinguir tipos de discontinuidades.

7. METODOLOGÍA

En esta Unidad didáctica se tiene que reflejar también cómo enseñar. Ese aspecto queda recogido en la metodología que voy a seguir a lo largo de esta unidad. Se evitarán en todo lo posible las clases eminentemente expositivas, fomentando la participación del alumnado y promoviendo con esto el diálogo dentro de la clase. Cuando introduzcamos algún concepto inmediatamente se darán ejemplos, se resolverán cuestiones, ejercicios y problemas y se propondrán al alumnado los necesarios para asegurar su comprensión. Es por esto que el/la alumno/a es el verdadero artífice del proceso de aprendizaje, es quien, en último término, construye, modifica, enriquece y diversifica su conocimiento. Además, podemos decir que el aprendizaje se favorece enormemente mediante la interacción social, por lo que las interacciones profesor-alumno/a y alumno/a-alumnos/as serán un punto clave en el aprendizaje de estos últimos.

Por otra parte, es fundamental la incorporación a la dinámica habitual de trabajo en el aula de las alternativas metodológicas existentes para el uso educativo de internet, tales como las webquests, cazas del tesoro, herramientas de autor, entre otras.

Esta unidad he planificado utilizar ocho sesiones más otra sesión que la utilizaré para realizar una prueba escrita. Los sesenta minutos de cada sesión la he dividido en tres espacios temporales: en el primero, de una duración de 15-20 minutos, resolveré las dudas y ejercicios planteados en la sesión anterior, salvo en la primera sesión de la unidad en la que utilizaré estos primeros minutos para motivar e introducir al alumnado los contenidos de la unidad. En los segundos 25-30 minutos impartiré los contenidos planificados para la sesión, poniendo ejemplos para una mejor comprensión. En los últimos 15-20 minutos propondré actividades para que los alumnos/as los realicen en clase, saliendo algún voluntario/a a la pizarra para solucionar estos ejercicios o problemas con la ayuda del resto del alumnado. Al finalizar la sesión mandaré el trabajo que deben realizar en casa.

7.1. Secuencia de contenidos

Los contenidos que he planificado para impartir en esta unidad didáctica se dividen en tres bloques fundamentalmente.

7.1.1. Bloque I: Límite de una sucesión.

Este primer bloque lo he diseñado como introducción la noción de límite. Tras repasar el concepto de sucesión, sus propiedades y tipos, introduzco la idea de límite de una sucesión. Me parece oportuno realizar esta introducción para límites porque creo que es más sencillo para el alumnado comprender este concepto si se hace de manera discreta, como es el caso de las sucesiones, antes de hacerlo de forma continua, un proceso más complejo debido fundamentalmente a la dificultad que posee el alumnado para comprender la complitud de $\mathbb{R}$.

7.1.2. Bloque II: Límite funcional.

Una vez tenido un primer contacto con los límites, es el momento de sumergirse de lleno en el límite de funciones. En unidades anteriores ya se han estudiado las características generales de funciones y las funciones exponencial, logarítmica y trigonométricas para poder trabajar con ellas en esta unidad. En primer lugar extenderé el límite en el infinito a funciones, a partir del límite de sucesiones, y posteriormente impartiré el límite en un punto. Me detendré en el estudio de asíntotas horizontales y verticales, atendiendo a su cálculo formal con límite, pero también trabajaré la identificación de asíntotas simplemente observando la expresión algebraica de la función. Practicaré el cálculo de límites de funciones sencillas.

7.1.3. Bloque III: Continuidad.

Tras ver el límite funcional es la hora de relacionarlo con la continuidad de funciones. Principalmente se usa el límite en un punto y límites laterales. Es importante de nuevo que el alumnado que tenga clara la noción de complitud para entender la definición rigurosa de continuidad. Otro de los aspectos fundamentales de este bloque es la clasificación de discontinuidades y su identificación.

7.2. Actividades

A lo largo de la unidad propondré actividades de diferente tipo necesarias para poner en juego los conceptos y sobre todo los procedimientos que se han explicado durante las sesiones que ha ocupado esta unidad. Los modelos de actividades que se ponen de manifiesto son:

- Inicio: al comenzar la unidad necesito de alguna manera conocer los conocimientos previos que el alumnado posee sobre las nociones a estudiar. Con este objetivo y con el de introducir los nuevos contenidos planteo las actividades de inicio.

- Motivación: aunque en este curso los alumnos y alumnas ya se encuentran por voluntad propia, sigue siendo necesario motivar y evitar el desaliento entre el alumnado. Esto voy a intentar conseguirlo manteniendo un buen ambiente de trabajo de trabajo en el aula, procurando la participación del alumnado en clase,… pero también las actividades que proponga tiene que contribuir a este fin. Para adquirir este carácter motivador diseñaré actividades llamativas, ya sea por el enunciado, por el contexto en el que las sitúo o porque su resolución supone un reto.

- Desarrollo: estas actividades de desarrollo son las que los alumnos/as deben ir realizando a lo largo del tema, por ello, son actividades que, en principio, no van más allá de comprobar si se han adquirido los procedimientos relativos al primer nivel de utilización de los conocimientos.

- Consolidación: las actividades de consolidación, como su propio nombre indican, son las que van a ayudar a los alumnos/as a consolidar los conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo de la Unidad Didáctica. Permiten lograr con mayor acercamiento a la realidad del aprendizaje del alumno, la fijación de los conocimientos, desarrollo de las habilidades, hábitos y capacidades, así como modos de actuación.

- Investigación: este tipo de tareas están orientadas a un trabajo mucho más individual y personal por parte del alumno/a. Les propongo un tema sobre el que deben buscar información y su relación con los contenidos propios de la Unidad didáctica. Estas actividades suelen ser de historia o de procesos naturales en los que intervengan dichos contenidos. Con estas actividades trabajo paralelamente la iniciativa y la confianza del alumnado.

7.3. Planificación de las sesiones

A lo largo de las ocho sesiones en que voy a impartir esta Unidad didáctica he repartido los contenidos de la siguiente manera:

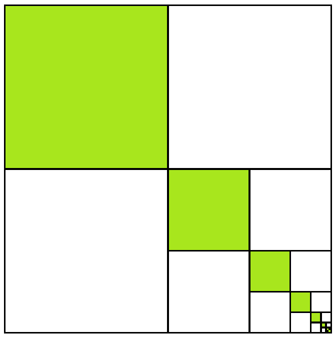
SESIÓN I	Detección de conocimientos previos, repaso de cursos anteriores y sucesiones. Límites de sucesiones.
SESIÓN II	Tendencia en funciones. Límite infinito en el infinito.
SESIÓN III	Límite finito en infinito e infinito en un punto. Asíntotas.
SESIÓN IV	Límite función en punto: límites laterales.
SESIÓN V	Cálculo de indeterminaciones I.
SESIÓN VI	Cálculo de indeterminaciones II.
SESIÓN VII	Estudio de la continuidad de funciones.
SESIÓN VIII	Repaso general de la unidad didáctica.

- SESIÓN I

Como dije anteriormente tengo que conocer los conocimientos previos del alumnado. En el caso que nos atañe, no tendrían por qué haber visto en cursos anteriores contenidos relativos a límites o tendencia, como ya lo reflejé en apartado 4 en la sección referente al currículo en el cuarto curso de la educación secundaria obligatoria.

Es en esta primera sesión cuando haré un repaso de los cursos anteriores y de los contenidos que ha visto el alumnado en ellos. Para determinar el nivel de conocimientos que poseen realizaré una batería de preguntas rápidas y de respuesta corta que muestren sobre todo el nivel de conceptos que tiene el alumnado. En caso de que ya hayan visto por lo menos la noción de tendencia comenzaré directamente con el límite de sucesiones. Si no es el caso tendré que comenzar por transmitirles esa noción de tendencia, que suele estar relacionada con el límite en infinito, a través de las propias sucesiones y cuando llegue el momento extrapolaré esa misma idea de tendencia a funciones.

La primera toma de contacto que va a tener el alumnado es que determinen qué cantidad de superficie corresponde a las porciones pintadas de verde del siguiente cuadrado:



Con esto quiero hacerles ver que los procesos infinitos que se acometerán en esta Unidad tienen comportamientos a los que no están acostumbrados.

En un principio será necesario repasar el propio concepto de sucesión y recordar los tipos con los que más han trabajado: progresiones aritméticas y progresiones geométricas. A la vez pondré ejemplos que no sean de ninguno de los tipos anteriores, motivando la introducción de los conceptos de sucesión recurrente y de término general de una sucesión, que a posteriori será necesario para determinar el límite.

Al inicio les será mucho más fácil entender esta construcción con ejemplos sencillos y que ellos mismo puedan comprobar con la calculadora. Por esto trabajaremos con actividades similares a la siguiente:

Actividad 1: Dada la sucesión $\{1/n\}$, determina, con ayuda de la calculadora, sus términos $10, 10^2, 10^5$ y 10^{10}, ¿qué observas en el comportamiento de la sucesión? Realiza un estudio similar con la sucesión $\{n+3\}$, ¿cuál su tendencia?

Tras esta introducción daré la definición muy intuitiva de la convergencia y la divergencia de sucesiones. Para una asimilación de estos conceptos propondré a los alumnos/as que ellos mismos propongan sucesiones que consideren convergentes o divergentes, diferentes de las ya vistas, y que entre los compañeros discutan la tendencia de las mismas, argumentando y justificando, con las herramientas de las que dispongan hasta ese momento, la veracidad o falsedad de las proposiciones.

Para finalizar la sesión repasaré los contenidos más destacados y propondré actividades similares a las anteriores para que se realicen en casa.

- SESIÓN II

Una vez vista la tendencia de sucesiones, es el momento de extrapolar esa misma idea a funciones. Por ser los límites de sucesiones exclusivamente límites en infinito, comenzaré la explicación de éstos para funciones. En primer lugar tendré que diferenciar la tendencia que se produce en sucesiones, se hace de forma discreta, natural a natural, de la que tiene lugar en el límite de funciones que es de forma continua y que en estos casos también pueden tomar valores negativos. Para que esta diferencia se haga más latente propondré ejercicios muy similares a los que se hicieron con sucesiones pero en los que intervengan funciones.

Actividad 2: Dada la función $f(x) = 1/x$, determina, con ayuda de la calculadora, su valor en los puntos $12'3$, $2'4905 \cdot 10^3$, $4'67 \cdot 10^5$ y $9'2 \cdot 10^{10}$, ¿qué ocurre con la función? ¿Existen otros valores para los que el comportamiento sea parecido? ¿Qué repercusión tiene este comportamiento en la representación gráfica de la función?

A continuación definiré formalmente primero el concepto de límite infinito en el infinito ya que considero que les será más fácil entender. Para comprender estas nociones propondré actividades como:

Actividad 3: Tomando ahora la función $f(x) = 3x + 2$ determina que tendencia experimenta cuando los valores se hacen muy grandes. Analiza su comportamiento cuando la variable independiente toma valores muy pequeños. ¿Qué diferencias encuentras con la función de la actividad 2? ¿Crees que el tipo de expresión (polinómica, racional, irracional,…) influye en su comportamiento?

Para las tres restantes posibilidades de $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$, dejaré al alumnado que dialogue entre sí y que las definan formalmente tomando como ejemplo la dada, contribuyendo a la construcción de significados y conceptos.

- SESIÓN III

Esta sesión está destinada a conocer el límite finito de una función en el infinito y el límite infinito de una función en un punto. La dificultad de estas definiciones reside en que entran en juego cantidades infinitesimales, aunque más concretamente es la deficiente noción de complitud de $\mathbb{R}$ que suele tener el alumnado lo que propicia más problemas en estas de definiciones de límites. Además tienen que darse cuenta que el límite de una función en un punto puede variar si se hace por la derecha o por la izquierda.

Intuitiva y gráficamente es bastante sencillo entender este tipo de límites, por lo que realizaré actividades como la siguiente:

Actividad 4: Con la ayuda de una hoja de cálculo completa las tablas siguientes referentes a la función $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.

x	-10	-10^2	-10^4	-10^{10}	10	10^2	10^4	10^{10}
f(x)								
x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2'0001	2'001	2'01	2'1
f(x)								

Para trabajar la relación entre la expresión algebraica y la representación gráfica de los límites que se acaban de introducir propondré la siguiente actividad:

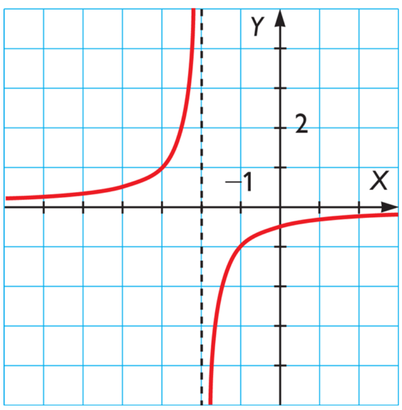
Actividad 5: Considerando la gráfica siguiente de una función $f(x)$ determina:

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x)$

c) $\lim_{x\to-2^-} f(x)$

d) $\lim_{x\to-2^+} f(x)$



Para practicar el cálculo de límites realizarán los alumnos y alumnas en la pizarra las siguientes actividades con mi ayuda y la del resto de compañeros/as:

Actividad 6: Calcula los límites que a continuación se muestran:

a) $\lim_{x\to 3^+} \frac{(x-5)(x+1)}{x-3}$

b) $\lim_{x\to 3^-} \frac{(x-5)(x+1)}{x-3}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3+2^{1/x}}$

d) $\lim_{x\to -\infty} 2 + e^{x^3}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \log(\frac{1}{x})$

f) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}^+} tg(x)$

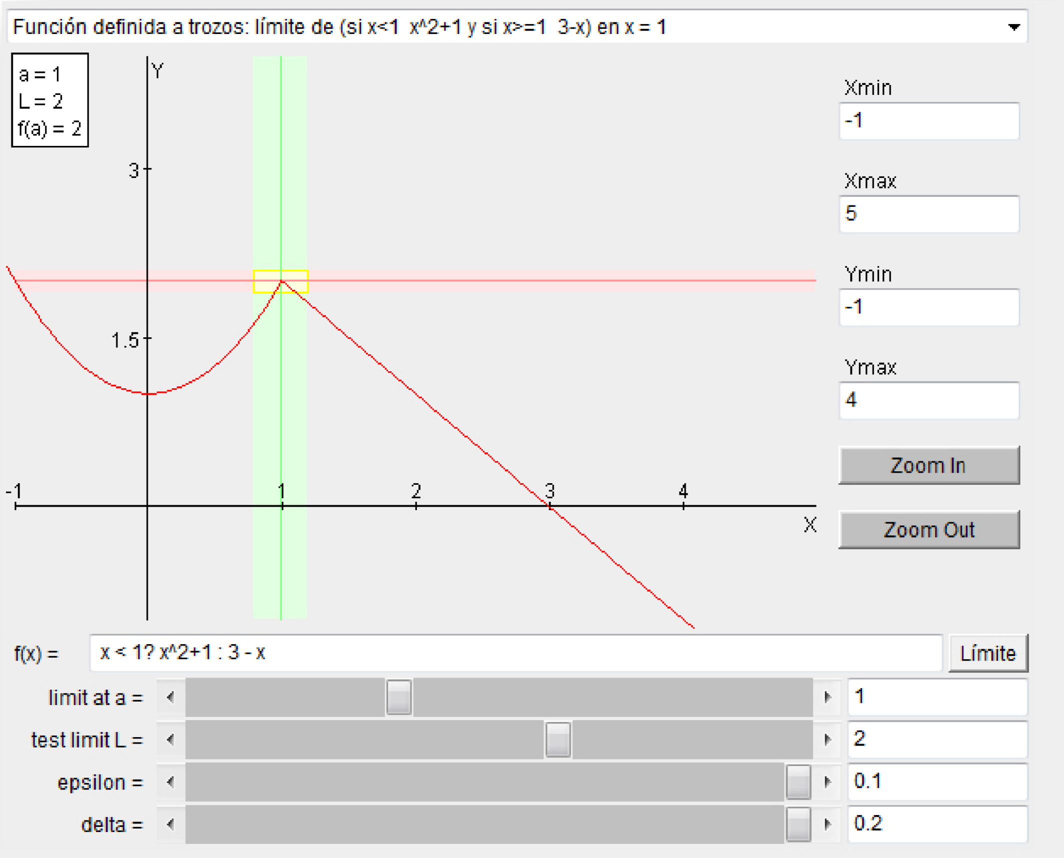
Con el estudio de este tipo de límites ya se puede hablar de asíntotas verticales y horizontales, que son las únicas que se van a tratar en esta Unidad. Como las asíntotas sirven para modelizar procesos de estabilidad, propondría:

Actividad 7: Dibuja una gráfica aproximada de la evolución de la población mundial de hoy en adelante. Sabiendo que se ha estimado que la Tierra podría albergar un máximo de 13 mil millones de personas, ¿mantienes tu gráfica o quieres modificarla?

- SESIÓN IV

En esta sesión voy a centrarme en el límite finito de una función en un punto. Posiblemente sea el concepto más difícil de entender por su caracterización $\varepsilon - \delta$. Al llegar a este punto ya conocen los límites laterales, vistos la sesión anterior, aunque sólo lo han visto para el caso de límites infinitos en un punto. Traduciré los límites laterales también a límites finitos y definiré la existencia de límite en un punto como la existencia de los dos límites laterales y que además sean iguales.

En esta Unidad tienen gran importancia los recursos TIC. Para llegar a comprender mejor la definición formal de límite en un punto utilizaré una herramienta disponible en http://www.aulademate.com/contentid-26.html en la que se puede representa cualquier función y sobre ella se dispone un rectángulo en forma de entorno, el cual se puede agrandar o disminuir con las barras deslizadoras emulando la variación de ε o δ.



A continuación propondré ejercicios tipo de cálculo de límites de funciones en un punto para conseguir destreza y habilidad:

Actividad 8: Resuelve los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{3^{-x}-3^{x}}{3^{-x}-3^{x}}$

b) $\lim_{x\to 2} \frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}+3}$

c) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^7+x^5+x^3}{\left(\frac{1}{2}\right)^{x}}$

d) $\lim_{x\to 0} \frac{2}{3+4^{\frac{1}{x}}}$

e) $\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{x-1}+2\right)^{x^2-3x+1}$

f) $\lim_{x\to -\infty} \frac{e^{x/2}}{4}$

➢ SESIÓN V

Esta sesión y la siguiente las voy a dedicar a realizar el estudio de indeterminaciones. Quiero hacerles ver que las indeterminaciones no son casos en los que no exista el límite, sino que son situaciones en las que hay que seguir una determinada estrategia para poder resolverlas. Comenzaré por el tipo de indeterminaciones que considero más sencillas de calcular, el límite en el infinito del cociente de dos polinómicas, en las que simplemente hay que atender al grado de los polinomios y al coeficiente líder de los polinomios. Resolveré ejercicios en la pizarra del estilo:

a) $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+2}{x^3+2}$ b) $\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x^7+5x^4}{x^7+2x^5-8x}$ c) $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^5-5x^2-1}{2x^9-7x^7+4x^2+x-3}$

Continuando con las indeterminaciones en las que intervienen polinomios trataré a continuación las originadas por límites en un punto, en los que la estrategia es factorizarlos y simplificar:

a) $\lim_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}$ b) $\lim_{x\to0}\frac{(1+x)^2-1}{x}$ c) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+3x+2}{x^2+4x+3}$

- SESIÓN VI

Siguiendo el estudio de indeterminaciones, en esta sesión acabaré de ver los procedimientos a seguir dependiendo del tipo de expresión algebraica que nos encontremos en la actividad. En particular, para comenzar esta sesión explicaré la resolución de indeterminaciones en las que intervienen raíces de polinomios:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{7x-1}{\sqrt{5x^2+4x-2}}$
b) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2+x}$
c) $\lim_{x\to3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$
d) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{18x^2+1}\frac{1}{\sqrt{32x^2-3}}$
e) $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{4x^4+x^2+1}}{x^2+1}$
f) $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+3x}-x$

Cabe destacar que para la resolución de estas indeterminaciones el alumnado debe manejar con fluidez las propiedades de los radicales, fundamentalmente la introducción en el radicando de la incógnita con el exponente deseado y el uso del conjugado de una raíz.

El último tipo de indeterminación que se tratará en este curso es 1^∞. Tras explicar con un ejemplo el modo de actuar cuando nos encontremos ante una indeterminación de este tipo, propondré actividades para realizar en la pizarra con la colaboración de toda la clase:

a) $\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{x} + 1\right)^{x}$

b) $\lim_{x \to 1} \left(\frac{x^2+x+1}{2+x}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

c) $\lim_{x \to 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$

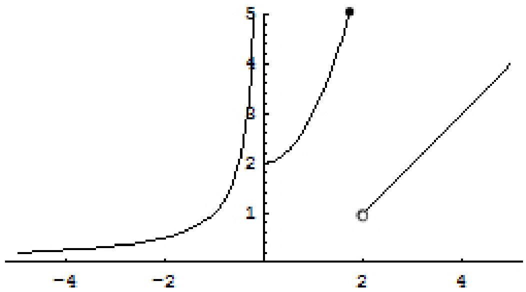
d) $\lim_{x \to -1^-} (1 + \log(x + 2))^{\frac{-2}{x+1}}$

- SESIÓN VII

Los límites puntuales juegan ahora el papel fundamental de la continuidad. Si han comprendido la idea de límite puntual es muy fácil llegar a la de continuidad en un punto. Lo dificultoso puede ser traducir lo que ellos entendían por función continua, aquella que se podía dibujar sin levantar el lápiz del papel, a lo que por definición es una función continua en un punto. Para introducir al alumnado en la dinámica de las funciones continuas y discontinuas propondré la actividad:

<u>Actividad 9</u>: Dada la siguiente función y su gráfica responde razonadamente a las cuestiones planteadas:

$$f(x)=\begin{cases} -1/x & \text{si } x<0 \\ x^2 & \text{si } 0\leq x \leq 2 \\ x-2 & \text{si } x>2 \end{cases}$$



a) Completa, con la ayuda de la calculadora, las siguientes tablas:

x	**-0'1**	**-0'01**	**-0'001**	**-0'0001**	**0'0001**	**0'001**	**0'01**	**0'1**
f(x)								
x	**0'9**	**0'99**	**0'999**	**0'9999**	**1'0001**	**1'001**	**1'01**	**1'1**
f(x)								

b) ¿Observas alguna relación entre las tablas, la gráfica y la expresión de la función?

c) Explica las semejanzas y diferencias que encuentras en los resultados de las dos tablas.

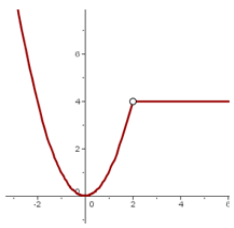
d) ¿Crees que la tendencia que se da en la segunda tabla se conserva en otros puntos? ¿Cuáles?

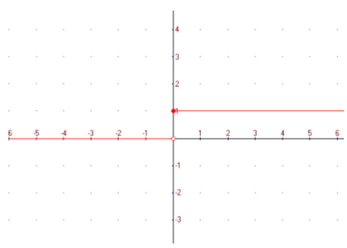
e) Apoyándote en la gráfica, encuentra otro punto en el que ocurra algo similar a la primera tabla.

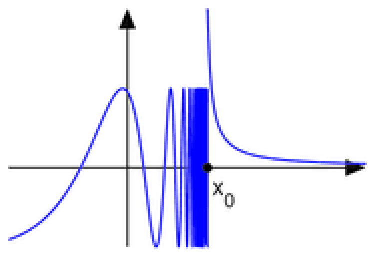
Posteriormente definiré la continuidad y discontinuidad de una función relacionándolos con el tipo de límite que los propicia. Para practicar estos contenidos propondré la actividad:

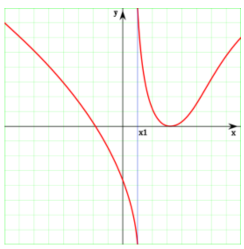
Actividad 10: Relaciona la continuidad y cada tipo de discontinuidad con su gráfica correspondiente y con la :

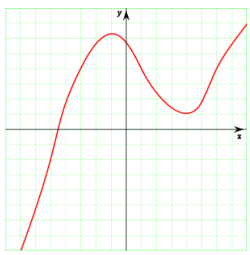
a) Discontinuidad esencial
b) Discontinuidad inevitable de salto finito
c) Continua en todo el dominio
d) Discontinuidad evitable
e) Discontinuidad inevitable de salto infinito











a) $f(x) = x^2 - e^x$

b) $f(x) = \begin{cases} \sin x\,, & x < \pi \\ \log x\,, & x \geq \pi \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ 1, & x = 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-2}$

e) $f(x) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$

- SESIÓN VIII

Esta última sesión está orientada a repasar los contenidos más importantes vistos a lo largo de la Unidad, resolver dudas, realizar ejercicios, etc.

Para finalizar propondré actividades de consolidación como las siguientes:

Actividad 11: Resuelve las siguientes cuestiones:

a) Sabemos que cierta función tiene límite en un punto x=a, ¿es necesario que dicha función esté definida en x=a? ¿Y si es continua? Indaga una razón.

b) Escribe una función que tenga límite 1 en x=0 y que tome valores menores que 1. Haz una representación gráfica para explicar tu respuesta.

c) Una función definida en todo $\mathbb{R}$ toma solamente valores 1 y -1. ¿Puede tener límite en todos sus puntos? Si es así, pon un ejemplo y represéntala.

Actividad 12: Determina la continuidad de las siguientes funciones. En el caso de que no sea continua indica el tipo de discontinuidad que presenta:

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < 2 \\ 2x - 1, & x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-25}{x-5}, & x \neq 5 \\ 0, & x = 5 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{|x|}$

Actividad 13: Una piscina de un volumen total de 2’3 decámetros cúbicos, tiene un sistema de llenado de tal forma que el volumen de agua en litros viene dado por $f(t) = \frac{2000t}{t+1}$. ¿Habrá algún momento en que se desborde el agua de la piscina? ¿Por qué?

Actividad 14: El sistema de cobro de una compañía de telefonía tiene un establecimiento de llamada de 0’30 € y 0’10 € por minuto hablado hasta 15 minutos. Pasado este tiempo se le añade un recargo de 0’15€ pero la tarifa baja a 0’08 € por minuto. Expresa gráfica y algebraicamente la función que modela este cobro. Determina la continuidad de la función cobro y, en caso de que exista, el tipo de indeterminación que muestra.

8. EVALUACIÓN

La evaluación es un proceso integral, en el que se contemplan diversas dimensiones o vertientes: análisis del proceso de aprendizaje de los alumnos y alumnas, análisis del proceso de enseñanza y de la práctica docente. La evaluación del proceso de aprendizaje tiene que servirme para conocer el grado de adquisición de los objetivos planteados. Las distintas clases de evaluación que voy a utilizar son:

Inicial: me permitirá conocer el punto de partida en el que se encuentran mis alumnos/as y adaptar la Unidad si fuera necesario. La planteo en la primera sesión de la Unida. Un ejemplo de actividad inicial para este tipo de evaluación es realizar una tormenta de ideas en clase.

Continua: la evaluación ha de adoptar un carácter procesual y continuo, que le permita estar presente, de forma sistemática, en el desarrollo de todo tipo de actividades y no sólo en momentos puntuales y aislados. Se podrán valorar así los resultados obtenidos y los procesos de enseñanza-aprendizaje desarrollados, de acuerdo con la definición que, como desarrollo de capacidades, se ha hecho de los objetivos educativos. Se trata de una evaluación formativa y sumativa a la vez. En ella se puede proponer al alumno actividades de dificultad creciente. Una vez analizados los resultados, determino dos niveles según la dificultad de las actividades resueltas por cada alumno/a.

Final: la realizaré al término del proceso de enseñanza-aprendizaje, a partir de los datos obtenidos en el proceso de evaluación continua, para determinar o valorar el grado de consecución obtenido por el alumno sobre los objetivos y contenidos propuestos con referencia a los criterios de evaluación.

8.1. Criterios de evaluación

Los criterios de evaluación que determina el marco legislativo para la materia de Matemáticas I son:

1. Utilizar correctamente los números reales y sus operaciones para presentar e intercambiar información; estimar los efectos de las operaciones sobre los números

reales y sus representaciones gráfica y algebraica y resolver problemas extraídos de la realidad social y de la naturaleza que impliquen la utilización de ecuaciones e inecuaciones, así como interpretar los resultados obtenidos.

2. Transferir una situación real a una esquematización geométrica y aplicar las diferentes técnicas de resolución de triángulos para enunciar conclusiones, valorándolas e interpretándolas en su contexto real; así como, identificar las formas correspondientes a algunos lugares geométricos del plano, analizar sus propiedades métricas y construirlos a partir de ellas.

3. Transcribir situaciones de la geometría a un lenguaje vectorial en dos dimensiones y utilizar las operaciones con vectores para resolver los problemas extraídos de ellas, dando una interpretación de las soluciones.

4. Identificar las funciones habituales dadas a través de enunciados, tablas o gráficas, y aplicar sus características al estudio de fenómenos naturales y tecnológicos.

5. Utilizar los conceptos, propiedades y procedimientos adecuados para encontrar e interpretar características destacadas de funciones expresadas analítica y gráficamente.

6. Asignar probabilidades a sucesos correspondientes a fenómenos aleatorios simples y compuestos y utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal.

7. Realizar investigaciones en las que haya que organizar y codificar informaciones, seleccionar, comparar y valorar estrategias para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, eligiendo las herramientas matemáticas adecuadas en cada caso.

Los criterios de evaluación que yo he determinado para esta Unidad didáctica son los siguientes:

- Comprende y expresa la idea intutiva de límite de una sucesión.
- Calcula el límite de sucesiones sencillas.
- Expresa de forma clara una idea intutiva de límite.

- Calcula límites en infinito de funciones sencillas.
- Utiliza límites laterales para calcular el límite de una función en un punto.
- Calcula límites de sucesiones en las que aparece la indeterminación 1^{∞}.
- Distingue fenómenos en los que intervenga el concepto de límite.
- Relaciona mediante la expresión algebraica y gráficamente límites y asíntotas.
- Conoce de manera intuitiva el concepto de función continua en un punto.
- Identificar los tipos de discontinuidades analítica y gráficamente.
- Justifica la continuidad o discontinuidad de una función en un punto mediante los límites laterales.
- Determina el dominio de continuidad de una función.
- Reconoce funciones que modelizan diversos fenómenos relacionados con límites y continuidad.

Cada tipo de evaluación lleva implícita su temporalización. Así la evaluación inicial está pensada realizarla al inicio de la Unidad didáctica, como ya se ha mencionado, la continua se plantea a lo largo de todo el proceso, lo que me permitirá reconducirlo en el caso de que se encuentren dificultades, introduciendo las oportunas medidas correctoras, y la final una vez finalizada la Unidad.

8.2. Instrumentos de evaluación

- El cuaderno de clase del alumno/a es un instrumento de recogida de información muy útil para la evaluación continua, pues refleja el trabajo diario en casa y en clase que realiza el alumno/a.
- Tendré en cuenta el interés que muestre el alumno/a por la asignatura y su participación en clase.

- Relación de ejercicios y problemas obligatorios que deberá realizar el alumnado. Se valorará positivamente si se hacen y negativamente en caso contrario.

- Realizaré frecuentemente preguntas orales cortas en las que el alumno/a debe aportar una información muy concreta y específica que podrá resumirse en una frase, un dato, una palabra,…

- Al final de la unidad realizaré una prueba escrita con ejercicios y problemas representativos de los contenidos tratados en la Unidad didáctica. La valoración de un ejercicio se realizará, considerando especialmente el planteamiento razonado del problema y la ejecución del mismo. La mera descripción del planteamiento sin que se lleve a cabo de forma efectiva no puede ser suficiente para obtener la valoración positiva global del mismo. De igual modo, en los ejercicios en los que se pida una deducción razonada, la simple aplicación de una fórmula no será suficiente para obtener la valoración positiva global de éstos.

  En las pruebas escritas se exigirá una redacción clara, detallada y razonada de todas las cuestiones y ejercicios que en las mismas se planteen. La presentación clara y ordenada del ejercicio se valorará positivamente.

- Todos los alumnos que hayan obtenido calificación negativa en cada evaluación realizarán una nueva prueba escrita para darles la oportunidad de obtener calificación positiva en la misma, una vez transcurrido un periodo de tiempo razonable desde la celebración de la sesión de evaluación y se haya repasado la materia.

En la nota final de evaluación tendrá un peso de un 75% las pruebas escritas, un 15% vendrá dado por los procedimientos (presentación de las actividades, buena expresión,…) y el 10% restante lo completa la actitud e interés que se muestre en clase.

9. ATENCIÓN A LA DIVERSIDAD

Dentro de un aula coexisten diferentes tipos de alumnos y alumnas, con niveles socio-culturales diferentes, razas diferentes, creencias diferentes, ritmos de aprendizaje diferentes,… La atención a la diversidad constituye un mecanismo de ajuste de la oferta pedagógica a las capacidades, intereses y necesidades de los adolescentes y actúa como elemento corrector de posibles desigualdades en las condiciones de acceso a la cultura básica.

La expresión “atención a la diversidad” no hace referencia a un determinado tipo de alumnos y alumnas (alumnos y alumnas problemáticos, con deficiencias físicas, psíquicas o sensoriales, etc.), sino a todos los escolarizados en cada clase del centro educativo. Esto supone que la respuesta a la diversidad de los alumnos y las alumnas debe garantizarse desde el mismo proceso de planificación educativa. De ahí que la atención a la diversidad se articule en todos los niveles.

El aspecto en el que más clara se aprecia la atención a la diversidad es el modo en que se plantean y llevan a cabo las sesiones, y los medios a través de los cuales se proyecta la metodología, esto es, las actividades, ejemplos y contextos utilizados en clase. Por este motivo considero de suprema importancia tener en cuenta las siguientes premisas:

1. Al principio de todas las unidades didácticas se presentan una serie de actividades iniciales para conocer el punto de partida del alumno y la diversidad de sus conocimientos previos. A los alumnos en los que se detecte una laguna en sus conocimientos se les debe proponer una enseñanza compensatoria, en la que debe ocupar un lugar importante el trabajo en situaciones concretas.

2. Para poder atender a la diversidad de aptitudes y de ritmos de aprendizaje y así poder conseguir, por un lado, la comprensión y consolidación de los conceptos y por otro, la profundización en ellos, éstos se deben acompañar de actividades de desarrollo con una estructura interna de pasos sucesivos muy claros.

3. Deben plantearse actividades con distinto grado de estructuración para atender a la diversidad de niveles y ritmos de aprendizaje, por lo que se realizarán

actividades de refuerzo para atender a aquellos alumnos/as que no sigan el ritmo general de sus compañeros.

4. En la misma dirección que las actividades de refuerzo, planteo actividades de ampliación orientadas al alumnado que considere capaz de asimilar conceptos o procedimientos más avanzados de los que están programados para esta Unidad. A la vez estas actividades las podrán realizar todos aquellos que estén interesados en ellas.

5. Para facilitar la motivación de nuestros alumnos conviene tener en cuenta la diversidad de gustos e intereses que presentan. Para abordar este aspecto se deben proponer actividades que se correspondan con contextos diversos. Asimismo, deben abordarse distintos tipos de actividades: manipulativas, procedimentales, conceptuales, de resolución directa o actividades abiertas para favorecer la libertad de elección del alumnado.

10. EDUCACIÓN EN VALORES

La educación en valores se entiende como un ámbito más amplio que la educación moral, al menos según la acepción más usual de ésta. Se trata de valores no solo morales en sentido restringido, sino también cívicos. Se trata de educar para las opciones morales, para un personal estilo de vida ético, pero educar también para los hábitos democráticos y las reglas y condiciones mínimas de convivencia pacífica, sin las cuales no hay vida humana digna. Es educar en determinadas condiciones indispensables para esa convivencia, pero también para la tolerancia en una sociedad pluralista.

Desde las matemáticas se puede colaborar a esta educación en valores mediante el enunciado de las diferentes actividades planteadas en el aula. En lo que a esta Unidad respecta se pueden trabajar:

- Educación ambiental, mediante el estudio de dinámica de poblaciones de animales, bacterias,… concretamente el de la estabilidad de poblaciones.

- Educación para salud, con comportamiento que sigue la medición de un termómetro cuando se está tomando la temperatura de un enfermo con fiebre.

- Educación para el consumidor, estudiando la estabilidad del precio de un determinado producto.

11. BIBLIOGRAFÍA

[1] G. Ifrah, *Las cifras: historia de una gran invención*, Alianza Editorial, 1987.

[2] K. Ribnikov, *Historia de las Matemáticas*, Mir, 1991.

[3] Miguel Antonio, Lorenzo González, José Lorenzo, Antonio Molano, José del Río, Daniel Santos, Mariano de Vicente, *Matemáticas I*, Santillana, 2008.

[4] Esther Bescós y Zoila Pena, *1º Bachillerato Matemáticas (Modalidad Ciencias y Tecnología). Proyecto Tesela*, Oxford.

[5] Colera Jiménez, José; García Pérez, Rosario; Oliveira González, María José; Santaella Fernández, Elizabeth, *Matemáticas I*, Grupo ANAYA.

[6] The MacTutor History of Mathematics archive, *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/.*

[7] *http://www.vitutor.com*